Bài thảo luận NHÓM 10 " PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN "

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Nhóm 10 – lớp HP : 1111FMAT0211

Thành viên nhóm	**Thành viên tham gia thảo luận**	**Vấn đề thảo luận được phân công**
Nguyễn Tài Nguyên	Nguyễn Tài Nguyên (nhóm trưởng)	Ứng dụng của phương trình vi phân trong kinh tế - Tổng hợp kết quả thảo luận
Đoàn Thị Thanh Nhàn	Đoàn Thị Thanh Nhàn	Ứng dụng của phương trình vi phân trong kinh tế
Hà Văn Phúc	Hà Văn Phúc	
Trần Trọng Phúc	Trần Trọng Phúc	
Lương Thị Thùy Ninh	Lương Thị Thùy Ninh (thư ký)	Giải bài tập trong giáo trình
Chu Thị Phương	Chu Thị Phương	
Trần Thị Phương	Trần Thị Phương	Lý thuyết cơ bản
Phạm Thị Hồng Nhung	Phạm Thị Hồng Nhung	
Trịnh Hồng Phúc		(không tham gia thảo luận)

MỤC LỤC

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

-------****-------

BIÊN BẢN THẢO LUẬN

Học phần : Toán cao cấp 2

Nhóm 10 - lớp HP : 0111FMAT0211

Đề tài thảo luận : Phương trình vi phân

Địa điểm thảo luận : Sân nhà G, trường Đại học Thương Mại

Thời gian : 14h ngày 15/03/2011

Phân công thảo luận (danh sách kèm theo bên trên)

Hà Nội ngày 15/11/2011

Nhóm trưởng

Thư ký

1. Lý thuyết cơ bản

Trong rất nhiều lĩnh vực, chuyển động của một hệ được mô hình hóa bởi các *phương trình vi phân*, tức là phương trình có chứa các đạo hàm của ẩn hàm cần tìm. Chẳng hạn, trong cơ học cổ điển (Newton), trong thiên văn học (sự chuyển động của các hành tinh), trong hóa học (các phản ứng hóa học, sự phân rã phóng xạ), trong sinh học (sự phát triển quần thể, quần xã), trong xã hội học (sự phát triển dân số), trong điện tử…Trong hầu hết các lĩnh vực như thế, bài toán chung nhất là việc mô tả nghiệm của phương trình này (cả về định tính lẫn định lượng).

1.1 Vài mô hình đơn giản

Sự rơi tự do. Xét một vật có khối lượng m được thả rơi tự do trong khí quyển gần mặt đất. Theo định luật II Newton, chuyển động của vật đó có thể được mô tả bởi phương trình

$$F = ma \qquad (1)$$

Trong đó F là hợp lực tác dụng lên vật và a là gia tốc chuyển động của vật. Hợp lực F có thể giả thiết là chỉ bao gồm lực hấp dẫn (tỉ lệ với khối lượng của vật và hướng xuống) và lực cản (tỉ lệ với vận tốc của vật và hướng lên trên). Ngoài ra, do gia tốc chuyển động $a = \frac{dv}{dt}$ nên (1) có thể viết dưới dạng

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \infty v \qquad (2)$$

$g \approx 9{,}8\frac{m}{s^2}$ là gia tốc trọng trường, còn ∞ là hệ số cản.

Vậy vận tốc v của vật rơi tự do thỏa mãn phương trình (2) với sự xuất hiện của đạo hàm của v. Những phương trình như vậy gọi là *phương trình vi phân*.

Dung dịch hóa học. Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = t_0$ một thùng chứa x_0 kg muối hòa tan trong 1000 lít nước. Ta cho chảy vào thùng một loại nước muối nồng độ a (kg/lít) với lưu lượng r(lít/phút) và khuấy đều. Đồng thời cho hỗn hợp đó chảy ra khỏi thùng cũng với tốc độ như trên. Gọi x = x(t) là lượng muối trong thùng tại thời điểm bất kỳ. Rõ ràng tỉ lệ thay đổi lượng muối trong thùng $\frac{dx}{dt}$ bằng hiệu của tỉ lệ muối chảy vào ar (kg/phút) trừ đi tỉ lệ muối chảy ra tại thời điểm đang xét $\frac{rx}{1000}$ (kg/phút). Vậy ta có *phương trình vi phân*

$$\frac{dx}{dt} = ar - \frac{rx}{1000}$$

với dữ kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$

1.2 Khái niệm *phương trình vi phân*

1.2.1 *Phương trình vi phân*

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ giữa biến độc lập (hay các biến độc lập), hàm chưa biết và đạo hàm của hàm số đó. *Phương trình vi phân* có dạng

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Trong đó $y = y(x)$ là ẩn hàm cần tìm và nhất thiết phải có sự tham gia của đạo hàm (đến cấp nào đó) của ẩn.

Trong trường hợp ẩn hàm cần tìm là hàm nhiều biến (xuất hiện các đạo hàm riêng) thì *phương trình vi phân* còn được gọi là phương trình đạo hàm riêng. Để phân biệt, người ta thường gọi phương trình với ẩn hàm là hàm một biết là *phương trình vi phân* thương và là đối tượng nghiên cứu của bài thảo luận này.

Ta nói một *phương trình vi phân* cấp n nếu n là cấp lớn nhất của đạo hàm của ẩn xuất hiện trong phương trình.

Ví dụ :

$$e^y - y''xcosx = 0$$

$$4y'''\sqrt{x^3} - y'' = 0$$

$$yx - y' = y'xlnx$$

lần lượt là các *phương trình vi phân* cấp II, cấp III và cấp I.

1.2.2 Nghiệm của phương trình vi phân

Cho một *phương trình vi phân* cấp n. Mọi hàm số, khả vi đến cấp n mà khi thay vào phươn trình đó cho ta đồng nhất thức đều gọi là nghiệm của *phương trình vi phân* đó.

