LỜI NÓI ĐẦU

Sách này trình bày các cấu trúc dữ liệu CTDL) và thuật toán. Các kiến thức về CTDL và thuật toán đóng vai trò quan trọng trong việc đào tạo cử nhân tin học. Sách này đươc hình thành trên cơ sở các bài giảng về CTDL và thuật toán mà tôi đã đọc nhiều năm tại khoa Toán-Cơ-Tin học và khoa Công nghệ thông tin Đại học khoa học tự nhiên, Đại học quốc gia Hà nội. Sách được viết chủ yếu để làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các Khoa Công nghệ thông tin, nhưng nó cũng rất bổ ích cho các độc giả khác cần có hiểu biết đầy đủ hơn về CTDL và thuật toán.

Chúng tôi mô tả các CTDL và các thuật toán trong ngôn ngữ Pascal, vì Pascal là ngôn ngữ được nhiều người biết đến và là ngôn ngữ được sử dụng nhiều để trình bày thuật toán trong sách báo.

Sách này gồm hai phần. Phần 1 nói về các CTDL, phần 2 nói về thuật toán. Nội dung của phần 1 gồm các chương sau đây. Chương 1 trình bày các khái niệm cơ bản về thuật toán và phân tích thuật toán. Chương 2 trình bày các khái niệm CTDL, mô hình dữ liệu, kiểu dữ liệu trừu tượng (DLTT). Chương 3 trình bày các mô hình dữ liệu, danh sách và các phương pháp cài đặt danh sách (bởi mảng và bởi CTDL danh sách liên kết). Hai kiểu DLTT đặc biệt quan trọng là hàng và ngăn xếp (stack) cũng được xét trong chương này. Chương này cũng trình bày một số ứng dụng của danh sách, hàng, ngăn xếp trong thiết kế thuật toán. Chương 4 trình bày mô hình dữ liệu cây, các phương pháp cài đặt cây, cây nhị phân, cây tìm kiếm nhị phân và cây cân bằng. Chương 5 nói về mô hình dữ liệu tập hợp, các phương pháp cài đặt tập hợp, từ điển và cài đặt từ điển bởi bảng băm, hàng ưu tiên và cài đặt hàng ưu tiên bởi heap. Chương 6 đề cập đến phương pháp cài đặt các dạng bảng khác nhau. Các CTDL ở bộ nhớ ngoài (file băm, file chỉ số, B-cây) được trình bày trong chương 7.

Tác giả
PTS Đinh Mạnh Tường.

MUC LUC

Chương I

THUẬT TOÁN VÀ PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN

1.1. THUẬT TOÁN.

1.1.1. *Khái niệm thuật toán.*

Thuật toán (algorithm) là một trong những khái niệm quan trọng nhất trong tin học. Thuật ngữ thuật toán xuất phát từ nhà toán học A rập Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al Khowarizmi (khoảng năm 825). Tuy nhiên lúc bấy giờ và trong nhiều thế kỷ sau, nó không mang nội dung như ngày nay chúng ta quan niệm. Thuật toán nổi tiếng nhất, có từ thời cổ Hy lạp là thuật toán Euclid, thuật toán tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên. Có thể mô tả thuật toán này như sau :

Thuật toán Euclid.

Input : m, n nguyên dương

Output : g, ước chung lớn nhất của m và n

Phương pháp :

Bước 1 : Tìm r, phần dư của phép chia m cho n

Bước 2 : Nếu r = O, thì g ← n (gán giá trị của n cho g) và dừng lại. Trong trường hợp ngược lại (r ≠ 0), thì m ← n, n ← r và quay lại bước 1.

Chúng ta có thể quan niệm các bước cần thực hiện để làm một món ăn, được mô tả trong các sách dạy chế biến món ăn, là một thuật toán. Cũng có thể xem các bước cần tiến hành để gấp đồ chơi bằng giấy, được trình bầy trong sách dạy gấp đồ chơi bằng giấy, là thuật toán. Phương pháp thực hiện phép cộng, nhân các số nguyên, chúng ta đã học ở cấp I cũng là các thuật toán.

Trong sách này chúng ta chỉ cần đến định nghĩa không hình thức về thuật toán :

Thuật toán là một dãy hữu hạn các bước, mỗi bước mô tả chính xác các phép toán hoặc hành động cần thực hiện, để giải quyết một số vấn đề.

(Từ điểm Oxford Dictionary định nghĩa, Algorithm: set of well - defined rules for solving a problem in a finite number of steps.)

Định nghĩa này, tất nhiên, còn chứa đựng nhiều điều chưa rõ ràng. Để hiểu đầy đủ ý nghĩa của khái niệm thuật toán, chúng ta nêu ra 5 đặc

trưng sau đây của thuật toán (Xem D.E. Knuth [1968]. The Art of Computer Programming, vol. I. Fundamental Algorithms).

1. Input. **Mỗi thuật toán cần có một số (có thể bằng không) dữ liệu vào (input). Đó là các giá trị cần đưa vào khi thuật toán bắt đầu làm việc. Các dữ liệu này cần được lấy từ các tập hợp giá trị cụ thể nào đó. Chẳng hạn, trong thuật toán Euclid trên, m và n là các dữ liệu vào lấy từ tập các số nguyên dương.**

2. Output. **Mỗi thuật toán cần có một hoặc nhiều dữ liệu ra (output). Đó là các giá trị có quan hệ hoàn toàn xác định với các dữ liệu vào và là kết quả của sự thực hiện thuật toán. Trong thuật toán Euclid có một dữ liệu ra, đó là g, khi thực hiện đến bước 2 và phải dừng lại (trường hợp r = 0), giá trị của g là ước chung lớn nhất của m và n.**

3. Tính xác định. **Mỗi bước của thuật toán cần phải được mô tả một cách chính xác, chỉ có một cách hiểu duy nhất. Hiển nhiên, đây là một đòi hỏi rất quan trọng. Bởi vì, nếu một bước có thể hiểu theo nhiều cách khác nhau, thì cùng một dữ liệu vào, những người thực hiện thuật toán khác nhau có thể dẫn đến các kết quả khác nhau. Nếu ta mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ thông thường, không có gì đảm bảo người đọc hiểu đúng ý của người viết thuật toán. Để đảm bảo đòi hỏi này, thuật toán cần được mô tả trong các ngôn ngữ lập trình (ngôn ngữ máy, hợp ngữ hoặc ngôn ngữ bậc cao như Pascal, Fortran, C, ...). Trong các ngôn ngữ này, các mệnh đề được tạo thành theo các qui tắc cú pháp nghiêm ngặt và chỉ có một ý nghĩa duy nhất.**

4. Tính khả thi. **Tất cả các phép toán có mặt trong các bước của thuật toán phải đủ đơn giản. Điều đó có nghĩa là, các phép toán phải sao cho, ít nhất về nguyên tắc có thể thực hiện được bởi con người chỉ bằng giấy trắng và bút chì trong một khoảng thời gian hữu hạn. Chẳng hạn trong thuật toán Euclid, ta chỉ cần thực hiện các phép chia các số nguyên, các phép gán và các phép so sánh để biết $r = 0$ hay $r \neq 0$.**

5. Tính dừng. **Với mọi bộ dữ liệu vào thoả mãn các điều kiện của dữ liệu vào (tức là được lấy ra từ các tập giá trị của các dữ liệu vào), thuật toán phải dừng lại sau một số hữu hạn bước thực hiện. Chẳng hạn, thuật toán Euclid thoả mãn điều kiện này. Bởi vì giá trị của r luôn nhỏ hơn n (khi thực hiện bước 1), nếu $r \neq 0$ thì giá trị của n ở bước 2 là giá trị của r ở bước trước, ta có $n > r = n_1 > r_1 = n_2 > r_2$ ... Dãy số nguyên dương giảm dần cần phải kết thúc ở 0, do đó sau một số bước nào đó giá trị của r phải bằng 0, thuật toán dừng.**

Với một vấn đề đặt ra, có thể có một hoặc nhiều thuật toán giải. Một vấn đề có thuật toán giải gọi là vấn đề giải được (bằng thuật toán). Chẳng hạn, vấn đề tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính là vấn đề giải được. Một vấn đề không tồn tại thuật toán giải gọi là vấn đề không giải được (bằng thuật toán). Một trong những thành tựu xuất sắc nhất của toán học thế kỷ 20 là đã tìm ra những vấn đề không giải được bằng thuật toán.

Trên đây chúng ta đã trình bày định nghĩa không hình thức về thuật toán. Có thể xác định khái niệm thuật toán một cách chính xác bằng cách sử dụng các hệ hình thức. Có nhiều hệ hình thức mô tả thuật toán : máy Turing, hệ thuật toán Markôp, văn phạm Chomsky dạng 0, ... Song vấn đề này không thuộc phạm vi những vấn đề mà chúng ta quan tâm. Đối với chúng ta, chỉ sự hiểu biết trực quan, không hình thức về khái niệm thuật toán là đủ.

1.1.2. Biểu diễn thuật toán.

Có nhiều phương pháp biểu diễn thuật toán. Có thể biểu diễn thuật toán bằng danh sách các bước, các bước được diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường và các ký hiệu toán học. Có thể biểu diễn thuật toán bằng sơ đồ khối. Tuy nhiên, như đã nói, để đảm bảo tính xác định của thuật toán, thuật toán cần được viết trong các ngôn ngữ lập trình. Một chương trình là sự biểu diễn của một thuật toán trong ngôn ngữ lập trình đã chọn. Để đọc dễ dàng các phần tiếp theo, độc giả cần làm quen với ngôn ngữ lập trình Pascal. Đó là ngôn ngữ thường được chọn để trình bày các thuật toán trong sách báo.

Trong sách này chúng ta sẽ trình bày các thuật toán bởi các thủ tục hoặc hàm trong ngôn ngữ tựa Pascal. Nói là tựa Pascal, bởi vì trong nhiều trường hợp, để cho ngắn gọn, chúng ta không hoàn toàn tuân theo các qui định của Pascal. Ngoài ra, có trường hợp, chúng ta xử dụng cả các ký hiệu toán học và các mệnh đề trong ngôn ngữ tự nhiên (tiếng Anh hoặc tiếng Việt). Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1 **: Thuật toán kiểm tra số nguyên n(n > 2) có là số nguyên tố hay không.**

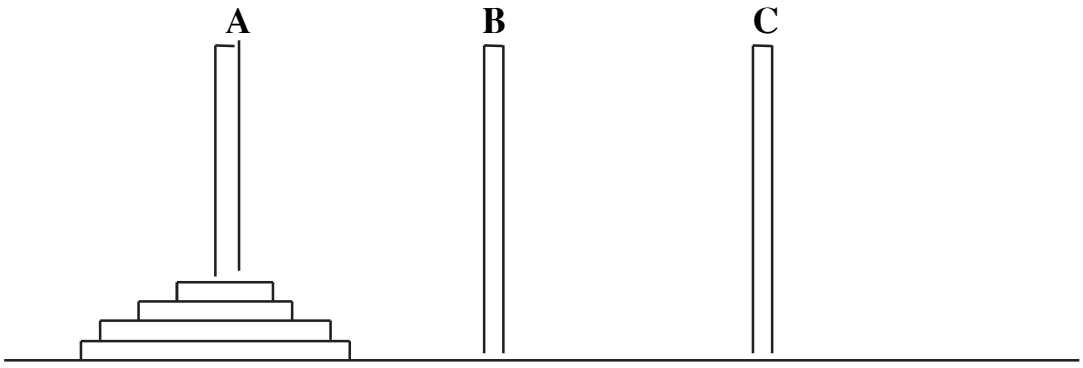
```
function        NGTO (n : integer) : boolean ;
   var          a : integer ;
     begin      NGTO : = true ;
```

```
                a : = 2 ;
                while a <= sqrt (n) do
                if n mod a = 0 then NGTO : = false
                        else a : = a +1 ;
end ;
```

Ví dụ 2 : **Bài toán tháp Hà Nội. Có ba cọc A, B, C. Lúc đầu, ở cọc A có n đĩa được lồng vào theo thứ tự nhỏ dần từ thấp lên cao. Đòi hỏi phải chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc B, được quyền sử dụng cọc C làm vị trí trung gian, nhưng không được phép đặt đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ.**

Để chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc B, ta thực hiện thủ tục sau : đầu tiên là chuyển n - 1 đĩa bên trên từ cọc A sang cọc C, sau đó chuyển đĩa lớn nhất từ cọc A sang cọc B. Đến đây, chỉ cần cuyển n - 1 đĩa từ cọc C sang cọc B. Việc chuyển n-1 đĩa từ cọc này sang cọc kia được thực hiện bằng cách áp dụng đệ qui thủ tục trên.

```
Procedure   MOVE (n, A, B, C) ;
{thủ tục chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc B}
begin
        if  n=1 then chuyển một đĩa từ cọc A sang cọc B
                  else
        begin
                MOVE (n-1, A, C, B) ;
                Chuyển một đĩa từ cọc A sang cọc B ;
                MOVE (n-1, C, B, A) ;
        end
end ;
```



1.1.3. Các vấn đề liên quan đến thuật toán.

Thiết kế thuật toán.

Để giải một bài toán trên MTĐT, điều trước tiên là chúng ta phải có thuật toán. Một câu hỏi đặt ra là, làm thế nào để tìm ra thuật toán cho một bài toán đã đặt ra ? Lớp các bài toán được đặt ra từ các ngành khoa học kỹ thuật từ các lĩnh vực hoạt động của con ngươì là hết sức phong phú và đa dạng. Các thuật toán giải các lớp bài toán khác nhau cũng rất khác nhau. Tuy nhiên, có một số kỹ thuật thiết kế thuật toán chung như chia-để-trị (divide-and-conquer), phương pháp tham lam (greedy method), qui hoạch động (dynamic programming), ... Việc nắm được các chiến lược thiết kế thuật toán này là hết sức cần thiết, nó giúp cho bạn dễ tìm ra các thuật toán mới cho các bài toán của bạn. Các đề tài này sẽ được đề cập đến trong tập II của sách này.

Tính đúng đắn của thuật toán.

Khi một thuật toán được làm ra, ta cần phải chứng minh rằng, thuật toán khi đươc thực hiện sẽ cho ta kết quả đúng với mọi dữ liệu vào hợp lệ. Điều này gọi là chứng minh tính đúng đắn của thuật toán. Việc chứng minh một thuật toán đúng đắn là một công việc không dễ dàng. Trong nhiều trường hợp, nó đòi hỏi ta phải có trình độ và khả năng tư duy toán học tốt.

Sau đấy ta sẽ chỉ ra rằng, khi thực hiện thuật toán Euclid, g sẽ là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương m và n bất kỳ. Thật vậy khi thực hiện bước 1, ta có m = qn + r, trong đó q là số nguyên nào đó. Nếu r = 0 thì n là ước của m và hiển nhiên n (do đó g) là ước chung lớn nhất của m và n. Nếu r ≠ 0, thì một ước chung bất kỳ của m và n cũng là ước chung của n và r (vì r = m - qn). Ngược lại một ước chung bất kỳ của n và r cũng là ước chung của m và n (vì m = qn + r). Do đó ước chung lớn nhất của n và r cũng là ước chung lớn nhất của m và n. Vì vậy, khi thực hiện lặp lại bước 1 với sự thay đổi giá trị của m bởi n giá trị của n bởi r (các phép gán m ←, n←r ở bước 2) cho tới khi r = 0, ta sẽ nhận được giá trị của g là ước chung lớn nhất của các giá trị m và n ban đầu.

Phân tích thuật toán.

Giả sử đối với một bài toán nào đó chúng ta có một số thuật toán giải. Một câu hỏi mới xuất hiện là, chúng ta cần chọn thuật toán nào trong số các thuật toán đó để áp dụng. Việc phân tích thuật toán, đánh giá độ phức tạp của nó là nội dung của phần sau.

1.2. PHÂN TÍCH THUẬT TOÁN.

1.2.1. Tính hiệu quả của thuật toán.

Khi giải một vấn đề, chúng ta cần chọn trong số các thuật toán, một thuật toán mà chúng ta cho là "tốt" nhất. Vậy ta cần lựa chọn thuật toán dựa trên cơ sở nào ? Thông thường ta dựa trên hai tiêu chuẩn sau đây :

1. Thuật toán đơn giản, dễ hiểu, dễ cài đặt (dễ viết chương trình)

2. Thuật toán sử dụng tiết kiệm nhất các nguồn tài nguyên của máy tính, và đặc biệt, chạy nhanh nhất có thể được.

Khi ta viết một chương trình chỉ để sử dụng một số ít lần, và cái giá của thời gian viết chương trình vượt xa cái giá của chạy chương trình thì tiêu chuẩn (1) là quan trọng nhất. Nhưng có trường hợp ta cần viết các chương trình (hoặc thủ tục, hàm) để sử dụng nhiều lần, cho nhiều người sử dụng, khi đó giá của thời gian chạy chương trình sẽ vượt xa giá viết nó. Chẳng hạn, các thủ tục sắp xếp, tìm kiếm được sử dụng rất nhiều lần, bởi rất nhiều người trong các bài toán khác nhau. Trong trường hợp này ta cần dựa trên tiêu chuẩn (2). Ta sẽ cài đặt thuật toán có thể rất phức tạp, miễn là chương trình nhận được chạy nhanh hơn các chương trình khác.

Tiêu chuẩn (2) được xem là *tính hiệu quả* của thuật toán. Tính hiệu quả của thuật toán bao gồm hai nhân tố cơ bản.

1. Dung lượng không gian nhớ cần thiết để lưu giữ các dữ liệu vào, các kết quả tính toán trung gian và các kết quả của thuật toán.

2. Thời gian cần thiết để thực hiện thuật toán (ta gọi là thời gian chạy).

Chúng ta sẽ chỉ quan tâm đến thời gian thực hiện thuật toán. Vì vậy, khi nói đến đánh giá độ phức tạp của thuật toán, có nghĩa là ta nói đến đánh gia thời gian thực hiện. Một thuật toán có hiệu quả được xem là thuật toán có thời gian chạy ít hơn các thuật toán khác.

1.2.2. Tại sao lại cần thuật toán có hiệu quả.

Kỹ thuật máy tính tiến bộ rất nhanh, ngày nay các máy tính lớn có thể đạt tốc dộ tính toán hàng trăm triệu phép tính một giây. Vậy thì có bõ công phải tiêu tốn thời gian để thiết kế các thuật toán có hiệu quả không ? Một số ví dụ sau đây sẽ trả lời cho câu hỏi này.

Ví dụ 1 : Tính định thức.

Giả sử M là một ma trận vuông cấp n :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định thức của ma trận M ký hiệu là det(M) được xác định đệ qui như sau :

Nếu n = 1, det(M) = a_{11}. Nếu n >1, ta gọi M_{ij} là ma trận con cấp n -1, nhận được từ ma trận M bằng cách loại bỏ dòng thứ i và cột thứ j, và

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det\left(M_{1j}\right)$$

Dễ dàng thấy rằng, nếu ta tính định thức trực tiếp dựa vào công thức đệ qui này, cần thực hiện n! phép nhân. Một con số khổng lồ với n không lấy gì làm lớn. Ngay cả với tốc độ của máy tính lớn hiện đại, để tính định thức của ma trận cấp n = 25, cũng cần hàng triệu năm !

Một thuật toán cổ điển khác, đó là thuật toán Gauss - Jordan thuật toán này tính định thức cấp n trong thời gian n^3.

Để tính định thức cấp n = 100 bằng thuật toán này trên máy tính lớn ta chỉ cần đến 1 giây.

Ví dụ 2 : Bài toán tháp Hà Nội.

Trong ví dụ 2, mục 1.1 ta đã đưa ra một thuật toán để chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc B. Ta thử tính xem, cần thực hiện bao nhiêu lần chuyển đĩa từ cọc này sang cọc khác (không đặt đĩa to lên trên đĩa nhỏ) để chuyển được n đĩa từ cọc A sang cọc B. Gọi số đó là F(n). Từ thuật toán, ta có :

F(1) = 1,

F(n) = 2F(n-1) + 1 với n > 1.

với n = 1, 2, 3 ta có F(1) = 1, F(2) = 3, F(3) = 7.

Bằng cách qui nạp, ta chứng minh được $F(n) = 2^n - 1$.

Với n = 64, ta có $F(64) = 2^{64} - 1$ lần chuyển. Giả sử mỗi lần chuyển một đĩa từ cọc này sang cọc khác, cần 1 giây. Khi đó để thực hiện $2^{64} - 1$ lần chuyển, ta cần 5×10^{11} năm. Nếu tuổi của vũ trụ là 10 tỉ năm, ta cần 50 lần tuổi của vũ trụ để chuyển 64 đĩa !.

Đối với một vấn đề có thể có nhiều thuật toán, trong số đó có thể thuật toán này hiệu quả hơn (chạy nhanh hơn) thuật toán kia. Tuy nhiên, cũng có những vấn đề không tồn tại thuật toán hiệu quả, tức là có thuật toán, song thời gian thực hiện nó là quá lớn, trong thực tế không thể thực hiện được, dù là trên các máy tính lớn hiện đại nhất.

1.2.3. Đánh giá thời gian thực hiện thuật toán như thế nào ?

Có hai cách tiếp cận để đánh giá thời gian thực hiện của một thuật toán.Trong phương pháp thử nghiệm, chúng ta viết chương trình và cho chạy chương trình với các dữ liệu vào khác nhau trên một máy tính nào đó. Thời gian chạy chương trình phụ thuộc vào các nhân tố chính sau đây :

1. Các dữ liệu vào

2. Chương trình dịch để chuyển chương trình nguồn thành mã máy.

3. Tốc độ thực hiện các phép toán của máy tính được sử dụng để chạy chương trình.

Vì thời gian chạy chương trình phụ thuộc vào nhiều nhân tố, nên ta không thể biểu diễn chính xác thời gian chạy là bao nhiêu đơn vị thời gian chuẩn, chẳng hạn nó là bao nhiêu giây.

Trong phương pháp lý thuyết (đó là phương pháp được sử dụng trong sách này), ta sẽ coi thời gian thực hiện thuật toán như là hàm số của *cỡ dữ liệu vào*. Cỡ của dữ liệu vào là một tham số đặc trưng cho dữ liệu vào, nó có ảnh hưởng quyết định đến thời gian thực hiện chương trình. Cái mà chúng ta chọn làm cỡ của dữ liệu vào phụ thuộc vào các thuật toán cụ thể. Đối với các thuật toán sắp xếp mảng, cỡ của dữ liệu là số thành phần của mảng. Đối với thuật toán giải hệ n phương trình tuyến tính với n ẩn, ta chọn n là cỡ. Thông thường cỡ của dữ liệu vào là một số nguyên dương n. Ta sẽ sử dụng hàm số T(n), trong đó n là cỡ dữ liệu vào, để biểu diễn thời gian thực hiện của một thuật toán.

Thời gian thực hiện thuật toán T(n) nói chung không chỉ phụ thuộc vào cỡ của dữ liệu vào, mà còn phụ thuộc vào dữ liệu vào cá biệt. Chẳng hạn, ta xét bài toán xác định một đối tượng a có mặt trong danh sách n phần tử (a_1, a_2, ... a_n) hay không. Thuật toán ở đây là, so sánh a với từng phần tử của danh sách đi từ đầu đến cuối danh sách, khi gặp phần tử a_i đầu tiên a_i = a thì dừng lại, hoặc đi đến hết danh sách mà không gặp a_i nào bằng a, trong trường hợp này a không có trong danh sách. Các dữ liệu vào là a và danh sách (a_1, a_2, ..., a_n) (có thể biểu diễn danh sách bằng mảng, chẳng hạn). Cỡ của dữ liệu vào là n. Nếu a_1 = a chỉ cần một phép so sánh. Nếu $a_1 \neq a$, a_2 = a, cần 2 phép so sánh. Còn nếu $a_i \neq a$, i = 1, ..., n-1 và a_n = a,

hoặc a không có trong danh sách, ta cần n phép so sánh. Nếu xem thời gian thực hiện T(n) là số phép toán so sánh, ta có T(n) <= n, trong trường hợp xấu nhất T(n) = n. Trong các trường hợp như thế, ta nói đến thời gian thực hiện thuật toán trong trường hợp xấu nhất.

Ngoài ra, ta còn sử dụng khái niệm thời gian thực hiện trung bình. Đó là thời gian trung bình $T_{tb}(n)$ trên tất cả các dữ liệu vào có cỡ n. Nói chung thời gian thực hiện trung bình khó xác định hơn thời gian thực hiện trong trường hợp xấu nhất.

Chúng ta có thể xác định thời gian thực hiện T(n) là số *phép toán sơ cấp* cần phải tiến hành khi thực hiện thuật toán. Các phép toán sơ cấp là các phép toán mà thời gian thực hiện bị chặn trên bởi một hằng số chỉ phụ thuộc vào cách cài đặt được sử dụng (ngôn ngữ lập trình, máy tính ...). Chẳng hạn các phép toán số học +, - , *, /, các phép toán so sánh = , < >, <, <= , > , > = là các phép toán sơ cấp. Phép toán so sánh hai xâu ký tự không thể xem là phép toán sơ cấp, vì thời gian thực hiện nó phụ thuộc vào độ dài của xâu.

1.2.4 Ký hiệu ô lớn và đánh giá thời gian thực hiện thuật toán bằng ký hiệu ô lớn.

Khi đánh giá thời gian thực hiện bằng phương pháp toán học, chúng ta sẽ bỏ qua nhân tố phụ thuộc vào cách cài đặt chỉ tập trung vào xác định độ lớn của thời gian thực hiện T(n). Ký hiệu toán học ô lớn được sử dụng để mô tả độ lớn của hàm T(n).

Giả sử n là số nguyên không âm, T(n) và f(n) là các hàm thực không âm. Ta viết T(n) = 0(f(n)) (đọc : T(n) là ô lớn của f(n)), nếu và chỉ nếu tồn tại các hằng số dương c và n_o sao cho $T(n) \le c\ f(n)$, với mọi $n \ge n_o$.

Nếu một thuật toán có thời gian thực hiện T(n) = 0(f(n)), chúng ta sẽ nói rằng thuật toán có thời gian thực hiện cấp f(n). Từ định nghĩa ký hiệu ô lớn, ta có thể xem rằng hàm f(n) là cận trên của T(n).

Ví dụ : Giả sử $T(n) = 3n^2 + 5n + 4$. Ta có

$3n^2 + 5n + 4 <= 3n^2 + 5n^2 + 4n^2 = 12n^2$, với mọi $n \ge 1$.

Vậy $T(n) = 0(n^2)$. Trong trường hợp này ta nói thuật toán có thời gian thực hiện cấp n^2, hoặc gọn hơn, thuật toán có thời gian thực hiện bình phương.

Dễ dàng thấy rằng, nếu T(n) = 0(f(n)) và f(n) = $0(f_1(n))$, thì $T(n)=0(f_1(n))$. Thật vậy, vì T(n) là ô lớn của f(n) và f(n) là ô lớn của $f_1(n)$, do đó tồn tại các hằng số c_o, n_o, c_1, n_1 sao cho $T(n) \le c_o\ f(n)$ với mọi $n \ge n_o$

và $f(n) \le c_1 f_1(n)$ với mọi $n \ge n_1$. Từ đó ta có $T(n) \le c_o c_1 f_1(n)$ với mọi $n \ge \max(n_o, n_1)$.

Khi biểu diễn cấp của thời gian thực hiện thuật toán bởi hàm f(n), chúng ta sẽ chọn f(n) là hàm số nhỏ nhất, đơn giản nhất có thể được sao cho T(n) = 0(f(n)). Thông thường f(n) là các hàm số sau đây : f(n) = 1 ; f(n)=logn; f(n)=n ; f(n) = nlogn ; $f(n) = n^2$, n^3, ... và $f(n) = 2^n$.

Nếu T(n) = 0(1) điều này có nghĩa là thời gian thực hiện bị chặn trên bởi một hằng số nào đó, trong trường hợp này ta nói thuật toán có thời gian thực hiện hằng.

Nếu T(n) =0(n), tức là bắt đầu từ một n_o nào đó trở đi ta có T(n)<=cn với một hằng số c nào đó, thì ta nói thuật toán có thời gian thực hiện tuyến tính.

Bảng sau đây cho ta các cấp thời gian thực hiện thuật toán được sử dụng rộng rãi nhất và tên gọi thông thường của chúng.

Ký hiệu ô lớn	Tên gọi thông thường
0(1)	hằng
0 (logn)	logarit
0(n)	tuyến tính
0(n logn)	nlogn
$0(n^2)$	bình phương
$0(n^3)$	lập phương
$0(2^n)$	mũ

Danh sách trên sắp xếp theo thứ tự tăng dần của cấp thời gian thực hiện.

Để thấy rõ sự khác nhau của các cấp thời gian thực hiện thuật toán, ta xét ví dụ sau. Giả sử đối với một vấn đề nào đó, ta có hai thuật toán giải A và B. Thuật toán A có thời gian thực hiện $T_A(n) = 0(n^2)$, còn thuật toán B có thời gian thực hiện $T_B(n) = 0(n\log n)$. Với n = 1024, thuật toán A đòi hỏi khoảng 1048.576 phép toán sơ cấp, còn thuật toán B đòi hỏi khoảng 10.240 phép toán sơ cấp. Nếu cần một micrô-giây cho một phép toán sơ cấp thì thuật toán A cần khoảng 1,05 giây, trong khi thuật toán B chỉ cần khoảng 0,01 giây. Nếu n = 1024 x 2, thì thuật toán A đòi hỏi khoảng 4,2 giây, trong khi thuật toán B chỉ đòi hỏi khoảng 0,02 giây. Với n càng lớn thì thời gian thực hiện thuật toán B càng ít hơn so với thời gian thực hiện thuật toán A. Vì vậy, nếu một vấn đề nào đó đã có một thuật toán giải với

thời gian thực hiện cấp n^2, bạn tìm ra thuật toán mới với thời gian thực hiện cấp nlogn, thì đó là một kết quả rất có ý nghĩa.

Những thuật toán có thời gian thực hiện cấp n^k, với k là số nguyên nào đó ≥ 1, được gọi là các thuật toán có thời gian thực hiện đa thức.

1.2.5 Các qui tắc để đánh giá thời gian thực hiện thuật toán.

Sau đây chúng ta đưa ra một qui tắc cần thiết về ô lớn để đánh giá thời gian thực hiện một thuật toán.

Qui tắc tổng : Nếu $T_1(n) = 0(f_1(n)$ và $T_2(n) = 0(f_2(n)$ thì

$$T_1(n) + T_2(n) = 0(\max(f_1(n), f_2(n))).$$

Thật vậy, vì $T_1(n)$, $T_2(n)$ là ô lớn của $f_1(n)$, $f_2(n)$ tương ứng do đó tồn tại hằng số c_1, c_2, n_1, n_2 sao cho $T_1(n) \le c_1f_1(n)$ với mọi $n \ge n_1$ và $T_2(n) \le c_2f_2(n)$ với mọi $n \ge n_2$. Đặt $n_o = \max(n1, n2)$. Khi đó với mọi $n \ge n_o$, ta có $T_1(n) + T_2(n) \le (c_1 + c_2) \max(f_1(n), f_2(n))$.

