ĐOÀN VƯƠNG NGUYÊN

BÀI GIẢNG

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP. HỒ CHÍ MINH
2011

MỤC LỤC

Chương I. Ma trận – Định thức

1. Ma trận 5
 1.1. Khái niệm ma trận 5
 1.2. Các phép toán trên ma trận 6
 1.3. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận 14
 1.4. Ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn 15
 1.5. Ma trận khả nghịch 16

2. Định thức 19
 2.1. Ma trận con cấp k 19
 2.2. Định nghĩa định thức 19
 2.3. Các tính chất cơ bản của định thức 20
 2.4. Định lý Laplace về khai triển định thức 22
 2.5. Định lý Laplace mở rộng 23
 2.6. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo 28
 2.7. Hạng của ma trận 29

Bài tập trắc nghiệm chương I 32

Chương II. Hệ phương trình tuyến tính

1. Hệ phương trình tổng quát 35
 1.1. Định nghĩa 35
 1.2. Hệ Cramer 36
 1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss 39
 1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính 41

2. Hệ phương trình thuần nhất 43
 2.1. Định nghĩa 43
 2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất 44
 2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính 46

Bài tập trắc nghiệm chương II 47

Chương III. Không gian vector

1. Khái niệm không gian vector 49
 1.1. Định nghĩa 49
 1.2. Tính chất của không gian vector 49
 1.3. Các ví dụ về không gian vector 49
 1.4. Không gian vector con 50

2. Sự độc lập tuyến tính – phụ thuộc tuyến tính 50
 2.1. Tổ hợp tuyến tính 50
 2.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính 52
 2.3. Hệ vector trong R^n 54

3. Số chiều, cơ sở của không gian vector 55
 3.1. Không gian sinh bởi một hệ vector 55
 3.2. Số chiều và cơ sở 56

4. Tọa độ của vector 58
 4.1. Tọa độ của vector đối với một cơ sở 58
 4.2. Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau 60

Bài tập trắc nghiệm chương III 62

Chương IV. Ánh xạ tuyến tính

1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính 64
1.1. Định nghĩa 64
1.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính 65

2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính 67
2.1. Khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính 67
2.2. Định lý chuyển đổi ma trận của ánh xạ tuyến tính 72
2.3. Thuật toán tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính 73

3. Trị riêng – Vector riêng 74
3.1. Ma trận đồng dạng 74
3.2. Đa thức đặc trưng và phương trình đặc trưng 75
3.3. Trị riêng, vector riêng 76
3.4. Không gian con riêng 78
3.5. Định lý Cayley – Hamilton 81

4. Chéo hóa ma trận vuông 82
4.1. Khái niệm ma trận chéo hóa được 82
4.2. Điều kiện ma trận chéo hóa được 82
4.3. Ma trận làm chéo hóa ma trận vuông 82
4.4. Thuật toán chéo hóa ma trận vuông 83

Bài tập trắc nghiệm chương IV 86

Chương V. Dạng toàn phương

1. Khái niệm dạng toàn phương 89
1.1. Dạng song tuyến tính 89
1.2. Dạng toàn phương 90
1.3. Dạng toàn phương chính tắc 91

2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng chéo hóa trực giao 93
2.1. Không gian Euclide 93
2.1.1. Định nghĩa 93
2.1.2. Chuẩn của một vector 93
2.1.3. Cơ sở trực chuẩn 93
2.2. Thuật toán chéo hóa trực giao 95
2.2.1. Ma trận trực giao 95
2.2.2. Thuật toán 96

3. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng các thuật toán khác 99
3.1. Thuật toán Lagrange 99
3.2. Thuật toán Jacobi 101
3.3. Thuật toán biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng 103

4. Nhận diện đường và mặt bậc hai 105
4.1. Nhận diện đường bậc hai 105
4.1.1. Định nghĩa 105
4.1.2. Phân loại đường bậc hai 105
4.1.3. Rút gọn đường Conic 105
4.2. Nhận diện mặt bậc hai 107
4.2.1. Định nghĩa 107
4.2.2. Sơ lược về luật quán tính Sylvester và dạng toàn phương xác định dấu 107
4.2.3. Phân loại mặt bậc hai 109
4.2.4. Rút gọn mặt bậc hai 110

Bài tập trắc nghiệm chương V 111

Đáp án Bài tập trắc nghiệm 116

Tài liệu tham khảo 117

Chương I

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC

1. MA TRẬN

1.1. Khái niệm ma trận

▪ **Định nghĩa 1**

• *Một ma trận (matrix)* A *có cấp* $m \times n$ *trên* $\mathbb{R}$ *là một hệ thống gồm* $m \times n$ *số thực* a_{ij} *(*$i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$*), được sắp thành bảng gồm* m *dòng và* n *cột*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

• *Ma trận* A *như trên được viết gọn là* $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

• *Các số thực* a_{ij} *được gọi là các phần tử của ma trận* $(a_{ij})_{m \times n}$ *nằm ở dòng thứ* i *và cột thứ* j.

• *Ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận không.*

• *Cặp số* (m,n) *được gọi là kích thước của ma trận* A. *Hai ma trận có cùng kích thước được gọi là cùng cấp.*

• *Tập hợp các ma trận cấp* $m \times n$ *trên* $\mathbb{R}$ *được ký hiệu là* $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 1. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, ta có $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ và

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = 6.$$

▪ **Định nghĩa 2**

Xét ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

• *Khi* $m = n$, *ta gọi* A *là ma trận vuông cấp* n. *Ký hiệu* $(a_{ij})_{n \times n}$, $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *được viết gọn là* $(a_{ij})_n$ *và* $M_n(\mathbb{R})$.

• *Khi* $m = 1$, *ta gọi* $A = (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$ *là ma trận dòng.*

• *Khi* $n = 1$, *ta gọi* $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ *là ma trận cột.*

• *Khi* $m = n = 1$, *ta gọi* $A = (a_{11}) \in M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ *là ma trận 1 phần tử.*

▪ **Định nghĩa 3**

• *Đường chéo chứa các phần tử* $a_{11}, a_{22},..., a_{nn}$ *của ma trận vuông* $A = (a_{ij})_n$ *được gọi là đường chéo chính của* A, *đường chéo còn lại được gọi là đường chéo phụ.*

• *Ma trận vuông* $A = (a_{ij})_n$ *có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận chéo (diagonal matrix), ký hiệu là* $A = \text{diag}(a_{11} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{nn})$.

• *Ma trận chéo cấp* n *gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị cấp* n *(Identity matrix), ký hiệu là* I_n *hay* I.

- *Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm phía dưới (tương ứng, trên) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận tam giác trên (tương ứng, dưới).*
- *Ma trận vuông có tất cả các cặp phần tử đối xứng với nhau qua đường chéo chính bằng nhau được gọi là ma trận đối xứng.*

Ví dụ 2.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là các ma trận chéo;

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là các ma trận đơn vị;

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ là các ma trận tam giác trên;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ là các ma trận tam giác dưới;

$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ là các ma trận đối xứng.

▪ **Định nghĩa 4**

Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng cấp và $a_{ij} = b_{ij}$ $(\forall i, j)$, ký hiệu là $A = B$.

Ví dụ 3. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $A = B$ khi $x = 0$, $y = -1$, $z = 2$, $u = 2$, $t = 3$.

1.2. Các phép toán trên ma trận

1.2.1. Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$, ta định nghĩa

$$\boxed{A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}}$$

Ví dụ 4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

▪ **Nhận xét**

Phép cộng ma trận có tính chất giao hoán và tính chất kết hợp.

1.2.2. Phép nhân vô hướng

Cho ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *và số* $\lambda\in\mathbb{R}$, *ta định nghĩa*

$$\boxed{\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}}$$

Ví dụ 5.

$$-3\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 6 & 0 & 12\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ -4 & 0 & 8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

▪ **Chú ý**

• Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.

• Ma trận $-1.A=-A$ được gọi là *ma trận đối* của ma trận A.

Ví dụ 6.

$$5\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}9 & -8\\ 2 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -10\\ 20 & 0\\ -10 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}18 & -16\\ 4 & 16\\ -2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 6\\ 16 & -16\\ -8 & 12\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 7. Cho $A=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -8 & 4\end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa $2X+4I_2=2A-B$.

Giải. Ta có:

$$2X+4I_2=2A-B\Leftrightarrow 2X=2A-B-4I_2\Leftrightarrow X=A-\frac{1}{2}B-2I_2$$

$$\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 3 & 9\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 2\\ -8 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 3 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Vậy $X=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 7 & 5\end{pmatrix}$.

1.2.3. Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B=(b_{jk})_{n\times p}$, *ta định nghĩa*

$$\boxed{AB=(c_{ik})_{m\times p}}$$

trong đó $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{in}b_{nk}\ \ (i=1,...,m;\ k=1,...,p)$.

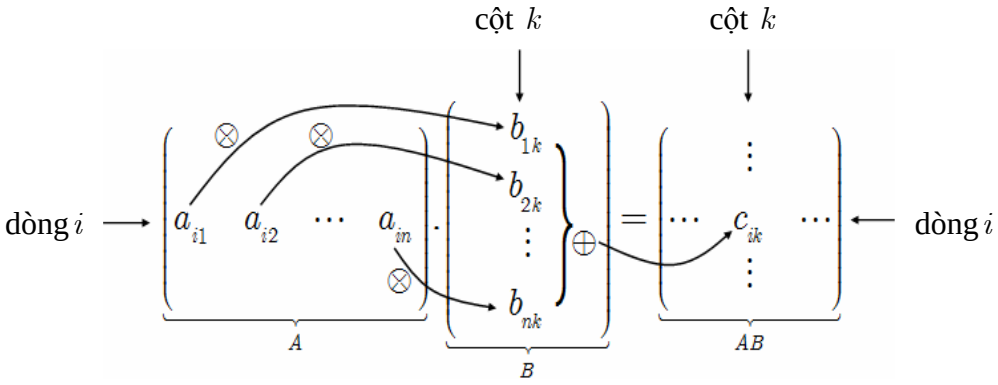
▪ **Chú ý**

Điều kiện để phép nhân AB thực hiện được là số cột của ma trận A (ma trận trước) bằng số dòng của ma trận B (ma trận sau).

▪ **Nhận xét**

• Số dòng của ma trận tích AB bằng số dòng của ma trận A, số cột của ma trận tích AB bằng số cột của ma trận B.

• Sơ đồ nhân hai ma trận A và B:



Ví dụ 8.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = (1.4 + 2.5 + 3.6) = (32),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\6 & 7 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1.3+2.6) & (1.4+2.7) & (1.5+2.8)\end{pmatrix} = (15 \quad 18 \quad 21),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.2+2(-1) & 1.0+2.0\\0.2+0.(-1) & 0.0+0.0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-2 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\\-1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -4\\-7 & 9\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 9. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Thực hiện các phép tính sau: 1) AI_3; 2) I_2A.

Giải

1) $AI_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$;

2) $I_2A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

Ví dụ 10. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\0 & -3 & 1\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Thực hiện các phép tính sau: 1) AB; 2) BA.

Giải

1) $AB = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\0 & -3 & 1\\2 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\-2 & 2 & 0\\-9 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

2) $BA = \begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\0 & -3 & 1\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 4 & -2\\-3 & 6 & -3\\0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

▪ **Nhận xét**

• Tích của hai ma trận khác không có thể là một ma trận không.
• Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán.

▪ **Tính chất**

Cho các ma trận A, B, C và số $\lambda \in \mathbb{R}$. Giả thiết rằng các phép tính đều thực hiện được, ta có:

i) $(AB)C = A(BC)$ (tính chất kết hợp);

ii) $A(B+C) = AB + AC$ (tính chất phân phối bên trái);

iii) $(A+B)C = AC + BC$ (tính chất phân phối bên phải);

4i) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

5i) $AI_n = A = I_m A$, với $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 11. Thực hiện phép tính sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25 & -20 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}.$$

Cách khác

$$A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 17 & 22 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 12. Thực hiện phép tính $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & 3 \\ 7 & -7 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 8 \\ 23 & 0 & -10 \\ -35 & -21 & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

Cách khác

Thực hiện phép nhân từ phải sang trái ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -3 \\ -42 \end{pmatrix}.$$

1.2.4. Lũy thừa ma trận vuông

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$.

• *Lũy thừa ma trận A được định nghĩa theo quy nạp như sau:*

$$\boxed{A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^{k+1} = A^k.A = A.A^k\ (\forall k \in \mathbb{N})}$$

• *Nếu A khác ma trận không và $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ma trận lũy linh. Số $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là cấp của ma trận lũy linh A.*

Ví dụ 13. Ma trận $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3 vì:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\neq(0_{ij})_3,\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=(0_{ij})_3.$$

- **Tính chất**

  i) $[(0_{ij})_n]^k=(0_{ij})_n$, $(I_n)^k=I_n$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

  ii) $A^{k+m}=A^k.A^m$, $\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, $\forall k,m\in\mathbb{N}$.

  iii) $A^{km}=(A^k)^m$, $\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, $\forall k,m\in\mathbb{N}$.

- **Chú ý**

• Nếu $A=\operatorname{diag}(a_{11}\quad a_{22}\quad\cdots\quad a_{nn})$ thì $A^k=\operatorname{diag}(a_{11}^k\quad a_{22}^k\quad\cdots\quad a_{nn}^k)$.

• Nếu $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AB=BA$ (*giao hoán*) thì các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với A, B. Khi $AB\neq BA$ thì các hằng đẳng thức đó không còn đúng nữa.

Ví dụ 14. Xét ma trận chéo $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, ta có:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^2&0&0\\0&(-1)^2&0\\0&0&2^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^3&0&0\\0&(-1)^3&0\\0&0&2^3\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 15. Xét hai ma trận $A=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}$, ta có:

• $AB=BA=I_2$,

• $(A+B)^2=\left[\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}$,

• $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}^2$

$$=\begin{pmatrix}14&25\\5&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&-25\\-5&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&0\\0&25\end{pmatrix}.$$

Suy ra $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

Ví dụ 16. Xét hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, ta có:

• $AB=\begin{pmatrix}10 & 7\\ 2 & 1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & 8\end{pmatrix}=BA$,

• $(A+B)^2=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}24 & 18\\ 30 & 24\end{pmatrix}$,

• $A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}^2$

$=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20 & 14\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & 21\\ 25 & 17\end{pmatrix}$.

Suy ra $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x)=2x^3-4x^2$ và ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Tìm ma trận $f(A)+I_2$.

Giải. Ta có:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad A^3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$f(A)+I_2=2\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 18. Tìm ma trận $D=(ABC)^5$, trong đó:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có: $ABC=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Vậy $D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^5=\begin{pmatrix}(-1)^5 & 0\\ 0 & 3^5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 243\end{pmatrix}$.

Ví dụ 19. Tìm ma trận $(I_2-A)^{2011}$, với $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có: $I_2-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (I_2-A)^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

$\Rightarrow (I_2-A)^{2010}=\left[(I_2-A)^2\right]^{1005}=(I_2)^{1005}=I_2$.

Vậy $(I_2-A)^{2011}=I_2.\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Ví dụ 20. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Tìm $A^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Giải

• Ta có:

$$A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 0\alpha & -\sin 0\alpha\\ \sin 0\alpha & \cos 0\alpha\end{pmatrix},\qquad A^1=A=\begin{pmatrix}\cos 1\alpha & -\sin 1\alpha\\ \sin 1\alpha & \cos 1\alpha\end{pmatrix},$$

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{pmatrix}.$$

• Giả sử $A^k=\begin{pmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}$ $(*)$

• Với $n=k+1$, từ $(*)$ ta có:

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha\\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{pmatrix}.$$

Vậy $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Ví dụ 21. Cho ma trận $A=(a_{ij})_{40}$ có các phần tử $a_{ij}=(-1)^{i+j}$. Tìm phần tử α_{25} của ma trận A^2.

Giải

Phần tử α_{25} cần tìm là tích dòng thứ 2 của A và cột thứ 5 của A.

Các phần tử trên dòng thứ 2 của A là:

$$a_{21}=(-1)^{2+1}=-1,\ a_{22}=1,\ldots,\ a_{2\,39}=-1,\ a_{2\,40}=1.$$

Các phần tử trên cột thứ 5 của A là:

$$a_{15}=(-1)^{1+5}=1,\ a_{25}=-1,\ldots,\ a_{39\,5}=1,\ a_{40\,5}=-1.$$

Vậy $\alpha_{25}=\underbrace{-1.1+1(-1)+\ldots+(-1).1+1(-1)}_{40\,số\ hạng}=-40$.

Ví dụ 22. Cho ma trận $A=(a_{ij})_{100}$ có các phần tử $a_{ij}=(-1)^i.j$. Tìm phần tử α_{76} của ma trận A^2.

Giải

Phần tử α_{76} cần tìm là tích dòng thứ 7 của A và cột thứ 6 của A.

Các phần tử trên dòng thứ 7 của A là:

$$a_{71}=(-1)^7.1=-1,\ a_{72}=-2,\ldots,\ a_{7\,99}=-99,\ a_{7\,100}=-100.$$

Các phần tử trên cột thứ 6 của A là:

$$a_{16}=(-1)^1.6=-6,\ a_{26}=6,\ldots,\ a_{99\,6}=-6,\ a_{100\,6}=6.$$

Vậy $\alpha_{76}=6(1-2+3-4+\ldots+99-100)=-300$.

Ví dụ 23. Cho ma trận $A=(a_{ij})_{100}$ có các phần tử $a_{ij}=(-1)^i.3^j$. Tìm phần tử α_{34} của ma trận A^2.

Giải

Phần tử α_{34} cần tìm là tích dòng thứ 3 của A và cột thứ 4 của A.

Dòng thứ 3 của A là $(-3\ -3^2\ -3^3\ \ldots-3^{99}\ -3^{100})$

Cột thứ 4 của A là $(-3^4 \quad 3^4 \quad -3^4 \ ... -3^4 \quad 3^4)^T$

Vậy $\alpha_{34} = 3^4(3 - 3^2 + 3^3 - ... + 3^{99} - 3^{100}) = 3^4.3.\dfrac{1-(-3)^{100}}{1-(-3)} = \dfrac{3^5}{4}(1-3^{100})$.

1.2.5. Phép chuyển vị

Cho ma trận $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ma trận chuyển vị (Transposed matrix) của A, ký hiệu là A^T, là một ma trận cấp $n \times m$ nhận được từ A bằng cách chuyển tất cả các dòng trong A thành các cột tương ứng của A^T. Phép biến đổi ma trận A thành ma trận A^T được gọi là phép chuyển vị.

Ví dụ 24. Ma trận chuyển vị của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ là $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

- **Tính chất**

i) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

ii) $(\lambda A)^T = \lambda . A^T$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $(A^T)^T = A$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

4i) $(AB)^T = B^T A^T$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Ví dụ 25. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Tính $(AB)^T$; 2) Tính $B^T A^T$ và so sánh kết quả với $(AB)^T$.

Giải

1) Ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

2) Ta có:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Vậy $B^T A^T = (AB)^T$.

1.3. Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

1.3.1. Định nghĩa

Cho ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $(m\geq 2)$. Ta gọi phép biến đổi sơ cấp dòng trên A là một trong các dạng sau

1) Hoán vị dòng i và dòng k cho nhau để A trở thành B : $A\xrightarrow{d_i\leftrightarrow d_k} B$.

2) Nhân dòng i với số $\lambda\neq 0$ để A trở thành C : $A\xrightarrow{d_i\to\lambda d_i} C$.

3) Thay dòng i bởi tổng dòng i với λ lần dòng k để A thành D : $A\xrightarrow{d_i\to d_i+\lambda d_k} D$.

▪ **Chú ý**

i) Trong dạng 3), số thực λ có thể là 0.

ii) Trong thực hành ta thường làm gộp $A\xrightarrow{d_i\to\mu d_i+\lambda d_k} E$.

iii) Tương tự, ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận.

Ví dụ 26. Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận sau đây về ma trận tam giác trên:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1\leftrightarrow d_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3\to d_3-3d_1]{d_2\to d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -7\\ 0 & 5 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3\to d_3-d_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ví dụ 27. Dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa ma trận sau đây về ma trận đơn vị:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\to c_3+c_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_3\to d_3-2d_1]{d_2\to d_1-d_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{d_1\to d_1-\frac{1}{3}d_2\\ d_2\to\frac{1}{3}d_2}]{d_3\to d_3+d_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.3.2. Ma trận sơ cấp

Ma trận thu được từ ma trận đơn vị I_n bởi đúng một phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột được gọi là ma trận sơ cấp.

Ví dụ 28. Chứng tỏ rằng các ma trận sau đây là sơ cấp:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ và } C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=A,$$

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2\to -5d_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2\to d_2+2d_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=C.$$

Do các ma trận A, B, C thu được từ ma trận đơn vị I_3 bởi đúng một phép biến đổi sơ cấp dòng hay cột nên là các ma trận sơ cấp.

1.4. Ma trận bậc thang và bậc thang rút gọn

1.4.1. Ma trận bậc thang

▪ **Định nghĩa**

- *Trong một ma trận, một dòng có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là dòng bằng không hay dòng không.*
- *Trong một ma trận, phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang phải của một dòng được gọi là phần tử cơ sở của dòng đó.*
- *Ma trận bậc thang là ma trận khác không có cấp* $m\times n\ (m,n\geq 2)$ *thỏa cả hai điều kiện sau*

  1) Các dòng bằng không ở phía dưới các dòng khác không;

  2) Phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ nằm bên phải phần tử cơ sở của dòng ở phía trên dòng đó.

Ví dụ 29.

• Các ma trận sau là bậc thang:

$$I_n,\ A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&4&5\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

• Các ma trận sau không phải là bậc thang:

$$C=\begin{pmatrix}0&2&7\\0&3&4\\0&0&5\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&3&5\\0&0&0\\0&1&3\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0&3&5\\0&0&0\\5&0&0\end{pmatrix}.$$

▪ **Định lý**

Mọi ma trận đều có thể đưa được về ma trận bậc thang bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp.

1.4.2. Ma trận bậc thang rút gọn

▪ **Định nghĩa**

Ma trận bậc thang rút gọn là ma trận bậc thang có phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ đều bằng 1 và là phần tử khác 0 duy nhất của cột chứa phần tử đó.

Ví dụ 30. Các ma trận I_n, $A=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ là các ma trận bậc thang rút gọn.

Ma trận $C=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ không phải là bậc thang rút gọn.

1.5. Ma trận khả nghịch

1.5.1. Định nghĩa

- *Ma trận vuông A cấp n được gọi là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho $AB=BA=I_n$.*
- *Ma trận B là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A, ký hiệu là $B=A^{-1}$.*

▪ **Chú ý**

i) $(A^{-1})^{-1}=A$

ii) Nếu ma trận B là ma trận nghịch đảo của A thì A cũng là ma trận nghịch đảo của B.

Ví dụ 31. $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$ là hai ma trận nghịch đảo của nhau vì $AB=BA=I_2$.

Ví dụ 32. Cho biết ma trận $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ thỏa đẳng thức: $A^3-A^2-A+I_3=(0_{ij})_3$. Tìm A^{-1}.

Giải. Ta có:

$$A^3-A^2-A+I_3=(0_{ij})_3 \Leftrightarrow -A^3+A^2+A=I_3 \Leftrightarrow A(-A^2+A+I_3)=I_3.$$

Vậy $A^{-1}=-A^2+A+I_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Ví dụ 33. Cho $A\in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận lũy linh cấp k.

Chứng minh rằng $(I_n-A)^{-1}=A^{k-1}+...+A+I_n$.

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned}(I_n-A)(A^{k-1}+...+A+I_n)&=(A^{k-1}+...+A+I_n)-(A^k+A^{k-1}+...+A^2+A)\\&=I_n-A^k=I_n-(0_{ij})_n=I_n.\end{aligned}$$

Suy ra $A^{k-1}+...+A+I_n$ là nghịch đảo của (I_n-A).

Vậy $(I_n-A)^{-1}=A^{k-1}+...+A+I_n$.

▪ **Chú ý**

i) Nếu ma trận vuông A có ít nhất 1 dòng (hay 1 cột) bằng không thì không khả nghịch.

ii) $I^{-1}=I$; $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

iii) Nếu $ac-bd\neq 0$ thì

$$\boxed{\begin{pmatrix}a & b\\ d & c\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ac-bd}.\begin{pmatrix}c & -b\\ -d & a\end{pmatrix}}$$

Ví dụ 34. Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Thực hiện các phép tính: 1) $(AB)^{-1}$; 2) $B^{-1}A^{-1}$.

Giải

1) Ta có:

$$(AB)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}19 & 12\\ 11 & 7\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{19.7-11.12}\begin{pmatrix}7 & -12\\ -11 & 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -12\\ -11 & 19\end{pmatrix}.$$

2) Ta có:

$$A^{-1}=\frac{1}{2.3-1.5}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ B^{-1}=\frac{1}{2.2-3.1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -12\\ -11 & 19\end{pmatrix}.$$

1.5.2. Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Cho ma trận $A\in M_n(\mathbb{R})$, ta tìm A^{-1} (nếu có) như sau

• **Bước 1.** Lập ma trận $\left(A\middle|I_n\right)$ bằng cách ghép I_n vào bên phải của A.

• **Bước 2.** Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $\left(A\middle|I_n\right)$ về dạng $\left(A'\middle|B\right)$ (với A' là ma trận bậc thang rút gọn).

Khi đó:

i) nếu $A'\neq I_n$ thì ta kết luận A không khả nghịch;

ii) nếu $A'=I_n$ thì ta kết luận A khả nghịch và $A^{-1}=B$.

Ví dụ 35. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -2 & 10\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\left(A\middle|I_2\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -5 & 1 & 0\\ -2 & 10 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{d_2\to d_2+2d_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{array}\right).$$

Do $A'=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq I_2$ nên ma trận A không khả nghịch.

Ví dụ 36. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\left(B\middle|I_2\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-5&1&0\\1&5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{d_2\to d_2-d_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-5&1&0\\0&10&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1\to 2d_1+d_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&1\\0&10&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[d_2\to\frac{1}{10}d_2]{d_1\to\frac{1}{2}d_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\end{array}\right).$$

Vậy $B^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}5&5\\-1&1\end{pmatrix}$.

Ví dụ 37. Tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận $C=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\left(C\middle|I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[d_3\to d_3-2d_1]{d_2\to d_2-d_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&-1&2&-1&1&0\\0&-1&2&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2\to -d_2]{d_1\to d_1+d_2\\ d_3\to d_3-d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-2&1&-1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right).$$

Vậy ma trận C không khả nghịch.

Ví dụ 38. Tìm nghịch đảo của ma trận $D=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\left(D\middle|I_4\right)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[d_1\to d_1+d_2-d_4]{d_3\to d_3-d_4\\ d_2\to d_2-d_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&1&-2\\0&1&0&0&0&-1&1&-1\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right).$$

Vậy $D^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-2\\0&-1&1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. ■

2. ĐỊNH THỨC

2.1. Ma trận con cấp *k*

▪ **Định nghĩa**

Cho ma trận $A=(a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$.