Ví dụ :

Cho *phương trình vi phân* :

$$y' = 2\sqrt{y}$$

Nghiệm của phương trình là mọi hàm dạng $y = (x + C)^2$ với C là hằng số tùy ý. Thật vậy, $y' = 2(x + C)$ thay vào phương trình ta được

$y' = 2(x + C) = 2\sqrt{(x + C)^2} = 2\sqrt{y}$

1.3 *Phương trình vi phân* cấp I

Phương trình vi phân cấp I là *phương trình vi phân* ở dạng đơn giản nhất và là nền tảng cho các *phương trình vi phân* ở cấp cao hơn.

1.3.1 Dạng biểu diễn

Phương trình vi phân cấp I có dạng tổng quát là $F(x, y, y') = 0$. Ở đây, F là hàm 3 biến.

Phương trình sau gọi là *phương trình vi phân* cấp I, giải được với đạo hàm

$y' = f(x, y)$ hay $\frac{dx}{dy} = f(x, y)$

$f(x, y)$ là hàm 2 biến, xác định trong miền D nào đó thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy.

Phương trình vi phân cấp I có thể được cho với biến x, biến y có vai trò bình đẳng.

$$f(x, y)dx = g(x, y)dy$$

Khác với các trường hợp ban đầu, phương trình cuối có thể có nghiệm dạng $x = C$ với C là hằng số.

1.3.2 Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Định nghĩa 1. Họ các hàm số dạng $y = \varphi(x, C)$, trong đó C là hằng số tự do, thỏa mãn phương trình đã cho gọi là nghiệm tổng quát của phương trình.

$y = (x + C)^2$ là nghiệm tổng quát của phương trình

$$y' = 2\sqrt{y}$$

Định nghĩa 2. Nếu từ nghiệm tổng quát cho hằng số cụ thể $C = C_0$thì hàm số $y = \varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng của phương trình ấy.

- *Lưu ý rằng phương trình có những nghiệm có thể không chứa trong nghiệm tổng quát với bất kỳ hằng số cụ thể nào.*

Phương trình

$$y' = 2\sqrt{y}$$

Có nghiệm $y = 0$ những lại không chứa trong nghiệm tổng quát.

Định nghĩa 3. Giải *phương trình vi phân* cấp I được kết quả ở dạng $\delta(x, y, C) = 0$ với C là hằng số tùy ý thì $\delta(x, y, C) = 0$ gọi là tích phân tổng quát của phương trình. Với $C = C_0$, đẳng thức $\delta(x, y, C_0) = 0$ gọi là tích phân riêng của phương trình.

Ví dụ. Phương trình $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$ có tích phân tổng quát là $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

1.3.3 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

1.3.3.1 Bài toán Cauchy

Ta nhận xét rằng nghiệm của một *phương trình vi phân* nói chung phụ thuộc vào một hay nhiều hằng số tùy ý nào đó. Để xác định một nghiệm cụ thể, ta cần thêm một hay nhiều hằng số tùy ý nào đó (tùy theo cấp của *phương trình vi phân*). Chẳng hạn, $y = \frac{x^3}{3}$ là nghiệm của phương trình $y' = x^2$. Dễ thấy $y = \frac{x^3}{3}$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$.

Ta xét bài toán sau đây, gọi là bài toán Cauchy

Tìm nghiệm $y(x)$ thỏa mãn $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Trong đó $(x_0, y_0) \in D$ được gọi là điều kiện ban đầu.

Vậy thì, câu hỏi đặt ra là liệu bài toán trên có **Lời giải** không, và nếu có thì sẽ có bao nhiêu **Lời giải**. Người ta đã chứng minh được rằng không phải lúc nào bài toán Cauchy cũng có nghiệm và khi có nghiệm thì cũng không nhất thiết là chỉ có duy nhất nghiệm. Chẳng hạn, phương trình $y' = x^2, y(0) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm là $y = \frac{x^3}{3}$. Phương trình $xy' = y, y(0) = 1$ không có nghiệm nào. Còn phương trình $y' = y^{\frac{1}{3}}, y(0) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm (tích phân) là $y = 0$ *v*à $y^2 = \frac{8}{27}x^3$.

Trong mục sau ta sẽ phát biểu định lý giải quyết trọn vẹn bài toán Cauchy cho phươgn trình vi phân cấp I.

1.3.3.2 Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Cho *phương trình vi phân* cấp I, giải được với đạo hàm $y' = f(x,y)$. Nếu hàm số $f(x,y)$ liên tục trên miền mở *D* có chứa điểm (x_0, y_0) thì tồn tại một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình đó, sao cho $y_0 = y(x_0)$. Nếu đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ cũng liên tục trên *D* thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất.

Điều kiện $y_0 = y(x_0)$ gọi là điều kiện ban đầu. Điều kiện ban đầu được ký hiệu

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

1.4 *Phương trình vi phân* cấp II

1.4.1 Mở đầu về phương trình vi phân cấp II

Phương trình vi phân cấp II có dạng tổng quát

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

Trong đó nhất thiết không được thiếu y''.

Dạng giải được đối với đạo hàm bậc hai :

$$y'' = f(x,y,y')$$

1.4.2 Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Xét phương trình $y'' = f(x,y,y)$. Nếu hàm số $f(x,y,y')$ liên tục trên miền mở D nào đó chứa điểm $(x_0, y_0, {y'}_0)$ thì tồn tại nghiệm $y = y(x)$ của phương trình sao cho $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = {y'}_0$. Nếu $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y\prime}$ cũng liên tục trên D thì nghiệm nói trên là nghiệm duy nhất.

2. Các dạng bài tập

2.1 *Phương trình vi phân* cấp I

2.1.1 *Các dạng phương trình vi phân cấp I có thể giải được và phương pháp giải*

Trong phần này, ta sẽ giới thiệu một số dạng *phương trình vi phân* cấp I mà có thể tích phân được theo nghĩa có thể viết biểu thức của nghiệm tổng quát dưới dạng tường minh hoặc phụ thuộc tham số. Ta nói một *phương trình vi phân* là cầu phương được nếu có thể biểu diễn nghiệm của nó dưới dạng tổ hợp hữu hạn các phép toán trên các hàm sơ cấp và tích phân của chúng. Lưu ý rằng ta không có phương pháp giải tổng quát cho các *phương trình vi phân*, thậm chí với những *phương trình vi phân* cấp I. Điều đó cũng có nghĩa là không phải tất cả các *phương trình vi phân* (kể cả cấp I) đều giải được.