Qui tắc này thường được áp dụng như sau. Giả sử thuật toán của ta được phân thành ba phần tuần tự. Phần một có thời gian thực hiện $T_1(n)$ được đánh giá là 0(1), phần hai có thời gian $T_2(n)$ là $0(n^2)$, phần ba có thời gian $T_3(n)$ là 0(n). Khi đó thời gian thực hiện thuật toán $T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n)$ sẽ là $0(n^2)$, vì $n^2 = \max(1,n^2,n)$.

Trong sách báo quốc tế các thuật toán thường được trình bầy dưới dạng các thủ tục hoặc hàm trong ngôn ngữ tựa Pascal. Để đánh giá thời gian thực hiện thuật toán, ta cần biết cách đánh giá thời gian thực hiện các câu lệnh của Pascal. Trước hết, chúng ta hãy xác định các câu lệnh trong Pascal. Các câu lệnh trong Pascal được định nghĩa đệ qui như sau :

1. Các phép gán, đọc, viết, goto là câu lệnh. Các lệnh này được gọi là các lệnh đơn.

2. Nếu $S_1, S_2,..., S_n$ là câu lệnh thì

begin $S_1, S_2, ..., S_n$ end

là câu lệnh. Lệnh này được gọi là lệnh hợp thành (hoặc khối).

3. Nếu S_1 và S_2 là các câu lệnh và E là biểu thức logic thì

if E then S_1 else S_2

là câu lệnh, và

if E then S_1

là câu lệnh. Các lệnh này được gọi là lệnh if.

4. Nếu S_1, S_2, ..., S_{n+1} là các câu lệnh, E là biểu thức có kiểu thứ tự đếm được, và v_1, v_2,...v_n là các giá trị cùng kiểu với E thì

case E of

v_1 : S_1 ;
v_2 : S_2 ;
. . . . . .
v_n : S_n ;
[else Sn+1]

end

là câu lệnh. Lệnh này được gọi là lệnh case

5. Nếu S là câu lệnh và E là biểu thức logie thì

while E do S

là câu lệnh. Lệnh này được gọi là lệnh while.

6. Nếu S_1, S_2, ..., S_n là các câu lệnh, và E là biểu thức logic thì

repeat S_1, S_2, ..., S_n until E

là câu lệnh. Lệnh này được gọi là lệnh repeat.

7. Với S là câu lệnh, E_1 và E_2 là các biểu cùng một kiểu thứ tự đếm được, thì

for i : = E_1 to E_2 do S

là câu lệnh, và

for i : = E_2 downto E_1 do S

là câu lệnh. Các câu lệnh này được gọi là lệnh for.

Nhờ định nghĩa đệ qui của các lệnh, chúng ta có thể phân tích một chương trình xuất phát từ các lệnh đơn, rồi từng bước đánh giá các lệnh phức tạp hơn, cuối cùng đánh giá được thời gian thực hiện chương trình.

Giả sử rằng, các lệnh gán không chứa các lời gọi hàm. Khi đó để đánh giá thời gian thực hiện một chương trình, ta có thể áp dụng phương pháp đệ qui sau đây :

1. Thời gian thực hiện các lệnh đơn : gán, đọc, viết, goto là 0(1).

2. Lệnh hợp thành. Thời gian thực hiện lệnh hợp thành được xác định bởi luật tổng.

3. Lệnh if. Giả sử thời gian thực hiện các lệnh S_1, S_2 là $0(f_1(n))$ và $0(f_2(n))$ tương ứng. Khi đó thời gian thực hiện lệnh if là $0(\max(f_1(n), f_2(n)))$.

4. Lệnh case. Được đánh giá như lệnh if.

5. Lệnh while. Giả sử thời gian thực hiện lệnh S (thân của lệnh while) là 0(f(n)). Giả sử g(n) là số tối đa các lần thực hiện lệnh S, khi thực hiện lệnh while. Khi đó thời gian thực hiện lệnh while là 0(f(n)g(n).

6. Lệnh repeat. Giả sử thời gian thực hiện khối begin S_1, S_2, ... S_n end là 0(f(n)). Giả sử g(n) là số tối đa các lần lặp. Khi đó thời gian thực hiện lệnh repeat là 0(f(n)g(n)).

7. Lệnh for. Được đánh giá tương tự lệnh while và repeat.

Nếu lệnh gán có chứa các lời gọi hàm, thì thời gian thực hiện nó không thể xem là 0(1) được, vì khi đó thời gian thực hiện lệnh gán còn phụ thuộc vào thời gian thực hiện các hàm có trong lệnh gán. Việc đánh giá thời gian thực hiện các thủ tục (hoặc hàm) không đệ qui được tiến hành bằng cách áp dụng các qui tắc trên. Việc đánh giá thời gian thực hiện các thủ tục (hoặc hàm) đệ quy sẽ khó khăn hơn nhiều.

Đánh giá thủ tục (hoặc hàm) đệ qui.

Trước hết chúng ta xét một ví dụ cụ thể. Ta sẽ đánh giá thời gian thực hiện của hàm đệ qui sau (hàm này tính n!).

```
function    fact(n : integer) : integer ;
begin
        if n <=1 then fact : =1
                    else fact  : = n * fac(n-1)
end ;
```

Trong hàm này cỡ của dữ liệu vào là n. Giả sử thời gian thực hiện hàm là T(n). Với n=1, chỉ cần thực hiện lệnh gán fact : = 1, do đó T(1) = 0(1). Với n > 1, cần thực hiện lệnh gán fact : = n*fact(n-1). Do đó, thời gian T(n) là 0(1) (để thực hiện phép nhân và phép gán) cộng với T(n-1) (để thực hiện lời gọi đệ qui fact(n-1). Tóm lại, ta có quan hệ đệ qui sau :

T(1) = 0(1) ;

T(n) = 0(1) + T(n-1).

Thay các 0(1) bởi các hằng nào đó, ta nhận được quan hệ đệ qui sau

$T(1) = C_1$

$T(n) = C_2 + T(n-1)$

Để giải phương trình đệ qui, tìm T(n), chúng ta áp dụng phương pháp thế lặp. Ta có phương trình đệ qui

$T(m) = C_2 + T(m-1)$, với $m > 1$

Thay m lần lượt bởi 2,3,..., n - 1, n, ta nhận được các quan hệ sau.

$T(2) = C_2 + T(1)$

$T(3) = C_2 + T(2)$

.....

$T(n-1) = C_2 + T(n-2)$

$T(n) = C_2 + T(n-1)$

Bằng các phép thế liên tiếp, ta nhận được

$T(n) = (n-1)C_2 + T(1)$

hay $T(n) = (n-1)\ C_2 + C_1$**, trong đó** C_1 **và** C_2 **là các hằng nào đó. Do đó, T(n)=0(n).**

Từ ví dụ trên, ta suy ra phương pháp tổng quát sau đây để đánh giá thời gian thực hiện thủ tục (hàm) đệ qui. Để đơn giản, ta giả thiết rằng các thủ tục (hàm) là đệ qui trực tiếp. Điều đó có nghĩa là các thủ tục (hàm) chỉ chứa các lời gọi đệ qui đến chính nó (không qua một thủ tục (hàm) khác nào cả). Giả sử thời gian thực hiện thủ tục là T(n), với n là cỡ dữ liệu vào. Khi đó thời gian thực hiện các lời gọi đệ qui thủ tục sẽ là T(m), với m < n. Đánh giá thời gian $T(n_0)$**, với** n_0 **là cỡ dữ liệu vào nhỏ nhất có thể được (trong ví dụ trên, đó là T(1). Sau đó đánh giá thân của thủ tục theo các qui tắc 1-7, ta sẽ nhận được quan hệ đệ qui sau đây.**

$$T(n) = F(T(m_1), T(m_2), ..., T(m_k))$$

trong đó $m_1, m_2, ..., m_k < n$**. Giải phương trình đệ qui này, ta sẽ nhận được sự đánh giá của T(n). Tuy nhiên, cần biết rằng, việc giải phương trình đệ qui, trong nhiều trường hợp, là rất khó khăn, không đơn giản như trong ví dụ đã trình bày.**

1.2.6. Phân tích một số thuật toán.

Sau đây chúng ta sẽ áp dụng các phương pháp đã trình bày để phân tích độ phức tạp của một số thuật toán.

Ví dụ 1 : Phân tích thuật toán Euclid. Chúng ta biểu diễn thuật toán Euclid bởi hạm sau.

```
function    Euclid (m, n : integer) : integer ;
        var    r : integer ;
begin
(1)     r : = m  mod  n ;
(2)     while r < > 0 do
        begin
```

```
(3)             m : = n ;
(4)             n : = r ;
(5)             r : = m mod n ;
        end ;
(6)     Euclid : = n ;
end ;
```

Thời gian thực hiện thuật toán phụ thuộc vào số nhỏ nhất trong hai số m và n. Giả sử n ≥ n > 0, do đó cỡ của dữ liệu vào là n. Các lệnh (1) và (6) có thời gian thực hiện là 0(1). Vì vậy thời gian thực hiện thuật toán là thời gian thực hiện lệnh while ta đánh giá thời gian thực hiện lệnh while (2). Thân của lệnh này, là khối gồm ba lệnh (3), (4) và (5). Mỗi lệnh có thời gian thực hiện là 0(1), do đó khối có thời gian thực hiện là 0(1). Còn phải đánh giá số lớn nhất các lần thực hiện lặp khối.

Ta có :

$m = n.q_1 + r_1 , 0 \le r_1 < n$

$n = r_1q_2 + r_2 , 0 \le r_2 < r_1$

Nếu $r_1 \le n/2$ **thì** $r_2 < r_1 \le n/2$, **do đó** $r_2 < n/2$. **Nếu** $r_1 > n/2$ **thì** $q_2 = 1$, **tức là** $n = r_1 + r_2$, **do đó** $r_2 < n/2$. **Tóm lại, ta luôn có** $r_2 < n/2$

Như vậy, cứ hai lần thực hiện khối thì phần dư r giảm đi một nửa của n. Gọi k là số nguyên lớn nhất sao cho $2^k \le n$. **Số lần lặp khối tối đa là** $2k+1 \le 2\log_2 n+1$. **Do đó thời gian thực hiện lệnh while là** $0(\log_2 n)$. **Đó cũng là thời gian thực hiện thuật toán.**

Ví dụ 2. Dãy số Fibonacci được xác định một cách đệ qui như sau :

$f_o = 0$;

$f_1 = 1$;

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ **với** $n \ge 2$

Các thành phần đầu tiên của dãy là 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Dãy này có nhiều áp dụng trong toán học, tin học và lý thuyết trò chơi.

Thuật toán đệ qui :

```
function  Fibo1 (n : integer) : integer ;
begin
    if n <= 2 then Fibo1 : = n
              else  Fibo1 : = Fibo1(n-1) + Fibo1(n-2)
end ;
```

Có thể đánh giá được hàm này có thời gian thực hiện là 0(ϕ^n), với $\phi=(1+\sqrt{5})/2$. Tức là, thuật toán Fibo1 có thời gian thực hiện mũ, nó không có ý nghĩa thực tiễn với n lơn. Sau đây là một thuật toán khác, có thời gian thực hiện chỉ là 0(n).

```
funciton Fibo2 (n: integer) : integer ;
        var i, j, k : integer
        begin
(1)             i : = 1 ;
(2)             j : = 0 ;
(3)             for k : = 1 to n do
                begin
                        j : = i + j ;
                        i : = j - i ;
                end ;
(4)             Fibo2 : = j ;
        end ;
```

Ta phân tích hàm Fibo2. Các lệnh gán (1) , (2) và (4) có thời gian thực hiện 0(1). Thân của lệnh for(3) có thời gian thực hiện là 0(1), số lần lặp là n. Do đó lệnh for(3) có thời gian thực hiện là 0(n). Kết hợp lại, ta có thời gian thực hiện hàm Fibo2 là 0(n).

Với n = 50, thuật toán Fibo1 cần khoảng 20 ngày trên máy tính lớn, trong khi đó thuật toán Fibo2 chỉ cần khoảng 1 micrô giây. Với n = 100, thời gian chạy của thuật toán Fibo1 là 10^9 năm ! còn thuật toán Fibo2 chỉ cần khoảng 1,5 micro giây. Thuật toán Fibo2 chưa phải là thuật toán hiệu quả nhất. Bạn thử tìm một thuật toán hiệu quả hơn.

Chương II
KIỂU DỮ LIỆU, CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ MÔ HÌNH DỮ LIỆU

2.1. BIỂU DIỄN DỮ LIỆU.

Trong máy tính điện tử (MTĐT), các dữ liệu dù có bản chất khác nhau như thế nào (số nguyên, số thực, hay xâu ký tự, ...), đều được biểu diễn dưới dạng nhị phân. Mỗi dữ liệu được biểu diễn dưới dạng một dãy các số nhị phân 0 hoặc 1. Về mặt kỹ thuật đây là cách biểu diễn thích hợp nhất, vì các giá trị 0 và 1 dễ dàng được mã hoá bởi các phần tử vật lý chỉ có hai trạng thái. Chúng ta sẽ không quan tâm đến cách biểu diễn này của dữ liệu, cũng như các cách tiến hành các thao tác, các phép toán trên các dữ liệu được biểu diễn dưới dạng nhị phân.

Cách biểu diễn nhị phân của dữ liệu rất không thuận tiện đối với con người. Việc xuất hiện các ngôn ngữ lập trình bậc cao (FORTRAN, BASIC, PASSCAL, C ...) đã giải phóng con người khỏi những khó khăn khi làm việc với cách biểu diễn trong máy của dữ liệu. Trong các ngôn ngữ lập trình bậc cao, các dữ liệu, hiểu theo một nghĩa nào đó, là sự trìu tượng hoá các tính chất của các đối tượng trong thế giới hiện thực. Nói dữ liệu là sự trìu tượng hoá từ thế giới hiện thực, vì ta đã bỏ qua những nhân tố, tính chất mà ta cho là không cơ bản, chỉ giữ lại những tính chất đặc trưng cho các đối tượng thuộc phạm vi bài toán đang xét. Chẳng hạn, vị trí của một đối tượng trong thực tiễn, được đặc trưng bởi cặp số thực (x,y) (đó là toạ đoạ đê-các của một điểm trong mặt phẳng). Do đó, trong ngôn ngữ Pascal, vị trí một đối tượng được biểu diễn bởi bản ghi gồm hai trường tương ứng với hoành độ và tung độ của một điểm. Trong toán học có các khái niệm biểu diễn đặc trưng về mặt số lượng và các quan hệ của các đối tượng trong thế giới hiện thực, đó là các khái niệm số nguyên, số thực, số phức, dãy, ma trận, ... Trên cơ sở các khái niệm toán học này, người ta đã đưa vào trong các ngôn ngữ lập trình bậc cao các dữ liệu kiểu nguyên, thực, phức, mảng, bản ghi, ... Tuy nhiên do tính đa dạng của các bài toán cần xử lý bằng MTĐT, chỉ sử dụng các kiểu dữ liệu có sẵn trong các ngôn ngữ lập trình bậc cao là chưa đủ để mô tả các bài toán. Chúng ta phải cần đến các *cấu trúc dữ liệu*. Đó là các dữ liệu phức tạp, được xây dựng nên từ các dữ liệu đã có, đơn giản hơn bằng các phương pháp liên kết nào đó.

Để giải quyết một bài toán bằng MTĐT, ta cần xây dựng *mô hình dữ liệu mô tả* bài toán. Đó là sự trìu tượng hoá các đặc trưng của các đối tượng thuộc phạm vi vấn đề mà ta quan tâm, các mối quan hệ giữa các

đối tượng đó. Dùng làm các mô hình dữ liệu trong tin học, chúng ta sẽ sử dụng các mô hình toán học như danh sách, cây, tập hợp, ánh xạ, quan hệ, đồ thị, ... Mô hình dữ liệu sẽ được biểu diễn bởi các cấu trúc dữ liệu. Thông thường một mô hình dữ liệu có thể được biểu hiện bởi nhiều cấu trúc dữ liệu khác nhau. Tuỳ từng ứng dụng, ta sẽ chọn cấu trúc dữ liệu nào mà các thao tác cần thực hiện là hiệu quả nhất có thể được.

2.2. KIỂU DỮ LIỆU VÀ CẤU TRÚC DỮ LIỆU.

Trong các ngôn ngữ lập trình bậc cao, các dữ liệu được phân lớp thành các lớp dữ liệu dựa vào bản chất của dữ liệu. Mỗi một lớp dữ liệu được gọi là một *kiểu dữ liệu.* Như vậy, một kiểu T là một tập hợp nào đó, các phần tử của tập được gọi là các *giá trị* của kiểu. Chẳng hạn, kiểu *integer* là tập hợp các số nguyên, kiểu *char* là một tập hữu hạn các ký hiệu. Các ngôn ngữ lập trình khác nhau có thể có các kiểu dữ liệu khác nhau. Fortran có các kiểu dữ liệu là *integer*, *real*, *logical*, *complex* và *double complex*. Các kiểu dữ liệu trong ngôn ngữ C là *int, float, char, con trỏ, struct*..., Kiểu dữ liệu trong ngôn ngữ Lisp lại là các S-biểu thức. Một cách tổng quát, mỗi ngôn ngữ lập trình có một *hệ kiểu* của riêng mình. Hệ kiểu của một ngôn ngữ bao gồm các kiểu dữ liệu cơ sở và các phương pháp cho phép ta từ các kiểu dữ liệu đã có xây dựng nên các kiểu dữ liệu mới.

Khi nói đến một kiểu dữ liệu, chúng ta cần phải đề cập đến hai đặc trưng sau đây :

1. Tập hợp các giá trị thuộc kiểu. Chẳng hạn, kiểu integer trong ngôn ngữ Pascal gồm tất cả các số nguyên được biểu diễn bởi hai byte, tức là gồm các số nguyên từ -32768 đến + 32767. Trong các ngôn ngữ lập trình bậc cao mỗi hằng, biến, biểu thức hoặc hàm cần phải được gắn với một kiểu dữ liệu xác định. Khi đó, mỗi biến (biểu thức, hàm) chỉ có thể nhận các giá trị thuộc kiểu của biến (biểu thức, hàm) đó.

Ví dụ , nếu X là biến có kiểu *boolean* trong Pascal (*var* X : *boolean*) thì X chỉ có thể nhận một trong hai giá trị *true, false*.

2. Với mỗi kiểu dữ liệu, cần phải xác định một tập hợp nào đó các phép toán có thể thực hiện được trên các dữ liệu của kiểu. Chẳng hạn, với kiểu real, các phép toán có thể thực hiện được là các phép toán số học thông thường +, -, *, / , và các phép toán so sánh = , < >, < , < =, >, > =.

Thông thường trong một hệ kiểu của một ngôn ngữ lập trình sẽ có một số kiểu dữ liệu được gọi là *kiểu dữ liệu đơn* hay *kiểu dữ liệu phân tử* (atomic).

Chẳng hạn, trong ngôn ngữ Pascal, các kiểu dữ liệu *integer, real, boolean* , *char* và các kiểu liệt kê được gọi là các kiểu dữ liệu đơn. Sở dĩ gọi là đơn, vì các giá trị của các kiểu này được xem là các đơn thể đơn giản nhất không thể phân tích thành các thành phần đơn giản hơn được nữa.

Như đã nói, khi giải quyết các bài toán phức tạp, chỉ sử dụng các dữ liệu đơn là không đủ, ta phải cần đến các *cấu trúc dữ liệu*. Một cấu trúc dữ liệu bao gồm một tập hợp nào đó các *dữ liệu thành phần*, các dữ liệu thành phần này được liên kết với nhau bởi một phương pháp nào đó. Các dữ liệu thành phần có thể là dữ liệu đơn, hoặc cũng có thể là một cấu trúc dữ liệu đã được xây dựng. Có thể hình dung một cấu trúc dữ liệu được tạo nên từ các *tế bào* (khối xây dựng), mỗi tế bào có thể xem như một cái hộp chứa dữ liệu thành phần.

Trong Pascal và trong nhiều ngôn ngữ thông dụng khác có một cách đơn giản nhất để liên kết các tế bào, đó là sắp xếp các tế bào chứa các dữ liệu cùng một kiểu thành một dãy. Khi đó ta có một cấu trúc dữ liệu được gọi là *mảng* (array). Như vậy, có thể nói, một mảng là một cấu trúc dữ liệu gồm một dãy xác định các dữ liệu thành phần cùng một kiểu. Ta vẫn thường nói đến mảng các số nguyên, mảng các số thực, mảng các bản ghi, ... Mỗi một dữ liệu thành phần của mảng được gắn với một chỉ số từ một tập chỉ số nào đó. Ta có thể truy cập đến một thành phần nào đó của mảng bằng cách chỉ ra tên mảng và chỉ số của thành phần đó.

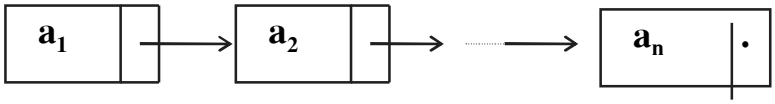
Một phương pháp khác để tạo nên các cấu trúc dữ liệu mới, là kết hợp một số tế bào (có thể chứa các dữ liệu có kiểu khác nhau) thành một *bản ghi* (record). Các tế bào thành phần của bản ghi được gọi là các *trường* của bản ghi. Các bản ghi đến lượt lại được sử dụng làm các tế bào để tạo nên các cấu trúc dữ liệu khác. Chẳng hạn, một trong các cấu trúc dữ liệu hay được sử dụng nhất là mảng các bản ghi.

Còn một phương pháp quan trọng nữa để kiến tạo các cấu trúc dữ liệu, đó là sử dụng con trỏ. Trong phương pháp này, mỗi tế bào là một bản ghi gồm hai phần INFOR và LINK, phần INFOR có thể có một hay nhiều trường dữ liệu, còn phần LINK có thể chứa một hay nhiều con trỏ trỏ đến các tế bào khác có quan hệ với tế bào đó. Chẳng hạn, ta có thể cài đặt một danh sách bởi cấu trúc dữ liệu danh sách liên kết, trong đó mỗi thành phần của danh sách liên kết là bản ghi gồm hai trường

```
type   Cell = record
                    element : Item ;
                    next : ^Cell ;
```

end ;

Ở đây, trường *element* có kiểu dữ liệu *Item*, một kiểu dữ liệu nào đó của các phần tử của danh sách. Trường *next* là con trỏ trỏ tới phần tử tiếp theo trong danh sách. Cấu trúc dữ liệu danh sách liên kết biểu diễn danh sách (a_1, a_2,...., a_n) có thể được biểu diễn như trong hình 2.1



Hình 2.1 : cấu trúc dữ liệu danh sách liên kết.

Sử dụng con trỏ để liên kết các tế bào là một trong các phương pháp kiến tạo các cấu trúc dữ liệu được áp dụng nhiều nhất. Ngoài danh sách liên kết, người ta còn dùng các con trỏ để tạo ra các cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây, một mô hình dữ liệu quan trọng bậc nhất.

Trên đây chúng ta đã nêu ba phương pháp chính để kiến tạo các cấu trúc dữ liệu. (Ở đây chúng ta chỉ nói đến các cấu trúc dữ liệu trong bộ nhớ trong, các cấu trúc dữ liệu ở bộ nhớ ngoài như file chỉ số, B-cây sẽ được đề cập riêng.)

Một kiểu dữ liệu mà các giá trị thuộc kiểu không phải là các dữ liệu đơn mà là các cấu trúc dữ liệu được gọi là *kiểu dữ liệu có cấu trúc*. Trong ngôn ngữ Pascal, các kiểu dữ liệu mảng, bản ghi, tập hợp, file đều là các kiểu dữ liệu có cấu trúc.

2.3 HỆ KIỂU CỦA NGÔN NGỮ PASCAL.

Pascal là một trong các ngôn ngữ có hệ kiểu phong phú nhất. Hệ kiểu của Pascal chứa các kiểu cơ sở, *integer, real, boolean, char* và các quy tắc, dựa vào đó ta có thể xây dựng nên các kiểu phức tạp hơn từ các kiểu đã có. Từ các kiểu cơ sở và áp dụng các quy tắc, ta có thể xây dựng nên một tập hợp vô hạn các kiểu. Hệ kiểu của Pascal có thể được định nghĩa định quy như sau :

A. *Các kiểu cơ sở*

1. Kiểu *integer*

2. Kiểu *real*

3. Kiểu *boolean*

4. Kiểu *char*

5. Kiểu liệt kê

Giả sử obj1, obj2,.... objn là các đối tượng nào đó. khi đó ta có thể tạo nên kiểu liệt kê T bằng cách liệt kê ra tất cả các đói tượng đó.

```
type T = (obj1, obj2,...objn)
```

Chú ý. Tất cả các kiểu đơn đều là các *kiểu có thứ tự*, tức là với hai giá trị bất kỳ a và b thuộc cùng một kiểu, ta luôn có a <= b hoặc a > = b. trừ kiểu *real*, các kiểu còn lại đều là kiểu có thứ tự đếm được.

6. Kiểu *đoạn con*

```
type T = min . max
```

Trong đó min và max là cận dưới và cận trên của khoảng ; min và max là các giá trị thuộc cùng một kiểu *integer, char*, hoặc các kiểu liệt kê, đồng thời min< max. Kiểu T gồm tất cả các giá trị từ min đến max.

B. Các quy tắc đệ quy.

Trong Pascal, chúng ta có thể tạo ra các kiểu mới bằng cách sử dụng các quy tắc sau.

7. Kiểu *array* (mảng)

Giả sử T_0 là một kiểu đã cho, ta sẽ gọi T_0 là kiểu thành phần mảng. Giả sử I là kiểu đoạn con hoặc kiểu liệt kê, ta sẽ gọi I là kiểu chỉ số mảng. Khi đó ta có thể tạo nên kiểu mảng T với các thành phần của mảng là các giá trị thuộc T_0 và được chỉ số hoá bởi tập hữu hạn, có thứ tự I.

```
type T = array[I] of T0
```

8. Kiểu *record* (bản ghi)

Giả sử T_1, T_2,... .T_n là các kiểu đã cho, và F_1, F_2, ...F_n là các tên (tên trường). Khi đó ta có thể thành lập một kiểu bản ghi T với n trường, trường thứ i có tên là F_i và các giá trị của nó có kiểu T_i với i = 1, 2,...n.

```
type T = record
           F1 : T1 ;
           F2 : T2 ;
           .....
           Fn : Tn ;
           end
```

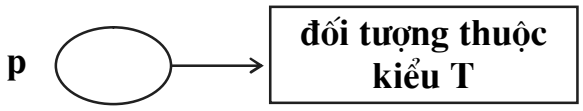
Mỗi giá trị của kiểu bản ghi T là một bộ n giá trị (t_1, t_2, ...t_n), trong đó t_i thuộc T_i với i = 1, 2,..., n.

9. Kiểu con trỏ

Giả sử T là một kiểu đã cho. Khi đó ta có thể tạo nên kiểu con trỏ T_p.

```
type Tp = ^ T
```

Các giá trị của T_p là địa chỉ (vị trí) trong bộ nhớ của máy tính để lưu giữ các đối tượng thuộc kiểu T. Chúng ta sẽ biểu diễn một con trỏ p (var p:^T) bởi vòng tròn nhỏ có mũi tên chỉ đến đối tượng thuộc kiểu T (hình 2.2)



Hình 2.2 : Biểu diễn con trỏ.

10. Kiểu *set* (tập hợp)

Giả sử T_0 là một kiểu đã cho. T_0 phải là kiểu có thứ tự đếm được "đủ nhỏ", chẳng hạn kiểu đoạn con (giới hạn phụ thuộc vào chương trình dịch). Khi đó, ta có thể xác định kiểu tập T

```
type T = set of T0
```

Mỗi đối tượng của kiểu T sẽ là một tập con của tập T_0.

11. *Kiểu file* (tệp)

Giả sử T_0là một kiểu nào đó (trừ kiểu file).

Khi đó,

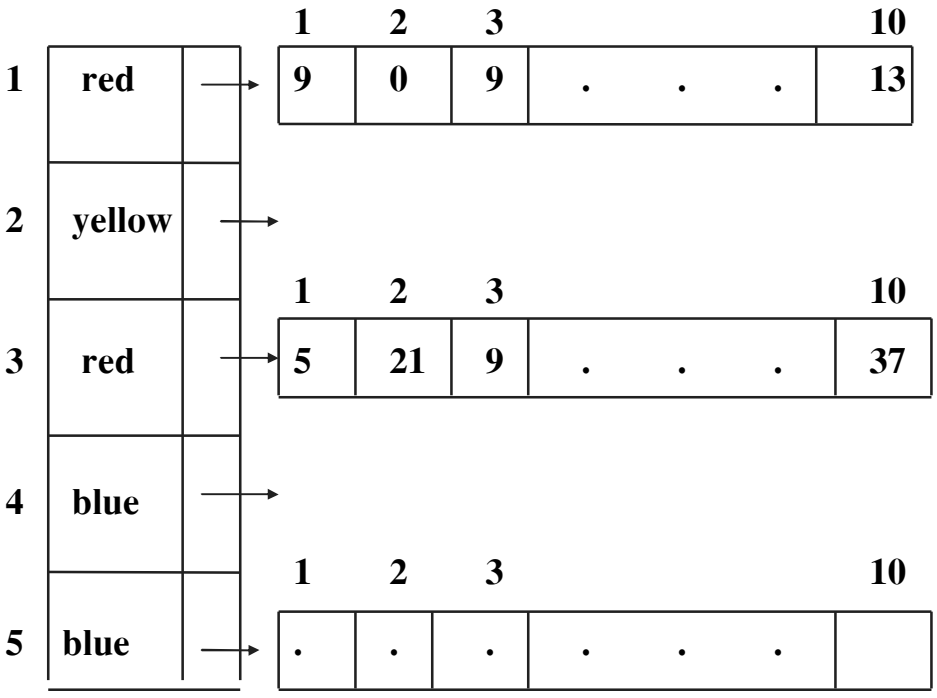
type T = file of T_0

sẽ xác định một kiểu file với các phần tử là các đối tượng thuộc kiểu T_0

Ví dụ. Sau đây là định nghĩa một số kiểu dữ liệu

```
type   Color = (white, red, blue, yellow, green) ;
       Intarr = array [1 ...10] of integer,
       Rec = record
             Infor : color
             ptr : ^Intarr ;
       end ;
       Recarr = array [1 ... 5] of Rec ;
```

Biểu diễn hình học của một đối tượng thuộc kiểu Recarr được cho trong hình 2.3.



Hình 2.3 : Cấu trúc dữ liệu Recarr.

Các phép toán trong hệ kiểu Pascal

Như đã nói với mỗi kiểu dữ liệu ta chỉ có thể thực hiện một số phép toán nhất định trên các dữ liệu của kiểu. Ta không thể áp dụng một phép toán trên các dữ liệu thuộc kiểu này cho các dữ liệu có kiểu khác. Ta có thể phân tập hợp các phép toán trên các kiểu dữ liệu của Pascal thành hai lớp sau :

A. Các phép toán truy cập đến các thành phần của một đối tượng dữ liệu, chẳng hạn truy cập đến các thành phần của một mảng, đến các trường của một bản ghi.

