ĐẠI HỌC HUẾ
TRUNG TÂM GIẢNG DẠY VÀ THỰC HÀNH CƠ BẢN

BÀI GIẢNG

TOÁN CAO CẤP B1

PHẦN PHÉP TÍNH VI - TÍCH PHÂN.
LÝ THUYẾT CHUỖI
Dùng cho sinh viên các ngành:
Nông - Lâm - Ngư - Y khoa

Biên soạn: TS. Trần Bá Tịnh
TS. Nguyễn Vũ Tiến

Huế, 10 - 2006

Lời nói đầu

Được sự phân công giảng dạy của Ban giám đốc Trung tâm giáo dục và thực hành cơ bản, bộ môn Toán – Tin của chúng tôi thực hiện biên soạn bài giảng về các môn học Toán cao cấp B1 và B2. Bài giảng này nhằm cung cấp các kiến thức cơ bản về giải tích cổ điển cần cho các ngành sinh học, nông lâm, thổ nhưỡng, khoa học môi trường, thủy sản…. và một số ngành khoa học công nghệ khác.

Bài giảng được biên soạn theo đề cương chi tiết của bộ chương trình GIÁO DỤC HỌC ĐẠI CƯƠNG do Bộ Giáo Dục ban hành theo quyết định số 3244/GD-ĐT ngày 12/09/1995 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và đào tạo .

Bài giảng do tổ bộ môn Toán – Tin chúng tôi biên soạn trước mắt phục vụ cho đối tượng là là sinh viên các trường đã nêu, theo chương trình của dự án ở mức C trong Đại Học Huế.

Lần đầu tiên biên soạn theo yêu cầu đổi mới phương pháp giảng dạy, chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót, chúng tôi rất mong được sự trao đổi, đóng góp ý kiến của các đồng nghiệp để hoàn thiện bài giảng theo định hướng về một bài giảng chung môn học Toán cao cấp B1 và B2.

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương 1 **4**

Hàm số và giới hạn hàm số **4**

§1. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ....4

§2. HÀM SỐ....11

§3. DÃY SỐ VÀ GIỚI HẠN DÃY SỐ....22

§4. GIỚI HẠN HÀM SỐ....24

§5. SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ....29

Chương 2 **33**

Đạo hàm và vi phân **33**

§1. ĐẠO HÀM....33

§2. VI PHÂN....41

Chương 3 **43**

Tích phân không xác định **43**

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT....43

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP LẤY TÍCH PHÂN....44

KHÔNG XÁC ĐỊNH....44

§3. CÁC CÔNG THỨC TRUY HỒI....47

§4. TÍCH PHÂN CÁC HÀM HỮU TỈ....48

§5. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM VÔ TỈ DẠNG ĐƠN GIẢN....50

Chương 4 **51**

Tích phân xác định **51**

§1. ĐỊNH NGHĨA....51

§2. MỘT VÀI TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH....53

§3. ĐIỀU KIỆN KHẢ TÍCH CỦA HÀM LIÊN TỤC....56

§4. SỰ PHÂN CHIA KHOẢNG LẤY TÍCH PHÂN....57

_CẬN LẤY TÍCH PHÂN....57

I. Sự phân chia khoảng lấy tích phân....58

II. Cận lấy tích phân....58

§5. HÀM SỐ GIỚI HẠN TRÊN_GIỚI HẠN DƯỚI CỦA....59

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH....59

§6. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM....59

§7. BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH....61

I. Đổi biến trong tích phân xác định....61

II. Phương pháp tích phân từng phần....63

§8. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN....63

I. Tính diện tích miền phẳng....64
II. Tính thể tích....64
III. Tính độ dài cung....65
§9. TÍCH PHÂN SUY RỘNG....66
I. Tích phân suy rộng loại I (Khoảng lấy tích phân vô hạn)....66
II. Tích phân suy rộng loại II (hàm đạt giá trị ở vô cùng)....66
III. Các định lý so sánh....67
Chương 5 **68**
Chuỗi số **68**
§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC TÍNH CHẤT 68
ĐƠN GIẢN....68
§2. DẤU HIỆU HỘI TỤ CỦA CHUỖI DƯƠNG....70
§3. SỰ HỘI TỤ CỦA CHUỖI BẤT KÌ....73
I. Sự hội tụ tuyệt đối....73
II. Sự hội tụ của chuỗi đan dấu. Dấu hiệu Laibnit....74
§4. CHUỖI HÀM....74
I. Định nghĩa....74
II. Chuỗi lũy thừa....75
III. Chuỗi Taylo và ứng dụng....76

Chương 1

Hàm số và giới hạn hàm số

§1. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

I. Tập hợp - Các phép toán

1. *Tập hợp*

Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không có định nghĩa chung. Người ta thường mô tả tập hợp. Chẳng hạn, tập hợp học sinh trong mỗi lớp, tập hợp các số tự nhiên, các tập hợp số vô tỉ, số hữu tỉ, tập hợp các điểm của một đoạn thẳng, tập hợp các nghiệm của một phương trình …

Người ta kí hiệu tập hợp bằng các chữ in hoa: A, B, C…., X,Y..

Phần tử của tập hợp là vật (hay đối tượng nghiên cứu) nằm trong tập hợp. Kí hiệu các phần tử bằng các chữ thường a, b, c,…, x, y... Khi cho tập hợp A, phần tử a thuộc A được viết $a \in A$; phần tử b không thuộc A được viết $b \notin A$ (hay $b \bar{\in} A$).

Thí dụ:

1- Cho tập X= {1,2,3,4} thì $2 \in X$; $6 \notin X$

2- Gọi X là tập các nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 4 = 0$

$X:=\{x/ x^2 + 3x - 4 = 0\}$ thì $1 \in X$; $3 \notin X$

3- Các tập hợp số thường gặp N:={0, 1, 2, 3,…..} ; N^*:={1, 2, 3, 4…..}; Z; Q; R…

1.1. *Cách mô tả tập hợp*

Muốn mô tả tập hợp ta phải làm đủ rỏ để biết một phần tử nào đó có thuộc tập hợp của ta hay không. Thường có 2 cách:

1- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp vào trong dấu {}

Thí dụ: A:= {x,y,z,t} Tập hợp này có 4 phần tử x, y, z, t

Có nghĩa $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$, $t \in A$

Nhưng $u \notin A$, $v \notin A$

Việc liệt kê có thể triệt để hoặc không triệt để. Nếu liệt kê không triệt để ta có thể dùng dấu…

2- Nêu các tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp

Thí dụ: K là tập hợp các số chẵn dương

K:= {x/x∈ N, x chia hết cho 2}

Có nghĩa $4 \in K$ nhưng $5 \notin K$

1.2. *Tập con*

Cho hai tập A và B, nếu mỗi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói rằng A là một tập con của B và viết $A \subseteq B$; nếu A là con của B và B có ít nhất một phần tử không là phần tử của A thì ta nói rằng A là tập con thực sự của B và viết $A \subset B$

Nếu $A \subset B$ ta còn nói A bao hàm trong B ; B chứa A ; A là bộ phận của B.

Thí dụ: cho $A := \{x / x^2+3x-4 = 0\}$

$B := \{-4,1,2,3\}$ thì AB

$C := \{-4,1\}$ thì $A \subseteq C$

1.3. *Tập bằng nhau*

Cho hai tập A và B, ta nói rằng tập A bằng tập B và viết A=B nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$

Thí dụ: cho $A := \{x/x^2-5x+6=0\}$ và $B:= \{2,3\}$

Thì A = B

1.4. *Tập rỗng*

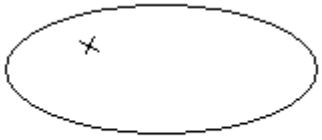
Theo quan niệm thông thường thì một tập hợp cần có ít nhất một phần tử mới có nghĩa. Tuy nhiên trong toán học để tiện cho việc lập luận người ta đưa thêm vào khái niệm tập rỗng viết là ϕ . Nó là tập không có phần tử nào và là tập con của bất kì tập hợp A nào, $\phi \subseteq A$

Thí dụ:

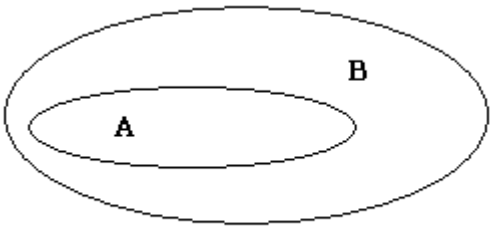
$\{x \square R / x^2+x+1 = 0\} = \square$

1.5. *Biểu diễn hình học- Biểu đồ Ven*

Để dễ hình dung một số quan hệ giữa các tập hợp người ta dùng biểu diễn hình học gọi là biểu đồ Ven .Xem tập hợp là tập điểm trong một hình vòng phẳng. Mỗi điểm trong vòng là một phần tử trong tập hợp (H.1). Khi đó quan hệ A□B được biểu diễn ở hình H.2



H.1



H.2

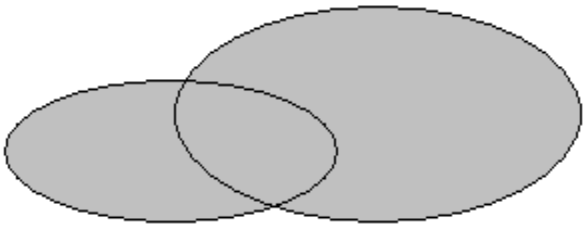
2. *Các phép toán về tập hợp*

2.1. *Phép hợp*

Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp C tạo bởi các phần tử thuộc A hoặc thuộc B

Kí hiệu: $C = A \cup B = \{x/ x \square A \text{ hoặc } x \square B\}$

Biễu diễn bằng biểu đồ ven trên H.3



H.3

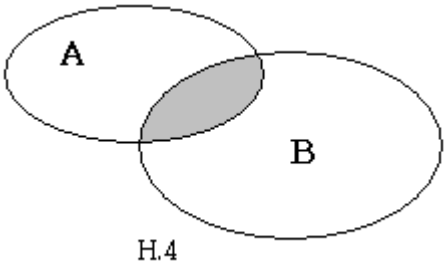
Mở rộng cho nhiều tập hợp A_ν : $\bigcup_\nu A_\nu = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$; $\nu = 1..n$

2.2. *Phép giao*

Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp C tạo bởi các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B

Kí hiệu: $C = A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}$

Giao $A \cap B$ biểu diễn bằng sơ đồ ven trên H.4



H.4

Mở rộng chonhiều tập hợp A_ν : $\bigcap_\nu A_\nu = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$; $\nu = 1..n$

Đặc biệt nếu $C = A \cap B = \emptyset$ ta nói rằng A và B rời nhau.

2.3. *Tính chất*

Các tính chất sau đối với các phép toán về tập hợp được suy từ định nghĩa:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Các tính chất trên đều được chứng minh bằng định nghĩa. Ta chứng minh tính chất đầu tiên.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ hoặc $x \in B \Rightarrow x \in B$ hoặc $x \in A$ $\Rightarrow x \in B \cap A$

$\Rightarrow A \cap B \subset B \cap A$

$x \in B \cap A \Rightarrow x \in B$ hoặc $x \in A \Rightarrow x \in A$ hoặc $x \in B$ $\Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow B \cap A \subset A \cap B$

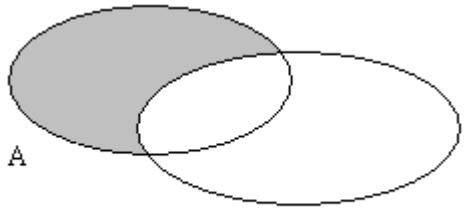
Vậy $A \cap B = B \cap A$

2.4. *Hiệu của hai tập hợp*

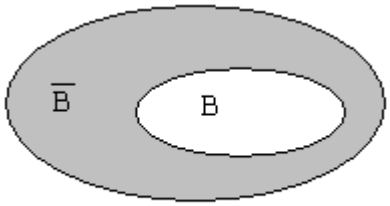
Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp C tạo bởi tất cả các phần tử vừa thuộc A mà không thuộc B

Kí hiệu: $C = A \backslash B := \{x / x \in A, x \notin B\}$

Hiệu $A \backslash B$ biểu diễn bằng sơ đồ ven trên H.5



H.5



H.6

A

Nếu B⊂ A thì A\B = $\overline{B}$ Gọi là phần bù của B trong A (H.6)

Kí hiệu: A\B = $\overline{B}$ = $C_A B$

2.5. *Tích Đề các*

Cho hai tập hợp A và B không rỗng , với mỗi a∈A và mỗi b∈B ta lập cặp (a,b) gọi là một cặp sắp xếp thứ tự với phần tử của tập A trước và phần tử của tập B sau , tích Đề các của tập A và tập B là tập C .

Kí hiệu: C= A x B và được đọc là "A tích Đềcác B" và biểu diễn :

C= A x B := {(a,b) \ a∈A,b∈B}

Thí dụ:

Cho A={a_1,a_2} B={b_1,b_2,b_3}

C=A x B = {(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)}

Mở rộng tích Đề các cho n tập hợp A_ν ,$\nu = \overline{1..n}$ là tập hợp các bộ có thứ tự (a_1,a_2,….,a_n) *trong đó a^ν ∈ A^ν

Kí hiệu: A_1 x A_2 x…..x A_n

Nếu A^ν = A với ∀ $\nu = \overline{1..n}$

thì a^ν ∈ A^ν và $\underbrace{A \times A \times A \times \ldots \times A}_{n}$ = A^n

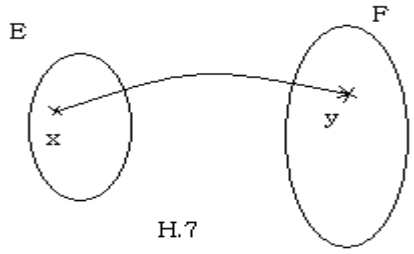
II. Ánh xạ

1. *Định nghĩa*

Ánh xạ từ tập E tới tập F là một quy luật f liên hệ giữa E và F sao cho với phần tử x∈E tạo ra duy nhất một phần tử y∈F

Kí hiệu: f: E→ F hay E $\xrightarrow{f}$ F

Và gọi E là tập nguồn, F là tập đích



H.7

Phần tử y∈F được tạo ra từ phần tử x∈E bởi quy luật f gọi là ảnh của x và x gọi là tạo ảnh (hay nghịch ảnh) của y. Ta viết:

y =f(x)

hay x→ y=f(x) hay x $\xrightarrow{f}$ y

f(x) đọc là "f của x" hay "f tại x"

Chú ý rằng mỗi phần tử x∈E có duy nhất một ảnh y∈F nhưng mỗi y∈F có thể có nhiều tạo ảnh hoặc không có tạo ảnh nào .

Tập tạo bởi các tạo ảnh của tất cả các phần tử x∈E gọi là ảnh của E qua F và viết là f(E).

f(E):= {y / y=f(x), x∈E}

Ta luôn có: f(E) ⊂ F

Thí dụ:

E là tập các sinh viên trong một lớp học

F là tập tên gọi.

Khi đó có thể xảy ra các trường hợp: mỗi sinh viên có một tên và các tên đó khác nhau hoặc là có một số sinh viên cùng tên hoặc có những tên mà không có sinh viên nào đặt cả.

2. *Đơn ánh*

Định nghĩa: Ánh xạ f: E→F được gọi là đơn ánh nếu với $x_1 \neq x_2$ là hai phần tử của E thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ (1-1)

Và $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ (1-1)'

Thí dụ:

1. Ánh xạ f: R → R cho bởi quy luật $x^3=y$ có nghiệm $x=\sqrt[3]{y}$ là một đơn ánh.

2. Ánh xạ f: R→ R^+ cho bởi $x^2=y$ có hai nghiệm khác nhau .Vậy ánh xạ này không là đơn ánh.

3. *Toàn ánh*

Định nghĩa: Ánh xạ f: E → F là một toàn ánh nếu f(E) = F và ta gọi f là ánh xạ từ E lên F.

Để kiểm tra f có phải là toàn ánh không ta chỉ cần kiểm tra xem với y∈ F bất kì có tồn tại nghịch ảnh hay không.

Thí dụ:

1. f : R→ R cho bởi $x^3=y$ Ánh xạ này là một toàn ánh .
2. f : R→ R cho bởi $x^2=y$ Ánh xạ này không là toàn ánh .
3. f : R→ R^+ cho bởi $x^2=y$ Ánh xạ này là một toàn ánh .

4. *Song ánh*

Định nghĩa: Ánh xạ f: E→ F gọi là một song ánh nếu nó vừa đơn ánh vừa toàn ánh.

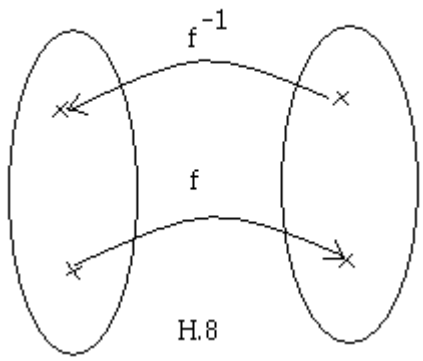
Thí dụ:

1. f : R→ R cho bởi $x^3=y$ Ánh xạ này là một song ánh .
2. f : R→ R^+ cho bởi $x^2=y$ Ánh xạ này không là song ánh .

5. *Ánh xạ ngược của một song ánh – Tương ứng 1-1*

Xét 2 tập E và F và f là một song ánh từ E lên F. Vì f là song ánh nên với phần tử y∈F sẽ tồn tại duy nhất x∈E ứng với nó theo một quy luật nào đó nên nó cũng là một ánh xạ.

Định nghĩa: Song ánh f: E→ F tạo ra một ánh xạ từ F tới E. Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f và kí hiệu là: f^{-1}



H.8

f^{-1}: F → E với đặc điểm là:

nếu f(x) = y thì $f^{-1}(y)=x$ (x□E,y□F)

nếu $f^{-1}(y)=x$ thì f(x)=y (y□F,x□E)

Theo định nghĩa f^{-1} cũng là một song ánh .

Thí dụ:

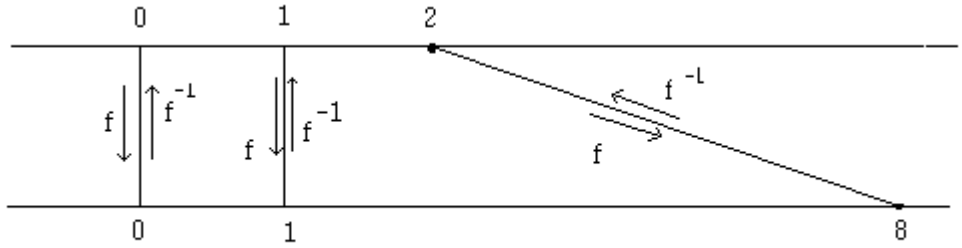
Song ánh f: R → R xác định bởi $y = x^3$

R ∋ x —f→ $y=x^3$ □R

Có ánh xạ ngược f^{-1} : R → R xác định bởi $x=\sqrt[3]{y}$

R ∋ y —f^{-1}→ $x=\sqrt[3]{y}$ □R

Song ánh này tạo ra môt tương ứng 1-1 giữa R và R



H.9

6. *<u>Hợp (Tích của 2 ánh xạ)</u>*

Cho 3 tập hợp X,Y,Z và hai ánh xạ f và g

f : X —→ Y, g :Y —→ Z x□X; f(x) = y□Y duy nhất

y□Y, g(y) = z □Z duy nhất

Như vậy với mỗi x□X tạo ra duy nhất z□Z .Theo định nghĩa quy luật này là một ánh xạ. Ta viết g[f(x)] = z

X ∋ x —→ z = g[f(x)] □Z

<u>Định nghĩa</u>: Ánh xạ hợp (tích) của hai ánh xạ f và g từ tập X tới tập Z (qua trung gian Y) gọi là hợp của f và g (hay tích của f và g).

Kí hiệu: gof

Thí dụ :

gof : X —→ Z

Cho X = Y = Z = R

$x \in R \rightarrow y = f(x) = x^2 \in R$

$y \in R \rightarrow z = g(y) = y-5 \in R$

Ánh xạ hợp gof :R $\rightarrow$ R xác định như sau:

$x \in R \rightarrow (gof)(x) = g[f(x)] = x^2-5 \in R$

Chú ý:

1/ Hợp của hai đơn ánh là một đơn ánh .

Hợp của hai toàn ánh là một toàn ánh.

Hợp của hai song ánh là một song ánh.

2/ Nếu f : E $\rightarrow$ F là một song ánh

Khi đó tồn tại f^{-1}:F $\rightarrow$ E và ta có :

$x \in E \rightarrow (f^{-1}of)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$

$y \in F \rightarrow (fof^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) \quad = y$

Có nghĩa là $f^{-1}of$ và fof^{-1} là các ánh xạ đồng nhất trong E và F

Kí hiệu: $I_E=f^{-1}of$; $I_F=fof^{-1}$

7. *<u>Tập hữu hạn – Tập đếm được – Tập không đếm được</u>*

Thí dụ :

Xét các tập hợp:

A = {a,b,c,d} có 4 phần tử

B = $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ có 4 phần tử

M = {1,2,3,….,n} có n phần tử.

Những tập này có số hữu hạn các phần tử

N^*= {1,2,3,….,n,….}

X = $\{x_1,x_2,x_3,\ldots..x_n\ldots\ldots\}$

R = {số thực}

Những tập này có vô số các phần tử.

7.1. *<u>Lực lượng của tập hợp</u>*

Ta nói hai tập E và F có cùng lực lượng nếu tồn tại một tương ứng 1-1 giữa chúng. Hay điều kiện cần và đủ để hai tập hợp E và F cùng lực lượng là giữa chúng tồn tại một song ánh.

