

CHƯƠNG 1: XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I/Phép thử ngẫu nhiên và biến cố ngẫu nhiên:

Phép thử ngẫu nhiên: là việc thực hiện 1 thí nghiệm/thực nghiệm, hoặc việc quan sát 1 hiện tượng tự nhiên trong **1 số điều kiện nhất định**. Nó có thể dẫn đến kết cục này hoặc kết cục khác (có ít nhất 2 kết cục). Và việc làm này có thể thực hiện bao nhiêu lần cũng được.

Vd1: Tung 1 đồng tiền sấp ngửa (cân đối, đồng chất), xét xem mặt nào xuất hiện (mặt nào được lật lên).

Đây là 1 phép thử ngẫu nhiên?

Vd2: Ném hòn đá xuống nước, xét xem hòn đá chìm hay nổi.

Đây là 1 phép thử ngẫu nhiên?

Vd3: Hai vợ chồng cãi nhau. Xét xem họ có ly dị nhau không.

Đây là 1 phép thử ngẫu nhiên?

Từ đây trở đi khi ta nói *phép thử* thì có nghĩa là *phép thử NN*.

Các kết cục của phép thử NN gọi là các biến cố.

Có 3 loại biến cố: bc ngẫu nhiên, bc chắc chắn, bc không thể có

BcNN: là bc có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu A, B, C,...

Bc cc: là bc luôn xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu Ω

Bc không thể có: là bc không thể xảy ra khi thực hiện phép thử. Ký hiệu Φ

Ta chỉ nghiên cứu bcNN mà thôi.

Vd1: Tung 1 con xúc xắc cân đối, đồng chất (các mặt được đánh số nút từ 1->6), xét xem mặt nào xuất hiện.

Đặt: A= bc xuất hiện mặt có số nút ≤ 6

B=bc xuất hiện mặt có số nút > 7

C=bc xuất hiện mặt có số nút là số chẵn

Biến cố nào là biến cố chắc chắn, bc ktc, bcNN?

5

- VD2: Xét 1 gia đình có 2 con.
- Đặt: A = bc gia đình có 1 trai, 1 gái.
B = bc gia đình có 2 con.
C = bc gia đình có 3 con.
- Bc nào là bccc, bcktc, bcNN?

6

- Vd3: hộp có 8 bi: 6 bi Trắng, 2 bi Xanh. Lấy ra 3 bi xem màu.
- Đặt A= bc lấy được 3 bi T
B= bc lấy được 3 bi X
C= bc lấy được 3 bi
- Bc nào là bccc, bcNN, bcktc?

7

II) QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ

- Thông thường sinh viên coi nhẹ phần này, cho rằng “chuyện nhỏ như con thỏ”, “không có gì mà âm ỉ”. Phải tính xác suất cái này, xác suất cái kia thì mới “xứng danh đại anh hùng”! Học xác suất mà “không thấy xác suất đâu”, học các quan hệ này thì chán chết!
- Tuy nhiên khi gặp bài toán xác suất đòi hỏi phải biết cách *tự phân tích, tự đặt* các biến cố, diễn tả câu hỏi đề cho theo các biến cố *đã đặt* thì lại không làm được, hoặc diễn tả không đúng!
- Hoặc đọc bài giảng trong sách thì lại không hiểu tại sao người ta biến đổi được như vậy!
- Nếu đã hiểu rõ về các quan hệ giữa các biến cố thì các vấn đề trên *đúng là* “chuyện nhỏ như con thỏ”!
- Vậy bạn thích “con thỏ” nào !?

8

II/QUAN HỆ GIỮA CÁC BIẾN CỐ:

- 1)Kéo theo: bc A gọi là kéo theo bc B **nếu** bc A xảy ra thì dẫn đến bc B xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu: $A \subset B$ hay $A \Rightarrow B$
- Vdl: Một sv mua 1 tờ vé số.
- Đặt $A = bc$ sv này trúng số độc đắc
 $B = bc$ sv này trúng số
 $A \subset B$ hay $B \subset A$?
- Dùng biểu đồ Venn minh họa?

9

1)KÉO THEO

- VD2: xét 1 gia đình có 2 con.
- Đặt $A = bc$ gia đình có con trai.
 $B = bc$ gia đình có 2 con trai.
- $A \subset B$ hay $B \subset A$?
- VD3: Xét 1 học sinh đi thi đại học khối A.
- Đặt $A = bc$ học sinh này thi đậu
 $B = bc$ học sinh này có điểm Toán là 10
- $A \subset B$ hay $B \subset A$?

10

2) TƯƠNG ĐƯƠNG (BẰNG NHAU):

- bc A gọi là bằng bc B **nếu** bc A xảy ra thì bc B xảy ra, và ngược lại bc B xảy ra thì bc A xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu $A = B$ hay $A \Leftrightarrow B$
- Vậy $A = B$ **nếu** $A \subset B$ và $B \subset A$
- Vdl: Tung 1 con xúc xắc.
- Đặt $A = bc$ con xx xh mặt có số nút chẵn
 $B = bc$ con xx xh mặt có số nút là: 2,4,6
 $C = bc$ con xx xh mặt có số nút là: 2,4
- $A = B$? $A = C$?

11

2)TƯƠNG ĐƯƠNG

- Vd2: hộp có 8 bi: 6T, 2 X. lấy 2 bi ra xem màu.
- Đặt $A = bc$ lấy được 1 bi T
 $B = bc$ lấy được 1 bi X
 $C = bc$ lấy được 3 bi T
 $D = bc$ lấy được bi T
- $A = B$? $A = C$? $A = D$?

12

2) TƯƠNG ĐƯƠNG

- Vd3: hộp có 8 bi: 4T, 2X, 2Đỏ. lấy 2 bi ra xem màu.
- Đặt A= bc lấy được 1 bi T
B= bc lấy được 1 bi X
A=B?

13

3) TỔNG (HỢP):

- bc C gọi là tổng của 2 bc A và B, ký hiệu $C=A+B$ hay $C=A \cup B$.
- C xảy ra **nếu** có ít nhất 1 trong 2 bc A hoặc B xảy ra, khi thực hiện phép thử.
- Câu hỏi: Vậy A và B *cùng xảy ra* khi thực hiện phép thử được hông?

14

3) HỢP

- Vd1: tung 1 con xúc xắc. Xét xem mặt nào xuất hiện.
- Đặt C= bc con xx xh mặt có số nút chẵn.
B= bc con xx xh mặt có số nút là 2
A= bc con xx xh mặt có số nút là 4,6
D= bc con xxxh mặt có số nút là 2,4
- $C=A+B?$ $C=A+D?$

15

3) HỢP

- Vd2: Lớp có 50 sv, trong đó có: 20 sv giỏi AV, 15 sv giỏi PV, 7 sv giỏi cả 2 ngoại ngữ trên.
- Chọn NN 1 sv trong lớp.
- Đặt A=bc sv này giỏi Anh
B=bc sv này giỏi Pháp
C=bc sv này giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ.
D=bc sv này giỏi cả 2 ngoại ngữ
 $C=A+B?$ $D=A+B?$
- Dùng biểu đồ Venn minh họa?

16

- Tổng quát: $C = A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

C xảy ra **nếu** có ít nhất 1 bc A_i xảy ra, khi thực hiện phép thử

- Vd: Kiểm tra chất lượng n sản phẩm.

Đặt $A_i = bc$ sp thứ i xấu.

$C = bc$ có ít nhất 1 sp xấu

- $C = A_1 + A_2 + \dots + A_n$

- **Vậy “hiểu” dấu + giữa các biến cố nghĩa là gì?**

17

4) TÍCH (GIAO):

- bc C gọi là tích của 2 bc A và B, ký hiệu $C = A.B$ hay $C = A \cap B$

- C xảy ra **nếu** cả 2 bc A và B cùng xảy ra, khi thực hiện phép thử.

18

4) TÍCH

- Vd1: tung 1 con xx. Xét xem mặt nào xh.

- Đặt $A = bc$ con xx xh mặt có số nút là 2,4

$B = bc$ con xx xh mặt có số nút là 2,6

$C = bc$ con xx xh mặt có số nút là 2

$D = bc$ con xx xh mặt có số nút là 2,4,6

- $C = A.B?$ $C = A.D?$

19

4) TÍCH

- Vd2: Chọn NN 1 lá bài từ bộ bài tây 52 lá.

- Đặt $A = bc$ có được lá già.

$B = bc$ có được lá cơ

$C = bc$ có được lá già cơ.

- $C = A.B?$

20

4) TÍCH

- Vd3: Lớp có 50 sv, trong đó có: 20 sv giỏi AV, 15 sv giỏi PV, 7 sv giỏi cả 2 ngoại ngữ trên.
- Chọn NN 1 sv trong lớp.
- Đặt $A=bc$ sv này giỏi Anh
 $B=bc$ sv này giỏi Pháp
 $C=bc$ sv này giỏi cả 2 ngoại ngữ
 $C=A.B?$

21

4) TÍCH

- Tổng quát: $C = A_1.A_2...A_n$.
 C xảy ra **nếu** tất cả các A_i cùng xảy ra, khi thực hiện phép thử
- Vd: Kiểm tra chất lượng n sp.
- Đặt $A_i=bc$ sp thứ i tốt
- $C=bc$ tất cả các sp đều tốt
- $C = A_1.A_2...A_n$
- Vậy “hiệu” dấu . giữa các biến cố nghĩa là gì?

22

5) XUNG KHẮC:

- A và B gọi là xung khắc **nếu** A và B không đồng thời xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu $A.B=\Phi$
- Với 2 biến cố A, B thì ta có 4 trường hợp:
 A xr, B xr
 A xr, B kxr
 A kxr, B xr
 A kxr, B kxr
 Vậy trường hợp nào ứng với *xung khắc*?