Giả sử A là một mảng với tập chỉ số I, khi đó A[i] cho phép ta truy cập đến thành phần thứ i của mảng. Còn nếu X là một bản ghi thì việc truy cập đến trường F của nó được thực hiện bởi phép toán X.F.

B. Các phép toán kết hợp dữ liệu.

Pascal có một tập hợp phong phú các phép toán kết hợp một hoặc nhiều dữ liệu đã cho thành một dữ liệu mới. Sau đây là một số nhóm các phép toán chính.

1. Các phép toán số học. Đó là các phép toán + , -, * , / trên các số thực ; các phép toán +, - *, /, div, mod trên các số nguyên.

2. Các phép toán so sánh. Trên các đối tượng thuộc các kiểu có thứ tự (đó là các kiểu cơ sở và kiểu tập), ta có thể thực hiện các phép toán so sánh =, < >, <, <=, >, >=. Cần lưu ý rằng, kết quả của các phép toán này là một giá trị kiểu *boolaen* (tức là *true* hoặc *false*).

3. Các phép toán logic. Đó là các phép toán *and, or, not* được thực hiện trên hai giá trị *false* và *truc* của kiểu *boolean*.

4. Các phép toán tập hợp. Các phép toán hợp, giao, hiệu của các tập hợp trong pascal được biểu diễn bởi +, *, - tương ứng. Việc kiểm tra một đối tượng x có là phần tử của tập A hay không được thực hiện bởi phép toán x *in* A. Kết quả của phép toán này là một giá *boolean.*

2.4. MÔ HÌNH DỮ LIỆU VÀ KIỂU DỮ LIỆU TRỪU TƯỢNG.

Để giải quyết một vấn đề trên MTĐT thông thường chúng ta cần phải qua một số giai đoạn chính sau đây :

1. Đặt bài toán

2. Xây dựng mô hình

3. Thiết kế thuật toán và phân tích thuật toán

4. Viết chương trình

5. Thử nghiệm.

Chúng ta sẽ không đi sâu phân tích từng giai đoạn. Chúng ta chỉ muốn làm sáng tỏ vai trò của mô hình dữ liệu trong việc thiết kế chương trình. Xét ví dụ sau.

Ví dụ. Một người giao hàng, hàng ngày anh ta phải chuyển hàng từ một thành phố đến một số thành phố khác rồi lại quay về thành phố xuất phát. Vấn đề của anh ta là làm thế nào có được một hành trình chỉ qua mỗi thành phố một lần với đường đi ngắn nhất có thể được.

Chúng ta thử giúp người giao hàng mô tả chính xác bài toán. Trước hết, ta cần trả lời câu hỏi, những thông tin đã biết trong bài toán người giao hàng là gì ? Đó là tên của các thành phố anh ta phải ghé qua và độ dài các con đường có thể có giữa hai thành phố. Chúng ta cần tìm cái gì ? Một hành trình mà người giao hàng mong muốn là một danh sách các thành phố $A_1,A_2...A_{n+1}$ (giả sử có n thành phố), trong đó các A_1 (i=1,2,...,n+1) đều khác nhau, trừ $A_{n+1} = A_1$.

Với một vấn đề đặt ra từ thực tiễn, ta có thể mô tả chính xác vấn đề đó hoặc các bộ phận của nó (vấn đề con) bởi một mô hình toán học nào đó. Chẳng hạn, mô hình toán học thích hợp nhất để mô tả bài toán người giao hàng là đồ thị. Các đỉnh của đồ thị là các thành phố, các cạnh của đồ thị là các đường nối hai thành phố. Trọng số của các cạnh là độ dài các đường nối hai thành phố. Trong thuật ngữ của lý thuyết đồ thị, danh sách các thành phố biểu diễn hành trình của người giao hàng, là một chu trình qua tất cả các đỉnh của đồ thị. Như vậy, bài toán người giao hàng được qui về bài toán trong lý thuyết đồ thị. Tìm một chu trình xuất phát từ một đỉnh qua tất cả các đỉnh còn lại với độ dài ngắn nhất.

Bài toán người giao hàng là một trong các bài toán đã trở thành kinh điển. Nó dễ mô hình hoá, song cũng rất khó giải. Chúng ta sẽ quay lại bài toán này.

Cần lưu ý rằng, để tìm ra cấu trúc toán học thích hợp với một bài toán đã cho, chúng ta phải phân tích kỹ bài toán để tìm ra câu trả lời cho các câu hỏi sau.

Các thông tin quan trọng của bài toán có thể biểu diễn bởi các đối tượng toán học nào ?

Có các mối quan hệ nào giữa các đối tượng ?

Các kết quả phải tìm của bài toán có thể biểu diễn bởi các khái niệm toán học nào.

Sau khi đã có mô hình toán học mô tả bài toán, một câu hỏi đặt ra là, ta phải làm việc với mô hình như thế nào để tìm ra lời giải của bài toán ? Chúng ta sẽ thiết kế thuật toán thông qua các hành động, các phép toán thực hiện trên các đối tượng của mô hình.

Một mô hình toán học cùng với các phép toán có thể thực hiện trên các đối tượng của mô hình được gọi là *mô hình dữ liệu*. Chẳng hạn, trong mô hình dữ liệu đồ thị, trong số rất nhiều các phép toán, ta có thể kể ra một số phép toán sau : tìm các đỉnh kề của mỗi đỉnh, xác định đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh bất kỳ, tìm các thành phần liên thông, tìm các đỉnh treo,.. Về mặt toán học, *danh sách* là một dãy hữu hạn n phần tử (a_1, a_2, ..., a_n). Trong mô hình dữ liệu danh sách, chúng ta cũng có thể thực hiện một tập hợp rất đa dạng các phép toán, chẳng hạn như, xác định độ dài của danh sách, xen một phần tử mới vào danh sách, loại một phần từ nào đó khỏi danh sách, sắp xếp lại danh sách theo một trật tự nào đó, gộp hai danh sách thành một danh sách.

Trở lại bài toán người giao hàng. Có nhiều thuật toán giải bài toán này. Chẳng hạn, ta có thể giải bằng phương pháp vét cạn : giả sử có n thành phố, khi đó mỗi hành trình là một hoán vị của n-1 thành phố (trừ thành phố xuất phát), thành lập (n-1)! hoán vị, tính độ dài của hành trình ứng với mỗi hoán vị và so sánh, ta sẽ tìm được hành trình ngắn nhất. Ta cũng có thể giải bài toán bằng phương pháp qui hoạch động (Phương pháp này sẽ được trình bày ở tập 2 của sách này). Sau đây ta đưa ra một thuật toán đơn giản. Thuật toán này tìm ra rất nhanh nghiệm "gần đúng", trong trường hợp có đường đi nối hai thành phố bất kỳ. Giả sử G là một đồ thị (Graph), V là tập hợp các đỉnh (Node), E là tập hợp các cạnh của nó. Giả sử c(u,v) là độ dài (nguyên dương) của cạnh (u,v). Hành trình (Tour) của người giao hàng có thể xem như một tập hợp nào đó các cạnh. Cost là độ dài của hành trình. Thuật toán được biểu diễn bởi thủ tục Salesperson.

```
procedure   Salespersen (G : Graph ; var Tour : set of E ;
                                      var cost : integer) ;
        var     v, w : Node
                   U : set of V ;
begin
        Tour : = [ ] ;
        Cost  : = 0 ;
```

```
        v  : = v0 ; {v0 - đỉnh xuất phát}
        U : = V - [v0] ;
    while     U <  > [   ] do
    begin
    Chọn (v, w) là cạnh ngắn nhất với w thuộc U ;
    Tour : = Tour + [(v, w)] ;
    Cost  : = Cost + c (v,w) ;
        v  : = w ;
        U : = U - [w] ;
    end ;
    Tour : = Tour + [(v,v0)] ;
    Cost  : = Cost + c(v,v0) ;
end;
```

Thuật toán Salesperson được xây dựng trên cơ sở mô hình dữ liệu đồ thị và mô hình dữ liệu tập hợp. Nó chứa các thao tác trên đồ thị, các phép toán tập hợp. Tư tưởng của thuật toán như sau. Xuất phát từ Tour là tập rỗng. Giả sử ta xây dựng được đường đi từ đỉnh xuất phát v_0 tới đỉnh v. Bước tiếp theo, ta sẽ thêm vào Tour cạnh (v,w), đó là cạnh ngắn nhất từ v tới các đỉnh w không nằm trên đường đi từ v_0 tới v. Để có được chương trình, chúng ta phải biểu diễn đồ thị, tập hợp bởi các cấu trúc dữ liệu. Sau đó viết các thủ tục (hoặc hàm) thực hiện các thao tác, các phép toán trên đồ thị, tập hợp có trong thuật toán.

Tóm lại, quá trình giải một bài toán có thể quy về hai giai đoạn kế tiếp như sau

1. Xây dựng các mô hình dữ liệu mô tả bài toán. Thiết kế thuật toán bằng cách sử dụng các thao tác, các phép toán trên các mô hình dữ liệu.

2. Biểu diễn các mô hình dữ liệu bởi các cấu trúc dữ liệu. Với các cấu trúc dữ liệu đã lựa chọn, các phép toán trên các mô hình dữ liệu được thể hiện bởi các thủ tục (hàm) trong ngôn ngữ lập trình nào đó.

Toán học đã cung cấp cho Tin học rất nhiều cấu trúc toán học có thể dùng làm mô hình dữ liệu. Chẳng hạn, các khái niệm toán học như dãy, tập hợp, ánh xạ, cây, đồ thị, quan hệ, nửa nhóm, nhóm, otomat,...Trong các chương sau chúng ta sẽ lần lượt nghiên cứu một số

mô hình dữ liệu quan trọng nhất, được sử dụng thường xuyên trong các thuật toán. Đó là các mô hình dữ liệu danh sách, cây, tập hợp. Với mỗi mô hình dữ liệu chúng ta nghiên cứu các cách cài đặt nó bởi các cấu trúc dữ liệu khác nhau. Trong mỗi cách cài đặt, một số phép toán trên mô hình có thể được thực hiện dễ dàng, nhưng các phép toán khác có thể lại không thuận tiện. Việc lựa chọn cấu trúc dữ liệu nào để biểu diễn mô hình phụ thuộc vào từng áp dụng.

Như đã nói, với mỗi mô hình dữ liệu, chúng ta có thể thực hiện một tập hợp các phép toán rất đa dạng, phong phú. Song trong nhiều áp dụng, chúng ta chỉ sử dụng mô hình với một số xác định các phép toán nào đó. Khi đó chúng ta sẽ có một kiểu dữ liệu trừu tượng.

Như vậy, một *kiểu dữ liệu trừu tượng* (abstract data type) là một mô hình dữ liệu được xét cùng với một số xác định các phép toán nào đó. Chẳng hạn, các tập hợp chỉ xét với các phép toán : thêm một phần tử vào một tập đã cho, loại một phần tử khỏi một tập hợp đã cho, tìm xem một phần tử đã cho có nằm trong một tập hợp hay không, lập thành kiểu dữ liệu trừu tượng (KDLTT) *từ điển* (dictionnaire).

Còn KDLTT *hàng* (hàng đợi) là mô hình dữ liệu danh sách cùng với hai phép toán chính là : thêm một phần tử mới vào một đầu danh sách, và loại một phần tử ở một đầu khác của danh sách. Chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ một số kiểu dữ liệu trừu tượng quan trọng nhất : hàng, ngăn xếp (stack), từ điển, hàng ưu tiên. Với mỗi KDLTT, các cấu trúc dữ liệu để biểu diễn nó sẽ được nghiên cứu. Chúng ta cũng sẽ đánh giá hiệu quả của các phép toán trong từng cách cài đặt.

Chương 3

DANH SÁCH

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu danh sách, một trong các mô hình dữ liệu quan trọng nhất, được sử dụng thường xuyên trong các thuật toán. Các phương pháp khác nhau để cài đặt danh sách sẽ được xét. Chúng ta sẽ phân tích hiệu quả của các phép toán trên danh sách trong mỗi cách cài đặt. Hai kiểu dữ liệu trừu tượng đặc biệt quan trọng là stack (ngăn xếp) và hàng (hàng đợi) sẽ được nghiên cứu. Chúng ta cũng sẽ trình bày một số ứng dụng của danh sách.

3.1. DANH SÁCH.

cùng một lớp các đối tượng nào đó. Chẳng hạn, ta có thể Về mặt toán học, danh sách là một dãy hữu hạn các phần tử thuộc nói đến danh sách các sinh viên của một lớp, danh sách các số nguyên nào đó, danh sách các báo xuất bản hàng ngày ở thủ đô, ...

Giả sử L là danh sách có n ($n \geq 0$) phần tử

$L = (a_1, a_2, ..., a_n)$

Ta gọi số n là *độ dài* của của danh sách. Nếu $n \geq 1$ thì a_1 được gọi là *phần tử đầu tiên* của danh sách, còn a_n là *phần tử cuối cùng* của danh sách. Nếu n = 0 tức danh sách không có phần tử nào, thì danh sách được gọi là rỗng.

Một tính chất quan trọng của danh sách là các phần tử của nó được sắp tuyến tính : nếu n > 1 thì phần tử a_i "đi trước" phần tử a_{i+1} hay "đi sâu" phần tử a_i với i = 1,2, ..., n-1. Ta sẽ nói a_i (i = 1,2, ..., n) là phần tử ở vị trí thứ i của danh sách.

Cần chú ý rằng, một đối tượng có thể xuất hiện nhiều lần trong một danh sách. Chẳng hạn như trong danh sách các số ngày của các tháng trong một năm

(31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31)

***Danh sách con*.**

Nếu $L = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là một danh sách và i, j là các vị trí, $1 \leq i \leq j \leq n$ thì danh sách $L' = (b_1, b_2, ..., b_{j-i+1})$ trong đó $b_1 = a_i$, $b_2 = a_{i+1})$ ... $b_{j-i+1}=a_j$, Như vậy, danh sách con L' gồm tất cả các phần tử từ a_i đến a_j của

danh sách L. Danh sách rỗng được xem là danh sách con của một danh sách bất kỳ.

Danh sách con bất kỳ gồm các phần tử bắt đầu từ phần tử đầu tiên của danh sách L được gọi là *phần đầu* (prefix) của danh sách L. *Phần cuối* (postfix) của danh sách L là một danh sách con bất kỳ kết thúc ở phần tử cuối cùng của danh sách L.

Dãy con

Một danh sách được tạo thành bằng cách loại bỏ một số (có thể bằng không) phần tử của danh sách L được gọi là *dãy con* của danh sách L.

Ví dụ. Xét danh sách

L = (black, blue, green, cyan, red, brown, yellow)

Khi đó danh sách (blue, green, cyan, red) là danh sách con của L. Danh sách (black, green, brown) là dãy con của L. Danh sách (black, blue, green) là phần đầu, còn danh sách (red, brown, yellow) là phần cuối của danh sách L.

Các phép toán trên danh sách.

Chúng ta đã trình bày khái niệm toán học danh sách. Khi mô tả một mô tả một mô hình dữ liệu, chúng ta cần xác định các phép toán có thể thực hiện trên mô hình toán học được dùng làm cơ sở cho mô hình dữ liệu. Có rất nhiều phép toán trên danh sách. Trong các ứng dụng, thông thường chúng ta chỉ sử dụng một nhóm các phép toán nào đó. Sau đây là một số phép toán chính trên danh sách.

Giả sử L là một danh sách (List), các phần tử của nó có kiểu dữ liệu Item nào đó, p là một vị trí (position) trong danh sách. Các phép toán sẽ được mô tả bởi các thủ tục hoặc hàm.

1. Khởi tạo danh sách rỗng

```
procedure Initialize (var L : List) ;
```

2. Xác định độ dài của danh sách.

```
function Length (L : List) : integer
```

3. Loại phần tử ở vị trí thứ p của danh sách

```
procedure Delete (p : position ; var L : List) ;
```

4. Xen phần tử x vào danh sách sau vị trí thứ p

```
procedure Insert After (p : position ; x : Item ; var L: List) ;
```

5. Xen phần tử x vào danh sách trước vị trí thứ p

procedure Insert Before (p : position ; x : Item ; var L:List) ;

6. Tìm xem trong danh sách có chứa phần tử x hay không ?

procedure Search (x : Item ; L : List : var found : boolean) ;

7. Kiểm tra danh sách có rỗng không ?

function Empty (L : List) : boolean ;

8. Kiểm tra danh sách có đầy không ?

function Full (L : List) : boolean ;

9. Đi qua dah sách. Trong nhiều áp dụng chúng ta cần phải đi qua danh sách, từ đầu đến hết danh sách, và thực hiện một nhóm hành động nào đó với mỗi phần tử của danh sách.

procedure Traverse (var L : List) ;

10. Các phép toán khác. Còn có thể kể ra nhiều phép toán khác. Chẳng hạn truy cập đến phần tử ở vị trí thứ i của danh sách (để tham khảo hoặc thay thế), kết hợp hai danh sách thành một danh sách, phân tích một danh sách thành nhiều danh sách, ...

Ví dụ : Giả sử L là danh sách L = (3,2,1,5). Khi đó, thực hiện Delete (3,L) ta được danh sách (3,2,5). Kết quả của InsertBefor (1, 6, L) là danh sách (6, 3, 2, 1, 5).

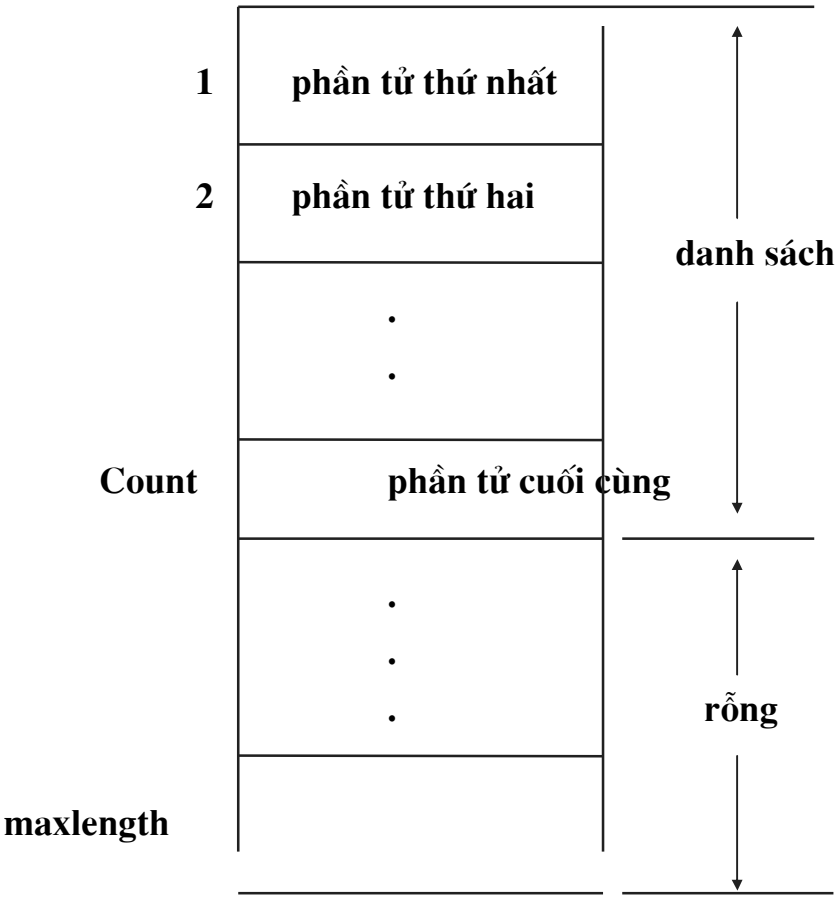
3.2. CÀI ĐẶT DANH SÁCH BỞI MẢNG.

Phương pháp tự nhiên nhất để cài đặt một danh sách là sử dụng mảng, trong đó mỗi thành phần của mảng sẽ lưu giữ một phần tử nào đó của danh sách, và các phần tử kế nhau của danh sách được lưu giữ trong các thành phần kế nhau của mảng.

Giả sử độ dài tối đa của danh sách (maxlength) là một số N nào đó, các phần tử của danh sách có kiểu dữ liệu là Item. Item có thể là các kiểu dữ liệu đơn, hoặc các dữ liệu có cấu trúc, thông thường Item là bản ghi. Chúng ta biểu diễn danh sách (List) bởi bản ghi gồm hai trường. Trường thứ nhất là mảng các Item phần tử thứ i của danh sách được lưu giữ trong thành phần thứ i của mảng. Trường thứ hai ghi chỉ số của thành phần mảng lưu giữ phần tử cuối cùng của danh sách (xem hình 3.1). Chúng ta có các khai báo như sau :

```
const  maxlength = N ;
type   List = record
              element : array [1 ... maxlength]
```

```
                of  Item ;
        count : 0 ... maxlength ;
        end ;
var L : List ;
```



Hình 3.1. Mảng biểu diễn danh sách

Trong cách cài đặt danh sách bởi mảng, các phép toán trên danh sách được thực hiện rất dễ dàng. Để khởi tạo một danh sách rỗng, chỉ gần một lệnh gán :

```
L.count : = 0 ;
```

Độ dài của danh sách là L.count. Danh sách đầy, nếu L.count = maxlength.

Sau đây là các thủ tục thực hiện các phép toán xen một phần tử mới vào danh sách và loại một phần tử khỏi danh sách.

Thủ tục loại bỏ.

```
procedure Delete (p : 1 ... maxlength ; var L : List ;
                        var OK : boolean) ;
        var i : 1 ... maxlength ;
begin
        OK : = false ;
        with L do
                if p < = count then
begin
                i : = p;
        while i < count do
        begin
                element [i] : = element [i + 1] ;
                i: = i + 1
        end ;
        count : = count -1 ;
        OK : = true ;
 end ;
end ;
```

Thủ tục trên thực hiện phép loại bỏ phần tử ở vị trí p khỏi danh sách. Phép toán chỉ được thực hiện khi danh sách không rỗng và p chỉ vào một phần tử trong danh sách. Tham biến OK ghi lại phép toán có được thực hiện thành công hay không. Khi loại bỏ, chúng ta phải dồn các phần tử các vị trí p+1, p + 2, ... lên trên một vị trí.

Thủ tục xen vào.

```
procedure InsertBefore (p : 1 ... maxlength ; x : Item ;
                var L : List ; var OK : boolean) ;
        var i : 1... maxlength ;
```

```
        begin
            OK: = false ;
        with L do
        if (count < maxlength) and ( p <= count) then
        begin
            i: = count + 1 ;
            while i > p do
                begin
                    element[i]:= element[i-1] ;
                    i:=i-1 ;
                end ;
        element [p] : = x ;
        count : = count + 1 ;
        OK : = true ;
    end ;
end ;
```

Thủ tục trên thực hiện việc xen phần tử mới x vào trước phần tử ở vị trí p trong danh sách. Phép toán này chỉ được thực hiện khi danh sách chưa đầy (count < maxlength) và p chỉ vào một phần tử trong danh sách (p <= count). Chúng ta phải dồn các phần tử ở các vị trí p, p+1, ... xuống dưới một vị trí để lấy chỗ cho x.

Nếu n là độ dài của danh sách ; dễ dàng thấy rằng, cả hai phép toán loại bỏ và xen vào được thực hiện trong thời gian O(n).

Việc tìm kiếm trong danh sách là một phép toán được sử dụng thường xuyên trong các ứng dụng. Chúng ta sẽ xét riêng phép toán này trong mục sau.

***Nhận xét về phương pháp biểu diễn danh sách bởi mảng*.**

Chúng ta đã cài đặt danh sách bởi mảng, tức là dùng mảng để lưu giữ các phần tử của danh sách. Do tính chất của mảng, phương pháp này cho phép ta truy cập trực tiếp đến phần tử ở vị trí bất kỳ trong danh sách. Các phép toán khác đều được thực hiện rất dễ dàng. Tuy nhiên phương pháp này không thuận tiện để thực hiện phép toán xen vào và loại bỏ. Như đã chỉ ra ở trên, mỗi lần cần xen phần tử mới vào danh sách

ở vị trí p (hoặc loại bỏ phần tử ở vị trí p) ta phải đẩy xuống dưới (hoặc lên trên) một vị trí tất cả các phần từ đi sau phần tử thứ p. Nhưng hạn chế chủ yếu của cách cài đặt này là ở không gian nhớ cố định giành để lưu giữ các phần tử của danh sách. Không gian nhớ này bị quy định bởi cỡ của mảng. Do đó danh sách không thể phát triển quá cỡ của mảng, phép toán xen vào sẽ không được thực hiện khi mảng đã đầy.

3.3. TÌM KIẾM TRÊN DANH SÁCH.

3.3.1. *Vấn đề tìm kiếm.*

Tìm kiếm thông tin là một trong các vấn đề quan trọng nhất trong tin học. Cho trước một số điện thoại, chúng ta cần tìm biết người có số điện thoại đó, địa chỉ của anh ta, và những thông tin khác gắn với số điện thoại đó. Thông thường các thông tin về một đối tượng được biểu diễn dưới dạng một bản ghi, các thuộc tính của đối tượng là các trường của bản ghi. Trong bài toán tìm kiếm, chúng ta sẽ tiến hành tìm kiếm các đối tượng dựa trên một số thuộc tính đã biết về đối tượng, chúng ta sẽ gọi các thuộc tính này là *khoá*. Như vậy, *khoá của bản ghi* được hiểu là một hoặc một số trường nào đó của bản ghi. Với một giá trị cho trước của khoá, có thể có nhiều bản ghi có khoá đó. Cũng có thể xảy ra, không có bản ghi nào có giá trị khoá đã cho.

Thời gian tìm kiếm phụ thuộc vào cách chúng ta tổ chức thông tin và phương pháp tìm kiếm được sử dụng. Chúng ta có thể tổ chức các đối tượng để tìm kiếm dưới dạng danh sách, hoặc cây tìm kiếm nhị phân,...Với mỗi cách cài đặt (Chẳng hạn, có thể cài đặt danh sách bởi mảng, hoặc danh sách liên kết), chúng ta sẽ có phương pháp tìm kiếm thích hợp.

Người ta phân biệt hai loại tìm kiếm : tìm kiếm trong và tìm kiếm ngoài. Nếu khối lượng thông tin lớn cần lưu giữ dưới dạng các file ở bộ nhớ ngoài, như đĩa từ hoặc băng từ, thì sự tìm kiếm được gọi là tìm kiếm ngoài. Trong trường hợp thông tin được lưu giữ ở bộ nhớ trong, ta nói đến tìm kiếm trong. Trong chương này và các chương sau, chúng ta chỉ đề cập tìm kiếm trong.

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp tìm kiếm trên danh sách được biểu diễn bởi mảng.

3.3.2. Tìm kiếm tuần tự.

Giả sử keytype là kiểu khoá. Trong nhiều trường hợp k*eytype* là integer, *real*, hoặc *string*. Các phần tử của danh sách có kiểu Item - bản ghi có chứa trường key kiểu keytype.

```
type  keytype = .... ;
      Item     = record
                   key : keytype ;
                   [các trường khác]
                   . . . . . .
                   end ;
      List     =  record
                  element : array [1...max] of Item ;
                  count : 0 .. max ;
                   end ;
```

Tìm kiếm tuần tự (hay tìm kiếm tuyến tính) là phương pháp tìm kiếm đơn giản nhất : xuất phát từ đầu danh sách, chúng ta tuần tự đi trên danh sách cho tới khi tìm ra phần tử có khoá đã cho thì dừng lại, hoặc đi đến hết danh sách mà không tìm thấy. Ta có thủ tục tìm kiếm sau.

```
procedure SeqSearch (var L : List ; x : keytype ;
          var found : boolean ; var p : 1..max) ;
begin
found : = false ;
p : = 1 ;
with L do
while (not found) and ( p <= count) do
          if element [p] . key = x then found : = true
           else p : = p + 1 ;
end ;
```

Thủ tục trên để tìm xem trong danh sách L có chứa phần tử với khoá là x hay không. Nếu có thì giá trị của tham biến found là true. Trong trường hợp có, biến p sẽ ghi lại vị trí của phần tử đầu tiên có khoá là x.

Phân tích tìm kiếm tuần tự.

Giả sử độ dài của danh sách là n (count = n). Dễ dàng thấy rằng, thời gian thực hiện tìm kiếm tuần tự là thời gian thực hiện lệnh *while*. Mỗi lần lặp cần thực hiện phép so sánh khoá x với khoá của một phần tử trong danh sách, số lớn nhất các lần lặp là n, do đó thời gian tìm kiếm tuần tự là 0 (n).

3.3.3. Tìm kiếm nhị phân.

Giả sử L là một danh sách có độ dài n và được biểu diễn bởi mảng, các phần tử của nó có kiểu Item được mô tả như trong mục 3.3.2. Giả sử kiểu của khoá keytype là kiểu có thứ tự, tức là với hai giá trị bất kỳ của nó v_1 và v_2, ta luôn luôn có $v_1 \leq v_2$, hoặc $v_1 \geq v_2$; trong đó ≤ là một quan hệ thứ tự nào đó được xác định trên keytype. Giả sử các phần tử của danh sách L được sắp xếp theo thứ tự khoá không giảm :

L. element [1]. key ≤ L. element [2].key ≤ ...

≤ L. element [n].key

Trong trường hợp này, chúng ta có thể áp dụng phương pháp tìm kiếm khác, hiệu quả hơn phương pháp tìm kiếm tuần tự. Đó là kỹ thuật *tìm kiếm nhị phân*. Tư tưởng của tìm kiếm nhị phân như sau : Đầu tiên ta so sánh khoá x với khóa của phần tử ở giữa danh sách, tức phần tử ở vị trí m=⌊(1+n)/2 ⌋[1] . Nếu chúng bằng nhau x = L.element [m].key, ta đã tìm thấy. Nếu x < L.element [m].key, ta tiếp tục tìm kiếm trong nửa đầu danh sách từ vị trí 1 đến vị trị m-1. Còn nếu x > L.element [m].key, ta tiếp tục tìm kiếm trong nửa cuối danh sách từ vị trị m + 1 đến vị trí n. Nếu đến một thời điểm nào đó, ta phải tìm x trong một danh sách con rỗng, thì điều đó có nghĩa là trong danh sách không có phần tử nào với khoá x.

