Trường Đại học Bách khoa tp. Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán Ứng dụng

---

# Đại số tuyến tính

## Chương 0: Số phức

- *Giảng viên Ts. Đặng Văn Vinh (9/2007)*
**dangvvinh@hcmut.edu.vn**

# Mục tiêu của môn học Toán 2

Môn học cung cấp các kiến thức cơ bản của đại số tuyến tính. Sinh viên sau khi kết thúc môn học nắm vững các kiến thức nền tảng và biết giải các bài toán cơ bản: tính định thức, làm việc với ma trận, bài toán giải hệ phương trình tuyến tính, không gian véctơ, ánh xạ tuyến tính, tìm trị riêng véc tơ riêng, đưa dạng toàn phương về chính tắc.

Số phức

Ma trận

Định thức

Hệ phương trình tuyến tính

Không gian véc tơ

Không gian Euclide

Phép biến đổi tuyến tính

Trị riêng, véctơ riêng

Dạng toàn phương

## Nhiệm vụ của sinh viên.

Đi học đầy đủ (vắng 20% trên tổng số buổi học bị cấm thi!).

Làm tất cả các bài tập cho về nhà.

Đọc bài mới trước khi đến lớp.

## Đánh giá, kiểm tra.

Thi giữa học kỳ: hình thức trắc nghiệm (20%)

Thi cuối kỳ: hình thức tự luận + điền kết quả (80%)

# Tài liệu tham khảo

1. Đỗ Công Khanh, Ngô Thu Lương, Nguyễn Minh Hằng. Đại số tuyến tính. NXB Đại học quốc gia

2. Ngô Thu Lương, Nguyễn Minh Hằng. Bài tập toán cao cấp 2.

3. Đỗ Công Khanh. Đại số tuyến tính. NXB Đại học quốc gia

4. Meyer C.D. *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

5. Kuttler K. *Introduction to linear algebra for mathematicians*,

6 Usmani R. *Applied linear algebra*, Marcel Dekker, 1987.

7. Kaufman L. *Computational Methods of Linear Algebra* ,2005.

8. Muir T. *Theory of determinants, Part I. Determinants in general*

9. Golub G.H., van Loan C.F. *Matrix computations*. 3ed., JHU, 1996.

10. Nicholson W.K. *Linear algebra with applications* , PWS Boston, 1993.

11. Proskuriyakov I.V. Problems in Linear algebra.

12. www.tanbachkhoa.edu.vn

# Nội dung

**0.1 – Dạng đại số của số phức**

**0.2 – Dạng lượng giác của số phức**

**0.3 – Dạng mũ của số phức**

**0.4 – Nâng số phức lên lũy thừa**

**0.5 – Khai căn số phức**

**0.6 – Định lý cơ bản của Đại số**

## 0.1 Dạng đại số của số phức

---

Không tồn tại một số thực nào mà bình phương của nó là một số âm. Hay, không tồn tại số thực $x$ sao cho $x^2 = -1$.

Ở thế kỷ thứ 17, người ta định nghĩa một số ảo.

Bình phương của một số ảo là một số âm. Ký tự $i$ được chọn để ký hiệu một số mà bình phương của nó bằng $-1$.

### Định nghĩa số *i*

Số $i$, được gọi là đơn vị ảo, là một số sao cho

$$i^2 = -1$$

# 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

## Định nghĩa số phức

Cho $a$ và $b$ là hai số thực và $i$ là đơn vị ảo, khi đó $z = a + bi$ được gọi là số phức. Số thực $a$ được gọi là phần thực và số thực $b$ được gọi là phần ảo của số phức z.

Phần thực của số phức $z = a + bi$ được ký hiệu là $Re(z)$.

Phần ảo của số phức $z = a + bi$ được ký hiệu là $Im(z)$.

Tập số thực là tập hợp con của tập số phức, bởi vì nếu cho $b = 0$, thì $a + bi = a + 0i = a$ là một số phức.

## 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

Tất cả các số có dạng 0 + bi, với b là một số thực khác không được gọi là số thuần ảo. Ví dụ: *i*, *-2i*, *3i* là những số thuần ảo.

Số phức ghi ở dạng $z = a + bi$ được gọi là dạng đại số của số phức *z*.

# 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

## Định nghĩa sự bằng nhau

Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu chúng có phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau.