Thí dụ:

Xét các tập A,B có 4 phân tử như đã đưa ra .

Giữa A và b có tương ứng 1-1

$a \leftrightarrow x_1,\ b \leftrightarrow x_2,\ c \leftrightarrow x_3,\ d \leftrightarrow x_4$

Ta nói 4 là lực lượng của A và B.

7.2. *<u>Tập hữu hạn –Tập đếm được – Tập không đếm được</u>*

+ Tập M có n phần tử và các tập cùng lực lượng với nó gọi là tập hữu hạn

+ Tập N^* có vô số phần tử và các tập cùng lượng với nó gọi là các tập vô hạn đếm được.

+ Các tập có cùng lực lượng với các tập con của N* gọi là các tập đếm được .

+Tập R có vô số phần tử và các tập cùng lực lượng với nó gọi là tập vô hạn không đếm được.

§2. HÀM SỐ

I. Khái niệm hàm số - Các định nghĩa

1. *Định nghĩa*: Cho tập số thực X, ta sẽ gọi một ánh xạ f từ tập X vào tập số thực R là một hàm số .Tập X được gọi là miền xác định và tập ảnh y= f(X) của ánh xạ được gọi là tập giá trị của hàm số f.

Kí hiệu: $x \xrightarrow{f} y$; $X \xrightarrow{f} Y = f(X)$

Hay $y = f(x)$

x : gọi là biến số độc lập.

y = f(x) gọi là giá trị của hàm số tại x

Muốn cho một hàm số cần phải :

– Cho miền xác định X của hàm

– Cho ánh xạ f.

Thí dụ:

a, $x \longrightarrow \sqrt{x}$ có miền xác định R^+ và f là phép lấy căn bậc 2.

b, $x \longrightarrow 2x + 3$ có miền xác định là R và ánh xạ f là hàm số bậc nhất.Miền giá trị là R

2. *Các phương pháp cho hàm số*

2.1. *Phương pháp giải tích*

Là cách cho dưới dạng phương trình trong đó một vế là y hoặc f(x) là giá trị của hàm tại x, một vế là các biểu thức giải tích của x. Thường được áp dụng trong nghiên cứu lí thuyết .

Thí dụ:

$y = -2x^2 + 5x + 1$ hàm bậc hai

y = E(x) hàm phần nguyên của x

$$y = \text{sign } x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

2.2. *Phương pháp lập bảng*

Phương pháp lập bảng thường được sử dụng trong thực tế. Ta lập một bảng gồm 2 hàng và nhiều cột. Trong một hàng ghi các giá trị của biến độc lập, hàng kia ghi các giá trị của hàm theo biến độc lập đó. Mỗi một cột ứng với một giá trị của biến độc lập và giá trị của hàm tại biến đó.

Thí dụ:

Đo tốc độ gió trong một ngày với mốc thời gian đo là đầu mỗi giờ .Ta có bảng:

t(giờ)	1	2	3	…….	23	24
v(m/s)	V1	V2	V3	.....	V23	V24

2.3. *Phương pháp đồ thị*

Trong kĩ thuật cũng như trong lĩnh vực khoa học cơ bản có nhiều đại lượng chúng ta cần xác định thông qua các công cụ đo. Mặc dù ta không biết được quy luật chính xác của hàm nhưng giá trị cụ thể của hàm theo biến độc lập hoàn toàn xác định được thông qua đồ thị. Chúng ta chỉ việc kẻ các đường gióng theo các trục tọa độ để xác định.

3. *Phép toán trên hàm số*

3.1. *Tổng, hiệu, tích, thương của 2 hàm số*

Cho hàm số f(x) xác định trên X_1 và g(x) xác định trên X_2. Gọi $X=X_1 \cap X_2$

Khi đó tổng, hiệu, tích, thương của f(x), và g(x) được cho bởi các quy luật f+g, f-g, f.g, $\frac{f}{g}$ xác định trên tập X và:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - f(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{với } g(x) \neq 0 \ \forall \ x \in X$$

3.2. *Phép bằng nhau*

Hai hàm f(x) và g(x) gọi là bằng nhau trên tập X nếu f(x)=g(x) với $\forall$ $x \in X$

Kí hiệu: f = g

3.3. *Phép lớn hơn (bé thua)*

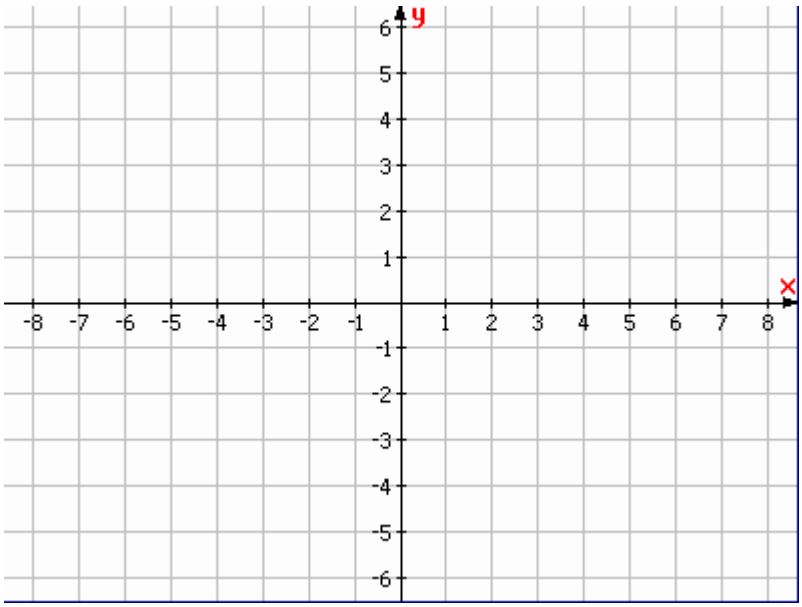
Hàm f(x) gọi là lớn hơn (bé thua) hàm g(x) trên X nếu f(x) > g(x) (f(x)<g(x)) với $\forall$ $x \in X$

Kí hiệu: f > g (hay f< g)

4. *Đồ thị hàm số*

Ta giả thiết rằng có một song ánh là ánh xạ đồng nhất giữa tập số thực R với các điểm trên đường thẳng L. Như vậy ta xem đường thẳng như một trục số thường kí hiệu là x. Ta thường xây dựng một song ánh từ tập tích Đề các R x R vào một mặt phẳng P bằng cách vẽ thêm trục số y vuông góc trục số x tại điểm x = 0 . Các đơn vị chọn trên 2 trục số này có thể giống hoặc khác nhau (thường chọn giống nhau).

Trục Ox là trục hoành và trục Oy là trục tung



H.10

Điểm O là gốc tọa độ . Dấu của các giá trị trên trục số được biểu hiện trên hình vẽ .

Mặt phẳng P với các trục tọa độ như vừa xây dựng được gọi gọi là mặt phẳng tọa độ. Một điểm M được xác định bởi 2 giá trị tọa độ của nó là hoành độ và tung độ bằng cách như sau. Từ M kẻ đường thẳng song song với Oy cắt Ox tại giá trị x gọi là hoành độ của M. Từ M kẻ đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại giá trị y gọi là tung độ của M. Kí hiệu là M(x,y). Theo quy luật của hàm số ta xác định đươc tập hợp các điểm của M(x,y) = M(x,f(x)) với $x \in X$. Đường cong nối các điểm M(x,y) gọi là đồ thị của hàm số y = f(x) trong mặt phẳng tọa độ Oxy đã cho.

5. *Các tính chất của hàm số*

5.1. *Hàm số đơn diệu – Hàm số không đơn điệu*

Định nghĩa: Hàm số f gọi là đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trên miền xác định nào đó nếu mỗi giá trị $x_1, x_2 \in X$ từ $x_1 < x_2$ suy ra $f(x_1) \le f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) \ge f(x_2)$) (1-2)

Nếu chỉ xảy ra dấu bất đẳng thức $f(x_1) < f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) > f(x_2)$) thì ta nói rằng hàm số tăng nghiêm ngặt (hay giảm nghiêm ngặt) trên X.

Hàm số f(x) được gọi là đơn điệu từng khúc trong một miền nào đó nếu ta có thể chia miền đó thành một số hữu hạn các khoảng (đoạn) sao cho hàm số đơn điệu trong mỗi khoảng (đoạn) đó.

5.2. *Hàm số bị chặn và hàm số không bị chặn*

Định nghĩa: Hàm số f(x) bị chặn trong tập X nếu tồn tại số K > 0 sao cho:

$$|f(x)| < K \qquad (1\text{-}3)$$

Nếu tập X= $(-\infty, +\infty)$ thì ta nói f(x) bị chặn trên toàn trục số hay f(x) bị chặn.

Từ (1-3) ta có : $-K \le f(x) \le K$ (1-4)

Như vậy nếu vẽ đồ thị hàm số f(x) ta thấy đồ thị đó nằm giữa giải được xác định bởi hai đường thẳng $y = \pm K$

Hàm số f(x) được gọi là hàm số bị chặn trên (hay bị chặn dưới) trong X nếu tồn tại một số K tùy ý sao cho:

$$f(x) \le K \quad (\text{ hay } f(x) \ge K) \qquad (1\text{-}5)$$

Chú ý:

Hàm số f có thể không bị chặn trong một khoảng nào đó, nhưng bị chặn trên (hoặc chặn dưới) trong khoảng đó.

Thí dụ:

Hàm số : $y=\frac{1}{x}$ không bị chặn trong $(0,+\infty)$ nhưng bị chặn dưới bởi O.

Hàm số f có thể bị chặn trong mọi đoạn $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ nhưng không bị chặn trong đoạn (a,b).

5.3. *Hàm số chẵn – Hàm số lẻ*

Định nghĩa:

Tập đối xứng : Tập X được gọi là tập đối xứng đối với gốc tọa độ nếu $x \in X$ thì $-x \in X$.

Thí dụ: đoạn [-a,a], khoảng (-b,b), $(-\infty,+\infty)$

Hàm số f(x) xác định trên tập X đối xứng được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall\ x \in X$ ta có:

$$f(x) = f(-x) \qquad (1\text{-}6)$$

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy là trục đối xứng.

Hàm số f(x) xác định trên tập X đối xứng được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall\ x \in X$ ta có:

$$f(x) = f\text{-}(x) \qquad (1\text{-}7)$$

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Các phép toán:

Định lý:

a) Tổng hoặc hiệu của hai hàm số chẵn (hoặc lẻ) là một hàm số chẵn (hoặc lẻ)

b) Tích của hai hàm số chẵn hoặc lẻ là hàm số chẵn.

c) Tích của hàm số chẵn với hàm số lẻ là hàm số lẻ.

5. *Hàm số tuần hoàn*

Định nghĩa:

Hàm số f(x) được gọi là hàm số tuàn hoàn trên tập xác định X của nó nếu tồn tại số $l \neq 0$ sao cho:

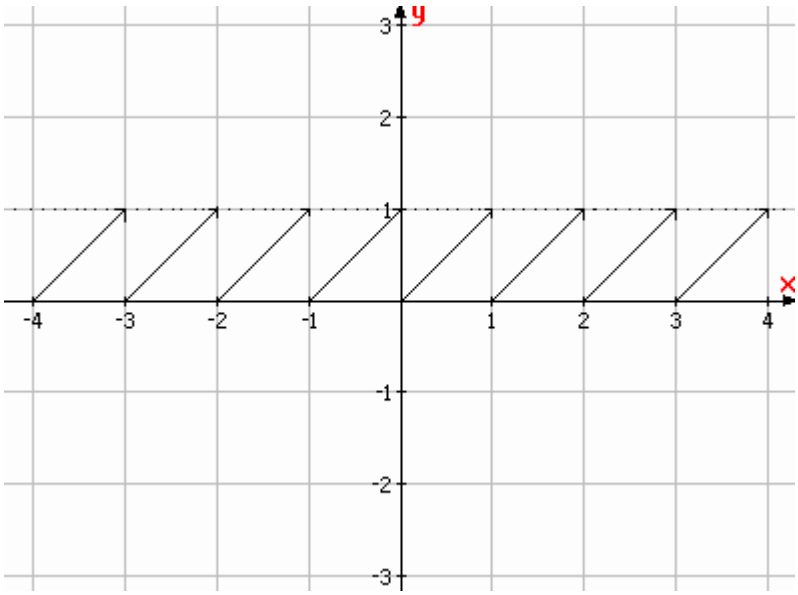
$$f(l+x) = f(x) \quad \text{với } x+l,\ x \in X \qquad (1\text{-}8)$$

Số dương T bé nhất trong các số l thỏa mãn (1-8) gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x). Ta có:

$$l = k.T, \qquad k \in N$$

Thí dụ:

$l-$ f(x)={x} = x-[x] phần nguyên của x



H.11

Chu kì T=1.

2– $D(x)=\begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ (Q là tập các số hữu tỉ)

Với r là số hữu tỉ ta có : x+r là số hữu tỉ nếu x là số hữu tỉ

x+r là số vô tỉ nếu x là số vô tỉ.

Vậy D (r + x) = D(x) nếu r là hữu tỉ - D(x) tuần hoàn với các số r hữu tỉ.

Từ thí dụ này ta có nhận xét hàm số tuần hoàn có thể không có chu kì.

6. *Hàm số hợp*

Cho hàm số $x = \varphi(t)$ xác định trên tập T và $X = \varphi(T)$

$y = f(x)$ xác định trên tập X và $Y = f(X)$

Nếu với $t \in T$ theo cách nào đó ta xác định được $y = f(x)$ thông qua $x = \varphi(t)$ thì hàm số ứng theo quy luật này sẽ xác định trên T và có tập giá trị là Y. Ta gọi hàm số mới này là hàm số hợp của các hàm f và φ .

Kí hiệu: $F = f o \varphi$ và $F(t) = f o \varphi(t) = f[\varphi(t)]$ (1-9)

Thí dụ:

$x = \varphi(t) = t^3 - 3t + 1$

$y = f(x) = x^2$

$F = f o \varphi = y \Rightarrow y = (t^3 - 3t + 1)^2$

Ta có thể mở rộng cách định nghĩa trên cho hợp của nhiều hàm số. Cho $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$, $x = g(t)$

Ta có: $F = f o \varphi o g$

7. *Hàm số ngược*

Cho hàm số f là một song ánh từ tập X vào tập Y. Khi đó ứng với mỗi giá trị $y \in Y$ sẽ xác định duy nhất $x \in X$, phép tương ứng này xác định cho ta một hàm số, được gọi là hàm số ngược của hàm số f. Kí hiệu: f^{-1}

Hàm số f^{-1} có tập xác định là Y .

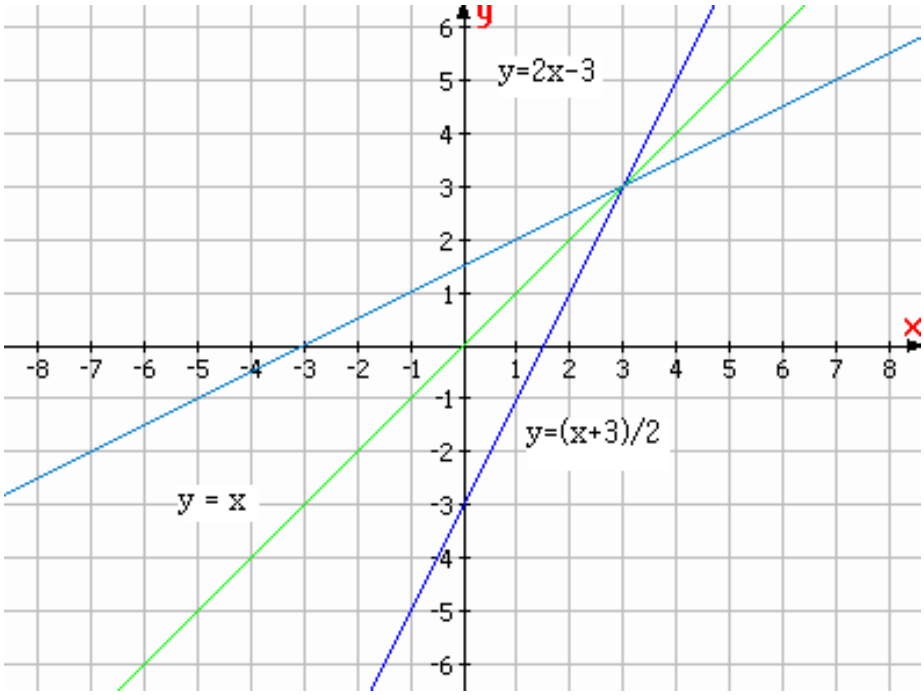
Vì quy ước biến của các hàm số là x nên viết là $f^{-1}(x)$ nhưng hiểu ngầm $x \in Y$.

Nếu biểu diễn đồ thị của hàm số f(x) và $f^{-1}(x)$ trên cùng một hệ trục Oxy thì đồ thị của chúng luôn đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tử thứ nhất .

Thí dụ:

$y = 2x-3$

Và $x = \frac{y+3}{2}$



H.12

Hàm số f(x) và hàm số ngược $f^{-1}(x)$ cùng tính đơn điệu, tức là cùng tăng nghiêm ngặt (hoặc cùng giảm nghiêm ngặt).

II. Các hàm số cơ bản

1. *Hàm số lũy thừa*: $y=x^{\alpha}$ $\alpha \in R$

- Miền xác định , phụ thuộc α

Nếu $\square \geq 0$, $\square \in N^*$ miền xác định là R

Nếu $\square < 0$, $\square \in N$ miền xác định R\{0}.

Đồ thị luôn đi qua (1,1) và (0,0) nếu k>0 và không đi qua (0,0) nếu $\square > 0$

Với: $\square = \frac{1}{p}$, $p \in Z$

Nếu $p \in N^*$, p chẵn. Miền xác định là R^+

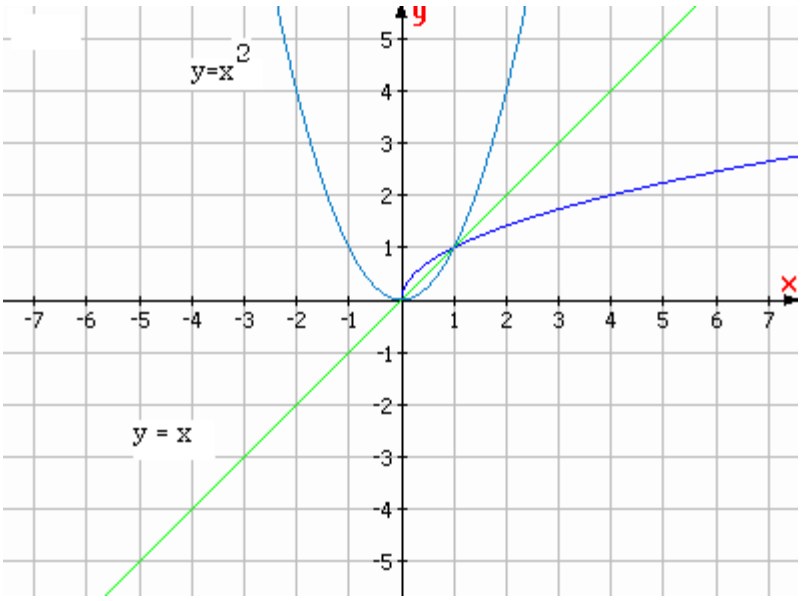
$p \in N^*$, p lẻ. Miền xác định là R

$p \in Z$ miền xác định cũng phụ thuộc p chẵn hay lẻ

Với $\square$ là một số vô tỉ ta có quy ước.

Nếu $\square$ >0 xét ∀ x≥ 0

Nếu $\square$ <0 xét ∀ x>0



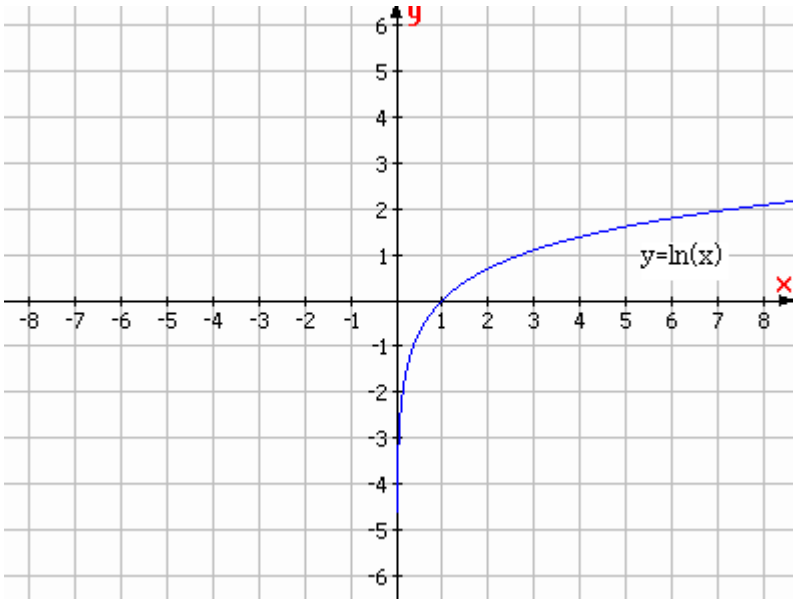
H.13

2. *Hàm số mũ*: $y=a^x$ (a>0, a≠ 1)

- Số a gọi là cơ số của hàm số mũ .
- Miền xác định R – Miền gía trị R^+
- Hàm tăng nghiêm ngặt với a>1 và giảm nghiêm ngặt với 0<a<1
- Đồ thị của hàm số mũ $y=a^x$ luôn đi qua điểm (0,1) và luôn nằm phía trên trục Ox.

