ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Chương V

NHỊ THỨC NEWTON *(phần 1)*

Nhị thức Newton có dạng :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Các hệ số C_n^k của các lũy thừa $(a + b)^n$ với n lần lượt là 0, 1, 2, 3, … được sắp thành từng hàng của tam giác sau đây, gọi là tam giác Pascal :

$(a + b)^0 = 1$	1
$(a + b)^1 = a + b$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 + 6 4 1
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

Các tính chất của tam giác Pascal :

(i) $C_n^0 = C_n^n = 1$: các số hạng đầu và cuối mỗi hàng đều là 1.

(ii) $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$: các số hạng cách đều số hạng đầu và cuối bằng nhau.

(iii) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ $(0 \le k \le n - 1)$: tổng 2 số hạng liên tiếp ở hàng trên bằng số hạng ở giữa 2 số hạng đó ở hàng dưới.

(iv) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$

Các tính chất của nhị thức Newton :

(i) Số các số hạng trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$ là $n + 1$.

(ii) Tổng số mũ của a và b trong từng số hạng của khai triển nhị thức $(a + b)^n$ là n.

(iii) Số hạng thứ $k + 1$ là $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Dạng 1:

TRỰC TIẾP KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

1. Khai triển $(ax + b)^n$ với a, b = $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ ...

Cho x giá trị thích hợp ta chứng minh được đẳng thức về C_n^0, C_n^1, …, C_n^n.

Hai kết quả thường dùng

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \qquad (1)$$

$$(1 - x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k \qquad (2)$$

- **Ví dụ :** Chứng minh a) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Giải

a) Viết lại đẳng thức (1) chọn x = 1 ta được điều phải chứng minh.

b) Viết lại đẳng thức (2) chọn x = 1 ta được điều phải chứng minh .

2. Tìm số hạng đứng trước x^i (i đã cho) trong khai triển nhị thức Newton của một biểu thức cho sẵn

- **Ví dụ :** Giả sử số hạng thứ k + 1 của $(a + b)^n$ là $C_n^k a^{n-k} b^k$ .Tính số hạng thứ 13 trong khai triển $(3 - x)^{15}$.

Giải

Ta có :

$$(3 - x)^{15} = C_{15}^0 3^{15} - C_{15}^1 3^{14} x + \ldots + C_{15}^k 3^{15-k}.(-x)^k + \ldots + -C_{15}^{15} x^{15}$$

Do k = 0 ứng với số hạng thứ nhất nên k = 12 ứng với số hạng thứ 13

Vậy số hạng thứ 13 của khai triển trên là :

$$C_{15}^{12} 3^3 (-x)^{12} = 27x^{12}.\ \frac{15!}{12!3!} = 12.285x^{12}.$$

3. Đối với bài toán tìm số hạng độc lập với x trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$ (a, b chứa x), ta làm như sau :

- Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_n^k a^{n-k} b^k = c_m.\ x^m.$$

- Số hạng độc lập với x có tính chất : m = 0 và $0 \le k \le n, k \in N$. Giải phương trình này ta được $k = k_0$. Suy ra, số hạng độc lập với x là $C_n^{k_0}\ a^{n-k_0}\ b^{k_0}$.

- **Ví dụ :** Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển nhị thức $\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{x}\right)^{18}$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_{18}^k\left(\frac{x}{2}\right)^{18-k}.\left(\frac{4}{x}\right)^k = C_{18}^k 2^{k-18}.2^{2k}.x^{18-k}.x^{-k} = C_{18}^k 2^{3k-18}.x^{18-2k}$$

Số hạng độc lập với x trong khai triển nhị thức có tính chất :

$$18 - 2k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 9$$

Vậy, số hạng cần tìm là : $C_{18}^9.2^9$.

4. Đối với bài toán tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$ với a, b chứa căn, ta làm như sau :

– Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_n^k a^{n-k} b^k = K c^{\frac{m}{p}}.d^{\frac{n}{q}} \text{ với } c, d \in ¤$$

– Số hạng hữu tỷ có tính chất : $\frac{m}{p} \in N$ và $\frac{n}{q} \in N$ và $0 \le k \le n, k \in N$.