2.1.2 Phương trình với biến số phân ly

Phương trình vi phân cấp I với biến số phân ly (hay còn gọi là phương trình tách biến) là *phương trình vi phân* có dạng

$$f(x)dx = g(y)dy$$

Cách giải: Các hàm $f(x), g(y)$ được giả thiết liên tục trên các khoảng nào đó. Khi đó chỉ cần tích phân 2 vế của phương trình là ta thu được tích phân tổng quát của nó.

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$$

Ví dụ: Giải phương trình $y^2y' - x(1+x^2)dx = 0$

Nhận xét: Phương trình có dạng phân ly biến số.

Tích phân 2 vế ta thu được tích phân tổng quát

$$\frac{y^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = C$$

Nhận xét. Các phương trình dạng $y' = f(x)g(y); f(x)dx + g(y)dy = 0$ $hoặc\, M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)du = 0$ đều có thể đưa về được phương trình có biến số phân ly.

a) Phương trình có dạng $y' = f(x)g(y)$

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$$

$$\Leftrightarrow f(x)dx = g(y)dy$$

b) Phương trình có dạng $f(x)dx + g(y)dy = 0$

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \Leftrightarrow f(x)dx = -g(y)dy$$

c) Phương trình có dạng $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x)N(y)dx = -P(x)Q(y)dy$$

* Nếu $N(y)P(x) \neq 0$ chia cả 2 vế cho $N(y)P(x)$.

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

là phương trình dạng trên. Tích phân cả 2 vế

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C$$

* Trường hợp N(y) hoặc P(x) bằng 0 thì phải thử trực tiếp vào phương trình. Tuy nhiên phép thử chỉ mang ý nghĩa tượng trưng, ta sẽ luôn có nghiệm $x = a\ (y \neq b)$ và $y = b\ (x \neq a)$

Ví dụ. Giải phương trình

$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$

Nhận xét : $(1 + y^2)(1 + x^2) \neq 0$, nên ta có

$$\frac{x}{(1 + x^2)}dx + \frac{y}{(1 + y^2)}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{x}{(1 + x^2)}dx + \int \frac{y}{(1 + y^2)}dy = C$$

Tức là $\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = C := \frac{1}{2}\ln C_1$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình đã cho là $(1 + x^2)(1 + y^2) = C_1$ trong đó C_1 là hằng số dương tùy ý.

2.1.3 Phương trình đẳng cấp cấp I

Định nghĩa 1. Hàm $f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc m nếu với mọi t ta có

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Định nghĩa 2. Phương trình

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Trong đó $M(x,y), N(x,y)$ là các hàm đẳng cấp cùng bậc được gọi là phương trình đẳng cấp.

Phương trình cuối luôn có thể được biến đổi về dạng

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$$

Cách giải:

Đặt $y = xu$, ta có $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Từ đó

$$x\frac{du}{dx} + u = g(u)$$

Hay $x\frac{du}{dx} = g(u) - u$

Nếu $g(u) - u \neq 0$ thì ta có $\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$ hay

$\ln|x| = \int \frac{du}{g(u)-u} + \ln|C| = \theta(u) + \ln|C|$

Hay $x = Ce^{\theta(u)}$

Nếu $g(u) - u = 0$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy hàm $y = u_0x$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ. Giải phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Lời giải. Đặt $y = ux$, khi đó

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

Phương trình có dạng

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x+ux}{x}$$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow xdu = dx \Leftrightarrow u = \ln|x| + C$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta có $y = x(\ln|x| + C)(x \neq 0)$

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ DẠNG ĐẲNG CẤP

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$$

Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$, ta đặt $\begin{cases} x = \varepsilon + \alpha \\ y = \mu + \beta \end{cases}$ với ε, μ là các biến mới, còn α, β là các hằng số thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình được đưa về dạng đẳng cấp có dạng

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon} = f\left(\frac{a_1\varepsilon + b_1\mu}{a\varepsilon + b\mu}\right)$$

Nếu $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ thì đưa phương trình đã cho về dạng

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c}{ax + by + c}\right) \equiv f_1(ax + by)$$

Đặt $z = ax + by$, đưa về phương trình có vế phải không chứa biến x.

Ví dụ. Giải phương trình :

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

Ta có định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Giải hệ

$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$ ta được $\alpha = -1, \beta = 3.$ Đặt

$\begin{cases} x = \varepsilon - 1 \\ y = \mu + 3 \end{cases}$, đưa phương trình về dạng

$$(\varepsilon + \mu)d\varepsilon + (\varepsilon - \mu)d\mu = 0$$

Đây là phương trình đẳng cấp. Giải bằng phép đổi biến $\mu = u\varepsilon$, ta được $\varepsilon^2 + 2\varepsilon\mu - \mu^2 = C$

Trở về biến x, y theo công thức đặt ban đầu. Tích phân tổng quát của phương trình này là

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$$

2.1.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp I

Trong mục này ta xét lớp các *phương trình vi phân* mà biểu thức là tuyến tính đối với ẩn và đạo hàm của nó. Các phương trình như thế gọi là *phương trình vi phân* tuyến tính. Dạng tổng quát của *phương trình vi phân* cấp I là

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm xác định trên (a, b) nào đó.

Với $q(x) \equiv 0$ ta có *phương trình vi phân* tuyến tính thuần nhất :

$$y' + p(x)y = 0$$

Định lý. Giả sử $p(x), q(x)$ liên tục trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$ thì với mọi giá trị y_0 phương trình tuyến tính thuần nhất chỉ có một nghiệm duy nhất thỏa mãn $y(x_0) = y_0$.