3. *Hàm số logarit*: $y= \log_a x$ a>0,a≠ 1

- Hàm số $y= \log_a x$ là hàm số ngược của hàm số mũ $y=a^x$
- Miền xác định là R+ và miền giá trị là R.
- Hàm số tăng nghiêm ngặt với a>1 giảm nghiêm ngặt với a<1 .
- Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm (1,0) và luôn nằm phía bên phải của trục tung.



H.14

Các tính chất:

$\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^k = k.\log_a x$

$N = a^{\log_a N}$

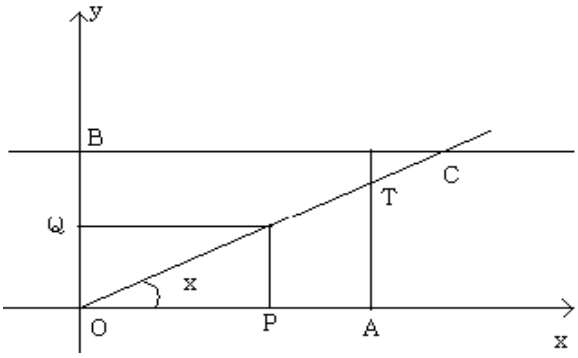
$\log_a c = \log_a b.\log_b c$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

4. *Hàm số lượng giác*:

y = sin x; y = cos x; y = tg x, y = cotg x

Đây là các hàm số xác định trên đường tròn lượng giác .



H.15

Trên hình vẽ: $\overline{OP}$ =cos x ; $\overline{OQ}$ =sin x

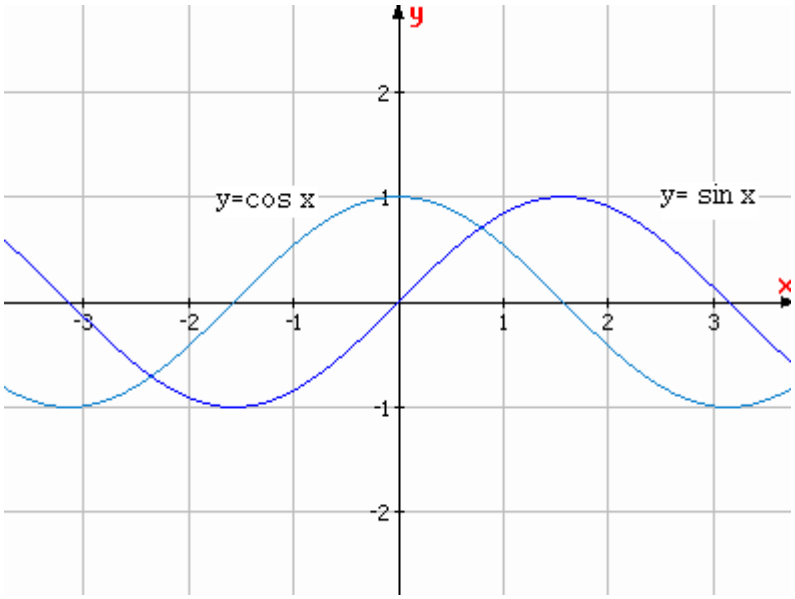
$\overline{AT}$ =tg x ; $\overline{BC}$ = cotg x

- Hàm y = sinx ,y= cos x có miền xác định là Rvà miền giá trị là [-1,1].

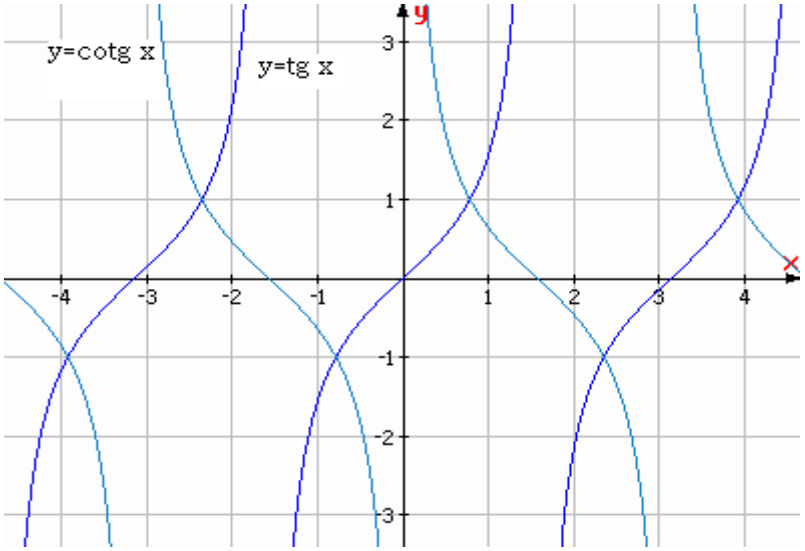
- Hàm y = tg x có miền xác định là mọi giá trị $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ và miền giá trị là R

- Hàm y = cotg x có miền xác định là mọi giá tri $x \neq k,\pi$ $k \in Z$ và miền giá trị là R.

- Trên hình vẽ là đồ thị của các hàm số y= sin x , y= cos x , y=tg x ,y= cotg x



H.16



H.17

- Các hàm lượng giác đều là các hàm tuần hoàn .

Hàm số y = sin x , y= cos x có chu kì $T=2\pi$

Hàm số y = tg x , y= cotg x có chu kì $T=\pi$

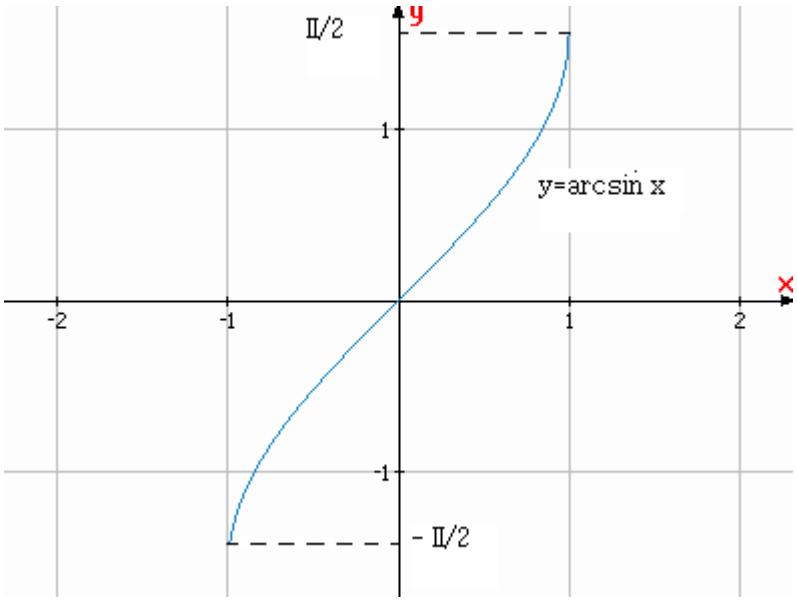
5. <u>*Các hàm lượng giác ngược*</u>:

Xét các hàm số lượng giác trong miền xác định của nó và theo từng chu kì ta thấy rằng đó là các hàm tăng hoặc giảm nghiêm ngặt trong một khoảng cụ thể tương ứng. Khi đó nó sẽ tồn tại các hàm số ngược và được gọi là các hàm lượng giác ngược.

Cụ thể:

a, Hàm số y = arcsin x

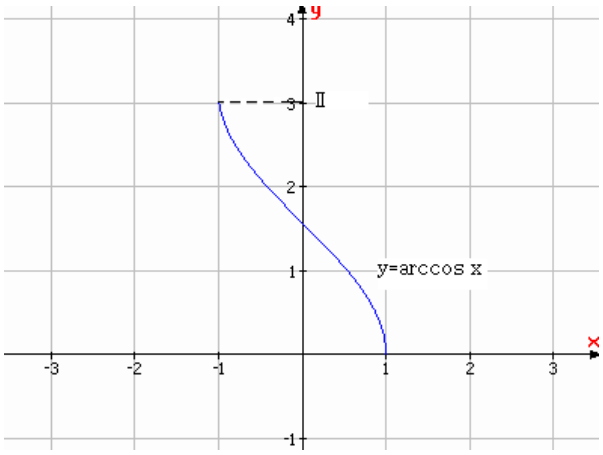
- Miền xác định là khoảng đóng [-1,1] và miền giá trị $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Đồ thị của nó đối xứng với hàm số y=sin x qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.



H.18

b, Hàm số y = arccos x

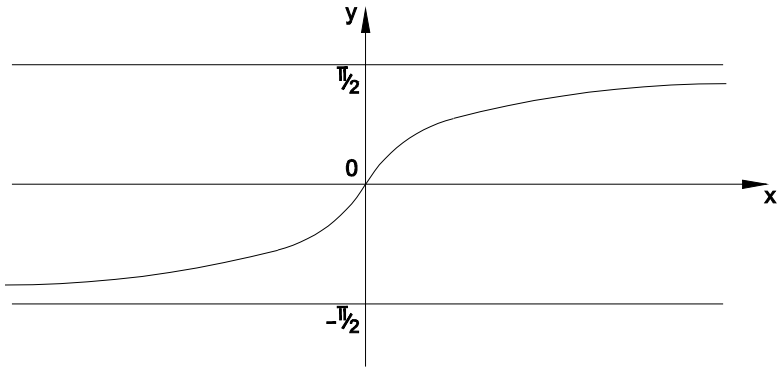
- Miền xác định là khoảng đóng [-1,1] vá miền giá trị $[0, \pi]$
- Là một hàm số giảm nghiêm ngặt và đồ thị có hình dạng như H.19
- Vì sin x $= \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ nên ta có : arcsin x + arccos x $= \frac{\pi}{2}$



H.19

c, Hàm số y = arctg x

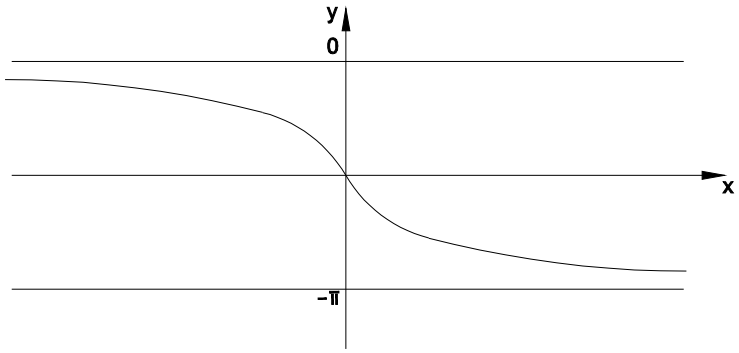
- Miền xác định là R và miền giá trị $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Là một hàm số tăng và đồ thị có hình dạng như H.20



H.20

d, Hàm số y = arccotg x

- Miền xác định là R và miền giá trị $[0, \pi]$
- Là một hàm số giảm và đồ thị có hình dạng như H.21



H.21

- Vì tg x = cotg($\frac{\pi}{2}$-x) nên ta có : arctg x + arccotg x = $\frac{\pi}{2}$

6. *<u>Các hàm số sơ cấp</u>*:

<u>Định nghĩa</u>: Hàm số sơ cấp là hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học (cộng, trừ, nhân , chia, …) các phép lấy hàm số hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản .

Thí dụ:

$$y = \sin 4x + \cos (2x + \frac{\pi}{4}) + 3$$

$$y = 3^{-x} + x^2 + 9$$

$$y = \sqrt[5]{x^3} - \log(3x+7) + 1$$

$$y = \frac{x + \sqrt{1+x^2} + \sin x}{x - \sqrt{1+x^2}}$$

Trong các hàm sơ cấp , ta đặc biệt chú ý đến hai loại hàm số : các đa thức và các hàm hữu tỉ, vì khi tính giá trị của các hàm này người ta chỉ cần thực hiện các phép toán số học đối với các biến.

§3. DÃY SỐ VÀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

I. Định nghĩa dãy số

Định nghĩa: Cho hàm số a xác định trên tập các số tự nhiên N^* 1, 2, 3, 4….., n …. Các giá trị tương ứng của hàm số là a(1), a(2), a(3),….a(n)…. Ta gọi tập các số a(1), a(2),….,a(n),… viết theo thứ tự đã cho là một dãy số. (gọi tắt là dãy).

Kí hiệu: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n\ldots$ hoặc $\{a_n\}$ (1-10)

a_n - (n=1,2,3,….) gọi là số hạng hay phần tử của dãy .

k - chỉ số của số hạng a_k

Khi cho dãy người ta cho số hạng tổng quát a_n

Thí dụ:

Cho dãy $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$

$\{a_n\} = \{n^2\} = 1,4,9,\ldots,n^2,\ldots$

Về phương diện hình học dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n\ldots$ là tập hợp các điểm dạng (n,a_n) trong mặt phẳng tọa độ vì vậy ta có thể xem các điểm dạng (n,a_n) là một dãy số.

II. Định nghĩa giới hạn dãy số

1. *Định nghĩa*: Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{a_n\}$ nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$, $\exists$ $N = N(\varepsilon)$ sao cho $\forall$ $n > N$ ta đều có:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (1\text{-}11)$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ hoặc $a_n \to a$ khi $n \to \infty$ (1-12)

Dãy $\{a_n\}$ có giới hạn a hữu hạn gọi là một dãy hội tụ. Nếu không tồn tại giới hạn thì dãy $\{a_n\}$ gọi là một dãy phân kì.

Thí dụ:

1. Chứng minh: $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}\}$ có giới hạn là 1.

Thật vậy, nếu $\{a_n\}$ có giới hạn là 1, theo định nghĩa với $\varepsilon > 0$

Ta có: $|a_n - 1| < \varepsilon$. Nếu tìm được N = N(ε) sao cho $\forall$ n>N ta có bất đẳng thức trên luôn thõa mãn.

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Chọn N=$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ thì ta luôn có : $|a_n - 1| < \varepsilon$ hay

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

2. Chứng minh: $\{a_n\} = \{\frac{1+(-1)^n}{n}\}$ có giới hạn bằng 0.

Ta có: $\left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| < \left|\frac{1+1^n}{n}\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$

Chọn N=$\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ Vậy với n>N ta có $\left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| <$ ☐

Hay $\lim\limits_{n\to\infty} \{\frac{1+(-1)^n}{n}\} = 0$

3. Dãy số $\{(-1)^n\}$ là phân kì.

Giả sử ngược lại dãy đã cho hội tụ, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = l \in R$ và chọn $0 < \varepsilon < 1$. Theo định nghĩa $\exists$ N = N(☐) sao cho $\forall$ n> N ta có : $|(-1)^n - l| <$ ☐ < 1

Mặt khác ta thấy tồn tại vô số các số n $\geq$ N sao cho $|(-1)^n + l| > 1$ (n=2k). Điều này mâu thuẫn với giả thiết hội tụ của dãy đã cho. Vậy dãy đã cho phân kì.

4. Dãy số $\{a_n\} = \{n\}$ là phân kì

Giả sử ngược lại $\{a_n\} = \{n\}$ hội tụ , tức $\lim\limits_{n\to\infty} n = a$

Chọn ☐ = 1 khi đó $|n - a| < 1$ với $\forall$ n>N

Ta có: n-a < 1 $\Rightarrow$ n < 1+a. Điều này mâu thuẫn vì a hữu hạn mà n $\to \infty$. Vậy dãy $\{a_n\} = \{n\}$ phân kì.

2. *<u>Định lí</u>*: Nếu dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Chứng minh:

Giả sử: ☐ a_n =a và ☐ a_n=b , a,b$\in$ R với ☐>0 $\exists$ N_1, N_2 sao cho :

$\forall$ n > N_1 $|a_n - a| <$ ☐

n > N_2 $|a_n - b| <$ ☐

Đặt N= max (N_1,N_2) Khi đó ☐ n$\geq$ N cả hai bất đẳng thức trên đều thõa mãn. Ta có:

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < 2 \square.$$

Theo định nghĩa $|a - b| = 0$ tức là a = b .

Vậy giới hạn của dãy là duy nhất.

III. Tính chất giới hạn của dãy số

Các tính chất của giới hạn dãy số được thể hiện qua các định lí.

<u>Định lí 1</u>: Nếu các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ thì các dãy:

$\{a_n+b_n\},\{a_n-b_n\},\{a_n.b_n\},\{\frac{a_n}{b_n}\}$ (nếu $b_n \neq 0$ $\forall$ n và $\lim b_n \neq 0$) cũng hội tụ và ta có :

a, $\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ (1-13)

b, $\lim(a_n-b_n) = \lim a_n - \lim b_n$ (1-14)

c, $\lim(a_n.b_n) = \lim a_n . \lim b_n$ (1-15)

d, $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ (1-16)

Chú ý với giả thiết một trong hai dãy là hằng , chẳng hạn $a_n = C$ ta có:

$\lim(a_n+b_n) = \lim(C+b_n) = C + \lim b_n$ (1-13)'

$\lim(a_n.b_n) = \lim(C.b_n) = C.\lim b_n$ (1-15)'

$\Rightarrow \lim(-a_n) = -\lim a_n$ (1-17)

<u>Định lí 2</u>: Nếu dãy $\{a_n\}$ hội tụ thì dãy $\{|a_n|\}$ cũng hội tụ và

$\lim|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$ (1-18)

<u>Định lí 3</u>: Nếu các dãy $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ hội tụ và $a_n \le b_n$ $\forall$ n thì

$\lim a_n \le \lim b_n$ (1-19)

Đặc biệt nếu $a_n \le k$ và $b_n \ge h$ thì $\lim a_n \le k$; $\lim b_n \ge h$
(1-19)'

<u>Định lí 4</u>: Nếu dãy $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim a_n = a < b$ (hoặc a>b) thì $\exists$ N sao cho $a_n<b$ (hoặc $a_n>b$) $\forall$ n>N

<u>Định lí 5</u>: Nếu các dãy $\{a_n\},\{b_n\}$ hội tụ và $\lim a_n = \lim b_n$ và nếu $a_n \le c_n \le b_n$ thì dãy $\{c_n\}$ cũng hội tụ và hội tụ về cùng một giới hạn .

$\lim a_n = \lim b_n = \lim b_n$

<u>Định lí 6</u>: Nếu dãy $\{|a_n|\}$ hội tụ và $\lim|a_n| = 0$ thì dãy $\{a_n\}$ cũng hội tụ và $\lim a_n = 0$

§4. GIỚI HẠN HÀM SỐ

I. Các định nghĩa

1. *Định nghĩa giới hạn hàm số tại một điểm*

Xét hàm số f xác định trên tập X ⊆ R, x_0 là một điểm giới hạn của X.

Định nghĩa 1: Số l được gọi là giới hạn của hàm số f khi x dần đến x_0, nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sao cho $|f(x) - l| < \varepsilon$ với mọi $x \in X$ mà $|x - x_0| < \delta$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ Hay $f(x) \to l$ khi $x \to x_0$ (1-21)

Thí dụ:

1, $\lim\limits_{x \to 1} (3x+1) = 4$

Thật vậy $|(3x+1) - 4| = |3(x-1)| < \varepsilon$

Ta chỉ cần chọn $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$ Khi đó với mọi x: $|x - 1| < \varepsilon = \frac{\varepsilon}{3}$ thì $|(3x+1) - 4| < \varepsilon$

2, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$, $x \neq 3$

Ta có : khi $x \to 3$, $x \neq 3$

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = |(x+3) - 6| = |x - 3|$$

Muốn $|f(x) - l| < \varepsilon$ ta chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon$ Khi đó :

$0 < |x - 3| < \varepsilon = \delta$

2. *Giới hạn một phía*

Định nghĩa 2: Ta gọi số l là giới hạn trái của hàm số f khi $x \to x_0$ (nghĩa là $x \to x_0$ nhưng luôn luôn $x < x_0$), nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho: $|f(x) - l| < \varepsilon$ với $|x - x_0| < \delta$ $\forall\ x \in X$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} = l = f(x_0 - 0) \qquad (1\text{-}22)$$

Khi $x_0 = 0$ thay cho 0-0 ta viết -0

Thí dụ: Xét hàm dấu:

$$S(x) = \text{Sign } x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ \ldots 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Rõ ràng $\lim\limits_{x \to -0} S(x) = -1$

Định nghĩa 3: Ta sẽ gọi số l là giới hạn phải của hàm số f khi $x \to x_0 + 0$ (nghĩa là $x \to x_0$ nhưng luôn luôn $x > x_0$) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ với } |x - x_0| < \delta \ \forall\ x \in X$$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = l = f(x_o + 0)$ (1-23)

Khi $x_0 = 0$ thay cho 0 + 0 ta viết +0

3. *Giới hạn ở vô tận và giới hạn vô tận*

Giả sử hàm số f xác định trong một tập số thực X không bị chặn, x_0 là điểm giới hạn của X.