Chúng ta có thể mô tả phương pháp tìm kiếm nhị phân bởi thủ tục sau :

procedure BinarySearch (var L : List ; x : key type ;

---

[1] . Ký hiệu ⌊a ⌋ chỉ phần nguyên của a, tức là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng a ; chẳng hạn ⌊5 ⌋ = 5, ⌊5.2 ⌋ = 5 còn ⌈ a ⌉ chỉ số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng chẳng hạn ⌈ 6.3 ⌉ = 7, ⌈ 6 ⌉ = 6.

```
        var found : boolean ; p : 1 ... max) ;
var     mid , bottom, top : integer ;
begin
(1)     found : = false ;
(2)     bottom : = 1,
(3)     top : = L.count ;
(4)     while (not found) and (bottom <= top) do
        begin
(5)     mid : = (bottom + top) div 2 ;
(6)     if x = L. element [mid].key then
                found : = true
        else if x < L.element [mid].
                top : = mid - 1 key then
        else
                bottom : = mid + 1 ;
        end ;
(7)     p : = mid ;
end ;
```

Trong thủ tục trên, ta đã đưa vào hai biến bottom và top để ghi lại vị trí đầu và vị trí cuối của danh sách con mà ta cần tiếp tục tìm kiếm. Biến mid ghi lại vị trí giữa của mỗi danh sách con. Quá trình tìm kiếm được thực hiện bởi vòng lặp while. Mỗi lần lặp khoá x được so sánh với khoá của phần tử ở giữa danh sách. Nếu bằng nhau, found : = true và dừng lại. Nếu x nhỏ hơn, ta tiếp tục tìm ở nửa đầu của danh sách con đang xét (đặt lại top : = mid -1). Nếu x lớn hơn, ta sẽ tìm tiếp ở nửa cuối danh sách (đặt lại bottom :=mid + 1).

Phân tích tìm kiếm nhị phân.

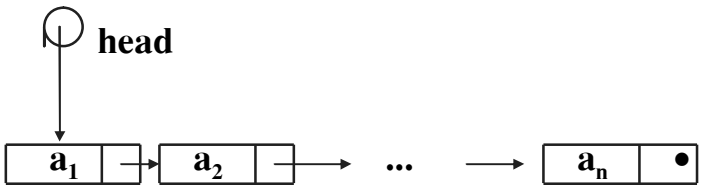
Trực quan, ta thấy ngay tìm kiếm nhị phân hiệu quả hơn tìm kiếm tuần tự, bởi vì trong tìm kiếm tuần tự ta phải lần lượt xét từng phần tử của danh sách, bắt đầu từ phần tử đầu tiên cho tới khi phát hiện ra phần tử cần tìm hoặc không. Còn trong tìm kiếm nhị phân, mỗi bước ta chỉ cần xét phần tử ở giữa danh sách, nếu chưa phát hiện ra ta lại xét tiếp phần tử ở giữa nửa đầu hoặc nửa cuối danh sách. Sau đây, ta đánh giá thời

gian thực hiện tìm kiếm nhị phân. Giả sử độ dài danh sách là n. Thời gian thực hiện các lệnh (1) - (3) và (7) là 0(1). Vì vậy thời gian thực hiện thủ tục là thời gian thực hiện lệnh while (4). Thân của lệnh lặp này (các lệnh (4) và (5) có thời gian thực hiện là 0(1). Gọi t là số lần lặp tối đa cần thực hiện. Sau mỗi lần lặp độ dài của danh sách giảm đi một nửa, từ điều kiện bottom ≤ top, ta suy ra t là số nguyên dương lớn nhất sao cho $2t \le n$, tức là $t \le \log_2 n$. Như vậy, thời gian tìm kiếm nhị phân trong một danh sách có n phần tử là $0(\log_2 n)$, trong khi đó thời gian tìm kiếm tuần tự là 0(n).

3.3. CẤU TRÚC DỮ LIỆU DANH SÁCH LIÊN KẾT.

3.3.1. *Danh sách liên kết.*

Trong mục này chúng ta sẽ biểu diễn danh sách bởi cấu trúc dữ liệu khác, đó là danh sách liên kết. Trong cách cài đặt này, danh sách liên kết được tạo nên từ các tế bào mỗi tế bào là một bản ghi gồm hai trường, trường infor "chứa" phần tử của danh sách, trường next là con trỏ trỏ đến phần tử đi sau trong danh sách. Chúng ta sẽ sử dụng con trỏ head trỏ tới đầu danh sách. Như vậy một danh sách (a_1, a_2, ...a_n) có thể biểu diễn bởi cấu trúc dữ liệu danh sách liên kết được minh hoạ trong hình 3.2.



Hình 3.2. Danh sách liên kết biểu diễn danh sách (a_1, a_2, ...a_n)

Một danh sách liên kết được hoàn toàn xác định bởi con trỏ head trỏ tới đầu danh sách, do đó, ta có thể khai báo như sau.

```
type   pointer = ^ cell
       cell    = record
                    infor : Item ;
                    next : pointer
                 end ;
var head : pointer ;
```

Chú ý **: Không nên nhầm lẫn danh sách và danh sách liên kết. Danh sách và danh sách liên kết là hai khái niệm hoàn toàn khác nhau. Danh sách là một mô hình dữ liệu, nó có thể được cài đặt bởi các cấu trúc dữ liệu khác nhau. Còn danh sách liên kết là một cấu trúc dữ liệu, ở đây nó được sử dụng để biểu diễn danh sách.**

3.3.2. *Các phép toán trên danh sách liên kết.*

Sau đây chúng ta sẽ xét xem các phép toán trên danh sách được thực hiện như thế nào khi mà danh sách được cài đặt bởi danh sách liên kết.

Điều kiện để một danh sách liên kết rỗng là

head = nil

Do đó, muốn khơi tạo một danh sách rỗng, ta chỉ cần lệnh gán :

head : = nil

Danh sách liên kết chỉ đầy khi không còn không gian nhớ để cấp phát cho các thành phần mới của danh sách. Chúng ta sẽ giả thiết điều này không xẩy ra, tức là danh sách liên kết không khi nào đầy. Do đó phép toán xen một phần tử mới vào danh sách sẽ luôn luôn được thực hiện.

Phép toán xen vào.

Giả sử Q là một con trỏ trỏ vào một thành phần của danh sách liên kết, và trong trường hợp danh sách rỗng (head = nil) thì Q = nil. Chúng ta cần xen một thành phần mới với infor là x vào sau thành phần của danh sách được trỏ bởi Q. Phép toán này được thực hiện bởi thủ tục sau :

```
procedure  InsertAfter (x : Item ; Q : pointer ; var head : pointer) ;
    var P : pointer ;
    begin
        new (P) ;
        P^ . infor : = x ;
        if head = nil then
            begin
                P^. next : = nil ;
                head : = P ;
```

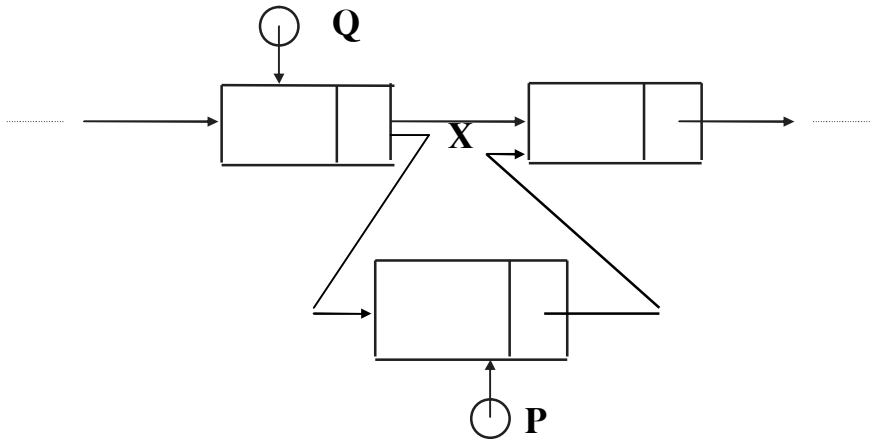
```
            end else
            begin
                P^. next : = Q^. next ;
                Q^. next : = P ;
            end ;
        end ;
```

Các hành động trong thủ tục InsertAfter được minh hoạ trong hình3.3

Giả sử bây giờ ta cần xen thành phần mới với infor là x vào trước thành phần của danh sách được trỏ bởi Q. Phép toán này (InsertBefore) phức tạp hơn. Khó khăn ở đây là, nếu Q không là thành phần đầu tiên của danh sách (tức là Q ≠ head) thì ta không định vị được thành phần đi trước thành phần Q để kết nối với thành phần sẽ được xen vào. Có thể giải quyết khó khăn này bằng cách, đầu tiên ta vẫn xen thành phần mới vào sau thành phần Q, sau đó trao đổi giá trị chứa trong phần infor giữa thành phần mới và thành phần Q.

```
procedure InsertBefore (x : Item l Q : pointer ; var head : pointer) ;
        var   P : pointer ;
    begin
            new (P) ;
        if Q = head then
        begin
            P^. infor : = x ;
            P^. next : = Q ;
            head : = P
        end else
        begin
            P^.next : = Q^. next ;
            Q^.next : = P ;
            P^.infor : = Q^.infor ;
```

```
            Q^.infor : = x ;
        end ;
    end ;
```



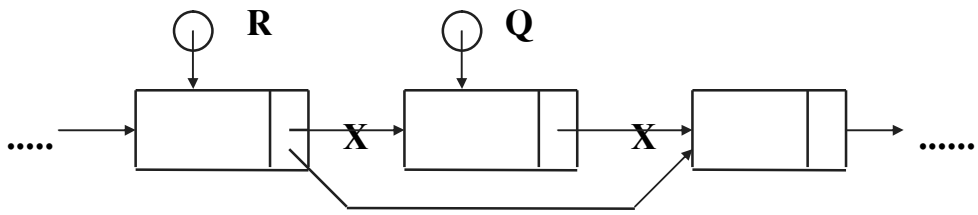
Hình 3.3. Xen thành phần mới vào danh sách sau Q.

***Phép toán loại bỏ*.**

Giả sử ta có một danh sách liên kết không rỗng (head ≠ nil) Q là một con trỏ trỏ vào một thành phần trong danh sách. Giả sử ta cần loại bỏ thành phần Q khỏi danh sách. Ở đây ta cũng gặp khó khăn như khi muốn xen một thành phần mới vào trước thành phần Q. Do đó, ta cần đưa vào một con trỏ R đi trước con trỏ Q một bước, tức là nếu Q không phải là thành phần đầu tiên, thì Q = R^.next. Khi đó phép toán loại bỏ thành phần Q khỏi danh sách được thực hiện rất dễ dàng. Ta có thủ tục sau :

```
procedure  Delete (Q,R : pointer ; var head : pointer ; var x : Item),
        begin
            x : = Q^.Infor ;
            if Q = head then   head : = Q^.next
              else  R^.next : = Q^.next ;
        end ;
```

Hình 3.4. Minh hoạ các thao tác trong thủ tục Delete.



Hình 3.4. Xoá thành phần Q khỏi danh sách.

Phép toán tìm kiếm.

Đối với danh sách liên kết, ta chỉ có thể áp dụng phương pháp tìm kiếm tuần tự. Cho dù danh sách đã được sắp xếp theo thứ tự không tăng (hoặc không giảm) của khoá tìm kiếm, ta cũng không thể áp dụng được phương pháp tìm kiếm nhị phân. Lý do là, ta không dễ dàng xác định được thành phần ở giữa của danh sách liên kết.

Giả sử chúng ta cần tìm trong danh sách thành phần với infor là x cho trước. Trong thủ tục tìm kiếm sau đây, ta sẽ cho con trỏ P chạy từ đầu danh sách, lần lượt qua các thành phần của danh sách và dừng lại ở thành phần với infor = x. Biến found được sử dụng để ghi lại sự tìm kiếm thành công hay không.

```
procedure  Search (x : Item ; head : pointer ; var P : pointer
                        var found : boolean) ;
begin
        P : = head ;
        found : = false ;
        while (P < > nil ) and (not found) do
                if P^.infor = x then found : = true
                                else  P : = P^.next
end ;
```

Thông thường ta cần tìm kiếm để thực hiện các thao tác khác với danh sách. Chẳng hạn, ta cần loại bỏ khỏi danh sách thành phần với infor = x hoặc xen một thành phần mới vào trước (hoặc sau) thành phần với infor = x. Muốn thế, trước hết ta phải tìm trong danh sách thành phần với infor là x cho trước. Để cho phép loại bỏ và xen vào có thể thực hiện dễ dàng, ta đưa vào thủ tục tìm kiếm hai con trỏ đi cách nhau một bước. Con trỏ Q trỏ vào thành phần cần tìm, còn R trỏ vào thành phần đi trước. Ta có thủ tục sau :

```
procedure Search (x : Item ; head : pointer ; var Q, R : pointer ;
                        var found : boolean) ;
begin
        R : = nil ;
        Q : = head ;
        found : = false :
        while (Q < > nil) and (not found) do
        if Q^.infor = x then found : = true
                else begin
                        R:=Q ;
                        Q : = Q^. next ;
                end ;
end ;
```

Phép toán đi qua danh sách.

Trong nhiều áp dụng, ta phải đi qua danh sách, 'thăm' tất cả các thành phần của danh sách. Với mỗi thành phần, ta cần thực hiện một số phép toán nào đó với các dữ liệu chứa trong phần infor. Các phép toán này, giả sử được mô tả trong thủ tục Visit. Ta có thủ tục sau.

```
procedure  traverse (var head : pointer) ;
        var P : pointer ;
        begin
                P : = head ;
```

```
while P < > nil do
    begin
        Visit (P^) ;
        P : = P^. next
    end ;
end ;
```

3.3.3. So sánh hai phương pháp.

Chúng ta đã trình bầy hai phương pháp cài đặt danh sách : cài đặt danh sách bởi mảng và cài đặt danh sách bởi danh sách liên kết. Một câu hỏi đặt ra là, phương pháp nào tốt hơn ? Chúng ta chỉ có thể nói rằng, mỗi phương pháp đều có ưu điểm và hạn chế, việc lựa chọn phương pháp nào, mảng hay danh sách liên kết để biểu diễn danh sách, tuỳ thuộc vào từng áp dụng. Sau đây là các nhận xét so sánh hai phương pháp.

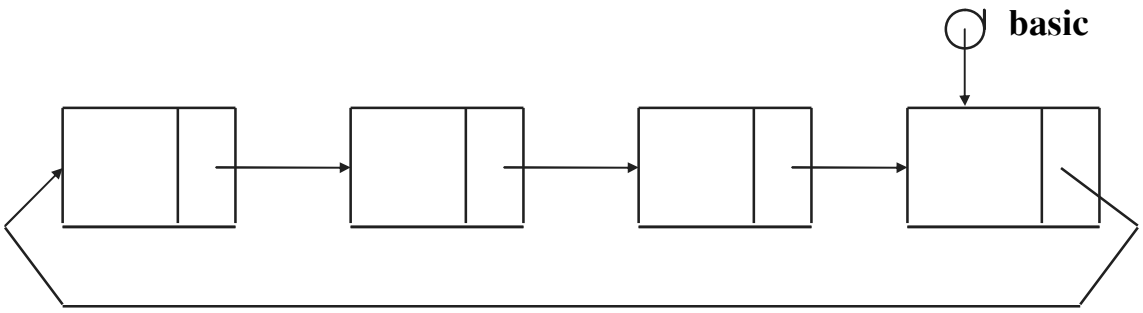
1. Khi biểu diễn danh sách bởi mảng, chúng ta phải ước lượng độ dài tối đa của danh sách để khai báo cỡ của mảng. Sẽ xẩy ra lãng phí bộ nhớ khi danh sách còn nhỏ. Nhưng trong thời gian chạy chương trình, nếu phép toán xen vào được thực hiện thường xuyên, sẽ có khả năng dẫn đến danh sách đầy. Trong khi đó nếu biểu diễn danh sách bởi danh sách liên kết, ta chỉ cần một lượng không gian nhớ cần thiết cho các phần tử hiện có của danh sách. Với cách biểu diễn này, sẽ không xẩy ra tình trạng danh sách đầy, trừ khi không gian nhớ để cấp phát không còn nữa. Tuy nhiên nó cũng tiêu tốn bộ nhớ cho các con trỏ ở mỗi tế bào.

2. Trong cách biểu diễn danh sách bởi mảng, các phép toán truy cập đến mỗi phần tử của danh sách, xác định độ dài của danh sách... được thực hiện trong thời gian hằng. Trong khi đó các phép toán xen vào và loại bỏ đòi hỏi thời gian tỉ lệ với độ dài của danh sách. Đối với danh sách liên kết, các phép toán xen vào và loại bỏ lại được thực hiện trong thời gian hằng, còn các phép toán khác lại cần thời gian tuyến tính. Do đó, trong áp dụng của mình, ta cần xét xem phép toán nào trên danh sách được sử dụng nhiều nhất, để lựa chọn phương pháp biểu diễn cho thích hợp.

3.4. CÁC DẠNG DANH SÁCH LIÊN KẾT KHÁC.

3.4.1. *Danh sách vòng tròn.*

Danh sách liên kết vòng tròn (gọi tắt là danh sách vòng tròn) là danh sách mà con trỏ của thành phần cuối cùng của danh sách không bằng nil mà trỏ đến thành phần đầu tiên của danh sách, tạo thành một vòng tròn (xem hình 3.5). Đặc điểm của danh sách vòng tròn là các thành phần trong danh sách đều bình đẳng, mỗi thành phần đều có thành phần đi sau. Xuất phát từ một thành phần bất kỳ ta có thể truy cập đến thành phần bất kỳ khác trong danh sách.



Hình 3.5. Danh sách vòng tròn

Tế bào tạo nên danh sách vòng tròn có cấu trúc như trong danh sách liên kết. Chúng ta sử dụng một con trỏ basic trỏ tới một thành phần bất kỳ trong danh sách.

```
type   pointer = ^Cell ;
       Cell    = record
                    infor : Item ;
                    next : pointer ;
                 end ;
var  basic : pointer ;
```

Trong các áp dụng, chúng ta thường sử dụng danh sách vòng tròn có dạng như trong hình 3.5. Ở đó, ta phân biệt một thành phần bên phải (được trỏ bởi basic) và một thành phần bên trái của danh sách (được trỏ bởi basic^.next). Đối với danh sách vòng tròn, ta thường sử dụng ba phép toán quan trọng nhất sau đây :

1.Xen vào bên trái danh sách (Insertleft) một thành phần mới

2. Xen vào bên phải danh sách (InsertRight) một thành phần mới.

3. Loại bỏ thành phần bên trái danh sách (DeletLeft).

Sau đây ta sẽ mô tả các thủ tục thực hiện các phép toán trên. Việc xen vào bên trái danh sách một thành phần mới với infor là x được thực hiện bởi thủ tục sau :

```
procedure InsertLeft (var basic : pointer ; x : Item ) ;
    var P : pointer ;
    begin
        new (P) :
        P^. infor : =x ;
        if basic = nil then
            begin
                basic : = P ;
                basic^.next : = basic
            end ;
        else   begin
                P^.next : = basic^.next ;
                basic^.next : = P
            end ;
    end ;
```

Việc xen vào bên phải danh sách được tiến hành như sau. Ta thêm thành phần mới vào bên trái, sau đó cho con trỏ basic trỏ vào thành phần mới được thêm vào này.

```
procedure InsertRight (var basic : pointer ; x : Item) ;
```

```
begin
        InsertLeft (basic, x) ;
        basic : = basic^.next ;
end ;
```

Sau đây là thủ tục loại bỏ thành phần bên trái danh sách, tham biến x ghi lại các thông tin của thành phân bị loại bỏ.

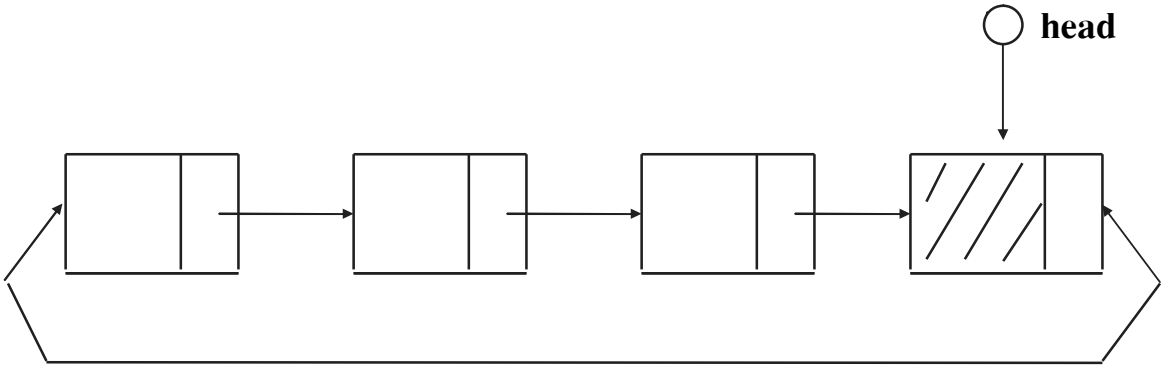
```
procedure DeleteLeft (var basic : pointer ; var x :Item) ;
    var  P : pointer ;
    begin
    if basic < > nil then
        begin
           P : = basic^.next ;
           x : = P^.infor ;
        if basic^. next = basic then basic : = nil
           else basic^.next : = P^.next :
           dispose (P)
        end ;
end ;
```

Một điều đặc biệt nữa của danh sách vòng tròn là ở chỗ, ta có thể sử dụng nó như một stack (với các phép toán InsertLeft và DeleteLeft), hoặc có thể sự dụng nó như một hàng (với các phép toán InsertRight và DeleteLeft). Stack và hàng sẽ được nghiên cứu kỹ trong các mục sau.

Đối với danh sách vòng tròn, một số phép toán khác trên danh sách được thực hiện rất dễ dàng. Chẳng hạn, để nối hai danh sách vòng tròn base1 và base2 thành một danh sách base1, ta chỉ cần trao đổi các con trỏ base1^.next và base2.next.

Trong nhiều áp dụng, để thuận tiện cho các thao tác với danh sách vòng tròn, ta đưa thêm vào danh sách một thành phần đặc biệt (được gọi là đầu của danh sách). Đầu danh sách chứa các giá trị đặc biệt để phân

biệt với các thành phần khác của danh sách (xem hình 3.6). Một ưu điểm của danh sách vòng tròn có đầu, là nó không bao giờ rỗng.



Hình 3.6. Danh sách vòng tròn có đầu.

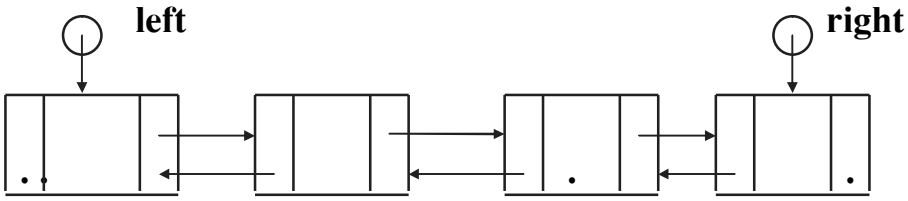
Trong mục 3.5, chúng ta sẽ đưa ra một ứng dụng của danh sách vòng tròn có đầu, ở đó nó được sử dụng để biểu diễn các đa thức.

3.4.2. *Danh sách hai liên kết.*

Khi làm việc với danh sách, có những xử lý trên mỗi thành phần của danh sách lại liên quan đến cả thành phần đi trước và thành phần đi sau. Trong các trường hợp như thế, để thuận tiện, người ta đưa vào mỗi thành phần của danh sách hai con trỏ : nextleft trỏ đến thành phần bên trái và nextright trỏ đến thành phần bên phải. Khi đó chúng ta có một danh sách hai liên kết. Chúng ta cần đến hai con trỏ : left trỏ đến thành phần ngoài cùng bên trái và righ trỏ đến thành phần ngoài cùng bên bên phải danh sách (xem hình 3.7).

Ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu danh sách hai liên kết như sau :

```
type pointer = ^Cell ;
     Cell   = record
                infor : Item ;
                nextleft, nextright : pointer ;
              end ;
              List = record
                       left, right : pointer ;
                     end ;
```

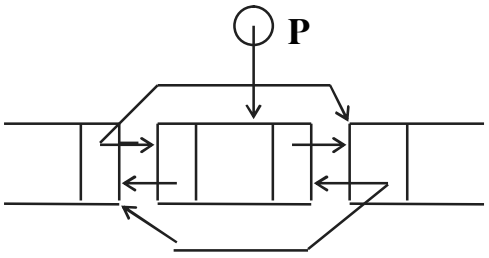


Hình 3.7. Danh sách hai liên kết.

Việc cài đặt danh sách hai liên kết, tất nhiên tiêu tốn nhiều bộ nhớ hơn danh sách một liên kết. Song bù lại, danh sách hai liên kết có những ưu điểm mà danh sách một liên kết không có: khi xem xét một danh sách hai liên kết ta có thể tiến lên trước hoặc lùi lại sau.

Các phép toán trên danh sách hai liên kết được thực hiện dễ dàng hơn danh sách một liên kết. Chẳng hạn, khi thực hiện phép toán loại bỏ, với danh sách một liên kết, ta không thể thực hiện được nếu không biết thành phần đi trước thành phần cần loại bỏ. Trong khi đó, ta có thể tiến hành dễ dàng phép loại bỏ trên danh sách hai liên kết. Hình 3.8 minh hoạ các thao tác để loại bỏ thành phần P trong danh sách hai liên kết. Ta chỉ cần thực hiện các phép gán sau.

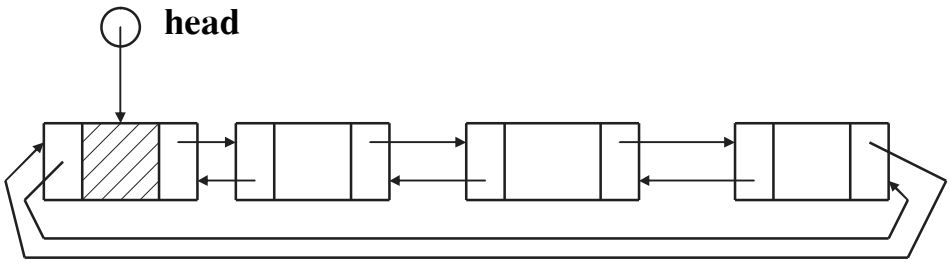
```
Q : = P^. nextleft ;

Q^ nextright : = P^. nextright ;

Q : = P^. nextright ;

Q^. nextleft  : = P^. nextleft ;

dispose (P) ;
```



Hình 3.8 loại thành phần P của danh sách hai liên kết.

Bạn đọc có thể tự mình viết các thủ tục thực hiện các phép toán trên danh sách hai liên kết (bài tập).

Trong các ứng dụng, người ta ưa dùng các danh sách hai liên kết vòng tròn có đầu (xem hình 3.9). Với danh sách loại này, ta có tất cả các ưu điểm của danh sách vòng tròn và danh sách hai liên kết.



Hình 3.9 Danh sách hai liên kết vòng tròn

3.5 ỨNG DỤNG DANH SÁCH:

Các phép tính số học trên đa thức

Trong mục này ta sẽ xét các phép tính số học (cộng, trừ, nhân, chia) đa thức một ẩn. Các đa thức một ẩn là các biểu thức dạng

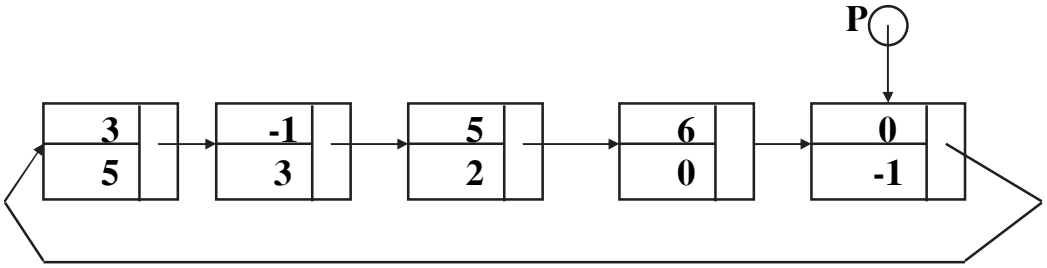
$$3x^5 - x^3 + 5x^2 + 6 \quad (1)$$

Mỗi hạng thức của đa thức được đặc trưng bởi hệ số (coef) và số mũ của x (exp). Giả sử các hạng thức trong đa thức được sắp xếp theo thứ tự giảm dần của số mũ, như trong đa thức (1). Rõ ràng ta có thể nhìn nhận đa thức như một danh sách tuyến tính các hạng thức. Khi ta thực hiện các phép toán trên các đa thức ta sẽ nhận được các đa thức có bậc không thể đoán trước được. (bậc của đa thức là số mũ cao nhất của các hạng thức trong đa thức). Ngay cả với các đa thức có bậc xác định thì số các hạng thức của nó cũng biến đổi rất nhiều từ một đa thức này đến một đa thức khác. Do đó phương pháp tốt nhất là biểu diễn đa thức dưới dạng một danh sách liên kết. Thành phần của danh sách này là bản ghi gồm ba trường : coef chỉ hệ số, exp chỉ số mũ của x và con trỏ để trỏ tới thành phần đi sau. Ta có thể mô tả cấu trúc dữ liệu biểu diễn một hạng thức của đa thức như sau :

```
type  pointer = ^Term ;
      Term   =  record
                    coef : real ;
```

```
        exp  : integer ;
        next : pointer
    end ;
```

Vì những ưu điểm của danh sách vòng tròn có đầu (không phải kiểm tra danh sách rỗng, mọi thành phần đều có thành phần đi sau), ta sẽ chọn danh sách vòng tròn có đầu để biểu diễn đa thức. Với cách chọn này việc thực hiện các phép toán đa thức sẽ rất gọn. Đầu của danh sách là thành phần đặc biệt có exp = -1. Chẳng hạn, hình 3.10 minh hoạ danh sách biểu diễn đa thức (1)



Hình 3.10 Cấu trúc dữ liệu biểu diễn đa thức (1)

Sau đây ta sẽ xét phép cộng đa thức P với đa thức Q. Con trỏ P (Q) trỏ đến đầu danh sách vòng tròn biểu diễn đa thức P (Q). Để thực hiện phép cộng đa thức P với đa thức Q, ta sẽ giữ nguyên danh sách P và thay đổi danh sách Q (xen vào, loại bỏ hay thay đổi trường coef) để nó trở thành danh sách biểu diễn tổng của hai đa thức. Một con trỏ P1 chạy trên danh sách P, hai con trỏ Q1, Q2 chạy cách nhau một bước (Q2 = Q1^. Next) trên danh sách Q. So sánh số mũ của P1 với số mũ của Q2. Có ba khả năng

1. Nếu P1^ exp > Q2^ exp thì ta xen thành phần P1 vào danh sách Q trước thành phần Q2. Cho P1 chạy tới thành phần sau trong danh sách.

2. Nếu P1^ exp = Q2^ exp thì ta thêm P1^. coef vào Q2^. coef. Sau khi thêm Q2^. coef = 0 thì ta loại bỏ thành phần Q2 khỏi danh sách Q. Sau đó ta cho P1 và Q1, Q2 chạy tới các thành phần tiếp theo trong danh sách P và Q.