• *Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột của A được gọi là ma trận con cấp k của A.*

• *Ma trận M_{ij} có cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}.*

Ví dụ 39. Xét ma trận $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, ta có các ma trận con ứng với các phần tử a_{ij} là:

$$M_{11}=\begin{pmatrix}5&6\\8&9\end{pmatrix},\quad M_{12}=\begin{pmatrix}4&6\\7&9\end{pmatrix},\quad M_{13}=\begin{pmatrix}4&5\\7&8\end{pmatrix},$$

$$M_{21}=\begin{pmatrix}2&3\\8&9\end{pmatrix},\quad M_{22}=\begin{pmatrix}1&3\\7&9\end{pmatrix},\quad M_{23}=\begin{pmatrix}1&2\\7&8\end{pmatrix},$$

$$M_{31}=\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix},\quad M_{32}=\begin{pmatrix}1&3\\4&6\end{pmatrix},\quad M_{33}=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}.$$

2.2. Định nghĩa định thức

Định thức (determinant) của ma trận $A=(a_{ij})_n$, ký hiệu là $\det A$ hay $|A|$, là một số thực được định nghĩa quy nạp theo n như sau

• *Nếu $n=1$ thì* $\det A=\left|a_{11}\right|=a_{11}$.

• *Nếu $n=2$ thì* $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

• *Nếu $n\geq 3$ thì*

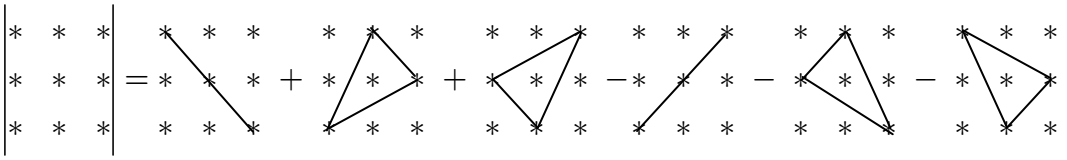
$$\boxed{\det A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+...+a_{1n}A_{1n}}$$

trong đó $A_{1j}=(-1)^{1+j}\det(M_{1j})$ $(j=1,2,...,n)$.

▪ **Chú ý**

i) $\det I_n=1$, $\det(0_{ij})_n=0$.

ii) Quy tắc sáu đường chéo (*Quy tắc Sarius*):



(ba phần tử nằm trên các đoạn nối thì nhân với nhau).

Ví dụ 40. Tính định thức của các ma trận sau:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix};\qquad 2)\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Giải

$$1)\ \det A=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3.4-1.(-2)=14.$$

$$2)\ \det B=1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3-2.1+(-1).7=-12.$$

Cách khác. Sử dụng quy tắc sáu đường chéo, ta có:

$$\det B=1.(-2).1+2.1.2+3.1.(-1)-2.(-2)(-1)-3.2.1-1.1.1=-12.$$

Ví dụ 41. Tính định thức của ma trận $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\det A=0.A_{11}+0.A_{12}+3.A_{13}+(-1).A_{14}=3(-1)^{1+3}\det M_{13}-(-1)^{1+4}\det M_{14}$$
$$=3\begin{vmatrix}4 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}=-49.$$

2.3. Các tính chất cơ bản của định thức

Cho ma trận $A\in M_n(\mathbb{R})$, ta có các tính chất cơ bản sau

2.3.1. Tính chất 1

$$\boxed{\det(A^T)=\det A}$$

Ví dụ 42. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2.$

2.3.2. Tính chất 2

Nếu hoán vị hai dòng (hay hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

Ví dụ 43. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}.$

- **Hệ quả**

Định thức có ít nhất hai dòng (hay hai cột) giống nhau thì bằng 0.

Ví dụ 44. $\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 7\end{vmatrix}=0;\qquad \begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & y^2 & y^5\\ 1 & y^2 & y^5\end{vmatrix}=0.$

2.3.3. Tính chất 3

Nếu nhân một dòng (hay một cột) với số thực λ thì định thức tăng lên λ lần.

Ví dụ 45. $\begin{vmatrix} 3.1 & 0 & 3.(-1) \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x+1 & x & x^3 \\ x+1 & y & y^3 \\ x+1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$.

- **Hệ quả**

• *Định thức có ít nhất 1 dòng (hay 1 cột) bằng không thì bằng 0.*
• *Định thức có 2 dòng (hay 2 cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.*

Ví dụ 46. $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & y \\ x^3 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} 6 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & -3 \\ -8 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 0$.

2.3.4. Tính chất 4

Nếu định thức có một dòng (hay một cột) mà mỗi phần tử là tổng của hai số hạng thì ta có thể tách thành tổng hai định thức.

Ví dụ 47. $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$;

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x & 2 & 3 \\ \sin^2 x & 5 & 6 \\ \sin^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2 x & 2 & 3 \\ \cos^2 x & 5 & 6 \\ \cos^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

2.3.5. Tính chất 5

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào một dòng (hay một cột) với λ lần dòng (hay cột) khác.

Ví dụ 48. Dùng tính chất 5, đưa định thức sau về dạng tam giác trên: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có: $\Delta \overset{d_2 \to d_2 + d_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{d_3 \to d_3 - 2d_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{d_3 \to d_3 + \frac{1}{4}d_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$.

Ví dụ 49. Sử dụng các tính chất để tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$.

Giải. Ta có: $\Delta \overset{d_1 \to d_1 + d_2 + d_3}{=} \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$

$$\underset{d_3\to d_3-2d_1}{\overset{d_2\to d_2-2d_1}{=}}(x+4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x-2 & 0\\ 0 & 0 & x-2\end{vmatrix}=(x+4)(x-2)^2.$$

- **Chú ý**

Trong tính chất 5, dòng (hay cột) mà ta muốn thay đổi thì không được nhân với bất kỳ số thực nào khác 1.

2.4. Định lý Laplace về khai triển định thức

Cho ma trận $A=(a_{ij})_n$. *Gọi* $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ *là phần bù đại số của phần tử* a_{ij}, *ta có khai triển Laplace như sau*

- **Khai triển theo dòng thứ *i***

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

- **Khai triển theo cột thứ *j***

$$\det A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

Ví dụ 50. Tính định thức $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$ bằng hai cách:

1) khai triển theo dòng 1; 2) khai triển theo cột 2.

Giải

1) Khai triển theo dòng 1, ta có

$$\Delta=1.1.\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}+(-1).2.\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=3.$$

2) Khai triển theo cột 2, ta có

$$\Delta=(-1).3.\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=3.$$

- **Nhận xét**

Khi tính định thức, ta nên khai triển Laplace theo dòng (hay cột) có chứa nhiều phần tử 0 nhất.

Ví dụ 51. Áp dụng tính chất và khai triển Laplace, hãy tính định thức $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 2\\ 3 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

Giải. Ta có $\Delta \underset{\substack{d_3\to d_3-d_1\\ d_4\to d_4-3d_1}}{\overset{d_2\to d_2-2d_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} \overset{\text{khai triển cột 1}}{=} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -34.$

▪ Các kết quả đặc biệt cần nhớ

Định thức của ma trận chéo và tam giác được tính theo công thức:

• $\det[\text{diag}(a_{11} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{nn})] = a_{11}a_{22}...a_{nn}$

• $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$

2.5. Định lý Laplace mở rộng (*khai triển định thức theo k dòng hay k cột*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_n$. Xét k dòng và k cột như sau:

$$i_1 < i_2 < ... < i_k \text{ và } j_1 < j_2 < ... < j_k$$

• Gọi định thức của ma trận con cấp k gồm các phần tử nằm trên k dòng và k cột đã xét ở trên là

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

• Định thức β của ma trận con cấp $n-k$ nhận được từ A bằng cách bỏ đi k dòng và k cột ở trên được gọi là *định thức con bù* của δ.

• Đại lượng

$$\boxed{\Delta = (-1)^{i_1+i_2+...+i_k+j_1+j_2+...+j_k}\beta}$$

được gọi là *phần bù đại số* của δ.

▪ **Định lý**

Định thức của một ma trận vuông bằng tổng của tích mọi định thức rút ra từ k dòng (hay k cột) với phần bù tương ứng của chúng.

Ví dụ 52. Xét ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

• Chọn hai dòng 2 và 3, hai cột 1 và 4, ta có định thức $\delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

• Bỏ đi hai dòng và hai cột đã chọn, ta được định thức $\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

• Phần bù đại số của δ là đại lượng $\Delta = (-1)^{2+3+1+4}\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$.

Ví dụ 53. Áp dụng định lý Laplace mở rộng, hãy tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Giải. Ta khai triển Laplace theo hai dòng 1 và 2.

• Từ hai dòng này ta lập được sáu định thức con cấp hai:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,\ \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5,\ \delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

• Sáu phần bù đại số tương ứng với sáu định thức con trên là:

$$\Delta_1 = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = (-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_3 = (-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_4 = (-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_5 = (-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_6 = (-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Vậy $\Delta = \delta_1\Delta_1 + \delta_2\Delta_2 + \delta_3\Delta_3 + \delta_4\Delta_4 + \delta_5\Delta_5 + \delta_6\Delta_6 = -34$.

Ví dụ 54. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải. Khai triển Laplace theo hai dòng 2 và 5. Từ hai dòng này ta chỉ lập được một định thức con cấp hai khác không là

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14.$$

Phần bù đại số tương ứng là

$$\Delta = (-1)^{2+5+1+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$

Vậy $\det A = \delta.\Delta = -140$.

▪ Các kết quả đặc biệt cần nhớ

• Dạng chia khối

Nếu A, C là hai ma trận vuông và O là ma trận không thì ta có

$$\boxed{\left|\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline O & C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} A & O \\ \hdashline B & C \end{array}\right| = \det A.\det C}$$

• Dạng tích

Nếu A và C là hai ma trận vuông cùng cấp thì ta có

$$\boxed{\det(AB) = \det A.\det B}$$

Ví dụ 55. Tính định thức $\Delta = \left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right|$.

Giải. Định thức đã cho có dạng chia khối.

$$\text{Vậy } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-8).(-3) = 24.$$

Ví dụ 56. Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

Giải. Hoán vị cột và dòng như sau:

$$\Delta \overset{c_2 \leftrightarrow c_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{d_1 \leftrightarrow d_5}{=} \left|\begin{array}{cc:ccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right|.$$

Định thức thu được có dạng chia khối.

$$\text{Vậy } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-14).10 = -140.$$

Ví dụ 57. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det(AB)$.

Giải. Ta có:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Ví dụ 58. Tính định thức $\Delta = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \right|$.

Giải. Ta có:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -21 .$$

Ví dụ 59. Giải phương trình $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & x & 0 & 3 \\ 3 & 24 & x & x & 4 \\ x & x & x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$

Giải. Hoán vị cột 1 và cột 5, ta được:

$$\left| \begin{array}{cccc:c} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 15 & x & 0 & 0 \\ \hdashline 4 & 24 & x & x & 3 \\ 3 & x & x & 1 & x \end{array} \right| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 3 & 15 & x \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = \pm\sqrt{3} .$$

Ví dụ 60. Tính định thức cấp n sau: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \cdots & -a \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

Giải. Cộng tất cả các dòng vào dòng 1, ta được định thức tam giác $\Delta_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

Vậy $\Delta_n = n.a^{n-1}$.

Ví dụ 61. Tính định thức cấp n sau: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a \end{vmatrix}$.

Giải. Xem cột thứ nhất có dạng $(1+a \quad 1+0 \quad 0+0 \quad \cdots \quad 0+0)^T$ ta tách định thức thành tổng $\Delta_n = A_n + B_n$, trong đó:

$$A_n=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1+a & a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1+a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a\end{vmatrix},\qquad B_n=\begin{vmatrix}a & a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1+a & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1+a & a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1+a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a\end{vmatrix}.$$

Đối với A_n, lấy dòng thứ hai trừ dòng thứ nhất ta được

$$A_n=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 1+a & a & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1+a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a\end{vmatrix}.$$

Khai triển A_n theo cột thứ nhất, ta có $A_n=A_{n-1}$.

Lập luận tương tự, ta được $A_n=A_{n-1}=...=A_1=1$.

Khai triển B_n theo cột thứ nhất, ta được $B_n=a\Delta_{n-1}$.

Suy ra:

$$\Delta_n=1+a\Delta_{n-1}=1+a(1+a\Delta_{n-2})=1+a+a^2\Delta_{n-2}$$
$$=...=1+a+a^2+...+a^{n-1}\Delta_1=1+a+a^2+...+a^{n-1}(1+a).$$

Vậy $\Delta_n=1+a+a^2+...+a^{n-1}+a^n$.

Ví dụ 62. Tính định thức cấp n sau: $\Delta_n=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4\end{vmatrix}$.

Giải. Khai triển Δ_n theo cột thứ nhất, ta được

$$\Delta_n=4\Delta_{n-1}-\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4\end{vmatrix}.$$

Khai triển tiếp định thức cấp $n-1$ trên theo dòng thứ nhất, ta được

$$\Delta_n=4\Delta_{n-1}-3\Delta_{n-2} \qquad (1).$$

Biến đổi (1), ta có:

$$\Delta_n-\Delta_{n-1}=3(\Delta_{n-1}-\Delta_{n-2})=3^2(\Delta_{n-2}-\Delta_{n-3})=...=3^{n-2}(\Delta_2-\Delta_1)=3^n \qquad (2).$$

Biến đổi (1) theo cách khác, ta có:

$$\Delta_n - 3\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2} = ... = \Delta_2 - 3\Delta_1 = 1 \quad (3).$$

Vậy, từ (2) và (3) ta được $\Delta_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

2.6. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

2.6.1. Điều kiện để ma trận vuông khả nghịch

- **Định lý**

Ma trận vuông A là khả nghịch khi và chỉ khi

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

Ví dụ 63. Tìm điều kiện của tham số m để ma trận sau khả nghịch:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}.$$

Giải. Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{vmatrix} = m^5(m-1)^2.$$

Vậy A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1. \end{cases}$

2.6.2. Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$. Để tìm A^{-1}, ta thực hiện các bước sau

• **Bước 1.** Tính $\det A$. Khi đó:

1) nếu $\det A = 0$ thì ta kết luận A không khả nghịch;

2) nếu $\det A \neq 0$, ta làm tiếp bước 2.

• **Bước 2.** Tính ma trận *phụ hợp* (*adjunct matrix*) $\operatorname{adj} A = \left[(A_{ij})_n\right]^T$ của A, trong đó

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

• **Bước 3.** Ma trận nghịch đảo của A là

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\operatorname{adj} A}$$

Ví dụ 64. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có $\det A = 0$. Vậy A không khả nghịch.

Ví dụ 65. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải

• Ta có $\det A = -7 \neq 0$, suy ra A khả nghịch.

• Tính ma trận phụ hợp:

$$A_{11}=4,\ A_{12}=3,\ A_{21}=5,\ A_{22}=2\Rightarrow (A_{ij})_2=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{adj}A=\left[(A_{ij})_2\right]^T=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Vậy $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}.\operatorname{adj}A=-\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Ví dụ 66. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

Giải

• $\det A=2\neq 0\Rightarrow A$ khả nghịch.

• Ta có:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1,\ A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-4,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$\Rightarrow (A_{ij})_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{adj}A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Vậy $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}.\operatorname{adj}A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2.7. Hạng của ma trận

2.7.1. Định thức con cấp *k*

▪ **Định nghĩa**

Cho ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là định thức con cấp k của A.

▪ **Định lý**

Nếu ma trận A có tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp cao hơn k cũng bằng 0.

2.7.2. Hạng của ma trận

▪ **Định nghĩa**

Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A được gọi là hạng của ma trận A, ký hiệu là $r(A)$.

Nếu A là ma trận không thì ta quy ước $r(A)=0$.

Ví dụ 67. Ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 5 & 3 & -6\end{pmatrix}$ có tất cả 12 định thức con cấp một, $C_3^2.C_4^2=18$ định thức con cấp hai và $C_4^3=4$ định thức con cấp ba.

Các định thức con cấp ba là:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 5 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & 3 & -6\end{vmatrix}=0.$$

Do có $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$ nên $r(A)=2$.

- **Nhận xét**

• Hạng của ma trận không thay đổi khi ta hoán vị dòng hay cột.

• Nếu $A=(a_{ij})_{m\times n}$ khác không thì $1\le r(A)\le \min\{m,n\}$.

• Đặc biệt, nếu A là ma vuông cấp n thì

$$\boxed{r(A)=n\Leftrightarrow \det A\neq 0}$$

Ví dụ 68. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}m & -1 & -2\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & m & 1\end{pmatrix}$. Chứng tỏ rằng ma trận A có hạng bằng 3 với mọi m.

Giải. Ta có $\det A=-2m^2+3m-8<0,\forall m$.

Vậy $r(A)=3,\forall m\in\mathbb{R}$.

2.7.3. Thuật toán tìm hạng của ma trận

• Bước 1. Đưa ma trận cần tìm hạng về dạng bậc thang.

• Bước 2. Số dòng khác không của ma trận bậc thang đó chính là hạng của ma trận đã cho.

Ví dụ 69. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & -5 & 1 & 4\\ 3 & -8 & 5 & 6\end{pmatrix}$. Tìm $r(A)$.

Giải. Biến đổi sơ cấp dòng trên ma trận A, ta được:

$$A\xrightarrow[d_3\to d_3-3d_1]{d_2\to d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -7 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3\to d_3-d_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vậy $r(A)=2$.

Ví dụ 70. Cho ma trận $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -4\end{pmatrix}$. Tìm $r(B)$.

Giải. Biến đổi sơ cấp trên ma trận B, ta được:

$$B \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vậy $r(B) = 4$.

▪ **Chú ý**

Trong trường hợp tham số ở các cột đầu, ta khó đưa ma trận về dạng bậc thang. Khi đó, ta hoán vị cột của ma trận sao cho tham số ở các cột cuối, rồi đưa về dạng bậc thang.

Ví dụ 71. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm giá trị của tham số m để $r(A) = 2$.

Giải. Biến đổi sơ cấp trên ma trận A, ta được:

$$A \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 3 & 1 & 2m \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & m+1 \\ 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

• Với $m = 1$, ta có: $A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$.

• Với $m = -2$, ta có: $A \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$.

Vậy $m = -2 \vee m = 1$.

Ví dụ 72. Tùy theo giá trị của m, tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Biến đổi sơ cấp trên ma trận A, ta được:

$$A \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_4]{c_1 \leftrightarrow c_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 0 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_3 \to d_3 - d_1 \\ d_4 \to d_4 - d_1}]{d_2 \to d_2 + d_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & m-1 \\ 0 & 2 & -1 & m-2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_3]{d_3 \to d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & -m+1 & -m+1 \end{pmatrix}.$$

Vậy với $m = 1$ ta có $r(A) = 3$ và $m \neq 1$ ta có $r(A) = 4$. ■

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

Câu 1. Cho ma trận $A \in M_{7\times 8}(\mathbb{R})$. Phép nhân thực hiện được là:

A. $A.I_7$; B. $I_8.A$; C. $I_8.A.I_7$; D. $I_7.A.I_8$.

Câu 2. Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Ma trận X thỏa $X.A=B$ là:

A. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Câu 3. Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ và $B=\mathrm{diag}(a \quad b \quad c)$. Ma trận tích $A.B$ là:

A. $A.B=\begin{pmatrix}a & 2b & 3c\\ 4a & 5b & 6c\\ 7a & 8b & 9c\end{pmatrix}$; B. $A.B=\begin{pmatrix}a & 2a & 3a\\ 4b & 5b & 6b\\ 7c & 8c & 9c\end{pmatrix}$;

C. $A.B=\begin{pmatrix}a & 2 & 3\\ 4 & 5b & 6\\ 7 & 8 & 9c\end{pmatrix}$; D. $A.B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3c\\ 4 & 5b & 6\\ 7a & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Câu 4. Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ và $B=\mathrm{diag}(a \quad b \quad c)$. Ma trận tích $B.A$ là:

A. $B.A=\begin{pmatrix}a & 2b & 3c\\ 4a & 5b & 6c\\ 7a & 8b & 9c\end{pmatrix}$; B. $B.A=\begin{pmatrix}a & 2a & 3a\\ 4b & 5b & 6b\\ 7c & 8c & 9c\end{pmatrix}$;

C. $B.A=\begin{pmatrix}a & 2 & 3\\ 4 & 5b & 6\\ 7 & 8 & 9c\end{pmatrix}$; D. $B.A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3c\\ 4 & 5b & 6\\ 7a & 8 & 9\end{pmatrix}$.

Câu 5. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 7\\ -1 & -4\end{pmatrix}$. Ma trận A^{2011} là:

A. $A^{2011}=\begin{pmatrix}-15 & 4\\ -56 & 15\end{pmatrix}$; B. $A^{2011}=\begin{pmatrix}-15 & -56\\ 4 & 15\end{pmatrix}$;

C. $A^{2011}=\begin{pmatrix}-15 & 15\\ 4 & -56\end{pmatrix}$; D. $A^{2011}=\begin{pmatrix}-15 & -56\\ 15 & 4\end{pmatrix}$.

Câu 6. Cho ma trận $A \in M_{100}(\mathbb{R})$, trong đó các phần tử ở dòng thứ i là C_{100}^{i} $(i = 1,...,100)$.

Phần tử a_{1j} $(j = 1,...,100)$ của A^2 là:

A. 2^{100}; B. 100.2^{100}; C. $100(2^{100}+1)$; D. $100(2^{100}-1)$.

Câu 7. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m+1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Giá trị của tham số m để $r(A) = 3$ là:

A. $m = 0$; B. $m = 1$; C. $\begin{bmatrix} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{bmatrix}$; D. $\begin{bmatrix} m = 0 \\ m = 1 \end{bmatrix}$.

Câu 8. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ 2 & 3m-1 & m+2 & m+3 \\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7 \\ 2 & 2m & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Giá trị của tham số m để $r(A) = 2$ là:

A. $m = 0$; B. $m = 1$; C. $m = 2$; D. $m = 3$.

Câu 9. Định thức của ma trận λI_n $(\lambda \in \mathbb{R})$ là:

A. λ; B. $|\lambda|$; C. $n\lambda$; D. λ^n.

Câu 10. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Giá trị của $\det A$ là:

A. 4; B. -4; C. 8; D. -8.

Câu 11. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Giá trị của $\det A$ là:

A. 12; B. -12; C. 6; D. -6.

Câu 12. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Giá trị của $\det(A.B^T)$ là:

A. 100; B. -100; C. 125; D. -125.

Câu 13. Cho $\Delta = \begin{vmatrix} 2+2m & -5 & 12 \\ m-3 & m+1 & -3m \\ m+3 & -m-1 & 3m \end{vmatrix}$. Giá trị của tham số m để $\Delta < 0$ là:

A. $m > 0$; B. $m < 4$; C. $\begin{bmatrix} m < 0 \\ m > 4 \end{bmatrix}$; D. $0 < m < 4$.

Câu 14. Phương trình $\begin{vmatrix} x & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{bmatrix} x = -1 \\ x = \pm 2 \end{bmatrix}$; B. $\begin{bmatrix} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{bmatrix}$; C. $\begin{bmatrix} x = 2 \\ x = \pm 1 \end{bmatrix}$; D. $\begin{bmatrix} x = -2 \\ x = \pm 1 \end{bmatrix}$.

Câu 15. Phương trình $\begin{vmatrix} x-3 & 2 & -4 \\ 2 & x-6 & -2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ có nghiệm là:

A. $\begin{bmatrix} x = -2 \\ x = 7 \end{bmatrix}$; B. $\begin{bmatrix} x = -7 \\ x = 2 \end{bmatrix}$; C. $\begin{bmatrix} x = \pm 2 \\ x = 7 \end{bmatrix}$; D. $\begin{bmatrix} x = -2 \\ x = \pm 7 \end{bmatrix}$.

Câu 16. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m-2 & -4 & -3 \\ 4 & m+6 & 3 \\ -3 & -3 & m-1 \end{pmatrix}$. Giá trị của tham số m để A khả nghịch là:

A. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$; B. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$;

C. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$; D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$. ■

Chương II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

• *Một hệ gồm* m *phương trình bậc nhất chứa* n *ẩn* x_j $(j=1,2,...,n)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (I)$$

trong đó, các hệ số $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$,

được gọi là hệ phương trình tuyến tính tổng quát (hay gọi ngắn gọn là hệ phương trình tuyến tính).

• Ta gọi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$ *là ma trận hệ số,*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_i)_{m\times 1} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$ *là ma trận cột của hệ số tự do*

và $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j)_{n\times 1} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *là ma trận cột của ẩn.*

Khi đó, hệ phương trình (I) được viết dưới dạng ma trận là

$$\boxed{AX = B}$$

• $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ *được gọi là một nghiệm của hệ* (I) *nếu* $A\alpha = B$.

Nghĩa là, khi thay $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,...,\ x_n = \alpha_n$ vào (I) thì tất cả các đẳng thức đều được thỏa mãn.

- **Quy ước**
  Để cho gọn, ta viết nghiệm dưới dạng $\alpha = (\alpha_1;\ \alpha_2;...;\ \alpha_n)$.

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & -7 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 5\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$ và $\alpha=(1;-1;-1;1)$ là một nghiệm của hệ.

1.2. Hệ Cramer

1.2.1. Định nghĩa

Hệ Cramer là một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng với số ẩn và định thức của ma trận hệ số khác không.

Ví dụ 2. Hệ $\begin{cases} x+2y+\ z=4\\ x-3y+6z=4\\ 5x-\ y+\ z=5\end{cases}$ là hệ Cramer; hệ $\begin{cases} x-\ y+2z=3\\ 2x+3y+\ z=1\\ x+4y-\ z=2\end{cases}$ không phải là hệ Cramer.

1.2.2. Định lý Cramer (*Quy tắc Cramer*)

Cho hệ Cramer $AX=B$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ và $\det A\neq 0$.

Hệ Cramer $AX=B$ có nghiệm duy nhất là

$$\boxed{x_j=\frac{\det A_j}{\det A}\ (j=1,2,...,n)}$$

trong đó, các ma trận A_j nhận được bằng cách thay cột thứ j của A bởi cột các hệ số tự do B.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x_1+x_2-\ x_3=\ 1\\ \quad x_2+3x_3=\ 3\\ 2x_1+x_2+\ x_3=-1\end{cases}$

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=4,\qquad A_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_1=-12,$$

$$A_2=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_2=24,\qquad A_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_3=-4.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$\left(x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=-3;\ x_2=\frac{\det A_2}{\det A}=6;\ x_3=\frac{\det A_3}{\det A}=-1\right).$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+\ z=4\\ x-3y+6z=4\\ 5x-\ y+\ z=5\end{cases}$

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=75,\qquad A_1=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 4 & -3 & 6\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_1=75,$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 6\\ 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_2=75,\qquad A_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -3 & 4\\ 5 & -1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det A_3=75.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;\ y;\ z)=(1;\ 1;\ 1)$.

1.2.3. Biện luận số nghiệm của hệ dạng Cramer

Cho hệ $AX=B$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ và ma trận A chứa tham số m.