Định nghĩa 4: Ta gọi số l là giới hạn của hàm số f khi x $\square$ $+\infty$ nếu với mỗi $\square$ >0 tồn tại số M > 0 lớn tùy ý sao cho :

$\boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$ với mọi x $\square$ X thõa mãn x>M

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=l$ hay f(x) $\square$ l khi x $\square$ + $\square$ (1-24)

Thí dụ: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1}=0$

Thật vậy với $\square$ >0 để $\left|\dfrac{1}{x^2+1} - 0\right| = \dfrac{1}{x^2+1} < \square$ thì $x^2+1>x^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$

Đặt $M=\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$ ta luôn có $\left|\dfrac{1}{x^2+1} - 0\right| < \square$ $\square$ x>M

Định nghĩa 5: Ta gọi số l là giới hạn của hàm số f khi x $\square$ $-\infty$ nếu với mỗi $\square$ >0 tồn tại số M > 0 lớn tùy ý sao cho:

$\boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$ với mọi x $\square$ X thõa mãn x<-M

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ hay f(x) $\square$ l khi x $\square$ - $\square$ (1-25)

Định nghĩa 6: Nếu với mỗi số dương A $\exists$ $\square$ (A) sao cho f(x) >A với mọi x $\square$ X thõa mãn $|x - x_0|$ < $\square$ (A) thì xem như quy ước ta nói rằng hàm số f có giới hạn + $\square$ khi x $\square$ x_0

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)= +\square$ (1-26)

Thí dụ : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\square$

Ta có : $(x-1)^2<\dfrac{1}{A}$ nếu $0<|x - 1|<\dfrac{1}{\sqrt{A}} = \square$

Định nghĩa 7: Nếu với mỗi số dương A $\exists$ $\square$ (A) sao cho f(x)<-A với mọi x $\square$ X thỏa mãn $|x - x_0|$ < $\square$ (A) thì xem như quy ước ta nói rằng hàm số f có giới hạn - $\square$ khi x $\square$ x_0

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\square$ (1-27)

Chú ý: ở đây khi x $\square$ ± $\square$ ta cũng có thể viết :

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty}} f(x)= +\square$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\square$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty}} f(x)= -\square$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\square$ (1-28)

II. Tính chất và phép toán của giới hạn hàm số

1. *Tính chất của giới hạn hàm số*

Cho hàm số f(x) được xác định trong tập X $\subseteq$ R và a là điểm giới hạn của X. Tính chất của giới hạn hàm số được thể hiện qua các định lí sau:

<u>Định lý 1</u>: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ và nếu $A < l < B$ thì tồn tại một khoảng J chứa điểm a sao cho $\forall x \in J \cap X$ và $x \neq a$ ta có: $A < f(x) < B$

Đặc biệt nếu $l > 0$ (hoặc $l < 0$) thì tồn tại khoảng J sao cho $f(x)>0$ (hoặc $f(x)<0$) với mọi $x \neq a$ và $x \in J \cap X$

<u>Định lý 2</u>: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ và nếu $\alpha < f(x) < \beta$ thì $\alpha \le l \le \beta$

Đặc biệt nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ và $f(x) > 0$ thì $l \ge 0$

$f(x) < 0$ thì $l \le 0$

<u>Định lý 3</u>: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ và $l > l'$ thì tồn tại một khoảng J chứa điểm a sao cho $\forall x \in J \cap X$ và $x \neq a$ ta có $f(x) > g(x)$

<u>Định lí 4</u>: Cho hai hàm số f và g cùng xác định trên tập X và $f(x)> g(x)$ $\forall x \in X$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ thì $l \ge l'$

<u>Định lý 5</u>: Cho 3 hàm số f,g,h cùng xác định trên tập X và $g(x) < f(x) <h(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

<u>Định lý 6</u>: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ thì $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$ (1-30)

2. <u>*Các phép toán*</u>

Cho các hàm f(x),g(x) cùng xác định trên tập $X \subseteq R$ Giả thiết rằng các hàm số này có giới hạn hữu hạn tại Q là điểm giới hạn của X. Khi đó chúng thõa mãn định lí sau:

<u>Định lí 7</u>:

1, $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (1-31)

2, $\lim\limits_{x\to a} [f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (1-32)

3, $\lim\limits_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) . \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (1-33)

4, $\lim\limits_{x\to a} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ nếu $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ (1-34)

<u>Nhận xét</u>: Định lí trên vẫn đúng cho trường hợp khi các hàm số f(x), g(x) có giới hạn bằng vô cùng.

3. <u>*Vô cùng bé –Vô cùng lớn – So sánh các vô cùng bé*</u>

3.1. <u>*Khái niệm vô cùng bé – Vô cùng lớn*</u>

<u>Định nghĩa 8</u>: Hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b) được gọi là một đại lượng vô cùng bé trong quá trình $x \to \alpha$ ($\alpha \in [a,b]$) nếu $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=0$

(1-35)

<u>Nhận xét</u> : Định nghĩa này cũng đúng cho quá trình $x \to \pm\infty$ áp dụng cho các khoảng $(a,+\infty)$ hay $(-\infty,a)$

Định nghĩa 9: Hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b) được gọi là đại lượng vô cùng lớn khi x □□(□□[a,b]) nếu với mỗi số M>0 lớn tùy ý cho trước , ∃ □>0 sao cho với mọi x □(a,b) thỏa mãn $|x-\alpha|<$□ ta đều có :

$$|f(x)|\square M \qquad (1\text{-}36)$$

Nhận xét :

+ Nếu $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\square$ hay $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\square$ thì f(x) là đại lượng vô cùng lớn khi x□□

+ Định nghĩa trên cũng đúng khi x□± □

3.2. *Tính chất và phép toán*

Tính chất và phép toán đối với các đại lượng vô cùng lớn và đại lượng vô cùng bé được phát biểu bằng các mệnh đề như sau:

1. Tổng của hai đại lượng vô cùng bé là một vô cùng bé (xét trong cùng một quá trình)

2. Tích của một đại lượng vô cùng bé với một đại lượng bị chặn là một vô cùng bé.

3. Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ là luôn viết f(x)= A+□(x) trong đó □(x) là vô cùng bé khi x□a

4. Tích của hai đại lượng vô cùng lớn là một vô cùng lớn

5. Tổng của một vô cùng lớn với một đại lượng bị chặn là một vô cùng lớn.

6. Nghịch đảo của một vô cùng bé □(x) (□(x) □0)là một vô cùng lớn và ngược lại nghịch đảo một vô cùng lớn và là một vô cùng bé .

Nhận xét :

Từ mệnh đề 6 ta có thể nghiên cứu một trong hai đại lượng vô cùng lớn hoặc vô cùng bé, từ đó suy ra cho đại lượng kia bằng cách lấy nghịch đảo đại lượng nghiên cứu .

3.3. *Phân loại các vô cùng bé*

Chúng ta xét các vô cùng bé □,□,γ ,… trong cùng một quá trình khi x□a (hoặc x□ ± □)

Định nghĩa 10:

1. Nếu $\frac{\alpha}{\beta}$ là một vô cùng bé (hoặc ngược lại nếu $\frac{\beta}{\alpha}$ là một vô cùng lớn) thì ta nói □ là một vô cùng bé bậc cao hơn so với vô cùng bé □ (hay □ là vô cùng bé bậc thấp hơn so với □)

Kí hiệu : □ = o(□) (đọc là ô nhỏ của □)

2. Nếu $\frac{\beta}{\alpha}$ (hay $\frac{\alpha}{\beta}$) có giới hạn khác 0 , tức là $\lim\limits_{x\to a}$ □ =A□0 thì ta nói □,□ là hai đại lượng vô cùng bé cùng bậc

Kí hiệu: □ = O(□) hay □ = O(□) (đọc là ô lớn)

3. Nếu đặc biệt $\lim\limits_{x\to a}$ □ =1 thì ta nói □và□ là hai vô cùng bé tương đương. Kí hiệu □≈ □ hay □ ≈ □

(1-37)

Chú ý: Chúng ta có thể sử dụng định nghĩa vô cùng bé tương đương để khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ khi tìm giới hạn thương của hai vô cùng bé

Thật vậy nếu $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$

Khi đó $= \frac{\beta}{\overline{\beta}} \cdot \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} \cdot \frac{\overline{\alpha}}{\alpha}$ vì $\lim \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 1$ và $\lim \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} = 1$

Nên $\lim = \lim \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ (1-38)

Thí dụ: Biết rằng $\sqrt{1+x}$ -1 $\frac{1}{2}$x và sin 2x 2x khi x 0

Nên $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x}{2x} = \frac{1}{4}$

Để so sánh các vô cùng bé cũng như phân loại chúng, ta chọn một trong các vô cùng bé làm chuẩn và gọi là vô cùng bé cơ bản. Khi đó ta có thể biểu diễn các vô cùng bé còn lại qua vô cùng bé cơ bản .

Giả sử là vô cùng bé cơ bản thi các vô cùng bé khác có dạng c ^{k} , c R, k R^+.

<u>Định nghĩa 11</u>: Nếu vô cùng bé cùng bậc với c ^{k} tức là

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \quad 0 \qquad (1\text{-}39)$$

Thì ta nói là vô cùng bé bậc k so với và c ^{k} là phần chính của vô cùng bé .

Thí dụ :

=x , = 1 – cosx khi x 0

Cho là vô cùng bé cơ bản

Khi đó $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2.\sin^2\frac{x}{2}}{4.(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$

Nên phần chính của (x) = 1- cos x là $\frac{1}{2}x^2$

§5. SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

I. Các định nghĩa

<u>Định nghĩa 12</u>: Cho hàm số y=f(x) xác định trong khoảng (a,b) và điểm x_0 (a,b). Hàm số đó được gọi là một hàm số liên tục tại điểm x_0 nếu:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1\text{-}40)$$

Kí hiệu: $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ số gia hàm số

$\Delta x = x - x_0$ số gia đối số

Nếu f(x) liên tục tại x_0 thì :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \square y = 0 \text{ hay } \lim_{x \to x_0} \square y = 0$$

(1-41)

Thí dụ: Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x.\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

vì $\sin\dfrac{1}{x}$ bị chặn bởi 1 nên $\lim_{x \to 0} x.\sin\dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$. Vậy f(x) liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

<u>Định nghĩa 13</u>: Cho hàm số f(x) xác định trên đoạn [a,b]. Hàm số f(x) được gọi là liên tục trái tại điểm b (hay liên tục phải tại điểm a) nếu:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b-0) = f(b) \qquad (1\text{-}42)$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \qquad (1\text{-}43)$$

Hàm số liên tục trái hay phải tại điểm x_0 được gọi là hàm số liên tục một phía tại điểm đó.

Thí dụ: Xét tính liên tục một phía của hàm:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

Ta có $\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} x^2 = 1 = f(1)$ nên hàm số liên tục phải tại $x_0 = 1$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} 3x+1 = 4 \square f(1)$ nên hàm số không liên tục trái tại $x_0=1$

<u>Định lý 8</u>: Điều kiện cần và đủ để hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0 là nó phải liên tục phải và liên tục trái tại điểm đó.

<u>Định nghĩa 14</u>: Hàm số f(x) được gọi là liên tục trên đoạn [a,b] nếu nó liên tục trong khoảng (a,b) liên tục trái tại điểm b và liên tục phải tại điểm a.

<u>Định nghĩa 15</u>: Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b). Hàm số này được gọi là hàm gián đoạn tại điểm $x_0 \square$ [a,b] nếu nó không liên tục (hay nó không liên tục một phía) tại điểm đó.

Người ta chia gián đoạn cuả hàm số thành hai loại:

a, Gián đoạn loại I: là gián đoạn tại điểm x_0 nhưng tồn tại $f(x_0+0)$ và $f(x_0-0)$.

Đặc biệt nếu $f(x_0+0) = f(x_0-0) \square f(x_0)$ thì hàm f(x) được gọi là gián đoạn khử được tại điểm x_0.

b, Gián đoạn loại II : là các gián đoạn còn lại của f(x) không thuộc gián đoạn loại I.

Thí dụ: 1. Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \square 0 = f(0)$

Vậy hàm số gián đoạn loại I khử được. Nếu thay f(0) = 1 thì hàm trở thành liên tục tại x = 0.

2. Cho hàm dấu sign x = $\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=1 \square f(0)$

$\lim\limits_{x\to -0} f(x)=-1 \square f(0)$

Hàm số gián đoạn loại I tại $x_0=0$

3. Cho hàm f(x)= $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \square 0 = f(0)$

Vậy hàm số gián đoạn loại II tại $x_0=0$

II. Các phép toán và tính chất của hàm liên tục

1. *Phép toán*

Các phép toán của hàm số liên tục tại một điểm x_0 được thể hiện thông qua các định lí sau:

Định lý 9: Tổng hiệu, tích, thương (hàm mẫu số khác không tai x_0) là những hàm số liên tục tại x_0.

Định lý 10: Nếu hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0 và hàm số g(y) liên tục tại $y_0=f(x_0)$ thì hàm số hợp g_0f liên tục tại x_0.

2. *Tính chất*

Định lý 11: Nếu hàm số f(x) liên tục tại điểm a và f(a) >0 (hay f(a)<0) thì tồn tại một lân cận của điểm a, sao cho với mọi x thuộc lân cận đó thì f(x)>0 (hay f(x)<0)

Định lý 12: (Định lý Wayestrat thứ nhất)

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] thì nó bị chặn trên đoạn đó .

Định lý 13: (Định lý Wayestrat thứ hai)

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] thì nó đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên đoạn đó.

III. Các định lý về hàm liên tục

Định lý 14: (Định lý Bônxano – cosi thứ nhất)

Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] và nếu f(b).f(a)<0 thì có ít nhất một điểm $c\in$ [a,b] sao cho f(c)=0.

Chứng minh:

Vì f(a).f(b)<0 nên f(a) trái dấu f(b) ta giả thiết f(a)>0 và f(b)<0.

Bước 1 : Chia đoạn [a,b] thành 2 phần bằng nhau bởi điểm chia $\frac{a+b}{2}$.

Nếu f($\frac{a+b}{2}$) = 0 thì c = $\frac{a+b}{2}$ và định lý được chứng minh.

Nếu f($\frac{a+b}{2}$) $\neq$ 0 tức f($\frac{a+b}{2}$) < 0 hoặc f($\frac{a+b}{2}$) > 0

Ta chọn đoạn $[a_1,b_1]$ sao cho trên đoạn này $f(a_1).f(b_1) < 0$ với a_1,b_1 là điểm ($\frac{a+b}{2}$) và một trong 2 điểm a hoặc b.

Bước 2: Áp dụng cách làm như bước 1 đối với đoạn $[a_1,b_1]$ nếu f($\frac{a_1+b_1}{2}$)=0 ta xác định được c và định lý được chứng minh .

Nếu f($\frac{a_1+b_1}{2}$) $\neq$ 0 ta thực hiện chọn đoạn $[a_2,b_2]$ để $f(a_2).f(b_2)<0$

Bằng cách tiến hành như vậy ta lập được dãy con đoạn $[a_n,b_n]$ với $f(a_n).f(b_n)<0$

Vì $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)= 0$ nên $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, $c \in [a,b]$

Ta luôn có $\lim_{x\to C+0} f(x)$ khác dấu $\lim_{x\to C-0} f(x)$ nhưng vì f(x) liên tục trên [a,b] nên liên tục tại c. Vậy f(c)=0. Định lý được chứng minh.

<u>Định lí 15</u>: (Định lý Bônxanô – cosi thứ hai)

Nếu hàm số f(c) liên tục trên đoạn [a,b] và f(a)=A , f(b)=B thì hàm số đó sẽ nhận mọi giá trị trung gian giữa A và B.

<u>Hệ quả</u>: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b] thì nó nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn đó.

Chú ý: Nếu chỉ giả thiết hàm số f(x) liên tục trên khoảng (a,b) thì các định lý từ 13 đến 15 sẽ không còn đúng nữa.

Thí dụ: Hàm số f(x)=$\frac{1}{x}$ liên tục trong khoảng (0,1) nhưng không bị chặn trên khoảng đó.

<u>Định lý 16</u>: Mỗi hàm sơ cấp đơn giản liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

Chương 2

Đạo hàm và vi phân

§1. ĐẠO HÀM

I. Hai bài toán dẫn đến đạo hàm

1.Bài toán thứ nhất: Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng

Xét chất điểm chuyển động thẳng theo quy luật cho bởi biểu thức:

$$S = S(t) \tag{2-1}$$

S - quãng đường đi được của chất điểm trong quãng thời gian t

t - thời gian

Ta cần xác định vận tốc v của chất điểm

a)Nếu chất điểm chuyển động đều thì:

$$v = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2-2}$$

b)Nếu chất điểm chuyển động không đều thì công thức (2-2) chỉ cho chúng ta vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $[t_1, t_2]$. Vậy muốn biểu thị vận tốc của chất điểm tại thời điểm t ta cần:

1-Định nghĩa vận tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động thẳng

2-Tính vận tốc tức thời đó

Ta nhận thấy rằng nếu khoảng thời gian $t - t_o$ càng bé thì:

$$v_t = \frac{S(t) - S(t_o)}{t - t_o} \tag{2-3}$$

Cho ta biểu thức càng chính xác về vận tốc tại điểm t_o. Do đó vận tốc tức thời của chuyển động thẳng S = S(t) tại thời điểm t_o được xem là giới hạn

$$\lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_o)}{t - t_o} = v_{t_0} \tag{2-4}$$

Kí hiệu: $\Delta f = S(t) - S(t_o) = \Delta S$

$\Delta t = t - t_o$

Công thức (2-4) được viết lại:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2-5}$$

2.Bài toán thứ hai: Tỉ khối địa phương của thanh không đồng chất

Xét thanh thẳng AB có thiết diện không đổi. Tỉ khối trung bình của thanh là tỉ số d giữa khối lượng và chiều dài của thanh.

a)Nếu thanh đồng chất thì d là hằng số.

b)Nếu thanh không đồng chất thì d là một hàm số theo tọa độ của trục thanh. Như vậy để xác định được tỉ khối địa phương chúng ta cần:

1-Định nghĩa tỉ khối địa phương theo tọa độ trục thanh

2-Xác định giá trị của tỉ khối đó

Cụ thể: chọn trục thanh là trục tọa độ xx'. Lấy một đầu mút (chẳng hạn mút A) làm gốc O. Khi đó chiều dài AB = l là dương. Xem các điểm của thanh trên một thiết diện là giống nhau (thực tế có sự sai khác), khi đó mỗi điểm trên thanh sẽ hoàn toàn xác định bởi hoành độ của điểm đó. Gọi m là khối lượng của đoạn thanh OM ($\overline{OM}$ = x) thì m = m(x) = f(x).

Xét tỉ khối trung bình của một mẫu thanh dài $(x - x_o)$ xác định bởi:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \qquad (2\text{-}6)$$

Nếu chiều dài mẫu càng bé thì (2-6) cho ta độ chính xác càng cao của sự phân bố vật chất xung quanh điểm x_o. Ta có định nghĩa:

Ta xem giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ là tỉ khối địa phương của thanh thẳng tiết diện đều AB tại điểm x_o. (2-7)

Kí hiệu $\Delta f = f(x) - f(x_o)$

$\Delta x = x - x_o$

Công thức (2-7) được viết lại:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad (2\text{-}8)$$

3.<u>Kết luận</u>: Để xác định vận tốc tức thời v_t của chuyển động thẳng đều hay tỉ khối địa phương của thanh đồng tiết diện đều, ta đều dẫn đến bài toán tìm giới hạn của tỉ số giữa số gia của hàm số và số gia đối số khi số gia đối số tiến đến không

Từ hai bài toán trên ta dẫn đến khái niệm đạo hàm của hàm số.

II. Định nghĩa đạo hàm của hàm một biến số

Giả sử y = f(x) là hàm số xác định trong khoảng (a,b) và $x_o \in (a,b)$ tùy ý. Với số gia Δx sao cho $x_o + \Delta x \in (a,b)$ ta lập tỉ số

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \qquad (2\text{-}9)$$

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$ thì số A được gọi là đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm $x = x_o$.

Kí hiệu $f'(x_o) = A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ (2-10)

Rõ ràng khi x_o thay đổi, giá trị của $f'(x_o)$ cũng thay đổi tức đạo hàm f' của hàm số f(x) cũng là một hàm số.

Gọi f'- đạo hàm của hàm số f

$f'(x_o)$ - giá trị đạo hàm của hàm số f tại điểm x_o

Kí hiệu $f'(x_o) = [f(x)]'|_{x=xo} = f'(x)|_{xo}$ (2-11)

III. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

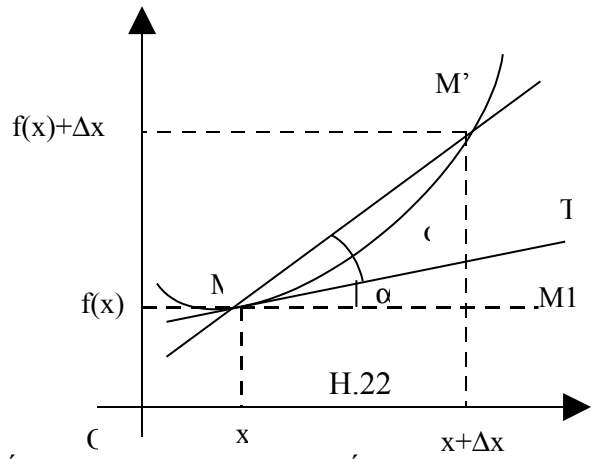
1.Định nghĩa tiếp tuyến của đường cong (C)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường cong (C).

Lấy điểm cố định M∈(C), M(x,y) và điểm M_1 chạy trên (C).

Dựng cát tuyến MM_1. Khi M_1 chạy trên (C) MM_1 sẽ quay xung quanh điểm M.

Vị trí giới hạn của cát tuyến MM_1 khi M_1 tiến đến M dọc theo (C) là tiếp tuyến của đường cong (C) tại M. Kí hiệu MT



2.Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Giả sử đường cong (C) là đồ thị của hàm số y = f(x). Giả thiết hàm số f(x) có đạo hàm tại điểm x.

M_1 có tọa độ là $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

φ - góc giữa cát tuyến MM_1 với chiều dương Ox.

α - góc giữa tiếp tuyến MT với chiều dương Ox.