Cách giải. Ta giải *phương trình vi phân* tuyến tính bằng phương pháp biến thiên hằng số. Để giải được *phương trình vi phân* tuyến tính trước hết ta phải giải phương trình tuyến tính thuần nhất $y' + p(x)y = 0$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow y = 0; \ln|y| = \int -p(x)dx + \ln|C|$$

$$(C \neq 0)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Coi C là một hàm của x : $C = C(x)$, khi đó

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Và do đó

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\int p(x)\,dx}\frac{dC}{dx} + C(-p(x))e^{-\int p(x)\,dx}$$

Thay vào phương trình : $y' + p(x)y = q(x)$, ta được

$$\frac{dC}{dx} = q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\Leftrightarrow C = \int q(x)e^{\int p(x)\,dx} + D$$

Thay C vào nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, ta có nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất :

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx} + D\right)e^{-\int p(x)\,dx}$$

D là hằng số tùy ý.

Ví dụ : Tìm nghiệm của *phương trình vi phân*

$$y' + 3xy = x$$

,đi qua điểm (0 ; 4)

Lời giải. Ta có $p(x) = 3x \Rightarrow \int p(x)dx = \frac{3x^2}{2}$. Do đó nghiệm tổng quát là

$$y = e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(\int xe^{\frac{3x^2}{2}} + C\right)$$

$$= e^{-\frac{3x^2}{2}}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{3x^2}{2}} + C\right) = \frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3x^2}{2}}$$

Thay $x = 0, y = 4$ vào đẳng thức trên ta tìm được $C = \frac{11}{3}$ và nghiệm riêng cần tìm là

$$y = \frac{1}{3} + \frac{11}{3}e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

* Hệ quả : Nghiệm của *phương trình vi phân* tuyến tính cấp I với điều kiện $y(x_0) = y_0$ cho bởi công thức

$$y(x) = \frac{\int_{x_0}^{x} q(t)\mu(t)dt + y_0}{\mu(x)}$$

Trong đó $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$

2.1.5 Phương trình Bernoulli

Phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = y^{\propto} g(x)$$

trong đó $\propto$ là số thực nào đó, được gọi là phương trình Bernoulli. Các hàm $p(x), q(x)$ được giả thiết là các hàm liên tục.

Cách giải.

1) Nếu $\propto = 0$ thì phương trình Bernoulli là phương trình tuyến tính cấp I.
2) Nếu $\propto = 1$ thì phương trình Bernoulli là phương trình tuyến tính cấp I thuần nhất do sẽ biến đổi được dưới dạng $y' + [p(x) - q(x)]y = 0$.
3) Nếu $\propto < 0$ thì chia cả 2 vế của phương trình cho $y^{\propto}$ ta được

$$y^{-\propto} y' + p(x) y^{1-\propto} = q(x)$$

Đặt $y^{1-\propto} = z$, đưa phương trình về dạng phương trình tuyến tính.

$$\frac{z'}{1-\propto} + p(x)z = q(x)$$

$$z' + (1-\propto)p(x)z = (1-\propto)q(x)$$

4) Nếu $0 < \propto \neq 1$ thì ngoài nghiệm như ở 3) còn có thêm nghiệm $y = 0$.

Ví dụ : Giải phương trình $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

Rõ ràng đây là phương trình Bernoulli với $\propto = \frac{1}{2}$ và $y = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Giả sử $y \neq 0$, chia cả 2 vế cho $xy^{\frac{1}{2}}$ ta được :

$$y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}y^{\frac{1}{2}} = x$$

Đặt $z = y^{\frac{1}{2}}$ ta có $z' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$. Khi đó phương trình đã cho trở thành *phương trình vi phân* tuyến tính không thuần nhất.

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$$

Giải phương trình này ta được nghiệm

$$z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)$$

Do đó phương trình có nghiệm tổng quát là

$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)$

Và 1 nghiệm là $y = 0$

2.2 *Phương trình vi phân* cấp II

2.2.1 Các trường hợp giảm cấp được

2.2.1.1 Trường hợp vế phải không phụ thuộc vào y, y'

Phương trình có dạng $y'' = f(x)$

Cách giải. Lấy tích phân liên tiếp 2 lần

$$y' = \int f(x)dx + C$$

$$\Rightarrow y = \int\left(\int f(x)dx + C\right) + D$$

2.2.1.2 Trường hợp vế phải không phụ thuộc vào y

Phương trình $y'' = f(x, y')$

Cách giải. Đặt $y' = p \rightarrow y'' = p'$. Khi đó phương trình có dạng $p' = f(x, p)$. Đây là *phương trình vi phân* cấp I đối với hàm p. Giả sử nghiệm tổng quát của phương trình này là $p = \varphi(x, C)$. Khi đó ta có $y' = \varphi(x, C)$. Giải tiếp được nghiệm

$$y = \int \varphi(x, C)dx + D$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y'' = x - \frac{y'}{x}$$

Lời giải. Đặt $p = y'$, đưa phương trình về dạng

$$p' + \frac{1}{x}p = x \rightarrow p = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

Thay p bởi y', ta có $y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$. Nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$y = \frac{x^3}{9} + C.ln|x| + D$$

2.2.1.3 Trường hợp vế phải không chứa x

Phương trình có dạng $y'' = f(y, y')$

Cách giải. Trước tiên kiểm tra trường hợp $y = 0$. Trường hợp còn lại đặt $y' = p(x)$, ta có

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Thay vào phương trình ta có $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$. Giả sử phương trình này có nghiệm là $p = \varphi(y, C)$. Giải tiếp phương trình $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C)$, ta được $\frac{dy}{\varphi(y,C)} = dx$. Từ đây ta có

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C)} = x + D$$

Ví dụ. Giải phương trình

$$2yy'' = y'^2 + y^2$$

Lời giải. Phương trình có nghiệm $y = 0$. Trường hợp còn lại đặt $y' = p(y)$, ta có $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Thay vào phương trình ta được

$$2yp.\frac{dp}{dy} = p^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{dp^2}{dy} = \frac{1}{y}p^2 + y$$

Đây là *phương trình vi phân* tuyến tính cấp I của hàm p^2 theo biến độc lập y. Giải theo phương pháp biến thiên hằng số, ta được nghiệm tổng quát là $p^2 = y^2 + Cy$ (C tùy ý). Thay lại biến cũ $\frac{dy}{dx} = y' = \pm\sqrt{y^2 + Cy}\,(y^2 + Cy > 0) \Leftrightarrow dx = \pm\frac{dy}{\sqrt{y^2+Cy}} \Leftrightarrow x = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+Cy}} + D$ (D tùy ý).