Giải hệ trên, ta tìm được $k = k_0$. Suy ra số hạng cần tìm là :

$$C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}.$$

- **Ví dụ :** Tìm số hạng hữu tỷ trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt{3}\right)^7$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức là :

$$C_7^k\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{7-k}.\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^k = C_7^k.16^{\frac{7-k}{3}}.3^{\frac{k}{2}}.$$

Số hạng hữu tỷ trong khai triển có tính chất :

$$\begin{cases} \dfrac{7-k}{3} \in N \\ \dfrac{k}{2} \in N \\ 0 \le k \le 7, k \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-k = 3m \\ k \text{ chẵn} \\ 0 \le k \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7-3m \ \ (m \in Z) \\ k \text{ chẵn} \\ 0 \le k \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4$$

Vậy, số hạng cần tìm là : $C_{17}^4.16.3^2$.

Bài 120. Khai triển $(3x - 1)^{16}$.

Suy ra $\quad 3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}\ C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \ldots + C_{16}^{16} = 2^{16}$.

Đại học Bách khoa Hà Nội 1998

Giải

Ta có : $\quad (3x - 1)^{16} = \sum_{i=0}^{16}(3x)^{16-i}(-1)^i.C_{16}^i$

$$= C_{16}^0(3x)^{16} - C_{16}^1(3x)^{15} + C_{16}^2(3x)^{14} + \ldots + C_{16}^{16}.$$

Chọn x = 1 ta được :

$$2^{16} = C_{16}^0 3^{16} - C_{16}^1 3^{15} + C_{16}^2 3^{14} - \ldots + C_{16}^{16}.$$

Bài 121. Chứng minh :

a) $\quad 2^nC_n^0 + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + \ldots + C_n^n = 3^n$

b) $\quad 3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 + \ldots + (-1)^nC_n^n = 2^n$.

Giải

a) Ta có : $(x + 1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + \ldots + C_n^n$.

Chọn x = 2 ta được :

$$3^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + \ldots + C_n^n.$$

b) Ta có : $(x - 1)^n = C_n^0x^n - C_n^1x^{n-1} + \ldots + (-1)^nC_n^n$.

Chọn x = 3 ta được :

$$2^n = 3^nC_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 + \ldots + (-1)^nC_n^n.$$

Bài 122. Chứng minh : $\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k = 2(2^{n-1} - 1)$; $\qquad \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k = 0$.

Đại học Lâm nghiệp 2000

Giải

Ta có : $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ (*)

Chọn x = 1 ta được

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n - 2 = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k$$

Trong biểu thức (*) chọn x = – 1 ta được $0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k$.

Bài 123. Chứng minh : $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$

Đại học Hàng hải 2000

Giải

Ta có : $(1 + x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (1)

$(1 - x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... - C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (2)

Lấy (1) + (2) ta được :

$$(1 + x)^{2n} + (1 - x)^{2n} = 2\left[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}\right]$$

Chọn x = 3 ta được :

$$4^{2n} + (-2)^{2n} = 2\left[C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{4n} + 2^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{2n}(2^{2n} + 1)}{2} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{2n-1}(2^{2n} + 1) = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + ... + C_{2n}^{2n} 3^{2n}$$

Bài 124. Tìm hệ số đứng trước x^5 trong khai triển biểu thức sau đây thành đa thức :

$$f(x) = (2x + 1)^4 + (2x + 1)^5 + (2x + 1)^6 + (2x + 1)^7.$$

Đại học Kiến trúc Hà Nội 1998

Giải

Ta có : $(2x + 1)^4 = \sum_{i=0}^{4} C_4^i (2x)^{4-i}$; $(2x + 1)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (2x)^{5-i}$

$(2x + 1)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i (2x)^{6-i}$; $(2x + 1)^7 = \sum_{i=0}^{7} C_7^i (2x)^{7-i}$

Vậy số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^4$ là 0.

số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^5$ là $C_5^0(2x)^5$.

số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^6$ là $C_6^1(2x)^5$.

số hạng chứa x^5 của $(2x + 1)^7$ là $C_7^2(2x)^5$.

Do đó hệ số cần tìm là $= 0 + C_5^0 2^5 + C_6^1 2^5 + C_7^2 2^5$

$= (1 + C_6^1 + C_7^2)2^5 = 28 \times 32 = 896.$

Bài 125. Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ biết rằng

$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n + 3).$

Tuyển sinh Đại học khối A 2003

Giải

Ta có : $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n + 3)$ (với $n \in N$)

$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \frac{(n+3)!}{3!n!} = 7(n + 3)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 7(n + 3)$

$\Leftrightarrow \quad (n + 4)(n + 2) - (n + 2)(n + 1) = 42$

$\Leftrightarrow \quad (n^2 + 6n + 8) - (n^2 + 3n + 2) = 42$

$\Leftrightarrow \quad 3n = 36$

$\Leftrightarrow \quad n = 12.$

Ta có : $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i (x^{-3})^{12-i}.(x^{\frac{5}{2}})^i = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i x^{-36+\frac{11}{2}i}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $-36 + \frac{11}{2}i = 8$ (với $i \in N$ và $0 \le i \le 12$)

$\Leftrightarrow$ $\frac{11i}{2} = 44$ $\Leftrightarrow$ $i = 8$ (thỏa điều kiện).