Theo định nghĩa tiếp tuyến ta có:

$$\alpha = \lim_{M_1 \to M} \varphi \quad \text{hay} \quad tg\alpha = \lim_{M_1 \to M} tg\varphi$$

Ta có $$tg\varphi = \frac{M_1H}{MH} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (2\text{-}12)$$

Hay $$tg\alpha = \lim_{M \to M_1} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (2\text{-}13)$$

Theo định nghĩa vế phải của (2-13) chính là đạo hàm f'(x). Vế trái của (2-13) là hệ số góc của tiếp tuyến MT của đường cong (C) tại M.

Vậy đạo hàm của hàm số f(x) tại x có giá trị bằng hệ số góc của tiếp tuyến của đường cong y = f(x) tại điểm đó.

Đây chính là ý nghĩa hình học của đạo hàm.

IV. Các quy tắc cơ bản để tính đạo hàm

Ta có thể thực hiện lấy đạo hàm của một lớp khá rộng các hàm số bằng cách kết hợp việc thiết lập các quy tắc cơ bản lấy đạo hàm tổng quát với việc tìm đạo hàm của các số riêng biệt.

<u>Định lý 1</u>: Cho hàm số f và g xác định trong khoảng (a,b) và có đạo hàm tại điểm $x_o \in (a,b)$, khi đó $f \pm g$, kf (với k là số thực bất kì) f.g và $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$ với $\forall x \in (a,b)$) cũng có đạo hàm tại điểm x_o và ta có:

1-$(f \pm g)'(x_o) = f'(x_o) \pm g'(x_o)$ (2-14)

2-$(k.f)'(x_o) = k.f'(x_o)$ (2-15)

3-$(f.g)'(x_o) = f'(x_o).g(x_o) + f(x_o).g'(x_o)$ (2-16)

4-$(\frac{f}{g})'(x_o) = \frac{f'(x_o).g(x_o) - f(x_o).g'(x_o)}{g^2(x_o)}$ (2-17)

Chứmg minh:

1-Ta có: $\frac{(f \pm g)(x_o + h) - (f \pm g)(x_o)}{h} = \frac{f(x_o + h) \pm g(x_o + h) - [f(x_o) \pm g(x_o)]}{h}$

$= \frac{[f(x_o + h) - f(x_o)] \pm [g(x_o + h) - g(x_o)]}{h} = \frac{[f(x_o + h) - f(x_o)]}{h} \pm \frac{g(x_o + h) - g(x_o)}{h}$

Chuyển qua giới hạn ta nhận được kết quả (2-14)

Thí dụ:

1.Tính đạo hàm của hàm số hằng y = c

$\Delta y \equiv 0 \ \ \forall x \rightarrow y'(x) \equiv 0$

2.Tính đạo hàm của hàm đồng nhất y = x

Do $\Delta y = \Delta x$ nên $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Rightarrow (x)'=1$

3.Tính đạo hàm của hàm lũy thừa $y=x^n$, $n \in N^+$

Cho số gia Δx. Khi đó:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + ... + \Delta x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}\Delta x + ... + \Delta x^{n-1}$$

Chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \rightarrow 0$ ta nhận được

$$(x^n)' = n.x^{n-1}$$

4.Định nghĩa các đạo hàm một phía

*Giả sử hàm số f(x) xác định với mọi $x_o \leq x \leq b$

Nếu tồn tại $\lim_{h \to +0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ thì ta nói rằng hàm số f có đạo hàm bên phải tại điểm x_o.

Kí hiệu $f'(+x_o)$ hay $f'(x_o+0)$

*Giả sử hàm số f(x) xác định với mọi $a \leq x \leq x_o$

Nếu tồn tại $\lim_{h \to -0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$ thì ta nói rằng f có đạo hàm bên trái tại điểm x_o.

Kí hiệu $f'(-x_o)$ hay $f'(x_o-0)$

*Hàm số f(x) nếu có đạo hàm tại điểm x_o thì nó có các đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải tại điểm x_o. Điều khẳng định ngược lại là không hẳn đúng.

Thí dụ: hàm số y = |x| có đạo hàm trái tại $(x')_{(-o)} = -1$ và $(x')_{(+o)} = 1$. Nó không có đạo hàm tại $x_o = 0$.

*Các đạo hàm bên trái và bên phải điểm x_o, gọi chung là các đạo hàm một phía.

2-Ta có $\dfrac{kf(x_o+h)-kf(x_o)}{h} = k.\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \xrightarrow{h\to 0} k.f'(x_o)$

3-Ta có $\dfrac{(f.g)(x_o+h)-(f.g)(x_o)}{h} = \dfrac{f(x_o+h).g(x_o+h)-f(x_o).g(x_o)}{h}$

$$= \frac{f(x_o+h).g(x_o+h)-f(x_o).g(x_o+h)+f(x_o).g(x_o+h)-f(x_o).g(x_o)}{h}$$

$$= \frac{[f(x_o+h)-f(x_o)].g(x_o+h)}{h} + f(x_o)\frac{[g(x_o+h)-g(x_o)]}{h}$$

qua giới hạn ta nhận được (2-16)

4-Để chứng minh ta chỉ cần xét trường hợp khi $f(x) \equiv 1$

Ta có $\dfrac{1}{g(x_o+h)} - \dfrac{1}{g(x_o)} = -\dfrac{g(x_o+h)-g(x_o)}{g(x_o)g(x_o+h)}$ chia cho h và qua giới hạn ta có:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_o) = -\frac{g'(x_o)}{g(x_o)}$$

Thực hiện tiếp theo cho hàm $\left(f\cdot\dfrac{1}{g}\right)(x_o)$ kết hợp với 3 ta nhận được (2-17).

<u>Định lý 2</u>: (Đạo hàm của hàm số hợp)

Nếu hàm y = f(x) có đạo hàm tại $x = x_o$ và z = g(y) xác định trong khoảng chứa điểm $y_o=f(x_o)$ có đạo hàm tại $y = y_o$ thì hàm hợp $z = g_of(x)$ có đạo hàm tại điểm x_o và ta có:

$$z'(x_o) = g'(y_o)f'(x_o) \qquad (2\text{-}18)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$y - y_o = f(x) - f(x_o) = (x - x_o)[f'(x_o) + \varepsilon(x)]$

trong đó $\varepsilon(x) \to 0$ khi $x \to x_o$

và $g(y) - g(y_o) = (y - y_o)[g'(y_o) + \delta(y)]$

trong đó $\delta(y) \to 0$ khi $y \to y_o$

Nên $z(x) - z(x_o) = g[f(x)] - g[f(x_o)] = g(y) - g(y_o) = (y - y_o)[g'(y_o) + \delta(y)]$

$= (x - x_o)[f'(x_o) + \varepsilon(x)][g'(y_o) + \delta(y)]$

Khi $x \to x_o$ thì $\varepsilon(x) \to 0$, theo tính liên tục của f(x) tại x_o ta cũng có $y \to y_o$ và do đó $\delta(y)\to 0$.

Do đó: $\dfrac{z(x)-z(x_o)}{x-x_o} = [f'(x_o) + \varepsilon(x)][g'(x_o) + \delta(y)]$

Chuyển qua giới hạn ta nhận được (2-18).

<u>Định lý 3</u>: (Đạo hàm của hàm số ngược)

Giả sử hàm số y = f(x) liên tục và tăng nghiêm ngặt trong khoảng (a,b) và giả thiết rằng x=φ (y) là hàm ngược xác định trong lân cận của điểm $y = y_o = f(x_o)$ ($x_o \in (a,b)$). Khi đó nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại $x = x_o$ và $f'(x_o) \neq 0$ thì hàm số x = φ(y) có đạo hàm tại $y = y_o$ và ta có:

$$\varphi'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} \qquad (2\text{-}19)$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa đạo hàm ta xét tỉ số $\dfrac{\varphi(y) - \varphi(y_o)}{y - y_o}$

Ta có: $\varphi(y) = x$, $\varphi(y_o) = x_o$, $y = f(x)$, $y_o = f(x_o)$ nên:

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_o)}{y - y_o} = \frac{x - x_o}{f(x) - f(x_o)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}$$

Vì $y - y_o \neq 0$, $x - x_o \neq 0$ và giả thiết tồn tại $f'(x_o)$, chuyển qua giới hạn ta nhận được (2-19).

V. Sự liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm hữu hạn tại x_o thì nó liên tục tại x_o.

Thật vậy vì f có đạo hàm tại x_o nên $\Delta f = [f'(x_o) + \alpha(x)]\Delta x$ với $\alpha(x) \to 0$ khi $x \to x_o$. Hơn nữa khi $x \to x_o$, $\Delta f \to 0$. Tức là f liên tục tại x_o.

Điều khẳng định ngược lại không hẳn đúng.

Thí dụ: Xét hàm f(x) = |x|

Hàm này liên tục tại x = 0, nhưng không tồn tại f' tại x = 0.

VI. Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số f(x) xác định, liên tục trong khoảng (a,b). Giả sử f(x) có đạo hàm tại $\forall x \in (a,b)$, khi đó đạo hàm f' cũng là một hàm số xác định và liên tục trong khoảng (a,b). Nếu hàm số f'(x) có đạo hàm tại $x_o \in (a,b)$ thì ta gọi đạo hàm đó là đạo hàm cấp hai của hàm số f tại điểm x_o.

Kí hiệu $f''(x_o)$.

Tiếp tục theo cách suy diễn như vậy ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp n.

<u>Định nghĩa đạo hàm cấp cao</u>:

Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a,b) và f(x) được gọi là có đạo hàm cấp n tại $x_o \in (a,b)$ nếu hàm số f có đạo hàm đến cấp (n–1) trong (a,b) và hàm số đạo hàm cấp (n–1) có đạo hàm tại điểm x_o.

Kí hiệu $f^{(n)}(x_o) = [f^{(n-1)}(x)]'|_{x=xo}$

VII. Đạo hàm các hàm sơ cấp

1.Đạo hàm của hàm số logarit và hàm số mũ

Xét hàm số logarit $y = \log_a x$ với a>0, a≠1 và $x_o>0$

Ta có: $$\frac{\log_a(x_o + h) - \log_a x_o}{h} = \frac{1}{h}.\log_a\left(\frac{x_o + h}{x_o}\right) = \frac{1}{h}\log_a\left(1 + \frac{h}{x_o}\right)$$

$$= \frac{1}{x_o}.\frac{x_o}{h}.\log_a\left(1+\frac{h}{x_o}\right) = \frac{1}{x_o}.\log_a\left(1+\frac{x_o}{h}\right)^{\frac{x_o}{h}} \xrightarrow{x_o \to h} \frac{1}{x_o}.\log_a e \text{ khi } h\to 0$$

Vậy $(\log_a x)' = \frac{1}{x}.\log_a e$ (2-21)

Đặc biệt nếu a = e công thức (1-21) được viết lại

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (2\text{-}21)'$$

Nếu x < 0 thì $\log_a(-x)$ luôn xác định. Thực hiện lấy đạo hàm của hàm số hợp ta cũng nhận được các công thức (1-21), (1-21)'.

Xét hàm số mũ $x = a^y$, là hàm số ngược của $y = \log_a x$. Theo quy tắc lấy đạo hàm của hàm số ngược ta có:

$$(a^y)'|_{y=y_o} = \frac{1}{(\log_a x)'|x_o} = \frac{1}{\frac{1}{x_o}\log_a e} = \frac{a^{yo}}{\log_a e} = a^{yo}\log_e a$$

Vậy $(a^y)'|_{yo} = a^{yo}\ln a$

Xem biến là x ta có: $(a^x)' = a^x.\ln a$ (2-22)

Đặc biệt khi a = e ta nhận được công thức đơn giản hơn:

$$(e^x)' = e^x \qquad (2\text{-}22)'$$

2.Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Xét hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$, α - số thực xác định với x > 0

Ta biểu diễn hàm y dưới dạng $y = e^{\alpha\ln x}$ và thực hiện lấy đạo hàm của hàm số này theo quy tắc đạo hàm của hàm số hợp.

Ta có: $y'(x) = e^{\alpha\ln x}.(\alpha\ln x)' = \alpha.\frac{1}{x}.e^{\alpha\ln x} = \alpha.\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ (1-23)

Đặc biệt khi $\alpha \in N^+$ ta trở lại công thức:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (1\text{-}24)$$

Công thức (1-23) vẫn đúng trong trường hợp x < 0 và x^α có nghĩa.

Khi đó ta viết $y = (-1)^\alpha(-x)^\alpha$ x<0

vì (–x)>0 nên áp dụng (2-23) ta có:

$$y' = (-1)^{\alpha+1}.\alpha(-x)^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}$$

3.Đạo hàm của các hàm lượng giác và các hàm lượng giác ngược

a)y = sinx

Xét: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$

Chuyển qua giới hạn $(\sin x)' = \cos x$ (1-25)

b)y = cosx

Xét: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.\sin(x+\frac{\Delta x}{2})$

Chuyển qua giới hạn (cosx)' = –sinx (1-26)

c)y = tgx

Ta viết: $y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{tg(x+\Delta x) - tgx}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x).\cos x - \cos(x+\Delta x).\sin x}{\Delta x.\cos x.\cos(x+\Delta x)} = \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.\frac{1}{\cos x.\cos(x+\Delta x)}$$

Chuyển qua giới hạn (tgx)' = $\frac{1}{\cos^2 x}$ (1-27)

d)y = cotgx

Thực hiện tương tự như cách làm đối với tính đạo hàm của tgx ta có

$$(cotgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (1\text{-}28)$$

e)y = arcsinx với x = sinx, $\frac{-\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

Theo quy tắc lấy đạo hàm của hàm số ngược

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

Vì $y \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nên $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, do đó:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

f)Tương tự ta nhận được công thức tính đạo hàm của các hàm lượng giác ngược còn lại

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arccotgx)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

g)Đạo hàm các hàm Hypecbollic

*$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$(shx)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = chx \qquad (2\text{-}33)$$

*Tương tự ta nhận được công thức tính đạo hàm của:

$$(chx)' = shx \qquad (2\text{-}34)$$

§2. VI PHÂN

I. Định nghĩa vi phân

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm tại điểm $x \in (a,b)$

Tức tồn tại $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Lập $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x)$ (2-35)

với $\alpha(\Delta x)$ là vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$. Do đó $\alpha.\Delta x$ là vô cùng bé bậc cao hơn so với Δx. Từ (2–35) ta nhận được:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \alpha.\Delta x = f'(x).\Delta x + O(\Delta x) \qquad (2\text{-}36)$$

Vì f'(x) tại mỗi x nhận giá trị bằng số và không phụ thuộc Δx, nên $f(x).\Delta x$ là một đại lượng tỉ lệ với Δx. Ta có <u>Nhận xét</u>:

*Nếu y = f(x) có đạo hàm tại điểm x thì tại đó số gia Δy có thể biểu diễn dưới dạng (1–36), tức nó được phân tích thành tổng của một đại lượng tỉ lệ với Δx và một vô cùng bé bậc cao so với Δx (Khi $\Delta x \to 0$).

*Đảo lại nếu số gia Δy tại điểm x của hàm số y = f(x) có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A.\Delta x + O(\Delta x) \qquad (2\text{-}37)$$

Ở đây A không phụ thuộc Δx, thì hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x.

Từ (1-37) ta có: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + O(1)$ với $O(1) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$

Vậy ra $y' = f'(x) = A$

Như vậy điều kiện cần và đủ để hàm số y = f(x) có thể phân tích số gia Δy của nó thành tổng dạng (2-36) là f(x) phải có đạo hàm f'(x) tại x. Số hạng thứ nhất $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số y = f(x) và được kí hiệu là dy.

$$dy = f'(x).\Delta x \qquad (2\text{-}38)$$

Xét hàm đồng nhất y = x. Do $y'(x) \equiv 1$ nên:

$$dy = dx = \Delta x.$$

Ta quy ước $dx \equiv \Delta x$ (vi phân của biến số x đồng nhất với số gia), nên công thức (2-38) được viết lại:

$$dy = f'(x).dx \qquad (2\text{-}39)$$

Hàm số f(x) có vi phân tại x_o được gọi là hàm khả vi tại điểm đó

II. Ứng dụng vi phân để tính gần đúng

Nhận xét: Theo biểu diễn (1-37) $\Delta y = f'(x)\Delta x + O(\Delta x)$.

Khi Δx khá bé ta thấy $f'(x)\Delta x$ xấp xỉ số gia Δy của hàm.

Nếu $f'(x) \neq 0$ thì $f'(x)\Delta x$ là phần chính tuyến tính của số gia Δy. Như vậy nếu biết được giá trị của hàm tại điểm x_o nào đó ta có thể tính được giá trị gần đúng của hàm trong lân cận điểm này với độ chính xác tùy ý tùy thuộc vào việc chọn số gia đối số Δx. Giá trị gần đúng xấp xỉ vi phân của hàm tại x_o cộng với giá trị của hàm tại điểm đó ($f'(x_o) \neq 0$). Ta có công thức:

$$f(x) \approx f(xo) + f'(x_o).\Delta x \qquad (2\text{-}40)$$

Thí dụ:

1.Tính giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{28}$

Ta xét hàm $f(x) = \sqrt[3]{x}$ và $x_o = 27$, $\Delta x = 1$

Áp dụng công thức (2-40) , ta có:

$$f(28) = \sqrt[3]{28} \approx f(27) + f'(27).1 = 3 + \frac{1}{3}.\frac{1}{9} = 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27} = \sqrt[3]{27} + \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}\right)^{-1}$$

2.Tính giá trị gần đúng của $\sin 46^o$

Ta xét hàm y = sinx và $x_o = 45^o = \frac{\pi}{4}$, $\Delta = \frac{\pi}{180}$

Áp dụng công thức (2-40), ta có:

$$\sin 46^o \approx \sin 45^o + \sin 45^o.\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{180^o} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{180}) = \frac{\sqrt{2}(\pi + 180)}{360}$$

III. Tính bất biến của dạng biểu thức vi phân

Giả sử y = f(x) và $x = \varphi(t)$ là các hàm số khả vi tại x_o và tại t_o, với $x_o = \varphi(t_o)$ và giả sử rằng ta thiết lập được hàm hợp $y = f[\varphi(t)]$. Khi đó ta có:

$$dy = df = (f(\varphi(t)))'.dt = f'(x).x'(t).dt = f'(x).dx$$

Ta nhận thấy dù x là biến độc lập hay x là hàm khả vi của một biến độc lập khác thì dạng vi phân cấp 1 của nó vẫn không thay đổi. Đây chính là tính bất biến dạng của biểu thức vi phân.

IV. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số y = f(x) khả vi trong (a,b). Vi phân $dy = f'(x)dx$ được gọi là vi phân cấp 1 của hàm y = f(x) tại $x \in (a,b)$. Nếu hàm số đạo hàm f'(x) cũng có đạo hàm tại x, lấy vi phân của hàm $dy = f'(x)dx$ trong đó xem $dx = \Delta x$ là không đổi. Biểu thức nhận được, gọi là vi phân cấp 2 của hàm số y = f(x) tại x, kí hiệu $d^2f = d^2y$.

$$d^2f = d^2y = d[dy] = d[f'(x)dx] = f''(x)dx^2$$

$$dy^2 = f''(x)dx^2 \qquad (2\text{-}41)$$

Tương tự chúng ta thiết lập được công thức của các vi phân cấp 3, 4,…, n của hàm số f(x). Biểu thức tổng quát được cho dưới dạng:

$$d^ny = f^{(n)}(x).dx^n \qquad (2\text{-}42)$$

Thí dụ: Xét hàm số $y = f(x) = 8x^4 + 3x^2 + 5x + 2$

$dy = (32x^3 + 6x + 5)dx$

$d^2y = (96x^2 + 6)dx^2$

Chương 3

Tích phân không xác định

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

I. Định nghĩa nguyên hàm của hàm số

Định nghĩa 1: Ta nói rằng hàm số F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trong một khoảng nào đó (hữu hạn hoặc vô hạn), nếu tại mỗi điểm khoảng này

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (3\text{-}1)$$

Thí dụ:

1. F(x) = sinx là nguyên hàm của f(x) = cosx.
2. $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ với $-1 < x < 1$

Người ta còn gọi nguyên hàm của một hàm số là tích phân không xác định của hàm số đó, kí hiệu $\int f(x)dx$.

Mặt khác $\frac{d(F(x)+C)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (3-2)

nên F(x) +C với $C \in R$ là hằng số tùy ý cũng là một nguyên hàm của hàm số f(x). Nên ta có:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (3\text{-}3)$$

Nếu nói F(x) là tích phân không xác định của hàm f(x) thì phải hiểu đó là tích phân được lấy trên miền mà hàm số xác định.

II. Các tính chất của tích phân không xác định

Giả sử trong khoảng (a,b) các hàm F(x) và $\phi(x)$ là nguyên hàm của các hàm f(x) và $\varphi(x)$. Khi đó:

Các hàm $[f(x) \pm \varphi(x)]$ cũng có nguyên hàm và

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx = F(x) \pm \phi(x) + C \qquad (3\text{-}4)$$

Với số $k \in R$, k.f(x) cũng có nguyên hàm và

$$\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx = k.F(x) + C \qquad (3\text{-}5)$$

III. Các công thức cơ bản của tích phân không xác định

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ với $n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}.a^x + C$ với $a > 0, a \neq 1$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C = -\text{arccotg}x + C$

Để lấy tích phân của hàm f(x) ta sẽ phân tích f(x) thành biểu thức là tổ hợp của các hàm cơ bản mà các hàm đó công thức lấy tích phân đã được biết. Khi đó dựa vào các tính chất của tích phân không xác định ta hoàn toàn lấy được tích phân của hàm f(x) đã cho.

