Chuyên đề 8:

LƯỢNG GIÁC

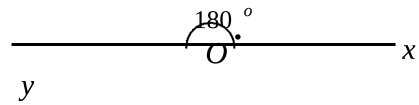
TÓM TẮT GIÁO KHOA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

I. Đơn vị đo góc và cung:

1. Độ:

$$\text{Góc } 1^0 = \frac{1}{180} \text{ góc bẹt}$$



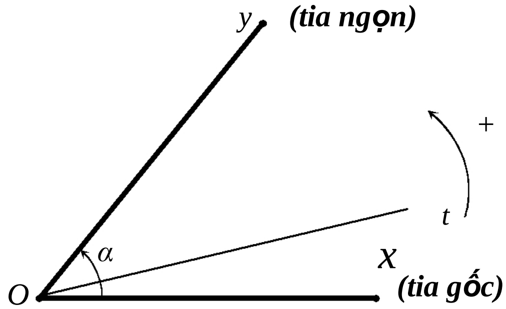
2. Radian: (rad)

$$180^0 = \pi \text{ rad}$$

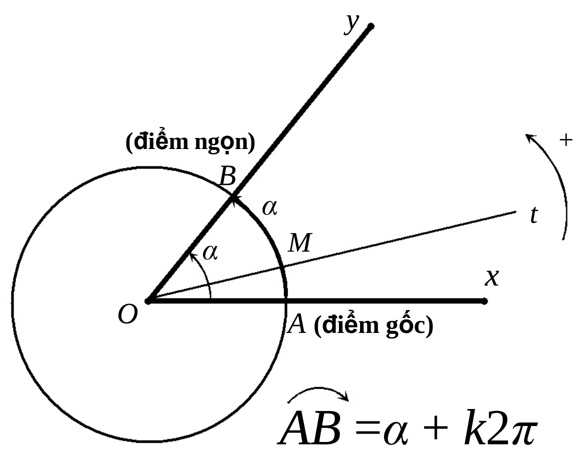
3. Bảng đổi độ sang rad và ngược lại của một số góc (cung) thông dụng:

Độ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

II. Góc lượng giác & cung lượng giác: 1. Định nghĩa:



$(Ox,Oy) = \alpha + k2\pi \quad (k \in Z)$



$$\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi$$

2. Đường tròn lượng giác:

Số đo của một số cung lượng giác đặc biệt:

$A \rightarrow 2k\pi$

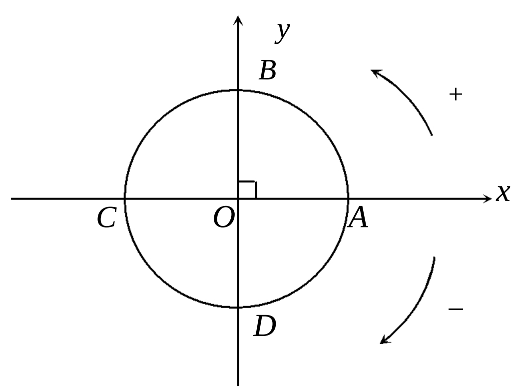
$B \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$C \rightarrow \pi + 2k\pi$

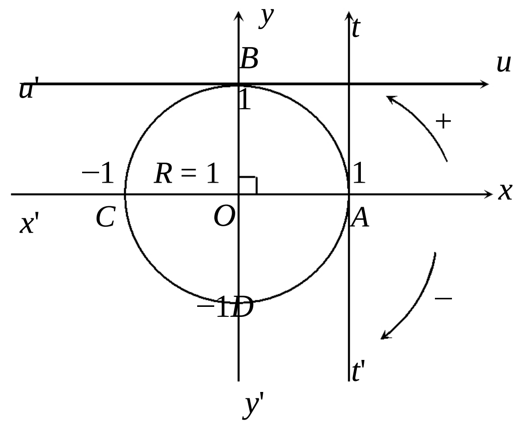
$D \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$A,C \rightarrow k\pi$

$B,D \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$



III. Định nghĩa hàm số lượng giác:



1. Đường tròn lượng giác:

- A: điểm gốc
- x'Ox : trục côsin (trục hoành)
- y'Oy : trục sin (trục tung)
- t'At : trục tang
- u'Bu : trục cotang