Vậy số hạng chứa x^8 là

$$C_{12}^8 x^8 = \frac{12!x^8}{8!4!} = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2}x^8 = 495x^8.$$

Bài 126. Biết rằng tổng các hệ số của khai triển $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2000

Giải

Ta có : $(x^2 + 1)^n = C_n^0(x^2)^n + C_n^1(x^2)^{n-1} + ... + C_n^i(x^2)^{n-i} + ... + C_n^n$

Theo giả thiết bài toán, ta được

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^i + ... + C_n^n = 1024$$

$\Leftrightarrow$ $2^n = 1024 = 2^{10}$ $\Leftrightarrow$ $n = 10$

Để tìm hệ số a đứng trước x^{12} ta phải có

$2(n - i) = 12$ $\Leftrightarrow$ $10 - i = 6$ $\Leftrightarrow$ $i = 4$

Vậy $a = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = 210.$

Bài 127. Tìm hệ số đứng trước x^4 trong khai triển $(1 + x + 3x^2)^{10}$.

Giải

Ta có :

$$(1 + x + 3x^2)^{10} = [1 + x(1 + 3x)]^{10}$$

$$= C_{10}^0 + C_{10}^1x(1+3x) + C_{10}^2x^2(1+3x)^2 + C_{10}^3x^3(1+3x)^3 +$$

$$C_{10}^4x^4(1+3x)^4 + ... + C_{10}^{10}(1+3x)^{10}$$

Hệ số đứng trước x^4 trong khai triển chỉ có trong $C_{10}^2x^2(1+3x)^2$, $C_{10}^3x^3(1+3x)^3$, $C_{10}^4x^4(1+3x)^4$ đó là :

$$C_{10}^2 9 + C_{10}^3 9 + C_{10}^4 = 9.\frac{10!}{8!2!} + 9\frac{10!}{3!7!} + \frac{10!}{6!4!}$$

$$= 405 + 1080 + 210 = 1695.$$

Bài 128. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $[1 + x^2(1 - x)]^8$.

Tuyển sinh Đại học khối A 2004

Giải

Ta có :

$$[1 + x^2(1 - x)]^8 = C_8^0 + C_8^1x^2(1-x) + C_8^2x^4(1-x)^2 +$$

$$+ \ C_8^3x^6(1-x)^3 + C_8^4x^8(1-x)^4 + C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6 +$$

$$+ \ C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8$$

Số hạng chứa x^8 trong khai triển trên chỉ có trong $C_8^3x^6(1-x)^3$ và $C_8^4x^8(1-x)^4$ đó là $C_8^3x^6.3x^2$ và $C_8^4x^8$

Vậy hệ số của x^8 là : $3C_8^3 + C_8^4 = 238$.

Bài 129. Cho $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + \ldots$

$$+ \ldots + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n.$$

Biết rằng $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n. Tìm n và x.

Tuyển sinh Đại học khối A 2002

Giải

Ta có : $C_n^3 = 5C_n^1$ (điều kiện $n \in N$ và $n \geq 3$)

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 5\dfrac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 30 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$

$\Leftrightarrow n = 7 \vee n = -4$ (loại do $n \geq 3$) $\Leftrightarrow n = 7$

Ta có : $a_4 = 20n = 140$

$\Leftrightarrow C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4.\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 140 \Leftrightarrow \dfrac{7!}{3!4!}2^{x-2} = 140$

$\Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4.$

Bài 130. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

Đại học Kinh tế Quốc dân 1997

Giải

Ta có :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12} = C_{12}^{0}x^{12}+C_{12}^{1}x^{11}\left(\frac{1}{x}\right)+...+C_{12}^{i}x^{12-i}\left(\frac{1}{x}\right)^{i}+...+C_{12}^{12}\frac{1}{x^{12}}$$

Để số hạng không chứa x ta phải có

$$x^{12-i}\left(\frac{1}{x}\right)^{i}=x^{0} \Leftrightarrow \quad x^{12-2i}=x^{0} \quad \Leftrightarrow \quad 12-2i=0 \quad \Leftrightarrow \quad i=6$$

Vậy số hạng cần tìm là : $C_{12}^{6}=\frac{12!}{6!6!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2}=924.$