Ta có các trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Nếu $\det A\neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất.
- **Trường hợp 2.** Nếu $\det A=0$ và $\exists j\in\{1,2,...,n\}$ sao cho $\det A_j\neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- **Trường hợp 3.** Nếu $\det A=0$ và $\det A_j=0\ \ (\forall j=1,2,...,n)$ thì hệ có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm. Khi đó, ta giải $\det A=0$ tìm tham số m và thay vào hệ để giải trực tiếp.

Ví dụ 5. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}mx+8z-7t=m-1\\ 3x+my+2z+4t=m\\ mz+5t=m^2-1\\ 5z-mt=2m+2\end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}m & 0 & 8 & -7\\ 3 & m & 2 & 4\\ 0 & 0 & m & 5\\ 0 & 0 & 5 & -m\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=-m^2(m^2+25).$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $\det A\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$.

Ví dụ 6. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình $\begin{cases}(m+1)x+y=m+2\\ x+(m+1)y=0\end{cases}$ có nghiệm.

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}m+1 & 1\\ 1 & m+1\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=m(m+2).$$

Suy ra $\det A=0\Leftrightarrow m=-2\vee m=0$.

- Với $m=-2$, hệ phương trình trở thành $x-y=0$ (vô số nghiệm).
- Với $m=0$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases}x+y=2\\ x+y=0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ có nghiệm khi $m\neq 0$.

Ví dụ 7. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2 \Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow m = -2 \vee m = 1.$$

• Với $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$, ta có $\det A \neq 0$. Suy ra hệ có nghiệm duy nhất.

• Với $m = 1$, hệ trở thành $x + y + z = 1$. Suy ra hệ có vô số nghiệm.

• Với $m = -2$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 3 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m \\ 10x - (m+19)y + 10z = -2m \\ 12x - 24y - (m-13)z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\det A = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ 10 & -m-19 & 10 \\ 12 & -24 & 13-m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ 10 & -m-19 & 10 \\ 2m-2 & 0 & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-19 & 12 & -6 \\ 30 & -m-19 & 10 \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix}$$

$$= (1-m)\begin{vmatrix} m-19 & 12 \\ 30 & -m-19 \end{vmatrix} = (m-1)(m^2-1).$$

Suy ra $\det A = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

• Với $m \neq \pm 1$, ta có $\det A \neq 0$. Suy ra hệ có nghiệm duy nhất.

• Với $m = -1$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} -8x + 12y - 6z = -1 \\ 10x - 18y + 10z = 2 \\ 12x - 24y + 14z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y + 6z = 1 \\ 5x - 9y + 5z = 1 \\ 6x - 12y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y + 6z = 1 \\ 4x \quad\quad - 2z = -1 \\ 2x \quad\quad - \ z = \ 1 \end{cases}$$. Suy ra hệ vô nghiệm.

• Với $m = 1$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 6x + 12y - \ 6z = \ 1 \\ 10x - 20y + 10z = -2 \\ 12x - 24y + 12z = \ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 12y - 6z = \ 1 \\ 5x - 10y + 5z = -1 \\ x - \ 2y + \ z = \ 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 12y - 6z = \ 1 \\ 60x \quad\quad\quad = -1 \\ 12x \quad\quad\quad = \ 1 \end{cases}$$. Suy ra hệ vô nghiệm.

▪ **Chú ý**

Trong ví dụ 8, khi $m = 1$ thì $\det A = \det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$ nhưng hệ vô nghiệm.

1.3. Giải hệ tổng quát bằng phương pháp Gauss

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát

$$AX = B \qquad (I).$$

Gọi $\overline{A}$ là ma trận mở rộng, được xác định như sau

$$\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Để giải hệ (I) bằng phương pháp Gauss (còn được gọi là phương pháp biến đổi sơ cấp trên dòng), ta thực hiện các bước sau

• **Bước 1.** Lập ma trận mở rộng $\overline{A}$.

• **Bước 2.** Đưa $\overline{A}$ về bậc thang bởi các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

• **Bước 3.** Viết lại hệ và giải ngược từ dưới lên trên.

▪ **Chú ý**

Trong quá trình thực hiện bước 2, nếu:

i) có hai dòng tỉ lệ thì ta xóa đi một dòng;

ii) có dòng nào bằng *không* thì ta xóa đi dòng đó;

iii) có ít nhất một dòng ở dạng $(0 \quad \cdots \quad 0 \mid b)$ $(b \neq 0)$ thì ta kết luận hệ (I) vô nghiệm.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 2x + y - \ z = \ 1 \\ \quad\quad y + 3z = \ 3 \\ 2x + y + \ z = -1 \end{cases}$$

Giải

• Ma trận mở rộng là $\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

• Đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

• Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(-3;\ 6;-1)$.

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

Giải

• Ma trận mở rộng là $\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$.

• Đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang:

$$\overline{A} \xrightarrow[d_3 \to 5d_3 - 2d_1]{d_2 \to 5d_2 - 4d_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 39 & -15 & 6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - 3d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

Nhận thấy dòng 3 của $\overline{A}$ có dạng $(0 \quad \cdots \quad 0 \mid b)$ $(b \neq 0)$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5t = 1 \\ x + 3y - z + t = -2 \\ 2x + 5y - 4z + 6t = -1 \end{cases}$

Giải. Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5t = 1 \\ y + 2z - 4t = -3 \end{cases}$

Lúc này hệ gồm có 2 phương trình và 4 ẩn nên ta có thể chọn x, y làm ẩn chính và z, t làm ẩn phụ.

Đặt $z = \alpha \in \mathbb{R}$, $t = \beta \in \mathbb{R}$ và thế vào hệ ta được

$$\begin{cases} x = 7 + 7\alpha - 13\beta \\ y = -3 - 2\alpha + 4\beta \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm dưới dạng

$$\begin{cases} x = 7 + 7\alpha - 13\beta \\ y = -3 - 2\alpha + 4\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 18x_4 - 5x_5 = -5 \\ 3x_1 + 18x_2 + 8x_3 - 23x_4 - 6x_5 = -2 \end{cases}$

Giải. Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 2 & 12 & 6 & -18 & -5 & -5 \\ 3 & 18 & 8 & -23 & -6 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ 2x_3 - 8x_4 - x_5 = 3 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

Đặt $x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$ và thế vào hệ ta được

$$\begin{cases} x_1 = -6\alpha - 3\beta \\ x_3 = 5 + 4\beta \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm dưới dạng $(-6\alpha - 3\beta;\ \alpha;\ 5 + 4\beta;\ \beta;\ 7)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

- **Chú ý**

Trong trường hợp hệ có vô số nghiệm, ta gọi nghiệm chứa tham số là *nghiệm tổng quát*. Cho tham số giá trị cụ thể, ta được *nghiệm riêng*.

1.4. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính tổng quát

1.4.1. Định lý Kronecker – Capelli

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát $AX = B$ (I) *có nghiệm khi và chỉ khi*

$$\boxed{r(A) = r(\overline{A})}$$

trong đó, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *và* $\overline{A}$ *là ma trận mở rộng.*

- **Chú ý**

i) $r(A) \le r(\overline{A})$.

ii) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (số ẩn) thì hệ (I) có nghiệm duy nhất.

iii) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) < n$ thì hệ (I) có vô số nghiệm, trong đó có $n - r$ ẩn tự do được lấy những giá trị tùy ý.

Ví dụ 13. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+5y+3z=5 \\ 3x+7y+m^2z=6 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & m^2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & m^2-3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m^2-4 & 0 \end{array}\right).$$

Nhận thấy $2 \le r(A) \le 3$ nên hệ có vô số nghiệm khi:

$$r(A)=r(\overline{A})=2 \Leftrightarrow m^2-4=0\,.$$

Vậy, với $m=\pm 2$ thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào 1 tham số.

Ví dụ 14. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ -2x-6y+(m-1)z=4 \\ 4x+12y+(3+m^2)z=m-3 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & m-1 & 4 \\ 4 & 12 & m^2+3 & m-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & m^2-1 & m+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3-m \end{array}\right).$$

• Nếu $m=3$ thì $r(A)=r(\overline{A})=2 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm (loại).

• Nếu $m=-1$ thì $r(A)=1<3=r(\overline{A}) \Rightarrow$ hệ vô nghiệm (nhận).

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi $m \neq 3$.

- **Chú ý**

i) Khi tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình vô nghiệm, ta có thể tìm điều kiện để hệ có nghiệm. Sau đó, ta kết luận ngược lại.

ii) Nếu ma trận mở rộng $\overline{A}$ có các cột đầu chứa tham số thì ta có thể đổi cột trong ma trận A (không được đổi với cột hệ số tự do).

Ví dụ 15. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx+y+z+t=m \\ 2x+3y+2z+(5m-3)t=m+1 \\ (m-1)x+3y+2z+(m^2+m)t=4 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} m & 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 3 & 2 & 5m-3 & m+1 \\ m-1 & 3 & 2 & m^2+m & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 2 & 3 & 2 & 5m-3 & m+1 \\ 2 & 3 & m-1 & m^2+m & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_2 \to d_2-2d_1]{d_3 \to d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & 2-2m & 5m-5 & 1-m \\ 0 & 0 & m-3 & m^2-4m+3 & 3-m \end{array}\right).$$

• Nếu $m = 3$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

• Nếu $m \neq 3$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3 \Rightarrow$ hệ có vô số nghiệm.

1.4.2. Điều kiện để hai hệ phương trình có nghiệm chung

Muốn tìm điều kiện của tham số để hai hệ phương trình có nghiệm chung, ta ghép chúng thành một hệ rồi đi tìm điều kiện của tham số để hệ chung đó có nghiệm.

Ví dụ 16. Tìm điều kiện của tham số m để hai hệ phương trình sau có nghiệm chung:

$$\begin{cases} x + y \quad - z + t = 2m + 1 \\ x + 7y - 5z - t = -m \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 2x + 5y - 2z + 2t = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$$

Giải. Hai hệ phương trình có nghiệm chung khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + \ y - \ z + \ t \ = 2m + 1 \\ x + 7y - 5z - \ t \ = -m \\ 2x + 5y - 2z + 2t = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & -m \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 2m+1 \\ 3 & 7 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -3m-1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2m-1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -6m-2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -3m-1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10m-2 \end{array}\right).$$

Suy ra $r(A) = r(\overline{A}) \Leftrightarrow -10m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{5}$.

Vậy hai hệ phương trình đã cho có nghiệm chung khi $m = -\frac{1}{5}$. ■

2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

2.1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là trường hợp đặc biệt của hệ phương trình tổng quát, có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 \ + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (II)$$

Đặt $O = (0_i)_{m\times 1}$, hệ (II) được viết lại dưới dạng ma trận là

$$\boxed{AX = O}$$

- **Chú ý**

i) Do $r(A) = r(\overline{A})$ nên hệ (II) luôn có nghiệm.

ii) Đặc biệt, hệ (II) luôn có nghiệm $X_0 = (0; 0;...; 0)$. Khi đó, X_0 được gọi là *nghiệm tầm thường* của (II).

- **Nhận xét**

• Khi $m = n$ và $\det A \neq 0$ thì (II) có duy nhất nghiệm tầm thường.

• Khi $m = n$ và $\det A = 0$ thì (II) có vô số nghiệm.

Ví dụ 17. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} 3x + m^2 y + (m-5)z = 0 \\ (m+2)y + z = 0 \\ 4y + (m+2)z = 0 \end{cases}$$

Giải. Hệ phương trình có duy nhất nghiệm tầm thường khi:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & m^2 & m-5 \\ 0 & m+2 & 1 \\ 0 & 4 & m+2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 3(m^2+4m) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -4. \end{cases}$$

Ví dụ 18. Tìm giá trị của tham số m để hệ sau có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 0 \\ (m+1)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$.

Hệ đã cho có vô số nghiệm khi:

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ m+1 & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ m+2 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 0 & m-1 & -1 \\ 1 & -m & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (m+2)(m^2-2m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 2. \end{cases}$$

2.2. Nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất

Ví dụ 19. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ $(*)$

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ $(*)$ trở thành $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

Vậy hệ $(*)$ có vô số nghiệm dưới dạng $\begin{cases} x_1 = -2\alpha_1 - 5\alpha_2 \\ x_2 = 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_2 \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$.

Khi đó, ta có các khái niệm sau

1) Nghiệm $X = (-2\alpha_1 - 5\alpha_2; 3\alpha_2; \alpha_1; \alpha_2)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ được gọi là *nghiệm tổng quát* của hệ $(*)$.

2) Biến đổi nghiệm tổng quát, ta được

$$X = \alpha_1(-2; 0; 1; 0) + \alpha_2(-5; 3; 0; 1) \ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

Hai nghiệm $X_1 = (-2; 0; 1; 0)$ và $X_2 = (-5; 3; 0; 1)$ được gọi là *nghiệm cơ bản* của hệ $(*)$.

3) Hệ nghiệm $\{X_1, X_2\}$ được gọi là *hệ nghiệm cơ bản* của $(*)$.

- **Tổng quát**

1) Nếu $r(A) = r < n$ (số ẩn) thì hệ (II) có nghiệm tổng quát X là

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}) \\ x_2 = \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}) \\ ..... \\ x_r = \varphi_r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r}) \\ x_{r+1} = \alpha_1 \\ x_{r+2} = \alpha_2 \\ ..... \\ x_n = \alpha_{n-r} \end{cases} (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}) \qquad (**)$$

2) Thay $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_{n-r} = 0$ vào $(**)$, ta được nghiệm cơ bản

$$X_1 = (\varphi_1(1,0,...,0); \varphi_2(1,0,...,0); ...; \varphi_r(1,0,...,0); 1; 0; ...; 0).$$

Thay $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, ..., \alpha_{n-r} = 0$ vào $(**)$, ta được nghiệm cơ bản

$$X_2 = (\varphi_1(0,1,...,0); \varphi_2(0,1,...,0); ...; \varphi_r(0,1,...,0); 0; 1; ...; 0).$$

.....

Thay $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_{n-r} = 1$ vào $(**)$, ta được nghiệm cơ bản

$$X_{n-r} = (\varphi_1(0,0,...,1); \varphi_2(0,0,...,1); ...; \varphi_r(0,0,...,1); 0; 0; ...; 1).$$

3) Hệ $\{X_1, X_2, ..., X_{n-r}\}$ được gọi là *hệ nghiệm cơ bản* của (II).

Khi đó, ta có

$$\boxed{X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_{n-r} X_{n-r}}$$

Ví dụ 20. Tìm nghiệm cơ bản và nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x+y+\ z=0 \\ -3y-4z=0 \end{cases}$

Cho $z=1$, ta được một nghiệm cơ bản là $X_1=\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};1\right)$.

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$X=\alpha X_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}\alpha \\ y=-\frac{4}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases} (\alpha\in\mathbb{R}).$$

- **Chú ý**

Để tránh các nghiệm cơ bản ở dạng phân số, ta có thể chọn ẩn phụ và tham số thích hợp khi tìm nghiệm cơ bản.

Ví dụ 21. Tìm nghiệm cơ bản và nghiệm tổng quát của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+\ z+2t=0 \\ 2x-y-2z+\ t=0 \end{cases}$$

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+y+\ z+2t=0 \\ -3y-4z-3t=0 \end{cases}$$

Lần lượt thay $z=3,\ t=0$ và $z=0,\ t=1$ vào hệ ta được hai nghiệm cơ bản là:

$$X_1=(1;-4;\ 3;\ 0) \text{ và } X_2=(-1;-1;\ 0;\ 1).$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ là:

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha_1-\alpha_2 \\ y=-4\alpha_1-\alpha_2 \\ z=3\alpha_1 \\ t=\alpha_2 \end{cases} (\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbb{R}).$$

2.3. Cấu trúc nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Trong phần này, ta xét hai hệ phương trình tuyến tính tổng quát và tuyến tính thuần nhất đều có vô số nghiệm liên kết với nhau như sau

$$AX=B\ \ (I) \text{ và } AX=O\ \ (II)$$

trong đó

$$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ X=(x_j)_{n\times 1},\ B=(b_i)_{m\times 1},\ O=(0_i)_{m\times 1} \text{ và } r(A)=r(\overline{A})<n.$$

- **Định lý**

Nếu X là nghiệm tổng quát của hệ (II) và X_0 là một nghiệm riêng của hệ (I) thì $X+X_0$ là nghiệm tổng quát của hệ (I).

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z+2t=4 \\ 2x-y-2z+t=2 \end{cases} \quad (*)$$

Giải. Xét hệ phương trình thuần nhất liên kết với hệ $(*)$ như sau:

$$\begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ 2x-y-2z+t=0 \end{cases} \quad (**)$$

Trong ví dụ 21, ta đã biết hệ $(**)$ có nghiệm tổng quát là

$$\begin{cases} x=\alpha_1-\alpha_2 \\ y=-4\alpha_1-\alpha_2 \\ z=3\alpha_1 \\ t=\alpha_2 \end{cases} (\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

Mặt khác, hệ $(*)$ có một nghiệm riêng là $X_0=(0;\,0;\,0;\,2)$.

Vậy nghiệm tổng quát của hệ $(*)$ là

$$\begin{cases} x=\alpha_1-\alpha_2 \\ y=-4\alpha_1-\alpha_2 \\ z=3\alpha_1 \\ t=\alpha_2+2 \end{cases} (\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R}) \blacksquare$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

Câu 1. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+4y+5z=-1 \\ 2x+7y-11z=2 \\ 3x+11y-6z=1 \end{cases}$ là:

A. $(15;-4;\,0)$; B. $(94;-25;\,1)$;

C. $(15-79\alpha;-4-21\alpha;\,\alpha)\ (\alpha\in\mathbb{R})$; D. $(15+79\alpha;-4-21\alpha;\,\alpha)\ (\alpha\in\mathbb{R})$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} 2(m+1)x+(m+10)y=m \\ mx+(m+2)y=2m \end{cases}$ có duy nhất một nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m=2$; B. $m\neq 2$;

C. $m=-2$; D. $m\neq -2$.

Câu 3. Giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x+2y+(7-m)z=2 \\ 2x+4y-5z=1 \\ 3x+6y+mz=3 \end{cases}$

có vô số nghiệm là:

A. $m=-1$; B. $m=1$;
C. $m=-7$; D. $m=7$.

Câu 4. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3x-y+2z=3\\2x+y-2z=7\end{cases}$ là:

A. $(3;\,2\alpha;\,\alpha)\ (\alpha\in\mathbb{R})$; B. $(1+\alpha;\ 0;\ \alpha)\ (\alpha\in\mathbb{R})$;
C. $(2;-\alpha+3;\ \alpha)\ (\alpha\in\mathbb{R})$; D. $(2;\ 3+2\alpha;\ \alpha)\ (\alpha\in\mathbb{R})$.

Câu 5. Số nghiệm cơ bản của hệ $\begin{cases}3x-\ 2y+\ 2z=0\\2x+\ 7y-\ 6z=0\\4x+39y-34z=0\end{cases}$ là:

A. 0 nghiệm; B. 1 nghiệm;
C. 2 nghiệm; D. 3 nghiệm.

Câu 6. Số nghiệm cơ bản của hệ $\begin{cases}x+\ y-z+\ t=0\\x-2y+z+\ t=0\\3x-3y+z+3t=0\\5x-\ y-z+5t=0\end{cases}$ là:

A. 1 nghiệm; B. 2 nghiệm;
C. 3 nghiệm; D. 4 nghiệm.

Câu 7. Cho biết $X_0=(1;\,1;\,1)$ là nghiệm cơ bản của hệ $\begin{cases}x-2y+z=0\\3x+y-4z=0.\end{cases}$

Nghiệm tổng quát của hệ $\begin{cases}x-2y+z=0\\3x+y-4z=-7\end{cases}$ là:

A. $(\alpha+1;\,\alpha+2;\,\alpha+3)\ (\alpha\in\mathbb{R})$; B. $(1+\alpha;\ \alpha-3;\ \alpha+4)\ (\alpha\in\mathbb{R})$;
C. $(\alpha-2;\,\alpha+3;\ \alpha+1)\ (\alpha\in\mathbb{R})$; D. $(\alpha+1;\ 3+\alpha;\ \alpha-1)\ (\alpha\in\mathbb{R})$.

Câu 8. Biết $(-13;\,1;\,4;\,0)$, $(10;\,0;-3;\,1)$ là hai nghiệm cơ bản của hệ $\begin{cases}x-3y+4z+2t=0\\x+\ y+3z-\ t=0.\end{cases}$

Nghiệm tổng quát của hệ $\begin{cases}x-3y+4z+2t=-3\\x+\ y+3z-\ t=-2\end{cases}$ là:

A. $(10\alpha-13\beta;\,\alpha+1;\ 4\alpha-3\beta-1;\,\beta)\ (\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})$;

B. $(10\alpha-13\beta;\,\beta-1;-3\alpha+4\beta;\,\alpha+1)\ (\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})$;

C. $(-13\alpha+10\beta+1;\,\alpha;\ 4\alpha-3\beta-1;\,\beta)\ (\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})$;

D. $(-13\alpha+10\beta;\,\alpha-1;\ 4\alpha-3\beta;\,\beta+1)\ (\alpha,\,\beta\in\mathbb{R})$. ■

Chương III

KHÔNG GIAN VECTOR

1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VECTOR

1.1. Định nghĩa

Cho tập V khác rỗng, xét hai phép toán cộng và nhân vô hướng sau:

$$V \times V \to V \qquad \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(x,\, y) \mapsto x + y; \qquad (\lambda,\, x) \mapsto \lambda x.$$

Ta nói V cùng với hai phép toán trên là một *không gian vector* (*vector space* – viết tắt là *kgvt*) trên $\mathbb{R}$, hay $\mathbb{R}$ – không gian vector, nếu thỏa 8 tính chất sau:

1) $(x+y)+z = x+(y+z),\ \forall x,y,z \in V$;

2) $\exists \theta \in V : x+\theta = \theta + x = x,\ \forall x \in V$;

3) $\forall x \in V,\ \exists (-x) \in V : (-x)+x = x+(-x) = \theta$;

4) $x+y = y+x,\ \forall x,y \in V$;

5) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,\ \forall x,y \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

6) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,\ \forall x \in V,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$;

7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),\ \forall x \in V,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$;

8) $1.x = x,\ \forall x \in V$.

▪ **Chú ý**

i) Mỗi phần tử thuộc V được gọi là một *vector*; mỗi phần tử thuộc $\mathbb{R}$ được gọi là một *vô hướng*.

ii) Vector $\theta \in V$ là duy nhất và được gọi là *vector không*.

iii) $(-x) \in V$ được gọi là *vector đối* của vector $x \in V$ và mỗi vector x có một vector đối duy nhất.

1.2. Tính chất của không gian vector *V*

1) $0.x = \theta,\ \forall x \in V$
2) $-x = (-1).x,\ \forall x \in V$
3) $\lambda.\theta = \theta,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4) $\lambda.x = \theta \Rightarrow \lambda = 0 \vee x = \theta \ \ (x \in V,\ \lambda \in \mathbb{R})$
5) $\lambda.x = \mu.x,\ x \neq \theta \Rightarrow \lambda = \mu \ \ (x \in V;\ \lambda,\mu \in \mathbb{R})$
6) $\lambda.x = \lambda.y,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow x = y \ \ (x,y \in V;\ \lambda \in \mathbb{R})$

1.3. Các ví dụ về không gian vector

1) Tập hợp $\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1;\, x_2;\ldots;\, x_n) \middle| x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,\ldots,n \right\}$ các bộ số thực là một không gian vector với hai phép toán:

$$x + y = (x_1 + y_1;\, x_2 + y_2;\ldots;\, x_n + y_n),$$
$$\lambda x = (\lambda x_1;\, \lambda x_2;\ldots;\, \lambda x_n)\ (x,y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

x_i được gọi là thành phần thứ i của vector $x = (x_1;x_2;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Vector *không* thuộc $\mathbb{R}^n$ là $\theta = (0;\, 0;\ldots;\, 0)$.

2) Gọi $P_n[x]$ là tập hợp các đa thức hệ số thực theo biến x có bậc nhỏ hơn hay bằng n. Mỗi phần tử p hay $p(x) \in P_n[x]$ có dạng:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ \ (a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,\ldots,n).$$

$P_n[x]$ là một không gian vector với hai phép toán:

$$(p(x), q(x)) \mapsto p(x) + q(x) \text{ và } (\lambda, p(x)) \mapsto \lambda p(x) \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Vector *không* thuộc $P_n[x]$ là $\theta = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$.

3) Tập hợp nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với hai phép toán cộng và nhân vô hướng là một không gian vector.

4) Tập hợp $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ với hai phép toán cộng ma trận và nhân vô hướng là một *kgvt*.

1.4. Không gian vector con

▪ **Định nghĩa**

Cho không gian vector V, tập hợp $W \subset V$ được gọi là không gian vector con (vectorial subspace) của V nếu W cũng là một không gian vector.

▪ **Nhận xét**

Cho không gian vector V, tập hợp $W \subset V$ là *kgvt* con của V nếu:

$$(x + \lambda y) \in W, \ \forall x, y \in W, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ.

• Tập hợp $W = \{\theta, \ \theta \in V\}$ là *kgvt* con của *kgvt* V.

• Tập hợp $W = \left\{(\alpha; \ \beta; \ 0;...;0) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ là *kgvt* con của $\mathbb{R}^n$.

• $\mathbb{R}^2$ không là *kgvt* con của $\mathbb{R}^3$ vì $u = (1; \ 2) \in \mathbb{R}^2$ nhưng $u \notin \mathbb{R}^3$. ■

2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH – PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

2.1. Tổ hợp tuyến tính

▪ **Định nghĩa**

Trong không gian vector V, xét n vector u_i ($i = 1,2,...,n$).

Tổng $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ (\alpha_i \in \mathbb{R})$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của n vector u_i. Nếu $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \ (\alpha_i \in \mathbb{R})$ thì ta nói vector x được biểu diễn (hay biểu thị) tuyến tính qua n vector u_i (hay hệ vector $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$).

Ví dụ 1. Tìm biểu diễn tuyến tính (nếu có) của vector $x = (1; \ 7; -4)$ qua hai vector $u_1 = (1; -3; \ 2)$ và $u_2 = (2; -1; \ 1)$.

Giải. Giả sử vector x được biểu diễn tuyến tính qua u_1 và u_2.

Suy ra, tồn tại $\alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

hay

$$(1; \ 7; -4) = \alpha_1(1; -3; \ 2) + \alpha_2(2; -1; \ 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = \ 1 \\ -3\alpha_1 - \ \alpha_2 = \ 7 \\ 2\alpha_1 + \ \alpha_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = \ 2. \end{cases}$$

Vậy $x = -3u_1 + 2u_2$.

Ví dụ 2. Tìm biểu diễn tuyến tính (nếu có) của vector $x=(1;\ 3;-1)$ qua hai vector $u_1=(1;-1;\ 0)$ và $u_2=(2;-1;\ 0)$.

Giải. Giả sử vector x được biểu diễn tuyến tính qua u_1 và u_2.

Suy ra, tồn tại $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbb{R}$ sao cho $x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2$

hay

$$(1;\ 3;-1)=\alpha_1(1;-1;\ 0)+\alpha_2(2;-1;\ 0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=\ \ 1\\ -\alpha_1-\ \alpha_2=\ \ 3\\ 0\alpha_1+0\alpha_2=-1\end{cases}$$ (hệ phương trình vô nghiệm).