23

5) XUNG KHẮC

- Vd 1: Tung 1 con xúc xắc.
 đặt $A=bc$ được mặt có số nút chẵn.
 $B=bc$ được mặt có số nút là 2.
 $C=bc$ được mặt có số nút lẻ.
 $D=bc$ được mặt có số nút 1,3
- Xác định $A.B?$ $A.C?$
- A, B xung khắc? A, C xk? A, D xk?

24

5)XUNG KHẮC

- Ví dụ 2: Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN 1 viên phấn ra xem màu.
- Đặt $T=bc$ được viên phấn T.
Đ=bc được viên phấn Đ.
A=bc lấy được 1 viên phấn
T,Đ xung khắc? T,A xk?

25

5)XUNG KHẮC

- Ví dụ 3: Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN 2 viên phấn ra xem màu.
- Đặt $A=bc$ được 1 viên phấn T.
B=bc được 1 viên phấn Đ.
C=bc được 2 viên phấn T
D=bc lấy được viên phấn T
A,B xung khắc? A,C xk? B,D xk?

26

5)Xung khắc

- VD4: Lớp có 50 sv, trong đó có 7 sv tóc highlight 7 màu (đỏ, xanh, vàng, lục, lam, chàm, đen), 15 sv tóc highlight màu vàng, các sv còn lại tóc màu đen. Chọn NN 1 sv trong lớp.
- A= bc sv này có tóc màu đen
- B= bc sv này có tóc màu vàng
- A, B xung khắc?
- VD5: giả thiết giống VD4. Lấy NN 2 sinh viên.
- A= bc 2 sv này có tóc màu đen
- B= bc 2 sv này có tóc màu vàng
- A, B xung khắc?
- VD6: giống VD5. Nhưng lớp chỉ có 1 sv có tóc 7 màu.

27

5)Xung khắc

- VD7: Bộ bài tây có 52 lá. Lấy ngẫu nhiên ra 1 lá.
- A=bc lấy được lá ách
- B=bc lấy được lá cơ
- A, B xung khắc?
- VD8: Bộ bài tây có 52 lá. Lấy ngẫu nhiên ra 2 lá.
- A=bc lấy được 2 lá ách
- B=bc lấy được 2 lá cơ
- A, B xung khắc?

28

6) ĐỐI LẬP:

- A, B gọi là đối lập **nếu** A và B không đồng thời xảy ra, và 1 trong 2 bc A hoặc B phải xảy ra, khi thực hiện phép thử. Ký hiệu: biến cố đối lập của A ký hiệu là \bar{A} hay A^*
 - Với 2 bc A, B ta có 4 trường hợp xảy ra:
 - A xr, Bxr
 - A xr, Bkxr
 - A kxr, Bxr
 - A kxr, Bkxr
- Vậy trường hợp nào ứng với *đối lập*?

29

6) ĐỐI LẬP

- Nhận xét sau đúng hay sai?
 A, A^* đối lập $\Leftrightarrow A + A^* = \Omega$
 và $A \cdot A^* = \phi$
- Nhận xét sau đúng hay sai?
 A, B xung khắc \rightarrow A, B đối lập.

30

6) ĐỐI LẬP

- Vdl: Tung 1 con xúc xắc.
 - A=bc xuất hiện mặt có số nút chẵn
 - B=bc xuất hiện mặt có số nút lẻ
 - C=bc xuất hiện mặt có số nút là : 2 hoặc 4
- A, B đối lập? B, C đối lập?

31

6) ĐỐI LẬP

- Ví dụ 2: Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN 1 viên phấn ra xem màu.
 - Đặt T=bc được viên phấn T.
 - Đ=bc được viên phấn Đ.
 - A=bc lấy được 1 viên phấn
- T, Đ đối lập? T, A đối lập?

32

6) ĐỐI LẬP

- Ví dụ 3: Hộp phần có: 9 viên phần trắng, 2 viên phần đỏ. Lấy NN 2 viên phần ra xem màu.
- Đặt $B=bc$ được 2 viên phần T.
 $C=bc$ được 2 viên phần Đ.
 $A=bc$ lấy được nhiều nhất 1 viên phần Đ
 $D=bc$ lấy được viên phần T
B,C đối lập? A,C đối lập? C,D đối lập?

33

6) ĐỐI LẬP

- Bài tập: xét 2 người (1 nam, 1 nữ) được cho là đang yêu nhau thắm thiết.
- $A=$ anh yêu em
 $B=$ em yêu anh
- Xét ý nghĩa của các quan hệ sau:
 $A=B$? $A \Rightarrow B$? $B \Rightarrow A$?
 $A+B$? $A.B$?
 A,B xk ? A,B đối lập ?

34

7) NHÓM BIẾN CỐ XUNG KHẮC TỪNG ĐÔI:

- Nhóm (họ) n biến cố A_1, A_2, \dots, A_n gọi là xung khắc từng đôi **nếu** hai biến cố bất kỳ trong nhóm là xung khắc nhau (nghĩa là $A_i.A_j = \Phi$, với mọi $i \neq j$)

35

7) NHÓM BIẾN CỐ XUNG KHẮC TỪNG ĐÔI:

- VD1: tung 1 con xúc xắc
- Đặt $A=$ bc con xx xh mặt có số nút là 1,2
 $B=$ bc con xx xh mặt có số nút là 4,6
 $C=$ bc con xx xh mặt có số nút là 5
 $D=$ bc con xx xh mặt có số nút là lẻ

A,B,C xkđ? A,B,D xkđ?

36

7)XKTĐ

- Vd2: Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ, 3 viên phấn Xanh. Lấy NN 1 viên phấn ra xem màu.
- T=bc được viên phấn T
Đ=bc được viên phấn Đ
X=bc được viên phấn X
- T,Đ,X xktd?

37

7)XKTĐ

- Vd3: Hộp phấn có: 9 viên phấn trắng, 2 viên phấn đỏ. Lấy NN 2 viên phấn ra xem màu.
- A=bc được 2 viên phấn T
B=bc được 2 viên phấn Đ
C=bc được 1 viên phấn T
- A,B,C xktd?

38

7)XKTĐ

- Ví dụ 4: Khối tứ diện có 4 mặt: 1 mặt sơn xanh, 1 mặt sơn trắng, 1 mặt sơn vàng, mặt còn lại $\frac{1}{2}$ sơn xanh và $\frac{1}{2}$ sơn vàng. Chọn ngẫu nhiên 1 mặt của tứ diện để xem màu.
- T=bc chọn được mặt có sơn T
X=bc chọn được mặt có sơn X
V=bc chọn được mặt có sơn V
- X,T,V xktd?

39

8)NHÓM BC ĐẦY ĐỦ:

- Nhóm n biến cố A_1, A_2, \dots, A_n gọi là đầy đủ nếu $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$
- Vd: tung một con xúc xắc
A=bc mặt 1,2 xh
B=bc mặt 3,4 xh
C=bc mặt 4,5,6 xh
D= bc mặt lẻ xh
A,B,C đđ? A,B,D đđ?

40

9)NHÓM BC ĐẦY ĐỦ VÀ XUNG KHẮC TỪNG ĐÔI:

- A_1, A_2, \dots, A_n gọi là nhóm bc đđ và xktđ **nếu** A_1, A_2, \dots, A_n là nhóm bc đđ và là nhóm bc xktđ
- Nhận xét: A, A^* là nhóm bc đầy đủ và xung khắc.

41

9)NHÓM BC ĐĐ VÀ XKTĐ

- Vd1: tung một con xúc xắc
A=bc mặt 1,2 xh
B=bc mặt 3,4 xh
C=bc mặt 4,5,6 xh
D=bc mặt 5,6 xh
E=bc mặt 5 xh
- A,B,C đđ và xktđ?
A,B,D đđ và xktđ?
A,B,E đđ và xktđ?

42

9)NHÓM BC ĐĐ VÀ XKTĐ

- Vd2: Hộp phần có: 9 viên phần trắng, 2 viên phần đỏ, 3 viên phần Xanh. Lấy NN 1 viên phần ra xem màu.
- T=bc được viên phần T
Đ=bc được viên phần Đ
X=bc được viên phần X
- T,Đ,X là nhóm bc đđ và xktđ?

43

9)NHÓM BC ĐĐ VÀ XKTĐ

- Vd3: Hộp phần có: 5 viên phần trắng, 3 viên phần Xanh. Lấy NN 2 viên phần ra xem màu.
- A=bc được 2 viên phần T
B=bc được 2 viên phần X
C=bc được 1 viên phần X.
- A,B,C là nhóm bc đđ và xktđ?

44

10) BIẾN CỐ SƠ CẤP:

- Bc sơ cấp là bc không thể phân chia (chẻ nhỏ) thành các biến cố khác.
- Tập hợp các bc sc tạo thành không gian các bc sc, hay kg mẫu. Ký hiệu Ω
- Bc sc còn được gọi là *kết cục tối giản*

45

10) BIẾN CỐ SƠ CẤP

- Vd1: Tung 1 con xúc xắc, xét xem mặt nào xuất hiện.
- $A_i = bc$ xuất hiện mặt có số nút là $i, i=1,6$ $B = bc$ xh mặt có số nút chẵn
- Ta có: $A_i, i=1,6$ là các bc sc
- B không là bcsc vì: $B = A_2 + A_4 + A_6$
 $\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_6\}$: kg mẫu

46

10) BC SƠ CẤP

- Vd2: xét gia đình có 2 con.
- Hãy xác định các bc sơ cấp và kg mẫu?

47

10) BC SƠ CẤP

- Giải vd2:
- $\Omega = \{TT, TG, GT, GG\}$
- Vd3: tung 1 đồng xu sắp ngửa (cân đối, đồng chất) 2 lần.
hãy xác định các bc sơ cấp và kg mẫu?