Bài 131. Tìm số hạng không chứa x (với x > 0) trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$

Tuyển sinh Đại học khối D 2004

Giải

Ta có : $$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)^{7}$$

$$= C_{7}^{0}(x^{\frac{1}{3}})^{7}+C_{7}^{1}(x^{\frac{1}{3}})^{6}(x^{-\frac{1}{4}})+...+C_{7}^{i}(x^{\frac{1}{3}})^{7-i}(x^{-\frac{1}{4}})^{i}+...+C_{7}^{7}(x^{-\frac{1}{4}})^{7}$$

Để tìm số hạng không chứa x ta phải có

$$\frac{1}{3}(7-i)-\frac{1}{4}i=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(7-i)-3i=0 \quad \Leftrightarrow \quad 28-7i=0$$

$$\Leftrightarrow \quad i=4$$

Vậy số hạng không chứa x là $C_{7}^{4}=\frac{7!}{4!3!}=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35.$

Bài 132. Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{n}$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc x biết rằng $C_{n}^{n}+C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n-2}=79$.

Đại học sư phạm Hà Nội 2 năm 2000

Giải

Ta có : $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 79 \quad \Leftrightarrow \quad n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 78$

$\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 156 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = -13 \ \vee \ n = 12$

Do $n \in N$ nên $n = 12$.

Ta có : $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12} = \left(x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}$

$$= \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-i} .x^{-\frac{28}{15}i} = \sum_{i=0}^{12} C_{12}^i x^{16-\frac{16}{5}i}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \ 16 - \dfrac{16}{5}i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = 5$

Vậy số hạng cần tìm $C_{12}^5 = \dfrac{12!}{5!7!} = 792.$

Bài 133. Trong khai triển sau đây có bao nhiêu số hạng hữu tỉ: $\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5}\right)^{124}$

Giải

Ta có : $\left(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5}\right)^{124} = \left(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{4}}\right)^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{124-k} .(-5^{\frac{1}{4}})^k$

$$= \sum_{k=0}^{124} (-1)^k C_{124}^k 3^{62-\frac{k}{2}}.5^{\frac{k}{4}}$$

Số hạng thứ k là hữu tỉ

$$\begin{cases} 62-\dfrac{k}{2}\in N \\ \dfrac{k}{4}\in N \\ k\in N \\ 0\le k\le 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le k\le 124 \\ \dfrac{k}{4}\in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i\in N \\ 0\le k\le 124 \\ k=4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i\in N \\ 0\le i\le 31 \\ k=4i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad i \in \{0,1,...,31\}$$

Do đó trong khai triển trên có 32 số hạng hữu tỉ.

Bài 134*. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của

$$(x^2+1)^n.(x+2)^n.$$

Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Tuyển sinh Đại học khối D 2003

Giải

Ta có : $(x^2+1)^n.(x+2)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (x^2)^{n-i} . \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}.2^k$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^i C_n^k 2^k.x^{3n-2i-k}$$

Do yêu cầu bài toán nên $3n-3 = 3n-(2i+k)$

$\Rightarrow \quad 2i+k=3$

Do i, k $\in$ N và i, k $\in$ [0, n] nên $\begin{cases} i=0 \\ k=3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} i=1 \\ k=1 \end{cases}$

Vậy $a_{3n-3} = C_n^0 C_n^3 2^3 + C_n^1 C_n^1 2^1 = 26n$

$\Leftrightarrow \quad 8 . \dfrac{n!}{3!(n-3)!} + 2n^2 = 26n$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{4}{3}n(n-1)(n-2) + 2n^2 = 26n$

$\Leftrightarrow \quad 2(n-1)(n-2) + 3n = 39 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 - 3n - 35 = 0$

$\Leftrightarrow \quad n = 5 \ \vee \ n = -\dfrac{7}{2}$ (loại do n $\in$ N) $\Leftrightarrow \quad n = 5.$

Bài 135*. Trong khai triển $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_9x^9 + a_{10}x^{10} \ (a_k \in R)$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Đại học Sư phạm Hà Nội 2001

Giải

Ta có : $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}(1+2x)^{10} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^k$

Do đó : $a_k = \frac{1}{3^{10}} C_{10}^k 2^k$

Ta có : a_k đạt max $\Rightarrow$ $\begin{cases} a_k \ge a_{k-1} \\ a_k \ge a_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{10}^k 2^k \ge C_{10}^{k-1} 2^{k-1} \\ C_{10}^k 2^k \ge C_{10}^{k+1} 2^{k+1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \ge \dfrac{2^{k-1}.10!}{(k-1)!(11-k)!} \\ \dfrac{2^k 10!}{k!(10-k)!} \ge \dfrac{2^{k+1}.10!}{(k+1)!(9-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{11-k} \\ \dfrac{1}{10-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3} \le k \le \frac{22}{3}$$

Do $k \in N$ và $k \in [0, 10]$ nên $k = 7$.Hiển nhiên a_k tăng khi $k \in [0, 7]$, và a_k giảm khi $k \in [7, 10]$.