2.2.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp II

Phương trình vi phân tuyến tính cấp II là phương trình có dạng

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

- Nếu $f(x) \neq 0$ thì phương trình không thuần nhất.
- Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình thuần nhất.

Định lý nghiệm. Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$ bằng tổng của nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất và một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

Nguyên lý chồng chất nghiệm. Cho phương trình

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) + g(x)$$

Nếu y_1 là nghiệm riêng của phương trình của phương trình

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

Nếu y_2 là nghiệm riêng của phương trình của phương trình

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$$

Thì $y = y_1 + y_2$ là nghiệm riêng của phương trình ban đầu.

Lưu ý : Kết quả này có thể mở rộng cho trường hợp vế phải là tổng của n hàm.

2.2.3 Phương trình tuyến tính cấp II hệ số hằng

Phương trình $y'' + py' + qy = f(x)$ được gọi là phương trình tuyến tính cấp II hệ số hằng, với p, q là hằng số.

Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình được gọi là *phương trình vi phân* tuyến tính cấp II thuần nhất.

Cách giải. Ta giải phương trình bằng cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. (áp dụng các định lý của phần 1.4.4)

2.2.3.1 Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Ta tìm nghiệm riêng độc lập tuyến tính (tức là chúng không tỉ lệ) của phương trình thuần nhất dưới dạng $y = e^{kx}, k \in C$. Tính y', y'', thay vào phương trình thuần nhất ta có

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Leftrightarrow k^2 + pk + q = 0$$

Đây là một phương trình đại số, nghiệm phức. Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của hai phương trình trên. Ta dùng ký hiệu $\bar{y}$ để chỉ nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Định lý về nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất.

Nếu phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

Nếu phương trình đặc trưng có các nghiệm thực trùng nhau thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$$

Nếu phương trình đặc trưng co 2 nghiệm phức liên hợp là $k_{1;2} = \propto \pm \beta i$ thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = e^{\propto x}[C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x]$$

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

Lời giải. Xét phương trình đặc trưng $k^2 + 2k + 2 = 0$ có nghiệm là $k_{1;2} = -1 \pm i$

→ nghiệm tổng quát của phương trình là

$$\bar{y} = e^{-x}(C_1 cosx + C_2 sinx)$$

2.2.3.2 Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

<u>Trường hợp 1</u>. $f(x) = e^{\propto x}P_n(x)$ với $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x còn $\propto$ là hằng số thực, $n \in Z^+$. Nghiệm riêng $\hat{y}$.

Nếu $\propto$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm ở dạng $\hat{y} = e^{\propto x}Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là đa thức với các hệ số chưa biết và có thể được xác định bằng phương pháp hệ số bất định.

Nếu $\propto$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng thì có thể tìm ở dạng $\hat{y} = xe^{\propto x}Q_n(x)$

Nếu $\propto$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm ở dạng $\hat{y} = x^2e^{\propto x}Q_n(x)$

Ví dụ. Giải phương trình

$$y'' + 5y' + 6y = 3$$

Lời giải. Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -3, k_2 = -2$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\bar{y} = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$$

→ Ta tìm nghiệm riêng ở dạng $y = A$. Thay vào phương trình ta được $6A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất là $\hat{y} = \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = \hat{y} + \bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

<u>Trường hợp 2</u>

$$f(x) = e^{\propto x}[P_n(x)cos\beta x + P_m(x)sin\beta x]$$

Nếu $\propto \pm\beta i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm ở dạng :

$$\hat{y} = e^{\propto x}[Q_l(x)cos\beta x + R_l(x)sin\beta x]; l = max\{n; m\}$$

Nếu $\propto \pm\beta i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm ở dạng

$$\hat{y} = xe^{\propto x}[Q_l(x)cos\beta x + R_l(x)sin\beta x]; l = max\{n; m\}$$

Ví dụ. Giải phương trình $y'' + 4y = sin2x$

Xét phương trình đặc trưng : $k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2i$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$y = x(Acos2x + Bsin2x)$$

So sánh các hệ số, tìm được $A = -\frac{1}{4}, B = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là

$$y = C_1 cos2x + C_2 sin2x - \frac{1}{4}xcos2x$$

3. Ứng dụng của phương trình vi phân trong kinh tế

PHÂN TÍCH ĐỘNG TRONG KINH TẾ

3.1Một số mô hình *phương trình vi phân* cấp I

3.1.1 Mô hình tăng trưởng Domar

Mô hình tăng trưởng cổ điển của giáo sư Domar đề cập đến việc xác định luồng đầu tư đảm bảo cho nền kinh tế luôn ở trạng thái cân bằng. Mô hình này được xác lập trên cơ sở các giả thiết:

- Các yếu tố sản xuất được sử dụng theo một tỉ lệ cố định

$$\frac{K}{L} = const$$

Do đó có thể xét hàm sản xuất như là hàm số một biến K

$$Q = f(K)$$

Trong đó Q là sản lượng tiềm năng và K là tư bản.