§2. CÁC PHƯƠNG PHÁP LẤY TÍCH PHÂN KHÔNG XÁC ĐỊNH

Để lấy tích phân của hàm f(x) ta phải biến đổi f(x) sao cho biểu thức dưới dấu tích phân ở dạng mới sẽ thực hiện được việc lấy tích phân thông qua các công thức lấy tích phân của các hàm cơ bản. Ta có hai phương pháp cơ bản lấy tích phân không xác định sau:

I. Phương pháp thế

Giả sử trong khoảng (a,b) ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C$ (3-6)

$x = \varphi(t)$ liên tục cùng với đạo hàm cấp một của nó trong đoạn $[\alpha,\beta]$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$. Khi đó hàm F được xem là hàm hợp $F(\varphi(t))$ xác định trên $[\alpha,\beta]$. Ta có:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t)).\varphi'(t) \qquad (3\text{-}7)$$

Vì F'(x) = f(x) nên viết lại (3-7) $\quad \dfrac{dF(\varphi(t))}{dt} = f(\varphi(t)).\varphi'(t)$

Hay $$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] \qquad (3\text{-}8)$$

So sánh (3-6) và (3-8) ta thấy rằng có thể việc lấy tích phân theo (3-8) là thực hiện được. Sau khi lấy được tích phân theo t, trở về biến cũ x ta có được biểu thức tích phân không xác định F(x) cần tính.

Như vậy thực chất của phép đổi biến số là ta biến đổi biểu thức dưới dấu tích phân f(x)dx theo biến mới theo phép thế x = φ(t), dx = φ'(t)dt và thực hiện tích phân theo t

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$$

Thí dụ:

1.Tính $\int (a+bx)^n dx \qquad n \neq 1,\ b \neq 0$

Thế a+bx = t $\Rightarrow$ bdx = dt $\Rightarrow$ $dx = \dfrac{dt}{b}$

$$\int (a+bx)^n dx \overset{t}{=} \frac{1}{b}\int t^n dt = \frac{1}{b}.\frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \overset{x}{=} \frac{1}{b}.\frac{1}{n+1}(a+bx)^{n+1} + C$$

Khi n = –1 ta có:

$$\int \frac{dx}{a+bx} \overset{t}{=} \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{b}\ln|t| + C \overset{x}{=} \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C$$

2.Tính $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a-x^2}} \qquad a > 0$ và $a > x^2$

Thế $x = \sqrt{a}t, dx = \sqrt{a}dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} \overset{t}{=} \int \frac{\sqrt{a}dt}{\sqrt{a-at^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C \overset{x}{=} \arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + C$$

Nếu trao đổi vai trò của x và t trong công thức (3-8) ta nhận được:

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C \qquad (3\text{-}9)$$

Đây là dạng chúng ta thường hay gặp.

Thí dụ:

1. Tính $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

Dễ thấy $d(x^2 + x + 1) = (2x + 1)dx$

Thế $x^2 + x + 1 = t$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx \overset{t}{=} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C \overset{x}{=} \ln|x^2+x+1| + C$$

2.Tính $\int (a+bx^2)^n.xdx \qquad b \neq 0,\ \ n \neq -1$

Thế $a + bx^2 = t$, $\quad xdx = \dfrac{1}{2b}dt$

$$\int (a+bx^2)xdx \overset{t}{=} \frac{1}{2b}.\int t^n.dt = \frac{1}{2b}.\frac{1}{n+1}.t^{n+1} + C \overset{x}{=} \frac{1}{2b}.\frac{1}{n+1}(a+b^2)^{n+1} + C$$

3.Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

Thế $\sqrt{x^2+a} + x = t \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{a+x^2}} + 1\right)dx = dt$

$$\frac{x+\sqrt{a+x^2}}{\sqrt{a+x^2}}dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \overset{t}{=} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C \overset{x}{=} \ln\left|x+\sqrt{a+x^2}\right| + C \qquad (3\text{-}10)$$

4.Tính $\int \sin^n x\cos xdx$

dsinx = cosxdx. Thế sinx = t

$$\int \sin^n x\cos xdx \overset{t}{=} \int t^n dt = \frac{1}{n+1}.t^{n+1} + C \overset{x}{=} \frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x + C$$

5.Tính $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n}$ $\quad n \neq 1$

Thế $x^2+1 = t$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^n} \overset{t}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + C \overset{x}{=} -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + C$$

II. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử các hàm u(x) và v(x) liên tục và có đạo hàm trong khoảng (a,b). Khi đó u(x).v(v) cũng liên tục và có đạo hàm trong khoảng đó. Ta có:

$$d[u(x).v(x)] = du(x).v(x) + u(x).dv(x)$$

$$\int d[u(x).v(x)] = \int [u(x)dv(x) + v(x)du(x)]$$

$$u(x).v(x) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$$

Ta suy ra: $\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)du(x)$ (3-11)

$\int v(x)du(x) = u(x).v(x) - \int u(x)dv(x)$ (3-12)

Các công thức (3-10),(3-11) cho phép chúng ta chuyển việc tính $\int u(x)dv(x)$ về việc tính $\int v(x)du(x)$ (hay ngược lại) mà đối với tích phân sau ta thực hiện việc lấy tích phân một cách dễ dàng hơn. Đặc biệt những tích phân dạng $\int x^k \ln^m xdx$, $\int x^k e^{ax}dx$, $\int x^k \sin bxdx$, $\int x^k \cos bxdx$ thường dùng quy tắc này.

Thí dụ:

1.Tính $\int xe^x dx$

Đặt $u(x) = x \Rightarrow du(x) = dx$

$dv(x) = e^x dx \Rightarrow v(x) = e^x$

$\int xe^x dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$

2.Tính $\int \ln x dx$

Đặt $u(x) = \ln x \Rightarrow du(x) = \frac{1}{x}dx$

$dv(x) = dx \Rightarrow v(x) = x$

$$\int \ln x dx = x.\ln x - \int dx = x\ln x - x + C \qquad (3\text{-}13)$$

Từ các ví dụ ta bổ sung các công thức (3-10), (3-13) vào bảng các công thức tích phân cơ bản.

§3. CÁC CÔNG THỨC TRUY HỒI

Trong quá trình lấy tích phân ta thường hay gặp một số dạng hàm dưới dấu tích phân là luỹ thừa bậc n của một hàm nào đó với $n \in N$. Ta đưa ra một số các công thức truy hồi sau:

1. $I_n = \int \sin^n x dx \qquad n \neq 0$

$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (3\text{-}14)$$

2. $I_n = \int \cos^n x dx \qquad n \neq 0$

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (3\text{-}15)$$

3. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \qquad n \neq 1$

$$I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \qquad (3\text{-}16)$$

4. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \qquad n \neq 1$

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \qquad (3\text{-}17)$$

Việc chứng minh các công thức (3-14), (3-15), (3-16), (3-17) được thực hiện bằng phương pháp tích phân từng phần. Sau đây ta sẽ chứng minh các công thức (3-14) và (3-17).

•Xét $I_n = \int \sin^n x dx$

Ta có: $\sin^n x = \sin^{n-2} x.\sin^2 x = \sin x^{n-2}(1 - \cos^2 x)$

$I_n = \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-2} x(1 - \cos^2 x)dx = I_{n-2} - \int \sin^{n-2} \cos^2 x dx$

Tính $\int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \int \cos x \sin^{n-2} x d\sin x$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$dv = \sin^{n-2}x d\sin x \Rightarrow \quad v = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x$$

Vậy $\int \sin^{n-2}x\cos^2 x dx = \frac{1}{n-1}\cos x.\sin^{n-1}x + \int \frac{1}{n-1}\sin^n x dx = \frac{\cos x \sin^{n-1}x}{n-1} + \frac{1}{n-1}I_n$

Thế vào biểu thức I_n ta được:

$$I_n = I_{n-2} - \frac{\cos x \sin^{n-1}x}{n-1} + \frac{1}{n-1}I_n$$

$\Rightarrow \; I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Điều phải chứng minh.

•Xét $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

Thực hiện tích phân từng phần với $u = \frac{1}{(x^2+1)^n} \Rightarrow \; du = -\frac{2nxdx}{(x^2+1)^{n+1}}$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2n.x^2dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \; I = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

$$\Rightarrow \; I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$$

Trong công thức trên nếu thay n bởi n–1 ta nhận được

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.$$ Điều phải chứng minh

§4. TÍCH PHÂN CÁC HÀM HỮU TỈ

Xét hàm hữu tỉ $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Ở đây P(x),Q(x) là các đa thức bậc m, n.

Nếu $m > n$, R(x) gọi là một hàm phân thức không thực sự

$m < n$, R(x) gọi là một hàm phân thức thực sự.

Bằng phép chia đa thức ta luôn đưa R(x) về dạng tổng của một đa thức với một hàm phân thức thực sự.

Xét $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự thì ta luôn có thể phân tích nó thành tổng của các phân thức cơ bản với các tích phân của các phân thức cơ bản có các dạng sau:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx$ 2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ 4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

Với $A, M, N, a, p, q \in R; k, n \in N^+$

và $4q - p^2 > 0$

Ta chỉ ra rằng các tích phân của các phân thức cơ bản đều lấy được tích phân. Các tích phân (1), (2) là hai dạng quen thuộc với:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A.\int \frac{dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A.\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1)$$

Các tích phân (3), (4) được tính với phép thế:

$$x + \frac{1}{2}p = t\ ; \qquad dx=dt$$

đặt $a > 0, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}$

Khi đó:

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2$$

$$Mx + N = Mt + (N - \frac{1}{2}Mp)$$

Tích phân (3) có dạng:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx \overset{t}{=} \int \frac{Mt + \left(N - \frac{1}{2}Mp\right)}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{1}{2}Mp\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{t}{a} + C$$

Vậy $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\text{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \qquad (3\text{-}19)$$

Tích phân (4) có dạng:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx \overset{t}{=} \int \frac{Mt + \left(N - \frac{1}{2}Mp\right)}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{1}{2}Mp\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

Ta lấy tích phân của tích phân thứ nhất bằng cách đổi biến.

$$u = t^2 + a^2\ ; \qquad du = 2tdt$$

$$\int \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{u^{n-1}} + C$$

Tích phân thứ hai được lấy dựa vào công thức truy hồi (3-17) sau khi rút a^2 ra ngoài và thế $\frac{t}{a} = u$.

Thực hiện trở về biến x, chúng ta nhận được biểu thức cuối cùng của tích phân (4) cần tính.

Ta kết luận rằng mọi hàm hửu tỉ đều có thể thực hiện lấy tích phân của chúng.

§5. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM VÔ TỈ DẠNG ĐƠN GIẢN

Với hàm đại số là các hàm vô tỉ dưới dạng đơn giản, là chứa luỹ thừa số mũ phân của biến đối lập của một nhị thức hay một phân thức, bằng các phép thế thích hợp ta cũng có thể thực hiện lấy được tích phân của chúng. Các phép thế đó là:

$x = z^p$; $ax + b = z^p$; $\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^p$. Với p – MSCNN của các số mũ phân

Thí dụ:

1.Với phép thế $x = z^p$

a)Tính $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\left(1+x^{1/3}\right)x^{1/2}}$

$p = 6$. Thế $x = z^6$; $dx = 6t^5dz$

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} \overset{z}{=} \int \frac{6z^5dz}{\left(1+z^2\right)z^3} = 6\cdot\int \frac{z^2dz}{1+z^2} = 6z - 6\text{arctg}z + C \overset{x}{=} 6.\sqrt[6]{x} - 6.\text{arctg}\sqrt[6]{x} + C$$

b)Tính $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/4}}dx$

$p = 4$. Thế $x = z^4$; $dx = 4z^3dz$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx \overset{z}{=} 4\int \frac{z^5dz}{1+z} = 4\left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\right) - 4\ln|z+1| + C$$

$$\overset{x}{=} 4\left(\frac{1}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x}\right) - 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + C$$

2.Với phép thế $ax + b = z^p$

Tính $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{dx}{x(x+1)^{1/2}}$

$p = 2$; $x + 1 = z^2$; $dx = 2zdz$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} \overset{z}{=} 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$$

3.Với phép thế $\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^p$

Tính $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)^{1/2}dx$

$$p = 2;\quad \frac{1+x}{x} = z^2;\quad dx = \frac{2zdz}{\left(z^2-1\right)^2}$$

$$\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx \overset{z}{=} -2.\int \frac{z^2}{z^2-1}dz = -2z - \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C \overset{x}{=} -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \ln\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1} + C$$

Chương 4

Tích phân xác định

§1. ĐỊNH NGHĨA

I. Bài toán diện tích hình thang cong

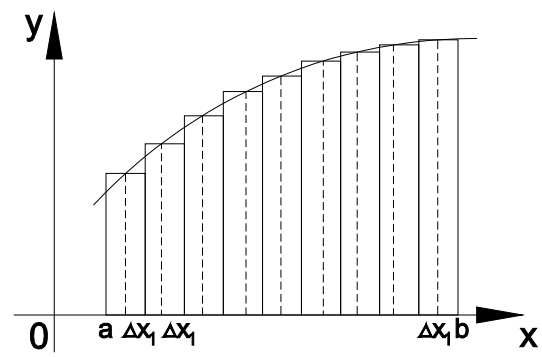
Giả sử hàm số y = f(x) xác định trong khoảng [a,b], chia [a,b] thành một số hữu hạn n các đoạn có chiều dài tương ứng là $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Trên mỗi đoạn Δx_i ta chọn tùy ý các điểm ξ_i ($i = \overline{1,n}$).

Thiết lập tổng

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i \qquad (4\text{-}1)$$

Về mặt hình học tổng A là tổng diện tích của các hình chữ nhật có một cạnh là $f(\xi_i)$ và cạnh kia là Δx_i



H.23

Ở đây được hiểu Δx_i vừa là độ dài vừa là kí hiệu chính đoạn đó. Cách chia [a,b] thành n đoạn con Δx_i được gọi là một phép phân hoạch δ của đoạn [a,b].

Kí hiệu $|\delta| = \max \Delta x_i$

Do các đoạn Δx_i là chọn tùy ý nên với mỗi số n cho trước ta luôn chọn được phép phân hoạch $\{\delta_n\}$. Dãy phân hoạch $\{\delta_n\}$ được gọi là dãy phân hoạch chuẩn nếu:

$$\lim_{n\to\infty}|\delta_n| = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

Ứng với mỗi δ_n ta thiết lập tổng A_n tương ứng. Với dãy phân hoạch $\{\delta_n\}$ ta nhận được dãy tổng $\{A_n\}$. Ở đây ta có vô số các dãy tổng $\{A_n\}$ ứng với $\{\delta_n\}$, tùy theo việc ta chọn các điểm $\xi_i \in$

Δx_i. Nếu với $\{\delta_n\}$ là dãy phân hoạch chuẩn và việc chọn hợp lý $\xi_i \in \Delta x_i$, là có thể nhận được giá trị của tổng ứng Δ_n xấp xỉ với diện tích của hình thang cong S = {x = a, x = b, y=0, y = f(x)}.

Việc tính chính xác diện tích hình thang cong S dẫn đến việc tìm giới hạn của dãy tổng $\{A_n\}$. Về mặt hình học giới hạn này luôn tồn tại.

II. Định nghĩa hàm khả tích – Tích phân xác định

Nếu một hàm số f(x) có tính chất là với mỗi dãy phân hoạch chuẩn $\{\delta_n\}$, dãy tổng tương ứng $\{A_n\}$ hội tụ (không phụ thuộc việc chọn các điểm ξ_i), thì ta nói rằng hàm f(x) khả tích trong khoảng đóng [a,b]. Khi đó mọi dãy tổng $\{A_n\}$ ứng với dãy phân hoạch chuẩn $\{\delta_n\}$ đều có cùng một giới hạn.

<u>Định nghĩa 1</u>: Giới hạn chung của các dãy tổng $\{A_n\}$ ứng với dãy phân hoạch chuẩn $\{\delta_n\}$ gọi là tích phân xác định của hàm số f(x) trong khoảng đóng [a,b].

Kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$ (4-3)

Hàm số y = f(x) liên tục trong khoảng đóng [a,b] sẽ khả tích trên đoạn đó. Diện tích của miền D giới hạn bởi đường cong liên tục y = f(x), trục toạ độ Ox và các đường thẳng x=a, x=b chính là giá trị của tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$. Nói cách khác định nghĩa diện tích miền D như là giá trị của tích phân $\int_a^b f(x)dx$.

Trong biểu thức tích phân xác định thay cho biến độc lập x ta có thể biểu diễn qua các biến số bất kì khác. Tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \ldots \quad (4\text{-}4)$$

III. Các thí dụ

1. <u>*Tích phân xác định của hàm y = c*</u>

Hàm hằng y = c khả tích trong mọi khoảng đóng [a,b]. Lấy một phân hoạch δ tùy ý đoạn [a,b] gồm các đoạn Δx_i. Chọn $\xi_i \in \Delta_i$ tùy ý.Ta có $f(\xi_i) \equiv c \quad \forall \xi_i$.

Tổng $A = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} c.\Delta x_i = c.\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = c.(b-a)$

Vậy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c.(b-a)$ (4-5)

Đây chính là diện tích của hình chữ nhật được giới hạn bởi đường thẳng y = c, song song với Ox, trục Ox và các đường thẳng x = a, x = b

2. <u>*Tích phân xác định của hàm đồng nhất y = x*</u>

Hàm y = x khả tích trong mọi khoảng [a,b]. Lấy phân hoạch δ đoạn [a,b] gồm các đoạn Δx_i được xác định bởi các điểm chia $a = a_o < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$.

$\Delta x_i = a_i - a_{i-1}$ (i = 1, 2,…, n).

Lấy điểm $\xi_i \in \Delta x_i$ tùy ý. Ta có $f(\xi_i) \equiv \xi_i$

Lập tổng: $A = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i$ (4-6)

Giả sử x_i là trung điểm của đoạn Δx_i, tức $x_i = \dfrac{a_i + a_{i-1}}{2}$

Ta viết lại (4-6) dưới dạng mới:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)\Delta x_i \qquad (4\text{-}7)$$

Xét số hạng thứ nhất của tổng A

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + a_{i-1}}{2}(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2}$$

$$= \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_o^2}{2} + \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_1^2}{2} + \ldots + \frac{a^2}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Xét số hạng thứ hai của tổng A

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - x_i|\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - x_i||\delta|$$

Chú ý với x_i là trung điểm đoạn Δx_i và $\xi_I \in \Delta x_i$ tùy ý ta luôn có: $|\xi_i - x_i| < \dfrac{\Delta x_i}{2}$

Vậy $R = \left|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)\Delta x_i\right| \le \dfrac{1}{2}|\delta|.\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \dfrac{1}{2}|\delta|(b - a)$

Nếu chọn một dãy phân hoạch chuẩn $\{\delta_n\}$ bất kì ta luôn có:

$$A_n = \frac{b^2 - a^2}{2} + R_n$$

Ở đây $R_n \le \dfrac{1}{2}|b - a||\delta_n|$

Chuyển qua giới hạn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ vì $\lim_{n\to\infty}|\delta_n| = 0$

Tức $\lim_{n\to\infty} A_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2} + \lim_{n\to\infty} R_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

Vậy $\int_a^b x dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

Đây chính là diện tích của hình thang được giới hạn bởi đường y = x, trục Ox và các đường thẳng x = a, x = b.

§2. MỘT VÀI TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Tính chất của tích phân xác định được thể hiện qua các định lý sau:

<u>Định lý 1</u>: Tổng của hai hàm số f(x) và φ(x) khả tích trong khoảng đóng [a,b] là một hàm khả tích trên đoạn đó và:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx \qquad (4\text{-}9)$$

Chứng minh: Với phân hoạch δ bất kì, ta lập các tổng:

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$A' = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{với } \xi_i \in \Delta x_i$$

$$A + A' = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + \varphi(\xi_i)]\Delta x_i$$

Nếu $\{\delta_n\}$ là một dãy phân hoạch chuẩn, khi đó:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n + A'_n) = \lim_{n\to\infty} An + \lim_{n\to\infty} A'_n$$

Theo giả thiết f(x) và φ(x) khả tích trên các giới hạn ở vế phải là tồn tại. Điều đó có nghĩa là giới hạn của vế trái (4-10) là tồn tại. Tức hàm số f(x) + φ(x) khả tích trong [a,b] và:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$$

Đây chính là điều cần phải chứng minh.

<u>Định lý 2</u>: Tích của một hằng số k với một hàm số f(x) khả tích trong khoảng đóng [a,b] cũng là một hàm khả tích trong khoảng này và:

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx \qquad (4\text{-}11)$$

Thí dụ: Tính $I = \int_0^1 (bx + c)dx$

Ta có: $I = \int_0^1 bxdx + \int_0^1 cdx = b.\int_0^1 xdx + \int_0^1 cdx = b.\frac{1-0}{2} + c(1-0) = \frac{1}{2}b + c$

<u>Định lý 3</u>: Nếu hàm số f(x) đồng nhất bằng 0 hầu khắp nơi trên khoảng đóng [a,b] trừ một số hữu hạn điểm thì: $\int_a^b f(x)dx = 0$

Chứng minh: Giả sử k là số điểm mà tại đó hàm f(x) ≠ 0, và $M = \max_{\forall x}|f(x)|$, x ∈ [a,b]. Khi đó với mọi phân hoạch δ ta có: $|A| \le 2k.M.|\delta|$

Như vậy nếu $\{\delta_n\}$ là một dãy phân hoạch chuẩn, khi đó dãy tổng $\{A_n\}$ tương ứng với nó luôn có:

$$|A_n| \le 2k.M.|\delta_n|$$

Vì $\lim_{n\to\infty}|\delta_n| = 0$ nên $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$

Hay $\int_a^b f(x)dx = 0$. Điều cần chứng minh.