Vậy max $a_k = a_7 = \frac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$.

(còn tiếp)

PHẠM HỒNG DANH - NGUYỄN VĂN NHÂN - TRẦN MINH QUANG
(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và luyện thi đại học Vĩnh Viễn)

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Chương V

NHỊ THỨC NEWTON *(phần 2)*

Dạng 2:

ĐẠO HÀM HAI VẾ CỦA KHAI TRIỂN NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC

– Viết khai triển Newton của $(ax + b)^n$.

– Đạo hàm 2 vế một số lần thích hợp .

– Chọn giá trị x sao cho thay vào ta được đẳng thức phải chứng minh.

Chú ý :

- Khi cần chứng minh đẳng thức chứa kC_n^k ta đạo hàm hai vế trong khai triển $(a + x)^n$.
- Khi cần chứng minh đẳng thức chứa $k(k-1)C_n^k$ ta đạo hàm 2 lần hai vế của khai triển $(a + x)^n$.

Bài 136. Chứng minh :

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$

b) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$

c) $2^{n-1}C_n^1 - 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = n$.

Giải

Ta có nhị thức

$$(a + x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n.$$

Đạo hàm 2 vế ta được :

$$n(a + x)^{n-1} = C_n^1a^{n-1} + 2C_n^2a^{n-2}x + 3C_n^3a^{n-3}x^2 + ... + nC_n^nx^{n-1}$$

a) Với a = 1, x = 1, ta được :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$$

b) Với a = 1, x = –1, ta được :

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$$

c) Với a = 2, x = –1, ta được :

$$2^{n-1}C_n^1 - 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}nC_n^n = n.$$

Bài 137. Cho $(x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}$. Tính :

a) a_{97}

b) $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$

c) $M = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$

Đại học Hàng hải 1998

Giải

Ta có :

$(x - 2)^{100} = (2 - x)^{100}$

$$= C_{100}^0 2^{100} - C_{100}^1 2^{99}.x + ... + C_{100}^k 2^{100-k}(-x)^k + ... + C_{100}^{100}x^{100}$$

a) Ứng với k = 97 ta được a_{97}.

Vậy $a_{97} = C_{100}^{97} 2^3(-1)^{97}$

$$= -8.\frac{100!}{3!97!} = \frac{-8\times100\times99\times98}{6} = -1\ 293\ 600$$

b) Đặt $f(x) = (x - 2)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}$

Chọn x = 1 ta được

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = (-1)^{100} = 1.$$

c) Ta có : $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + 100a_{100}x^{99}$

Mặt khác $f(x) = (x - 2)^{100}$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 100(x - 2)^{99}$

Vậy $100(x - 2)^{99} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + 100a_{100}x^{99}$

Chọn x = 1 ta được

$$M = a_1 + 2a_2 + \ldots + 100a_{100} = 100(-1)^{99} = -100.$$

Bài 138. Cho $f(x) = (1 + x)^n$ với $n \geq 2$.

a) Tính $f''(1)$

b) Chứng minh

$$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$$

Đại học An ninh 1998

Giải

a) Ta có : $f(x) = (1 + x)^n$

$\Rightarrow \quad f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$

$\Rightarrow \quad f''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2}$

Vậy $\quad f''(1) = n(n-1)2^{n-2}$.

b) Do khai triển nhị thức Newton

$$f(x) = (1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + C_n^4x^4 + ... + C_n^nx^n$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + 4x^3C_n^4 + ... + nx^{n-1}C_n^n$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2} = 2C_n^2 + 6xC_n^3 + 12x^2C_n^4 + ... + n(n-1)x^{n-2}C_n^n$$

Chọn x = 1 ta được

$$n(n-1)2^{n-2} = 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n.$$

Bài 139. Chứng minh

$$2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 + 4.2^{n-4}C_n^4 + ... + nC_n^n = n3^{n-1}.$$

Đại học Kinh tế Quốc dân 2000

Giải

Ta có :

$$(2 + x)^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1}x + C_n^2 2^{n-2}x^2 + C_n^3 2^{n-3}x^3 + ... + C_n^nx^n$$

Đạo hàm 2 vế ta được

$$n(2 + x)^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + 2xC_n^2 2^{n-2} + 3x^2C_n^3 2^{n-3} + ... + nx^{n-1}C_n^n$$

Chọn x = 1 ta được

$$n3^{n-1} = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 3C_n^3 2^{n-3} + ... + nC_n^n.$$

Bài 140. Chứng minh $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + ... + nC_n^n = n4^{n-1}$.