3. Nếu P1^. exp < Q2^ exp thì ta cho Q1, Q2 chạy lên một bước.

Quá trình trên sẽ lặp lại cho tới khi P1 hoặc Q2 đi hết danh sách. Trong trường hợp Q2 đi hết danh sách Q còn P1 còn ở giữa danh sách P thì chuyển các thành phần còn lại của danh sách P vào danh sách Q. Ta có chương trình sau.

```
program            Add Poly ;
      type   pointer =  ^ Term ;
             Term   = record
                          coef : real ;
                          exp   : integer ;
                          next : pointer ;
                    end ;
      var      P,  P1              : pointer ;
             Q, Q1, Q2          : pointer ;
      procedure    Read Poly  (var P : pointer) ;
      { Tạo ra danh sách vòng tròn biểu diễn đa thức}
      var P1, P2 : pointer ;
             Traloi  :  char ;
      begin
      new (P) ;
      P1^. coef : = 0 ;
      P1^.  exp :  = -1; {Tạo ra đầu danh sách}
             P1 : = P ;
      readln (Traloi) ;
      while  Traloi = ' C ' do
       begin
      new (P2) ;
      readln (P2^. coef, P2^. exp) ;
      P1^. next : = P2 ;
             P1 : = P2 ;
           readln (traloi)
      end ;
             P1^. next : P ;
      end ;
```

```
        procedure Insert (P1: pointer ; var Q1, Q2 ; pointer) ;
                {Xen thành phần P1^ vào giữa hai thành phần Q1^, Q2^ trong danh
sách Q}
                begin
                        P1^. next: = Q2 ;
                        Q1^. next : = P1 ; Q1; = P1
        end ;

        procedure Delete (var Q1, Q2 : pointer) ;
        {Xoá thành phần Q2^ khỏi danh sách Q, Q2 = Q1^. next}
        begin
                Q1^. next : = Q2^. next ;
                        Q2 :  = Q1^. next
        end ;

        procedure     WritePoly ( Q : pointer) ;
        begin
                        Q : = Q1^. next ;
        if Q^. exp = -1 then writeln ( 'Q = 0' )
                            else
                while Q^. exp > -1 do
                begin
                Write (Q^. coef, X' ↑', Q^. exp) ;
                        Q : = Q^. next ;
                        if Q^. exp > -1 then write ('+')
                        end ;
                end ;
        begin {chương trình chính}
                                Read Poly (P) ;
                                Read Poly (Q) ;
```

```
                    P : = P^. next ;
                    Q1 :  = Q ;
                    Q2 : = Q1^. next ;
while (P^. exp > -1) and ( Q2^. exp > -1) do
        begin
          if P^. exp > Q2^. exp then
                    begin
                        P1 : = P ;
                        P :   = P^. next ;
                        Insert (P1, Q1, Q2)
                    end
else if P^. exp = Q2^. exp then
begin
        Q2^. coef : = Q2^.coef + P^. coef ;
        if Q2^. coef = 0 then Delete (Q1, Q2)
          else begin
                        Q1 : = Q2 ;
                        Q2 : = Q1^. next ;
                    end ;
        P : = P^. next
        end
              else begin
                        Q1 : = Q2 ;
                        Q2 : = Q1^. next
                    end
```

end ; { hết vòng lặp while. Nếu Q2^. exp = -1 còn P^. exp > -1 thì chuyển các hạng thức còn lại của đa thức P vào cuối đa thức Q}

```
        while P^. exp > -1 do
        begin
                        P1 : = P ;
                        P : = P^. next ;
```

```
                    Insert (P1, Q1, Q2)
        end ;
        WritePoly (Q) ;
end ;
```

3.6. STACK.

3.6.1. *Stack.*

Trong mục này chúng ta sẽ xét stack, một dạng hạn chế của danh sách, trong đó phép toán xen một phần tử mới vào danh sách và loại bỏ một phần tử khỏi danh sách, chỉ được phép thực hiện ở một đầu của danh sách. Đầu này được gọi là *đỉnh* của stack. Ta có thể hình dung stack như một chồng đĩa, ta chỉ có thể đặt thêm đĩa mới lên trên đĩa trên cùng, hoặc lấy đĩa trên cùng ra khỏi chồng. Như vậy chiếc đĩa đặt vào chồng sau cùng, khi lấy ra sẽ được lấy ra đầu tiên. Vì thế, stack còn được gọi là danh sách LIFO (viết tắt của Last In First Out, nghĩa là, cái vào sau cùng ra đầu tiên).

Nói chung, với một mô hình dữ liệu (chẳng hạn, mô hình dữ liệu danh sách, cây, tập hợp, ...), lớp các phép toán có thể thực hiện trên mô hình rất đa dạng và phong phú. Song trong các ứng dụng chỉ có một số nhóm phép toán được sử dụng thường xuyên. Khi xét một mô hình dữ liệu với một tập hợp xác định các phép toán được phép thực hiện, ta có một *kiểu dữ liệu trừu tượng* (abstract data type). Như vậy stack là một kiểu dữ liệu trừu tượng dựa trên mô hình dữ liệu danh sách, với các phép toán sau đây.

Giả sử S là stack các phần tử của nó có kiểu Item và x là một phần tử cùng kiểu với các phần tử của stack.

1. Khởi tạo stack rỗng (stack không chứa phần tử nào)

```
procedure Initialize (var S : stack)
```

2. Kiểm tra stack rỗng

```
function Emty (var S : stack) : boolean ;
```

Emty nhận giá trị true nếu S rỗng và false nếu S không rỗng.

3. Kiểm tra stack đầy

```
function Full (var S : stack) : boolean ;
```

Full nhận giá trị true nếu S đầy và false nếu không.

4.Thêm một phần tử mới x vào đỉnh của stack

procedure Push (x : Item, var S : stack)

5. Loại phần tử ở đỉnh của stack và gán giá trị của phần tử này cho x.

procedure Pop (var S : stack ; var x : Item) ;

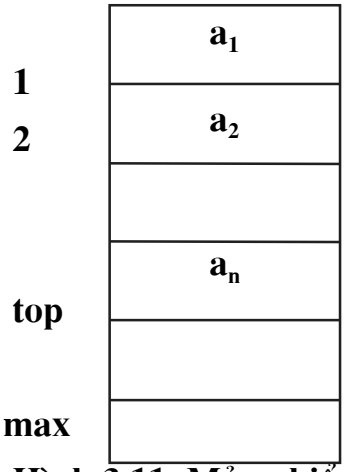
Chú ý rằng, phép toán Push chỉ được thực hiện nếu stack không đầy, còn phép toán Pop chỉ được thực hiện nếu stack không rỗng.

Ví dụ : Nếu S là stack, S = (a_1, a_2, ..., a_n) và đỉnh của stack là đầu bên phải. Khi đó thực hiện Push (x, S) ta được S = (a_1, ..., a_n, x). Nếu n ≥ 1 thì khi thực hiện Pop (S, x) ta được s = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}) và x = a_n.

3.6.2. *Cài đặt stack bởi mảng.*

Chúng ta có thể sử dụng các phương pháp cài đặt danh sách để cài đặt stack. Trước hết ta cài đặt stack bởi mảng.

Giả sử độ dài tối đa của stack là max, các phần tử của stack có kiểu dữ liệu là Item, đỉnh của stack được chỉ bởi biến top. Khi đó stack S=(a_1,a_2,...a_n) được biểu diễn bởi mảng như trong hình 3.11.



Hình 3.11. Mảng biểu diễn stack.

Cấu trúc dữ liệu để biểu diễn stack có thể được khai báo như sau :

```
const  max = N ;
type   Stack = record
                    top : 0 ... max ;
                    element : array [1 ... max] of Item  ;
               end ;
var S : Stack ;
```

Với cách cài đặt này, S là Stack rỗng, nếu S. top = 0, và nó sẽ đầy nếu S.top = max.

Sau đây là các thủ tục và hàm thực hiện các phép toán trên Stack.

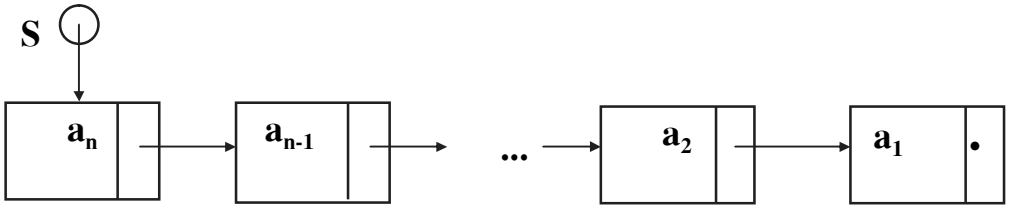
```
procedure   Initialize ( S : Stack) ;
        begin
                S.top : = 0
        end ;

function  Emty (var  S : Stack) : boolean ;
        begin
                Emty : = (S.top = 0)
        end ;

function Full (var S : Stack) : boolean ;
        begin
                Full : = (S.top = max)
        end ;

procedure Push (x : Item ; var S : Stack ; var OK : boolean) ;
        begin
                with S do
                        if Full(S) then OK : = false
                else begin
                        top : = top + 1
                        element [top] : = x ;
                        OK : = true
                  end ;
        end ;

procedure Pop (var S : Stack ; var x : Item ; var OK : boolean)
```

```
begin
   with S do
      if Emty (S) then OK : = false
            else begin
                  x : = element [top] ;
                  top : = top - 1 ;
                  OK : = true
               end ;
      end ;
```

Trong các thủ tục Push và Pop, chúng ta đã đưa vào tham biến OK để ghi lại tình trạng khi thực hiện phép toán, nó nhận giá trị true khi phép toán thực hiện thành công và false nếu thất bại.

3.6.3. *Cài đặt stack bởi danh sách liên kết.*

Chúng ta có thể cài đặt stack bởi danh sách liên kết như chúng ta đã làm đối với danh sách. Đỉnh của stack là đầu của danh sách liên kết. Ta sử dung con trỏ S trỏ đến đỉnh stack. Hình 3.12 minh hoạ danh sách liên kết biểu diễn stack (a_1, a_2, ..., a_n) với đỉnh là a_n.



Hình 3.12

Ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu danh sách liên kết biểu diễn stack như sau :

```
type   Stack = ^Cell
       Cell = record
                  Infor : Item ;
                  next : Stack :
```

```
            end ;
    var S : Stack ;
```

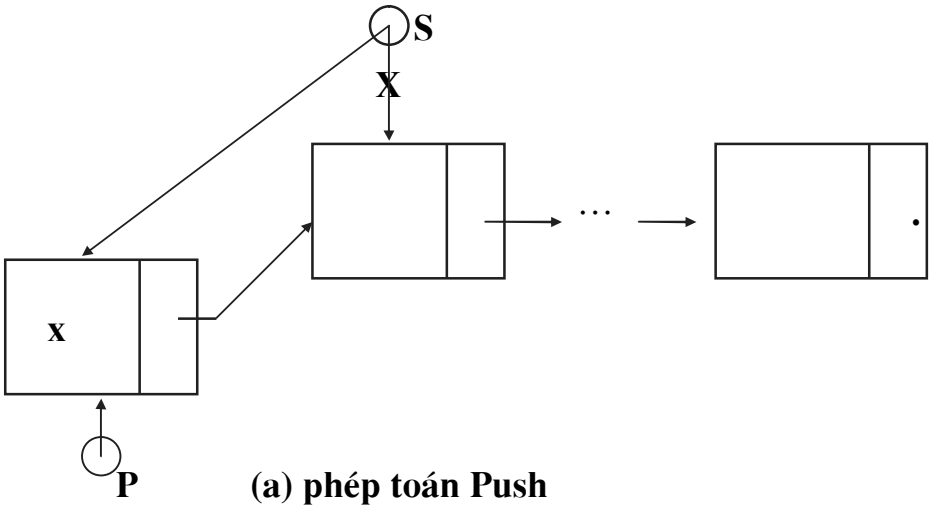
Trong cách cài đặt này, S là stack rỗng, nếu S = nil. Chúng ta giả thiết rằng, việc cấp phát bộ nhớ cho các biến động (thủ tục new trong Pascal) luôn luôn được thực hiện. Do đó hàm Full luôn luôn có giá trị false, và phép toán Push không bao giờ thất bại.

Sau đây là các thủ tục và hàm thực hiện các phép toán trên Stack được cài đặt bởi danh sách liên kết.

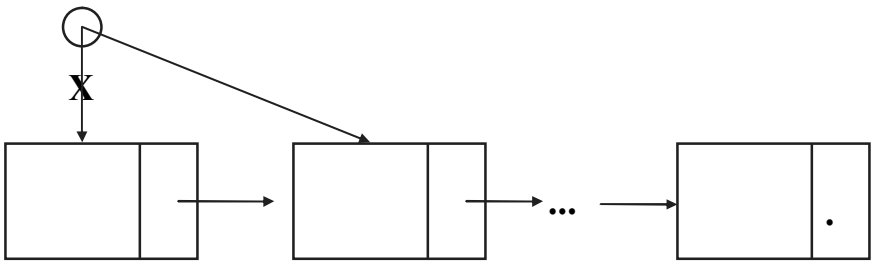
```
procedure  Initialize (var S : Stack) ;
        begin
            S : = nil
        end ;

function Emty (var S : Stack) : boolean ;
        begin
            if S = nil then Emty : = true
                       else Emty : = false
        end ;

function Full (var S : stack) : boolean ;
        begin
            Full : = false
        end ;

procedure Push (x : Item ; var S : Stack ; var OK : boolean),
        var P : ^Cell ;
        begin
            new (P) ;
            P^.infor : = x ;
            P^.next : = S ;
            S : = P ;
```

```
                OK : = true
    end ;
procedure Pop (var S : Stack ; var x: Item ; var OK : boolean) ;
      var  P : ^Cell ;
   begin
      if S = nil then OK : = false
          else begin
                  P : = S ;
              x : = S^.infor ;
              S : = S^.next ;
              OK : = true ;
                  dispose (P) ;
            end ;
      end ;
```

Các thao tác thực hiện các phép toán Push và Pop trên stack được minh hoạ trong hình 3.13a và 3.13b.



(a) phép toán Push



(b) Phép toán Pop

Hình 3.13. Các phép toán Push và Pop trên stack.

3.7. GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC

Trong mục này, chúng ta sẽ trình bày một ứng dụng của stack : xác định giá trị của một biểu thức.

Trong các chương trình ta thường viết các lệnh gán

X : = < biểu thức >

trong đó, vế phải là một biểu thức (số học hoặc logic). Khi thực hiện chương trình, gặp các lệnh gán, máy tính cần phải xác định giá trị của biểu thức và gán kết quả cho biến X. Do đó vấn đề đặt ra là, làm thế nào thiết kế được thuật toán xác định giá trị của biểu thức.

Ta sẽ xét các biểu thức số học. Một cách không hình thức, biểu thức số học là một dãy các toán hạng (hằng, biến hoặc hàm) nối với nhau bởi các phép toán số học. Trong các biểu thức có thể chứa các dấu ngoặc tròn. Để đơn giản ta chỉ xét các biểu thức số học chứa các phép toán hai toán hạng +,-* và /. Khi tính giá trị của biểu thức, các phép toán trong ngoặc được thực hiện trước, rồi đến các phép toán * và / ,sau đó đến các phép toán + và - . Trong cùng mức ưu tiên, các phép toán được thực hiện từ trái sang phải. Chẳng hạn, xét biểu thức

5 + 8 / (3 + 1) * 3

Giá trị của biểu thức này được tính như sau :

5 + 8/(3+1)*3 = 5+8/4 * 3 = 5+2 * 3 = 5+6 = 11

Sau đây ta đưa ra thuật toán xác định giá trị của một biểu thức số học. Thuật toán này gồm hai giai đoạn.

1. Chuyển biểu thức số học thông thường (dạng infix) sang biểu thức số học Ba lan postfix.

2. Tính giá trị của biểu thức số học Balan postfix

Trước hết ta cần xác định thế nào là biểu thức số học Balan postfix. Trong cách viết thông thường, phép toán được đặt giữa hai toán hạng, chẳnghạn, a + b, a * b. Còn trong cách biết Balan, phép toán được đặt

sau các toán hạng. Chẳng hạn, các biểu thức a + b, a * b trong cách viết Balan được viết là ab +, ab *. Một số ví dụ khác.

Biểu thức thông thường	Biểu thức Balan
a * b/ c	ab * c /
a * (b + c) - d/e	abc + * de / -

Cần lưu ý rằng, biểu thực số học Balan không chứa các dấu ngoặc, nó chỉ gồm các toán hạng và các dấu phép toán.

Sau đây ta sẽ trình bày thuật toán xác định giá trị của biểu thức số học Balan. Trong thuật toán này, ta sẽ sử dụng một stack S để lưu giữ các toán hạng và các kết quả tính toán trung gian. Thuật toán như sau :

1. Đọc lần lượt các thành phần của biểu thức Balan từ trái sang phải. Nếu gặp toán hạng thì đẩy nó vào stack. Nếu gặp phép toán, thì rút hai toán hạng ở đỉnh stack ra và thực hiện phép toán này. Kết quả nhận được lại đẩy vào stack.

2. Lặp lại quá trình trên cho tới khi toàn bộ biểu thức được đọc qua. Lúc đó đỉnh của stack chứa giá trị các biểu thức.

Giả sử E là biểu thức số học Balan nào đó. Ta đưa thêm vào cuối biểu thức ký hiệu # để đánh dấu hết biểu thức. Trong thuật toán tính giá trị của biểu thức E, ta sẽ sử dụng các thủ tục sau.

Thủ tục Read (E, z). Đọc một thành phần của biểu thức E và gán nó cho z. Đầu đọc được chuyển sang phải một vị trí.

Thủ tục Push (x,S). Đẩy x vào đỉnh stack S.

Thủ tục Pop(S,x). Loại phần tử ở đỉnh của stack và gán nó cho x.

Ta có thể mô tả thuật toán xác định giá trị của biểu thức số học Balan bởi thủ tục sau.

```
procedure       Eval (E : biểu thức) ;
  begin
     Read (E,z) ;
        while z < > # do
           begin
                 if z là toán hạng then Push (z, S)
                  else begin
```

```
                    Pop (S,y) ; {Rút các toán hạng ở đỉnh stack}
                    Pop (S,x) ;
                    w : = x z y; {Thực hiện phép toán z với các
                                  toán hạng x và y }
                    Push (w,s)
                end ;
            Read (E,z)
        end ;
    end ;
```

Sau đây chúng ta sẽ thiết kế thuật toán chuyển biểu thức số học thông thường sang biểu thức số học Balan. Khác với thuật toán tính giá trị của biểu thức số học Balan, trong thuật toán này, chúng ta sẽ sử dụng stack S để lưu các dấu mở ngoặc (và các dấu phép toán + , -, * và /. Ta đưa vào ký hiệu $ để đánh dấu đáy của stack. Khi đỉnh stack chứa $, có nghĩa là stack rỗng.

Trên tập hợp các ký hiệu $, ⓪, +, -, *, / ta xác định hàm Pri (hàm ưu tiên) như sau : Pri ($) < Pri (⓪) < Pri (+) = Pri (-) < Pri (*) = Pri(/).

Giả sử ta cần chuyển biểu thức số học thông thường E sang biểu thức số học Balan E1. Ta thêm vào bên phải biểu thức E ký hiệu # để đánh dấu hết biểu thức.

Thuật toán gồm các bước sau :

1. Đọc một thành phần của biểu thức E (Đọc lần lượt từ trái sang phải) Giả sử thành phần được đọc là x.

1.1. Nếu x là toán hạng thì viết nó vào bên phải biểu thức E1.

1.2. Nếu x là dấu mở ngoặc (thì đẩy nó vào stack

1.3. Nếu x là một trong các dấu phép toan + , -, *, / thì

a. Xét phần tử y ở đỉnh stack

b. Nếu Fri (y) ≥ Fri(x) thì loại y khỏi stack, viết y vào bên phải E1 và quay lại bước a)

c. Nếu Fri (y) < Fri(x) thì đẩy x vào stack

1.4. Nếu x là dấu đóng ngoặc) thì

a. Xét phần tử y ở đỉnh của stack

b. Nếu y là dấu phép toán thì loại y khỏi stack, viết y vào bên phải E1 và quay lại a)

c. Nếu y là dấu mở ngoặc (thì loại nó khỏi stack

2. Lặp lại bước 1 cho tới khi toàn bộ biểu thức E được đọc qua.

3. Loại phần tử ở đỉnh stack và viết nó vào bên phải E1. Lặp lại bước này cho tới khi stack rỗng.

Trong thuật toán ta sử dụng các thủ tục sau.

Read (E,x). Đọc một thành phần của biểu thức E và gán cho : x

Write (x,E1). Viết x vào bên phải biểu thức Balan E1.

Push (x,S). Đẩy x vào stack

Pop (S,x). Loại phần tử ở đỉnh stack và gán cho x

Gọi phần tử ở đỉnh của stack là top

Chúng ta mô tả thuật toán chuyển biểu thức số học thông thường E sang biểu thức số học Balan E1 bởi thủ tục sau.

```
procedure   Postfix (E: biểu-thức ;var E1 : biểu-thức) ;
  begin
      Push($,S) ;
      Read (E,x) ;
      while x < > # do
        begin
          if x là toán hạng then Write (x,E1)
            else if x = (then Push (x,S)
            else if x = ) then
              begin
               while top < > (do
                  begin
                    Pop(S,y) ;
                    Write (y, E1)
              end ;
          Pop (S,y) ;
       end
```

```
        else begin
              while Pri(top) >= Pri(x) do
                 begin
                        Pop (S,y) ;
                        Write (y, E1)
                 end ;
                        Push (x,S)
                 end ;
              Read (E,x)
          end ; { hết lệnh while x < > # }
          write (#, E1)
    end ;
```

Ví dụ. Xét biểu thức :

E = a * (b + c) - d #

Kết quả các bước thực hiện thuật toán được cho trong bảng sau :

Thành phần trong biểu thức E	Stack	Biểu thức Balan E1
	$	
a	$	a
*	$*	a
⓪	$*⓪	a
b	$*⓪	ab
+	$*⓪+	ab
c	$*⓪+	abc
①	$*⓪	abc+
	$*	abc+
-	$	abc+*
	$-	abc +*
d	$-	abc+*d

#	$	abc+*d- abc + * d- #

3.7 HÀNG.

3.7.1. *Hàng*.

Một kiểu dữ liệu trìu tượng quan trọng khác được xây dựng trên cở sở mô hình dữ liệu danh sách là hàng. Hàng là một danh sách với hai phép toán quan trọng nhất là thêm một phần tử mới vào một đầu danh sách (đầu này được gọi là *cuối hàng*) và loại phần tử khỏi danh sách ở một đầu khác (đầu này gọi là *đầu hàng*). Trong đời sống hàng ngày, ta thường xuyên gặp hàng. Chẳng hạn, hàng người chờ đợi được phục vụ (chờ mua vé tàu, chẳng hạn). Người ta chỉ có thể đi vào hàng ở cuối hàng, người được phục vụ và ra khỏi hàng là người ở đầu hàng tức là ai vào hàng trước sẽ được phục vụ trước. Vì vậy, hàng còn được gọi là danh sách FIFO (viết tắt của First In First Out, nghĩa là, ai vào đầu tiên ra đầu tiên).

Sau đây là tập hợp đầy đủ các phép toán mà ta có thể thực hiện trên hàng.

Giả sử Q là một hàng các đối tượng nào đó có kiểu dữ liệu Item và x là một phần tử cùng kiểu với các đối tượng của hàng.

1. Khởi tạo hàng rỗng.

procedure Initialize (var Q : Queue) ;

2. Kiểm tra hàng rỗng

function Emty (var Q : Queue) : boolean ;

Emty nhận giá trị true nếu Q rỗng và false nếu không

3. Kiểm tra hàng đầy

function Full (var Q : Quen) : boolean ;

Full nhận giá trị true nếu Q đầy và false nếu không

4. Thêm một phần tử mới x vào cuối hàng

procedure AddQueue (x : Item ; var Q : Queue) ;

5. Loại phần tử ở đầu hàng, giá trị của phần tử này được lưu vào x.

procedure DeleteQueue (var Q : Queue, var x : Item)

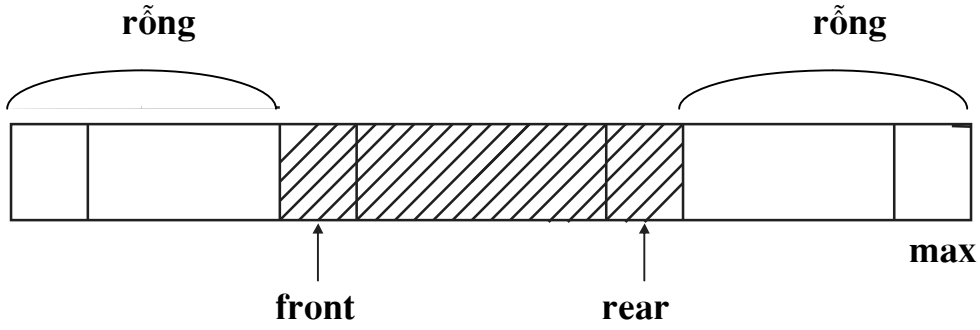
3.7.2. *Cài đặt hàng bởi mảng*.

Ta có thể biểu diễn hàng bởi mảng và sử dụng hai chỉ số front chỉ vị trí đầu hàng và rear chỉ vị trí cuối hàng.

Có thể khai báo cấu trúc dữ liệu biểu diễn hàng như sau

```
const  max = N
type   Queue = record
                    front, rear : 0 ... max ;
                    element : array [1 ... mã] of Item ;
               end ;
var Q : Queue ;
```

Hình 3.14 minh hoạ mảng biểu diễn hàng.



Hình 3.14. Mảng biểu diễn hàng.

Trong cách cài đặt này, hàng rỗng nếu rear = 0 và hàng đầy nếu rear = max.

Sau đây là các thủ tục và hàm thực hiện các phép toán trên hàng

```
procedure   Initialize (var Q : Queue) ;
        begin
              with Q do
                begin
                  front : = 1 ;
                  rear   : = 0 ;
        end ;
   end ;
```

```
function  Emty (var Q : Queue) : boolean ;
     begin
       if Q.rear = 0 then Emty : = true
                     else Emty : = false
    end ;
function Full (var Q : Queue) : boolean ;
       begin
        if Q.rear = max then Full : = true
                        else  Full : = false
       end ;

procudure AddQueue (x : Item ; var Q:Queue ; var OK : boolean)
;
       begin
         with Q do
            if rear = max then OK : = false
              else begin
                   rear := rear + 1
                   element [rear] : = x ;
                   OK : = true
                   end ;
          end ;

 procedure DeleteQueue (var Q : Queue ; var x : Item ;var OK :
boolean) ;
    begin
          with Q do
               if rear = 0 then  OK : = false
                 else begin
                   x : = element [front] ;
                   if front = rear then
```

```
                begin
                    front : = 1 ;
                    rear  :  = 0
                end else front : = front + 1 ;
            OK : = true
        end ;
    end ;
```

Phương pháp cài đặt hàng bởi mảng với hai chỉ số (front chỉ đầu hàng, rear chỉ cuối hàng) có yếu điểm lớn. Nếu phép loại bỏ không thường xuyên làm cho hàng rỗng, thì các chỉ số front và rear sẽ tăng liên tục, nhanh chóng vượt quá cỡ của mảng. Hàng sẽ trở thành đầy, mặc dầu các vị trí trống trong mảng có thể vẫn còn nhiều !

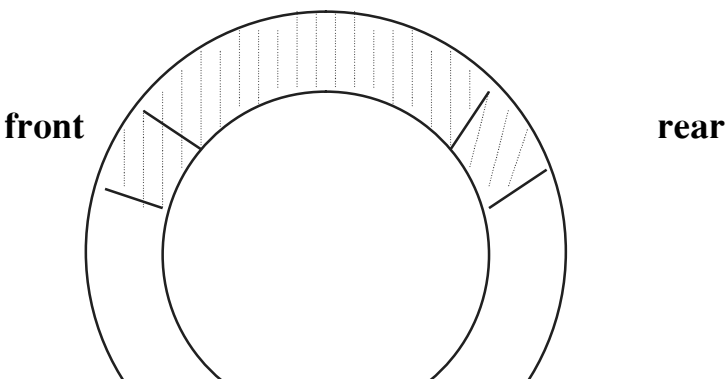
Có thể khắc phục yếu điểm trên bằng cách sau. Ta chỉ sử dụng một chỉ số rear để chỉ cuối hàng, còn phần tử đầu hàng luôn luôn được xem là thành phần đầu tiên của mảng, tức là ta luôn luôn coi front = 1.

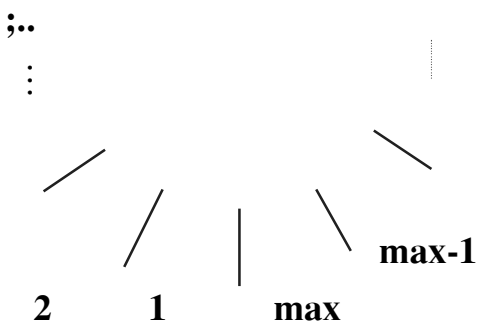
```
type   Queue = record
                    rear : 0 ... max ;
                    element : array[1...max] of Item ;
               end ;
```

Tuy nhiên cách cài đặt này lại không thuận tiện cho phép toán loại phần tử đầu hàng, bởi vì mỗi lần loại bỏ ta phải dồn tất cả các phần tử còn lại của hàng lên một vị trí.

3.7.3. *Cài đặt hàng bởi mảng vòng tròn.*

Trong trường hợp số phân tử trong hàng không bao giờ vượt quá một số cố định N nào đó, phương pháp tốt nhất là biểu diễn hàng bởi mảng vòng tròn. Đó là mảng với chỉ số chạy trong miền 1... max, với mọi i = 1,2,..., max - 1, thành phần thứ i của mảng đi trước thành phần thứ i + 1 còn thành phần thứ max đi trước thành phần đầu tiên, tức là các thành phần của mảng được xếp thành vòng tròn (xem hình 3.15)





Hình 3.15. Mảng vòng tròn biểu diễn hàng.

Khi biểu diễn hàng bởi mảng vòng tròn, để biết khi nào hàng đầy, khi nào hàng rỗng ta cần đưa thêm vào biến count để đếm số phần tử trong hàng. Chúng ta có khai báo sau.

```
const max   = N
type Queue  = record
                count :  0 .. max
                front, rear : 0 .. max
                element : array [1 .. max] of Item
              end ;
var  Q : Queue ;
```

Trong cách cài đặt này, điều kiện để hàng Q rỗng là Q.count = 0 và nó đầy nếu Q.count = max.