48

10) BC SƠ CẤP

- Giải VD3:
- $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$
- BT1: tung 1 đồng xu sắp ngửa 3 lần.
hãy xác định các besc và kg mẫu.
hổng giải!

49

10) BC SƠ CẤP

- BT2: hộp có 3 bi T, 2 bi X. lấy từ hộp ra 2 bi xem màu. Có 3 cách lấy:
cách 1: lấy NN 2 bi (lấy 1 lần, và lần đó lấy cả 2 bi)
cách 2: lấy lần lượt 2 bi (lấy 2 lần, mỗi lần 1 bi. Lần 1 lấy 1 bi ra xem màu rồi bỏ bi đó ra ngoài luôn, sau đó lấy 1 bi nữa lần 2)
cách 3: lấy có hoàn lại (nói hoàng gia) (hoặc bỏ lại-nói dân giả) 2 bi (lấy 2 lần, mỗi lần 1 bi. Lần 1 lấy 1 bi ra xem màu rồi bỏ bi đó trở lại hộp, sau đó lấy tiếp 1 bi nữa lần 2)
- Hãy xác định các besc, kg mẫu ứng với từng cách lấy.

50

HDBT2:

- C1: có $C(2,5) = 10$ besc
- C2: có $A(2,5) = 20$ besc
- C3: có $5^2 = 25$ besc
- Tự nghĩ cách ghi các besc này, rất thú vị!

51

III) TÍNH CHẤT

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ hay } (A^*)^* = A$$

$$A + \Omega = \Omega, \quad A \cdot \Omega = A$$

$$A + \phi = A, \quad A \cdot \phi = \phi$$

$$A + A = A, \quad A \cdot A = A$$

$$A + B = B + A, \quad A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C), \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B + C} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}, \quad \overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

52

III) TÍNH CHẤT

- Vdl: Kiểm tra chất lượng 4 sản phẩm.
- Đặt $A_k = bc$ sp thứ k tốt. Biểu diễn các bc sau theo A_k :
- $A = bc$ cả 4 sp đều tốt
 $B = bc$ có 3 sp tốt , $C = bc$ có ít nhất 1 sp xấu
 $D = bc$ có ít nhất 1 sp tốt , $E = bc$ có tối đa 1 sp xấu
- Giải: $A = A_1.A_2.A_3.A_4$
 $B = A_1^*.A_2.A_3.A_4 + A_1.A_2^*.A_3.A_4 + A_1.A_2.A_3^*.A_4 + A_1.A_2.A_3.A_4^*$
 $C = A^* , C = A_1^* + A_2^* + A_3^* + A_4^*$
 $D = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
 $E = A + B$

53

Tính chất:

- VD2: Có 2 sinh viên đi thi.
- $A = bc$ sv 1 thi đậu , $B = bc$ sv 2 thi đậu
- Hãy diễn tả các bc sau theo A, B :
- 1) cả hai sv đều thi đậu
- 2) không có ai thi đậu
- 3) có ít nhất một người thi đậu
- 4) chỉ có sv 1 thi đậu
- 5) sv 1 thi đậu
- 6) chỉ có một sv thi đậu
- 7) có nhiều nhất một người thi đậu
- 8) có sv thi đậu

54

Giải:

- 1) AB
- 2) A^*B^*
- 3) $A+B$
- 4) AB^*
- 5) A
- 6) $AB^* + A^*B$
- 7) $A^*B^* + A^*B + AB^* = (AB)^*$
- 8) $A+B$

55

Bài tập 1:

- Có 3 sv đi thi. A, B, C lần lượt là bc sv 1, 2, 3 thi đậu.
- Hãy diễn tả các bc sau theo A, B, C :
- 1) cả 3 đều thi đậu
- 2) không có ai thi đậu
- 3) có 2 người thi đậu
- 4) có 1 người thi đậu
- 5) có ít nhất 1 người thi đậu
- 6) có nhiều nhất 1 người thi đậu
- 7) có nhiều nhất 1 người thi rớt
- 8) có nhiều nhất 2 người thi rớt
- 9) chỉ có sv 1 thi đậu
- 10) chỉ có sv 1 thi rớt
- 11) sv 1 thi đậu

56

BT2:

- Hộp có 3 bi T, 2 bi X. Lấy lần lượt 2 bi từ hộp.
- $T_i = bc$ lấy được bi T ở lần lấy thứ $i, i=1,2$
- Biểu diễn các biến cố sau theo các T_i (xét cho 2 bi lấy ra):
- 1) lấy được 0 bi T
- 2) lấy được 1 bi T
- 3) lấy được 2 bi T
- 4) lấy được ít nhất 1 bi T
- 5) lấy được 2 bi cùng màu
- 6) lấy được nhiều nhất 1 bi T
- 7) lấy được bi T

57

Giải:

- 1) $T_1 * T_2^*$
- 2) $T_1 T_2^* + T_1^* T_2$
- 3) $T_1 T_2$
- 4) $T_1 + T_2$
- 5) $T_1 T_2 + T_1^* T_2^*$
- 6) $(T_1 T_2)^*$
- 7) $T_1 + T_2$

58

BT3:

- Hộp 1 có: 2 bi T, 3 bi X. Hộp 2 có: 2 bi T, 2 bi X. Lấy 1 bi từ hộp 1 bỏ sang hộp 2, rồi sau đó lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp 2 ra.
- $A = bc$ lấy được bi T từ hộp 1
- $B_i = bc$ lấy được i bi T từ hộp 2, $i=0,2$
- Biểu diễn các biến cố sau theo A, B_i (xét cho 3 bi lấy ra):
- 1) lấy được 3 bi T
- 2) lấy được 1 bi T
- 3) lấy được 2 bi T
- 4) lấy được 0 bi T
- 5) lấy được bi T

59

Giải:

- 1) AB_2
- 2) $AB_0 + A^* B_1$
- 3) $AB_1 + A^* B_2$
- 4) $A^* B_0$
- 5) $(A^* B_0)^* = A + B_0^* = A + B_1 + B_2$

60

- BT4: Hộp 1 có: 3 bi T, 2 bi X. Hộp 2 có: 3 bi T, 3 bi X.
- Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 bi.
- $A_i = bc$ lấy được i bi T từ hộp 1, $i=0,2$
- $B_i = bc$ lấy được i bi T từ hộp 2, $i=0,2$
- Hãy diễn tả các bc sau theo A_i, B_i (xét cho 4 bi lấy ra):
- 1) lấy được 4 bi X
- 2) lấy được 1 bi T
- 3) lấy được 2 bi T
- 4) lấy được 3 bi T
- 5) lấy được 4 bi T
- 6) lấy được ít nhất 1 bi T
- 7) lấy được nhiều nhất 2 bi T
- 8) lấy được 3 bi cùng màu
- 9) lấy được 4 bi cùng màu

61

Giải:

- 1) A_0B_0
- 2) $A_1B_0 + A_0B_1$
- 3) $A_0B_2 + A_2B_0 + A_1B_1$
- 4) $A_2B_1 + A_1B_2$
- 5) A_2B_2
- 6) $(A_0B_0)^*$
- 7) $= 1) + 2) + 3)$
- 8) $= 2) + 4)$
- 9) $= 1) + 5)$

62

Bình luận:

- Qua VD trên bạn có thấy được *lợi ích* của việc học Xác suất?!
- Một nàng trước khi “*trao thân gởi phận*” cho chàng luôn muốn chàng hứa là: *chàng yêu nàng và không yêu ai khác nữa!*
- Nếu nàng *không học XS* thì sẽ nói: “anh có hứa yêu em không” (lúc đó chàng mừng thầm trong bụng!)
- Nếu nàng *đã học XS* thì sẽ nói: “anh có hứa *chỉ* yêu *một mình* em không” (lúc đó chàng ôm bụng khóc thầm!)

63

IV/ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT:

- 1) Khái niệm: Xác suất của 1 bc là *1 con số* đặc trưng cho khả năng xảy ra của bc đó khi thực hiện phép thử.
- 2) Đn cổ điển: Thực hiện 1 phép thử NN. Giả sử có n kết cục tối giản (bc sơ cấp) xảy ra. Các kết cục này gọi là *đồng khả năng xảy ra* nếu không có kết cục nào ưu tiên hay xảy ra hơn kết cục nào (các kết cục này có khả năng xảy ra như nhau khi thực hiện phép thử).
- Kết cục mà khi nó xảy ra kéo theo bc A xảy ra gọi là kết cục thuận lợi cho bc A.