Vậy vector x không có biểu diễn tuyến tính qua u_1 và u_2.

Ví dụ 3. Trong không gian $P_2[x]$, tìm biểu thị tuyến tính của vector $f(x)=-4+3x+2x^2$ qua hệ hai vector: $u(x)=-1+x+3x^2$ và $v(x)=7-5x-x^2$.

Giải. Giả sử $f(x)$ được biểu thị tuyến tính qua $u(x)$ và $v(x)$.

Suy ra, tồn tại $\alpha_1,\ \alpha_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f(x)=\alpha_1u(x)+\alpha_2v(x)$

hay

$$-4+3x+2x^2=\alpha_1(-1+x+3x^2)+\alpha_2(7-5x-x^2)$$
$$\Leftrightarrow -4+3x+2x^2=(-\alpha_1+7\alpha_2)+(\alpha_1-5\alpha_2)x+(3\alpha_1-\alpha_2)x^2$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha_1+7\alpha_2=-4\\ \alpha_1-5\alpha_2=\ \ 3\\ 3\alpha_1-\ \alpha_2=\ \ 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2}\\ \alpha_2=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}u(x)-\dfrac{1}{2}v(x)$.

Ví dụ 4. Tìm m để vector $u=(1;\ m;\ 5)$ được biểu thị tuyến tính qua hai vector $u_1=(1;-3;\ 2)$ và $u_2=(2;-1;\ 1)$.

Giải. Giả sử u được biểu thị tuyến tính qua $u_1,\ u_2$.

Suy ra, tồn tại $a,\ b\in\mathbb{R}$ sao cho $u=au_1+bu_2$

hay

$$(1;\ m;\ 5)=a(1;-3;\ 2)+b(2;-1;\ 1)\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=1\\ -3a-\ b=m\\ 2a+\ b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\ \ 3\\ b=-1\\ m=-8.\end{cases}$$

Vậy $m=-8$ và $u=3u_1-u_2$.

Ví dụ 5. Trong $\mathbb{R}^4$, Tìm m để u_1 là tổ hợp tuyến tính của $u_2,\ u_3,\ u_4$ trong đó:

$$u_1=(1;-1;\ 0;\ 1),\ u_2=(m;\ m;-1;\ 2),\ u_3=(0;\ 2;\ 0;\ m),\ u_4=(2;\ 2;-m;\ 4).$$

Giải. Giả sử u_1 là tổ hợp tuyến tính của $u_2,\ u_3,\ u_4$. Suy ra, $\exists a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ sao cho

$$u_1=au_2+bu_3+cu_4\Leftrightarrow a\begin{pmatrix}m\\ m\\ -1\\ 2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 0\\ m\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -m\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Yêu cầu đề bài tương đương với hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} ma + 2c = 1 \\ ma + 2b + 2c = -1 \\ -a - mc = 0 \\ 2a + mb + 4c = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ m & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 2 & m & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -m & 0 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ m & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 4-2m & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 4-2m & 1+m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m^3+m^2-4m+2 \end{array}\right)$$ (điều kiện: $2 - m^2 \neq 0$).

Vậy để u_1 là tổ hợp tuyến tính của u_2, u_3, u_4 thì:

$$r(A) = r\left(A\middle|B\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 + 2m^2 - 8m + 4 = 0 \\ 2 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -1 \pm \sqrt{3}.$$

2.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

- **Định nghĩa**

Trong không gian vector V, xét n vector u_i ($i = 1,2,...,n$).

- *Hệ chứa n vector $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ được gọi là độc lập tuyến tính (viết tắt là đltt) nếu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \theta$ thì $\alpha_i = 0, \forall i = 1,2,...,n$.*
- *Hệ chứa n vector $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ không phải là độc lập tuyến tính thì được gọi là phụ thuộc tuyến tính (viết tắt là pttt).*

Ví dụ 6. Trong $\mathbb{R}^2$, xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ vector

$$A = \{u_1 = (1;-1),\ u_2 = (2;\ 3)\}.$$

Giải. Ta có:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \theta \Leftrightarrow \alpha_1(1;-1) + \alpha_2(2;\ 3) = (0;\ 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ A là độc lập tuyến tính.

Ví dụ 7. Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ gồm 3 vector sau:

$$B = \{u_1 = (-1;\ 3;\ 2),\ u_2 = (2;\ 0;\ 1),\ u_3 = (0;\ 6;\ 5)\}.$$

Giải. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = \theta \Leftrightarrow \alpha_1(-1;\ 3;\ 2) + \alpha_2(2;\ 0;\ 1) + \alpha_3(0;\ 6;\ 5) = (0;\ 0;\ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ $(*)$ có ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Do $r(A) = 2 < 3$ nên hệ $(*)$ có nghiệm không tầm thường.

Vậy hệ B là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 8. Trong $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ:

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Giải. Ta có: $aA + bB + cC = (0_{ij})_{2\times 3}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \\ 3a + 4b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Do hệ $(**)$ có vô số nghiệm nên hệ W phụ thuộc tuyến tính.

Cách khác

Do $2A - B - C = (0_{ij})_{2\times 3}$ nên hệ W phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 9. Trong $P_n[x]$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ:

$$U = \{u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2, \ldots,\ u_n = x^{n-1},\ u_{n+1} = x^n\}.$$

Giải. Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = \theta\ (\lambda_i \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \ldots + \lambda_n x^{n-1} + \lambda_{n+1} x^n = 0 + 0x + \ldots + 0x^n.$$

Đồng nhất thức, ta được

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0.$$

Vậy hệ vector U là độc lập tuyến tính.

Ví dụ 10. Trong $P_2[x]$ cho hệ 3 vector $V = \{f_1 = 2x^2;\ f_2 = x^2 + x + 1;\ f_3 = x^2 - x + m\}$.

Tìm m để hệ V phụ thuộc tuyến tính.

Giải. Ta có:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = \theta$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1(2x^2) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x^2 - x + m) = 0x^2 + 0x + 0$$
$$\Leftrightarrow (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)x + (\alpha_2 + m\alpha_3) = 0x^2 + 0x + 0.$$

Yêu cầu đề bài tương đương với hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + m\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Nghĩa là:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\left(m+1\right) = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

▪ **Định lý**

Hệ chứa n vector là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại trong hệ một vector là tổ hợp tuyến tính của $n-1$ vector còn lại.

▪ **Hệ quả**

• *Nếu hệ có vector không thì hệ phụ thuộc tuyến tính.*

• *Nếu có một bộ phận của hệ phụ thuộc tuyến tính thì hệ pttt.*

Ví dụ 11.

• Trong $\mathbb{R}^3$, xét hệ $A = \{u_1 = (0;\, 0;\, 0),\ u_2 = (1;\, 0;\, 1),\ u_3 = (0;\, 1;\, 2)\}$.

Do $1.u_1 + 0.u_2 + 0.u_3 = \theta$ nên hệ A là phụ thuộc tuyến tính.

• Trong $P_4[x]$, xét hệ $B = \{v_1 = x^2;\ v_2 = -3x^2;\ v_3 = (x-1)^3;\ v_4 = x^4\}$.

Ta có bộ phận $\{v_1 = x^2;\ v_2 = -3x^2\}$ là *pttt* nên hệ B là *pttt*.

Thật vậy, hệ B *pttt* do $3.v_1 + 1.v_2 + 0.v_3 + 0.v_4 = \theta$.

2.3. Hệ vector trong R^n

▪ **Định nghĩa**

Trong $\mathbb{R}^n$, xét m vector $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})\ \ (i = 1,2,...,m)$.

Ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ gồm m dòng tương ứng với m vector được gọi là ma trận dòng của hệ m vector $\{u_1,\ u_2, ...,\ u_m\}$.

Ví dụ 12. Hệ $\{u_1 = (1;-1;-2),\ u_2 = (4;\, 2;-3)\}$ có ma trận dòng là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

▪ **Định lý**

Trong $\mathbb{R}^n$, giả sử hệ W gồm m vector và có ma trận dòng là $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

• *Hệ vector W là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $r(A) = m$.*

• *Hệ vector W là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $r(A) < m$.*

▪ **Hệ quả**

• *Trong $\mathbb{R}^n$, hệ chứa nhiều hơn n vector thì phụ thuộc tuyến tính.*

• *Trong $\mathbb{R}^n$, hệ chứa n vector là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi*

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

Ví dụ 13. Trong $\mathbb{R}^2$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ vector sau: $B = \{(-1;\, 2;\, 0),\ (2;\, 1;\, 1)\}$.

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do $r(A) = 2$ nên hệ B là độc lập tuyến tính.

Ví dụ 14. Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ vector sau: $B=\{(-1;\,2;\,0),\,(1;\,5;\,3),\,(2;\,3;\,3)\}$.

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 7 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Do $r(A)=2<3$ nên hệ B phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 15. Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện của m để hệ $\{(-m;\,1;\,1),\,(1-4m;\,3;\,m+2)\}$ *pttt*.

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}-m & 1 & 1\\ 1-4m & 3 & m+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -m & 1\\ 3 & 1-4m & m+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -m & 1\\ 0 & 1-m & m-1\end{pmatrix}.$$

Vậy hệ đã cho là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi:

$$r(A)<2\Leftrightarrow m=1.$$

Ví dụ 16. Trong $\mathbb{R}^3$, biện luận sự *đltt* và sự *pttt* của hệ $W=\{(m;\,1;\,1),\,(1;\,m;\,1),\,(1;\,1;\,m)\}$.

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=(m+2)(m-1)^2.$$

• Hệ W là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi:

$$\det A\neq 0\Leftrightarrow m\neq -2\wedge m\neq 1.$$

• Hệ W là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi:

$$\det A=0\Leftrightarrow m=-2\vee m=1.\ \blacksquare$$

3. SỐ CHIỀU, CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

3.1. Không gian sinh bởi một hệ vector

▪ **Định nghĩa**

Trong *kgvt* V cho hệ gồm m vector $S=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$.

• *Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là không gian con sinh bởi S, ký hiệu là $<S>$.*

Vậy
$$\boxed{<S>=\left\{v\in V\,\middle|\,v=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\ (\alpha_i\in\mathbb{R})\right\}}$$

• *Nếu $<S>=V$ thì ta gọi S là hệ sinh của V hay V được sinh ra bởi hệ S.*

Ví dụ 17. Trong $\mathbb{R}^2$, cho hệ $S=\{u_1=(1;\,0),\,u_2=(0;\,1)\}$.

Gọi $v\in\mathbb{R}^2$, với $v=(x;\,y)$, ta có:

$$v=(x;\,0)+(0;\,y)=x.u_1+y.u_2\Rightarrow v\in<S>.$$

Mặt khác, do $<S>\subset\mathbb{R}^2$ nên $<S>=\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 18. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ $S = \{u_1 = (1;\ 0;-1),\ u_2 = (0;\ 1;-1)\}$.

Gọi $v \in < S >$, với $v = (x;\ y;\ z)$, ta có:

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha;\ \beta;-\alpha-\beta)\ (\alpha,\beta \in \mathbb{R}).$$

Vậy $< S >= \{x = (\alpha;\ \beta;-\alpha-\beta)\ (\alpha,\beta \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ví dụ 19. Chứng tỏ hệ vector $W = \{u_1 = (1;\ 1;\ 1),\ u_2 = (0;\ 1;\ 1)\}$ không phải là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Giải. Lấy vector $v = (0;\ 0;\ 1) \in \mathbb{R}^3$. Ta có:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Leftrightarrow (0;\ 0;\ 1) = \alpha_1(1;\ 1;\ 1) + \alpha_2(0;\ 1;\ 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \text{ (hệ phương trình vô nghiệm).}$$

Suy ra $v \notin < W >$. Vậy W không phải là hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 20. Cho hệ phương trình thuần nhất $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$ có hai nghiệm cơ bản là

$$X_1 = (0;\ 1;\ 0;\ 1),\ X_2 = (0;-1;\ 1;\ 0).$$

Gọi X là một nghiệm bất kỳ của hệ phương trình trên, ta có:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2\ (\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

Vậy $\left\langle X_1,\ X_2 \right\rangle$ là không gian vector chứa tất cả các nghiệm của hệ phương trình trên, và được gọi là *không gian nghiệm.*

3.2. Số chiều và cơ sở

▪ **Định nghĩa**

- *Không gian vector V được gọi là có n chiều (n – dimension), nếu tồn tại n vector độc lập tuyến tính và không có bất kỳ hệ độc lập tuyến tính nào chứa nhiều hơn n vector.*
  Ký hiệu số chiều của không gian vector V là $\dim V$.
- *Hệ gồm n vector độc lập tuyến tính trong không gian vector V có n chiều được gọi là một cơ sở (basic) của V.*

▪ **Quy ước**

Không gian zero $W = \{\theta\}$ chỉ chứa 1 vector không có số chiều là 0.

▪ **Chú ý**

i) Không gian vector có số nhiều hữu hạn được gọi là không gian vector hữu hạn chiều.

ii) Không gian vector mà trong đó ta có thể tìm được vô số vector độc lập tuyến tính được gọi là không gian vector vô hạn chiều. Trong phạm vi chương trình, ta không xét loại không gian này.

▪ **Định lý**

Nếu hệ S là một cơ sở của không gian n chiều V thì $< S >= V$.

Ví dụ 21. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hệ vector $F = \{u_1 = (1;-1),\ u_2 = (0;\ 1)\}$.

Do $\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 \neq 0$ nên hệ F là độc lập tuyến tính.

Mặt khác, xét vector $v = (a;\, b) \in \mathbb{R}^2$ ta có $v = au_1 + (a+b)u_2$.

Suy ra hệ $\{u_1,\, u_2,\, v\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Vậy $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ và hệ vector F là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

▪ **Chú ý**

i) Trong $\mathbb{R}^n$, hệ vector $E_n = \{e_i = (a_{i1};\, a_{i2};...;\, a_{in}),\, i = 1,2,...,n\}$

trong đó $a_{ij} = 1$ nếu $i = j$, $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $\dim \mathbb{R}^n = n$. Hệ E_n được gọi là *cơ sở chính tắc* của $\mathbb{R}^n$.

ii) Trong $\mathbb{R}^n$, mọi hệ gồm n vector *đltt* đều là cơ sở.

iii) Một không gian vector hữu hạn chiều có thể có nhiều cơ sở và số vector trong các cơ sở đó là không đổi.

Ví dụ 22. Trong $P_2[x]$, xét hệ $S = \{f_1 = 1,\, f_2 = x,\, f_3 = x^2\}$.

Nhận thấy hệ S là độc lập tuyến tính.

Xét $f \in P_2[x]$ với $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$, ta có:

$$f = a_0.f_1 + a_1.f_2 + a_2.f_3 \Rightarrow \{f_1 = 1,\, f_2 = x,\, f_3 = x^2,\, f\} \text{ là } pttt.$$

Vậy $\dim P_2[x] = 3$ và S là một cơ sở của $P_2[x]$.

Tổng quát, ta có

$$\boxed{\dim P_n[x] = n+1, \forall n \in \mathbb{Z}^+}$$

▪ **Nhận xét**

Trong $\mathbb{R}^n$, gọi A là ma trận dòng tạo bởi m vector của hệ S.

• Ta có $\dim < S > = r(A) \leq n$.

• Nếu $\dim < S > = k$ thì mọi hệ gồm k vector *đltt* của S đều là cơ sở của $< S >$.

Ví dụ 23. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector $S = \{(1;\, 2;\, 3;\, 4),\ (2;\, 4;\, 9;\, 6),\ (1;\, 2;\, 5;\, 3),\ (1;\, 2;\, 6;\, 3)\}$.

Tìm số chiều của không gian sinh $< S >$.

Giải. Ma trận dòng của 4 vector là $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 9 & 6\\ 1 & 2 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 6 & 3\end{pmatrix}$.

$$A \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vậy, do $r(A) = 3$ nên $\dim < S > = 3$.

Ví dụ 24. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector

$$W = \{u_1 = (-2;\, 4; -2; -4),\, u_2 = (2; -5; -3;\, 1),\, u_3 = (-1;\, 3;\, 4;\, 1)\}.$$

Xác định số chiều và tìm một cơ sở của $< W >$.

Giải. Ta có:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\\ 2 & -5 & -3 & 1\\ -1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=2.$$

Do hệ $\{u_1,\ u_2\}$ là độc lập tuyến tính nên:

$$\dim <W>=2 \text{ và một cơ sở của } <W> \text{ là } F=\{u_1,\ u_2\}.$$

Ta thường chọn hệ $\{(1;-2;\ 1;\ 2),\ (0;-1;-5;-3)\}$ làm cơ sở.

Ví dụ 25. Tìm điều kiện của m để hệ 4 vector sau là cơ sở của $P_3[x]$:

$$F=\{f_1=x^3,\ f_2=mx^3-x^2,\ f_3=mx+1,\ f_4=2x^2+4x+m\}.$$

Giải. Ta có $\dim P_3[x]=4$.

Do $f\in P_3[x]$ có dạng $f=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ tương ứng với một bộ số $(a_3;\ a_2;\ a_1;\ a_0)$, nên ta lập được ma trận dòng của hệ F là $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ m & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m & 1\\ 0 & 2 & 4 & m\end{pmatrix}$.

Vậy F là cơ sở của $P_3[x]$ khi và chỉ khi $\det A\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 2$. ■

4. TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

4.1. Tọa độ của vector đối với một cơ sở

▪ **Định lý**

Trong không gian vector n chiều V, cho một cơ sở được sắp thứ tự $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$. Khi đó, mọi vector v của V đều viết được một cách duy nhất dưới dạng tổ hợp tuyến tính của n vector trong B.

▪ **Quy ước**

Từ đây về sau, khi nói đến một cơ sở là ta ngầm hiểu rằng cơ sở đó đã được sắp thứ tự.

▪ **Định nghĩa**

Trong không gian vector V, cho cơ sở $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$. Theo định lý trên, $\forall x\in V$ đều viết được một cách duy nhất dưới dạng

$$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_nu_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iu_i\ (\alpha_i\in\mathbb{R})$$

ký hiệu là $[x]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ *và ta gọi nó là tọa độ của x trong cơ sở B.*

▪ **Quy ước**

Trong $\mathbb{R}^n$, ta viết cơ sở chính tắc E_n là E, và viết $[x]_E$ là $[x]$.

Ví dụ 26. Trong $\mathbb{R}^2$, cho cơ sở $B=\{u_1=(2;-1),\ u_2=(1;\ 1)\}$ và vector $x=(3;-5)$. Tìm $[x]_B$.

Giải. Gọi $[x]_B=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, ta có:

$$x=au_1+bu_2 \Leftrightarrow [x]=a[u_1]+b[u_2] \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=\ \ 3\\-a+b=-5\end{cases} \Rightarrow a=\frac{8}{3},\ b=-\frac{7}{3}.$$

Vậy $[x]_B=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & -\frac{7}{3}\end{pmatrix}^T$.

Ví dụ 27. Trong $P_4[x]$, cho $f=x^4+x^3$. Tìm $[f]_A$, biết cơ sở A là:

$$\left\{f_1=1,\ f_2=x-1,\ f_3=(x-1)^2,\ f_4=(x-1)^3,\ f_5=(x-1)^4\right\}.$$

Giải. Gọi $[f]_A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5)^T$, ta có:

$$f=\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3+\alpha_4f_4+\alpha_5f_5$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^3=\alpha_1+\alpha_2(x-1)+\alpha_3(x-1)^2+\alpha_4(x-1)^3+\alpha_5(x-1)^4.$$

Đồng nhất các hệ số, ta được:

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2+\ \alpha_3-\ \ \alpha_4+\ \alpha_5=0\\ \quad\alpha_2-2\alpha_3+3\alpha_4-4\alpha_5=0\\ \qquad\alpha_3-3\alpha_4+6\alpha_5=0\\ \qquad\qquad\alpha_4-4\alpha_5=1\\ \qquad\qquad\quad\alpha_5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=2\\\alpha_2=7\\\alpha_3=9\\\alpha_4=5\\\alpha_5=1\end{cases}$$

Vậy $[f]_A=(2\quad 7\quad 9\quad 5\quad 1)^T$.

Ví dụ 28. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai cơ sở:

$$B_1=\{u_1=(1;\ 0),\ u_2=(0;-1)\},\ B_2=\{v_1=(2;-1),\ v_2=(1;\ 1)\}.$$

Cho biết $[x]_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Tìm $[x]_{B_1}$.

Giải. Gọi $[x]=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ và $[x]_{B_1}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, ta có:

$$[x]_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=v_1+2v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow [x]=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}.$$

$$[x]_{B_1}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=\alpha u_1+\beta u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\ \ 4\\\beta=-1\end{cases}$$

Vậy $[x]_{B_1}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

4.2. Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau

4.2.1. Ma trận chuyển cơ sở

Trong không gian vector n chiều V, cho hai cơ sở $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Ma trận $\left([v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} ... [v_n]_{B_1}\right)$ *được gọi là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở* B_1 *sang cơ sở* B_2, *ký hiệu là* $P_{B_1 \to B_2}$.

Đặc biệt, trong $\mathbb{R}^n$, ta có $P_{E \to B_2} = \left([v_1]\ [v_2] ... [v_n]\right)$ là ma trận cột của các vector theo thứ tự đó trong cơ sở B_2.

Ví dụ 29. Trong $\mathbb{R}^2$, tìm ma trận chuyển $P_{B_1 \to B_2}$ với hai cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1; 0),\ u_2 = (1; -1)\},\ B_2 = \{v_1 = (1; -2),\ v_2 = (3; 1)\}.$$

Giải. Gọi $[v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ và $[v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow [v_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow [v_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 30. Trong $P_2[x]$, tìm hai ma trận $P_{F \to G}$ và $P_{G \to F}$ với hai cơ sở:

$$F = \{f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2\},\ G = \{g_1 = 1,\ g_2 = x^2 - x,\ g_3 = x + 1\}.$$

Giải

• Tìm $P_{F \to G}$. Ta có:

$$g_1 = f_1 \Rightarrow [g_1]_F = (1\ \ 0\ \ 0)^T,$$

$$g_2 = -f_2 + f_3 \Rightarrow [g_2]_F = (0\ \ -1\ \ 1)^T,$$

$$g_3 = f_1 + f_2 \Rightarrow [g_3]_F = (1\ \ 1\ \ 0)^T.$$

Vậy $P_{F \to G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Tìm $P_{G \to F}$. Ta có:

$$f_1 = g_1 \Rightarrow [f_1]_G = (1\ \ 0\ \ 0)^T,$$

$$f_2 = -g_1 + g_3 \Rightarrow [f_2]_G = (-1\ \ 0\ \ 1)^T,$$

$$f_3 = -g_1 + g_2 + g_3 \Rightarrow [f_3]_G = (-1\ \ 1\ \ 1)^T.$$

Vậy $P_{G \to F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

▪ **Định lý**

Trong không gian vector n chiều V cho ba cơ sở B_1, B_2 và B_3.

Ta có:

i) $P_{B_i \to B_i} = I_n \ (i = 1,2,3)$; *ii)* $P_{B_1 \to B_3} = P_{B_1 \to B_2}.P_{B_2 \to B_3}$; *iii)* $P_{B_1 \to B_2} = (P_{B_2 \to B_1})^{-1}$.

▪ **Hệ quả**

Trong $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\boxed{P_{B_1 \to B_2} = P_{B_1 \to E}.P_{E \to B_2} = (P_{E \to B_1})^{-1} P_{E \to B_2}}$$

Ví dụ 31. Dựa vào hệ quả, giải lại ví dụ 29.

Giải. Ta có:

$$P_{B_1 \to B_2} = \left(P_{E \to B_1}\right)^{-1} P_{E \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2.2. Công thức đổi tọa độ

Trong không gian vector n chiều V, cho hai cơ sở B_1, B_2 và vector $x \in V$. Ta có công thức đổi tọa độ là

$$\boxed{[x]_{B_1} = P_{B_1 \to B_2}.[x]_{B_2}}$$

Ví dụ 32. Trong $\mathbb{R}^3$, xét hai cơ sở B_1 và B_2.

Cho biết $P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ và $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tìm $[v]_{B_2}$.

Giải. Ta có:

$$[v]_{B_2} = P_{B_2 \to B_1}.[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[v]_{B_2} = (5 \quad 11 \quad -6)^T$.

Ví dụ 33. Trong $\mathbb{R}^2$, cho cơ sở $A = \{(1; 2), (3; -4)\}$ và vector $x = (3; -2)$. Tìm $[x]_A$.

Giải. Ta có:

$$[x]_A = P_{A \to E}.[x]_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 34. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai cơ sở: $A = \{(2; 3), (1; -2)\}$ và $B = \{(3; -2), (2; 5)\}$.

Cho biết $[x]_B = (1 \quad 2)^T$, tìm $[x]_A$.

Giải. Ta có ma trận chuyển cơ sở là:

$$P_{A \to B} = (P_{E \to A})^{-1}.P_{E \to B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[x]_A = P_{A \to B}.[x]_B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 13 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \end{pmatrix}$. ■

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

Câu 1. Giá trị m để $u_1 = (2;\ m+4;\ 2m+7)$ là tổ hợp tuyến tính của $u_2 = (1;\ 2;\ 3)$ và $u_3 = (3;\ 8;\ 11)$ là:

A. $m = -1$; B. $m = 1$; C. $m = -7$; D. $m = 7$.

Câu 2. Giá trị m để $u_1 = (2;\ m+4;\ 3m+13)$ là tổ hợp tuyến tính của $u_2 = (1;\ 2;\ 3)$, $u_3 = (1;\ 1;\ 1)$ và $u_4 = (1;\ 3;\ 5)$ là:

A. $m = -1$; B. $m = 1$; C. $m = -7$; D. $m = 7$.

Câu 3. Trong $P_2[x]$, giá trị m để $u_1 = x + m$ là tổ hợp tuyến tính của $u_2 = 2x^2 + 3$ và $u_3 = x^2 - x + 1$ là:

A. $m = -2$; B. $m = 2$; C. $m = -\dfrac{1}{2}$; D. $m = \dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Giá trị m để vector $u_1 = (1;\ 2;\ m-3)$ là tổ hợp tuyến tính của $u_2 = (-1;\ m;\ m-1)$ và $u_3 = (1;-1;\ 1-m)$ là:

A. $m = 1$; B. $m = -2$; C. $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 1 \end{bmatrix}$; D. $\begin{bmatrix} m = 1 \\ m = 2 \end{bmatrix}$.

Câu 5. Giá trị của m để hệ $u_1 = (1;\ 2;\ m-3)$, $u_2 = (-1;\ m;\ m-1)$ và $u_3 = (1;-1;\ 1-m)$ phụ thuộc tuyến tính là:

A. $m = 1$; B. $m = -2$; C. $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 1 \end{bmatrix}$; D. $\begin{bmatrix} m = 1 \\ m = 2 \end{bmatrix}$.