<u>Định lý 4</u>: Nếu các hàm số f(x) và φ(x) chỉ khác nhau tại một số hữu hạn điểm trên khoảng đóng [a,b] và giả thiết một trong các hàm số này khả tích thì ta khẳng định rằng hàm số kia cũng khả tích và hơn nữa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Chứng minh: Xét hàm f(x) – φ(x), ta thấy rằng nó bằng không hầu khắp nơi trên khoảng đóng [a,b], trừ một số hữu hạn điểm. Theo định lý 3:

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx = 0 \qquad (4\text{-}12)$$

Giả sử rằng φ(x) là hàm khả tích. Vì f(x) = [f(x) – φ(x)] + φ(x). Như vậy ta có thể xem f(x) là tổng của hai hám số khả tích trên khoảng đóng [a,b] nên f(x) cũng là một hàm khả tích trên khoảng đó. Do (4-12) nên:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx + \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Đây là điều cần phải chứng minh.

<u>Định lý 5</u>: Nếu hàm số f(x) khả tích trong khoảng đóng [a,b], a < b. Nếu f(x) ≥ 0 ∀x ∈ [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Do các tổng A đều dương nên giới hạn dương.

<u>Định lý 6</u>: Nếu các hàm f(x) và g(x) khả tích trên khoảng đóng [a,b] và nếu f(x) ≤ g(x), ∀x ∈ [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Ta chứng minh định lý này dựa vào định lý 5 khi xét:

g(x) – f(x) ≥ 0 ∀x ∈ [a,b]

Nên $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$. Do vậy $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

<u>Định lý 7</u>: Nếu hàm số f(x) khả tích trên khoảng đóng [a,b] thì hàm |f(x)| cũng khả tích trên đoạn đó và:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (4\text{-}13)$$

Áp dụng đối với tổng A ta có:

$$|A| = \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

nên ta nhận được (4-13).

<u>Định lý 8</u>: Hàm số f(x) khả tích trên khoảng đóng [a,b] và nếu m, M là các trị nhỏ nhất và lớn nhất của f(x) trên [a,b] thì:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (4\text{-}14)$$

Chứng minh: Lấy phân hoạch δ, lập tổng: $A = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Ta có: $\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i-1}^{n} M.\Delta x_i$

Hay $m(b-a) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le M(b-a)$

Do f(x) khả tích nên $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Điều cần chứng minh.

Chia cả 2 vế của (4-14) cho (b–a) ta có:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M \qquad (4\text{-}15)$$

Đặt $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Ta gọi μ là giá trị trung bình của tích phân xác định và cũng chính là giá trị trung bình cảu hàm f(x) trên đoạn [a, b].

§3. ĐIỀU KIỆN KHẢ TÍCH CỦA HÀM LIÊN TỤC

Xét hàm số f(x) xác định, liên tục trên [a, b] với δ là phép phân hoạch bất kì đoạn [a, b]. Gọi m_i, M_i là các giá trị bé nhất và lớn nhất của f(x) trên Δx_i, ta lập các tổng:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \qquad (4\text{-}16)$$

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad (4\text{-}17)$$

Ở đây S, s được gọi là các tổng Dacbu treê và dưới của hàm f(x) ứng với phân hoạch δ của [a, b].

Ta luôn có: $s \le A \le S$ (4-18)

Với $\{\delta_n\}$ là dãy phân hoạch chuẩn thì đối với hàm f(x) liên tục trên [a, b], người ta đã chứng minh được rằng:

$$\lim(S_n - s_n) = 0 \qquad (4\text{-}19)$$

Nếu ta tăng số điểm chia của phân hoạch δ thì với phép phân hoạch mới δ' ta luôn có tổng trên sẽ giảm và tổng dưới sẽ tăng lên và vì vậy tổng trên của một phân hoạch bất kì luôn lớn hơn tổng dưới của một phân hoạch bất kì khác.Tức là với hai phân hoạch δ, δ' ta có:

$$s' \le S \qquad (4\text{-}20)$$

<u>Định lý 9</u>: Nếu hai hàm số f(x) liên tục trên [a,b] thì f(x) khả tích trên [a, b]

Chứng minh: Theo giả thiết f(x) liên tục trên [a, b] nên nó liên tục đều trên đó. Nghĩa là với ε>0, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$x_1, x_2 \in [a, b]\ ;\quad |x_1 - x_2| < \delta \text{ thì } |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Với δ tìm được ta thiết lập phân hoạch [a, b]. Khi đó:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \text{ . Nhưng do các } \Delta x \le \delta$$

$$\text{nên } M - n \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\text{Tức là } |S - s| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \varepsilon.$$

Vậy f(x) khả tích trên [a, b].

<u>Định lý 10:</u> Nếu hàm f(x) bị chặn và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên [a, b] thì f(x) khả tích trên [a, b].

Chứng minh: Giả sử rằng f(x) chỉ gián đoạn tại một điểm $x_o \in [a, b]$. Với số ε > 0 ta tách [a,b] thành 2 phần: một phần là lân cận $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$ và phần còn lại. Trên phần còn lại f(x) lên tục nên liên tục đều. Với số ε > 0 nêu trên $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ và ta xem. Ta luôn xem δ < ε mà không có gì mâu thuẫn, khi đó với phân hoạch δ các điểm chia luôn rơi vào 2 trường hợp:

– Nằm hoàn toàn ngoài lân cận $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$. Kí hiệu là i'

– Có một số điểm nằm trong lân cận đó. Kí hiệu là i".

Gọi W là biên độ lớn nhất của các giá trị của f(x) trên [a, b]. Khi đó $M_i - n_i \le W$ với mọi khoảng chia Δx_i.

$$\text{Ta có:}\quad S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i'} (M_{i'} - m_{i'})\Delta x_{i'} + \sum_{i''} (M_{i''} - m_{i''})\Delta x_{i''}$$

$$\text{Ở đây}\quad \sum_{i'} (M_{i'} - m_{i'})\Delta x_{i'} \le \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b - a)$$

$$\sum_{i''} (M_{i''} - m_{i''})\Delta x_{i''} \le w \sum_{i''} \Delta x_{i''} < 4\varepsilon w$$

$$\Rightarrow \qquad S - s \le \varepsilon[(b-a) + 4w] = \varepsilon^*.$$

Chứng tỏ rằng f(x) khả tích trên [a, b].

§4. SỰ PHÂN CHIA KHOẢNG LẤY TÍCH PHÂN _CẬN LẤY TÍCH PHÂN

I. Sự phân chia khoảng lấy tích phân

<u>Định lý 11</u>: Nếu a < b < c và nếu hàm số f(x) khả tích trong khoảng [a, c] thì

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad (4\text{-}21)$$

Chứng minh: Lập dãy phân hoạch chuẩn $\{\delta_n\}$ của [a, c] sao cho b là một điểm chia của bất kì phân hoạch δ_n nào. Kí hiệu A_n là dãy tổng tương ứng của $\{\delta_n\}$. Kí hiệu $\Delta x_{i'}$ là các đoạn chia thuộc [a, b], $\Delta x_{i''}$ là đoạn chia thuộc [b, c] và $\xi_{i'} \in \Delta x_{i'}$, $\xi_{i''} \in \Delta x_{i''}$

$$A_n = \sum_{i'} f(\xi_{i'})\Delta x_{i'} + \sum_{i''} f(\xi_{i''})\Delta x_{i''}$$

Đặt $$A_{n'} = \sum_{i'} f(\xi_{i'})\Delta x_{i'}\ ;\ A_{n''} = \sum_{i''} f(\xi_{i''})\Delta x_{i''}$$

Do f(x) khả tích trên [a, c]. Và do $\{\delta_n\}$ là phân hoạch chuẩn nên $A_{n'}$ và $A_{n''}$ đều có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$. Tức là f(x) khả tích trên [a, b], [b, c].

Ta nhận được (4-21).

II. Cận lấy tích phân

<u>Định nghĩa 2</u>: Giả sử hàm f(x) khả tích trong [a, b], a < b, khi đó ta đặt

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (4\text{-}23)$$

<u>Hệ quả</u>: $$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (4\text{-}24)$$

<u>Định lý 12</u>: Nếu a, b, c là các hàm số bất kì thì f(x) khả tích trên mọi đoạn lập bởi a, b, c thì

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \qquad (4\text{-}25)$$

Chứng minh:

1. Nếu a < b < c thì (4-25) suy ra từ (4-21)
2. Nếu a< c < b khi đó theo (4-21) ta có:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$. Điều phải chứng minh.

<u>Nhận xét</u>: 1. Nếu a = b hoặc a = c hoặc b = c thì định lý là hiển nhiên.

2. Công thức (4-25) có thể viết lại dưới dạng

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx \equiv 0 \qquad (4\text{-}26)$$

<u>Định nghĩa 3</u>: Các số a, b trong biểu thức tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là các cận của tích phân xác định. Nó không phụ thuộc vào giá trị đại số mà chỉ phụ thuộc vào vị trí. Nếu vị trí nằm phía trên ta gọi là cận trên, vị trí nằm phía dưới gọi là cận dưới.

§5. HÀM SỐ GIỚI HẠN TRÊN_GIỚI HẠN DƯỚI CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Để đưa ra cách tính tích phân xác định khi biết được nguyên hàm của tích phân không xác định của nó chúng ta xây dựng các hàm số của giới hạn trên và dưới của tích phân xác định như sau.

<u>Định nghĩa 3</u>: Nếu hàm số f(x) khả tích trên [a, b] và với $x, \alpha \in [a, b]$ bất kì ta lập hàm:

$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ – gọi là hàm của giới hạn trên

và $\phi(x) = \int_x^\alpha f(t)dt$ – gọi là hàm của giới hạn dưới của tích phân xác định của hàm f(x)

Ở đây $\phi(x) = -F(x)$ (4-27)

Các hàm F(x), $\phi(x)$ phụ thuộc vào việc chọn điểm $\alpha \in [a, b]$.

Chứng minh: Xét điểm $x_o \in [a, b]$ và với λ đủ bé để $x_o + \lambda \in [a, b]$

Ta có:

$$F(x_o + \lambda) - F(x_o) = \int_\alpha^{x_0+\lambda} f(t)dt - \int_\alpha^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t)dt \qquad (4\text{-}28)$$

Vì f(x) khả tích trên [a, b] nên f(x) bị chặn trên đó. Ta suy ra $|f(x)| < L \quad \forall x \in [a, b]$.

Vậy $|F(x_o + \lambda) - F(x_o)| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t)dt\right| \le \int_{x_0}^{x_0+\lambda} |f(t)|\,dt \le \int_{x_0}^{x_0+\lambda} Ldt = L.|\lambda|$

Rõ ràng khi $\lambda \to 0$ Ta có $F(x_o + \lambda) \to F(x_o)$. Tức hàm F(x) liên tục tại x_o. Điều này thỏa mãn $\forall x_o \in [a, b]$ nên F(x) liên tục trên [a, b].

§6. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH VÀ NGUYÊN HÀM

<u>Định lý 14</u>: Nếu hàm số f(x) khả tích trên [a, b] với α, x $\in$ [a, b] ta luôn có đạo hàm của hàm số $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ tồn tại và bằng giá trị của hàm f(x) tại mỗi điểm mà hàm này liên tục.

Chứng minh:

Giả sử f(x) liên tục tại $x_o \in [a, b]$. Với $\varepsilon > 0$, $\exists\eta = \eta(\varepsilon)$ sao cho $\forall x \in [a, b]$ mà $|x - x_o| < \eta$ thì

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon \tag{4-29}$$

Xét $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, $\alpha \in [a, b]$

Ta có: $$F(x) - F(x_o) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \tag{4-30}$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c)$$ là giá trị trung bình của hàm

Với $t \in [x_o, x]$ ta có: $|t - t_o| \le |x - x_o| < \eta$, vì vậy f(t) cũng thỏa mãn (4-29), tức f(c) thõa mãn (4-29). Vậy

$$f(x_o) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < f(x_o) + \varepsilon$$

hay $$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Có nghĩa $$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \tag{4-31}$$

Theo giả thiết f(x) liên tục tại x_o, nên f(x) hữu hạn. Vế trái (4-31) theo định nghĩa là đạo hàm của F(x) tại x_o. Điều phải chứng minh

Ta có: $$F'(x) = f(x) \tag{4-32}$$

tại những điểm x mà f(x) liên tục. Suy ra các định lý sau:

<u>Định lý 15</u>: Hàm số f(x) liên tục trên [a, b] có nguyên hàm trong khoảng này và nguyên hàm đó có biểu diễn

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + C \tag{4-33}$$

<u>Định lý 16</u>: Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) liên tục trên [a, b] thì với $x, \alpha \in [a,b]$ ta có:

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x) - F(\alpha) \tag{4-34}$$

Chứng minh: Theo giả thiết $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ là một nguyên hàm nên nó có biểu diễn (4-33)

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + C$$

Nếu đặt $x = \alpha$ ta nhận được $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + C = C$

Suy ra $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt + F(\alpha)$

Hay $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x) - F(\alpha)$. Điều phải chứng minh.

<u>Nhận xét</u>: Nếu trong (4-34) đặt $x = b$, $\alpha = a$ ta nhận được:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (4\text{-}35)$$

Đây là công thức Niutơn–Lépnít cho phép ta tính tích phân xác định qua nguyên hàm F(x) của tích phân không xác định của nó.

Ta có thể viết đơn giản hơn:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} \qquad (4\text{-}36)$$

§7. BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Đổi biến trong tích phân xác định

Xét tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ (4-31)

Sử dụng phép thế $x = \varphi(t)$ (4-32)

$$dx = d[\varphi(t)] = \frac{d[\varphi(t)]}{dt} \cdot dt = \varphi'(t)dt$$

$$f(x) = f[\varphi(t)]$$

$$a = \varphi(\alpha)\ ;\ b = \varphi(\beta)$$

Khi đó $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$ (4-32)

Chú ý: Khi sử dụng phép biến đổi biến số ta hoặc là đổi cận, hoặc là tích phân không xác định theo biến mới, tiếp đó trở về biến ban đầu và tính theo các cận đã cho.

Thí dụ 1: Tính $\int_{0}^{1} x\sqrt{1+x^2}dx$

Đặt $\sqrt{1+x^2} = t$; $x^2 = \sqrt{t^2 - 1}$

Ta có $x = 0$; $t = 1$

$x = 1$; $t = \sqrt{2}$

$dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}}$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx \overset{t}{=} \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Thí dụ 2: Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Đặt $x = tgt$; $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$

Ta có $x = 0$; $t = 0$

$x = 1$; $t = \pi/4$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx \overset{t}{=} \int_0^{\pi/4} \ln(1+tgt)dt = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-t)}{\cos t}dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}dt + \int_0^{\pi/4} \ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt$$

Chú ý: $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt = \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt$

Vậy $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \ln\sqrt{2}dt = \frac{1}{2}\ln 2.t\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}\ln 2$

Thí dụ 3: Tính $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Ta tách miền lấy tích phân thành 2 khoảng $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Biến đổi tích phân thứ hai bằng cách đặt $x = \pi - t$; $dx = -dt$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

Viết lại $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = -\pi\ln\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}$$

II. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử f(x), φ(x) liên tục cùng các đạo hàm của nó trên [a, b] và F(x) = f(x).φ(x)

Khi đó F'(x) = f'(x).φ(x) + f(x).φ'(x) (4-33)

Mặt khác $\int_a^b F'(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ (4-34)

Tích phân hai vế (4-33) ta có:

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b [f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)]dx$$

$$= \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx + \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \quad (4\text{-}35)$$

Từ (4-34), (4-35) ta rút ra:

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \quad (4\text{-}36)$$

Và $$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx \quad (4\text{-}37)$$

Thí dụ 1: Tính $\int_0^\pi x\cos x dx$

Đặt f(x) = x, φ'(x) = cosx. ⇒ φ(x) = sinx

$$\int_0^\pi x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \int_0^\pi d\cos x = \cos x\Big|_0^\pi = -2$$

Thí dụ 2: Tính $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$

Đặt $f(x) = x^2$, $\varphi'(x) = (1-x)^3$; $\Rightarrow \varphi(x) = -\dfrac{(1-x)^4}{4}$

Vậy $$\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx = -\frac{x^2(1-x)^4}{4}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 x\frac{(1-x)^4 4}{}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^4 dx$$

Đặt $f^*(x) = \dfrac{1}{2}x$, $\varphi'^*(x) = (1-x)^4$, $\Rightarrow \varphi^*(x) = -\dfrac{(1-x)^5}{5}$

Ta có: $$\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^4 dx = -\frac{1}{10}x(1-x)^5\Big|_0^1 + \frac{1}{10}\int_0^1 (1-x)^5 dx$$

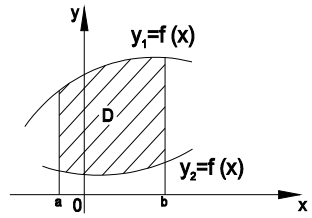
$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}(1-x)^6\Big|_0^1 = \frac{1}{60}$$

§8. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

I. Tính diện tích miền phẳng

Giả sử trong mặt phẳng Oxy ta cho các đường cong $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$. Gọi D là miền phẳng giới hạn bởi các đường cong $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Ta xác định diện tích S_D của miền D dựa vào tích phân xác định

Ta có: $S_D = S_1 - S_2$



H.24

Trong đó S_1 = diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y_1 = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$

S_2 = diện tích hình thang cong giới hạn bởi $y_2 = g(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$

Tức $$S_D = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \qquad (4\text{-}38)$$

Trong trường hợp tổng quát ta có:

$$S_D = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \qquad (4\text{-}39)$$

Chú ý: Để tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi một số hữu hạn các đường cong ta cần qua các biên.

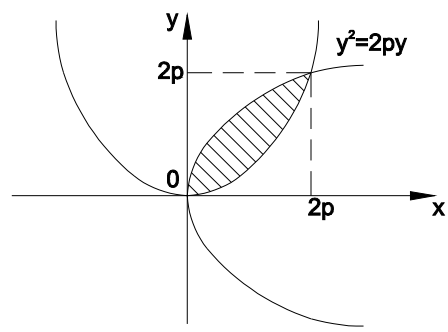
1. Xác định giao điểm của các đường cong
2. Xác định diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường cong
3. Tính tích phân xác định theo các miền phẳng chỉ ra

Thí dụ: Tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi các đường cong $y^2 = 2px$ và $x^2 = 2py$

Hai đường cong cắt nhau tại x=0, x=2p, y=0, y=2p. Theo hình vẽ ta có:

$$S_D = \int_0^{2p} (\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p})dx$$

$$= (\frac{2}{3}\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p})\Big|_0^{2p} = 4p^2$$

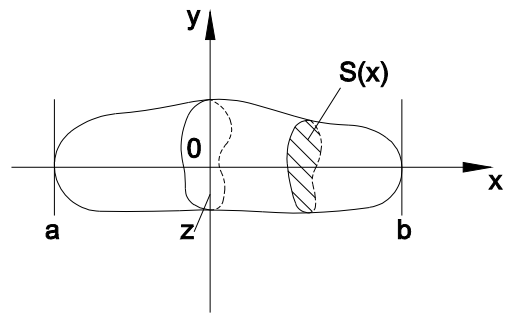


H.25

II. Tính thể tích

Xét vật thể V trong hệ Oxyz như cho trên hình vẽ. Ta xem thể tích V là tổng của các trụ có đáy là $S(x_i)$ và chiều cao là Δx_i nào đấy. Như vậy nó có dạng là một tổng tích phân. Vậy công thức tính tổng thể tích là:

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (4\text{-}40)$$



H.26

Trong trường hợp vật là khối tròn xoay do một hình phẳng là hình thang cong {y=f(x), x=a, x=b}cho trong mặt phẳng Oxy và quay quanh trục Ox. Khi đó S(x) chính là hình tròn bán kính f(x).

Vậy: $V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi f^2(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ (4-41)

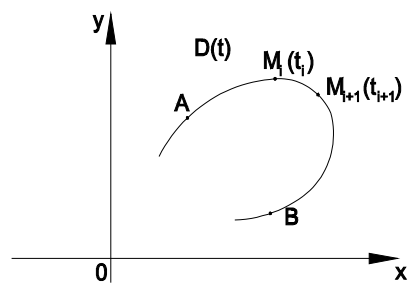
III. Tính độ dài cung

Giả sử trong mặt phẳng toạ độ Oxy ta xét đường cong s cho dưới dạng tham số:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{–}42)$$

với $t \in [\alpha, \beta]$ và s(t) không tự cắt.

Để tính chiều dài của s từ $t_0 = \alpha$ đến $t_1 = \beta$ ta thực hiện như sau:



H. 27

Trên s(t) ta lấy điểm $M_i(t_i)$ với I = 1, n. Ta thiết lập các dây cung $\overline{M_i + M_{i+1}}$ và lập tổng: $\sum_{n+1}^{n} \overline{M_iM_{i+1}}$. Ở đây: $\overline{M_i + M_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$

Mặt khác $\quad x_{i+1} - x_i = \varphi'(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \varphi'(t_i)\Delta t_i$

$\quad y_{i+1} - y_i = \psi'(t_i)(t_{i+1} - t_i) = \psi'(t_i)\Delta t_i$

Vậy $$\sum_{n+1}^{n} \overline{M_iM_{i+1}} = \sum_{n+1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(t_i^*) + \psi'^2(t_i^*)}\Delta t_i \qquad (4\text{-}43)$$

(4-41) có dạng của một tổng tích phân. Khi $\Delta t_i \to 0$ ta nhận được giới hạn của nó chính là chiều dài của cung s(t).