Khi làm việc với mảng vòng tròn, ta cần lưu ý rằng, thành phần đầu tiên của mảng đi sau thành phần thứ max. Sau đây chúng ta sẽ viết các thủ tục AddQueue và DeleteQueue các thủ tục khác giành lại cho bạn đọc.

```
procedure AddQueue (x : Item ; var Q : Queue ; ok : boolean) ;
begin
    with Q do
     if count = max then ok : = false
          else begin
                 if rear = max then rear : = 1
                   else rear : = rear + 1 ;
```

```
                element [rear] : =  x ;
                count : = count + 1 ;
                    Ok : = true
            end
        end ;
```

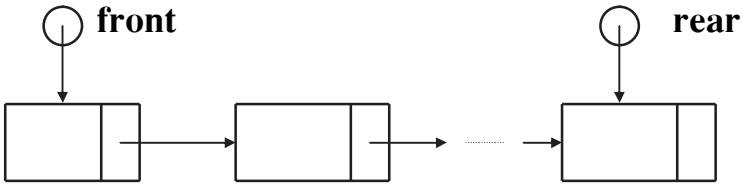
```
    procedure DeleteQueue (var Q : Queue ; var x : Item ; var Ok : boolean) ;
    begin
      with Q do
        if count = 0 then Ok : = false
          else begin
                x : = element [front] ;
                if front = rear then
                        begin
                            front : = 1 ;
                            rear :  = 0
                        end else
                if front = max then front : = 1
                  else front : = front + 1 ;
                count : = count - 1 ;
                  Ok  : = true ;
              end`
        end ;
```

3.7.4 Cài đặt hàng bởi danh sách liên kết.

Cũng như stack, hàng có cấu trúc toán học như danh sách, nhưng chỉ được phép thực hiện được một số phép toán đặc biệt. Do đó, ta cũng có thể sử dụng danh sách liên kết để biểu diễn dễ hàng. Ta cần đưa vào hai con trỏ, một con trỏ trỏ đến đầu hàng một con trỏ trỏ đến cuối hàng. Ta có thể mô tả cấu trúc dữ liệu danh sách liên kết để biểu diễn hàng như sau.

```
type pointer = ^ Cell
        Cell  =  record
                    infor : Item ;
                     next : pointer ;
                  end ;
        Queue = record
                      front ;
                      rear : pointer ;
                   end ;
        var Q : Queue ;
```

Hình 3.16 minh hoạ một hàng được biểu diễn bởi danh sách liên kết.



Hình 3.16 Danh sách liên kết biểu diễn hàng.

Trong cách cài đặt này, hàng được xem là không khi nào đầy (ta giả thiết là, luôn luôn có không gian nhớ để cấp phát cho các thành mới cần được đưa vào hàng). Điều kiện để hàng rỗng là Q.front = nil

Sau đây là các thủ tục và hàm thực hiện các phép toán trên hàng.

```
procedure Initialize (var Q : Queue) ;
        begin
              Q. front : = nil
        end ;

function Emty (var Q : queue) : boolean ;
        begin
           if Q.front = nil   then  Emty : true
                              else Emty : false
```

```
        end ;

    function Full (var Q : Queue ) boolean ;
        begin
          Full : = false
        end ;

    procedure AddQueue (x : Item; var Q : Queue ; var Ok : boolean)
        var    P : pointer ;
        begin
            new (P) ;
            P^ . infor : = X ;
            P^. next : = nil ;
            with Q do
              if front = nil then
                        begin
                            front : = P ;
                            rear  : = P ;
                        end else
                        begin
                            rear^. next : = P ;
                            rear : = P
                        end ;
            Ok : true
        end ;
    procedure DeleteQueue (var Q : Queue ; var x : Item ; var Ok :
boolean);
        var P : pointer ;
        begin
          with Q do
            if front = nil   then Ok : = false
```

```
else begin
        P : = front ;
        x : = front^.infor ;
        front : = front^.next ;
        Ok : = true ;
        dispose (P)
    end
end ;
```

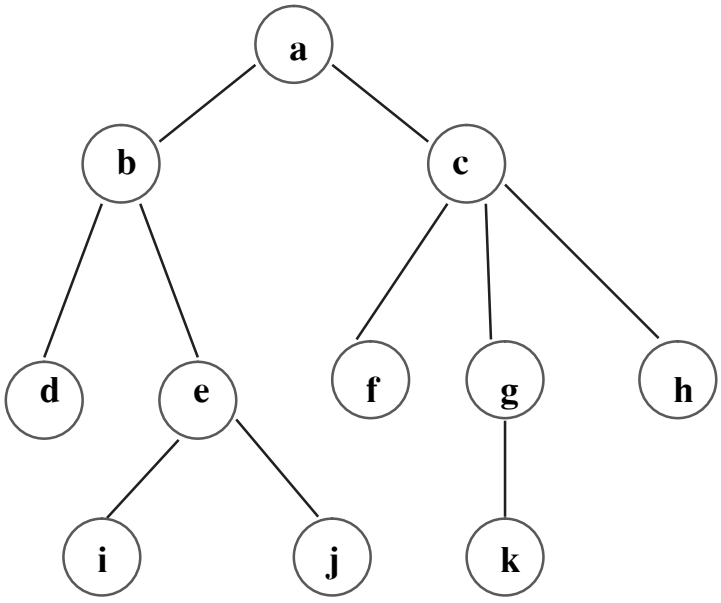
Chương 4

C Â Y

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu mô hình dữ liệu cây. Cây là một cấu trúc phân cấp trên một tập hợp nào đó các đối tượng. Một ví dụ quen thuộc về cây, đó là cây thư mục. Cây được sử dụng rộng rãi trong rất nhiều vấn đề khác nhau. Chẳng hạn, nó được áp dụng để tổ chức thông tin trong các hệ cơ sở dữ liệu, để mô tả cấu trúc cú pháp của các chương trình nguồn khi xây dựng các chương trình dịch. Rất nhiều các bài toán mà ta gặp trong các lĩnh vực khác nhau được quy về việc thực hiện các phép toán trên cây. Trong chương này chúng ta sẽ trình bày định nghĩa và các khái niệm cơ bản về cây. Chúng ta cũng sẽ xét các phương pháp cài đặt cây và sự thực hiện các phép toán cơ bản trên cây. Sau đó chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ một dạng cây đặc biệt, đó là cây tìm kiếm nhị phân.

4.1. CÂY VÀ CÁC KHÁI NIỆM VỀ CÂY

Hình 4.1 minh hoạ một cây T. Đó là một tập hợp T gồm 11 phần tử, T={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}. Các phần tử của T được gọi là các đỉnh của cây T. Tập T có cấu trúc như sau. Các đỉnh của T được phân thành các lớp không cắt nhau : lớp thứ nhất gồm một đỉnh duy nhất a, đỉnh này gọi là *gốc* của cây; lớp thứ hai gồm các đỉnh b, c ; lớp thứ ba gồm các đỉnh d, e, f, g, h và lớp cuối cùng gồm các đỉnh i, j, k, mỗi đỉnh thuộc một lớp (trừ gốc), có một cung duy nhất nối với một đỉnh nào đó thuộc lớp kề trên. (Cung này biểu diễn mối quan hệ nào đó).



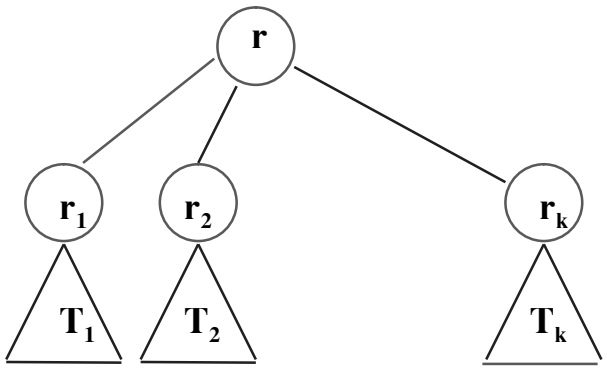
Hình 4.1 Biểu diễn hình học một cây

Trong toán học có nhiều cách định nghĩa cây. Ở đây chúng ta đưa ra định nghĩa đệ quy về cây. Định nghĩa này cho phép ta xuất phát từ các cây đơn giản nhất (cây chỉ có một đỉnh) xây dựng nên các cây lớn hơn.

Cây (cây có gốc) được xác định đệ quy như sau.

1. Tập hợp gồm một đỉnh là cây. Cây này có gốc là đỉnh duy nhất của nó.

2. Giả sử T_1, T_2, ... , T_k ($k \geq 1$) là các cây có gốc tương ứng là $r_1, r_2, ..., r_k$. Các cây T_i (i = 1, 2,...k) , không không cắt nhau tức là $T_i \cap T_j = \phi$ với $i \neq j$. Giả sử r là một đỉnh mới không thuộc các cây Ti (i = 1, 2,... , k). Khi đó, tập hợp T gồm đỉnh r và tất cả các đỉnh của cây T_i (i = 1, 2, ... , k) lập thành một cây mới với gốc r. Các cây T_i (i = 1, 2, ... , k) được gọi là cây con của gốc r. Trong biểu diễn hình học của cây T, mỗi đỉnh r_i (i =1, 2, ... ,k) có cung nối với gốc r (xem hình 4.2)



Hình 4.2 Cây có gốc r và các cây con của gốc T_1, T_2, ... , T_k.

Cha, con, đường đi.

Từ định nghĩa cây ta suy ra rằng, mỗi đỉnh của cây là gốc của các cây con của nó. Số các cây con của một đỉnh gọi là bậc của đỉnh đó. Các đỉnh có bậc không được gọi là lá của cây.

Nếu đỉnh b là gốc của một cây con của đỉnh a thì ta nói đỉnh b là con của đỉnh a và a là cha của b. Như vậy, bậc của một đỉnh là số các đỉnh con của nó, còn lá là đỉnh không có con. Các đỉnh có ít nhất một con được gọi là đỉnh trong. Các đỉnh của cây hoặc là lá hoặc là đỉnh trong.

Các đỉnh có cùng một cha được gọi là anh em. Một dãy các đỉnh a_1, a_2, ... a_n ($n \geq 1$), sao cho a_i (i = 1, 2, ... , n-1) là cha của a_{i+1} được gọi là

đường đi từ a_1 đến a_n. Độ dài của đường đi này là n-1. Ta có nhận xét rằng, luôn luôn tồn tại một đường đi duy nhất từ gốc tới một đỉnh bất kỳ trong cây.

Nếu có một đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b có độ dài k ≥ 1, thì ta nói a là tiền thân của b và b là hậu thế của a.

Ví dụ. Trong cây ở hình 4.1, đỉnh c là cha của đỉnh f, g, h. Các đỉnh d, i, j, k và h là lá, các đỉnh còn lại là đỉnh trong. a, c, g, k là đường đi có độ dài 3 từ a đến k. Đỉnh b là tiền thân của các đỉnh d, e, i, j.

Cây con.

Từ định nghĩa cây ta có, mỗi đỉnh a bất kỳ của cây T là gốc của một cây nào đó, ta gọi cây này là cây con của cây T. Nó gồm đỉnh a và tất cả các đỉnh là hậu thế của a. Chẳng hạn, với cây T trong hình 4.1, T_1 = {c, f, g, h, k} là một cây con

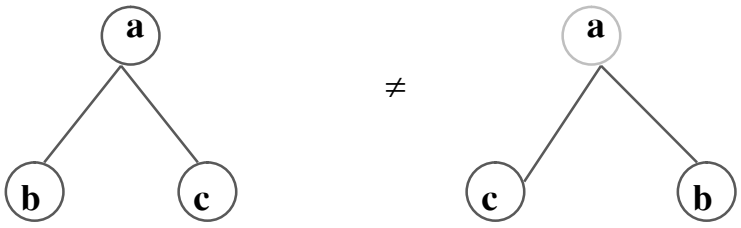
Độ cao, mức.

Trong một cây, độ cao của một đỉnh a là độ dài của đường đi dài nhất từ a đến một lá. Độ cao của gốc được gọi là độ cao của cây. Mức của đỉnh a là độ dài của đường đi từ gốc đến a. Như vậy gốc có mức 0.

Ví dụ. Trong cây ở hình 4.1, đỉnh b có dộ cao là 2, cây có độ cao là 3. Các đỉnh b, c có mức 1 ; các đỉnh d, e, f, g, h có mức 2, còn mức của các đỉnh i, j, k là 3.

Cây được sắp.

Trong một cây, nếu các cây con của mỗi đỉnh được sắp theo một thứ tự nhất định, thì cây được gọi là cây được sắp. Chẳng hạn, hình 4.3 minh hoạ hai cây được sắp khác nhau,



Hình 4.3. Hai cây được sắp khác nhau

Sau này chúng ta chỉ quan tâm đến các cây được sắp. Do đó khi nói đến cây thì cần được hiểu là cây được sắp.

Giả sử trong một cây được sắp T, đỉnh a có các con được sắp theo thứ tự : b_1, b_2, ..., b_k ($k \geq 1$). Khi đó ta nói b_1 là con trưởng của a, và b_i là anh liền kề của b_{i+1} (b_{i+1} là em liền kề của b_i), i = 1,2, ..., k-1. Ta còn nói, với i < j thì b_i ở bên trái b_j (b_j ở bên phải b_i). Quan hệ này được mở rộng như sau. Nếu a ở bên trái b thì mọi hậu thế của a ở bên trái mọi hậu thế của b.

Ví dụ. Trong hình 4.1, f là con trưởng của c, và là anh liền kề của đỉnh g. Đỉnh i ở bên trái đỉnh g.

Cây gắn nhãn.

Cây gắn nhãn là cây mà mỗi đỉnh của nó được gắn với một giá trị (nhãn) nào đó. Nói một cách khác, cây gắn nhãn là một cây cùng với một ánh xạ từ tập hợp các đỉnh của cây vào tập hợp nào đó các giá trị (các nhãn). Chúng ta có thể xem nhãn như thông tin liên kết với mỗi đỉnh của cây. Nhãn có thể là các dữ liệu đơn như số nguyên, số thực, hoặc cũng có thể là các dữ liệu phức tạp như bản ghi. Cần biết rằng, các đỉnh khác nhau của cây có thể có cùng một nhãn.

Rừng.

Một rừng F là một danh sách các cây :

$$F = (T_1, T_2, ..., T_n)$$

trong đó T_i(i = 1, ..., n) là cây (cây được sắp)

Chúng ta có tương ứng một - một giữa tập hợp các cây và tập hợp các rừng. Thật vậy, một cây T với gốc r và các cây con của gốc theo thứ tự từ trái sang phải là T_1, T_2, ..., T_n, $T = (r, T_1, T_2, ..., T_n)$ tương ứng với rừng $F = (T_1, T_2, ..., T_n)$ và ngược lại.

4.2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÂY.

Trong mục 1 chúng ta đã trình bày cấu trúc toán học cây. Để có một mô hình dữ liệu cây, ta cần phải xác định các phép toán có thể thực hiện được trên cây. Cũng như với danh sách, các phép toán có thể thực hiện được trên cây rất đa dạng và phong phú. Trong số đó, có một số phép toán cơ bản được sử dụng thường xuyên để thực hiện các phép toán khác và thiết kế các thuật toán trên cây.

4. 2.1. *Các phép toán cơ bản trên cây.*

1. Tìm cha của mỗi đỉnh.

Giả sử x là đỉnh bất kỳ trong cây T. Hàm Parent(x) xác định cha của đỉnh x. Trong trường hợp đỉnh x không có cha (x là gốc) thì giá trị của hàm Parent (x) là một ký hiệu đặc biệt nào đó khác với tất cả các đỉnh của cây, chẳng hạn $. Như vậy nếu parent (x) = $ thì x là gốc của cây.

2. Tìm con bên trái ngoài cùng (con trưởng) của mỗi đỉnh.

Hàm EldestChild (x) cho ta con trưởng của đỉnh x. Trong trường hợp x là lá (x không có con) thì EldestChild (x) = $.

3. Tìm em liền kể của mỗi đỉnh.

Hàm NextSibling (x) xác định em liền kề của đỉnh x. Trong trường hợp x không có em liền kề (tức x là con ngoài cùng bên phải của một đỉnh nào đó) thì NextSibling(x) = $.

Ví dụ. Giả sử T là cây đã cho trong hình 4.1. Khi đó Parent(e) = b, Parent(a) = $, EldestChild (c) = f, EldestChild (k) = $, NextSibling (g) = h, NextSibling (h) = $.

4.2.2. Đi qua cây (duyệt cây).

Trong thực tiễn chúng ta gặp rất nhiều bài toán mà việc giải quyết nó được qui về việc đi qua cây (còn gọi là duyệt cây), "thăm" tất cả các đỉnh của cây một cách hệ thống.

Có nhiều phương pháp đi qua cây. Chẳng hạn, ta có thể đi qua cây lần lượt từ mức 0, mức 1,... cho tới mức thấp nhất. Trong cùng một mức ta sẽ thăm các đỉnh từ trái sang phải. Ví dụ, với cây trong hình 4.1, danh sách các đỉnh lần lượt được thăm là (a, b, c, d, e, f, g,h, i, j, k). Đó là phương pháp đi qua cây theo bề rộng.

Tuy nhiên, ba phương pháp đi qua cây theo các hệ thống sau đây là quan trọng nhất : đi qua cây theo thứ tự Preorder, Inorder và Postorder. Danh sách các đỉnh của cây theo thứ tự Preordor, Inorder, và Postorder (gọi tắt là danh sách Preorder, Inorder, và Postorder) được xác định đệ qui như sau :

1. Nếu T là cây gồm một đỉnh duy nhất thì các danh sách Preordor, Inorder và Postorder chỉ chứa một đỉnh đó.

2. Nếu T là cây có gốc r và các cây con của gốc là T_1, T_2, ..., T_k (hình 4.2) thì

2a. Danh sách Preorder các đỉnh của cây T bắt đầu là r, theo sau là các đỉnh của cây con T_1 theo thứ tự Preordor, rồi đến các đỉnh của cây con T_2 theo thứ tự Preorder, ..., cuối cùng là các đỉnh của cây con T_k theo thứ tự Preordor.

2b. Danh sách Inorder các đỉnh của cây T bắt đầu là các đỉnh của cây con T_1 theo thứ tự Inordor, rồi đến gốc r, theo sau là các đỉnh của các cây con T_2, ... T_k theo thứ tự Inordor.

2c. Danh sách Postorder các đỉnh của cây T lần lượt là các đỉnh của các cây con T_1, T_2,...T_k, theo thứ tự Postorder sau cùng là gốc r.

Ví dụ, khi đi qua cây trong hình 4.1 theo thứ tự Preordor ta được danh sách các đỉnh là (a, b, d, e, i, j, c, f, g, k, h). Nếu đi qua cây theo thứ tự Inorder, ta có danh sách (d, b, i, e, j, a, f, c, k, g, h). Còn danh sách Postorder là (d, i, j, e, b, f, k, g, h, c, a).

Phương pháp đi qua cây theo thứ tự Preorder còn được gọi là kỹ thuật *đi qua cây theo độ sâu*. Đó là một kỹ thuật quan trọng thường được áp dụng để tìm kiếm nghiệm của các bài toán. Gọi là đi qua cây theo độ sâu, bởi vì khi ta đang ở một đỉnh x nào đó của cây (chẳng hạn, đỉnh b trong cây ở hình 4.1), ta cố gắng đi sâu xuống đỉnh còn chưa được thăm ngoài cùng bên trái chừng nào có thể được (chẳng hạn, đỉnh d trong cây ở hình 4.1) để thăm đỉnh đó. Nếu tất cả các đỉnh con của x đã được thăm (tức là từ x không thể đi sâu xuống được) ta quay lên tìm đến cha của x. Tại đây ta lại cố gắng đi sâu xuống đỉnh con chưa được thăm. Chẳng hạn, trong cây ở hình 4.1, ta đang ở đỉnh f, tại đây không thể đi sâu xuống, ta quay lên cha của f là đỉnh c. Tại c có thể đi sâu xuống thăm đỉnh g, từ g lại có thể đi sâu xuống thăm đỉnh k. Quá trình trên cứ tiếp tục cho tới khi nào toàn bộ các đỉnh của cây đã được thăm.

Đối lập với kỹ thuật đi qua cây theo độ sâu là kỹ thuật *đi qua cây theo bề rộng* mà chúng ta đã trình bày. Trong kỹ thuật này, khi đang ở thăm đỉnh x nào đó của cây, ta đi theo bề ngang sang bên phải tìm đến em liền kề của x để thăm. Nếu x là đỉnh ngoài cùng bên phải, ta đi xuống mức sau thăm đỉnh ngoài cùng bên trái, rồi lại tiếp tục đi theo bề ngang sang bên phải.

Sau đây chúng ta sẽ trình bày các thủ tục đi qua cây theo các thứ tự Preorder, Inorder, Postorder và đi qua cây theo bề rộng.

Sử dụng các phép toán cơ bản trên cây và định nghĩa đệ qui của thứ tự Preorder, chúng ta dễ dàng viết được thủ tục đệ qui đi qua cây theo thứ tự Preorder. Trong thủ tục, chúng ta sẽ sử dụng thủ tục Visit (x) (thăm đỉnh x) nó được cài đặt tuỳ theo từng ứng dụng. Các biến A, B trong thủ tục là các đỉnh (Node) của cây.

```
procedure    Preorder ( A : Node) ;
{Thủ tục đệ qui đi qua cây gốc A theo thứ tự Preorder}
```

```
var B : Node
begin
        Visit (A) ;
        B : = EldestChild (A)
        while B < > $ do
                begin
                        Preorder ( B) ;
                        B : = NexSibling (B)
                end ;
        end ;
```

Một cách tương tự, ta có thể viết được các thủ tục đệ qui đi qua cây theo thứ tự Inorder và Postorder.

```
procedure   Inorder ( A : Node) ;
{Thủ tục đệ qui đi qua cây gốc A theo thứ tự Inorder }
var    B : Node ;
begin
        B := EldestChild (A) ;
        if B < > $ then begin Inorder (B) : B : = NextSibling (B) end ;
        Visit (A) ;
        while B < > $ do
                begin
                        Inorder (B) ;
                        B : = NextSibling (B)
                end ;
        end ;


procedure   Postorder (A : Node) ;
{Thủ tục đệ qui đi qua cây gốc A theo thứ tự Postorder}
    var       B : Node ;
    begin
      B : = EldestChild (A) ;
```

```
        while B < > $ do
            begin
                Postorder (B) ;
                B : = NextSibling (B)
            end ;
         Visit (A)
        end ;
```

Chúng ta cũng có thể viết được các thủ tục không đệ qui đi qua cây theo các thứ tự Preordor, Inorder và Postorder. Chúng ta sẽ viết một trong ba thủ tục đó (các thủ tục khác giành lại cho độc giả). Tư tưởng cơ bản của thuật toán không đệ qui đi qua cây theo thứ tự Preorder là như sau. Chúng ta sẽ sử dụng một stack S để lưu giữ các đỉnh của cây. Nếu ở một thời điểm nào đó ta đang ở thăm đỉnh x thì stack sẽ lưu giữ đường đi từ gốc đến x, gốc ở đáy của stack còn x ở đỉnh stack. Chẳng hạn, với cây trong hình 4.1, nếu ta đang ở thăm đỉnh i, thì stack sẽ lưu (a, b, e, i) và i ở đỉnh stack

```
procedure       Preorder ( A : Node) ;
{Thủ tục không đệ qui đi qua cây theo thứ tự Preorder}
 var   B : Node ;
       S : Stack ;
begin
       Intealize (S) ; {khởi tạo stack rỗng}
       B : = A ;
       while B < > $ do
            begin
                Visit (B) ;
                Push (B, S) ; {đẩy B vào stack}
                B : = EldestChild (B)
            end ;
       while not Empty (S) do
            begin
                Pop (S,B) ;{loại phần tử ở đỉnh stack và gán cho
B]
```

```
            B : = NexSibling (B) ;
            if  B < > $ then
              while B < > $ do
                  begin
                        Visit (B) ;
                        Push (B, S) ;
                        B : = EldestChild (B)
                  end ;
            end ;
      end ;
```

Sau đây chúng ta sẽ trình bày thuật toán đi qua cây theo bề rộng, chúng ta sẽ sử dụng hàng Q để lưu giữ các đỉnh theo thứ tự đã được thăm, đầu hàng là đỉnh ngoài cùng bên trái mà ta chưa thăm các con của nó, còn cuối hàng là đỉnh ta đang ở thăm. Chẳng hạn, với cây trong hình 4.1, nếu ta đang ở thăm đỉnh i thì trong hàng sẽ chứa các đỉnh (f, g, h, i) trong đó f ở đầu hàng và i ở cuối hàng. Khi loại một phần tử ở đầu hàng, chúng ta sẽ lần lượt thăm các con của nó (nếu có) và khi thăm đỉnh nào thì đưa đỉnh đó vào cuối hàng. Chúng ta có thủ tục sau

```
procedure   BreadthTraverse ( A : Node) ;
{Thủ tục đi qua cây gốc A theo bề rộng }
var    B : node ;
       Q : Queue ;
begin
       Initialize (Q) ; {khởi tạo hàng rỗng}
       Visit (A) ;
       Add (A, Q) ; {đưa gốc A vào hàng Q}
       while not Empty (Q) do
          begin
            Delete (Q, B) ; {loại phần tử đầu hàng và gán cho B}
            B : = EldestChild (B) ;
            while B < > $ do
```

```
            begin
                Visit (B) ;
                Add (B, Q) ;
                B : = NextSibling (B)
            end ;
        end ;
    end ;
```

4.3. CÀI ĐẶT CÂY.

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày các phương pháp cơ bản cài đặt cây và nghiên cứu khả năng thực hiện các phép toán cơ bản trên cây trong mỗi cách cài đặt.

4.3.1. Biểu diễn cây bằng danh sách các con của mỗi đỉnh.

Phương pháp thông dụng để biểu diễn cây là, với mỗi đỉnh của cây ta thành lập một danh sách các đỉnh con của nó theo thứ tự từ trái sang phải.

1. Cài đặt bởi mảng.

Trong cách cài đặt này, ta sẽ sử dụng một mảng để lưu giữ các đỉnh của cây. Mỗi thành phần của mảng là một tế bào chứa thông tin gắn với mỗi đỉnh và danh sách các đỉnh con của nó. Danh sách các đỉnh con của một đỉnh có thể biểu diễn bởi mảng hoặc bởi danh sách liên kết. Tuy nhiên, vì số con của mỗi đỉnh có thể thay đổi nhiều, cho nên ta sẽ sử dụng danh sách liên kết. Như vậy mỗi tế bào mô tả đỉnh của cây là một bản ghi gồm hai trường : trường infor chứa thông tin gắn với đỉnh, trường Child là con trỏ tới danh sách các con của đỉnh đó. Giả sử các đỉnh của cây được đánh số từ 1 đến N với cách cài đặt này, ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây như sau :

```
const N = ... ; { N là số lớn nhất các đỉnh mà cây có thể có }
type   pointer = ^ Member :
       Member = record
                    id : 1..N ;
                    next : pointer
                end ;
       Node = record
```

```
            infor : item ;
            child : pointer
        end ;
Tree = array [1 ... N] of  Node ;
```

Trong khai báo trên, Member biểu diễn các thành phần của danh sách các con, còn Node biểu diễn các đỉnh của cây. Với cách cài đặt này, cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây trong hình 4.4a được minh hoạ trong hình 4.4b.

Ta có nhận xét rằng, trong cách cài đặt này, với mỗi đỉnh k ta xác định ngay con trưởng của nó. Chẳng hạn, với cây trong hình 4.4b, con trưởng của đỉnh 3 là đỉnh 6, con trưởng của đỉnh 5 là 9, còn đỉnh 6 không có con. Phép toán tìm con trưởng EldestChild (k) có thể được mô tả bởi hàm sau.

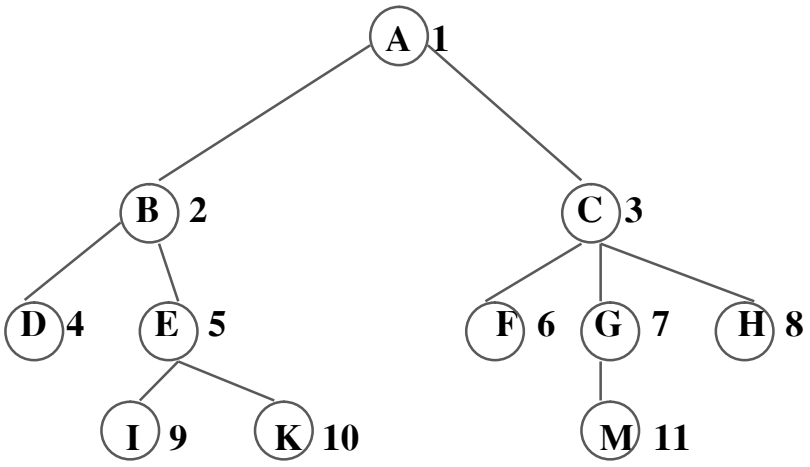
```
function    EldestChild ( k : 1 ...N ; T : Tree) : 0 ...N ;
    var     P : pointer ;
  begin
    if T[k] < > nil then
        begin
            P : = T[k]. child ;
            EldestChild : = P^. id ;
        end   else    EldestChild : = 0
    end ;
```

Tuy nhiên trong cách cài đặt này, việc tìm cha và em liền kề của mỗi đỉnh lại không đơn giản. Chẳng hạn, để tìm cha của đỉnh k, ta phải duyệt các danh sách các con của mỗi đỉnh. Nếu phát hiện ra trong danh sách các con của đỉnh m có chứa k thì Parent (k) = m. Hàm Parent (k) được xác định như sau :

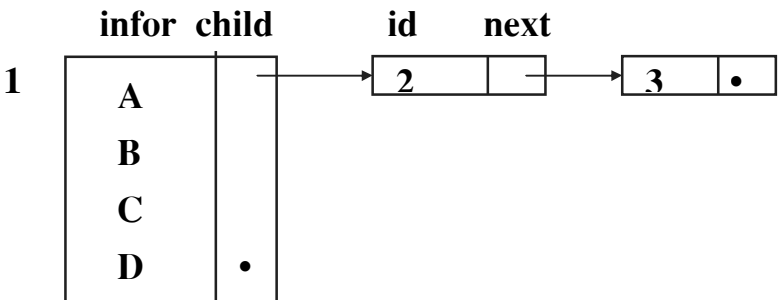
```
function    Parent (k : 1 ...N ; T : Tree) : 0 ...N ;
    var     P : pointer ;
            i : 1 ... N ;
            found : boolean ;
```

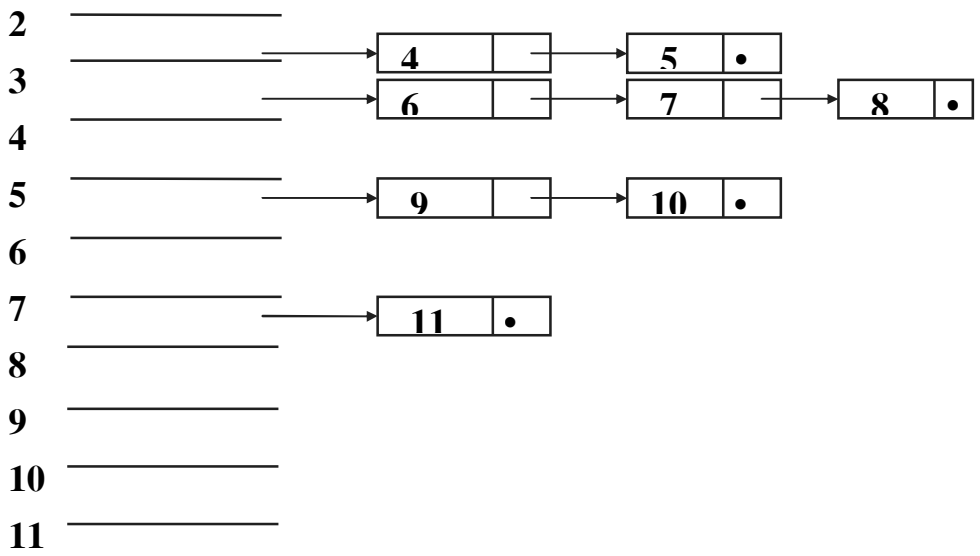
```
        begin
              i : = 1 ;
              found : = false ;
while ( i < = N) and (not found) do
        begin
              P : = T[i].child ;
              while (P < > nil) and (not found) do
                if P^.id = k then
                     begin
                          Parent : = i :
                          found : = true ;
                     end else P : = P^.next ;
              i: = i + 1
          end ;
        if not found then Parent : = 0 ;
    end ;
```

Một cách tương tự (duyệt các danh sách các con), ta cũng có thể tìm được em liền kề của mỗi đỉnh. Mô tả chi tiết hàm NextSibling được để lại xem như bài tập.