Câu 6. Giá trị của m để hệ ba vector sau đây phụ thuộc tuyến tính $(m;\ 1;\ 3;\ 4)$, $(m;\ m;\ m+2;\ 6)$ và $(2m;\ 2;\ 6;\ m+10)$ là:

A. $m = 0 \vee m = 1$; B. $m = 0 \vee m = -2$;

C. $m = -2 \vee m = 1$; D. $m = -2 \vee m = 0 \vee m = 1$.

Câu 7. Giá trị m để các vector sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$
$(1;\ 2;\ m)$, $(m;\ 2m+3;\ 3m+3)$, $(4;\ 3m+7;\ 5m+3)$ là:

A. $m \neq 3 \wedge m \neq -\dfrac{4}{3}$; B. $m \neq -3 \wedge m \neq \dfrac{4}{3}$;

C. $m \neq -4 \wedge m \neq \dfrac{3}{4}$; D. $m \neq 4 \wedge m \neq -\dfrac{3}{4}$.

Câu 8. Giá trị của m để vector $x = (3;\ m;\ m) \in W$ với
$W = < u_1 = (1;\ 1;\ 0),\ u_2 = (2;\ 0;\ 1) >$ là:

A. $m = -1$; B. $m = 1$; C. $m = -7$; D. $m = 7$.

Câu 9. Điều kiện của m để vector $x = (1;\ 1;\ m) \notin W$ với
$W = < u_1 = (1;\ 1;\ 0),\ u_2 = (2;\ 0;\ 1),\ u_3 = (1;-1;\ 1) >$ là:

A. $m \neq 0$; B. $m \neq 1$; C. $m \neq 2$; D. $m \neq 3$.

Câu 10. Tọa độ của $x=(1;\,2)$ trong cơ sở $B=\{(1;\,4),\,(-2;\,5)\}$ là:

A. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$; B. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$; C. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$; D. $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$.

Câu 11. Cho $A=\{(3;\,4),\,(-2;\,1)\}$, $B=\{(1;\,3),\,(1;\,2)\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$ và $[x]_A=(1\quad 2)^T$.

Tọa độ của vector x trong cơ sở B là:

A. $\begin{pmatrix}-8\\9\end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix}8\\-9\end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Câu 12. Trong $\mathbb{R}^3$ cho cơ sở $A=\{(1;\,1;\,1),\,(1;\,0;\,1),\,(0;\,1;\,2)\}$. Ma trận chuyển cơ sở $P_{A\to E}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$; B. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}$; C. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$; D. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

Câu 13. Tọa độ của vector $x=(2;\,3;\,6)$ trong cơ sở $A=\{(1;\,2;\,3),\,(1;\,3;\,4),\,(2;\,4;\,7)\}$ là:

A. $[x]_A=(-1\quad 1\quad 1)^T$; B. $[x]_A=(1\quad -1\quad 1)^T$;

C. $[x]_A=(26\quad 35\quad 58)^T$; D. $[x]_A=(17\quad 37\quad 60)^T$.

Câu 14. Tọa độ của vector $x=(2;-1;\,0)$ trong cơ sở $B=\{(1;\,1;-1),\,(1;\,2;\,1),\,(2;\,1;\,1)\}$ là:

A. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\7\\-8\end{pmatrix}$; B. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\-7\\8\end{pmatrix}$; C. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-7\\8\end{pmatrix}$; D. $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\7\\8\end{pmatrix}$.

Câu 15. Vector x thuộc không gian nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-\ y+\ z=0\\2x+4y-\ z=0\\x+5y-2z=0\end{cases}$ là:

A. $x=(1;-1;-3)$; B. $x=(-1;\,1;-2)$; C. $x=(3;-3;\,6)$; D. $x=(3;-3;-6)$.

Câu 16. Số chiều không gian nghiệm W của hệ phương trình $\begin{cases}2x+4y-\ z+\ t-\ u=0\\4x+8y-2z-2t+3u=0\end{cases}$ là:

A. $\dim W=2$; B. $\dim W=3$; C. $\dim W=4$; D. $\dim W=5$. ■

Chương IV

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Định nghĩa

Cho X, Y là hai không gian vector trên $\mathbb{R}$.

Ánh xạ $T: X \to Y$ được gọi là ánh xạ tuyến tính từ X vào Y nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) $T(\alpha x) = \alpha T(x),\ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $T(x+y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in X$.

▪ **Chú ý**

i) Đối với ánh xạ tuyến tính, ký hiệu $T(x)$ còn được viết là Tx.

ii) $T(\theta_X) = \theta_Y$ với θ_X, θ_Y lần lượt là *vector không* của X, Y.

iii) Hai điều kiện trong định nghĩa trên tương đương với

$$\boxed{T(x+\alpha y) = Tx + \alpha Ty,\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

Ví dụ 1. Chứng tỏ ánh xạ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa

$$T(x_1;\ x_2;\ x_3) = (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2)$$ là ánh xạ tuyến tính.

Giải. Trong $\mathbb{R}^3$, ta xét hai vector $x = (x_1;\ x_2;\ x_3)$ và $y = (y_1;\ y_2;\ y_3)$.

Với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} T(x+\alpha y) &= T(x_1 + \alpha y_1;\ x_2 + \alpha y_2;\ x_3 + \alpha y_3) \\ &= (x_1 + \alpha y_1 - x_2 - \alpha y_2 + x_3 + \alpha y_3;\ 2x_1 + 2\alpha y_1 + 3x_2 + 3\alpha y_2) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3;\ 2x_1 + 3x_2) + \alpha(y_1 - y_2 + y_3;\ 2y_1 + 3y_2) = Tx + \alpha Ty. \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ T là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2. Chứng tỏ ánh xạ f có công thức $f(x;\ y) = (x - y;\ 2 + 3y)$

không phải là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

Giải. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai vector $u = (1;\ 2)$ và $v = (0;-1)$, ta có:

$$f(u+v) = f(1;\ 1) = (1-1;\ 2+3.1) = (0;\ 5),$$

$$f(u) + f(v) = (-1;\ 8) + (1;-1) = (0;\ 7)$$

$$\Rightarrow f(u+v) \neq f(u) + f(v).$$

Vậy ánh xạ f không phải là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 3. Các ánh xạ sau đây là các ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

1) Phép chiếu vuông góc xuống trục Ox, Oy:

$$T(x;\ y) = (x;\ 0),\ T(x;\ y) = (0;\ y).$$

2) Phép đối xứng qua trục Ox, Oy:

$$T(x;\ y) = (x;-y),\ T(x;\ y) = (-x;\ y).$$

3) Phép quay một góc φ quanh gốc tọa độ O:

$$T(x;\ y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi;\ x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$

Ví dụ 4. Gọi $C[a; b]$ là tập hợp các hàm một biến số liên tục trên $[a; b]$. Trên $C[a; b]$, xác định phép toán cộng hai hàm số và nhân vô hướng thì $C[a; b]$ là một không gian vector.

Khi đó, ta có:

$Tf = \int_a^b f(x)dx$ là ánh xạ tuyến tính từ $C[a; b]$ vào $\mathbb{R}$;

$Sf = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a; b]$ là ánh xạ tuyến tính từ $C[a; b]$ vào $C[a; b]$.

Ví dụ 5. Cho $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ta có $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ T_A x = A[x]$ là ánh xạ tuyến tính.

1.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

1.2.1. Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to Y$.

• *Tập* $\left\{x \in X \middle| f(x) = \theta_Y\right\}$ *được gọi là nhân của* f, *ký hiệu là* $\mathrm{Ker}(f)$.

• *Tập* $\left\{f(x) \middle|\ x \in X\right\}$ *được gọi là ảnh của* f, *ký hiệu là* $\mathrm{Im}(f)$.

1.2.2. Tính chất

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to Y$, ta có các tính chất sau

i) $\mathrm{Ker}(f)$ *là một không gian con của* X.

ii) $\mathrm{Im}(f)$ *là không gian con của* Y.

iii) f *là đơn ánh khi và chỉ khi* $\mathrm{Ker}(f) = \{\theta_X\}$.

4i) f *là toàn ánh khi và chỉ khi* $\mathrm{Im}(f) = Y$.

5i) Nếu $< S > = X$ *thì* $< f(S) > = \mathrm{Im}(f)$.

Ví dụ 6. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2 - 4x_3;\ x_1 - x_2).$$

Tìm $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$.

Giải

• Tìm $\mathrm{Ker}(f)$. Ta có:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$$

Vậy $\mathrm{Ker}(f) = \{x = (2\alpha; 2\alpha; \alpha) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

• Tìm $\mathrm{Im}(f)$. Trong $\mathbb{R}^3$, xét cơ sở chính tắc ta có:

$f(1; 0; 0) = (1 + 0 - 0;\ 1 - 0) = (1;\ 1)$,

$f(0; 1; 0) = (0 + 1 - 0;\ 0 - 1) = (1; -1)$,

$f(0; 0; 1) = (0 + 0 - 4;\ 0 - 0) = (-4;\ 0)$.

Do $\big\langle (1;\,0;\,0),\,(0;\,1;\,0),\,(0;\,0;\,1)\big\rangle = \mathbb{R}^3$ nên:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \big\langle (1;\,1),\,(1;-1),\,(-4;\,0)\big\rangle = \big\langle (1;\,1),\,(1;-1)\big\rangle \\ &= \{y = (\alpha+\beta;\,\alpha-\beta) \in \mathbb{R}^2 \ (\alpha,\beta \in \mathbb{R})\}.\end{aligned}$$

▪ **Định lý**

Giả sử X và Y là hai không gian vector hữu hạn chiều. Nếu f là ánh xạ tuyến tính từ X vào Y thì

$$\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim X}$$

▪ **Hệ quả**

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to Y$ và $\dim X = \dim Y$.

Khi đó, ba điều sau đây là tương đương:

i) f là song ánh;

ii) f là đơn ánh;

iii) f là toàn ánh.

Ví dụ 7. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$f(x;y;z) = (mx + y + z;\ x + my + z;\ x + y + mz).$$

Tìm điều kiện của m để f có ánh xạ ngược f^{-1}.

Giải. Áp dụng hệ quả trên, ta có:

f có ánh xạ ngược f^{-1} khi và chỉ khi f là đơn ánh.

Tương đương với $\mathrm{Ker}(f) = \{\theta\}$.

Tương đương với hệ $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$ chỉ có nghiệm tầm thường.

Tương đương $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1. \end{cases}$

Vậy điều kiện để f có ánh xạ ngược f^{-1} là $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1. \end{cases}$

1.2.3. Số khuyết và hạng của ánh xạ tuyến tính

a) Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : X \to Y$.

• *Số chiều của $\mathrm{Ker}(f)$ được gọi là số khuyết của f, ký hiệu là $d(f)$.*

• *Số chiều của $\mathrm{Im}(f)$ được gọi là hạng của f, ký hiệu là $r(f)$.*

b) Thuật toán tìm số khuyết và hạng của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

▪ **Tìm số khuyết của *f***

Bước 1. Giải hệ phương trình thuần nhất $f(x) = \theta$ $\qquad (*)$

Bước 2. Số chiều không gian nghiệm của $(*)$ là số khuyết của f và các nghiệm cơ bản lập thành một cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$.

▪ **Tìm hạng của f**

Bước 1. Trong $\mathbb{R}^n$, ta chọn một cơ sở $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ và lập ma trận dòng A của hệ vector $\{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$.

Bước 2. Đưa A về ma trận bậc thang A'. Khi đó, số dòng khác không của A' là hạng của f và các vector dòng tương ứng trong A' lập thành một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$.

Ví dụ 8. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ được định nghĩa

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + x_2; -x_2 + x_3; x_2 - x_3).$$

Tìm số khuyết và hạng của f.

Chỉ ra một cơ sở của các không gian vector $\mathrm{Ker}(f)$ và $\mathrm{Im}(f)$.

Giải

• Tìm số khuyết của f. Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

Suy ra, nghiệm cơ bản của $(*)$ là $X_1 = (-1; 1; 1)$.

Vậy $d(f) = 1$ và một cơ sở của $\mathrm{Ker}(f)$ là $\{(-1; 1; 1)\}$.

• Tìm hạng của f. Trong $\mathbb{R}^3$, xét cơ sở chính tắc ta có:

$f(1; 0; 0) = (1; 0; 0)$, $f(0; 1; 0) = (1; -1; 1)$, $f(0; 0; 1) = (0; 1; -1)$.

Suy ra:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy $r(f) = 2$ và một cơ sở của $\mathrm{Im}(f)$ là $\{(1; 0; 0), (0; -1; 1)\}$. ■

2. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Từ đây về sau, ta chỉ xét loại ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Khi $n = m$, ta gọi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là *toán tử tuyến tính* hay còn gọi là *phép biến đổi tuyến tính*.

2.1. Khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính

2.1.1. Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở của $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ lần lượt là $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ và $B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Ma trận

$$A = \left(\left[f(u_1) \right]_{B_2} \left[f(u_2) \right]_{B_2} \ldots \left[f(u_n) \right]_{B_2} \right) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cặp cơ sở B_1 và B_2, ký hiệu là $[f]_{B_1}^{B_2}$ hay viết đơn giản là A nếu không bị nhầm lẫn.

Cụ thể là, nếu

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + ... + a_{m1}v_m \\ f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + ... + a_{m2}v_m \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{mn}v_m \end{cases}$$

thì

$$[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- **Trường hợp đặc biệt**

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *là toán tử tuyến tính và* $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *thì ma trận của* f *trong cặp cơ sở* B, B *là*

$$A = \left(\left[f(u_1) \right]_B \left[f(u_2) \right]_B ... \left[f(u_n) \right]_B \right) \in M_n(\mathbb{R})$$

và ký hiệu $[f]_B^B$ *được viết gọn là* $[f]_B$.

Ví dụ 9.

1) Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (x; 0; ...; 0)$ có $[f]_{E_1}^{E_n} = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T$.

2) Ánh xạ tuyến tính $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x_1; x_2; ...; x_n) = x_1$ có $[g]_{E_n}^{E_1} = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)$.

3) Toán tử tuyến tính đồng nhất $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Id}(x) = x$ có $[\mathrm{Id}]_{E_n} = I_n$.

Ví dụ 10. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_2; x_1 - 2x_3).$$ Tìm $A = [f]_{E_3}^{E_2}$.

Giải. Ta có:

$$f(e_1) = f(1; 0; 0) = (0; 1) \Rightarrow [f(e_1)]_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = f(0; 1; 0) = (1; 0) \Rightarrow [f(e_2)]_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = f(0; 0; 1) = (0; -2) \Rightarrow [f(e_3)]_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 11. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_1 - 2x_3; x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$ Tìm $A = [f]_{E_3}$.

Giải. Ta có:

$$f(e_1) = f(1; 0; 0) = (1; 1; 1) \Rightarrow [f(e_1)]_{E_3} = (1 \quad 1 \quad 1)^T$$

$$f(e_2) = f(0; 1; 0) = (0; 0; 2) \Rightarrow [f(e_2)]_{E_3} = (0 \quad 0 \quad 2)^T$$

$$f(e_3) = f(0; 0; 1) = (0; -2; 3) \Rightarrow [f(e_3)]_{E_3} = (0 \quad -2 \quad 3)^T.$$

Vậy $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Ví dụ 12. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$. Tìm $A=[f]_{E_2}^{E_3}$, biết:

$$f(1;\,1)=(0;\,2;\,1) \text{ và } f(2;-1)=(3;\,1;-1).$$

Giải. Giả sử $(x;\,y)=a(1;\,1)+b(2;-1)$, ta có:

$$\begin{cases}a+2b=x\\ a-\ b=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y\\ b=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x;\,y)=a.f(1;\,1)+b.f(2;-1)$$

$$=\left(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right).(0;\,2;\,1)+\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{3}\right).(3;\,1;-1)$$

$$\Rightarrow f(x;\,y)=(x-y;\,x+y;\,y).$$

Vậy $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ví dụ 13. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định $f(x_1;\,x_2)=(x_1-2x_2;\,3x_1+5x_2)$.

Tìm $[f]_B^{E_2}$ và $[f]_B$ với cơ sở $B=\{(1;-1),\,(2;-3)\}$.

Giải

• Ta có:

$$f(1;-1)=(3;-2)\Rightarrow[f(1;-1)]_{E_2}=(3\quad -2)^T$$

$$f(2;-3)=(8;-9)\Rightarrow[f(2;-3)]_{E_2}=(8\quad -9)^T.$$

Vậy $[f]_B^{E_2}=\begin{pmatrix}3 & 8\\ -2 & -9\end{pmatrix}$.

• Ta có:

$$P_{B\to E_2}=(P_{E_2\to B})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$f(1;-1)=(3;-2)\Rightarrow[f(1;-1)]_B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}$$

$$f(2;-3)=(8;-9)\Rightarrow[f(2;-3)]_B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}.$$

Vậy $[f]_B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

2.1.2. Tính chất của ánh xạ tuyến tính

a) Nếu $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *là ánh xạ tuyến tính và* B_1, B_2 *là hai cơ sở tương ứng của* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ *thì*

$$\boxed{r(f) = r([f]_{B_1}^{B_2})}$$

và

$$\boxed{[f(x)]_{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2}.[x]_{B_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

b) Nếu $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *là các ánh xạ tuyến tính và* B_1, B_2, B_3 *là các cơ sở của* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ *thì*

$$\boxed{[(f \pm g)(x)]_{B_2} = \left([f]_{B_1}^{B_2} \pm [g]_{B_1}^{B_2}\right).[x]_{B_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

và

$$\boxed{[(f \circ h)(x)]_{B_3} = \left([h]_{B_2}^{B_3}.[f]_{B_1}^{B_2}\right).[x]_{B_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

▪ **Hệ quả**

Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và B_1, B_2 là hai cơ sở của $\mathbb{R}^n$.

Nếu tồn tại f^{-1} *thì*

$$\boxed{[f^{-1}]_{B_1}^{B_2} = \left([f]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}}$$

và

$$\boxed{[f^{-1}(x)]_{B_1} = \left([f]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}.[x]_{B_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

Ví dụ 14. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ và 2 cơ sở B_1, B_2 tương ứng, trong đó:

$$B_1 = \{(1;\,0;-1),\,(0;-1;-1),\,(1;-1;-1)\}.$$

Cho biết $[f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $x = (1;\,2;\,3)$, tìm $[f(x)]_{B_2}$.

Giải. Ta có:

$$P_{B_1 \to E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [x]_{B_1} = P_{B_1 \to E_3}.[x] = (-1 \quad -4 \quad 2)^T.$$

Vậy $[f(x)]_{B_2} = [f]_{B_1}^{B_2}.[x]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 15. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $\left[f\right]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận $\left[f\right]_{B_1}^{B_2}$. Trong đó, hai cơ sở tương ứng là:

$$B_1 = \{u_1 = (1;\,1),\,u_2 = (1;\,2)\},\; B_2 = \{v_1 = (1;\,0;\,1), v_2 = (1;\,1;\,1), v_3 = (1;\,0;\,0)\}.$$

Giải. Ta có:

$$[f(u_1)]_{E_3} = \left[f\right]_{E_2}^{E_3}.[u_1]_{E_2} = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f(u_1)]_{B_2} = P_{B_2\to E_3}.[f(u_1)]_{E_3} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 2\\ -9\end{pmatrix},$$

$$[f(u_2)]_{E_3} = \left[f\right]_{E_2}^{E_3}.[u_2]_{E_2} = \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f(u_2)]_{B_2} = P_{B_2\to E_3}.[f(u_2)]_{E_3} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\ 4\\ 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ 4\\ -15\end{pmatrix}.$$

Vậy $\left[f\right]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix}5 & 6\\ 2 & 4\\ -9 & -15\end{pmatrix}$.

Ví dụ 16. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định $f(x_1;\,x_2) = (x_1+2x_2;-x_1-3x_2)$.

Cho $x=(1;\,2)$ và cơ sở $B=\{(4;-3),\,(-1;\,1)\}$.

Tìm $[f^{-1}(x)]_B$ và biểu thức của $f^{-1}(x_1;\,x_2)$.

Giải. Nhận thấy hệ $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ -x_1-3x_2=0\end{cases}$ chỉ có nghiệm tầm thường. Suy ra $\mathrm{Ker}(f)=\{\theta\}\Rightarrow\exists f^{-1}$.

• Tìm $[f^{-1}(x)]_B$.

Ta có:

$$P_{B\to E_2} = (P_{E_2\to B})^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow [x]_B = \begin{pmatrix}3\\ 11\end{pmatrix}.$$

$$f(4;-3) = (-2;\,5)\Rightarrow [f(4;-3)]_B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 14\end{pmatrix},$$

$$f(-1;\,1) = (1;-2)\Rightarrow [f(-1;\,1)]_B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = [f]_B = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 14 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}5 & -1\\ 14 & -3\end{pmatrix}.$$

Vậy $[f^{-1}(x)]_B = A^{-1}.[x]_B = \begin{pmatrix}5 & -1\\ 14 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}$.

• Tìm biểu thức của $f^{-1}(x_1;\,x_2)$.

Ta có: $[f] = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow [f^{-1}] = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

Vậy $f^{-1}(x_1;\,x_2) = (3x_1+2x_2;-x_1-x_2)$.

▪ **Chú ý**

Ta có thể kiểm chứng lại f^{-1} trong ví dụ 16 như sau:

Đặt $\alpha = 3x_1 + 2x_2$ và $\beta = -x_1 - x_2$, ta được $f(\alpha;\ \beta) = (\alpha + 2\beta; -\alpha - 3\beta) = (x_1;\ x_2)$

hay $f(3x_1 + 2x_2; -x_1 - x_2) = (x_1;\ x_2)$.

Vậy $f^{-1}(x_1;\ x_2) = (3x_1 + 2x_2; -x_1 - x_2)$.

2.2. Định lý chuyển đổi ma trận của ánh xạ tuyến tính

▪ **Định lý**

Giả sử B_1, B_2 *là hai cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* B_1', B_2' *là hai cơ sở của* $\mathbb{R}^m$.

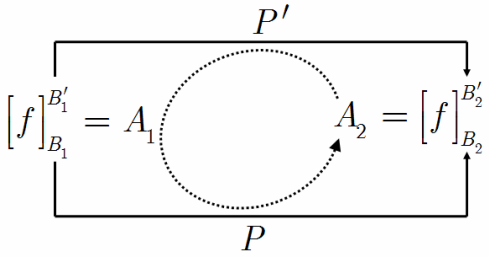
Nếu f *là ánh xạ tuyến tính từ* $\mathbb{R}^n$ *vào* $\mathbb{R}^m$ *thì*

$$\boxed{[f]_{B_2}^{B_2'} = P_{B_2' \to B_1'} . [f]_{B_1}^{B_1'} . P_{B_1 \to B_2}}$$

▪ **Nhận xét**

Nếu đặt $\left[f\right]_{B_1}^{B_1'} = A_1$, $\left[f\right]_{B_2}^{B_2'} = A_2$, $P = P_{B_1 \to B_2}$ và $P' = P_{B_1' \to B_2'}$ thì công thức trong định lý trở thành $A_2 = (P')^{-1} . A_1 . P$.

Sơ đồ chuyển đổi ma trận của ánh xạ tuyến tính



▪ **Trường hợp riêng**

Nếu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *là toán tử tuyến tính,* B *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$ *và* $P = P_{E \to B}$ *thì*

$$\boxed{[f]_B = P^{-1} . [f]_E . P}$$

Ví dụ 17. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có biểu thức

$$f(x;\ y;\ z) = (x + y + z;\ x - y + z;\ x + y - z).$$

Tìm $[f]_F$, với cơ sở $F = \{(2;\ 1;\ 0),\ (1;\ 0;\ 1),\ (-1;\ 0;\ 1)\}$.

Giải. Ta có:

$$\left[f\right]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } P = P_{E \to F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$\left[f\right]_F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[f]_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 18. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức $f(x; y; z) = (x + y - z; x - y + z)$.

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

$$B = \{(1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1)\} \text{ và } B' = \{(2; 1), (1; 1)\}.$$

Giải. Ta có:

$$[f]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } P = P_{E_3 \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P' = P_{E_2 \to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy $[f]_B^{B'} = \left(P'\right)^{-1} [f]_{E_3}^{E_2} P$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.3. Thuật toán tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở lần lượt là:

$$B_1 = \{u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n\} \text{ và } B_2 = \{v_1,\ v_2,\ldots,\ v_m\}.$$

• **Bước 1.** Tìm các ma trận sau:

$$S = \left([v_1]_{E_m}\ [v_2]_{E_m} \ldots [v_m]_{E_m}\right) \text{ (ma trận cột các vector của } B_2\text{)},$$

$$Q = \left([f(u_1)]_{E_n}\ [f(u_2)]_{E_n} \ldots [f(u_n)]_{E_n}\right).$$

• **Bước 2.** Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa ma trận $\left(S \middle| Q\right)$ về dạng $\left(I_m \middle| A\right)$.

Khi đó, $[f]_{B_1}^{B_2} = A$.

Ví dụ 19. Cho toán tử tuyến tính $f(x; y) = (x + y; x - 2y)$.

Dùng thuật toán tìm $[f]_B$, với cơ sở $B = \{(2; 1), (1; -1)\}$.

Giải. Ta có $B_1 = B_2 = B$.

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ [f(2; 1)] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ [f(1; -1)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$\left(S \middle| Q\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Vậy $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 20. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức $f(x; y; z) = (x + y - z; x - y + z)$.

Dùng thuật toán tìm ma trận của f trong cặp cơ sở sau:

$$B = \{(1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1)\} \text{ và } B' = \{(2; 1), (1; 1)\}.$$

Giải. Ta có:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f(1; 1; 0) = (2; 0) \\ f(0; 1; 1) = (0; 0) \\ f(1; 0; 1) = (0; 2) \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$\left(S \middle| Q\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Vậy $[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 21. Cho ánh xạ tuyến tính $f(x; y) = (x + y; y - x; x)$.

Dùng thuật toán tìm ma trận của f trong cặp cơ sở sau:

$$B = \{(1;-2), (3; 4)\} \text{ và } A = \{(1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 1; 1)\}.$$

Giải. Ta có:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f(1;-2) = (-1;-3; 1) \\ f(3; 4) = (7; 1; 3) \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra:

$$\left(S \middle| Q\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Vậy $[f]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ■

3. TRỊ RIÊNG – VECTOR RIÊNG

3.1. Ma trận đồng dạng

- **Định nghĩa**

Hai ma trận vuông cùng cấp A và B được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại ma trận khả nghịch P thỏa

$$\boxed{B = P^{-1}.A.P}$$

Ví dụ 22. Hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ là đồng dạng với nhau vì có ma trận

$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ khả nghịch thỏa $B=P^{-1}.A.P$.

▪ **Tính chất**

Hai ma trận của một toán tử tuyến tính trong hai cơ sở khác nhau thì đồng dạng với nhau.

3.2. Đa thức đặc trưng và phương trình đặc trưng

▪ **Định nghĩa**

• Cho ma trận $A\in M_n(\mathbb{R})$. *Đa thức bậc* n *của* $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\boxed{P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)}$$

được gọi là đa thức đặc trưng (characteristic polynomial) của A *và phương trình* $P_A(\lambda)=0$ *được gọi là phương trình đặc trưng của* A.

• Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. *Đa thức bậc* n *của* $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\boxed{P_f(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)}$$

được gọi là đa thức đặc trưng của f *(*A *là ma trận biểu diễn* f *trong một cơ sở nào đó) và phương trình* $P_f(\lambda)=0$ *được gọi là phương trình đặc trưng của* f.