64

2) ĐN CỔ ĐIỂN

- $P(A)$ = số kết cục tối giản thuận lợi cho A / số kc tối giản đồng khả năng xảy ra
= số bc sc thuận lợi cho A / số bc sc đkn xảy ra
= $|A| / |\Omega|$
- Tính chất:
 $0 \leq P(A) \leq 1$ với A là bc bất kỳ.
 $P(\Phi) = |\Phi| / |\Omega| = 0 / |\Omega| = 0$, $P(\Omega) = |\Omega| / |\Omega| = 1$

65

2) ĐN CỔ ĐIỂN

- Vd1: Tung 1 con xúc xắc, xét xem mặt nào xh.
- $A_i = bc$ xh mặt có số nút i
 $B = bc$ xh mặt có số nút chẵn
 $C = bc$ xh mặt có số nút là: 2 hoặc 3
 $D = bc$ xh mặt có số nút lẻ
 $E = bc$ xh mặt có số nút là: 4 hoặc 6
- Ta có: A_i là bc sc, $\Omega = \{A1, A2, A3, A4, A5, A6\}$
- $P(A_i) = 1/6$
- $P(B) = 3/6 = 1/2$, $P(C) = 2/6 = 1/3$,
 $P(D) = 3/6 = 1/2$, $P(E) = 2/6 = 1/3$

66

2) ĐN CĐ (NHẬN XÉT VD1)

- **C, E xung khắc.** $P(C+E) = 4/6 = 2/3$
 $C+E = bc$ xh mặt có số nút là: 2, 3, 4, 6
vậy $4/6 = P(C+E) = P(C) + P(E) = 2/6 + 2/6$
- **B, D đối lập:** $P(B) + P(D) = 1/2 + 1/2 = 1$
 $\Rightarrow P(D) = 1 - P(B)$ hay $P(B^*) = 1 - P(B)$
- **B, C không xung khắc**
 $B.C = bc$ xh mặt có số nút là 2 , $P(B.C) = 1/6$
 $B+C = bc$ xh mặt có số nút là: 2, 3, 4, 6
 $P(B+C) = 4/6 = 2/3$
 $P(B+C) = P(B) + P(C) - P(B.C)$

67

2) ĐN CĐ

- Vd2: Hộp có 10 bi T, 4 bi X. Lấy ngẫu nhiên 2 bi (lấy một lần 2 bi) ra xem màu.
- Tính xs :
a) Lấy được 2 bi T
b) Lấy được 1 bi T, 1 bi X
c) Lấy được 2 bi X

68

2) ĐN CĐ

- **Giải VD2:** Phép thử: lấy ngẫu nhiên 2 bi từ 14 bi \Rightarrow Có $C(2,14)$ cách lấy $\Rightarrow |\Omega|=C(2,14)$
- a) $A=bc$ lấy được 2 bi T
Trong $C(2,14)$ cách lấy trên, ta thấy có $C(2,10)$ cách lấy được 2 bi T $\Rightarrow |A|=C(2,10)$
Vậy $P(A)=|A|/|\Omega|=C(2,10)/C(2,14)=45/91$
- b) $B=bc$ lấy được 1 bi T, 1 bi X
Trong $C(2,14)$ cách lấy trên, ta thấy có $C(1,10)*C(1,4)$ cách lấy được 1 bi T, 1 bi X
 $\Rightarrow |B|=C(1,10)*C(1,4)$
Vậy $P(B)=|B|/|\Omega|=C(1,10)*C(1,4)/C(2,14)$
 $= 10*4/91 = 40/91$

69

2) ĐN CĐ (GIẢI VD2 - TIẾP)

- c) $C=bc$ lấy được 2 bi X
 $P(C) = C(2,4) / C(2,14) = 6/91$

Cách khác:

C là biến cố đối lập với $A+B$ nên:

$$P(C) = 1 - P(A+B)$$

A, B là 2 biến cố xung khắc nên:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 45/91 + 40/91 = 85/91$$

$$\text{Vậy } P(C) = 1 - 85/91 = 6/91$$

70

2) ĐN CĐ

- **NX:** Để tính xs của bc A ta thực hiện 2 bước sau:
- B1) Từ giả thiết bài toán (việc thực hiện phép thử) ta tính số bc sc đkn xảy ra $\Rightarrow |\Omega|$
- B2) Trong các bc sc đkn xảy ra, ta tính số bc sc thuận lợi cho bc $A \Rightarrow |A|$
- Xác suất của bc A là: $P(A) = |A|/|\Omega|$

71

BT1: Theo bạn lập luận sau đúng hay sai, tại sao?

- Xét một gia đình có 2 con.
- Ta có 3 trường hợp:
- A =gia đình có 0 con trai (2 con gái)
 B =gia đình có 1 con trai
 C =gia đình 2 con trai
- Ta có 3 trường hợp xảy ra nên :
 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$

72

BT2: Theo bạn lập luận sau đúng hay sai, tại sao?

- Hộp có 3 bi T, 2 bi X. lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi xem màu.
- Ta có 3 trường hợp xảy ra:
- A=lấy được 0 bi T (2 bi X)
B=lấy được 1 bi T (1 bi X)
C=lấy được 2 bi T
- Ta có 3 trường hợp xảy ra nên:
 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$

73

3)ĐN XÁC SUẤT THEO THỐNG KÊ:

- $P(A) = |A| / |\Omega|$
- Hạn chế của định nghĩa cổ điển?

74

3)ĐNTK

- Ta thấy: Trong 1 số trường hợp thực tế, ta *không thể tính được* |A|

Ví dụ 1: Một lô hàng có N sản phẩm sữa hộp. Lấy ngẫu nhiên n ($n < N$) sp của lô hàng.

Đặt: A=bc có m ($m \leq n$) phé phẩm trong n sp lấy ra.

Muốn tính P(A) ta phải biết số sp xấu (M) của lô hàng là bao nhiêu:

$$P(A) = \frac{C(m, M) \cdot C(n-m, N-M)}{C(n, N)}$$

Để biết lô hàng có bao nhiêu phé phẩm ta phải kiểm tra (mở nắp) từng hộp sữa, điều này là không thể chấp nhận được => số phé phẩm M của lô hàng là không biết được => P(A) không thể tính được

75

3)ĐNTK

- Ví dụ 2: Xét trò chơi: tung đồng xu sắp ngửa ở các nơi *cờ gian bạc lận*. Đồng xu không cân đối và đồng chất, hoặc khi tung có để thanh nam châm kế bên! Ta không thể nói khả năng được mặt sấp và mặt ngửa là bằng nhau, và bằng $1/2$ => *Phép thử* (tung 1 đồng xu, xem sấp hay ngửa) có các kết cục không đồng khả năng xảy ra.

76

3) ĐNTK

- Vd3: xét những người đến siêu thị trong 1 ngày nào đó.
- A= bc có 500 người nữ đến siêu thị trong ngày.
- Ta có xác định được $|A|, |\Omega|$?

77

3) ĐNTK

- Tần suất: Thực hiện 1 phép thử T n lần. Gọi m là số lần xuất hiện bc A quan tâm trong n lần thử.
- Tỷ số $f_n(A) = m/n$ gọi là tần suất xuất hiện của bc A (trong n lần thử)
- Ta nhận xét thấy: khi số phép thử n càng lớn thì $f_n(A)$ càng tiến gần đến 1 giá trị p nào đó, nghĩa là $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) = p$, khi $n \rightarrow \infty$
- Đn: p gọi là xs của bc A theo thống kê: $P(A) = p$
- Trong thực tế ta hay dùng $f_n(A)$ như là xs của bc A khi n lớn

78

3) ĐNTK

- Vd1: để xác định xác suất 1 cặp vợ chồng sau khi cưới nhau thì sẽ ly dị *thực tế* là bao nhiêu. Người ta điều tra thời gian vừa qua thấy có trong 10000 cặp cưới nhau, có 500 cặp ly dị. Vậy có thể xem xác suất để 1 cặp sau khi cưới nhau sẽ ly dị là:
 $500 / 10000 = 0,05$ (!)

79

3) ĐNTK

- Vd2: các kết quả thống kê cho thấy tần suất sinh con trai *tự nhiên* là 0,513 ($\neq 0,5$). Vậy thì khả năng 1 người phụ nữ sinh con trai trong 1 lần sinh hỏng phải là 0,5. có nghĩa là biến cố sinh con trai có xác suất $\neq 0,5$.
- Lưu ý: tuy nhiên trong bài tập xác suất người ta vẫn giả định xác suất sinh con trai trong 1 lần sinh là 0,5 (người ta đơn giản cho rằng người phụ nữ khi sinh chỉ có 2 trường hợp: có hoặc không có con trai, mà không xét đến các yếu tố ảnh hưởng khác. Hay vì lý do nào đó mà ctmb!)

80

3)ĐNTK:

Tuy nhiên định nghĩa thống kê vẫn có 1 số hạn chế:

*Chỉ áp dụng được cho các phép thử NN có thể lặp lại nhiều lần 1 cách độc lập trong cách điều kiện giống hệt nhau.

*để cho kết quả chính xác thì số lần thực hiện phép thử n phải đủ lớn. Điều này trong thực tế không phải lúc nào cũng làm được.

81

3)ĐNTK (HẠN CHẾ-TIẾP)

- Vd1: tần suất sinh con trai *tự nhiên* là 0,513. tuy nhiên ở Trung quốc *áp dụng chính sách sinh 1 con* thì hiện tại tần suất sinh trai (*hổng tự nhiên!*) ở Trung quốc lớn hơn 0,513 (*theo báo chí!*).
- Vd2: khi nghiên cứu 1 con gà đẻ trứng thì ta có thể nghiên cứu n lần được. Nhưng khi “nghiên cứu” 1 người phụ nữ sinh con thì ta không thể nghiên cứu n lần được (*không thể yêu cầu người ta hãy sinh n lần cho tôi để tôi nghiên cứu!!!*)

82

3)ĐNTK

- Ngoài ra người ta còn định nghĩa xác suất theo phương pháp hình học. Tuy nhiên pp hình học vẫn có hạn chế của nó.
- Định nghĩa xác suất 1 cách chặt chẽ là định nghĩa theo *tiên đề xác suất*. Một định nghĩa không lấy gì làm thú vị cho lắm đối với chúng ta!

83

V/CÁC CÔNG THỨC TÍNH XÁC SUẤT:

- 1) Công thức cộng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A.B)$$
- Nếu $A.B=\Phi$ (A,B xung khắc) thì:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$
- **Một Câu hỏi lớn:** cái khó khăn nhất khi áp dụng công thức cộng là gì?

84

1)CT CỘNG

- Trả lời: không xác định được 2 bc A, B có xung khắc nhau hay không, trong bài tập cụ thể.