- Tỉ lệ giữa Q và K là không đổi, tức là $Q = \beta K$ $(\beta > 0)$
- Nền kinh tế luôn ở trạng thái sản xuất, tức là thu nhập Y bằng sản lượng tiềm năng Q^t
- Xu hướng tiết kiệm cận biên không đổi và đầu tư bằng tiết kiệm $I = S = sY$ (s là xu hướng tiết kiệm cận biên)

Ta xét các biến số nêu trên như các hàm số của biến thời gian t. Tại thời điểm t, lượng đầu tư I(t) biểu thị tốc độ gia tăng quỹ vốn K(t), do đó

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt}$$

Theo giả thiết thứ hai

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\beta dK}{dt} = \beta I$$

Theo giả thiết thứ ba

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dY}{dt}$$

Theo giả thiết thứ tư

$$\frac{dI}{dt} = \frac{sdY}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt}$$

Kết hợp các kết quả trên suy ra

$$\frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \beta I$$

Đây là phương trình tuyến tính thuần nhất. Giải phương trình này ta được quỹ đạo thời gian của biến số I :

$$I = Ae^{\beta st}$$

Với t=0 ta có I(0)=A, do đó

$$I = I(0)e^{\beta st}$$

Trong đó I(0) là lượng đầu tư ban đầu (tại thời điểm xuất phát). Do $\beta > 0$ và $s > 0$ nên với $I(0) > 0$, I tăng không ngừng. Trạng thái cân bằng không tồn tại vài $I \to +\infty$ khi $t \to +\infty$.

3.1.2 Mô hình tăng trưởng Solow

Trong mô hình Domar, sản lượng tiềm năng được xét như là hàm số của 1 biếnK . Sự vắng mặt của các biến số khác, trong đó có biến số lao động L hàm ý rằng lao động và vốn được kết hợp theo 1 tỉ lệ xác định. Khác với Domar, giáo sư Solow đã tìm ra cách phân tích tăng trưởng trong điều kiện vốn và lao động được kết hợp theo tỉ lệ thay đổi.

3.1.2.1 Thiết lập mô hình, giả thiết

Ta xuất phát từ hàm sản xuất $Q = F(K, L)$ trong đó các biến số được xét trong kinh tế vĩ mô.

Mô hình Solow được thiết lập với các giả thiết chính sau

- Hàm sản xuất là hàm thuần nhất bậc 1

  Với giả thiết này ta có $Q = L.f(k)$ với $k = \frac{K}{L}$ là tỉ số vốn – lao động. Biến k biểu thị hàm lượng vốn tính bình quân cho một đơn vị lao động.

- Tại thời điểm nền kinh tế phát huy hết tiềm năng công nghệ, tức là

$$Q(t) = Y(t)$$

- Tại mọi thời điểm một tỉ phần cố định của thu nhập được tiết kiệm và dùng hết cho đầu tư:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) = sY(t)$$

Trong đó s là xu hướng tiết kiệm cận biên.

- Lực lượng lao động tăng theo quy luật hàm số mũ

$$\frac{dL}{dt} = \tau L \; (\tau = const > 0)$$

Từ đồng nhất thức $K = kL$ ta có

$$\frac{dK}{dl} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt}$$

Kết hợp giả thiết thứ 2, thứ 3 và đẳng thức trên suy ra :

$$\frac{dK}{dt} = sQ = sL.f(k)$$

Kết hợp đẳng thức này với hệ thức giả thiết 4, ta có thể viết hệ thức

$$\frac{dK}{dl} = L\frac{dk}{dt} + k\frac{dL}{dt}$$

Dươi dạng

$$sL.f(k) = L\frac{dk}{dt} + k\tau L$$

Từ đây thì ta có mô hình Solow

$$\frac{dk}{dt} = s.f(k) - \tau k \; (3.1)$$

Mô hình này cho ta phân tích quỹ đạo thời gian của biến số k

3.1.2.2 Phân tích

Ta xét hàm sản xuất ở dạng Cobb-Douslas

$$Q = aK^{\propto}L^{1-\propto} \; (a > 0, 0 < \propto < 1)$$

Thì

$$f(k) = \frac{Q}{L} = a\left(\frac{K}{L}\right)^{\propto} = ak^{\propto}$$

Phương trình (3.1) của mô hình Solow trở thành

$$\frac{dk}{dt} = ask^{\propto} - \tau k \rightarrow \frac{dk}{dt} + \tau k = ask^{\propto}$$

Đây là phương trình Bernoulli. Theo phương pháp đã biết ta tìm được

$$k = \left[\left(k_0^{1-\propto} - \frac{as}{\tau}\right) e^{-\tau(1-\propto)t} + \frac{as}{\tau}\right]^{\frac{1}{1-\propto}}$$

$$với\ k_0 = k(0)$$

Do $\tau > 0$ và $1-\propto > 0$ nên $k \rightarrow \left(\frac{as}{\tau}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}$ khi $t \rightarrow +\infty$. Trạng thái ổn định là

$$\bar{k} = \left(\frac{as}{\tau}\right)^{\frac{1}{1-\propto}}$$

3.1.3 Mô hình điều chỉnh giá thị trường

Giả sử cung và cầu của một loại hàng hóa như sau :

$$Q_d = a - bP \ (a > 0, b > 0)$$
$$Q_s = -c + dP \ \ (c > 0, d > 0)$$

Khi đó giá cân bằng (giá khi $Q_d = Q_s$) là một hằng số dương

$$\bar{P} = \frac{a + c}{b + d}$$

Nếu tại thời điểm xuất phát t = 0 giá P(0) đúng bằng giá cân bằng thì thị trường đã cân bằng. Nhưng nếu khác thì phải sau một thời gian nó mới có thể tiến tới trạng thái ấy.

Vấn đề phân tích động được đặt ra như sau : *Nếu có đủ thời gian để điều chỉnh thì liệu thị trường có tiến tới trạng thái cân bằng hay không, tức là P(t) có hội tụ đến $\bar{P}$ hay không khi $t \rightarrow +\infty$* ?