Ví dụ 23. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, ta có:

$$P_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-2.$$

▪ **Định lý**

Hai ma trận đồng dạng với nhau thì có cùng đa thức đặc trưng.

Ví dụ 24. Cho toán tử tuyến tính $f(x;\,y;\,z)=(x-y;\,y-z;\,z-x)$.

Tìm phương trình đặc trưng của f.

Giải. Gọi $A=[f]_E$, ta có $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Phương trình đặc trưng của f là:

$$P_f(\lambda)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda=0.$$

3.3. Trị riêng, vector riêng

3.3.1. Trị riêng, vector riêng của toán tử tuyến tính

▪ **Định nghĩa**

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

• *Số thực λ được gọi là trị riêng (eigenvalue) của f nếu tồn tại vector $x \in \mathbb{R}^n$ và $x \neq \theta$ sao cho*

$$\boxed{f(x) = \lambda x}$$

• *Vector $x \neq \theta$ thỏa $f(x) = \lambda x$ được gọi là vector riêng (eigenvector) của f ứng với trị riêng λ.*

3.3.2. Trị riêng, vector riêng của ma trận vuông

▪ **Định nghĩa**

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$.

• *Số thực λ được gọi là trị riêng của ma trận A nếu tồn tại vector $x \in \mathbb{R}^n$ và $x \neq \theta$ sao cho*

$$\boxed{A[x] = \lambda[x]}$$

• *Vector $x \neq \theta$ thỏa $A[x] = \lambda[x]$ được gọi là vector riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ.*

Ví dụ 25. Cho toán tử tuyến tính $f(x_1; x_2) = (4x_1 - 2x_2; x_1 + x_2)$.

Xét số $\lambda = 3$ và vector $x = (2; 1)$, ta có:

$$f(x) = f(2; 1) = (6; 3) = 3(2; 1) = \lambda x.$$

Vậy $x = (2; 1)$ là vector riêng của f ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

Mặt khác, ta có:

$$[f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [f][x] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda[x].$$

Vậy $x = (2; 1)$ là vector riêng của $A = [f]$ ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

▪ **Định lý**

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và một cơ sở B của $\mathbb{R}^n$.

• *Số thực λ là trị riêng của f khi và chỉ khi λ là trị riêng của $[f]_B$.*

• *Vector $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq \theta)$ là vector riêng của f ứng với trị riêng λ khi và chỉ khi $[x]_B$ là vector riêng của $[f]_B$ ứng với λ.*

▪ **Chú ý**

i) Từ đây về sau, ta xem đa thức đặc trưng và phương trình đặc trưng của toán tử tuyến tính f và ma trận $[f]_B$ là như nhau.

ii) Các vector riêng của ma trận A ứng với các trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính.

▪ **Nhận xét**

Ta có

$$A[x] = \lambda[x] \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)[x] = [\theta] \qquad (*)$$

Để $x \neq \theta$ là vector riêng của A thì $(*)$ phải có nghiệm không tầm thường.

Suy ra $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Vậy λ là *nghiệm của phương trình đặc trưng* $P_A(\lambda) = 0$.

▪ **Thuật toán tìm trị riêng và vector riêng của ma trận *A***

• **Bước 1.** Giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$ để tìm trị riêng λ.

• **Bước 2.** Giải hệ phương trình thuần nhất $(A - \lambda I)[x] = [\theta]$, nghiệm không tầm thường của hệ là vector riêng ứng với λ.

Ví dụ 26. Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận biểu diễn là $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vector riêng của f.

Giải. Phương trình đặc trưng là:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Suy ra $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ là hai trị riêng của f.

• Ứng với $\lambda_1 = 2$, ta có:

$$(A - \lambda_1 I_2)[x] = [\theta] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, ta được vector riêng $u_1 = (1; 1)$.

Suy ra các vector có dạng $\alpha(1; 1)$ $(\alpha \neq 0)$ cũng là vector riêng.

• Ứng với $\lambda_2 = 3$, ta có:

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - \lambda_2 I_2)[x] = [\theta] \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0.$$

Chọn $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$, ta được vector riêng $u_2 = (2; 1)$.

Suy ra các vector có dạng $\beta(2; 1)$ $(\beta \neq 0)$ cũng là vector riêng.

Ví dụ 27. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vector riêng của A.

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ là hai trị riêng của A.

• Với $\lambda_1 = -1$, ta có:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_1 = 1 \Rightarrow x_3 = -1$, ta được vector riêng $u_1 = (1;\ 0;-1)$.

Suy ra các vector có dạng $\alpha(1;\ 0;-1)\ (\alpha \neq 0)$ cũng là vector riêng.

• Với $\lambda_2 = 1$, ta có:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_3 = 0.$$

Chọn $x_1 = 1,\ x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$, ta được vector riêng $u_2 = (1;\ 0;\ 1)$.

Chọn $x_1 = 0,\ x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 0$, ta được vector riêng $u_3 = (0;\ 1;\ 0)$.

Suy ra các vector có dạng $\beta(1;\ 0;\ 1)$ và $\gamma(0;\ 1;\ 0)\ (\beta,\ \lambda \neq 0)$ cũng là vector riêng.

▪ **Chú ý**

Do $\det(A - \lambda I_n) = 0$ nên hệ phương trình $(A - \lambda I_n)[x] = [\theta]$ luôn có vô số nghiệm và mỗi nghiệm cơ bản của hệ là một vector riêng cụ thể.
Ta gọi vector riêng cụ thể này là *vector riêng cơ sở.*

3.4. Không gian con riêng

▪ **Định lý**

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Tập hợp tất cả các vector* $x \in \mathbb{R}^n$ *thỏa* $f(x) = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *(kể cả vector không) là một không gian con của* $\mathbb{R}^n$, *ký hiệu là* $E(\lambda)$.

▪ **Định nghĩa**

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *có trị riêng* λ. *Khi đó,* $E(\lambda)$ *được gọi là không gian con riêng (eigenvector space) ứng với* λ.

▪ **Chú ý**

i) Hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình $(A - \lambda I)[x] = [\theta]$ cho ta hệ vector cơ sở và tạo thành một cơ sở của không gian con riêng (gọi tắt là *không gian riêng*) $E(\lambda)$.

ii) $\dim E(\lambda) = n - r(A - \lambda I)$.

iii) Nếu λ là nghiệm bội k của $P_A(\lambda) = 0$ thì $\dim E(\lambda) \leq k$.

Ví dụ 28. Trong ví dụ 27, ta có:

• Từ nghiệm cơ bản của $(A - \lambda_1 I)[x] = [\theta]$ ta suy ra vector cơ sở là $u_1 = (1;\ 0;-1)$.

Vậy $E(-1) = \langle (1;\ 0;-1) \rangle$ và $\dim E(-1) = 1$.

• Từ nghiệm cơ bản của $(A - \lambda_2 I)[x] = [\theta]$ ta suy ra 2 vector cơ sở là:

$$u_2 = (1;\ 0;\ 1) \text{ và } u_3 = (0;\ 1;\ 0).$$

Vậy $E(1) = \langle (1;\ 0;\ 1),\ (0;\ 1;\ 0) \rangle$ và $\dim E(1) = 2$.

Ví dụ 29. Tìm số chiều của các không gian con riêng ứng với các trị riêng của ma trận

$$B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\left|B-\lambda I\right|=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 4 & 3\\ -4 & -6-\lambda & -3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\\ -4 & -6-\lambda & -3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 6+\lambda & 3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -2-\lambda & 6+\lambda & 3\\ 0 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)(2+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0.$$

Suy ra $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$ là hai trị riêng của B.

• Với $\lambda_1=1$, ta có:

$$B-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ -4 & -7 & -3\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 9 & 9\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 9 & 9\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow r(B-\lambda I)=2.$$

Vậy $\dim E(\lambda_1)=3-r(B-\lambda_1 I)=1$.

• Với $\lambda_2=-2$, ta có:

$$B-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ -4 & -4 & -3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Vậy $\dim E(\lambda_2)=3-r(B-\lambda_2 I)=1$.

Ví dụ 30. Tìm cơ sở của các không gian riêng của ma trận $C=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & -1\\ 2 & 2-\lambda & -1\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & -1+\lambda & 0\\ 2 & 2-\lambda & -1\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2-\lambda & -1\\ 2 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ 0 & 4 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\lambda = 1\\ \lambda = 2.\end{bmatrix}$$

• Với $\lambda = 1$, ta có:

$$C - 1.I = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x_1 - x_3 = 0\\ x_2 = 0\end{cases}$$

Chọn $x_1 = 1$, ta được vector riêng cơ sở là $u_1 = (1;\, 0;\, 2)$.

Vậy $E(1)$ có một cơ sở là $\{u_1 = (1;\, 0;\, 2)\}$.

• Với $\lambda = 2$, ta có:

$$C - 2.I = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 + x_2 - x_3 = 0\\ -2x_2 + x_3 = 0\end{cases}$$

Chọn $x_2 = 1$, ta được vector riêng cơ sở là $u_2 = (1;\, 1;\, 2)$.

Vậy $E(2)$ có một cơ sở là $\{u_2 = (1;\, 1;\, 2)\}$.

Ví dụ 31. Tìm các không gian riêng của toán tử tuyến tính

$$f(x;\, y;\, z) = (x + 3y + 3z; -3x - 5y - 3z;\, 3x + 3y + z).$$

Giải. Ta có $[f] = \begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ -3 & -5 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Đa thức đặc trưng:

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & 3\\ -3 & -5-\lambda & -3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda\\ -3 & -5-\lambda & -3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

Suy ra $\lambda = -2$ và $\lambda = 1$ là hai trị riêng của f.

• Với $\lambda = -2$, ta có:

$$[f] - (-2).I = \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ -3 & -3 & -3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Chọn $x_1 = 1,\ x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow u_1 = (1;\, 0; -1)$.

Chọn $x_1 = 0,\ x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow u_2 = (0;\, 1; -1)$.

Vậy $E(-2) = \left\langle u_1 = (1;\, 0; -1),\ u_2 = (0;\, 1; -1)\right\rangle = \{x = (\alpha;\, \beta; -\alpha - \beta) \in \mathbb{R}^3\ (\alpha,\, \beta \in \mathbb{R})\}$.

• Với $\lambda = 1$, ta có:

$$[f]-1.I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Chọn $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1,\ x_3 = 1 \Rightarrow u_3 = (1;-1;1)$.

Vậy $E(1) = \langle u_3 = (1;-1;1) \rangle = \{x = (\alpha;-\alpha;\alpha) \in \mathbb{R}^3 \ (\alpha \in \mathbb{R})\}$.

3.5. Định lý Cayley – Hamilton

▪ **Định lý**

Nếu toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận biểu diễn trong một cơ sở nào đó là A và đa thức đặc trưng là $P_f(\lambda)$ thì

$$\boxed{P_f(A) = (0_{ij})_n}$$

Ví dụ 32. Xét toán tử tuyến tính $f(x;y) = (4x-2y;\ x+y)$, ta có:

$$A = [f] = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P_f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Khi đó:

$$P_f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 6I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 33. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det B$, trong đó $B = A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 + 8I_3$.

Giải. Đa thức đặc trưng:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 14\lambda + 4$$

$$\Rightarrow A^3 - 10A^2 + 14A + 4I_3 = (0_{ij})_3 \Rightarrow A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 = (0_{ij})_3$$

$$\Rightarrow B = 8I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vậy $\det B = 8^3 = 512$. ■

4. CHÉO HÓA MA TRẬN VUÔNG

Trong phần này, ta xét $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận biểu diễn toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trong một cơ sở B nào đó của $\mathbb{R}^n$.

4.1. Khái niệm ma trận chéo hóa được

▪ **Định nghĩa**

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là chéo hóa được nếu A đồng dạng với ma trận đường chéo D; nghĩa là, tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $P^{-1}AP = D$.

Khi đó, ta nói ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

Ví dụ 34. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là chéo hóa được, vì có ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thỏa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Điều kiện ma trận chéo hóa được

▪ **Định lý 1**

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ là chéo hóa được khi và chỉ khi trong $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở gồm n vector riêng của A.

▪ **Hệ quả**

Nếu ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có n trị riêng phân biệt thì chéo hóa được.

▪ **Định lý 2**

Giả sử ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có k trị riêng λ_i $(i = 1,...,k)$ phân biệt và ta đặt $n_i = \dim E(\lambda_i)$. Khi đó, ba điều sau đây là tương đương:

1) Ma trận A là chéo hóa được;

2) Đa thức đặc trưng của A có dạng $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2}...(\lambda - \lambda_k)^{n_k}$;

3) $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

4.3. Ma trận làm chéo hóa ma trận vuông

Giả sử ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ chéo hóa được. Khi đó, tồn tại ma trận P khả nghịch thỏa $P^{-1}AP = D$ với $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n)$.

Xét ma trận khả nghịch $P = ([u_1]\,[u_2]...[u_n])$, trong đó

$$[u_i] = (\alpha_{1i} \quad \alpha_{2i} \quad \cdots \quad \alpha_{ni})^T \ (i = 1,2,...,n).$$

Ta có:

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$$

$$\Rightarrow A([u_1]\,[u_2]...[u_n]) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A([u_1]\,[u_2]...[u_n]) = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha_{11} & \lambda_2\alpha_{12} & \cdots & \lambda_n\alpha_{1n} \\ \lambda_1\alpha_{21} & \lambda_2\alpha_{22} & \cdots & \lambda_n\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\alpha_{n1} & \lambda_2\alpha_{n2} & \cdots & \lambda_n\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A[u_1]\ A[u_2]...A[u_n]) = (\lambda_1[u_1]\ \lambda_2[u_2]...\lambda_n[u_n])$$

$$\Rightarrow A[u_i] = \lambda_i[u_i]\ (i = 1,2,...,n).$$

Suy ra λ_i là trị riêng và u_i là vector riêng ứng với λ_i của A.

▪ **Kết luận**

1) P là ma trận có các cột là các vector riêng cơ sở của A.

2) Ma trận chéo D gồm các trị riêng tương ứng với các vector riêng trong ma trận P.

▪ **Nhận xét**

Ta có: $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$

$$\Rightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} = P.[\mathrm{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n)]^k.P^{-1}$$

$$\text{Vậy } \boxed{A^k = P.\mathrm{diag}(\lambda_1^k \quad \lambda_2^k \quad \cdots \quad \lambda_n^k).P^{-1}}$$

Ví dụ 35. Xét ma trận A trong ví dụ 31, ta có:

• Ứng với trị riêng $\lambda_1 = -2$ có 2 vector riêng cơ sở là $u_1 = (1;\ 0;-1)$, $u_2 = (0;\ 1;-1)$.

• Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1$ có 1 vector riêng cơ sở là $u_3 = (1;-1;\ 1)$.

Suy ra $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Khi đó, ta có:

$$A^{10} = P.D^{10}.P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1023 & -1023 \\ 1023 & 2047 & 1023 \\ -1023 & -1023 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Thuật toán chéo hóa ma trận vuông

Để chéo hóa ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ ta thực hiện các bước sau

Bước 1. Giải phương trình $\left|A-\lambda I\right|=0$ để tìm trị riêng thực của A.

- Trường hợp A không có trị riêng thực nào thì ta kết luận A không chéo hóa được.
- Trường hợp A có n trị riêng thực phân biệt thì A chéo hóa được, ta làm tiếp bước 2.
- Trường hợp A có k trị riêng thực phân biệt λ_i $(i=1,\ldots,k)$ với λ_i là nghiệm bội n_i của phương trình $\left|A-\lambda I\right|=0$ thì nếu:

  i) $n_1+n_2+\ldots+n_k<n$, ta kết luận A không chéo hóa được;

  ii) $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ thì A chéo hóa được, ta làm tiếp bước 2.

Bước 2. Lập ma trận P có các cột là các vector cơ sở của $E(\lambda_i)$.

Khi đó, $P^{-1}AP=D$ với D là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là λ_i (mỗi λ_i xuất hiện liên tiếp n_i lần).

Ví dụ 36. Ma trận C trong ví dụ 30 có trị riêng bội hai là $\lambda=2$.
Do $\dim E(2)=1<2$ nên C không chéo hóa được.

Ví dụ 37. Chéo hóa (nếu được) ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 6 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\lambda=-1\\ \lambda=1\end{bmatrix}\Rightarrow A \text{ chéo hóa được.}$$

- $\lambda=-1$: $(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=0\Rightarrow u_1=(0;1)$.
- $\lambda=1$: $(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow 3x_1-x_2=0\Rightarrow u_2=(1;3)$.

Suy ra $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ và $D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Vậy $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ví dụ 38. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{pmatrix}$. Tính A^{2011}.

Giải. Ta có:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 8 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\lambda=-1\\ \lambda=3\end{bmatrix}\Rightarrow A \text{ chéo hóa được.}$$

- $\lambda=-1$: $(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 8 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=0\Rightarrow u_1=(0;1)$.
- $\lambda=3$: $(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 8 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow 2x_1-x_2=0\Rightarrow u_2=(1;2)$.

Ta có:

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=D.$$

Vậy $A^{2011}=PD^{2011}P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3^{2011}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{2011} & 0\\ 2+2.3^{2011} & -1\end{pmatrix}$.

Ví dụ 39. Chéo hóa ma trận $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ -6 & -4 & 3\\ -6 & -6 & 5\end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & -1\\ -6 & -4-\lambda & 3\\ -6 & -6 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & -1\\ 6 & 4+\lambda & -3\\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & -1\\ 6 & 1+\lambda & -3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\lambda=1\\ \lambda=2.\end{bmatrix}$$

• Ứng với $\lambda=1$ (nghiệm đơn), ta có:

$$A-1.I=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ -6 & -5 & 3\\ -6 & -6 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x_1+x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow u_1=(1;-3;-3)\Rightarrow\dim E(1)=1.$$

• Ứng với $\lambda=2$ (nghiệm bội 2), ta có:

$$A-2I=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -6 & -6 & 3\\ -6 & -6 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x_1+2x_2-x_3=0\Rightarrow\begin{cases}u_2=(1;\,0;\,2)\\ u_3=(0;\,1;\,2)\end{cases}\Rightarrow\dim E(2)=2.$$

Do $\dim E(1)+\dim E(2)=3$ nên A chéo hóa được.

Vậy $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, với $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$. ■

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV

Câu 1. Ma trận $[f]_{E_2}^{E_3}$ của ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ có biểu thức $f(x;\,y)=(3x;\,x-2y;-5y)$ là:

A. $[f]_{E_2}^{E_3}=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\\0&-5\end{pmatrix}$;

B. $[f]_{E_2}^{E_3}=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\\1&-5\end{pmatrix}$;

C. $[f]_{E_2}^{E_3}=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&-2&-5\end{pmatrix}$;

D. $[f]_{E_2}^{E_3}=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&-2&-5\end{pmatrix}$.

Câu 2. Ma trận của toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có biểu thức $f(x;\,y;\,z)=(3x+y-z;\,x-2y;\,y+3z)$ là:

A. $[f]=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&-2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}$;

B. $[f]=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$;

C. $[f]=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&-2&0\\0&1&3\end{pmatrix}$;

D. $[f]=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$.

Câu 3. Cho toán tử tuyến tính $f(x;\,y)=(2x-y;\,3y)$ và cơ sở $B=\{(1;\,2),\,(-1;\,3)\}$.

Ma trận $[f]_E^B$ là:

A. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&0\\-4&1\end{pmatrix}$;

B. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6&0\\-4&5\end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix}2&-4\\4&7\end{pmatrix}$;

D. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$.

Câu 4. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ thỏa $f(1;\,2)=(-4;\,3)$ và $f(3;\,4)=(-6;\,7)$.

Ma trận của f trong cơ sở chính tắc là:

A. $\begin{pmatrix}-4&-6\\3&7\end{pmatrix}$;

B. $\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}$;

D. $\begin{pmatrix}2&1\\-3&1\end{pmatrix}$.

Câu 5. Toán tử tuyến tính $f(x;\,y)=(x+y;\,x-2y)$ có ma trận trong cơ sở $B=\{(2;\,1),\,(1;-1)\}$ là:

A. $\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$;

B. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$;

D. $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$.

Câu 6. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ có ma trận của f đối với cơ sở $B=\{(1;\,0),\,(1;\,1)\}$ là $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. Biểu thức của f là:

A. $f(x;\,y)=(x+2y;\,3x+4y)$;

B. $f(x;\,y)=(x;\,x+y)$;

C. $f(x;\,y)=(4x+2y;\,3x-y)$;

D. $f(x;\,y)=(4x+2y;\,3x+y)$.

Câu 7. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ thỏa $f(2;\,1)=(1;\,1;\,3)$ và $f(1;-1)=(2;-1;\,0)$.

Biểu thức của f là:

A. $f(x;\,y)=(x;\,x-y;\,x+y)$; B. $f(x;\,y)=(x;\,x+y;\,x-y)$;

C. $f(x;\,y)=(x-y;\,x;\,x+y)$; D. $f(x;\,y)=(x-y;\,y;\,x+y)$.

Câu 8. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ có biểu thức $f(x;\,y)=(x-2y;-2x+4y;\,0)$.

Khẳng định đúng là:

A. $r(f)=1,\ d(f)=1$; B. $r(f)=1,\ d(f)=2$;

C. $r(f)=2,\ d(f)=0$; D. $r(f)=2,\ d(f)=1$.

Câu 9. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ có biểu thức $f(x;\,y;\,z)=(x-2y;\,y)$.

Khẳng định đúng là:

A. $r(f)=1,\ d(f)=1$; B. $r(f)=1,\ d(f)=2$;

C. $r(f)=2,\ d(f)=0$; D. $r(f)=2,\ d(f)=1$.

Câu 10. Cho toán tử tuyến tính $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ có biểu thức

$$f(x;\,y;\,z;\,t)=(x+my;\,mx+4y;\,2y+z+3t;\,4z-7t).$$

Giá trị của m để f không phải đơn ánh là:

A. $m=2$; B. $m=-3$; C. $m=\pm2$; D. $m=\pm3$.

Câu 11. Cho hai toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$ như sau:

$$f(x;\,y)=(x+y;\,x)\ \text{và}\ g(x;\,y)=(x;\,x-2y).$$

Ma trận $[f-2g]_E$ là:

A. $[f-2g]_E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$; B. $[f-2g]_E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$;

C. $[f-2g]_E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}$; D. $[f-2g]_E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}$.

Câu 12. Cho toán tử tuyến tính $f(x;\,y)=(2x-y;\,4x+3y)$ và vector $v=(2;-2)$.

Tọa độ của $f^{-1}(v)$ trong cơ sở chính tắc là:

A. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\ 6\end{pmatrix}$; B. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\ -6\end{pmatrix}$; C. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\ -2\end{pmatrix}$; D. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-6\\ 2\end{pmatrix}$.

Câu 13. Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ và $B=A^7-4A^6-5A^5+A^2$.

Sử dụng định lý Cayley – Hamilton để tìm B, ta được:

A. $B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 16 & 12\end{pmatrix}$; B. $B=\begin{pmatrix}4 & 16\\ 8 & 12\end{pmatrix}$;

C. $B=\begin{pmatrix}9 & 8\\ 16 & 17\end{pmatrix}$; D. $B=\begin{pmatrix}9 & 16\\ 8 & 17\end{pmatrix}$.

Câu 14. Ma trận $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ thành:

A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Câu 15. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ là:

A. $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda + 3$; B. $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda - 3$;

C. $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$; D. $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$.

Câu 16. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ có các trị riêng theo thứ tự: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Ma trận P làm chéo hóa A là:

A. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

C. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; D. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

Chương V

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1. KHÁI NIỆM DẠNG TOÀN PHƯƠNG

1.1. Dạng song tuyến tính

▪ **Định nghĩa 1**

• *Ánh xạ* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$

được gọi là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$ *nếu* f *tuyến tính theo từng biến* x *và* y*; nghĩa là,* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ta có:

i) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$;

ii) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$;

iii) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$;

4i) $f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$.

• Giả sử $f(x,y)$ là một dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^n$. Xét một cơ sở $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ của $\mathbb{R}^n$. Với hai vector x, y bất kỳ thuộc $\mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \,,\; y = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j \,,$$

ta có

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_i, u_j) x_i y_j \,.$$

Đặt $a_{ij} = f(u_i, u_j)$, ta được

$$\boxed{f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j} \qquad (1)$$

• *Ma trận* $A = (a_{ij})_n$ *được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính* f *trong cơ sở* B*, ký hiệu là* $A = [f]_B$.

Ta quy ước viết $(a)_{1\times 1} = a$. Khi đó, dạng song tuyến tính f được viết lại dưới dạng ma trận

$$\boxed{f(x,y) = ([x]_B)^T . A . [y]_B} \qquad (2)$$

▪ **Chú ý**

i) Khi cơ sở không được chỉ rõ thì ta ngầm hiểu đó là cơ sở chính tắc E_n trong $\mathbb{R}^n$.

ii) Dạng song tuyến tính thường được cho dưới dạng (1).

Ví dụ 1. Xét dạng song tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có biểu thức

$$f(x,y) = x_1 y_1 - 2x_2 y_1 + 3x_1 y_2 \text{ với } x = (x_1; x_2),\; y = (y_1; y_2).$$

Từ biểu thức của $f(x,y)$, ta xác định được:

$$a_{11} = 1,\; a_{21} = -2,\; a_{12} = 3,\; a_{22} = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, dạng ma trận của $f(x,y)$ là:

$$f(x,y) = [x]^T A[y] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ 2. Xét dạng song tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ có ma trận của f trong cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Từ ma trận A, ta có biểu thức của $f(x,y)$ là:

$$f(x,y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 + 5x_2y_3 + 6x_3y_1 + 7x_3y_2 + 8x_3y_3$$

trong đó, $x = (x_1;\, x_2;\, x_3) \in \mathbb{R}^3$ và $y = (y_1;\, y_2;\, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

▪ **Chú ý**

Trong ma trận A của dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^n$, phần tử a_{ij} là hệ số của số hạng chứa x_iy_j $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n)$.

▪ **Định nghĩa 2**

Dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là đối xứng (tương ứng, phản đối xứng) nếu

$$f(x,y) = f(y,x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

(tương ứng, $f(x,y) = -f(y,x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$).

▪ **Nhận xét**

Ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng (hay phản đối xứng) f trong một cơ sở bất kỳ của $\mathbb{R}^n$ là đối xứng (hay phản đối xứng).

Ví dụ 3. Dạng song tuyến tính $f(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_2$ là đối xứng vì:

$$f(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_2y_2 = 3y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 - y_2x_2 = f(y,x).$$

Khi đó, ma trận $[f] = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ cũng là ma trận đối xứng.

1.2. Dạng toàn phương

▪ **Định nghĩa**

• Cho f là dạng song tuyến tính *đối xứng* trên $\mathbb{R}^n$.

Ánh xạ

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto q(x) = f(x,x)$$

được gọi là dạng toàn phương q trên $\mathbb{R}^n$ ứng với f.