85

1)CT CỘNG

- Vdl: Lớp có 50 sv, trong đó có 20 sv giỏi Anh, 15 sv giỏi Pháp, 7 sv giỏi cả 2 ngoại ngữ. Chọn NN 1 sv.
- Tính xs:
 - a) Chọn được 1 sv giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ
 - b) Chọn được 1 sv không giỏi ngoại ngữ nào hết
- HD:
 - a) $A=bc$ sv này giỏi Anh
 $B=bc$ sv này giỏi Pháp
 $C=bc$ sv này giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ
 - $C=A+B$? A,B xung khắc?

86

1)CTCỘNG (VD1)

- A,B không xung khắc vì có sinh viên giỏi cả 2 ngoại ngữ.
- $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
 $=20/50 + 15/50 - 7/50 = 28/50$
- b) $D=bc$ sv này không giỏi NN nào hết
- $P(D)=P(A^*.B^*)=P[(A+B)^*]$
- $=P(C^*)=1-P(C)=1-28/50 = 22/50$

87

1)Công thức cộng

- VD2: giả thiết giống VD1.
- a) Tính xác suất: sv này chỉ giỏi AV?
- b) Tính xác suất : sv này chỉ giỏi đúng 1 ngoại ngữ?
- VD3: giả thiết giống VD1. nhưng thay vì chọn 1 sv thì ta chọn ngẫu nhiên 2 sv. Tính xác suất:
 - a) Cả 2 sv đều giỏi cả 2 ngoại ngữ?
 - b) Cả 2 sv giỏi ít nhất 1 ngoại ngữ?
 - c) Cả 2 sv chỉ giỏi AV?
 - d) Cả 2 sv chỉ giỏi 1 ngoại ngữ?
 - e) Cả 2 sv không giỏi ngoại ngữ nào hết?

88

1) Công thức cộng

- VD2:
- a) $P(AB^*) = P(A) - P(AB)$
- b) $P(AB^* + A^*B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

- VD3: $|\Omega| = C(2, 50)$
- a) số sv giỏi cả 2 NN: 7
- b) số sv giỏi ít nhất 1 NN: $13 + 7 + 8 = 28$
- c) số sv chỉ giỏi AV: $20 - 7 = 13$
- d) số sv giỏi chỉ giỏi một NN: $13 + 8 = 21$
- e) số sv giỏi không giỏi NN nào hết: $50 - 28 = 22$

- Bài tập: Giải lại VD1, 2 bằng cách giải ở VD3.

89

1) CT CỘNG

- VD4: Hộp có 10 cây viết bic, trong đó có 3 cây viết xấu. Lấy ngẫu nhiên 2 cây. Tính xs lấy được ít nhất 1 cây viết tốt
- HD: $A = bc$ lấy được 1 cây viết tốt
 $B = bc$ lấy được 2 cây viết tốt
 $C = bc$ lấy được ít nhất 1 cây viết tốt.
 $C = A + B$? A, B xung khắc?

90

1) CT CỘNG (VD4)

- A, B xung khắc, vì ta chỉ lấy có 2 cây. Hoặc ta được 1 cây viết tốt **hoặc** ta được 2 cây viết tốt. Không thể được cả 2 trường hợp. Ta chỉ được cả 2 trường hợp khi lấy 4 cây.
- $P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B)$
 $= C(1, 7) * C(1, 3) / C(2, 10) + C(2, 7) / C(2, 10)$

91

1) CTCỘNG

- VD5: Lấy ngẫu nhiên 2 lá bài từ bộ bài tây 52 lá
- Đặt: $A = bc$ lấy được 2 lá ách
 $B = bc$ lấy được 2 lá cơ
- A, B xung khắc?
- Tính $P(A+B)$?

92

1) CTCÔNG

- Giải VD5:
- A, B xung khắc vì 1 bộ bài bình thường không thể có 2 lá Ách cơ.
- $P(A+B) = P(A) + P(B)$
 $= C(2,4)/C(2,52) + C(2,13)/C(2,52)$

93

1) CTCÔNG

- Tổng quát: Nhớ cách ghi nha!
- $*P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$
 $- P(AB) - P(AC) - P(BC)$
 $+ P(ABC)$
- Nếu A, B, C xk từng đôi thì:
 $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$
- $*P(A+B+C+D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$
 $- P(AB) - P(AC) - P(AD) - P(BC) - P(BD) - P(CD)$
 $+ P(ABC) + P(ABD) + P(ACD) + P(BCD)$
 $- P(ABCD)$
- Nếu A, B, C, D xk từng đôi thì:
 $P(A+B+C+D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$

94

2) CT XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN:

- Vdl: Hộp có 5 viên bi đỏ, 7 bi trắng. Lấy lần lượt 2 bi (lấy không hoàn lại)
- Biết rằng lần 1 lấy được bi T, tính xs lần 2 lấy được bi T?
- Giải:
 $T_i = bc$ lần i lấy được bi T, $i=1,2$
- Ta có thể viết lại câu hỏi như sau: *Biết rằng T1 xảy ra, tính xs T2 xảy ra*

95

2) CT XSCĐK

- Giải VD1: T1 xảy ra: Lần 1 lấy được bi T => hộp chỉ còn lại 11 bi (có 6 bi T) => Ở lần lấy thứ 2 (chọn 1 bi trong 11 bi) : số trường hợp đkn là 11, số trường hợp thuận lợi cho T2 là 6 => xác suất của T2 (với điều kiện T1 xảy ra) là 6/11.
- Ta viết: $P(T2/T1)$: xác suất của T2 với điều kiện T1 xảy ra
- Ta có: $P(T2/T1) = 6/11$
- Tổng quát: $P(A/B)$: xác suất của bc A với điều kiện bc B ; B gọi là bc điều kiện
- Công thức: $P(A/B) = P(AB) / P(B)$

96

2)CTXSCĐK

- Vd2: Một tổ điều tra dân số vào thăm 1 gia đình có 2 con
 - a) Tính xác suất gia đình này có 2 con trai
 - b) Đang nói chuyện thì có 1 cậu con trai ra chào khách. Tính xs gia đình này có 2 con trai

97

2)CTXSCĐK

- Giải VD2: Với 1 gđinh có 2 con, ta có 4 trường hợp xảy ra:

TT	TG	GT	GG
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
- a) gọi A=bc gia đình này có 2 trai
 $A=TT \Rightarrow P(A)=P(TT)=\frac{1}{4}$
- b) gọi B=bc gia đình này có con trai
 $B=TG+GT+TT \Rightarrow P(B)=\frac{3}{4}$
 Sự kiện cậu con trai ra chào khách \Rightarrow bc B xảy ra \Rightarrow xs gia đình này có 2 trai là: $P(A/B)$
 Ta có: $A \cdot B = TT \cdot (TG+GT+TT) = TT \Rightarrow P(AB) = \frac{1}{4}$
 Vậy $P(A/B) = P(AB)/P(B) = \frac{1}{4} / \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$
- Ta thấy: Khi bc B chưa xảy ra thì xs của A là $P(A) = \frac{1}{4}$.
- Tuy nhiên khi bc B xảy ra thì khả năng xảy ra của bc A tăng lên là $P(A/B) = \frac{1}{3}$

98

3)CT NHÂN31) BIẾN CỐ ĐỘC LẬP:

- Bc A độc lập đối với bc B **nếu** bc B xảy ra hay không xảy ra *không* ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của A, nghĩa là $P(A/B)=P(A)$
- Nếu A độc lập đv B thì B cũng độc lập đv A, nghĩa là $P(B/A)=P(B)$. Lúc đó ta nói A,B độc lập đối với nhau.
- Vd1: Xét lại ví dụ 2 (gia đình có 2 con)
- Ta có $P(A/B) = \frac{1}{3} \neq P(A) = \frac{1}{4}$ nên A,B không độc lập

99

31)BC ĐỘC LẬP

- Vd2: Tung đồng thời 2 con xúc xắc.
 $A=bc$ con xx *thứ nhất* xuất hiện mặt có số nút là 1
 $B=bc$ con xx *thứ 2* xuất hiện mặt có số nút lẻ.
 Xét xem A, B có độc lập?

100

31) BC ĐỘC LẬP

- Tung 1 con xúc xắc thì có 6 kết cục tối giản \Rightarrow Tung 2 con xx thì có $6 \cdot 6 = 36$ kết cục tối giản.
- Đặt $C_i = bc$ con thứ 1 xh mặt có số nút là i
 $D_i = bc$ con thứ 2 xh mặt có số nút là i
- Không gian mẫu $\Omega = \{C1D1, C1D2, \dots, C1D6, C2D1, C2D2, \dots, C2D6, \dots, C6D1, C6D2, \dots, C6D6\}$
- $P(A) = 6/36 = 1/6$, $P(B) = 18/36 = 1/2$, $P(AB) = 3/36 = 1/12$
 $\Rightarrow P(A/B) = P(AB) / P(B) = 1/12 / 1/2 = 1/6$
- $\Rightarrow P(A) = P(A/B) \Rightarrow A, B$ độc lập

101

31) BC ĐỘC LẬP

- **Lưu ý:** Trong thực tế ta khó có thể dùng công thức $P(A/B) = P(A)$ để xác định A, B độc lập (*một cách chặt chẽ*) cho mọi bài toán.
- Chủ yếu dựa vào giả thiết bài toán và suy luận: nếu khả năng xảy ra của bc A không phụ thuộc vào bc B (không bị ảnh hưởng bởi bc B) thì ta nói A độc lập đối với B .

102

32) CÔNG THỨC NHÂN:

- $P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$
- Nếu A, B độc lập thì:
 $P(A/B) = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

nhận xét: CT nhân và CT xs có điều kiện?

- 1) **Câu hỏi lớn:** cái khó nhất khi áp dụng công thức nhân là gì?
- 2) **câu hỏi hơi lớn:** khi nào thì ta xét bc điều kiện là bc A hoặc bc B ?