Ta thiết lập hàm số P=P(t). Để đơn giản ta giả thiết rằng tốc độ biến thiên của giá cả tỉ lệ thuận với lượng chênh lệch giữa cung và cầu, $Q_d - Q_s$, tại mọi thời điểm

$$\frac{dP}{dt} = \delta(Q_d - Q_s) \quad (\delta > 0)$$

Hằng số δ được gọi là hệ số điều chỉnh. Chú ý rằng trong phương trình trên, $\frac{dP}{dt} = 0$ khi và chỉ khi $Q_d = Q_s$. Thay 2 phương trình cung cầu ban đầu vào phương trình trên, ta được

$$\frac{dP}{dt} = \delta(a+c) - \delta(b+d)P$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{dt} + \delta(b+d)P = \delta(a+c)$$

Đây là *phương trình vi phân* tuyến tính, giải phương trình này ta được :

$$P(t) = [P(0) - \bar{P}]e^{-\delta(b+d)t} + \bar{P}$$

Trong đó

$$\bar{P} = \frac{a+c}{b+d}$$

Do $\delta(b+d)t > 0$ nên $[P(0) - \bar{P}]e^{-\delta(b+d)t} \to 0$ khi $t \to +\infty$. Như vậy, mô hình trên đây cho thấy $P(t) \to \bar{P}$ khi $t \to +\infty$, tức là $\bar{P}$ là trạng thái ổn định.

Ngoài ra thì còn một ứng dụng quan trọng nữa của phương trình vi phân cấp I là "Phân tích định tính quỹ đạo thời gian của một biến số kinh tế bằng phương pháp đồ thị" tuy nhiên không có chứng minh cụ thể định lượng cho phương pháp này (không ứng dụng những gì đã học) nên chúng em không trình bày ở đây.

3.2 Một số mô hình *phương trình vi phân* tuyến tính cấp II

3.2.1 Điều kiện ổn định động

Giả sử quy luật vận động theo thời gian t của biến y được thiết lập dưới dạng phương trình :

$$y'' + py' + qy = r \ (*)$$

Trạng thái cân bằng $y = \bar{y}$ là một nghiệm riêng của phương trình trên.

Trạng thái cân bằng tồn tại khi và chỉ khi $q \neq 0$. Khi đó

$$\bar{y} = \frac{r}{q}$$

Điều kiện ổn định của trạng thái cân bằng $\bar{y}$ là điều kiện để mọi quỹ đạo thời gian hội tụ đến $\bar{y}$.

Định lý. Trạng thái cân bằng $\bar{y}$ ổn định động khi và chỉ khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ đều có phần thực là số âm. (phần thực của nghiệm chính là nghiệm đó)

Chứng minh.

- Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 = a, k_2 = b$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

  $$y = \bar{y} + C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}$$

  Trong trường hợp này $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y}$ khi và chỉ khi cả a, b đều là số âm.

- Nếu phương trình đặc trưng có một nghiệm thực kép $k_1 = k_2 = a$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

  $$y = \bar{y} + (C_1 + C_2 x)e^{at}$$

  Trong trường hợp này, $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y}$ khi và chỉ khi $a < 0$

- Nếu phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phức liên hợp $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (*) là

  $$y = \bar{y} + e^{\propto t}(C_1 cos\beta t + C_2 sin\beta t)$$

  Trong trường hợp này $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \bar{y}$ khi và chỉ khi $\propto < 0$

Nhận xét. Trường hợp phương trình đặc trưng không có nghiệm thực $(p^2 - 4q < 0)$ thì phần thực của các nghiệm phức là $\propto = -\frac{p}{2}$, do đó $\propto$ là số âm khi và chỉ khi $p > 0$. Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm thực $(p^2 - 4q > 0)$ thì điều kiện để cả hai nghiệm thực đều âm là $q, p > 0$.

3.2.2 Mô hình thị trường với kì vọng giá

Khi xét biến thời gian t liên tục, thông tin về xu hướng giá P(t) có thể biết được thông qua $P'(t)$ (giá tăng hay giá giảm) và $P''(t)$ (giá tăng với tốc độ tăng hay giảm). Các thông tin đó có thể ảnh huonwgr tới quyết định tiêu dùng của người tiêu dùng và nhà sản xuất. Chẳng hạn, nếu cho rằng trong tương lai gần, giá một loại hàng hóa sẽ tăng nhanh thì người tiêu dùng sẽ mua nhiều hơn hàng hóa đó. Để xem xét ảnh hưởng của kỳ vọng giá (nhận định về xu hướng thay đổi của giá cả trên thị trường) đối với lượng cung và lượng cầu người ta xét hàm cung và hàm cầu dưới dạng

$$Q_{dt} = D[P(t), P'(t), P''(t)]$$
$$Q_{st} = S[P(t), P'(t), P''(t)]$$

Quỹ đạo thời gian của giá thị trường (giá cân bằng cung cầu) được thiết lập dưới dạng *phương trình vi phân* cấp II

$$S[P(t), P'(t), P''(t)] = D[P(t), P'(t), P''(t)] (**)$$

Nếu hạn chế ở mô hình tuyến tính và đơn giản hóa ký hiệu ta có thể viết

$$Q_d = a - bP + \alpha P' + \beta P''$$
$$Q_s = -c + dP + \gamma P' + \delta P''$$
$$(a, b, c, d > 0)$$

Để cho đơn giản ta giả thiết rằng chỉ có hàm cầu chứa kỳ vọng giá, tức là $\gamma = \delta = 0$. Khi đó phương trình (**) có dạng

$$-c + dP = a - bP + \alpha P' + \beta P''$$
$$\Leftrightarrow P'' + \frac{\alpha}{\beta} P' - \frac{b + d}{\beta} P = -\frac{a + c}{\beta} (***)$$

Dựa vào định lý về điều kiện ổn định động của trạng thái cân bằng ta có thể rút ra một số kết luận khái quát về tính ổn định động của trạng thái cân bằng như sau :

- Nếu $\beta > 0$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực trái dấu, do đó trạng thái cân bằng $\bar{P}$ không ổn định.
- Nếu $\beta < 0$ và $\propto < 0$ thì các hệ số của phương trình (***) dương, do đó các nghiệm của phươgn trình đặc trưng của nó hoặc là các số thực âm, hoặc là các số phức có phần thực âm. Trong trường hợp này, trạng thái cân bằng ổn định.
- Nếu $\beta < 0$ và $\propto > 0$ thì hệ số của P' âm và hệ số của P dương. Trong trường hợp này phương trình đặc trưng hoặc có các nghiệm thực dương, hoặc có các nghiệm phức với phần thực dương, do đó trạng thái cân bằng không ổn định.