Nói cách khác, hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ bằng nhau khi và chỉ khi $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.

## Ví dụ

Cho $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = m + 3i$.

Tìm tất cả các số thực $m$ để $z_1 = z_2$.

## Giải

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow 2 + 3i = m + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = m \\ 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

---

## Định nghĩa phép cộng và phép trừ của hai số phức.

Cho $a + bi$ và $c + di$ là hai số phức, khi đó

Phép cộng: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$

Phép trừ: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)\, i$

## Ví dụ

Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$z = (3 + 5i) + (2 - 3i)$.

## Giải

$z = (3 + 5i) + (2 - 3i) = (3+2) + (5i - 3i) = 5 + 2i.$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 5;\ \mathrm{Im}(z) = 2.$$

## 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

### Định nghĩa phép nhân hai số phức.

Cho $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ là hai số phức, khi đó

$$z_1.z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

### Ví dụ

Tìm dạng đại số của số phức

$$z = (2 + 5i).(3 + 2i)$$

### Giải

$$z = (2 + 5i)(3 + 2i) = 2.3 + 2.2i + 3.5i + 5i.2i$$

$$= 6 + 4i + 15i + 10\, i^2 = 6 + 19i + 10(-1) = -4 + 19i$$

Vậy dạng đại số của số phức là: $z = -4 + 19i$.

---

**Cộng, trừ, nhân hai số phức:**

Khi cộng (trừ ) hai số phức, ta cộng (trừ ) phần thực và phần ảo tương ứng.

Nhân hai số phức, ta thực hiện giống như nhân hai biểu thức đại số với chú ý $i^2 = -1$.

# 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

## Định nghĩa số phức liên hợp

Số phức $\bar{z} = a - bi$ được gọi là số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$.

Ví dụ.

Tìm số phức liên hợp của số phức $z = (2 + 3i)(4 - 2i)$.

Giải.

$z = (2 + 3i)(4 - 2i) = 2.4 - 2.2i + 3i.4 - 3i.2i$

$= 8 - 4i + 12i - 6i^2 = 8 - 4i + 12i - 6(-1) = 14 + 8i.$

Vậy số phức liên hợp là $\bar{z} = 14 - 8i.$

---

## Tính chất của số phức liên hợp

Cho $z$ và $w$ là hai số phức; $\overline{z}$ và $\overline{w}$ là hai số phức liên hợp tương ứng. Khi đó:

1. $z+\overline{z}$ là một số thực.
2. $z\cdot\overline{z}$ là một số thực.
3. $z=\overline{z}$ khi và chỉ khi $z$ là một số thực.
4. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
5. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
6. $\overline{\overline{z}}=z$
7. $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ với mọi số tự nhiên $n$

# 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

## Phép chia hai số phức.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{b_1a_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}$$

Muốn chia số phức $z_1$ cho $z_2$, ta nhân tử và mẫu cho số phức liên hợp của mẫu. (Giả sử $z_2 \neq 0$ )

## 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

**Ví dụ.**

Thực hiện phép toán $\dfrac{3+2i}{5-i}$

**Giải.**

$$\frac{3+2i}{5-i}=\frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$$

Nhân tử và mẫu cho số phức liên hợp của mẫu là 5 + i.