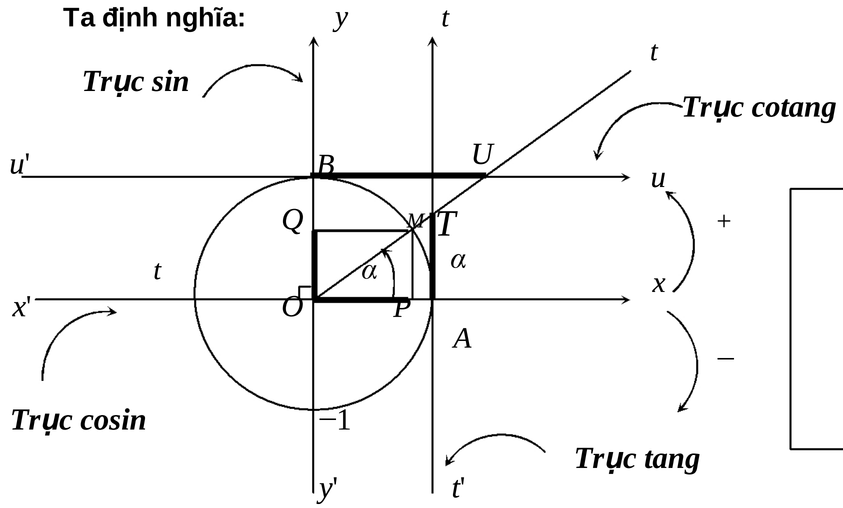
2. Định nghĩa các hàm số lượng giác:

a. Định nghĩa: Trên đường tròn lượng giác cho AM=α .

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên x'Ox và y'Oy

T, U lần lượt là giao điểm của tia OM với t'At và u'Bu

Ta định nghĩa:



$$\cos\alpha = \overline{OP}$$
$$\sin\alpha = \overline{OQ}$$
$$tg\alpha = \overline{AT}$$
$$\cot g\alpha = \overline{BU}$$

b. Các tính chất :

- Với mọi α ta có :

  $-1 \le \sin\alpha \le 1$ hay $|\sin\alpha| \le 1$

  $-1 \le \cos\alpha \le 1$ hay $|\cos\alpha| \le 1$

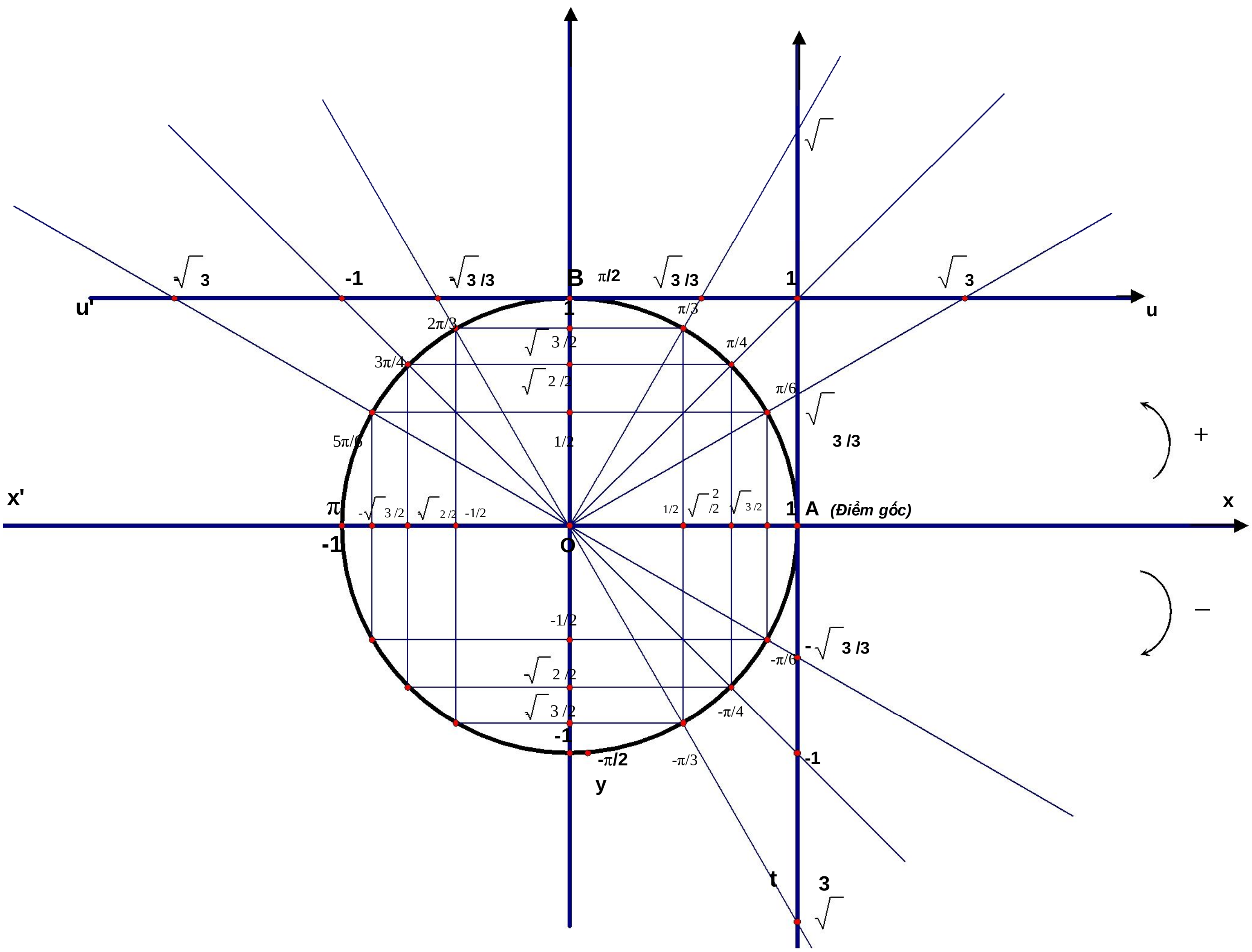
- $tg\alpha$ xác định $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $cotg\alpha$ xác định $\alpha \ne k\pi$