Tức là: $$s(t)\Big|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \qquad (4\text{-}44)$$

<u>Nhận xét</u>:

1/ Trong trường hợp đường cong cho dưới dạng

x = x

$y = f(x)$

thì $s(x)\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ (4-45)

2/ Nếu đường cong s(t) được cho bởi phương trình tham số trong không gian:

$x = \varphi(t)$

$y = \psi(t)$

$z = \chi(t)$

thì $s(t)\Big|_a^b = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}dt$ (4-46)

Thí dụ: Tổng độ dài của một cung Xycloit cho bởi phương trình

$x = a(t-\sin t)$

$y = a\cos t \quad , t \in [0, 2\pi]$

có: $x'(t) = a(1 - \cos t)$

$y'(t) = -a\sin t$

$$s = \int_0^{2\Pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = \int_0^{2\Pi} a\sqrt{(2-2\cos t)}dt = a\int_0^{2\Pi} 2\sin\frac{t}{2}dt = -4a\int_0^{2\Pi} d\cos\frac{t}{2}$$

$$= -a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\Pi} = 8a$$

§9. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

I. Tích phân suy rộng loại I (Khoảng lấy tích phân vô hạn)

<u>Định nghĩa</u>: Cho hàm số f(x) khả tích trên mọi đoạn hữu hạn [a,b], b>a. Nếu:

1. $\exists \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ hữu hạn thì ta gọi giới hạn này là tích phân suy rộng loại 1.

2. Không tồn tạo giới hạn trên ta nói tích phân đã cho phân kì.

<u>Nhận xét</u>: Định nghĩa được mở rộng cho cận ở -∞ và khoảng (-∞, +∞).

Thí dụ 1: Tính $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{b\to+\infty} -\frac{x}{1+x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}[-\frac{1}{1+b} + \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$

Thí dụ 2: Tính $\int_{-\infty}^0\frac{dx}{x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x+2} = \lim_{a\to-\infty}\ln|x+2|\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(\ln 2 - \ln|x+2| = -\infty$

Tích phân đã cho phân kì.

II. Tích phân suy rộng loại II (hàm đạt giá trị ở vô cùng)

<u>Định nghĩa</u>: Cho hàm số f(x) đạt giá trị vô cùng tại một số hữu hạn điểm $\in$ [a, b]. Ta phân [a, b] thành hữu hạn các khoảng con và nếu trên các khoảng con đó: $\lim\limits_{x\to x_i}\int\limits_{\xi}^{x_i} f(x)dx$ tồn tại hữu hạn thì ta nói tổng giới hạn đó là tích phân suy rộng loại hai của hàm f(x) trên [a, b].

Nếu có ít nhất một giới hạn không tồn tại hoặc bằng vô cùng thì tích phân của f(x) là phân kì.

Thí dụ: Tính $\int\limits_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}dx$

Ta có: $$\int\limits_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}dx = \lim_{x\to 1}\left[\int\limits_0^x \frac{dx}{(1-x)^2} + \int\limits_x^2 \frac{dx}{(1-x)^2}\right] = \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1-x}\Big|_0^x + \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1-x}\Big|_x^2$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1} - 1 - 1 - \frac{1}{x-1}\right] = -2$$

III. Các định lý so sánh

<u>Định lý 1</u>: Cho f(x), g(x) khả tích trên mọi đoạn [a, b] hữu hạn và b lớn tùy ý và $0 \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \ge a$

Khi đó: nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ suy ra $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì

<u>Định lý 12</u>: Giả sử f(x), g(x) là hai hàm không âm, khả tích trên mọi đoạn [a, b] hữu hạn, b lớn tùy ý. Khi đó nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0 < k < +\infty)$ thì các tích phân suy rộng $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ sẽ cùng tính chất hội tụ hoặc phân kì.

Chương 5

Chuỗi số

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ CÁC TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN

I. Các khái niệm đơn giản

Trước đây xét dãy số với tổng của một số hữu hạn các số hạng.

Cho dãy $\{a_n\}$, a_i là các số

Lập tổng n số hạng đầu $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Ta lập dãy mới $\{A_k\}$: $A_1, ... , A_k$

<u>Định nghĩa</u>: Nếu dãy $\{A_n\}$ có giới hạn $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ thì ta nói A là tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và viết:

$$A = a_1 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Nếu A là một số hữu hạn chuỗi được gọi là hội tụ, chuỗi không hội tụ được gọi là phân kì.

A_n - gọi là tổng riêng của chuỗi số.

a_n - gọi là số hạng tổng quát.

Nhận xét: + Sự hội tụ của chuỗi có thể qui về sự tồn tại của giới hạn của dãy tổng riêng.

+ Ngược lại sự tồn tại giới hạn của dãy cũng có thể quy về sự hội tụ của chuỗi.

Cho dãy $x_1, \dots, x_n \dots$ tồn tại giới hạn

Lập chuỗi $x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots$

Ở đây tổng riêng chính là các số hạng của dãy.

II. Các tính chất đơn giản

Áp dụng tiêu chuẩn cosi cho sự hội tụ của dãy An ta suy ra

1. *Điều kiện hội tụ của chuỗi số*

Điều kiện cần và đủ để chuỗi số (A) hội tụ là: với số $\varepsilon > 0$ tìm được số tự nhiên N sao cho $\forall$ n > N và $\forall$ số nguyên p ta có: $|A_{n+p} - A_n| \Leftarrow |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Đặc biệt nếu p = 1 $\Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon \Rightarrow$ Hệ quả

Hệ quả: Điều kiện cần để chuỗi số (A) hội tụ là: (không là điều kiện đủ)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2. *Số dư và các tính chất*:

Gọi chuỗi: $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ (δ)

nhận được từ chuỗi (A) bằng cách bỏ đi n số hạng đầu là số dư của (A).

Các chuỗi (A) và (δ) cùng hội tụ hoặc phân kì.

Nếu khi chúng hội tụ thì tổng của (δ) kí hiệu là R_n:

$$R_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = \lim_{m\to\infty}(A_{n+m} - A_n) = A - A_n$$

Ở đây A - Tổng của chuỗi

A_n - Tổng riêng của n số hạng

Khi đó: $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(A - A_n) = 0$

3. *Các phép tính trên chuỗi số hội tụ*

+ Nếu (A) hội tụ thì chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} c.a_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots \qquad \text{(CA)}$$

cũng hội tụ và có tổng là C.A

+ Nếu hai chuỗi số (A), (B) hội tụ và A, B có tổng tương ứng là thì chuỗi (A + B):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

cũng hội tụ và có tổng là A + B

Ví dụ 1: Chuỗi số là cấp số nhân

$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ với $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

* Khi $|q| < 1$ $\quad S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$ – chuỗi hội tụ

* Khi $|q| \geq 1$ $\quad a_n = a.q^n$ không tiến tới không – chuỗi phân kì

<u>Ví dụ 2</u>: (U) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

$$un = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \to 0 \ (n \to \infty)$$

Nhưng $An = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n.\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$ phân kì khi $n \to \infty$

§2. DẤU HIỆU HỘI TỤ CỦA CHUỖI DƯƠNG

<u>Định nghĩa</u>: Ở đây ta chỉ xét chuỗi với các số hạng đều không âm ($an \geq 0$). Khi đó An là dãy số đơn điệu tăng. Chuỗi như vậy là chuỗi dương.

I. Điều kiện hội tụ

<u>Định lý</u>: Điều kiện cần và đủ để chuỗi dương (A) hội tụ là dãy tổng riêng bị chặn trên.

$$A_n < L \quad \forall n$$

Nếu ngược lại thì dãy $A_n \to \infty$ và chuỗi phân kì.

<u>Ví dụ</u>: Xét sự hội tụ của chuỗi điều hòa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Ta có: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Nếu xét tràn chuỗi ta gộp các số hạng theo từng nhóm gồm 2^k số hạng

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{15}, \ldots$$

ta có tổng mỗi nhóm đều $> \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ dãy tổng riêng không bị chặn trên $\to$ chuỗi phân kì.

II. Các định lý so sánh

<u>Định lý 1</u>: Cho hai chuỗi số dương (A), (B), nếu kể từ số hạng nào đó ($n > N$) mà $a_n < b_n$ thì:

+ Từ (B) hội tụ suy ra (A) hội tụ

+ Từ (A) phân kì suy ra (B) phân kì.

<u>Định lý 2</u>: Cho hai chuỗi số dương (A), (B)

Nếu có giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k$ $(0 \le k \le \infty)$ thì:

+ Từ sự hội tụ (B) và $k < \infty$ suy ra hội tụ của (A).

+ Từ sự phân kì (B) và $k > 0$ suy ra (A) phân kì

<u>Định lý 3</u>: Cho hai chuỗi dương (A), (B)

Nếu kể từ một số hạng nào đó (chẳng hạn n > N) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ thì

+ Từ (B) hội tụ suy ra (A) hội tụ

+ Từ (A) phân kì suy ra (B) phân kì.

Từ các định lý trên ta suy ra rằng: để chứng minh sự hội tụ của một chuỗi số nào đó ta thường so sánh nó với một chuỗi "mẫu". Chẳng hạn xét chuỗi Riman:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (S > 0)$$

+ Với S = 1. Ta có nó là chuỗi điều hòa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kì.

+ Với S < 1

Rõ ràng $\frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}$ nên chuỗi cũng phân kì.

+ Với S > 1 chuỗi hội tụ. (Chứng minh bằng dấu hiệu tích phân).

<u>Ví dụ 1</u>: Xét chuỗi:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ hội tụ vì $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ s > 1 hội tụ (Định lý 1).

Hay $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}} : \frac{1}{n(n^2+1)} = 1 \rightarrow$ hội tụ (Định lý 2)

<u>Ví dụ 2</u>: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p > 0)$

Với n khá lớn: $(\ln n)^p < n \rightarrow \frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{1}{n}$. Phân kì

III. Các dấu hiệu hội tụ (Cosi – Dalămbe – Rap (Raab))

Sử dụng chuỗi mẫu (A):

Chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ $0 < q < 1$

Chuỗi phân kì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$

1. *Dấu hiệu Cosi*

Định lý: Gọi $C_n = \sqrt[n]{a_n}$

– Nếu với n khá lớn $C_n \le q < 1$ thì chuỗi (A) hội tụ

– Nếu kể từ một lúc nào đó $C_n \ge 1$ thì chuỗi (A) phân kì. (So sánh C_n với q)

Hệ quả:

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$

Nếu C < 1 chuỗi hội tụ

Nếu C > 1 chuỗi phân kì.

C = 1 chưa có kết luận gì.

2. *Dấu hiệu Dalămbe*

Định lý: Gọi $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

– Nếu với n khá lớn $D_n \le q < 1$ thì chuỗi hội tụ.

– Nếu kể từ một lúc nào đó $D_n \ge 1$ thì chuỗi phân kì.

Hệ quả: Giả sử có $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$

Khi đó:

– Nếu D < 1 chuỗi hội tụ

– Nếu D > 1 chuỗi phân kì

Không có kết luận gì khi C = 1

3. *Dấu hiệu Rap* (So sánh với chuỗi Riman)

Định lý: Gọi $R_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

Khi đó:

– Nếu với n đủ lớn $R_n \ge n > 1$ chuỗi số hội tụ

– Nếu kể từ một lúc nào đó $R_n \le 1$ chuỗi phân kì.

Hệ quả: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = R$

– Nếu R > 1 chuỗi hội tụ

– Nếu R < 1 chuỗi phân kì

– Nếu R = 1 chưa có kết luận gì.

4. *Dấu hiệu tích phân*

Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ trong đó các số hạng lập thành một dãy giảm

$a_1 \geq a_n \geq a_n \geq ... \geq a_n \geq ...$ (>0)

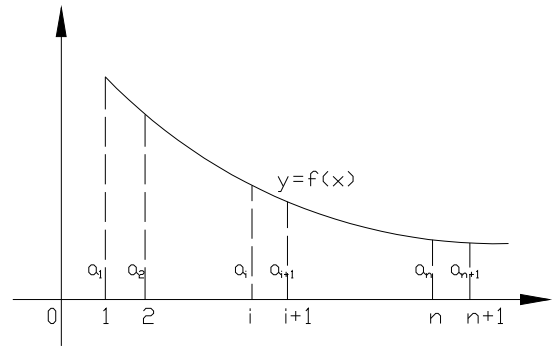
Xét hàm f(x) giảm trên [1, +∞)

Có $a_n = f(n)$

Tổng riêng

•$A_n = a_1 + ... + a_n$ là diện tích hình bậc thang ngoại tiếp hình thang cong lấp bởi f(x)

•$A_{n+1} - a_1 = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}$ là diện tích hình bậc thang nội tiếp hình thang cong.



Nên:

$$A_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq A_{n+1} - a_1$$

<u>Định lý</u>: Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có các số hạng giảm dần, f(x) hàm số liên tục giảm trên [1,+∞) và $f(n) = a_n$. Khi đó chuỗi (A) đồng thời hội tụ hay phân kì với tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Nếu A – Tổng của chuỗi I là giá trị của tích phân. Ta có:

$$I \leq A \leq I + a_1$$

Trở lại xét: Chuỗi Riman $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ đồng hội tụ hay phân kì với $\int_1^{\infty} \frac{ds}{x^s}$

Trở lại: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ phân kì vì $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{\infty}$ phân kì

§3. SỰ HỘI TỤ CỦA CHUỖI BẤT KÌ.

I. Sự hội tụ tuyệt đối

Đưa về chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + ... + |a_n| + ... \qquad (|A|)$$

Ta có: $|A_{n+p} - A_n| = |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|$

<u>Định lý</u>: Nếu chuỗi (|A|) hội tụ → (A) hội tụ

Điều ngược lại không hẳn đúng.

<u>Định nghĩa</u>: Nếu chuỗi (|A|) hội tụ thì ta nói chuỗi (A) hội tụ tuyệt đối. Trái lại nếu chỉ có chuỗi (A) hội tụ (chuỗi (|A|) không hội tụ) thì ta nói chuỗi (A) bán hội tụ

II. Sự hội tụ của chuỗi đan dấu. Dấu hiệu Laibnit

Chuỗi đan dấu: Chuỗi Laibnit là chuỗi có số hạng luân phiên đổi dấu, tức có dạng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_n = C_1 - C_2 + C_3 ... + (-1)^{n-1}C_n + ...$$

Trong đó $C_n > 0 \quad \forall n$

<u>Định lý Laibnit</u>:

Nếu các số hạng của chuỗi (L) giảm về giá trị tuyệt đối

Tức là $C_{n+1} < C_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ thì chuỗi đó hội tụ

<u>Ví dụ</u>: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$ hội tụ.

§4. CHUỖI HÀM

I. Định nghĩa

* Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ (5-1)

Trong đó các số hạng $u_n(x)$ đều là các hàm số xác định trên tập X. Ta gọi chuỗi đã cho là chuỗi hàm

* Với $x = x_o$ chuỗi hàm (5-1) trở thành chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$

Nếu chuỗi số này hội tụ thì x_o gọi là điểm hội tụ của chuỗi hàm

Nếu chuỗi số này phân kì thì x_o gọi là điểm phân kì của chuỗi hàm

* Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của chuỗi hàm gọi là tập hội tụ

* Tổng của chuỗi hàm số là một hàm số xác định trong tập hội tụ của nó.

<u>Ví dụ 1</u>: Cho chuỗi hàm

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

Chuỗi này hội tụ với $|x| < 1$. Tập hội tụ là $(-1, 1)$

Tổng $S(x) = \frac{1}{1-x} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_1 - u_n}{1-x} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

<u>Ví dụ 2</u>: Xét chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$

Do $|\sin nx| < 1 \Rightarrow \frac{|\sin nx|}{n^2 + x^2} < \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in R$

Do $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối.

* Chuỗi hàm số hội tụ đều

Giả sử chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ trên tập X và có tổng là hàm S(x). Gọi $S_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm đã cho thì $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Tức là với $\forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon,x)$ sao cho $\forall n > N$ ta có $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

Trường hợp $N = N(\varepsilon)$ và không phụ thuộc $x \in X$ ta nói rằng chuỗi hàm số hội tụ đều trên tập X đến S(x)

Viết lại $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$. Sao cho $\forall n > N$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in X$$

* Tiêu chuẩn hội tụ đều (Tiêu chuẩn Cosi)

Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập X khi và chỉ khi $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$ sao cho $\forall p>q>N$ ta có: $|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in X$

II. Chuỗi lũy thừa

* <u>Định nghĩa</u>: Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5-2)$$

Khi khảo sát chuỗi hàm số điều cơ bản là xác định tập hội tụ của nó.

* <u>Định lý ABen</u>: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_o \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại $\forall x$ với $|x| < |x_o|$

<u>Hê quả</u>: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại $x = x_1$ thì nó phân kì tại $\forall x$: $|x| > |x_1|$.

* Bán kính hội tụ: Rõ ràng $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n$ luôn hội tụ tại x = 0. Từ định lý ABen suy ra $\exists R$ $(0\leq R<+\infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa hội tụ tuyệt đối trong các khoảng $(-\infty, R)$ và $(R, +\infty)$. Tại $x=\pm R$ chuỗi hàm có thể hội tụ hoặc phân kì. Số R được gọi là bán kính hội tụ. Khoảng $(-R, R)$ được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi.

<u>Định lý</u>: Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho \quad \text{hoặc} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

Thì bán kính hội của chuỗi là $\frac{1}{\rho}$ (nếu $\rho = 0$ thì $R=+\infty$ và $\rho = +\infty$ thì $R = 0$).

Chứng minh:

Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, $0 < \rho < +\infty$ thì với mọi x, $|x| < \frac{1}{\rho}$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| < \rho\cdot\frac{1}{\rho} = 1$$

nên chuỗi hội theo dấu hiệu Dalambe

Nếu $|x| > \frac{1}{\rho}$ thì

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} > \rho\cdot\frac{1}{\rho} > 1$$

nên theo dấu hiệu Dalanbe chuỗi bất kì. Khi ρ=∞ thì hiển nhiên R=0 và khi ρ=0, $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ =0 nên chuỗi hội tụ với ∀ x tức R=+∞.

Bán kính hội tụ của chuỗi là $\frac{1}{\rho}$

Ta có khi $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, sử dụng tiêu chuẩn hội tụ Cosi ta hoàn toàn chứng minh được $\frac{1}{\rho}$ là bán kính hội tụ của chuỗi.

Thí dụ 1: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Ta có $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \to 0$ khi n → ∞, nên bán kính hội tụ là R=+∞, tức chuỗi hội tụ với ∀ x ∈ R

Thí dụ 2: Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Ta có $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^n} = n \to \infty$, nên R=0, tức chuỗi chỉ hội tụ tại một điểm duy nhất x=0

III. Chuỗi Taylo và ứng dụng

Xét hàm số f(x) có bán kính hội tụ R. Hàm f(x) được gọi là khai triển thành chuỗi luỹ thừa trên khoảng (-R, R) nếu có chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sao cho f(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với ∀ x∈ (-R, R)

* <u>Định lý</u>: Nếu f(x) khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trên khoảng (-R, R) thì f(x) có đạo hàm mọi cấp trên (-R, R) và $f^{(K)}(0) = K!a_K$ với K∈ N

Vì chuỗi luỹ thừa là đa thức bậc n, nên nó có đạo hàm mọi cấp cho đến n+1. Nên định lý trên là hiển nhiên

* Với hàm f(x) có đạo hàm mọi cấp trên khoảng (-R, R), khi đó ta có chuỗi hàm:

S(x) = $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ gọi là khai triển Taylo của hàm trong lân cận điểm 0

Nếu xét trong lân cận điểm a ∈ (-R, R) ta có khai triển Taylo của hàm f(x) là:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ở đây S(x) được gọi là chuỗi Taylo tại lân cận điểm a ∈ (-R, R)

Nhận xét:

1. f(0)=S(0)
2. S(x) không hội tụ bất cứ điểm x#0 nào
3. S(x) # f(x) trong mọi lân cận của điểm x=0

Thí dụ: Xét hàm $f(x)= \frac{1}{1-x} + \varphi(x)$

Trong đó: $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = o \end{cases}$

Ta có: $\varphi^{(K)}(0) = 0$ với K∈ N

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^K = K!\frac{1}{(1-x)^{K+1}} \text{ nên } f^{(K)}(0) = K! + 0 = K!$$

Khai triển Taylo:

$$S(x)= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\ |x| < 1$$

Rõ ràng S(x) # f(x) với ∀ x∈ (-1, 1)\ {0}.

<u>Định lý</u>: Nếu tồn tại số dương C sao cho $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C$, với ∀ n∈ N; x∈ (-R, R) thì ta có:

$$F(x)= \sum_{n==0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

* Ứng dụng của chuỗi Taylo

1. Ta sử dụng chuỗi Taylo để tính giá trị gần đúng của hàm trong lân cận điểm a∈ (-R, R) khi biết giá trị của hàm tại a.

2. Sử dụng chuỗi Taylo để xấp xỉ hàm bằng các đại lượng vô cùng bé tương đương dùng để khử các dạng vô định $\frac{0}{0}$ trong quá trính tìm giới hạn.

Thí dụ: Tìm giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - \sin^2 x}{x^4}$

Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{x-\sin x}{x^3}$

Chú ý: $\sin x= \frac{1}{1!}x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\frac{x-\left[x-\frac{1}{3!}x^3\right]}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$