$$=\frac{15+3i+10i+2i^2}{25+1}$$

$$=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Viết ở dạng Đại số

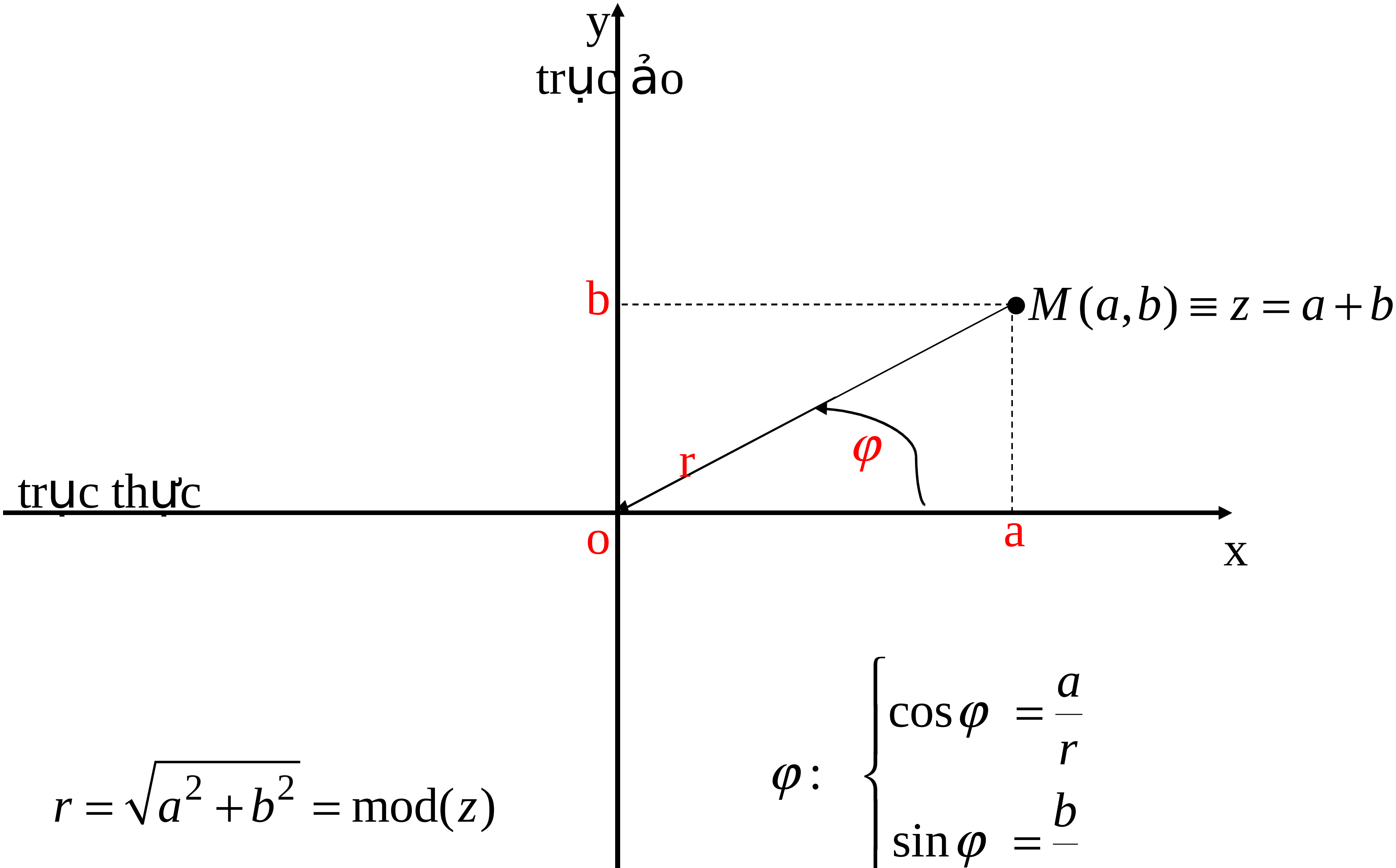
# 0.1 Dạng Đại số của số phức

---

**Lưu ý:** ***So sánh với số phức.***

Trong trường số phức không có khái niệm so sánh. Nói một cách khác, không thể so sánh hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ như trong trường số thực. Biểu thức $z_1 < z_2$ hoặc $z_2 \geq z_1$ không có nghĩa trong trường số phức **C** ngoại trừ chúng ta định nghĩa khái niệm so sánh một cách khác.

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức




$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{mod}(z)$$

$$\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

## 0.2 Dạng lượng giác của số phức

### Định nghĩa Môđun của số phức

Môđun của số phức $z = a + bi$ là một số thực dương được định nghĩa như sau:

$$\operatorname{mod}(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### Ví dụ

Tìm môđun của số phức $z = 3 - 4i$.

### Giải

$a = 3; b = -4$. Vậy $\operatorname{mod}(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$

Chú ý:

Nếu coi số phức $z = a + bi$ là một điểm có tọa độ (a, b), thì

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2}$$

là khoảng cách từ điểm (a, b) đến gốc tọa độ.

Cho $z = a + bi$ và $w = c + di$.

$$|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

là khoảng cách giữa hai điểm (a, b) và (c,d).

Ví dụ

Tìm tất cả các số phức z thỏa

$$|z - 2 + 3i| = 5$$

Giải

$$|z - 2 + 3i| = 5$$

$$\Leftrightarrow |z - (2 - 3i)| = 5$$

đường tròn tâm (2,-3) bán kính bằng 5.