Đại học Luật 2001

Giải

Ta có :

$$(3+x)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1}x + C_n^2 3^{n-2}x^2 + C_n^3 3^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^n x^n$$

Đạo hàm 2 vế ta được

$$n(3+x)^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2xC_n^2 3^{n-2} + 3x^2 C_n^3 3^{n-3} + \ldots + nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = 1

$$\Rightarrow \quad n4^{n-1} = C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + \ldots + nC_n^n.$$

Bài 141. Tính $A = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n$

Đại học Bách khoa Hà Nội 1999

Giải

Ta có :

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2xC_n^2 - 3x^2 C_n^3 + \ldots + (-1)^n nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = 1 ta có :

$$0 = -C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \ldots + (-1)^n nC_n^n$$

$$\Rightarrow \quad A = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$$

Bài 142. Chứng minh với $n \in N$ và $n > 2$

$$\frac{1}{n}(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n) < n! \qquad (*)$$

Giải

Ta có : $\quad (1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2 C_n^2 + \ldots + x^n C_n^n$

Lấy đạo hàm theo x hai vế ta được :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + \ldots + nx^{n-1} C_n^n$$

Chọn x = 1 ta được

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{n}(n.2^{n-1}) < n!$ $\Leftrightarrow$ $2^{n-1} < n!$ (**)

Kết quả (**) sẽ được chứng minh bằng qui nạp

(**) đúng khi n = 3. Thật vậy $4 = 2^2 < 3! = 6$

Giả sử (**) đúng khi n = k với k > 3 nghĩa là ta đã có : $k! > 2^{k-1}$

Vậy $(k + 1)k! > (k + 1)2^{k-1}$

$\Leftrightarrow$ $(k + 1)! > 2 . 2^{k-1} = 2^k$ (do k > 3 nên k + 1 > 4)

Do đó (**) đúng khi n = k + 1.

Kết luận : $2^{n-1} < n!$ đúng với $\forall n \in N$ và $n > 2$.

Bài 143. Chứng minh

a) $1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

b) $1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = 0$

c) $2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)3^{n-2}$

d) $2^{n-1}C_n^2 - 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 - ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = n(n-1)$.

Giải

Ta có nhị thức

$$(a + x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n .$$

Đạo hàm 2 vế 2 lần , ta được :

$$n(n-1)(a + x)^{n-2} = 1.2C_n^2a^{n-2} + 2.3C_n^3a^{n-3}x + ... + (n-1)nC_n^nx^{n-2}$$

a) Với a = 1, x = 1, ta được :

$$1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)2^{n-2}$$

b) Với a = 1, x = – 1, ta được :

$$1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = 0$$

c) Với a = 2, x = 1, ta được :

$$1.2.2^{n-2}C_n^2 + 2.3.2^{n-3}C_n^3 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)3^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{n-1}C_n^2 + 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 + ... + (n-1)nC_n^n = n(n-1)3^{n-2}$$

d) Với a = 2, x = –1, ta được :

$$1.2.2^{n-2}C_n^2 - 2.3.2^{n-3}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 - ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{n-1}C_n^2 - 3.2^{n-2}C_n^3 + 3.4.2^{n-4}C_n^4 - ... + (-1)^{n-2}(n-1)nC_n^n = n(n-1).$$

Bài 144. Chứng minh :

a) $3C_n^0 + 4C_n^1 + ... + (n+3)C_n^n = 2^{n-1}(6+n)$.

b) $3C_n^0 - 4C_n^1 + ... + (-1)^n(n+3)C_n^n = 0$.