• *Nếu $A = [f]_B$ thì A cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương q trong cơ sở B, và ta cũng viết là $A = [q]_B$.*

Khi đó, ta có

$$\boxed{q(x) = ([x]_B)^T.A.[x]_B}$$

Ví dụ 4. Cho dạng song tuyến tính đối xứng $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 .$$

Khi đó, dạng toàn phương tương ứng $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định là:

$$q(x) = x_1x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 - 3x_2x_2 = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 .$$

Ví dụ 5. Tìm dạng toàn phương $q(x)$. Biết ma trận của q trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Giải. Ta có:

$$q(x) = q(x_1;\, x_2) = [x]^T.A.[x] = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2)x_2 .$$

Vậy $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$.

- **Nhận xét**

Trong ví dụ 5, các phần tử a_{11} và a_{22} của A lần lượt là hệ số của x_1^2 và x_2^2; tổng hai phần tử a_{12} và a_{21} là hệ số của x_1x_2.

Ví dụ 6. Tìm ma trận của dạng toàn phương $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sau:

$$q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3 .$$

Giải. Ta có:

$$a_{11} = 2,\ a_{22} = 3,\ a_{33} = -1,\ a_{12} = a_{21} = -2,\ a_{13} = a_{31} = 0,\ a_{23} = a_{32} = 3 .$$

Vậy ma trận cần tìm là ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.3. Dạng toàn phương chính tắc

1.3.1. Định nghĩa

Trong $\mathbb{R}^n$, dạng toàn phương

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_1^2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

được gọi là dạng toàn phương chính tắc hay gọi tắt là dạng chính tắc.

Ma trận của dạng chính tắc là $A = \mathrm{diag}(a_{11} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{nn})$.

Ví dụ 7. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng chính tắc q có ma trận $[q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Khi đó, biểu thức của q là:

$$q(x) = q(x_1;\, x_2) = [x]^T[q][x] = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_2^2 .$$

Ví dụ 8. Trong $\mathbb{R}^3$, dạng chính tắc $q(x) = x_1^2 - 5x_2^2$ có ma trận $[q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

- **Phương pháp chung**

Trong $\mathbb{R}^n$, giả sử dạng toàn phương $q(x)$ có ma trận $[q] = A$.

Xét một cơ sở B bất kỳ của $\mathbb{R}^n$. Gọi $P = P_{E\to B}$, thực hiện phép đổi biến $[x] = P[y]$ ta được:

$$q(x) = [x]^T A[x] \Rightarrow q(y) = (P[y])^T A(P[y]) = [y]^T (P^T AP)[y].$$

Nếu ma trận $P^T AP$ có dạng chéo thì ta nói dạng toàn phương $q(x)$ được đưa về dạng chính tắc $q(y)$. Khi đó, $[q]_B = P^T AP$.

Vậy, việc đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc là ta đi tìm một ma trận P sao cho $P^T AP$ là ma trận chéo.

Ví dụ 9. Tìm dạng toàn phương $q(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ trong $\mathbb{R}^2$ đối với cơ sở

$$B = \{(1; 2), (3; 1)\}.$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ P = P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [q]_B = P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 21 & 38 \end{pmatrix}.$$

Vậy, đổi biến $[x] = P[y]$, ta có dạng toàn phương trong cơ sở B là

$$q(y) = 7y_1^2 + 38y_2^2 + 42y_1y_2.$$

Ví dụ 10. Tìm dạng toàn phương $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ trong cơ sở

$$B = \{(1; 0; 0), (-2; 1; 0), (2; -1; 1)\}.$$

Giải. Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ P = P_{E\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_B = P^T AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vậy, đổi biến $[x] = P[y]$, ta có dạng toàn phương trong cơ sở B là

$$f(y) = y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_3^2 \text{ (dạng chính tắc theo biến } y\text{)}. \blacksquare$$

2. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC BẰNG CHÉO HÓA TRỰC GIAO

2.1. Không gian Euclide

2.1.1. Định nghĩa

• Xét không gian vector V trên $\mathbb{R}$. *Một quy luật cho tương ứng cặp vector x, y bất kỳ thuộc V với số thực duy nhất, ký hiệu là $\langle x|y\rangle$ (hay (x, y)), thỏa mãn bốn tính chất sau:*

1) $\langle x|x\rangle \geq 0$ *và* $\langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *;*

2) $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ *;*

3) $\langle (x+y)|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle,\ \forall z \in V$ *;*

4) $\langle \lambda x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

được gọi là tích vô hướng của x và y.

• *Không gian vector V hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ với tích vô hướng được định nghĩa như trên được gọi là một không gian Euclide.*

Ví dụ 11. Trong không gian vector $\mathbb{R}^n$, ta xét tích vô hướng như sau:

$$\langle x|y\rangle = \langle (x_1;x_2;...;x_n)|(y_1;y_2;...;y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Khi đó, $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng như trên là một không gian Euclide.

▪ **Chú ý**

Từ đây trở đi, khi nói đến $\mathbb{R}^n$ thì ta ngầm hiểu $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide với tích vô hướng như trong ví dụ 11.

2.1.2. Chuẩn của một vector

▪ **Định nghĩa**

Trong không gian Euclide V, số thực $\sqrt{\langle u|u\rangle}$ được gọi là chuẩn (hay độ dài) của vector u, ký hiệu là $\|u\|$. Vector u được gọi là vector đơn vị nếu $\|u\| = 1$.

Ví dụ 12. Trong $\mathbb{R}^3$ cho vector $u = (1;-2;2)$, ta có $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$.

2.1.3. Cơ sở trực chuẩn

a) Định nghĩa

Trong không gian Euclide n chiều V, ta định nghĩa

• *Hai vector u và v được gọi là trực giao với nhau nếu $\langle u|v\rangle = 0 \in \mathbb{R}$.*

• *Một cơ sở được gọi là cơ sở trực giao nếu các vector của cơ sở là trực giao với nhau từng đôi một.*

• *Cơ sở $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu B là cơ sở trực giao và*

$$\|u_1\| = \|u_2\| = ... = \|u_n\| = 1.$$

Ví dụ 13. Trong $\mathbb{R}^2$, ta có:

1) Hệ $A = \{(2;-1),\ (-3;-6)\}$ là cơ sở trực giao.

2) Hệ $B = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ là cơ sở trực chuẩn.

▪ **Định lý**

Mọi không gian Euclide n chiều đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.

b) Thuật toán trực chuẩn hóa Gram – Schmidt

Trong không gian Euclide n chiều V, xét một cơ sở $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tùy ý. Ta xây dựng cơ sở trực chuẩn như sau

• **Bước 1.** Xây dựng cơ sở trực giao $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bằng cách đặt:

$$v_1 = u_1,$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1,$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

• **Bước 2.** Xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bằng cách chuẩn hóa các vector ở bước 2:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},\ w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|},\ w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}, ...,\ w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

Ví dụ 14. Trong $\mathbb{R}^3$, hãy trực chuẩn hóa cơ sở $B = \{u_1 = (1;\ 0;\ 0),\ u_2 = (0;\ 1;\ 1),\ u_3 = (0;\ 1;-1)\}$.

Giải. Ta có $\langle u_1 | u_2 \rangle = \langle (1;\ 0;\ 0) | (0;\ 1;\ 1) \rangle = 1.0 + 0.1 + 0.1 = 0$.

Tương tự, $\langle u_1 | u_3 \rangle = \langle u_2 | u_3 \rangle = 0 \Rightarrow B$ là cơ sở trực giao.

Trực chuẩn hóa cơ sở B:

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1;\ 0;\ 0)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = (1;\ 0;\ 0), \qquad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(0;\ 1;\ 1)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{(0;\ 1;-1)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vậy cơ sở trực chuẩn là

$$W = \left\{w_1 = \left(1;\ 0;\ 0\right),\ w_2 = \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ w_3 = \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

▪ **Định lý**

Nếu $W=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ *là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide* n *chiều* V *và* $u\in V$ *thì*

$$\boxed{u=\langle u|w_1\rangle w_1+\langle u|w_2\rangle w_2+...+\langle u|w_n\rangle w_n=\sum_{i=1}^{n}\langle u|w_i\rangle w_i}$$

▪ **Hệ quả**

Nếu $W=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ *là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclide* n *chiều* V *và* $u\in V$ *thì*

$$\boxed{[u]_W=\begin{pmatrix}\langle u|w_1\rangle & \langle u|w_2\rangle & \cdots & \langle u|w_n\rangle\end{pmatrix}^T}$$

Ví dụ 15. Trong $\mathbb{R}^3$, hãy trực chuẩn hóa cơ sở sau:

$$B=\{u_1=(1;-1;0),\ u_2=(0;1;-1),\ u_3=(1;1;-1)\}.$$

Tìm tọa độ của $u=(1;2;3)$ trong cơ sở trực chuẩn đó.

Giải

• Trực chuẩn hóa cơ sở B. Đặt:

$$v_1=u_1=(1;-1;0),$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2|v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=(0;1;-1)-\frac{\langle(0;1;-1)|(1;-1;0)\rangle}{\|(1;-1;0)\|^2}(1;-1;0)$$

$$=(0;1;-1)-\frac{-1}{2}(1;-1;0)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right),$$

$$v_3=u_3-\frac{\langle u_3|v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1-\frac{\langle u_3|v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2=(1;1;-1)-\frac{0}{2}(1;-1;0)-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Trực chuẩn hóa các vector $v_1,\ v_2,\ v_3$:

$$w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;-1;0)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right),$$

$$w_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

$$w_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Vậy cơ sở trực chuẩn là $W=\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$.

• Tọa độ của vector $u=(1;2;3)$ trong cơ sở W là:

$$[u]_W=\begin{pmatrix}\langle u|w_1\rangle & \langle u|w_2\rangle & \langle u|w_3\rangle\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{6}} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}^T.$$

2.2. Thuật toán chéo hóa trực giao

2.2.1. Ma trận trực giao

Ma trận vuông P *được gọi là ma trận trực giao nếu* $P^T=P^{-1}$.

▪ **Chú ý**

i) Nếu $P=(a_{ij})_n$ là ma trận trực giao thì $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \ \ (j=1,2,...,n)$.

ii) Nếu W là cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$ thì $P_{E\to W}$ là ma trận trực giao.

Ví dụ 16. Ma trận $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ là ma trận trực giao vì:

$$P^TP=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

▪ **Nhận xét**

Trong chương 4, ta đã biết cách tìm ma trận khả nghịch P chéo hóa ma trận vuông A; nghĩa là, $P^{-1}AP$ là ma trận chéo. Do đó, nếu ta tìm được ma trận trực giao P thì P^TAP là ma trận chéo.

2.2.2. Thuật toán

Giả sử dạng toàn phương $q(x)$ trong $\mathbb{R}^n$ có ma trận là A.

• **Bước 1.** Tìm các trị riêng $\lambda_i \ \ (i=1,...,n)$ của A và các vector riêng cơ sở u_i của các không gian riêng ứng với λ_i.

• **Bước 2.** Trực chuẩn hóa Gram – Schmidt $\{u_1,...,u_n\}$ thành cơ sở trực chuẩn $W=\{w_1,...,w_n\}$.

• **Bước 3.** Ma trận trực giao là

$$\boxed{P=P_{E\to W}=\big([w_1]\ [w_2]\ \dots\ [w_n]\big)}$$

Khi đó, ma trận của q trong cơ sở W là

$$\boxed{P^TAP=\operatorname{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n)}$$

(nếu λ_i là nghiệm bội k của $P_A(\lambda)=0$ thì lặp lại k lần liên tiếp).

Đổi biến $[x]=P[y]$, ta được

$$\boxed{q(y)=[y]^T.[q]_W.[y]=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_n^2}$$

Ví dụ 17. Đưa dạng toàn phương $q(x)=-3x_2^2+4x_1x_2$ trong $\mathbb{R}^2$ về dạng chính tắc bằng thuật toán chéo hóa trực giao.

Giải. Ma trận của q trong cơ sở chính tắc là $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

• Bước 1. Tìm trị riêng và vector riêng cơ sở.

Ta có:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda-4\,.$$

Suy ra ma trận A có hai trị riêng là $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=-4$.

$$(A-\lambda_1 I)=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow u_1=(2;\,1),$$

$$(A-\lambda_2 I)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow u_2=(1;-2).$$

• Bước 2. Trực chuẩn hóa $\{u_1,\,u_2\}$.

Do $\{u_1,\,u_2\}$ trực giao nên ta có:

$$w_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2;\,1)\ \text{và}\ w_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1;-2).$$

Suy ra cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$ là $W=\{w_1,\,w_2\}$.

• Bước 3. Ma trận trực giao là $P=P_{E\to W}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Khi đó

$$P^TAP=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}.$$

Đổi biến:

$$[x]=P[y]\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_2\\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}y_1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_2.\end{cases}$$

Thay $x_1,\,x_2$ trong công thức đổi biến ở trên vào $q(x)$, ta được dạng chính tắc cần tìm là

$$q(y)=y_1^2-4y_2^2.$$

▪ **Chú ý**

i) Các *trị riêng* của ma trận A lần lượt ứng với *vector cột* của P.

ii) Ta đã biết $P^TAP=\operatorname{diag}(\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n)$ nên không cần phải đổi biến cụ thể để thay vào dạng toàn phương. Tuy nhiên, ma trận trực giao P là rất quan trọng trong công thức đổi biến. Do đó, ta cần phải chỉ ra ma trận P.

Ví dụ 18. Trong $\mathbb{R}^3$, cho ma trận A của dạng toàn phương $q(x)$ có các trị riêng và vector riêng cơ sở tương ứng là $\lambda_1=3,\ u_1=(1;\,1;\,1)$, $\lambda_2=6,\ u_2=(-1;-1;\,2)$ và $\lambda_3=8,\ u_3=(-1;\,1;\,0)$.

Tìm dạng chính tắc của q bằng thuật toán chéo hóa trực giao.

Giải. Đặt:

$$v_1=u_1=(1;\,1;\,1)\Rightarrow w_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1;\,1;\,1),$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2|v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=(-1;-1;\,2)\Rightarrow w_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1;-1;\,2),$$

$$v_3=u_3-\frac{\langle u_3|v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1-\frac{\langle u_3|v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2=(-1;\,1;\,0)\Rightarrow w_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1;\,1;\,0).$$

Vậy $P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 2 & 0\end{pmatrix}$ và đổi biến $[x]=P[y]$ ta được dạng chính tắc cần tìm là

$$q(y)=3y_1^2+6y_2^2+8y_3^2.$$

Ví dụ 19. Đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc bằng thuật toán chéo hóa trực giao: $q(x)=3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$.

Giải. Ma trận của q là $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Ta có:

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 4\\ -2 & 6-\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & 4\\ -2 & 6-\lambda & 2\\ 0 & 14-2\lambda & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & -10 & 4\\ -2 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(7-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & -10\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\lambda=7\\ \lambda=-2.\end{bmatrix}$$

Với $\lambda=7$, ta có $(A-7I)=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 4\\ -2 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Suy ra hai vector cơ sở của $E(7)$ là $u_1=(1;\,0;\,1)$, $u_2=(0;\,2;\,1)$.

Với $\lambda=-2$, ta có $(A+2I)=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -2 & 8 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Suy ra vector cơ sở của $E(-2)$ là $u_3=(2;\,1;-2)$. Đặt:

$$v_1=u_1=(1;\,0;\,1)\Rightarrow w_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1;\,0;\,1),$$

$$v_2=u_2-\frac{\langle u_2|v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=\left(-\frac{1}{2};\,2;\,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow w_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1;\,4;\,1),$$

$$v_3=u_3-\frac{\langle u_3|v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1-\frac{\langle u_3|v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2=(2;\,1;-2)\Rightarrow w_3=\frac{1}{3}(2;\,1;-2).$$

Vậy $P=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\sqrt{2}\\ 0 & 4 & \sqrt{2}\\ 3 & 1 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ và đổi biến $[x]=P[y]$ ta được dạng chính tắc là

$$q(y)=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2.\ \blacksquare$$

3. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC BẰNG CÁC THUẬT TOÁN KHÁC (tham khảo)

3.1. Thuật toán Lagrange

Trong $\mathbb{R}^n$, xét dạng toàn phương

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

Thuật toán Lagrange là phương pháp nhóm trực tiếp lần lượt theo từng biến x_i dưới dạng tổng bình phương. Sau đó, ta dựa vào các tổng bình phương để đổi biến.

Thông thường, ta đặt $[y] = Q[x]$ và gọi là đổi biến xuôi. Tiếp theo, ta giải $[x] = Q^{-1}[y]$ và gọi là đổi biến ngược. Khi đó, ma trận đổi biến sẽ là $P = Q^{-1}$.

3.1.1. Trường hợp 1 ($q(x)$ có 1 hệ số $a_{ii} \neq 0$)

• **Bước 1.** Giả sử $a_{11} \neq 0$, ta tách tất cả các số hạng chứa x_1 trong $q(x)$ và thêm hoặc bớt để có dạng

$$q(x) = a_{11}\left(x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n\right)^2 + q_1(x_2;...;x_n)$$

trong đó, $q_1(x_2;...;x_n)$ chứa tối đa $n-1$ biến.

Đổi biến xuôi:

$$y_1 = x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n,\ y_i = x_i\ (i = 2,...,n).$$

Đổi biến ngược:

$$x_1 = y_1 - \alpha_{12}y_2 - ... - \alpha_{1n}y_n,\ x_i = y_i\ (i = 2,...,n).$$

Ta được ma trận đổi biến là

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{12} & ... & -\alpha_{1n} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, với biến mới thì $q(x)$ trở thành

$$q(y) = a_{11}y_1^2 + q_1(y_2;...;y_n).$$

• **Bước 2.** Tiếp tục làm như bước 1 cho $q_1(y_2;...;y_n)$, ta được ma trận đổi biến là P_2, ...

Sau k bước thì dạng toàn phương q sẽ có dạng chính tắc.

Ma trận đổi biến từ đầu đến bước cuối cùng là

$$\boxed{P = P_1...P_k}$$

3.1.2. Trường hợp 2 ($q(x)$ có hệ số $a_{ii} = 0,\ \forall i$)

Giả sử $a_{12} \neq 0$, ta đổi biến ngược:

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_i = y_i\ (i = 3,...,n).$$

Khi đó, dạng toàn phương trở thành $q(y) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + ...$ và ta có hệ số của y_1^2 khác 0.

Ta trở lại trường hợp 1.

Ví dụ 20. Dùng thuật toán Lagrange để đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc và tìm ma trận đổi biến P: $q(x) = -x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Giải

• Bước 1. Biến đổi:

$$q(x) = -(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 = -(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3.$$

Đổi biến xuôi:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = \quad x_2 \\ y_3 = \qquad x_3 \end{cases}$$

Đổi biến ngược:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = \quad y_2 \\ x_3 = \qquad y_3 \end{cases}$$

ta được ma trận đổi biến là $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Khi đó, dạng toàn phương q đối với biến y là $q(y) = -y_1^2 + (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2 + 4(y_1 + y_2)y_3$,

với $q_1(y) = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2 + 4(y_1 + y_2)y_3$.

• Bước 2. Biến đổi $q_1(y) = (y_1 + y_2 + 2y_3)^2$.

Đổi biến:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_1 + y_2 + 2y_3 \\ z_3 = \qquad y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \quad z_1 \\ y_2 = -z_1 + z_2 - 2z_3 \\ y_3 = \qquad z_3 \end{cases} \Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_1(z) = z_2^2.$$

Vậy ma trận đổi biến của cả hai bước là: $P = P_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và với $[x] = P[z]$, dạng chính tắc của q là $q(z) = -z_1^2 + z_2^2$.

Cách khác

Trong thực hành ta có thể thực hiện gộp cả hai bước như sau:

$$q(x) = -(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 = -(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 2x_3)^2.$$

Đổi biến xuôi:

$$y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_1 + 2x_3,\ y_3 = x_3.$$

Đổi biến ngược:

$$x_1 = y_2 - 2y_3,\ x_2 = -y_1 + y_2 - 2y_3,\ x_3 = y_3.$$

Vậy ma trận đổi biến là $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và với $[x] = P[y]$, dạng chính tắc của q là

$$q(y) = -y_1^2 + y_2^2.$$

Ví dụ 21. Dùng thuật toán Lagrange để đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc và tìm ma trận đổi biến P: $f(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Giải. Đổi biến ngược:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \quad y_3 \end{cases} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dạng toàn phương f đối với biến y là:

$$f(y) = 2(y_1+y_2)(y_1 - y_2)+2(y_1+y_2)y_3 - 6(y_1 - y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3+8y_2y_3$$
$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2.$$

Đổi biến:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \quad - \quad y_3 \\ z_2 = \quad y_2 - 2y_3 \\ z_3 = \quad\quad y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \quad + \quad z_3 \\ y_2 = \quad z_2 + 2z_3 \\ y_3 = \quad\quad z_3 \end{cases} \Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy ma trận đổi biến là $P = P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và với $[x] = P[z]$, dạng chính tắc của của f là

$$f(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

- **Nhận xét**

Do cách đổi biến trong thuật toán Lagrange có thể khác nhau nên dạng chính tắc là không duy nhất.

3.2. Thuật toán Jacobi

3.2.1. Định thức con chính

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$. *Định thức con cấp* k $(1 \le k \le n)$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức con chính của A.

Ví dụ 22. Ma trận $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ có ba định thức con chính sau:

$$D_1 = \left|-1\right| = -1,\ D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4,\ D_3 = \det A = -60.$$

3.2.2. Định thức $D_{i-1,\,j}$

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$. *Định thức con* $D_{i-1,\,j}$ *cấp* $i-1$ *của* A $(1 \le j < i \le n)$ *là định thức được tạo thành từ* $i-1$ *dòng đầu và* $i-1$ *cột đầu (sau khi đã bỏ đi cột thứ* j*) của* A.

Ví dụ 23. Ma trận $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}$ có ba định thức con $D_{i-1,\,j}$ sau:

$D_{2-1,\,1}=D_{1,\,1}=\left|2\right|=2$ (dòng 1 và cột 2),

$D_{3-1,\,1}=D_{2,\,1}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-12$ (hai dòng đầu và cột 2, 3 (bỏ cột 1)),

$D_{3-1,\,2}=D_{2,\,2}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$ (hai dòng đầu và cột 1, 3 (bỏ cột 2)).

3.2.3. Thuật toán

Trong $\mathbb{R}^n$, giả sử dạng toàn phương $q(x)$ có ma trận $A=(a_{ij})_n$ và đồng thời các định thức con chính $D_k\neq 0\ \ (k=1,...,n-1)$.

• **Bước 1.** Tính các hệ số

$$\boxed{\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\frac{D_{i-1,\,j}}{D_{i-1}}}$$

• **Bước 2.** Đổi biến theo công thức:

$$\begin{cases}x_1=y_1+\alpha_{21}y_2+\alpha_{31}y_3+\alpha_{41}y_4+...+\alpha_{n1}y_n\\ x_2=\qquad y_2+\alpha_{32}y_3+\alpha_{42}y_4+...+\alpha_{n2}y_n\\ .....\\ x_n=\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_n\end{cases}$$

Khi đó, ma trận đổi biến là $P=\begin{pmatrix}1 & \alpha_{21} & ... & \alpha_{n1}\\ 0 & 1 & ... & \alpha_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}$

và dạng chính tắc là

$$\boxed{q(y)=D_1y_1^2+\frac{D_2}{D_1}y_2^2+\frac{D_3}{D_2}y_3^2+...+\frac{D_n}{D_{n-1}}y_n^2}$$

Ví dụ 24. Dùng thuật toán Jacobi đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc:

$$q(x)=2x_1^2+x_2^2+17x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-16x_2x_3.$$

Giải. Ma trận của q là $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\\ -2 & 1 & -8\\ 6 & -8 & 17\end{pmatrix}$.

Các định thức con chính của A là:

$$D_1=2,\ D_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-2,\ D_3=\det A=-6.$$

Do $D_1\neq 0,\ D_2\neq 0$ nên ta sử dụng được thuật toán Jacobi.

Các hệ số $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{32}$:

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\frac{D_{2-1,1}}{D_1} = -\frac{-2}{2} = 1, \qquad \alpha_{31} = (-1)^{3+1}\frac{D_{3-1,1}}{D_2} = \frac{\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 1 & -8\end{vmatrix}}{-2} = -5,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}\frac{D_{3-1,2}}{D_2} = -\frac{\begin{vmatrix}2 & 6\\ -2 & -8\end{vmatrix}}{-2} = -2.$$

Đổi biến:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 \\ x_2 = \quad y_2 + \alpha_{32}y_3 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 - 5y_3 \\ x_2 = \quad y_2 - 2y_3 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$$

Khi đó, ta được dạng chính tắc của q là:

$$q(y) = D_1y_1^2 + \frac{D_2}{D_1}y_2^2 + \frac{D_3}{D_2}y_3^2 \Leftrightarrow q(y) = 2y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2.$$

Ví dụ 25. Dùng thuật toán Jacobi đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc:

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Giải. Ma trận của f là $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Các định thức con chính của A là:

$$D_1 = 2,\ D_2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} = -\frac{1}{4},\ D_3 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix}4 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix} = -\frac{17}{4}.$$

Các hệ số $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{32}$:

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\frac{D_{2-1,1}}{D_1} = -\frac{3}{4},\ \alpha_{31} = (-1)^{3+1}\frac{D_{3-1,1}}{D_2} = 8,\ \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\frac{D_{3-1,2}}{D_2} = -12.$$

Đổi biến $\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{3}{4}y_2 + 8y_3 \\ x_2 = \quad y_2 - 12y_3 \\ x_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$, ta được dạng chính tắc là $f(y) = 2y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 + 17y_3^2$.

2.3. Thuật toán biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng

Trong $\mathbb{R}^n$, giả sử dạng toàn phương $q(x)$ có ma trận là A.

- **Bước 1.** Thực hiện một số hữu hạn các cặp biến đổi sơ cấp trên ma trận chia khối $\left(A \middle| I_n\right)$ (mỗi cặp gồm một phép biến đổi sơ cấp dòng và một phép biến đổi sơ cấp cột cùng kiểu) để đưa ma trận A về dạng chéo $\mathrm{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n)$. Khi đó, I_n sẽ trở thành P^T.
- **Bước 2.** Đổi biến $[x] = P[y]$, ta được

$$q(y) = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + ... + \lambda_ny_n^2.$$

Ví dụ 26. Dùng thuật toán biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng, đưa dạng toàn phương trong ví dụ 19 về dạng chính tắc.

Giải. Ta có:

$$\left(A\middle|I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&6&1&0&0\\-2&1&-8&0&1&0\\6&-8&17&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[d_3\to d_3-3d_1]{d_2\to d_2+d_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&6&1&0&0\\0&-1&-2&1&1&0\\0&-2&-1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_3\to c_3-3c_1]{c_2\to c_2+c_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&-1&-2&1&1&0\\0&-2&-1&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{d_3\to d_3-2d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&-1&-2&1&1&0\\0&0&3&-5&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3\to c_3-2c_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&0&0\\0&-1&0&1&1&0\\0&0&3&-5&-2&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-5&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&1&-5\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Đổi biến $[x]=P[y]$, ta được $q(y)=2y_1^2-y_2^2+3y_3^2$.

Ví dụ 27. Dùng thuật toán biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng, đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc: $f(x)=2x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$.