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức

---

## Định nghĩa argument của số phức

Góc $\varphi$ được gọi là argument của số phức $z$ và được ký hiệu là $\arg(z) = \varphi.$

## Lưu ý.

Góc $\varphi$ được giới hạn trong khoảng

$0 \le \varphi < 2\pi$ hoặc $-\pi < \varphi \le \pi$

## Công thức tìm argument của số phức.

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

Ví dụ

Tìm argument của số phức $z = \sqrt{3} + i.$

Giải

$a = \sqrt{3}; b = 1.$ Ta tìm góc $\varphi$ thỏa:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$

Vậy $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức

$$z = a + bi;\quad a^2 + b^2 > 0$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$z = \quad r \quad (\cos\varphi \quad + \quad i\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \leftarrow \boxed{\text{Dạng lượng giác của số phức}}$$

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức

Ví dụ

Tìm dạng lượng giác của số phức $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Giải

$a = -1; b = \sqrt{3}$. Môđun: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Argument:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{3+1}} = \frac{-1}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$

Dạng lượng giác: $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

## 0.2 Dạng lượng giác của số phức

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1);\, z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Sự bằng nhau giữa hai số phức ở dạng lượng giác

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \end{cases}$$

Phép nhân ở dạng lượng giác

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Nhân hai số phức ở dạng lượng giác: môđun nhân với nhau và argument cộng lại.

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức

**Ví dụ**

Tìm dạng lượng giác, môđun và argument của số phức

$$z = (1+i)(1-i\sqrt{3}).$$

**Giải**

$$z = (1+i)(1-i\sqrt{3})$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \cdot 2(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})$$

$$z = 2\sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{3})]$$

Dạng lượng giác: $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12}).$

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_2 \neq 0 \iff r_2 > 0.$$

Phép chia hai số phức ở dạng lượng giác

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

Chia hai số phức ở dạng lượng giác: môđun chia cho nhau và argument trừ ra.

# 0.2 Dạng lượng giác của số phức

Ví dụ

Tìm dạng lượng giác, môđun và argument của số phức

$$z = \frac{2 - i\sqrt{12}}{-\sqrt{3} + i}.$$

Giải

$$z = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i} = \frac{4(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})}{2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}$$

$$z = 2[\cos(\frac{-\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})]$$

Dạng lượng giác: $z = 2(\cos\frac{-7\pi}{6} + i\sin\frac{-7\pi}{6}).$

# 0.3 Dạng mũ của số phức

Định lý Euler (1707-1783)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$z = a + bi$ ← Dạng đại số của số phức z

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ← Dạng lượng giác của số phức z

$z = re^{i\varphi}$ ← Dạng mũ của số phức z

## 0.3 Dạng mũ của số phức

Ví dụ

Tìm dạng mũ của số phức sau

$$z = -\sqrt{3} + i$$

Dạng lượng giác: $z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

Dạng mũ: $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

# 0.3 Dạng mũ của số phức

Ví dụ

Biểu diễn các số phức sau lên mặt phẳng phức

$$z = e^{2+i\varphi};\ \varphi \in R$$

$$z = e^{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Môđun không thay đổi, suy ra tập hợp các điểm là đường tròn.

Ví dụ

Biểu diễn các số phức sau lên mặt phẳng phức

$$z = e^{a+3i};\ a \in R$$

$$z = e^{a}(\cos 3 + i\sin 3)$$

Argument không thay đổi, suy ra tập hợp các điểm là nửa đường thẳng nằm trong góc phần tư thứ 2.

# 0.4 Nâng số phức lên lũy thừa

## Định nghĩa phép nâng số phức lên lũy thừa bậc n

$$z = a + bi$$

$$z^2 = z \cdot z = (a+bi)(a+bi) = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$z^3 = (a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = \ldots$$

$$z^n = (a+bi)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}(bi) + C_n^2 a^{n-2}(bi)^2 + \ldots + C_n^n (bi)^n$$

$$z^n = A + iB$$

## 0.3 Nâng số phức lên lũy thừa

Ví dụ. Cho z = 2 + i. Tính $z^5$.

$$z^5 = (2+i)^5 =$$

$$= C_5^0 2^5 + C_5^1 2^4 i + C_5^2 2^3 i^2 + C_5^3 2^2 i^3 + + C_5^4 2 i^4 + C_5^5 i^5 =$$

$$= 32 + 5.16.i + 10.8.(-1) + 10.4.(-i) + 5.2.1 + i =$$

$$= -38 + 41i$$

# 0.3 Nâng số phức lên lũy thừa

-----------------------------------------------------------------

Lũy thừa bậc n của số phức $i$:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

## Lũy thừa bậc n của $i$

Giả sử $n$ là số tự nhiên, khi đó $i^n = i^r$, với $r$ là phần dư của $n$ chia cho 4.