3.2.3 Mô hình điều chỉnh giá có tính đến hàng hóa tồn đọng

Trong các mô hình tăng trưởng xét ở phần trên ta giả sử rằng tốc độ điều chỉnh giá tỉ lệ thuận với lượng chênh lệch cung cầu.

$$\frac{dP}{dt} = \propto (Q_d - Q_s)\ (\propto > 0)$$

Trong đó lượng cung Q_s và lượng cầu Q_d là các hàm số theo biến t.

Trong mô hình nói trên, ta bỏ qua lượng hàng hóa tồn đọng (chưa bán hết) khi có sự dư cung. Vấn đề đặt ra là không chỉ lượng dư cung hiện thời mà cả lượng hàng tồn đọng chưa bán hết cũng gây áp lực hạ giá. Để biểu diễn ý tưởng này ta xét mô hình sau :

$$\frac{dP}{dt} = \propto (Q_d - Q_s) - \beta \int_0^t [Q_s(x) - Q_d(x)]dx$$

Trong đó $\propto, \beta$ là các hằng số dương.

Từ phương trình trên, ta có

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \propto \left(\frac{dQ_d}{dt} - \frac{dQ_s}{dt}\right) - \beta[Q_s(t) - Q_d(t)]$$

Giả sử hàm cung và hàm cầu là các hàm tuyến tính

$$Q_d = a - bP\ (a > 0, b > 0)$$

$$Q_s = -c + dP\ (c > 0, d > 0)$$

Khi đó

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \propto \left(-b\frac{dP}{dt} - d\frac{dP}{dt}\right) - \beta[-(a+c) + (b+d)P]$$

$$\rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} + \propto \frac{(b+d)dP}{dt} + \beta(b+d)P = \beta(a+c) \qquad (4*)$$

Quỹ đạo thời gian của giá cả được thiết lập gián tiếp dưới dạng *phương trình vi phân* (4*) trên. Với giả thiết $\alpha, \beta, a, b, c, d$ đều là các hằng số dương, các hệ số của phương trình (4*) dương, do đó phương trình đặc trưng hoặc có các nghiệm thực âm hoặc có các nghiệm phức có phần thực âm. Trạng thái cân bằng $\bar{P} = \frac{a+c}{b+d}$ ổn định động. Dù xuất phát ở trạng thái nào thì giá thị trường vẫn sẽ được điều chỉnh dần đến trạng thái cân bằng.

3.2.4 Mô hình ô nhiễm môi trường

Người ta cho rằng hàm lượng CO_2 trong khí quyển làm tăng nhiệt độ trái đất. Hàm lượng đó ngày một tăng cùng với sự phát triển của công nghiệp, do chất đốt và khí thải được thải vào khí quyển, đồng thời một phần trong số đó được hấp thụ tự nhiên bởi nước biển và sinh vật.

Gọi y là hàm lượng CO_2. Hàm lượng đó tăng theo quy luật

$$\frac{dy}{dt} = x - \propto y \qquad (5*)$$

Trong đó x là hàm lượng CO_2 do các xí nghiệp công nghiệp thải vào không khí và $\propto > 0$ là tham số biểu diễn tỉ phần CO_2 hấp thu bởi tự nhiên. Giả sử lượng khí trên được thải vào khí quyển là tăng theo thời gian theo quy luật

$$\frac{dx}{dt} = ae^{bt} - \beta y \qquad (6*)$$

Trong đó β, a, b là các hằng số dương. Hệ số β biểu diễn tỉ phần CO_2 bị hạn chế bớt do các hoạt động chống ô nhiễm của các quốc gia.

Mô hình là một hệ *phương trình vi phân* cấp I gồm 2 phương trình nhưng ta có thể biểu diễn chúng dưới dạng 1 *phương trình vi phân* cấp II. Lấy đạo hàm cả 2 vế rồi thế phương trình từ (6*) vào (5*). Ta có

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ae^{bt} - \beta y - \propto .\frac{dy}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \propto .\frac{dy}{dt} + \beta y = ae^{bt}$$

Bằng phương pháp hệ số bất định ta tìm được nghiệm riêng

$$\bar{y}(t) = \frac{ae^{bt}}{b^2 + \propto b + \beta}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên như sau

- Nếu $\propto^2 - 4\beta > 0$

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} + \frac{ae^{bt}}{b^2 + \propto b + \beta}$$

Trong đó $k_{1,2} = -\frac{1}{2}.\propto \pm \frac{\sqrt{\propto^2 - 4\beta}}{2}$

- Nếu $\propto^2 - 4\beta = 0$

$$y = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{\alpha}{2}} + \frac{ae^{bt}}{b^2 + \propto b + \beta}$$

- Nếu $\propto^2 - 4\beta < 0$

$$y = (C_1 cos\theta t + C_2 sin\theta t)e^{-\frac{\alpha}{2}} + \frac{ae^{bt}}{b^2 + \propto b + \beta}$$

Trong đó $\theta = \frac{\sqrt{4\beta - \alpha^2}}{2}$

Do $\alpha, \beta > 0$ nên $k_1, k_2, -\frac{\alpha}{2}$ là các số âm. Trong cả 3 trường hợp nói trên ta đều có :

$$y(t) - \frac{ae^{bt}}{b^2 + \propto b + \beta} \to 0 \; khi \; t \to +\infty$$

Như vậy quỹ đạo dài hạn của hàm lượng CO_2 trong khí quyển là

$$y = \frac{ae^{bt}}{b^2 + \propto b + \beta}$$

BÀI TẬP