103

32) CT NHÂN

- **Trả lời:**
- 1) là xác định xem A, B có độc lập không
- 2) Nếu ta dễ tính $P(A/B)$ hơn là $P(B/A)$ thì ta nên chọn bc điều kiện là B .

VD1: hộp có 4 bi T, 3 bi X. lấy lần lượt 2 bi.
 đặt $T_i = bc$ lần i lấy được bi T, $i=1, 2$
 tính xác suất lấy được 2 bi T?

HD: ta thấy $P(T_2/T_1)$ dễ tính hơn $P(T_1/T_2)$
 do đó: $P(T_2 \cdot T_1) = P(T_2/T_1) \cdot P(T_1)$
 $= (3/6) \cdot (4/7)$

104

32)CT NHÂN

- VD1: $P(T1/T2)$ khó tính nhưng có tính được hông?
- Trả lời:
Tính được. Xin xem công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes sẽ rõ!

105

32)CT NHÂN

- VD2: Có 2 người A và B với khả năng thi đậu môn XSTK lần lượt là 60%, 80%. Khả năng thi đậu của A và B là độc lập nhau.
- Biết rằng có ít nhất 1 người thi đậu, hãy tính xác suất người A thi đậu?

106

- Giải VD2:
- Đặt các biến cố sau:
- A= bc người A thi đậu
- B= bc người B thi đậu
- C= bc có ít nhất 1 người thi đậu
- $C=A+B$
- $P(AC)=P[A(A+B)]=P(A+AB)$
- $=P(A.\Omega+AB)=P[A(\Omega+B)]=P(A.\Omega)=P(A)=0,6$
- $P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
- $=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0,6+0,8-0,6*0,8$
- Hoặc $P(C)=P(A+B)=1-P(A*B^*)$
- $P(A/C)=P(AC)/P(C)$

107

32)CT NHÂN

- **Lưu ý**: Tính xung khắc và tính độc lập của 2 bc A,B.
- $A.B=\phi$ (A,B xk) $\rightarrow P(A.B)=P(\phi)=0$
- $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$
- Vậy $P(A).P(B) \neq P(A.B)$
A,B xk \rightarrow A, B không độc lập

108

32)CT NHÂN

- *Nhóm 3 biến cố độc lập từng đôi:
- A,B,C độc lập từng đôi **nếu** A,B đl; A,C đl; B,C đl
- *Nhóm 3 biến cố độc lập toàn thể:
- A,B,C độc lập tt **nếu** A,B đl; A,C đl; B,C đl
và A,BC đl; B,AC đl; C,AB đl
- Hay:
 $P(AB)=P(A)P(B)$; $P(AC)=P(A)P(C)$; $P(BC)=P(B)P(C)$
 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

109

32)CT NHÂN

- *Nhóm n bc độc lập toàn thể:
 A_1, \dots, A_n độc lập toàn thể **nếu** mỗi biến cố trong nhóm độc lập đối với một tích bất kỳ các biến cố còn lại
- **NX:** Độc lập toàn thể \Rightarrow độc lập từng đôi

110

32)CT NHÂN (ĐỘC LẬP TT)

- Vd2: Quan sát 1 gia đình có 2 con
 $A=bc$ sinh con trai lần I, $A=TT+TG$
 $B=bc$ sinh con trai lần II, $B=TT+GT$
 $C=bc$ chỉ có 1 lần sinh con trai, $C=TG+GT$.
- Xét xem A,B,C có độc lập (toàn thể)?
- HD: *) $P(AB) = P(TT) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
 $P(AC) = P(TG) = \frac{1}{4} = P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
 $P(BC) = P(GT) = \frac{1}{4} = P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow A, B, C$ độc lập từng đôi
- *) $ABC = \Phi \Rightarrow P(ABC) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$
 $\Rightarrow A, B, C$ không độc lập toàn thể

111

32)CT NHÂN

- Vd3: Tung 3 lần 1 con xúc xắc.
- $A_i = bc$ lần tung i xuất hiện mặt có số nút chẵn, $i=1, 3$
- Ta có: A_1, A_2, A_3 độc lập toàn thể

112

32) CT NHÂN

○ Tổng quát:

- * $P(ABC) = P(A/BC).P(BC)$
 $= P(A/BC).P(B/C).P(C)$
- Nếu A,B,C độc lập toàn thể thì
 $P(ABC)=P(A).P(B).P(C)$
- * $P(ABCD)= P(A/BCD).P(BCD)$
 $= P(A/BCD).P(B/CD).P(CD)$
 $= P(A/BCD).P(B/CD).P(C/D).P(D)$
- Nếu A,B,C,D độc lập toàn thể thì
 $P(ABCD)=P(A).P(B).P(C).P(D)$
- Câu hỏi: nắm cách ghi CT nhân chưa?

113

5) CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ:

Xét 1 phép thử T. Giả sử A_1, \dots, A_n là 1 nhóm các bc đđ và xktđ

F là 1 biến cố liên quan tới phép thử T (khi bc F xảy ra thì chỉ có 1 bc A_i cùng xảy ra)

Cho biết các xác suất $P(A_i)$, $P(F/A_i)$

Tính P(F)

Ta có: $P(F)=P(F/A_1)P(A_1)+\dots +P(F/A_n)P(A_n)$

114

5) CÔNG THỨC XÁC SUẤT ĐẦY ĐỦ:

- Thật vậy: $\Omega=A_1+A_2+\dots+A_n$
- $F= F\Omega= F(A_1+A_2+\dots+A_n)= FA_1+FA_2+\dots+FA_n$
- $\Rightarrow P(F)=P(FA_1+FA_2+\dots+FA_n)$
 $=P(FA_1)+P(FA_2)+\dots+P(FA_n)$
 $=P(F/A_1)P(A_1)+P(F/A_2)P(A_2)+\dots+P(F/A_n)P(A_n)$
- Câu hỏi lớn: Khó khăn khi áp dụng công thức xsđđ là gì?
- Câu hỏi hơi lớn: có bắt buộc các A_i phải là các biến cố sơ cấp không?

115

5) CTXSĐĐ

Vdl: Hộp có 5 bi T, 4 bi X. Lấy lần lượt 2 bi (lấy ngẫu nhiên không hoàn lại)

Tính xác suất lần 2 lấy được bi X?

HD: Ta thấy khả năng lấy được bi X ở lần 2 phụ thuộc vào lần 1: lấy được bi X hay bi T \Rightarrow có 2 trường hợp xảy ra \Rightarrow ta có nhóm bc gồm 2 bc, xét xem chúng có đầy đủ và xung khắc?

116

5)CTXSĐĐ

VD1:

*F=bc lần 2 lấy được bi X

A1=bc lần 1 lấy được bi T

A2=bc lần 1 lấy được bi X

A1,A2 là nhóm bc đđ và xk

* $P(A1)=5/9$, $P(A2)=4/9$

* $P(F/A1)=4/8$, $P(F/A2)=3/8$

$$P(F)=P(F/A1)P(A1)+P(F/A2)P(A2)=4/8.5/9+3/8.4/9=4/9$$

117

5)CTXSĐĐ

- Vd2: Xí nghiệp bút bi Thiên long có 3 phân xưởng sản xuất.
- PX1: sản xuất 50% sp của toàn XN ; PX2: 30% ; PX3: 20%
- Tỷ lệ phế phẩm tính trên số sp do từng PX sản xuất là: 1%, 2%, 3%
- Một sinh viên mua 1 cây bút bi Thiên long. Tính xác suất mua phải cây viết xấu?

118

5)CTXSĐĐ

- HDVD2: Cây viết xấu có thể do: PXI sx, PXII sx, PXIII sx => có 3 trường hợp xảy ra => ta có nhóm bc gồm 3 bc , xét xem chúng có đầy đủ và xung khắc từng đôi?
- *Đặt Ai=bc viết do PXi sản xuất, i=1,3
- F=bc mua phải viết xấu
- A1,A2,A3 tạo thành nhóm bc đđ và xkđđ
- * $P(A1)=50\%=0,5$ $P(A2)=0,3$ $P(A3)=0,2$
- * $P(F/A1)=1\%=0,01$ $P(F/A2)=0,02$ $P(F/A3)=0,03$
- $P(F)=P(F/A1)P(A1)+P(F/A2)P(A2)+P(F/A3)P(A3)$
- $=0,017=1,7\%$
- Vậy xác suất mua phải 1 cây viết xấu là 1,7%

119

5)CTXSĐĐ

- Câu hỏi : Biết rằng mua phải cây viết xấu, tính xs cây viết này do PXI sản xuất?

120

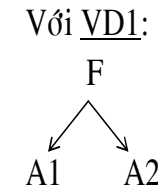
5)CTXSĐĐ

- Ta có: $P(A1/F)=P(FA1)/ P(F)= P(F/A1)P(A1) / P(F)$
 $= 0,01*0,5/ 0,017=0.294$
- Ta thấy: Trước khi mua cây viết thì xs cây viết do PXI sản xuất là 0,5 ($P(A1)=0,5$), nhưng khi bc F xảy ra (mua phải cây viết xấu) thì khả năng cây viết do PXI sản xuất giảm đi ($P(A1/F)=0,294$).
- Vậy: *Trước khi thực hiện thí nghiệm (mua 1 cây viết, xem tốt hay xấu) ta tính trước rằng : xs cây viết do PXI sx là $P(A1)=0,5$, gọi là xác suất tiên/tiên nghiệm
- *Sau khi thực hiện thí nghiệm, bc F xảy ra => ta có xs cây viết do PXI sx là $P(A1/F)=0,294$, gọi là xác suất hậu nghiệm
- $P(Ai/F) = ?$ Gọi là công thức Bayes.