(a)





(b)

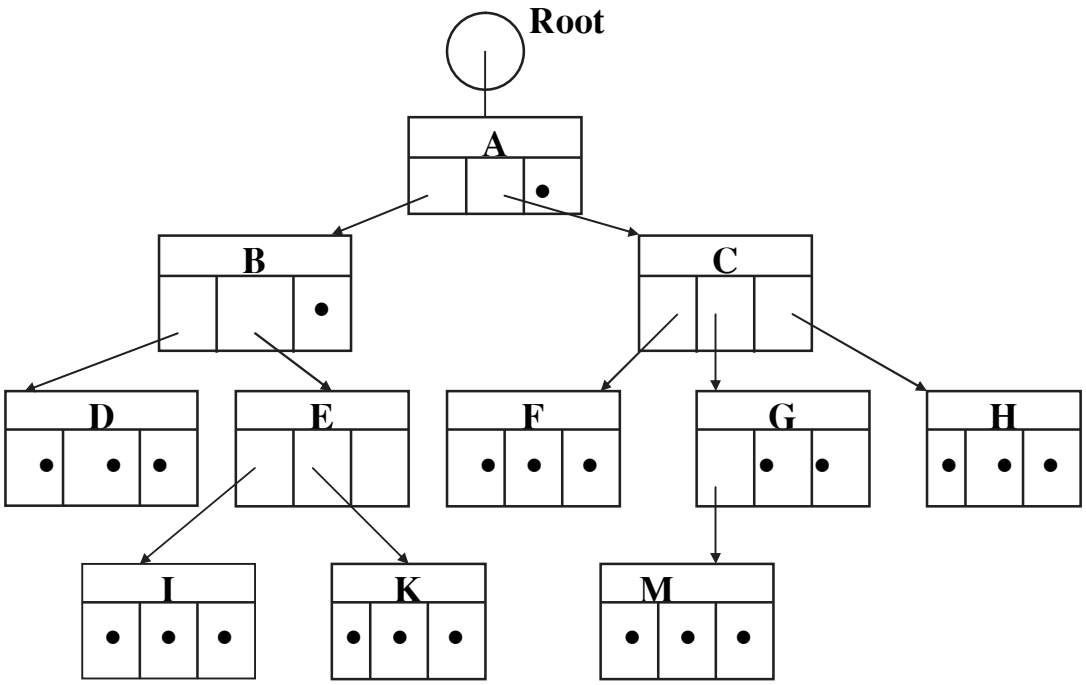
Hình 4.4 Cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây

2. Cài đặt bởi con trỏ.

Nếu không dùng mảng để lưu giữ các đỉnh của cây, ta có thể sử dụng các con trỏ trỏ tới các đỉnh của cây. Tại mỗi đỉnh, ta sẽ sử dụng một danh sách các con trỏ trỏ tới các con của nó, danh sách này được cài đặt bởi mảng các con trỏ. Một con trỏ Root được sử dụng để trỏ tới gốc của cây. Ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây trong cách cài đặt này như sau.

```
const K = ..... ; {K là số tối đa các con của mỗi đỉnh}
type   pointer = ^Node ;
       Note = record
                  infor : item ;
                  child : array [1...K] of pointer
              end ;
              var Root : pointer ;
```

Với cách cài đặt này, cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây trong hình 4.4a được minh hoạ trong hình 4.5.



Hình 4.5 Cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây

Giả sử P là một con trỏ trỏ tới một đỉnh nào đó trong cây, ta sẽ gọi đỉnh này là đỉnh P. Sau đây ta sẽ xét xem các phép toán tìm con trưởng của nó EldesChild (P), tìm cha của nó Parent (P) và tìm em liền kề NexSibling (P) được thực hiện như thế nào. Dễ dàng thấy rằng, cũng như trong cách cài đặt bởi mảng, ta có thể xác định được ngay con trưởng của một đỉnh. Bạn đọc tự viết lấy hàm EldestChild. Tư tưởng của thuật toán tìm cha của đỉnh P cũng không có gì khác trước, khi cây cài đặt bởi mảng, tức là ta cũng phải duyệt các đỉnh con của mỗi đỉnh. Song trước kia, khi các đỉnh của cây được lưu trong mảng, việc đi lần lượt qua các đỉnh của cây để xét các con của nó được thực hiện rất dễ dàng. Còn ở đây ta phải sử dụng một hàng (Queue) H để lưu các đỉnh đã được xét. Đầu tiên hàng chứa gốc Root của cây. Tại mỗi thời điểm ta sẽ loại đỉnh Q ở đầu hàng ra khỏi hàng và xét các con của nó. Nếu một trong các đỉnh con của Q là P thì Parent (P) = Q, trong trường hợp ngược lại ta sẽ đưa các đỉnh con của Q vào cuối hàng. Hàm Parent được xác định như sau.

```
function Parent (P : pointer ; Root : pointer) : pointer ;
        var    Q, R : pointer ;
         H :  Queue ;
```

```
        found : boolean ;
    begin
      Initialize (H) ; {khởi tạo hàng rỗng H}
      Addqueue (Root, H) ; {Đưa Root vào hàng}
      found  : = false ;
      while (not Emty (H) and (not found) do
       begin
          DeleteQueue (H, Q) ; {Loại Q khỏi đầu hàng}
          i : = 0 ;
          repeat
             i : = i + 1 ;
             R : = Q^. child [i] ;
             if R < > nil then
                if R = P then
             begin
                    Parent : = Q
                    found : = true
             end  else AddQueue (R, H)
        until found or (R = nil) or (i = N)
      end ;
   if not found then Parent : = nil
  end ;
```

Một cách hoàn toàn tương tự, ta có thể viết được hàm tìm em liền kề NextSibling.

4.3.2. Biểu diễn cây bằng con trưởng và em liền kề của mỗi đỉnh.

Một phương pháp thông dụng khác để biểu diễn cây là, với mỗi đỉnh của cây ta chỉ ra con trưởng và em liền kề của nó.

1. Cài đặt bởi mảng.

Giả sử các đỉnh của cây được đánh số từ 1 đến N. Dùng mảng để lưu giữ các đỉnh của cây, mỗi đỉnh được biểu diễn bởi bản ghi gồm ba

trường, ngoài trường infor, các trường EldestChild và Nexsibling sẽ lưu con trưởng và em liền kề của mỗi đỉnh. Ta có thể khai báo như sau :

```
type   Node = record
                    infor : item ;
                    EldestChild : 0...N ;
                    NextSibling : 0...N
               end ;
       Tree = array[1...N] of Node ;
```

Hình 4.6 Minh hoạ cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây trong hình 4.4a.

Trong cách biểu diễn này, EldestChild và NexSibling được đưa vào làm các trường của bản ghi biểu diễn mỗi đỉnh của cây. Do đó, ta chỉ còn phải xét phép toán tìm cha của mỗi đỉnh. Cũng như trước kia, để tìm cha của một đỉnh k nào đó, ta sẽ lần lượt đi qua các đỉnh của cây, với mỗi đỉnh ta tìm đến các con của nó, cho tới khi tìm thấy đỉnh k. Cụ thể ta có thể mô tả hàm Parent(k) như sau :

```
function Parent (k : 1 ... N ; T : Tree) : 0 ... N ;
    var i, j : 0 ... N ;
        found : boolean ;
    begin
      i : = 1 ;
     found : = false ;
while (i <=N) and (not found) do
    begin
     j : = T[i]. EldestChild ;
     if j = k then begin
                      Parent : = i ;
                      found : = true
                end
    else begin
        j : = T[j]. NextSibling ;
        while (j < > 0) and (not found) do
        if j = k then begin
```

```
                    Parent : = i ;
                    found : = true
                end
            else j : = T[j].NextSibling ;
        end ;
    i : = i+1
end ;
  if not found then Parent : = 0
end ;
```

	infor	EldestChild	NextSibling
1	A	2	0
2	B	4	3
3	C	6	0
4	D	0	5
5	E	9	0
6	F	0	7
7	G	11	8
8	H	0	0
9	I	0	10
10	K	0	0
11	M	0	0

Hình 4.6

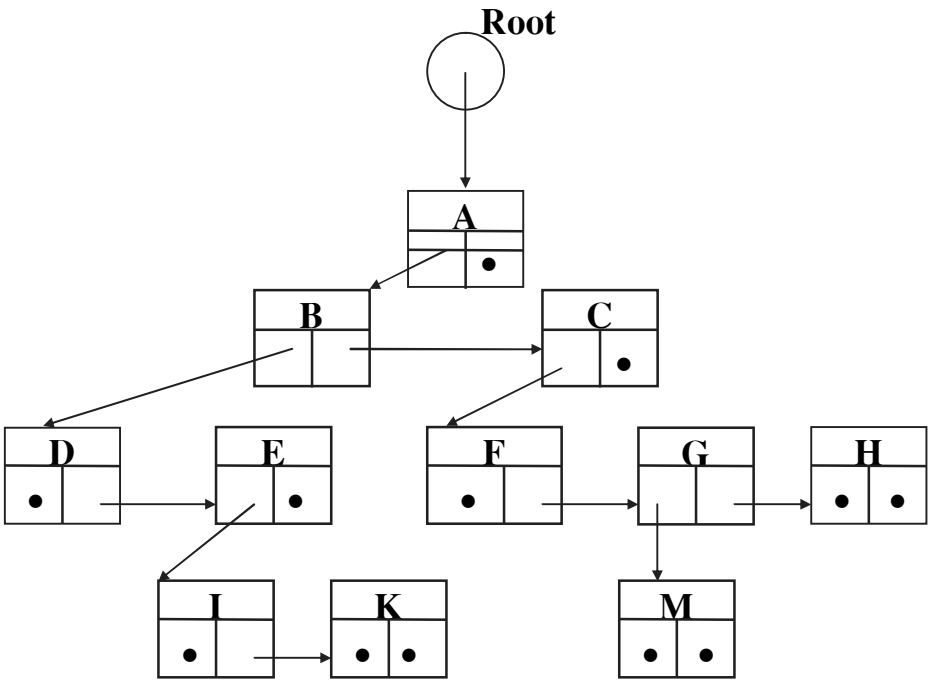
2. ***Cài đặt bởi con trỏ.***

Thay cho dùng mảng, ta có thể sử dụng các con trỏ để cài đặt. Khi đó trong bản ghi Node, các trường EldestChild và NextSibling sẽ là các con trỏ. Cây sẽ được biểu diễn bởi cấu trúc sau.

```
type   pointer = ^Node ;
       Node = record
                  infor : item ;
                  EldestChild : pointer ;
                  NextSibling : pointer ;
```

```
end ;
var Root : pointer ;
```

Trong cách cài đặt này, cây trong hình 4.4a được biểu diễn bởi cấu trúc dữ liệu trong hình 4.7.



Hình 4.7 Cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây

Độc giả hãy tự viết lấy thủ tục tìm cha của đỉnh P, Parent (P), trong đó P là con trỏ, trong cách cài đặt này.

4.3.3. Biểu diễn cây bởi cha của mỗi đỉnh.

Trong một số áp dụng, người ta còn có thể sử dụng cách biểu diễn cây đơn giản sau đây. Giả sử các đỉnh của cây được đánh số từ 1 đến N. Dựa vào tính chất, mỗi đỉnh của cây (trừ gốc) đều có một cha, ta sẽ dùng một mảng A[1...N] để biểu diễn cây, trong đó A[k] = m nếu đỉnh m là cha của đỉnh k. Trong trường hợp cần quan tâm đến các thông tin gắn với mỗi đỉnh, ta cần phải đưa vào mỗi thành phần của mảng trường infor mô tả thông tin ở mỗi đỉnh. Cây được biểu diễn bởi cấu trúc sau.

```
const N = ... ;
type Node = record
```

```
            infor : item ;
            parent : 0 ...N ;
        end ;
    Tree = array [1...N] of Node ;
var T : Tree ;
```

Hình 4.8. minh hoạ cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây trong hình 4.4a.

	infor	parent
1	A	0
2	B	1
3	C	1
4	D	2
5	E	2
6	F	3
7	G	3
8	H	3
9	I	5
10	K	5
11	M	5

Hình 4.8 minh hoạ cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây trong hình 4.4a.

4.4. CÂY NHỊ PHÂN.

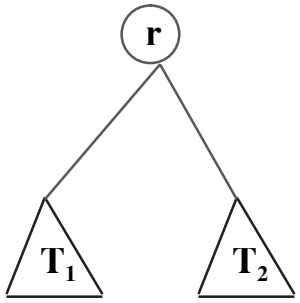
Bắt đầu từ mục này chúng ta sẽ xét một dạng cây đặc biệt : cây nhị phân.

Cây nhị phân là một tập hợp hữu hạn các đỉnh được xác định đệ qui như sau.

1. Một tập trống là cây nhị phân

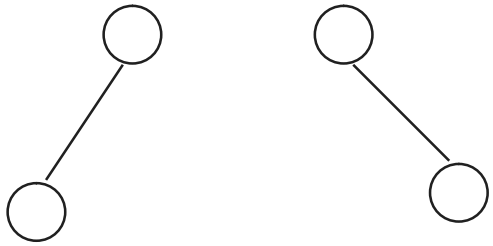
2. Giả sử T_1 và T_2 là hai cây nhị phân không cắt nhau ($T_1 \cap T_2 = \phi$) và r là một đỉnh mới không thuộc T_1, T_2. Khi đó ta có thể thành lập một

cây nhị phân mới T với gốc r có T_1 là cây con bên trái, T_2 là cây con bên phải của gốc. Cây nhị phân T được biểu diễn bởi hình 4.9.



Hình 4.9. Cây nhị phân có gốc r, cây con trái T_1, cây con phải T_2.

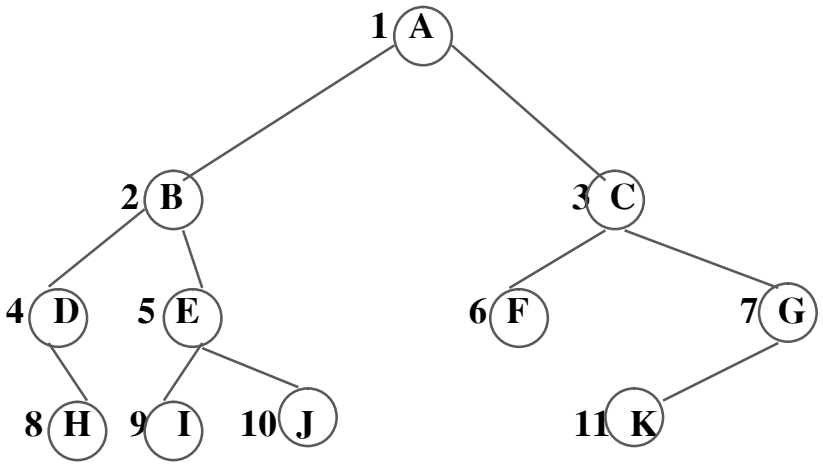
Cần lưu ý rằng, cây (cây có gốc) và cây nhị phân là hai khái niệm khác nhau. Cây không bao giờ trống, nó luôn luôn chứa ít nhất một đỉnh, mỗi đỉnh có thể không có, có thể có một hay nhiều cây con. Còn cây nhị phân có thể trống, mỗi đỉnh của nó luôn luôn có hai cây con được phân biệt là cây con bên trái và cây con bên phải. Chẳng hạn, hình 4.10 minh hoạ hai cây nhị phân khác nhau. Cây nhị phân trong hình 4.10a có cây con trái của gốc gồm một đỉnh, còn cây con phải trống. Cây nhị phân trong hình 4.10b có cây con trái của gốc trống, còn cây con phải gồm một đỉnh. Song ở đây ta chỉ có một cây : đó là cây mà gốc của nó chỉ có một cây con gồm một đỉnh.



a) **b)**

Hình 4.10. Hai cây nhị phân khác nhau

Từ định nghĩa cây nhị phân, ta suy ra rằng, mỗi đỉnh của cây nhị phân chỉ có nhiều nhất là hai đỉnh con, một đỉnh con bên trái (đó là gốc của cây con trái) và một đỉnh con bên phải (đó là gốc của cây con phải).



Hình 4.11. Một cây nhị phân

Cài đặt cây nhị phân.

Phương pháp tự nhiên nhất để biểu diễn cây nhị phân là chỉ ra đỉnh con trái và đỉnh con phải của mỗi đỉnh.

Ta có thể sử dụng một mảng để lưu giữ các đỉnh của cây nhị phân. Mỗi đỉnh của cây được biểu diễn bởi bản ghi gồm ba trường : trường infor mô tả thông tin gắn với mỗi đỉnh, trường left chỉ đỉnh con trái, trường right chỉ đỉnh con phải. Giả sử các đỉnh của cây được đánh số từ 1 đến max, khi đó cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây nhị phân được khai báo như sau.

```
const       max = N ;
type        Node = record
                    infor : Item ;
                    left : 0 ... max ;
                    right : 0 ... max
                end ;
        Tree = array [1... max] of Node ;
```

Hình 4.12 minh hoạ cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây nhị phân trong hình 4.11.

	infor	left	right
1	A	2	3
2	B	4	5
3	C	6	7
4	D	0	8
5	E	9	10
6	f	0	0
7	g	11	0
8	H	0	0
9	I	0	0
10	J	0	0
11	J	0	0
12	K	0	0

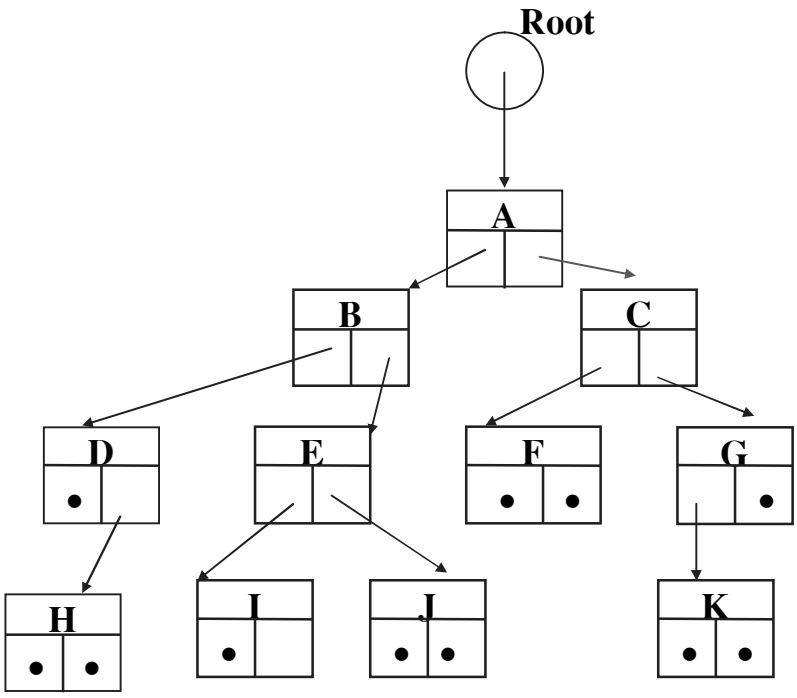
Hình 4.12 Cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây

Ngoài cách cài đặt cây nhị phân bởi mảng, chúng ta còn có thể sử dụng con trỏ để cài đặt cây nhị phân. Trong cách này mỗi bản ghi biểu diễn một đỉnh của cây chứa hai con trỏ : con trỏ left trỏ tới đỉnh con trái, con trỏ right trỏ tới đỉnh con phải. Tức là ta có khai báo sau.

```
type        Pointer = ^ Node ;
              Node = record
                        infor : Item ;
                        left : Pointer ;
                        right : Pointer ;
                    end ;
var    Root : Pointer ;
```

Biến con trỏ Root trỏ tới gốc của cây. Với cách cài đặt này, cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây nhị phân trong hình 4.11 được minh hoạ bởi hình 4.13.

Từ nay về sau chúng ta sẽ chỉ sử dụng cách biểu diễn bằng con trỏ của cây nhị phân. Các phép toán đối với cây nhị phân sau này đều được thể hiện trong cách biểu diễn bằng con trỏ.



Hình 4.13 Cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây

Đi qua cây nhị phân.

Cũng như đối với cây, trong nhiều áp dụng ta cần phải đi qua cây nhị phân, thăm tất cả các đỉnh của cây một cách hệ thống, với mỗi đỉnh của cây ta cần thực hiện một nhóm hành động nào đó được mô tả trong thủ tục Visit. Chúng ta thường đi qua cây nhị phân theo một trong ba thứ tự Preorder, Inorder và Portorder. Sau đây là thủ tục đệ quy đi qua cây theo thứ tự Preorder.

```
procedure   Preorder (Root : Pointer) ;
        begin
            if Root < > nil then
                begin
                    Visit (Root) ;
                    Preorder (Root^. left) ;
                    Preorder (Root^.right) ;
                end
```

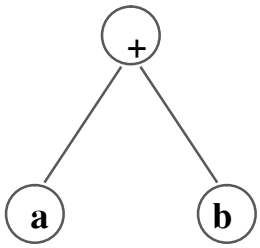
```
end ;
```

Một cách tương tự, ta có thể viết được các thủ tục đệ quy đi qua cây theo thứ tự Inordor và Postorder.

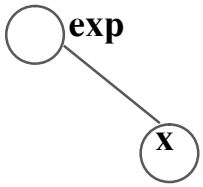
***Một ví dụ cây nhị phân : cây biểu thức*.**

Một ví dụ hay về cây nhị phân là cây biểu thức. Cây biểu thức là cây nhị phân gắn nhãn, biểu diễn cấu trúc của một biểu thức (số học hoặc logic). Mỗi phép toán hai toán hạng (chẳng hạn, +, -, *, /) được biểu diễn bởi cây nhị phân, gốc của nó chứa ký hiệu phép toán, cây con trái biểu diễn toán hạng bên trái, còn cây con phải biểu diễn toán hạng bên phải. Với các phép toán một toán hạng như 'phủ định' hoặc 'lấy giá trị đối', hoặc các hàm chuẩn như exp ( ) hoặc cos( ) thì cây con bên trái rỗng. Còn với các phép toán một toán hạng như phép lấy đạo hàm ( )' hoặc hàm giai thừa ( )! thì cây con bên phải rỗng.

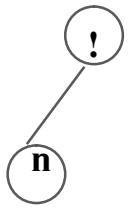
Hình 4.14 minh hoạ một số cây biểu thức.



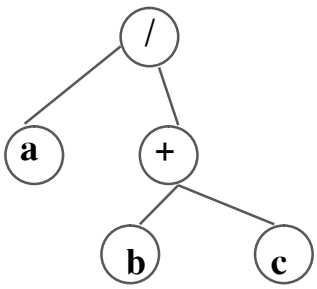
a + b



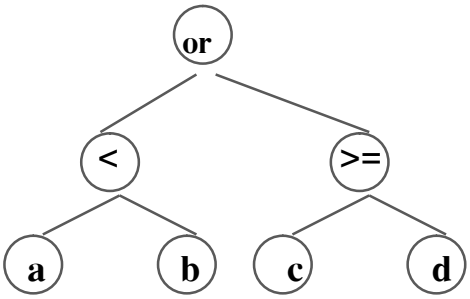
exp(x)



n!



a/ (b+c)



(a<b) or (c> =d)

Hình 4.13. Một số cây biểu thức

Ta có nhận xét rằng, nếu đi qua cây biểu thức theo thứ tự Preorder ta sẽ được biểu thức Balan dạng prefix (ký hiệu phép toán đứng trước các toán hạng). Nếu đi qua cây biểu thức theo thứ tự Postorder, ta có biểu thức Balan dạng postfix (ký hiệu phép toán đứng sau các toán hạng); còn theo thứ tự Inorder ta nhận được cách viết thông thường của biểu thức (ký hiệu phép toán đứng giữa hai toán hạng).

4.5. CÂY TÌM KIẾM NHỊ PHÂN.

Cây nhị phân được sử dụng trong nhiều mục đích khác nhau. Tuy nhiên việc sử dụng cây nhị phân để lưu giữ và tìm kiếm thông tin vẫn là một trong những áp dụng quan trọng nhất của cây nhị phân. Trong mục này chúng ta sẽ xét một lớp cây nhị phân đặc biệt, phục vụ cho việc tìm kiếm thông tin, đó là cây tìm kiếm nhị phân.

Trong thực tiễn, một lớp đối tượng nào đó có thể được mô tả bởi một kiểu bản ghi, các trường của bản ghi biểu diễn các thuộc tính của đối tượng. Trong bài toán tìm kiếm thông tin, chúng ta thường quan tâm đến một nhóm thuộc tính nào đó của đối tượng hoàn toàn xác định được đối tượng. Chúng ta sẽ gọi các thuộc tính này là khoá. Như vậy, khoá là một nhóm thuộc tính của một lớp đối tượng sao cho hai đối tượng khác nhau cần phải có các giá trị khác nhau trên nhóm thuộc tính đó. Từ nay về sau ta giả thiết rằng, thông tin gắn với mỗi đỉnh của cây nhị phân là khoá của đối tượng nào đó. Do đó mỗi đỉnh của cây nhị phân được biểu diễn bởi bản ghi kiểu Node có cấu trúc như sau.

```
type   pointer = ^Node ;
          Node  = record
                     key : keytype ;
                     left : pointer ;
                     right : pointer ;
                end ;
```

Giả sử kiểu của khoá (keytype) là một kiểu có thứ tự, chẳng hạn kiểu nguyên, thực, ký tự, xâu ký tự. Khi đó cây tìm kiếm nhị phân được định nghĩa như sau.

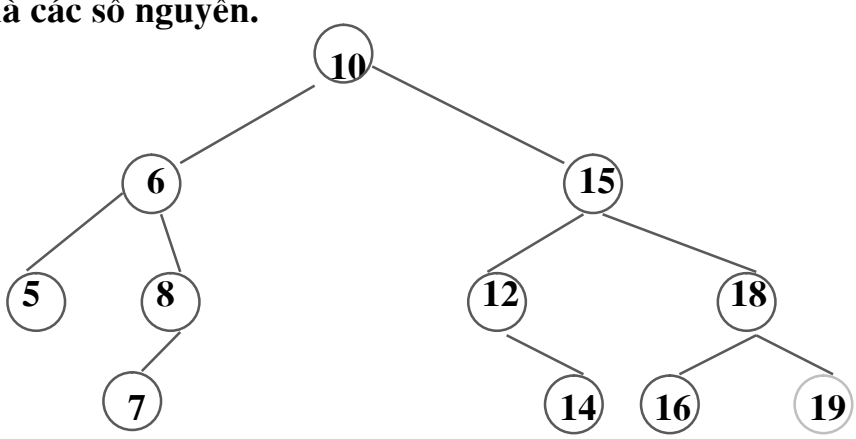
Cây tìm kiếm nhị phân là cây nhị phân hoặc trống, hoặc thoả mãn các điều kiện sau.

1. Khoá của các đỉnh thuộc cây con trái nhỏ hơn khoá của gốc

2. Khoá của gốc nhỏ hơn khoá của các đỉnh thuộc cây con phải của gốc.

3. Cây con trái và cây con phải của gốc cũng là cây tìm kiếm nhị phân.

Hình 4.15 biểu diễn một cây tìm kiếm nhị phân, trong đó khoá của các đỉnh là các số nguyên.



Hình 4.15. Một cây tìm kiếm nhị phân

Các phép toán trên cây tìm kiếm nhị phân

1. *Tìm kiếm*.

Tìm kiếm trên cây là một trong các phép toán quan trọng nhất đối với cây tìm kiếm nhị phân. Giả sử mỗi đỉnh của cây được biểu diễn bởi bản ghi có kiểu Node đã xác định ở trên, biến con trỏ Root trỏ tới gốc cây và x là một giá trị khoá cho trước. Vấn đề là, tìm xem trên cây có chứa đỉnh với khoá là x hay không. Sau đây chúng ta sẽ viết các thủ tục tìm kiếm.

Trong thủ tục tìm kiếm đệ qui dưới đây, chúng ta sẽ sử dụng tham biến P. Đó là con trỏ chay trên các đỉnh của cây, bắt đầu từ gốc, nếu tìm kiếm thành công thì P sẽ trỏ vào đỉnh với khoá x, còn nếu tìm kiếm không kết quả (tức là, trong cây không có đỉnh nào với khoá x) thì P = nil.

```
procedure   Search (x : Key Type ; Root : pointer ; var P : pointer)
;
        begin
                P : = Root ;
                if P < > nil then
                  if x < P^.key then Search (x, P^.left, P)
                        else if x > P^.key then Search(x,P^.right, P)
        end ;
```

Sau đây ta sẽ trình bầy thủ tục tìm kiếm không đệ qui. Trong thủ tục này, ta sẽ sử dụng biến địa phương found có kiểu boolean để điều khiển vòng lặp nó có giá trị ban đầu là false. Nếu tìm kiếm thành công thì found nhận giá trị true, vòng lặp kết thúc và P trỏ vào đỉnh tìm thấy. Còn nếu tìm kiếm không kết quả thì giá trị của Found vẫn là false và giá trị của P là nil.

```
procedure Search (x : keytype, Root : pointer ; var P : pointer) ;
        var found : boolean ;
begin
        P : = Root ;
        found : = false ;
        while (P < > nil) and (not found) do
                if P^.key = x then found : = true
                  else if x < P^.key then P : = P^.left
                        else P : = P^.right ;
        end ;
```

2. Xen vào cây tìm kiếm.

Khi cập nhật thông tin được tổ chức dưới dạng cây tìm kiếm nhị phân, ta thường xuyên phải thực hiện các phép toán xen vào và loại bỏ khỏi cây tìm kiếm. Chúng ta cần phải xen vào cây tìm kiếm nhị phân một đỉnh mới có khoá x cho trước, sao cho sau khi xen vào cây vẫn còn là cây tìm kiếm nhị phân.