d. Tính tuần hoàn

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$$
$$tg(\alpha + k\pi) = tg\alpha \qquad (k \in Z)$$
$$\cot g(\alpha + k\pi) = \cot g\alpha$$

IV. **<u>Giá trị các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt</u>:**

Ta nên sử dụng đường tròn lượng giác để ghi nhớ các giá trị đặc biệt



y' **t'** - 3

Góc / Hslg	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$cotg\alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

V. <u>Hàm số lượng giác của các cung (góc) có liên quan đặc biệt</u>: <u>Đó là các cung</u>:

1. **<u>Cung đối nhau</u>** : α và $-\alpha$ (tổng bằng 0) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $-\frac{\pi}{6}$,…)
2. **<u>Cung bù nhau</u>** : α và $\pi-\alpha$ (tổng bằng π) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{5\pi}{6}$,…)
3. **<u>Cung phụ nhau</u>** : α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{\pi}{3}$,…)
4. **<u>Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$</u>** : α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{2\pi}{3}$,…)
5. **<u>Cung hơn kém π</u>** : α và $\pi+\alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{7\pi}{6}$,…)

1. <u>Cung đối nhau</u>:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$
$$\cot g(-\alpha) = -\cot g\alpha$$

Đối cos

Bù sin

2. <u>Cung bù nhau</u> :

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha$$
$$\cot g(\pi-\alpha) = -\cot g\alpha$$

3. <u>Cung phụ nhau</u> :

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) = cotg\alpha$$
$$\cot g(\frac{\pi}{2}-\alpha) = tg\alpha$$

Phụ chéo

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$

sin bằng cos

cos bằng trừ sin

4. <u>Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$</u>

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -cotg\alpha$$
$$\cot g(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -tg\alpha$$

5. <u>Cung hơn kém π</u> :

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(\pi+\alpha) = tg\alpha$$
$$\cot g(\pi+\alpha) = \cot g\alpha$$

Hơn kém π
tang , cotang

Ví dụ 1: Tính $\cos(-\frac{11\pi}{4})$, $tg\frac{21\pi}{4}$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức: $A = \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

VI. Công thức lượng giác:

1. Các hệ thức cơ bản:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$tg\alpha \,.\, cotg\alpha = 1$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

1. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$
2. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$

2. Công thức cộng :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta.\cos\alpha$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha.tg\beta}$$

Ví dụ: Chứng minh rằng:

1. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$
2. $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$

3. Công thức nhân đôi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$= \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

4 Công thức nhân ba:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \qquad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

5. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad tg^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

6. Công thức tính $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ **theo** $t = tg\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

Ví dụ:

1. Biến đổi thành tổng biểu thức: $A = \cos 5x.\cos 3x$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B = \cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

8. Công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$