121

5)CTXSĐĐ

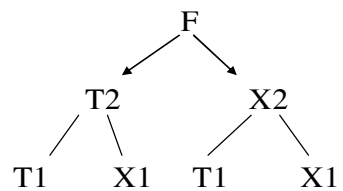
Nhận xét: thường ta dùng sơ đồ để biểu diễn các trường hợp của ctxsđđ như sau:



122

5)CTXSĐĐ

VD3: hộp có 4 bi T, 5 bi X. lấy lần lượt 3 bi từ hộp ra.
 Tính xác suất lần 3 lấy được bi T?
 F=bc lần 3 lấy được bi T
 Ti= bc lần i lấy được bi T, i=1,2
 Xi= bc lần i lấy được bi X, i=1,2



Vậy ta có 4 trường hợp: $A1=T1T2$, $A2=T1X2$,
 $A3=X1T2$, $A4=X1X2$. $\{A1, A2, A3, A4\}$
 có là nhóm bc đđ và xktđ?

123

5)CTXSĐĐ. VD3

- $P(A1)=P(T1T2)=P(T2/T1)P(T1)= 3/8 . 4/9 = 3/18$
- $P(A2)=P(T1X2)=P(X2/T1)P(T1)=5/8 . 4/9 = 5/18$
- $P(A3)=P(X1T2)=P(T2/X1)P(X1)=4/8 . 5/9 = 5/18$
- $P(A4)=P(X1X2)=P(X2/X1)P(X1)=4/8 . 5/9 = 5/18$
- $P(F/A1)=2/7$, $P(F/A2)=3/7$,
 $P(F/A3)=3/7$, $P(F/A4)=4/7$
- $P(F)=P(F/A1)P(A1)+...+P(T/A4)P(A4)$
- $=2/7 . 3/18+3/7 . 5/18+3/7 . 5/18+4/7 . 5/18$

124

○ 6) Công thức Bayes:

- Lấy lại giả thiết trong công thức xs đầy đủ
- Tính xác suất của bc Ai với điều kiện bc F đã xảy ra
- $P(A_i/F) = P(F A_i) / P(F) = P(F/A_i)P(A_i) / P(F)$
- $= [P(F/A_i)P(A_i)] / [\sum P(F/A_i)P(A_i)]$

125

6) CT BAYES

- Vdl: Có 2 hộp phần loại I, 1 hộp phần loại II. Hộp loại I có 8 viên phần T, 2 viên phần X; hộp loại II có 9 viên phần T, 1 viên phần X. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 1 viên phần ra xem màu. Tính xs viên phần lấy ra thuộc hộp loại I, biết rằng nó là viên phần T?

126

6) CT BAYES

- HDVdl: Ta thấy: viên phần xem màu có thể thuộc: hộp loại I hoặc hộp loại II => có 2 trường hợp xảy ra
- *F=bc lấy được viên phần T
- Hi=bc lấy hộp loại i, i=1,2
- * $P(F) = P(F/H1)P(H1) + P(F/H2)P(H2)$
- $= 8/10 \cdot 2/3 + 9/10 \cdot 1/3 = 5/6$
- * $P(H1/F) = P(FH1)/P(F) = P(F/H1)P(H1) / P(F)$
- $= [8/10 \cdot 2/3] / 5/6 = 8/15 / 5/6 = 48/75$
- **NX:** Câu hỏi không yêu cầu tính P(F), nhưng khi làm bài ta nên tính trước P(F)

127

6) CT BAYES

- VD2: Vd3 mục 5
- Biết rằng lần 3 lấy được bi T, tính xác suất lần 2 lấy được bi T?
- $P(T2/F) = ?$
- HD:
- $P(T2/F) = P(T2.F) / P(F)$
- P(F) đã biết

128

6) CT BAYES VD2

- $P(T2.F) = P(F.T2.\Omega) = P[F.T2.(T1+X1)]$
 $= P(F.T2.T1 + F.T2.X1)$
 $= P(F.T2.T1) + P(F.T2.X1)$
 $= P(F/T2.T1)P(T2/T1)P(T1) + P(F/T2.X1)P(T2/X1)P(X1)$
 $= 2/7 \cdot 3/8 \cdot 4/9 + 3/7 \cdot 4/8 \cdot 5/9$
- **Câu hỏi:** biết rằng lần 3 lấy được bi T, tính xác suất lần 1 lấy được bi T?
- $P(T1/F) = ?$
- **HD:**
- $P(F.T1) = P[F.T1.(T2+X2)]$

129

Bình luận: Qua công thức xsđđ và Bayes bạn có cảm thấy sự “vô thường” của cuộc đời! Trong cuộc đời, ai cũng đã từng ít nhất 1 lần thốt lên câu: “giá như...”! Thí dụ: “giá như biết lấy chồng được sung sướng thì tôi đã lấy chồng sớm rồi”, “giá như biết lấy vợ sẽ chịu đau khổ thì tôi đã không lấy rồi”, “giá như tôi chăm học thêm tý nữa thì tôi đã thi đậu rồi”,...Giả sử trước khi lấy vợ bạn ước tính xác suất bạn sẽ bị đau khổ là $P(A) = 50\%$; và sau khi bạn lấy vợ, một người vợ được mọi người cho là “hiện đại”, bạn tính được xác suất bạn bị đau khổ là $P(A/F) = 80\%$. Lúc đó bạn *mong ước* phải chi F đừng xảy ra, nhưng bạn chỉ biết F xảy ra khi bạn đã thực hiện “phép thử” lấy vợ. Đây là 1 phép thử mà bạn chỉ thực hiện 1 lần là “quá đủ”!

130

7) NGUYÊN LÝ BIẾN CỐ HIẾM

- Một biến cố A có xác suất $P(A)$ nhỏ thì khi thực hiện 1 phép thử ta xem như nó không xảy ra. Ta gọi A là biến cố hiếm.
- Vậy $P(A)$ bằng bao nhiêu là nhỏ? Tùy theo thực tế, tùy theo từng người mà $P(A)$ được xem là nhỏ hay không.
- *Thí dụ:* Nếu bạn yêu 1 người mà người đó hầu như không yêu bạn, bạn chỉ có $1/10^6$ hy vọng là người đó yêu bạn. Với hy vọng đó thì bạn có thể chờ đợi cả đời (từ lúc tóc đen, da mịn cho đến lúc tóc bạc, da nhăn). Thậm chí trước khi chết bạn chỉ cần người đó nói 1 câu yêu bạn thì bạn đã mãn nguyện xuống suối vàng rồi (Y như phim!) Vậy thì $1/10^6$ không nhỏ chút nào hết!

131

NGUYÊN LÝ BIẾN CỐ HIẾM (tiếp theo)

- *Thí dụ:* xác suất 1 người đua xe bị chết là $1/100$. Đối với các “yêu hùng xa lộ” thì con số này chẳng nghĩa lý gì cả! Nó chỉ có nghĩa đối với người bình thường mà thôi.
- *Thí dụ:* nhà có giấy phép xây dựng 2 tầng, nếu tự ý xây thêm 1 tầng nữa thì khả năng bị sập là $1/100$. Đối với những người “cẩn thận” thì đó là con số không nhỏ, nhưng đối với những người “ẩu, liều” thì con số đó “chẳng là cái đĩnh” gì cả!
- Trong xác suất thường người ta xem 1%, 5% là nhỏ.

132

MỘT SỐ LƯU Ý

- A, B xung khắc $\Rightarrow P[(A+B)/C] = P(A/C) + P(B/C)$
- $P(A^*/B) = 1 - P(A/B)$; $P(A/B^*) \neq 1 - P(A/B)$
- A, B xung khắc $\Rightarrow P(C/A^*B) = P(C/B)$
- A, B độc lập $\Leftrightarrow A, BC$ độc lập
- A, B độc lập ; A, C độc lập $\Leftrightarrow A, BC$ độc lập
- A, B độc lập $\Leftrightarrow P[(AB)/C] = P(A/C) \cdot P(B/C)$
- A, C độc lập $\Leftrightarrow P(A/BC) = P(A/B)$

133

BÀI TẬP 1:

- Ta có 3 biến cố A, C, B bất kỳ.
- “Nếu A, C độc lập
- $\rightarrow P(AC/B) = P(A/B) \cdot P(C/B)$ ”
- Điều này đúng hay sai?

134

○ Giải:

- Xét $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{1, 2\}$ $C = \{1, 3\}$, $B = \{1, 4\}$
- $P(A) = 2/4$, $P(C) = 2/4$, $P(AC) = P(\{1\}) = 1/4$
- Vậy: $P(AC) = P(A) \cdot P(C)$ nên A, C độc lập.
- $P(AC/B) = P(ACB) / P(B) = (1/4) / (2/4) = 1/2$
- $P(A/B) = P(AB) / P(B) = (1/4) / (2/4) = 1/2$
- $P(C/B) = P(CB) / P(B) = (1/4) / (2/4) = 1/2$

○ Vậy $P(AC/B) \neq P(A/B) \cdot P(C/B)$

○ Vậy điều kiện gì thì dấu “=” xảy ra?

135

○ Bài tập 2:

- A1, A2 là họ biến cố đầy đủ và xung khắc
- B, C là biến cố bất kỳ
- Ta có 2 công thức sau:
- $P(C) = P(A1/B)P(C/A1B) + P(A2/B)P(C/A2B)$
- $P(C/B) = (A1/B)P(C/A1B) + P(A2/B)P(C/A2B)$
- 1) Theo bạn thì công thức nào đúng?
- 2) Hãy chứng minh công thức đúng 1 cách “đường đường, chính chính”, nghĩa là đúng cho biến cố bất kỳ chứ không phải chỉ đúng qua 1 thí dụ cá biệt?