Giải

Ta có nhị thức $(a + x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n$

Nhân 2 vế với x^3, ta được :

$$x^3(a + x)^n = C_n^0a^nx^3 + C_n^1a^{n-1}x^4 + C_n^2a^{n-2}x^5 + ... + C_n^nx^{n+3}.$$

Đạo hàm 2 vế, ta được :

$$3x^2(a + x)^n + nx^3(a + x)^{n-1} = 3C_n^0a^nx^2 + 4C_n^1a^{n-1}x^3 + ... + (n+3)C_n^nx^{n+2}.$$

a) Với a = 1, x = 1, ta được :

$$3C_n^0 + 4C_n^1 + ... + (n+3)C_n^n = 3.2^n + n2^{n-1} = 2^{n-1}(6+n).$$

b) Với a = 1, x = –1, ta được :

$$3C_n^0 - 4C_n^1 + ... + (-1)^n(n+3)C_n^n = 0 .$$

Dạng 3:

TÍCH PHÂN HAI VẾ CỦA NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC

+ Viết khai triển Newton của $(ax + b)^n$.
+ Lấy tích phân xác định hai vế thường là trên các đoạn : [0, 1], [0, 2] hay [1, 2] ta sẽ được đẳng thức cần chứng minh.

Chú ý :

- Cần chứng minh đẳng thức chứa $\frac{C_n^k}{k+1}$ ta lấy tích phân với cận thích hợp hai vế trong khai triển của $(a + x)^n$.

- Cần chứng minh đẳng thức chứa $\frac{1}{k+m+1}C_n^k$ ta lấy tích phân với cận thích hợp hai vế trong khai triển của $x^m(a+x)^n$.

Bài 145. Cho $n \in N$ và $n \geq 2$.

a) Tính $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$

b) Chứng minh : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3(n+1)}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

Đại học Mở 1999

Giải

a) Ta có : $I = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^3)^n d(x^3+1)$

$$I = \frac{1}{3}.\left.\frac{(1+x^3)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{3(n+1)}\left[2^{n+1}-1\right].$$

b) Ta có : $(1+x^3)^n = C_n^0 + C_n^1x^3 + C_n^2x^6 + ... + C_n^nx^{3n}$

$\Rightarrow \quad x^2(1+x^3)^n = x^2C_n^0 + x^5C_n^1 + x^8C_n^2 + ... + x^{3n+2}C_n^n$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được :

$$I = \left[\frac{x^3}{3}C_n^0 + \frac{x^6}{6}C_n^1 + \frac{x^9}{9}C_n^2 + ... + \frac{x^{3n+3}}{3n+3}\right]_0^1$$

Vậy : $\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} = \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n$

Bài 146. Chứng minh $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Đại học Giao thông Vận tải 2000

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$

Vậy $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + ... + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$$

Bài 147. Tính : $C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

Tuyển sinh Đại học khối B 2003

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \ldots + C_n^nx^n$

Vậy $\int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \ldots + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \left[C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + C_n^3\frac{x^4}{4} + \ldots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{n+1} = C_n^0[x]_1^2 + \frac{1}{2}C_n^1\left[x^2\right]_1^2 + \frac{1}{3}C_n^2\left[x^3\right]_1^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n\left[x^{n+1}\right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + C_n^1\frac{2^2-1}{2} + C_n^2\frac{2^3-1}{3} + \ldots + C_n^n\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Bài 148. Chứng minh :

$$2C_n^0 - \frac{1}{2}2^2.C_n^1 + \frac{1}{3}2^3.C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$$

Đại học Giao thông Vận tải 1996

Giải

Ta có : $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + (-1)^nC_n^nx^n$

Vậy $\int_0^2 (1-x)^n dx = \int_0^2 \left(C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + (-1)^nC_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \quad \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 = \left[C_n^0x - \frac{1}{2}x^2C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}C_n^n\right]_0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} = 2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n2^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1+(-1)^n}{n+1} = 2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n2^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

Bài 149. Chứng minh :

a) $(-1)^n C_n^0 + (-1)^{n-1}\frac{1}{2}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

b) $C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + ... + (-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$.

Giải

Ta có nhị thức

$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n$.

Vậy : $\int_0^1 (a+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + ... + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \left.\left(C_n^0a^nx + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1}x^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = C_n^0a^n + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1} + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

a) Với $a = -1$, ta được :

$$(-1)^n C_n^0 + (-1)^{n-1}\frac{1}{2}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{-(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

b) Ta có nhị thức

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + ... + C_n^nx^n.$$

Vậy $\int_0^{-1} (a+x)^n dx = \int_0^{-1} \left(C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + ... + C_n^nx^n\right)dx$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^{-1} = \left.\left(C_n^0a^nx + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1}x^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-1)^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} = -C_n^0a^n + \frac{1}{2}C_n^1a^{n-1} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Với a = 1, ta được :

$$-C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{-1}{n+1}.$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + ... + (-1)^n\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}.$$

Bài 150. Tính $\int_0^1 x(1-x)^{19}dx$

Rút gọn $S = \frac{1}{2}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + \frac{1}{4}C_{19}^2 + ... + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$