Ví dụ

Tính $z = i^{1987}$

$$1987 = 4 \cdot 496 + 3$$

$$z = i^{1987}$$

$$= i^{4 \cdot 496 + 3} = i^3 = -i$$

## Ví dụ

Cho z = 1 + i.

a) Tìm $z^3$;

b) Tìm $z^{100}$.

$$a)\quad z^3 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3$$

$$z = 1 + 3i - 3 - i$$

$$z = -2 + 2i$$

*b*) Tính tööông töï raát phöùc taïp. Ta söû duïng caùch khaùc

# 0.3 Nâng số phức lên lũy thừa

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

$$z^n = z^{n-1} \cdot z = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Công thức De Moivre

Cho r > 0, cho n là số tự nhiên. Khi đó

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

# 0.3 Nâng số phức lên lũy thừa

Ví dụ. Sử dụng công thức de Moivre's, tính:

a) $(1 + i)^{25}$ b) $(-1+i\sqrt{3})^{200}$

c) $$\frac{(\sqrt{3}-i)^{17}}{(\sqrt{12}+2i)^{20}}$$

Giải. a) Bước 1. Viết 1 + i ở dạng lượng giác

$$z = 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Bước 2. Sử dụng công thức de Moivre's:

$$z^{25} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{25} = (\sqrt{2})^{25}(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4})$$

Bước 3. Đơn giản $z^{25} = 2^{12}\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

## Định nghĩa căn bậc n của số phức

Căn bậc n của số phức z là số phức $w$, sao cho $w^n = z$, trong đó n là số tự nhiên.

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

với $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Căn bậc n của số phức z có đúng n nghiệm phân biệt.

Ví dụ. Tìm căn bậc n của các số phức sau. Biểu diễn các nghiệm lên trên mặt phẳng phức.

a) $\sqrt[3]{8}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ c) $\sqrt[8]{\dfrac{16i}{1+i}}$

d) $\sqrt[6]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$ e) $\sqrt{5+12i}$ f) $\sqrt{1+2i}$

Giải câu a)

b) Viết số phức ở dạng lượng giác: $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$

Sử dụng công thức:

$$\sqrt[3]{8(\cos 0 + i\sin 0)} = z_k = 2\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$$

$$k = 0, 1, 2.$$

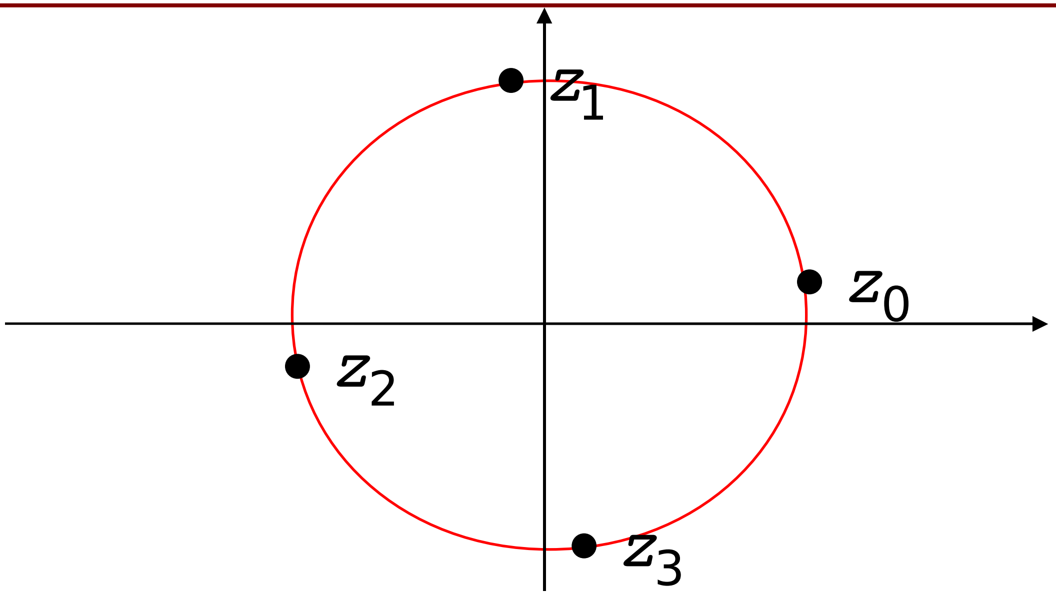
Giải câu b)