136

- **Giải:**
- 1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2\}$
- $P(C) = 1/6$
- $P(A_1/B) = P(A_1B)/P(B) = (1/6)/(3/6) = 1/3$
- $P(A_2/B) = P(A_2B)/P(B) = (2/6)/(3/6) = 2/3$
- $P(C/A_1B) = P(CA_1B)/P(A_1B) = (1/6)/(1/6) = 1$
- $P(C/A_2B) = P(CA_2B)/P(A_2B) = 0/(1/6) = 0$
- Ta có: $P(A_1/B)P(C/A_1B) + P(A_2/B)P(C/A_2B)$
- $= (1/3)(1) + (2/3)(0) = 1/3$
- $P(C/B) = P(CB)/P(B) = (1/6)/(3/6) = 1/3$
- 2) Bạn hãy tự chứng minh, đây là 1 bài tập rất thi vị!

137

TÓM LẠI:

- Ta có định nghĩa xác suất của biến cố theo cổ điển
- Các công thức tính xác suất:
 - Công thức cộng
 - Công thức xác suất có điều kiện
 - Công thức nhân
 - Công thức xác suất đầy đủ
 - Công thức Bayes

138

- Tuy nhiên trong bài tập người ta không nỡ để các dạng toán này một cách “cô đơn, buồn chán”. Thường người ta “hợp hôn” nhiều công thức tính xác suất trong một bài toán. Điều này đòi hỏi ta phải biết phân biệt khi nào thì nên dùng công thức nào, cách kết hợp các công thức này như thế nào, ... và còn hơn thế nữa!
- Sự “hợp hôn” này có “hoàn hảo” hay không là do ta có “khéo tay hay làm” không!

139

BÀI TẬP

- **Bài tập 1:** Hộp có 4 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng. Lấy ra 2 bi từ hộp.
- Tính xs lấy được 2 bi T trong 3 cách lấy sau:
 - a) Lấy ngẫu nhiên 2 bi (lấy 1 lần 2 bi)
 - b) Lấy lần lượt 2 bi (không hoàn lại)
 - c) Lấy có hoàn lại 2 bi

140

HDBT1:

- A=bc lấy được 2 bi T
- a) $P(A) = C(2,3)/C(2,7) = 3/21$
- b) $P(A) = P(T1.T2) = P(T2/T1)P(T1) = (3/7).(2/6)$
 $= 6/42 = 3/21$
- c) Do chọn có hoàn lại nên ở lần chọn thứ 2 ta cũng có giả thiết y như ở lần chọn 1 (Hộp có 7 bi, có 4 bi đỏ, 3 bi trắng) \Rightarrow T1 và T2 độc lập
- $\Rightarrow P(A) = P(T1.T2) = P(T1).P(T2) = (3/7).(3/7) = 9/49$
- Nhận xét: câu a và b có xác suất bằng nhau.

141

Nhận xét bài tập 1:

- Ta tính xác suất P(A) theo định nghĩa cổ điển:
- Nếu lấy ngẫu nhiên 2 bi: $P(A) = |A|/|\Omega| = 3/21$
- Nếu lấy lần lượt 2 bi: $P(A) = |A|/|\Omega| = 6/42 = 3/21$
- Nếu lấy có hoàn lại 2 bi: $P(A) = |A|/|\Omega| = 9/49$
- Với C1 và C2 thì mặc dù $|\Omega|$ khác nhau nhưng xác suất vẫn bằng nhau.

142

BT2:

- Hộp viết bic có 10 cây viết, trong đó có 3 cây viết xấu. Lấy lần lượt 2 cây (lấy ngẫu nhiên không hoàn lại).
- a) Tính xác suất lần 1 lấy được cây viết tốt
- b) Biết rằng lần 1 lấy được viết tốt, tính xác suất lần 2 lấy được viết tốt
- c) Tính xác suất lấy được 2 cây viết tốt
- d) Tính xác suất lần 2 lấy được viết tốt
- e) Biết rằng lần 2 lấy được viết tốt, tính xác suất lần 1 lấy được viết xấu
- f) Tính xác suất không lấy được cây viết tốt nào
- g) Tính xác suất lấy được 1 cây viết tốt
- h) Tính xác suất lấy được ít nhất 1 cây viết tốt
- i) Tính xác suất lấy được 2 cây viết cùng tính chất (cùng tốt hoặc cùng xấu)

143

BT3:

Hộp viết bic có 10 cây viết, trong đó có 4 cây viết xấu. Lấy lần lượt 3 cây (lấy ngẫu nhiên không hoàn lại).

- a) Tính xác suất lần 2 lấy được viết xấu (X)
- b) Biết rằng 2 lần đầu lấy được viết X, tính xs lần 3 lấy được viết X
- c) Tính xác suất lần 3 lấy được viết xấu
- d) Biết rằng lần 3 lấy được viết X, tính xs 2 lần đầu lấy được viết X
- e) Biết rằng lần 1 lấy được viết X, tính xs lần 3 lấy được viết X
- f) Biết rằng lần 2 lấy được viết X, tính xs lần 3 lấy được viết X
- g) Biết rằng lần 3 lấy được viết X, tính xs lần 1 lấy được viết X
- h) Biết rằng lần 3 lấy được viết X, tính xs lần 2 lấy được viết X
- i) Tính xác suất lấy được 1 cây viết xấu
- j) Tính xác suất lấy được 2 cây viết xấu
- k) Tính xác suất lấy được 3 cây viết xấu

144

BT4:

- Có 2 hộp: hộp I có 2 bi T, 1 bi X ; hộp II có 3 bi T, 2 bi X.
- Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Trộn đều các bi trong hộp II, rồi lấy ngẫu nhiên 1 bi ra xem màu.
- a) Tính xác suất bi bỏ từ hộp I sang hộp II là bi X
- b) Biết rằng bi bỏ từ hộp I sang hộp II là bi T, tính xác suất bi lấy ra từ hộp II là bi X
- c) Tính xác suất bi lấy ra từ hộp II là bi T
- d) Biết rằng bi lấy ra từ hộp II là bi T, tính xác suất bi lấy từ hộp I bỏ sang hộp II là bi T

145

BT5:

- Có 2 hộp: hộp I có 2 bi T, 1 bi X; hộp II có 3 bi T, 2 bi X.
- Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Trộn đều các bi trong hộp II, rồi lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp II bỏ sang hộp I.
- a) Biết rằng bi bỏ từ hộp I sang hộp II là bi T, tính xác suất bi bỏ từ hộp II sang hộp I là bi T
- b) Tính xác suất bi bỏ từ hộp II sang hộp I là bi X
- (Sau khi bỏ các bi từ hộp này sang hộp kia xong)
- c) Tính xác suất hộp I có 1 bi T, có 2 bi T, có 3 bi T, có 4 bi T
- d) Tính xác suất hộp II có 1 bi T, có 2 bi T, có 3 bi T, có 4 bi T
- e) Biết rằng hộp I có 2 bi T, tính xs bi bỏ từ hộp II sang hộp I là bi T

146

- **Bài tập 6 (dành tặng chị em phụ nữ!):**

Một người thỏa thuận với vợ sắp cưới như sau: Anh ta chỉ cần có con trai, và nếu vợ anh sanh cho anh được 1 đứa con trai thì lập tức dừng lại liền, không sinh nữa. Giả sử 1 người phụ nữ có thể sinh tối đa n lần, và xác suất sinh con trai ở mỗi lần sinh là $\frac{1}{2}$ (khả năng sinh con trai ở các lần sinh không ảnh hưởng đến nhau).

- a) Hỏi khả năng anh này có con trai là bao nhiêu?
- b) Hỏi n phải là bao nhiêu để khả năng anh này có con trai $\geq 99\%$?

147

- **HDbt6:**

- a) Gọi T_i =bc sinh con trai ở lần sinh i ,
- G_i =bc sinh con gái ở lần sinh i,
- T=bc anh này có con trai
- $T = T_1 + G_1 T_2 + G_1 G_2 T_3 + \dots + G_1 G_2 \dots G_{n-1} T_n$
- $\Rightarrow P(T) = P(T_1 + G_1 T_2 + G_1 G_2 T_3 + \dots + G_1 G_2 \dots G_{n-1} T_n)$
 $= P(T_1) + P(G_1 T_2) + \dots + P(G_1 G_2 \dots T_n)$
 $= P(T_1) + P(G_1)P(T_2) + \dots + P(G_1)P(G_2) \dots P(T_n)$
 $= \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{2})^n = 1 - (\frac{1}{2})^n$
- Ta thấy $P(T) < 1$
- b) $P(T) = 1 - (\frac{1}{2})^n \geq 0,99 \Rightarrow 0,01 \geq (\frac{1}{2})^n$
- $\rightarrow n \geq \ln(0,01) / \ln(\frac{1}{2}) \rightarrow n \geq 6,644$
- Vậy $n \geq 7$, đáng để chị em suy nghĩ !! 😞 😐 😊

148

○ Quy ước: Quyền (*) là quyền:

○ **BÀI TẬP XSTK**, ThS. Lê Khánh Luận & GVC.
Nguyễn Thanh Sơn & ThS. Phạm Trí Cao, NXB Lao
động 2007.

○ Xem thêm 1 số dạng bài tập về xác suất của biến cố
ở quyền (*).

149

MỜI GHÉ THĂM TRANG WEB:

❖ <http://kinhteluong.ungdung.googlepages.com>

❖ <http://xacsuatthongke.googlepages.com>

❖ <http://toiuuhoa.googlepages.com>

❖ <http://diemthi.caopt.googlepages.com>

❖ <http://phamtricao.googlepages.com>

❖ www37.websamba.com/phamtricao

❖ www.phamtricao.web1000.com

150