Giải. Ma trận của f là $A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&3\\-2&3&0\end{pmatrix}$.

Ta có:

$$\left(A\middle|I_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&-2&1&0&0\\1&0&3&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{d_1\to d_1+d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&0\\1&0&3&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_1\to c_1+c_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&1&0\\1&0&3&0&1&0\\1&3&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[d_3\to 2d_3-d_1]{d_2\to 2d_2-d_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&1&0\\0&-1&5&-1&1&0\\0&5&-1&-1&-1&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_3\to 2c_3-c_1]{c_2\to 2c_2-c_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-2&10&-1&1&0\\0&10&-2&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{d_3\to d_3+5d_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-2&10&-1&1&0\\0&0&48&-6&4&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{c_3\to c_3+5c_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&1&0\\0&-2&0&-1&1&0\\0&0&48&-6&4&2\end{array}\right)\Rightarrow P^T=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\-6&4&2\end{pmatrix}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&-1&-6\\1&1&4\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Đổi biến $[x]=P[y]$, ta được $f(y)=2y_1^2-2y_2^2+48y_3^2$. ■

4. NHẬN DIỆN ĐƯỜNG VÀ MẶT BẬC HAI

4.1. Nhận diện đường bậc hai

4.1.1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy, đường bậc hai là tập hợp tất cả các điểm $M(x;\ y)$ có tọa độ thỏa phương trình

$$\boxed{ax^2 + by^2 + 2c.xy + 2d.x + 2e.y + f = 0} \qquad (1)$$

trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0.

Ví dụ 28. Đường cong có phương trình sau là đường bậc hai $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4x - 3y - 7 = 0$.

4.1.2. Phân loại đường bậc hai

a) Các dạng chính tắc của đường conic

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (đường elip);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ (đường hyperbol);

3) $y^2 = px$ hoặc $x^2 = py$ (đường parabol).

b) Phân loại

Trong Oxy, xét đường bậc hai (C) có phương trình (1).

Đặt hai ma trận đối xứng:

Ma trận nhỏ $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ của dạng toàn phương $ax^2 + by^2 + 2c.xy$ và ma trận lớn $\overline{Q} = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

- **Định lý**

  Đường bậc hai (C) là đường conic khi và chỉ khi

  $$\boxed{\det \overline{Q} \neq 0}$$

- **Tính chất**

  Nếu (C) là đường conic thì:

  i) (C) *là đường elip khi và chỉ khi* $\det Q > 0$;

  ii) (C) *là đường hyperbol khi và chỉ khi* $\det Q < 0$;

  iii) (C) *là đường parabol khi và chỉ khi* $\det Q = 0$.

- **Chú ý**

  Nếu $\det \overline{Q} = 0$ thì (C) không phải là conic (có thể là tích của hai đường thẳng).

4.1.3. Rút gọn đường conic

Bằng cách xoay trục tọa độ và tịnh tiến, ta đưa (1) về dạng chính tắc.

• **Bước 1.** Đưa dạng toàn phương $ax^2 + by^2 + 2cxy$ về dạng chính tắc $\alpha(x')^2 + \beta(y')^2$ (*khử tích chéo xy*) bằng phép biến đổi trực giao (*phép quay trục*).

• **Bước 2.** Đổi biến $x'' = x' + a'$, $y'' = y' + b'$ (*tịnh tiến hệ tọa độ*) một cách thích hợp để phương trình (C) có dạng chính tắc.

Ví dụ 29. Xác định dạng của đường bậc hai (C) có phương trình $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4x - 3y - 7 = 0$.
Giải. Ta có:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \overline{Q} = -\frac{25}{4} \neq 0 .$$

Suy ra (C) là đường conic.

Mặt khác

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q = 0 .$$

Vậy (C) là đường parabol.

Ví dụ 30. Xác định dạng của đường bậc hai (C) có phương trình $x^2 + 7y^2 - 8xy - 2x + 4y + 1 = 0$.
Giải. Ta có:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \overline{Q} = -4 \neq 0 .$$

Suy ra (C) là đường conic.
Mặt khác

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q = -9 < 0 .$$

Vậy (C) là đường hyperbol.

Ví dụ 31. Xác định dạng của đường bậc hai (C) có phương trình $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 0$.
Giải. Ta có:

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \overline{Q} = 0 .$$

Suy ra (C) không phải là đường conic.
Biến đổi (C):

$$x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y-4) = 0 .$$

Vậy (C) là tích của hai đường thẳng.

Ví dụ 32. Trong Oxy, viết phương trình chính tắc của conic (C):

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0 .$$

Giải. Xét dạng toàn phương $q(x;y) = 5x^2 + 8y^2 + 4xy$.

Ma trận của q là $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Ma trận Q có trị riêng và vector riêng cơ sở tương ứng là:

$$\lambda_1 = 9,\ u_1 = (1;2) \text{ và } \lambda_2 = 4,\ u_2 = (-2;1).$$

Trực chuẩn hóa các vector riêng cơ sở, ta được ma trận trực giao $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Đổi biến:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Thay vào phương trình của (C), ta được:

$$9(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} + \frac{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} = 1.$$

Đổi biến:

$$x'' = x' - \frac{8}{\sqrt{5}},\ y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vậy (C) là đường elip có phương trình chính tắc $\frac{(x'')^2}{4} + \frac{(y'')^2}{9} = 1$.

4.2. Nhận diện mặt bậc hai

4.2.1. Định nghĩa mặt bậc hai

Trong không gian $Oxyz$, mặt bậc hai là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y; z)$ có tọa độ thỏa phương trình

$$\boxed{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2d.xy + 2e.xz + 2f.yz + 2g.x + 2h.y + 2k.z + l = 0} \quad (2)$$

trong đó a, b, c, d, e, f không đồng thời bằng 0.

Ví dụ 33. Trong $\mathbb{R}^3$, mặt (S) có phương trình sau là mặt bậc hai:

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy - 2x - 14y - 13 = 0.$$

4.2.2. Sơ lược về luật quán tính Sylvester và dạng toàn phương xác định dấu

a) Luật quán tính Sylvester

Gọi s là số các số hạng mang dấu " + " và p là số các số hạng mang dấu " – " trong dạng chính tắc. Khi đó, s và p là những đại lượng bất biến, không phụ thuộc vào phép biến đổi không suy biến để đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

▪ **Chú ý**

i) Số s được gọi là *chỉ số dương quán tính* của dạng toàn phương.

ii) Số p được gọi là *chỉ số âm quán tính* của dạng toàn phương.

iii) Số $s - p$ được gọi là *chỉ số* (hay *ký số*) của dạng toàn phương.

Ví dụ 34. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương $f(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2$.

• **Cách 1.** Biến đổi $f(x) = (x_1 - x_2)^2 - 4x_2^2$.

Đổi biến $y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_2$, ta được $f(y) = y_1^2 - 4y_2^2$.

• **Cách 2.** Biến đổi $f(x) = -\frac{1}{3}(x_1 + 3x_2)^2 + \frac{4}{3}x_1^2$.

Đổi biến $z_1 = x_1 + 3x_2,\ z_2 = x_1$, ta được $f(z) = -\frac{1}{3}z_1^{\ 2} + \frac{4}{3}z_2^2$.

Nhận thấy qua 2 cách biến đổi trên, dạng chính tắc khác nhau nhưng đều có $s = p = 1$.

b) Dạng toàn phương xác định dấu

▪ **Định nghĩa**

Trong $\mathbb{R}^n$, giả sử dạng toàn phương $q(x)$ có $r([q]) = n$.

• *Dạng toàn phương $q(x)$ được gọi là xác định dương nếu* $q(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ (x \neq \theta)$.

• *Dạng toàn phương $q(x)$ được gọi là xác định âm nếu* $q(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ (x \neq \theta)$.

• *Dạng toàn phương $q(x)$ được gọi là nửa xác định dương (hay âm) nếu*

$$q(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ (hay\ q(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

• *Dạng toàn phương $q(x)$ được gọi là không xác định dấu nếu nó nhận cả giá trị dương và giá trị âm; nghĩa là, $q(x)$ thay đổi dấu.*

▪ **Chú ý**

Trong $\mathbb{R}^n$, việc xét dấu dạng toàn phương q có $r([q]) < n$ (dạng suy biến) là khá phức tạp.
Ta không xét ở đây.

Ví dụ 35. Trong $\mathbb{R}^2$, ta có:

• $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ là xác định dương vì $q(x) = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2\ (x \neq \theta)$.

• $f(x) = -4x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ là nửa xác định âm vì $f(x) = -(2x_1 - x_2)^2 \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$.

• $g(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$ là không xác định dấu vì $g(1;-1) = -1 < 0$ và $g(1;\ 1) = 1 > 0$.

▪ **Định lý *Sylvester***

• *Trong $\mathbb{R}^n$, dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính đều dương; nghĩa là* $D_k > 0\ \ (k = 1,...,n)$.

• *Trong $\mathbb{R}^n$, dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có các định thức con chính cấp chẵn dương, cấp lẻ âm; nghĩa là* $(-1)^k D_k > 0\ \ (k = 1,...,n)$.

Ví dụ 36. Dùng định lý Sylvester, xét tính xác định dấu của dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau:

$$q(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2.$$

Giải. Ma trận của q là $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và $r(A) = 3$.

Ta có các định thức con chính:

$$D_1 = -2 < 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ D_3 = \det A = -12 < 0.$$

Vậy $q(x)$ xác định âm.

Ví dụ 37. Dùng định lý Sylvester, xét tính xác định dấu của dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau:

$$f(x;y;z) = 7x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xz\,.$$

Giải. Ma trận của f là $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ và $r(A) = 3$.

Ta có các định thức con chính:

$$D_1 = 7 > 0,\ D_2 = 14 > 0,\ D_3 = -32 < 0\,.$$

Suy ra f không xác định dương và cũng không xác định âm.

Mặt khác

$$f(1;\,0;\,0) = 7 > 0 \text{ và } f(0;\,0;\,1) = -1 < 0\,.$$

Vậy dạng toàn phương f không xác định dấu.

4.2.3. Phân loại mặt bậc hai

a) Các dạng chính tắc của mặt bậc hai

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (mặt cầu);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (mặt elipsoid);

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (hyperbolic 1 tầng);

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (hyperbolic 2 tầng);

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (nón eliptic);

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ (parabolic eliptic);

7) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ (parabolic hyperbolic);

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (mặt trụ eliptic);

9) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ (mặt trụ hyperbolic);

10) $y^2 = px$ hoặc $x^2 = py$ (mặt trụ parabolic).

- **Chú ý**

  Các dạng 8), 9) và 10) được gọi là các mặt bậc hai suy biến.

b) Phân loại

Cho (S) là mặt bậc hai có phương trình dưới dạng (2).

Đặt ma trận nhỏ và ma trận lớn như sau:

$$Q = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \text{ và } \overline{Q} = \begin{pmatrix} a & d & e & g \\ d & b & f & h \\ e & f & c & k \\ g & h & k & l \end{pmatrix}.$$

▪ **Định lý**

Mặt bậc hai (S) *là không suy biến khi và chỉ khi*

$$\boxed{\det \overline{Q} \neq 0}$$

▪ **Tính chất**

Nếu mặt bậc hai (S) không suy biến thì:

i) (S) là *mặt elipsoid* (kể cả elipsoid ảo) khi và chỉ khi ma trận dạng toàn phương Q *xác định dương* hay *xác định âm*;

ii) (S) là *mặt hyperpolic* (1 tầng hay 2 tầng) khi và chỉ khi ma trận dạng toàn phương Q có chỉ số $s - p = \pm 1$;

iii) (S) là *mặt parabolic eliptic* (hay *parabolic hyperpolic*) khi và chỉ khi $\det Q = 0$.

4.2.4. Rút gọn mặt bậc hai

Bằng cách xoay trục tọa độ và tịnh tiến, ta đưa (2) về dạng chính tắc.

• **Bước 1.** Đưa dạng toàn phương $q(x;y;z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2d.xy + 2e.xz + 2f.yz$ về dạng chính tắc $\alpha(x')^2 + \beta(y')^2 + \gamma(z')^2$ (*khử các tích chéo*) bằng phép biến đổi trực giao (*phép quay*).

• **Bước 2.** Đổi biến: $x'' = x' + a'$, $y'' = y' + b'$, $z'' = z' + c'$ (*tịnh tiến hệ tọa độ*) một cách thích hợp để phương trình (S) có dạng chính tắc.

Ví dụ 38. Xác định dạng của mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0\,.$$

Giải. Ta có:

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \text{ và } \overline{Q} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & -8 \\ -5 & 4 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 & 72 \end{pmatrix}.$$

Do $r(\overline{Q}) = 4$ nên (S) không suy biến.

Mặt khác, $\det Q = 0$ nên (S) là parabolic eliptic (hay parabolic hyperpolic).

Ví dụ 39. Xác định dạng của mặt bậc hai (S) có phương trình sau đây rồi viết phương trình chính tắc:

$$22x^2 + 28y^2 + 15z^2 + 8xy - 112x - 184y - 30z + 343 = 0\,.$$

Giải. Ta có:

$$Q = \begin{pmatrix} 22 & 4 & 0 \\ 4 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \overline{Q} = \begin{pmatrix} 22 & 4 & 0 & -56 \\ 4 & 28 & 0 & -92 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \\ -56 & -92 & -15 & 343 \end{pmatrix}.$$

Do $\det \overline{Q} \neq 0$ nên (S) không suy biến.

Theo định lý Sylvester, ma trận Q có:

$$D_1 = 22 > 0;\ D_2 = 600 > 0;\ D_3 = 9000 > 0$$

nên Q xác định dương.

Suy ra (S) là mặt elipsoid.

Ma trận Q có trị riêng và vector riêng cơ sở tương ứng là:

$$\lambda_1 = 30,\ u_1 = (1;\ 2;\ 0) \Rightarrow w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1;\ 2;\ 0),$$

$$\lambda_2 = 20,\ u_2 = (-2;\ 1;\ 0) \Rightarrow w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2;\ 1;\ 0),$$

$$\lambda_3 = 15,\ u_3 = (0;\ 0;\ 1) \Rightarrow w_3 = (0;\ 0;\ 1).$$

Suy ra, ma trận trực giao là $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Đổi biến:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y',\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y',\ z = z'.$$

Khi đó, (S) có phương trình:

$$30(x')^2 + 20(y')^2 + 15(z')^2 - \frac{480}{\sqrt{5}}x' - \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 30z' + 343 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{2} + \frac{\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{3} + \frac{\left(z' - 1\right)^2}{4} = 1.$$

Đổi biến:

$$x'' = x' - \frac{8}{\sqrt{5}},\ y'' = y' - \frac{1}{\sqrt{5}},\ z'' = z' - 1.$$

Vậy (S) là mặt elipsoid có phương trình chính tắc $\frac{(x'')^2}{2} + \frac{(y'')^2}{3} + \frac{(z'')^2}{4} = 1$. ■

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG V

Câu 1. Ma trận của dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 5x_2y_1 + x_2y_2$$

trong cơ sở $B = \{(2;\ 1),\ (1;-1)\}$ là:

A. $\begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

Câu 2. Ma trận của dạng toàn phương $q(x_1;\ x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$ trong cơ sở $B = \{(1;\ 1),\ (-1;\ 1)\}$ là:

A. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$; C. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; D. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$.

Câu 3. Ma trận trực giao là:

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -2 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$;

B. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0 & 1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & -2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$;

C. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$;

D. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & -2 & \sqrt{2}\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Câu 4. Trong $\mathbb{R}^3$, dạng toàn phương sẽ suy biến khi ta đưa về dạng chính tắc là:

A. $q(x_1;\, x_2;\, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$;

B. $q(x_1;\, x_2;\, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

C. $q(x_1;\, x_2;\, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3$;

D. $q(x_1;\, x_2;\, x_3) = 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2$.

Câu 5. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương $q(x_1;\, x_2) = 3x_2^2 + 4x_1x_2$.

Bằng phép chéo hóa trực giao với ma trận $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, ta đưa q về dạng chính tắc là:

A. $q(y_1;\, y_2) = -y_1^2 + 4y_2^2$;

B. $q(y_1;\, y_2) = y_1^2 - 4y_2^2$;

C. $q(y_1;\, y_2) = 4y_1^2 - y_2^2$;

D. $q(y_1;\, y_2) = -4y_1^2 + y_2^2$.

Câu 6. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương $f(x) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2$.

Dùng thuật toán Lagrange với ma trận đổi biến $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, ta đưa f về dạng chính tắc là:

A. $f(y_1;\, y_2) = 2y_1^2 - y_2^2$;

B. $f(y_1;\, y_2) = -2y_1^2 + y_2^2$;

C. $f(y_1;\, y_2) = y_1^2 - 2y_2^2$;

D. $f(y_1;\, y_2) = -y_1^2 + 2y_2^2$.

Câu 7. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương $q(x)$. Bằng phép chéo hóa trực giao với $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,

ta đưa q về dạng chính tắc $q(y_1;\, y_2) = y_1^2 - 4y_2^2$. Dạng toàn phương $q(x)$ đã cho là:

A. $q(x_1;\, x_2) = 3x_2^2 - 4x_1x_2$;

B. $q(x_1;\, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2$;

C. $q(x_1;\, x_2) = -3x_1^2 + 4x_1x_2$;

D. $q(x_1;\, x_2) = -3x_2^2 + 4x_1x_2$.

Câu 8. Trong $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương $f(x)$. Bằng phép chéo hóa trực giao bởi ma trận trực giao

$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & \sqrt{10} & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ta đưa f về dạng chính tắc $f(y) = -2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2$.

Dạng toàn phương $f(x)$ đã cho là:

A. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2$;

B. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_3$;

C. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 7x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2$;

D. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 7x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_3$.

Câu 9. Trong $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương $f(x)$. Bằng phép chéo hóa trực giao với cơ sở trực chuẩn

$$W = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2};\, \sqrt{2};\, \sqrt{2}\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-1;-1;\, 2\right), \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{3};\, \sqrt{3};\, 0\right)\right\}$$

ta đưa f về dạng chính tắc $f(y) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 8y_3^2$. Dạng toàn phương $f(x)$ đã cho là:

A. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 36x_1^2 + 36x_2^2 + 30x_3^2 - 24x_1x_2 - 12x_1x_3 - 12x_2x_3$;

B. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 36x_1^2 + 36x_2^2 + 30x_3^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 - 12x_2x_3$;

C. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 36x_1^2 + 36x_2^2 + 30x_3^2 - 12x_1x_2 - 12x_1x_3 - 24x_2x_3$;

D. $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = 30x_1^2 + 36x_2^2 + 36x_3^2 - 24x_1x_2 - 12x_1x_3 - 12x_2x_3$.

Câu 10. Trong Oxy, cho đường bậc hai (C) có phương trình:

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Phân loại đường bậc hai, ta được (C) là:

A. Đường parabol; B. Đường elip;

C. Đường hyperbol; D. Không phải là đường Conic.

Câu 11. Trong $Oxyz$, cho mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$22x^2 + 28y^2 + 15z^2 + 8xy - 112x - 184y - 30z + 343 = 0.$$

Phân loại mặt bậc hai, ta được (S) là:

A. Mặt parabolic; B. Mặt elipsoid;

C. Mặt hyperbolic; D. Mặt suy biến.

Câu 12. Trong Oxy, cho đường bậc hai (C) có phương trình:

$$x^2 + my^2 + 6xy + 2x + 2my + (m+1) = 0.$$

Điều kiện của m để (C) là đường elip:

A. $m < 1$; B. $m > 1$; C. $m > 9$; D. $m < 9$.

Câu 13. Trong Oxy, cho đường bậc hai (C) có phương trình:

$$x^2 + my^2 + 6xy + 2x + 2my + (m+1) = 0.$$

Điều kiện của m để (C) là đường hyperbol:

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$; B. $\begin{cases} m < 9 \\ m \neq -3 \end{cases}$; C. $m < 1$; D. $m < 9$.

Câu 14. Trong $Oxyz$, cho mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$x^2 + 5y^2 + m^2z^2 + 4xy - 2xz + 2myz + 2x + 4y + 2mz + 1 = 0.$$

Điều kiện của m để (S) là mặt parabolic:

A. $m=-\frac{5}{4}$; B. $m=-\frac{4}{5}$; C. $m>-\frac{5}{4}$; D. $m>-\frac{4}{5}$.

Câu 15. Trực chuẩn hóa cơ sở $B=\{(3;-4),\,(6;\,5)\}$ trong $\mathbb{R}^2$ bởi thuật toán Gram – Schmidt, ta được:

A. $\left\{\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(\frac{8}{13};\frac{6}{13}\right)\right\}$; B. $\left\{\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(\frac{12}{13};\frac{5}{13}\right)\right\}$;

C. $\left\{\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right),\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)\right\}$; D. $\left\{\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right),\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)\right\}$.

Câu 16. Trực giao hóa cơ sở $B=\{(12;\,5),\,(3;-7)\}$ trong $\mathbb{R}^2$ bởi thuật toán Gram – Schmidt, ta được:

A. $\left\{(12;\,5),\left(\frac{45}{169};-\frac{108}{169}\right)\right\}$; B. $\left\{(12;\,5),\left(\frac{495}{169};-\frac{1188}{169}\right)\right\}$;

C. $\left\{(12;\,5),\left(\frac{45}{58};-\frac{54}{29}\right)\right\}$; D. $\left\{(12;\,5),\left(\frac{495}{58};-\frac{594}{29}\right)\right\}$.

Câu 17. Trực giao hóa Gram – Schmidt cơ sở B sau trong $\mathbb{R}^3$
$B=\{(-1;\,2;-2),\,(1;\,2;-2),\,(2;\,2;-1)\}$, ta được:

A. $\left\{(-1;\,2;-2),\left(\frac{16}{9};\frac{4}{9};-\frac{4}{9}\right),\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$; B. $\left\{(-1;\,2;-2),\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{16}{9};\frac{4}{9};-\frac{4}{9}\right)\right\}$;

C. $\left\{(-1;\,2;-2),\left(\frac{16}{9};-\frac{4}{9};\frac{4}{9}\right),\left(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}$; D. $\left\{(-1;\,2;-2),\left(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{16}{9};-\frac{4}{9};\frac{4}{9}\right)\right\}$.

Câu 18. Trực chuẩn hóa Gram – Schmidt cơ sở B sau trong $\mathbb{R}^3$
$B=\{(1;\,2;\,0),\,(1;\,0;-2),\,(0;\,2;-1)\}$, ta được:

A. $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5};0\right),\left(\frac{\sqrt{30}}{15};-\frac{\sqrt{30}}{6};-\frac{\sqrt{30}}{30}\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$;

B. $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5};0\right),\left(\frac{\sqrt{30}}{15};-\frac{\sqrt{30}}{30};\frac{\sqrt{30}}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$;

C. $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5};0\right),\left(\frac{\sqrt{30}}{15};-\frac{\sqrt{30}}{30};-\frac{\sqrt{30}}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$;

D. $\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{2\sqrt{5}}{5};0\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(\frac{\sqrt{30}}{15};-\frac{\sqrt{30}}{30};-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)\right\}$.

Câu 19. Trong $\mathbb{R}^2$, cho cơ sở $B=\{(3;\,4),\,(4;-3)\}$ được trực chuẩn hóa Gram – Schmidt thành W. Tọa độ của $x=(1;\,2)$ trong W là:

A. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{11}{5} \end{pmatrix}^T$; B. $[x]_W = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}^T$;

C. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}^T$; D. $[x]_W = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^T$.

Câu 20. Trong $\mathbb{R}^2$, cho cơ sở $B = \{(1;\, 2),\, (2;-3)\}$ được trực chuẩn hóa Gram – Schmidt thành W. Tọa độ của $x = (1;\, 2)$ trong W là:

A. $[x]_W = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$; B. $[x]_W = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$; C. $[x]_W = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}$; D. $[x]_W = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Câu 21. Trong $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở $\{(-1;\, 1;-2),\, (1;\, 3;-2),\, (2;\, 2;-1)\}$ được trực chuẩn hóa Gram – Schmidt thành W. Tọa độ của $x = (1;\, 0;\, 0)$ trong cơ sở W là:

A. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$; B. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$;

C. $[x]_W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$; D. $[x]_W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$.

Câu 22. Trong $\mathbb{R}^3$, cho cơ sở $\{(1;\, 0;-1),\, (1;-1;\, 0),\, (1;\, 1;\, 1)\}$ được trực chuẩn hóa Gram – Schmidt thành W. Tọa độ của $x = (1;\, 0;\, 0)$ trong W là:

A. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T$; B. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$;

C. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T$; D. $[x]_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T$. ■

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chương 1

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	A	B	B	D	D	C

9	10	11	12	13	14	15	16
D	A	B	C	D	A	A	B

Chương 2

1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	B	D	B	B	A	C

Chương 3

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	D	D	A	C	B	B

9	10	11	12	13	14	15	16
A	D	B	C	B	C	D	B

Chương 4

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	B	C	A	D	D	A

9	10	11	12	13	14	15	16
D	C	A	B	C	A	D	D

Chương 5

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	B	A	C	D	B

9	10	11	12	13	14
A	B	B	C	B	A

15	16	17	18	19	20	21	22
D	B	A	C	C	B	D	A

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bùi Xuân Hải (chủ biên) – Trần Nam Dũng – Trịnh Thanh Đèo – Thái Minh Đường – Trần Ngọc Hội, ***Đại số tuyến tính***, ĐH KHTN TP. HCM – 2000 (lưu hành nội bộ).

[2] Đỗ Công Khanh (chủ biên) – Nguyễn Minh Hằng – Ngô Thu Lương, ***Toán cao cấp Đại số Tuyến tính* (*Toán* 2)**, NXB ĐHQG TP. HCM – 2002.

[3] Hoàng Đức Nguyên (dịch), ***Bài tập Toán học cao cấp* (*phần* 1)**, NXB Giáo Dục – 1994.

[4] Hoàng Xuân Sính – Trần Phương Dung, ***Bài tập Đại số Tuyến tính***, NXB Giáo Dục – 2007.

[5] Lê Sĩ Đồng, ***Toán cao cấp Đại số Tuyến tính***, NXB Giáo Dục – 2008.

[6] Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ, ***Toán cao cấp Tập* 2**, NXB Giáo Dục – 2007.

[7] Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ, ***Bài tập Toán cao cấp Tập* 2**, NXB Giáo Dục – 2009.

[8] Trần Lưu Cường (chủ biên) – Nguyễn Đình Huy – Huỳnh Bá Lân – Nguyễn Bá Thi – Nguyễn Quốc Lân – Đặng Văn Vinh, ***Toán cao cấp* 2 – *Đại số Tuyến tính***, NXB Giáo Dục – 2007.

[9] Trương Văn Hùng – Phạm Thành Thông, ***Bài tập Không gian vectơ***, NXB Thanh Niên – 2007.

[10] Alpha C. Chang, Kevin Wainwright, ***Fundamental methods of Mathematical Economics – Third***, *Edi. Mc.Graw-hill, Int. Edi. 1984.*

[11] Howard Anton, Chris Rorres, ***Elementary Linear Algebra Applications Version, 9th Edition***. *Copyright © 2005 John Wiley & Sons, Inc – USA.*