b) Viết số phức ở dạng lượng giác: $\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

Sử dụng công thức:

$$\sqrt[4]{2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})}=z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)$$

$$k=0,1,2,3.$$



# 0.5 Định lý cơ bản của Đại số

Nhà bác học người Đức Carl Friedrich Gauss (1777-1855) chứng minh rằng mọi đa thức có ít nhất một nghiệm.

## Số nghiệm của một đa thức

Đa thức *P(z)* bậc n có đúng n nghiệm kể cả nghiệm bội.

# 0.5 Định lý cơ bản của Đại số

Định lý cơ bản của Đại số cho biết được số nghiệm của phương trình mà không chỉ cách tìm các nghiệm đó như thế nào.

Nếu đa thức với hệ số thực, chúng ta có một hệ quả rất quan trọng sau đây

Hệ quả

Nếu $a + bi$ là một nghiệm phức của đa thức $P(z)$ với hệ số thực, thì $a - bi$ cũng là một nghiệm phức.

Ví dụ

(sử dụng hệ quả của định lý cơ bản)

1) Tìm đa thức bậc 3 với hệ số thực nhận $z_1 = 3i$ và $z_2 = 2+i$ làm nghiệm.

2) Tìm đa thức bậc 4 với hệ số thực nhận $z_1 = 3i$ và $z_2 = 2+i$ làm nghiệm.

1) Không tồn tại đa thức thỏa yêu cầu bài toán.

2) Đa thức cần tìm là:

$$P(z) = (z - z_1)(z - \overline{z_1})(z - z_2)(z - \overline{z_2})$$

$$P(z) = (z - 3i)(z + 3i)(z - (2 + i))(z - (2 - i))$$

$$P(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 4z + 5)$$

Ví dụ

(sử dụng hệ quả của định lý cơ bản)

Tìm tất cả các nghiệm của $P(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45$ biết $2 + i$ là một nghiệm.

Giải. Bởi vì đa thức với hệ số thực và $2 + i$ là một nghiệm, theo hệ quả ta có $2 - i$ là một nghiệm.

$P(z)$ có thể phân tích thành $(z - (2 + i))(z - (2 - i)) =$

$$= z^2 - 4z + 5$$

$P(z)$ có thể ghi ở dạng

$$P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 9)$$

$z^2 + 9$ có hai nghiệm 3i và $-3i$. Vậy ta tìm được cả 4 nghiệm của $P(z)$ là $2 + i$, $2 - i$, $3i$, $-3i$.

## Ví dụ

Giải phương trình sau trong C.

$$z^9 + i = 0$$

$$z^9 = -i \iff z = \sqrt[9]{-i} \iff z = \sqrt[9]{\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow z_k = \cos\frac{\frac{-\pi}{2} + k2\pi}{9} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{2} + k2\pi}{9}$$

$$k = 0,1,\ldots,8.$$

Ví dụ. Giải các phương trình sau trong C.

a) $z^5 + 1 - i = 0$

b) $z^2 + z + 1 = 0$

c) $z^4 + z^2 + 2 = 0$

d) $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

Giải. Giải phương trình $az^2 + bz + c = 0$

Bước 1. Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Bước 2. Tìm $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \Delta_{1,2}$

Bước 3. $z_1 = \dfrac{-b + \Delta_1}{2a}$; $z_2 = \dfrac{-b + \Delta_2}{2a}$

# Kết luận

1. Dạng Đại số của số phức

$$z = a + bi$$

2. Dạng Lượng giác của số phức

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

3. Nâng lên lũy thừa

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

4. Căn bậc n của số phức

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})$$

$$k = 1,2,3,\ldots,n-1.$$

C m╣n các em nhi u!