Đại học Nông nghiệp Hà Nội 1999

Giải

- Đặt $t = 1 - x \quad \Rightarrow \quad dt = -dx$

  Đổi cận

x	0	1
t	1	0

  Vậy $I = \int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \int_1^0 (1-t)t^{19}(-dt)$

  $\Leftrightarrow \quad I = \int_0^1 (t^{19} - t^{20})dt = \left.\frac{1}{20}t^{20} - \frac{1}{21}t^{21}\right]_0^1 = \frac{1}{20} - \frac{1}{21} = \frac{1}{420}$

- Ta có : $(1-x)^{19} = C_{19}^0 - C_{19}^1 x + C_{19}^2 x^2 + ... + C_{19}^{18}x^{18} - C_{19}^{19}x^{19}$

  $\Rightarrow \quad x(1-x)^{19} = xC_{19}^0 - C_{19}^1 x^2 + C_{19}^2 x^3 + ... + C_{19}^{18}x^{19} - C_{19}^{19}x^{20}$

  Vậy $I = \int_0^1 x(1-x)^{19}dx = \left[\frac{x^2}{2}C_{19}^0 - \frac{x^3}{3}C_{19}^1 + ... + \frac{x^{20}}{20}C_{19}^{18} - \frac{x^{21}}{21}C_{19}^{19}\right]_0^1$

  $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{420} = \frac{1}{2}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + ... + \frac{1}{20}C_{19}^{18} - \frac{1}{21}C_{19}^{19}$

  Vậy $S = \frac{1}{420}$.

Bài 151.

a) Tính $\int_0^1 x(1-x^2)^n dx$

b) Chứng minh $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$

Đại học Bách khoa Hà Nội 1997

Giải

a) Ta có : $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2)$

$\Leftrightarrow \quad I = -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{2(n+1)}\left[0-1^{n+1}\right]$

$\Leftrightarrow \quad I = \frac{1}{2(n+1)}$.

b) Ta có :

$(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - C_n^3x^6 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n}$

$\Rightarrow \quad x(1-x^2)^n = xC_n^0 - C_n^1x^3 + C_n^2x^5 - C_n^3x^7 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$

Vậy $\quad I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \left[\frac{x^2}{2}C_n^0 - \frac{x^4}{4}C_n^1 + \frac{x^6}{6}C_n^2 - \frac{x^8}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2}C_n^n\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n$

Bài 152* .Chứng minh :

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + ... + \frac{1}{n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Giải

a) Ta có nhị thức

$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + ... + C_n^nx^n$

Suy ra : $x^2(a+x)^n = C_n^0a^nx^2 + C_n^1a^{n-1}x^3 + ... + C_n^nx^{n+2}$

Vậy $\quad \int_0^1 x^2(a+x)^n dx = \int_0^1\left(C_n^0a^nx^2 + C_n^1a^{n-1}x^3 + ... + C_n^nx^{n+2}\right)dx$

$= \frac{1}{3}C_n^0a^n + \frac{1}{4}C_n^1a^{n-1} + ... + \frac{1}{n+3}C_n^n$

Để tính tích phân ở vế trái, đặt $\quad t = a + x \quad \Rightarrow \quad dt = dx$

Đổi cận :

x	0	1
t	a	a + 1

Suy ra :

$$\int_0^1 x^2(a+x)^n dx = \int_a^{a+1}(t-a)^2 t^n dt$$

$$= \int_a^{a+1}(t^{n+2}-2at^{n+1}+a^2t^n)dt = \left(\frac{t^{n+3}}{n+3}-\frac{2at^{n+2}}{n+2}+\frac{a^2t^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_a^{a+1}$$

$$= \frac{(a+1)^{n+3}-a^{n+3}}{n+3}-\frac{2a\left[(a+1)^{n+2}-a^{n+2}\right]}{n+2}+\frac{a^2\left[(a+1)^{n+1}-a^{n+1}\right]}{n+1}$$

Với a = 1, ta được :

$$\int_0^1 x^2(a+x)^n dx = \frac{2^{n+3}-1}{n+3}-\frac{2(2^{n+2}-1)}{n+2}+\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$= 2^{n+1}\left(\frac{4}{n+3}-\frac{4}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2^{n+1}\frac{n^2+n+2}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Suy ra : $\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{4}C_n^1+\ldots+\frac{1}{n+3}C_n^n=\frac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

PHẠM HỒNG DANH - NGUYỄN VĂN NHÂN - TRẦN MINH QUANG

(Trung tâm Bồi dưỡng văn hóa và luyện thi đại học Vĩnh Viễn)