Đầu tiên ta viết thủ tục đệ qui xen vào cây tìm kiếm.

```
procedure  Insert (var Root : pointer : x : keytype) ;
{xen vào cây gốc Root đỉnh mới với khoá là x}
var Q : pointer ;
begin
        if Root = nil then
                begin
                        new (Q) ; {tạo ra đỉnh mới }
                        Q^.key : = x ;
                        Q^.left : = nil ;
                        Q^.righi : = nil ;
                        Root : = Q ;
                end
          else with Root^ do
                if x < key then Insert (left, x)
                        else if x > key then Insert (ritht, x)
        end ;
```

Sau đây ta sẽ viết thủ tục không đệ qui xen vào cây tìm kiếm. Trong thủ tục này ta sẽ sử dụng biến con trỏ địa phương P chạy trên các đỉnh của cây bắt đầu từ gốc. Khi đang ở một đỉnh nào đó, P sẽ chạy xuống đỉnh con trái (phải) tuỳ theo khoá của đỉnh đó lớn hơn (nhỏ hơn) khoá x.

Nếu tại một đỉnh nào đó, P cần phải chạy xuống đỉnh con trái (phải), nhưng đỉnh đó không có con trái (phải) thì ta 'treo' đỉnh mới vào bên trái (phải) đỉnh đó. Điều kiện P = nil sẽ kết thúc vòng lặp.

```
procedure Insert (var Root : pointer ; x : keytype) ;
        var P, Q : pointer ;
begin
        new (Q) ;
        Q^.key : = x ;
```

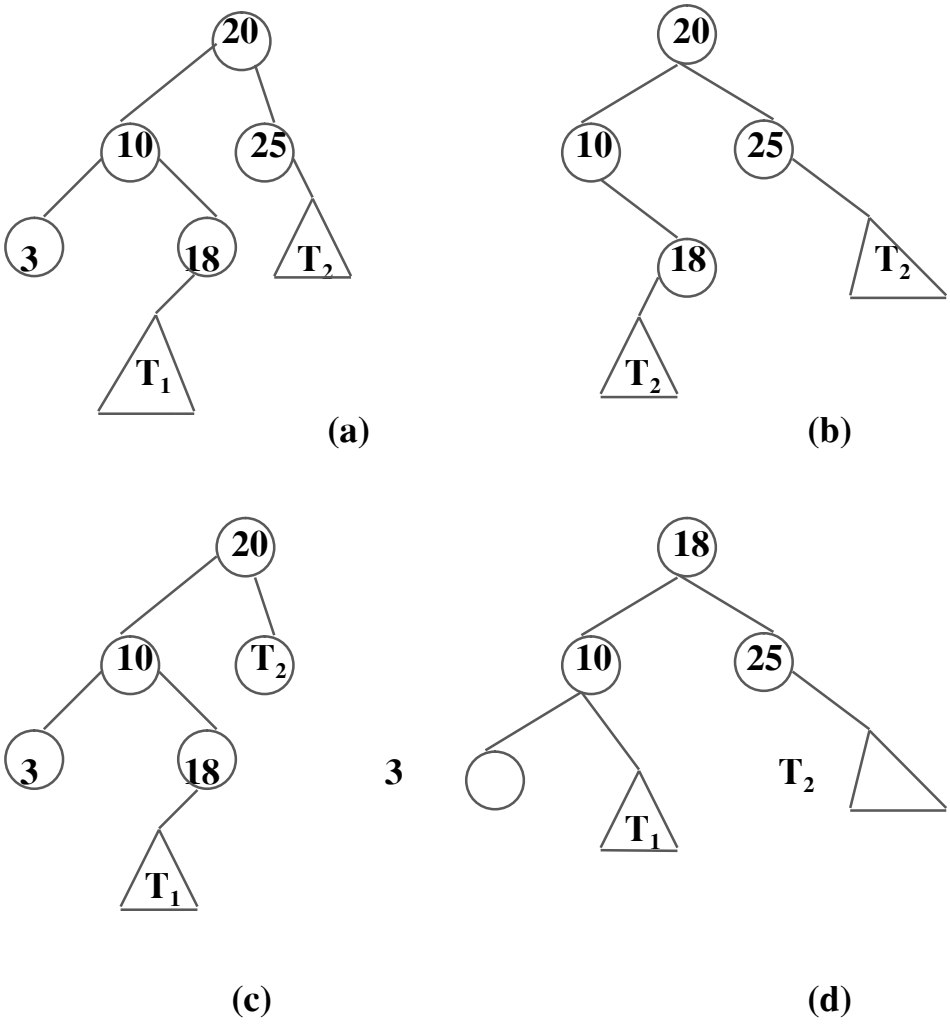
```
Q^.left : = nil ;
Q^.right : = nil ;
if Root = nil then Root : = Q
else begin
        P: = Root ;
        while P < > nil do
          if x < P^.key then
          if P^.left < > nil then P : = P^.left
          else begin
                    P^.left : = Q ;
                    P : = nil
               end
          else if  x > P^.key then
          if P^.right < > nil then P : = P^.right
          else begin
                    P^.right : = Q ;
                    P : = nil
               end
         else P : = nil
   end
end ;
```

3. Loại bỏ khỏi cây tìm kiếm.

Đối lập với phép toán xen vào là phép toán loại bỏ. Chúng ta cần phải loại bỏ khỏi cây tìm kiếm một đỉnh có khóa x cho trước, sao cho sau khi loại bỏ cây vẫn còn là cây tìm kiếm nhị phân.

Việc loại bỏ một đỉnh khỏi cây tìm kiếm không đơn giản như việc xen một đỉnh mới vào cây. Nếu đỉnh cần loại bỏ là lá thì rất đơn giản : ta chỉ cần "cắt" lá đó đi. Nếu đỉnh cần loại bỏ có một trong hai cây con là cây trống, ta chỉ cần "treo" cây con khác trồng vào vị trí của đỉnh bị loại.

Tuy nhiên vấn đề sẽ phức tạp hơn nếu cả hai cây con của đỉnh cần loại đều khác trống. Vấn đề đặt ra là, ta phải xử lý như thế nào đối với hai cây con của đỉnh bị loại. Ta có nhận xét rằng, trong một cây tìm kiếm nhị phân khác trống bất kỳ, đỉnh có khoá nhỏ nhất là đỉnh ngoài cùng bên trái, đỉnh có khoá lớn nhất là đỉnh ngoài cùng bên phải. Do đó, khi đỉnh cần loại bỏ có cả hai cây con khác trống, ta cần phải thay khoá của đỉnh cần loại bỏ bởi khoá của đỉnh ngoài cùng bên phải của cây con trái (hoặc đỉnh ngoài cùng bên trái của cây con phải), rồi loại bỏ đỉnh ngoài cùng bên phải của cây con trái (hoặc đỉnh ngoài cùng bên trái của cây con phải) (xem hình 4.16)



Hình 4.16 (a) Cây T ban đầu ; (b) Cây T sau khi loại đỉnh 3 (lá)

(c) Cây T sau khi loại đỉnh 25 (chỉ có một cây con khác trống) (d) Cây T sau khi loại đỉnh 20 (cả hai cây con khác trống).

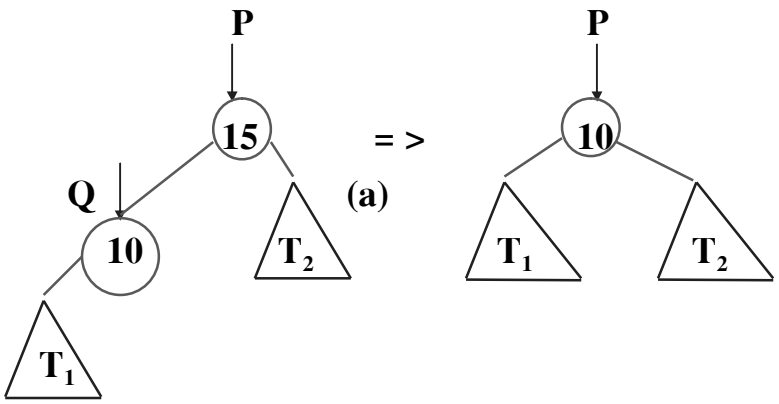
Thuật toán loại bỏ đã trình bầy được mô tả bởi thủ dục Del. Thủ tục này loại khỏi cây đỉnh mà con trỏ P trỏ tới, trong đó P là con trỏ liên kết trong cây.

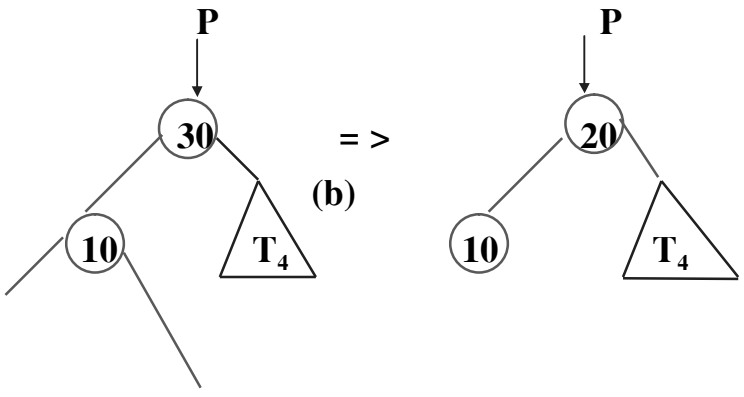
```
procedure  Del (var P : pointer) ;
    var Q , Q1 : pointer ;
    begin
        if P^.right = nil then
            begin
                Q : = P ;
                 P : = P^.left ;
            end else
        if P^.left = nil  then
            begin
                Q: = P ;
                P : = P^.right
            end    else
            begin Q : = P^.left ;
              if Q^.right = nil then {xem hình 4.17a}
                begin
                  P^.key : = Q^.key ;
                  P^.left : = Q^.left
                end  else
                begin
                  repeat
                    Q1 : = Q ;
                    Q : = Q^.right
                until Q^.right = nil ;
```

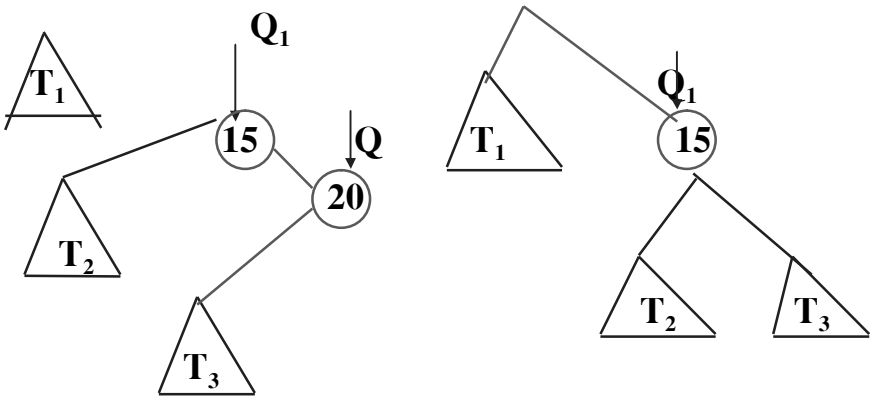
```
                    P^.key : = Q^.key ;
                    Q1^.right : = Q^.left {xem hình 4.17b}
                end ;
            end ;
        dispose (Q)
    end ;
```

Sau đây chúng ta sẽ viết thủ tục loại bỏ khỏi cây gốc Root đỉnh có khoá x cho trước. Đó là thủ tục đệ qui, nó tìm ra đỉnh có khoá x, rồi sau đó áp dụng thủ tục Del để loại đỉnh đó khỏi cây.

```
procedure  Delete (var Root : pointer : x : keytype) ;
  begin
    if Root < > nil then
    if x < Root^.key  then   Delete (Root^.left, x) else
    if x > Root^.key  then   Delete (Root^.right, x)
    else  Del (Root) ;
end ;
```







Hình 4.17

4.6. THỜI GIAN THỰC HIỆN CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÂY TÌM KIẾM NHỊ PHÂN.

Trong mục này chúng ta sẽ đánh giá thời gian trung bình để thực hiện các phép toán trên cây tìm kiếm nhị phân. Ta có nhận xét rằng, thời gian thực hiện phép tìm kiếm là số phép so sánh giá trị khoá x cho trước với khoá của các đỉnh nằm trên đường đi từ gốc tới một đỉnh nào đó trong cây. Do đó thời gian thực hiện phép tìm kiếm (cũng thế, thời gian thực hiện các phép xen vào và loại bỏ) là độ dài của đường đi từ gốc tới một đỉnh nào đó trong cây.

Dễ dàng thấy rằng, trong trường hợp tốt nhất, cây tìm kiếm nhị phân với n đỉnh là cây đầy đủ (tất cả các đỉnh đều có hai con trừ các đỉnh ở mức thấp nhất), thì độ cao của cây xấp xỉ bằng logn (ta ký hiệu logn = $\log_2 n$). Thật vậy, gọi mức thấp nhất là k, ta có

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{k-1} < n$$

$$1 + 2 + ... \quad + 2^k \geq n$$

hay $2^k - 1 < n$ và $2^{k+1} - 1 \geq n$. Từ đó, ta có $\log(n+1) - 1 \leq k < \log(n+1)$.

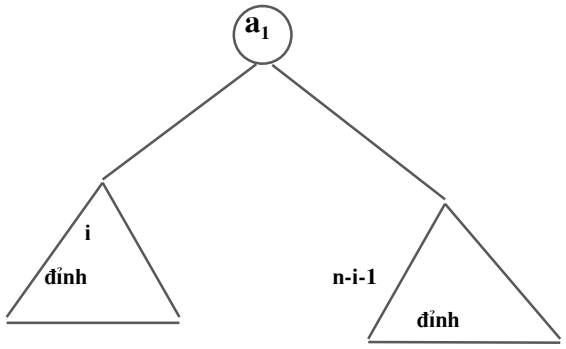
Tức là $k \approx \log n$.

Do đó trong trường hợp này, thời gian thực hiện các phép toán là 0(logn).

Trong trường hợp xấu nhất, cây tìm kiếm nhị phân suy biến thành danh sách liên kết. Điều này xảy ra, chẳng hạn, khi ta xây dựng cây bằng cách xen vào cây trống lần lượt n đỉnh với các giá trị khoá đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó ta có cây mà mỗi đỉnh đều có cây con trái trống, tức là cây trở thành danh sách liên kết. Trong trường hợp này thời gian thực hiện các phép toán là 0(n).

Câu hỏi được đặt ra là, thời gian trung bình để thực hiện các phép toán sẽ như thế nào, trong trường hợp tổng quát : cây tìm kiếm là cây "ngẫu nhiên", tức là cây được xây dựng nên từ cây trống bằng cách xen vào n đỉnh với các giá trị khoá được sắp xếp một cách ngẫu nhiên.

Giả thiết cây tìm kiếm T được xây dựng nên từ cây rỗng bằng cách xen vào các đỉnh có khoá lần lượt là a_1, a_2, ... , a_n, trong đó dãy các giá trị khoá trên được sắp xếp một cách ngẫu nhiên. Giả sử trong dãy giá trị khoá trên có i phần tử nhỏ hơn a_1 và n - i - 1 phần tử lớn hơn a_1. Khi đó cây con trái của gốc có i đỉnh, và cây con phải có n - i - 1 đỉnh (xem hình 4.18)



Hình 4.18. Cây tìm kiếm nhị phân "ngẫu nhiên"

Gọi S (n) là độ dài trung bình của đường đi từ gốc tới đỉnh bất kỳ trong cây n đỉnh. Ta có S(1) = 0. Giả sử S(i) là độ dài trung bình của đường đi ở cây con trái, S(n-i-1) là độ dài trung bình của đường đi ở cây con phải. Do đó độ dài trung bình của đường đi trong cây T với cây con trái của gốc có i đỉnh là :

$$\frac{i}{n}(S(i)+1)+\frac{n-i-1}{n}(S(n-i-1)+1)$$

Bằng cách lấy trung bình cộng của tổng trên với mọi i đi từ 0 tới n-1, ta nhận được độ dài trung bình của đường đi trong cây n đỉnh là

$$S(n)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{i}{n}\big(S(i)+1\big)+\frac{n-i-1}{n}\big(S(n-i-1)+1\big)\right]$$

Trong tổng trên, lưu ý rằng $\sum_{i=0}^{n-1} iS(i) = \sum_{n=0}^{n-1}(n-i-1)S(n-i-1)$

Do đó ta có

$$s(n) = \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} iS(i) \qquad (1)$$

Từ (1) ta nhận được các đẳng thức sau

$$S(n) = \frac{n-1}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2}S(n-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} iS(i) \qquad (2)$$

$$S(n-1) = \frac{n-2}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=0}^{n-2} iS(i) \qquad (3)$$

Từ (3) ta có $$\frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-2} iS(i) = \frac{(n-1)^2}{n^2}S(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (2) ta nhận được

$$S(n) = \frac{n^2-1}{n^2}S(n-1) + \frac{2(n-1)}{n^2}$$

Từ đó ta có đánh giá

$$S(n) < S(n-1)\frac{2}{n}$$

Bằng cách thế liên tiếp, ta nhận được

$$S(n) < 2H_n - 2 \qquad (5)$$

Trong đó H_n là hàm điều hoà

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Theo công thức Ơle (với hàng số $\gamma \approx 0{,}577$), ta có

$$H_n = \gamma + \ln(n) + \frac{1}{12n^2} + \cdots \qquad (6)$$

Từ (5) và (6), ta có S(n) = 0(logn). Như vậy độ dài trung bình của đường đi từ gốc tới đỉnh bất kỳ trong cây tìm kiếm nhị phân với n đỉnh là 0(logn). Do đó chúng ta có thể kết luận rằng, thời gian trung bình để thực hiện các phép toán trên cay tìm kiếm nhị phân là 0(logn).

4.7. CÂY CÂN BẰNG.

Giả sử ta có một tập hợp dữ liệu nào đó. Vấn đề đặt ra là, ta phải tổ chức các dữ liệu đó như thế nào sao cho việc cập nhật thông tin (tìm kiếm, thêm vào và loại bỏ) được nhanh chóng. Trong mục trước ta đã

thấy rằng, nếu tổ chức dữ liệu dưới dạng cây tìm kiếm nhị phân thì thời gian trung bình thực hiện các phép toán là 0(logn). Trong nhiều áp dụng chúng ta cần thường xuyên thực hiện các phép toán xen vào và loại bỏ khỏi cây tìm kiếm. Điều đó làm cho cây có thể trở nên rất "lệch", trường hợp xấu nhất nó có thể suy biến thành danh sách liên kết. Đối với những cây tìm kiếm lệch, việc thực hiện các phép toán sẽ kém hiệu quả.

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp cây tìm kiếm đặc biệt, trong đó các phép toán tìm kiếm xen vào và loại bỏ đối với cây n đỉnh luôn luôn được thực hiện trong thời gian 0(logn), ngay cả trong trường hợp xấu nhất.

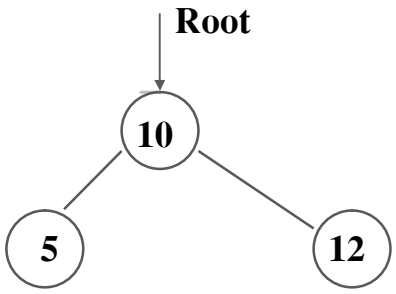
Lớp cây này được các nhà toán học Nga G.M. Adelsen Velskii và E.M. Lendis đưa ra vào năm 1962.

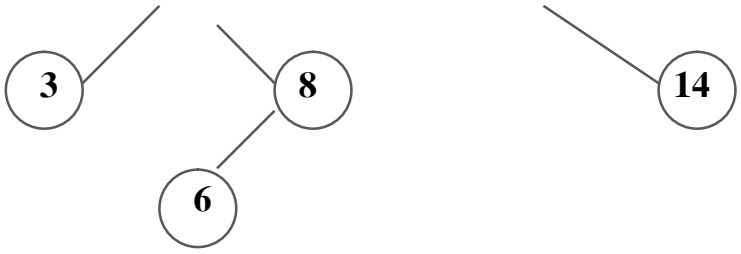
Cây cân bằng (hay còn gọi là AVL-cây) là cây tìm kiếm nhị phân sao cho tại mỗi đỉnh của cây, độ cao của cây con trái và cây con phải khác nhau không quá một.

Để biểu diễn cây cân bằng, ta thêm vào mỗi bản ghi mô tả đỉnh của cây một trường mới bal (balance : cân bằng). Trường này nhận một trong ba giá trị LH (Left Hight : cao bên trái), EH (Equal Hight : hai cây con cao bằng nhau), RH (Right Hight : cao bên phải). Ta sẽ nói đỉnh của cây ở trạng thái cân bằng LH, EH, hoặc RH.

Ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu biểu diễn cây cân bằng như sau.

```
type   pointer   = ^ Node ;
       Node      =  record
                       key : keytype ;
                       left, right : pointer ;
                       bal : (LH, EH, RH)
                    end ;
var    Root : pointer ;
```





Hình 4.19. Một cây cân bằng.

Sau đây chúng ta sẽ xét các phép toán xen vào và loại bỏ trên cây cân bằng

1. Xen vào cây cân bằng.

Việc xen vào cây cân bằng một đỉnh mới với khoá x cho trước được thực hiện bằng cách sau. Đầu tiên ta áp dụng thuật toán xen vào cây tìm kiếm, sau đó "cân bằng" lại các đỉnh mà tại đó tính cân bằng bị phá vỡ (độ cao của hai cây con khác nhau 2).

Giả sử ta cần xen một đỉnh mới vào cây gốc P (P là con trỏ trỏ tới gốc cây). Có thể xẩy ra những trường hợp sau.

1. P = nil (cây trống). Khi xen vào đỉnh mới, ta sẽ được cây cân bằng và P^.bal = EH.

2. P ≠ nil và P^.bal = EH. Trong trường hợp này, khi xen đỉnh mới vào cây con trái hoặc cây con phải của P, dù có làm tăng độ cao của cây con, thì tính cân bằng của đỉnh P vẫn không bị phá vỡ.

3. P ≠ nil và P^.bal = RH (P^.bal = LH). Trong trường hợp này, nếu ta xen đỉnh mới vào cây con trái (cây con phải), thì dù có làm tăng độ cao của cây con, đỉnh P vẫn ở trạng thái cân bằng.

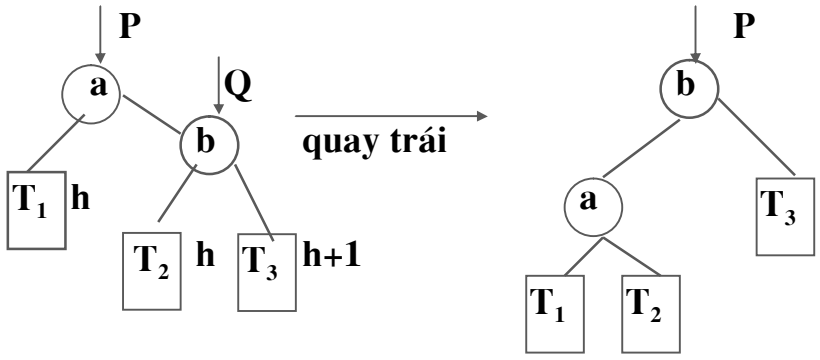
4. P ≠ nil và P^.bal = RH (P^.bal = LH). Giả sử đỉnh mới được xen vào cây con phải (cây con trái) và việc xen vào làm tăng độ cao của cây con. Trong trường hợp này, tính cân bằng tại đỉnh bị phá vỡ : cây con phải của P cao hơn cây con trái 2 (cây con trái của P cao hơn cây con phải 2).

Như vậy chỉ có trường hợp 4) là phá vỡ tính cân bằng tại P. Sau đây ta sẽ đưa ra phương pháp biến đổi cây P để nó trở nên cân bằng tại P, khi tính cân bằng tại P bị vi phạm.

Giả sử P^.bal = RH và đỉnh mới được xen vào cây con phải của P, đồng thời việc xen vào làm tăng độ cao của cây con phải đó.

Gọi Q = P^right. Xét các khả năng sau.

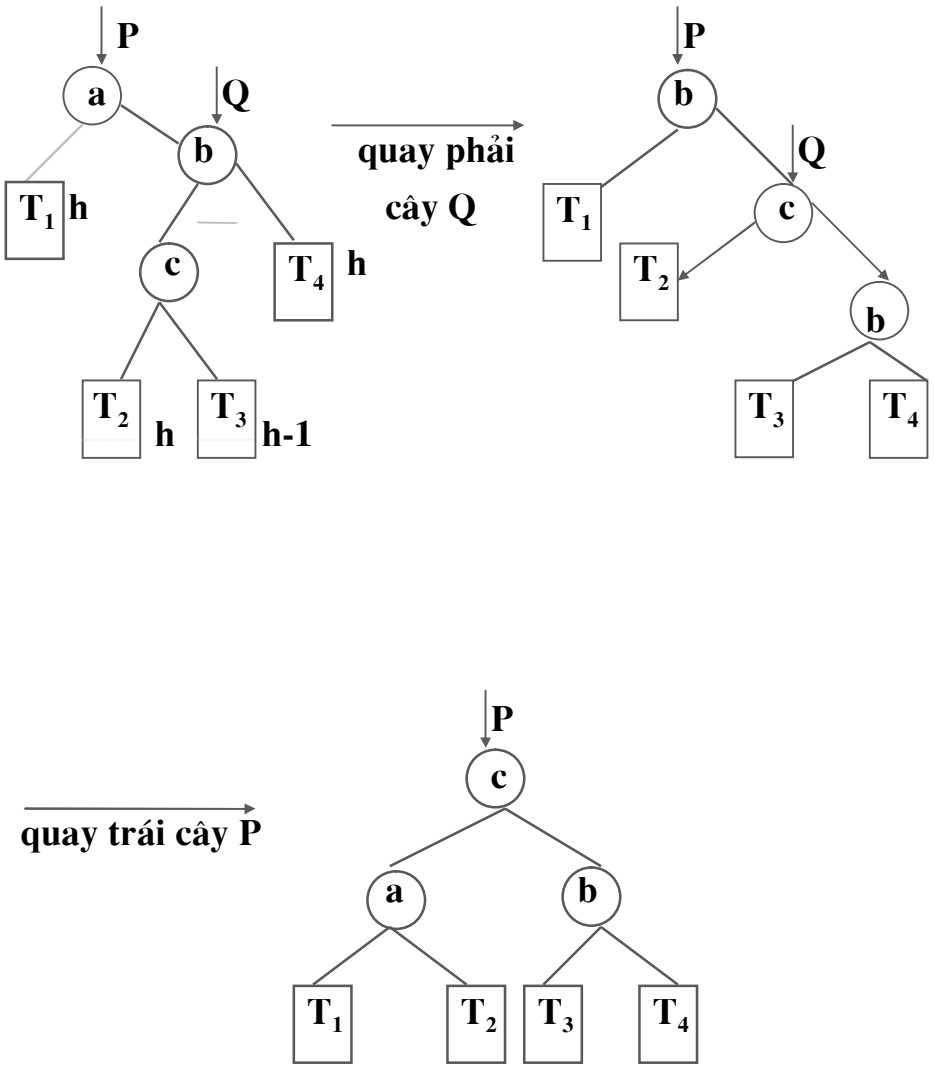
a) Q^.bal = RH (cây con gốc Q cao bên phải). Trong trường hợp này, ta biến đổi cây P bằng phép quay trái (Rotateleft) (xem hình 4.20). Sau phép quay này cả hai đỉnh a và b đều ở trạng thái cân bằng EH.



Hình 4.20. Quay trái cây P.

```
procedure   RotateLeft (var P : pointer) ;
   {quay trái cây gốc P }
     var  Q : pointer ;
     begin
      if P < > nil then
      if P^.right < > nil then
            begin
                  Q: = P^.right ;
                  P^.right : = Q^.left ;
                  Q^.left : = P ;
                  P : = Q
              end ;
            end ;
```

b) Q^bal = LH (cây con gốc Q cao bên trái). Trong trường hợp này đầu tiên ta quay cây con gốc Q sang phải (RotateRight), sau đó quay gốc P sang trái (xem hình 4.21). Cần chú ý rằng, hai cây con T_1 và T_4 có độ cao h, còn ít nhất một trong hai cây con T_2 và T_3 phải có độ cao h. Do đó, sau hai phép quay đỉnh c ở trạng thái cân bằng EH, còn đỉnh a sẽ ở trạng thái cân bằng EH hay LH tuỳ thuộc vào T_2 có độ cao h hay h-1. Tương tự, đỉnh b sẽ ở trạng thái cân bằng EH hay RH tuỳ theo T_3 có độ cao h hay h-1.



Hình 4.21

c) Q^.bal = EH. Ta đã giả thiết đỉnh mới được xen vào cây con phải của P và sau khi xen vào độ cao của cây con phải tăng lên. Nếu sau khi xen mà Q^.bal = EH thì độ cao của cây Q không thể tăng lên được. Do đó, trường hợp này không xẩy ra.

Việc thiết lập lại tính cân bằng của đỉnh P bằng phương pháp biến đổi cây mà ta đã trình bày ở trên được mô tả trong thủ tục RightBalance (cân bằng bên phải). Thủ tục này sử dụng các thủ tục RotateLeft và RotateRight (bạn đọc tự viết lấy thủ tục này) để thực hiện các phép biến đổi cây được chỉ ra trong hình 4.20 và hình 4.21.

```
procedure   RightBalance (var P : pointer) ;
      var Q,R : pointer
  begin
      Q: = P^.right ;
      case Q^.bal of
       RH : begin
                  P^.bal : = EH ;
                  Q^.bal : = EH ;
                  RotateLeft (P)
            end ;
      LH : begin
            R: = Q^.left ;
            case R^.bal of
              EH : begin
                  P^.bal : = EH ;
                  Q^.bal : = EH ;
                end ;
              LH : begin
                  P^.bal : = EH ;
                  Q^.bal : = RH
                 end ;
              RH : begin
                        P^.bal : = LH ;
                        Q^.bal : = EH
                      end
            end ; {hết case R^.bal }
            R^.bal : = EH ;
            RotateRight (Q) ;
            P^.right : = Q ;
            RotateLeft (P)
      end ; {hết lệnh case Q^.bal}
```

```
end ;
```

Hoàn toàn tương tự, khi P^.bal = LH và đỉnh mới được xen vào cây con trái của P, đồng thời việc xen vào làm tăng độ cao của cây con trái, thì ta lập lại tính cân bằng ở đỉnh P bằng thủ tục LeftBalance (cân bằng bên trái). Bạn đọc tự viết lấy thủ tục này.

Sau đây chúng ta sẽ viết thủ tục xen vào cây cân bằng Root, một đỉnh mới với khoá x cho trước. Đây là thủ tục đệ quy. Tính cân bằng tại một đỉnh có bị phá vỡ hay không phụ thuộc vào việc khi ta xen vào cây con trái (phải) của đỉnh đó có làm tăng độ cao của cây con đó không. Do đó, ta đưa vào thủ tục tham biến taller kiểu boolean, taller = true nếu việc xen vào làm tăng độ cao của cây và taller = false nếu không.

```
procedure   Insert (var Root : pointer ; x : KeyType :
                        var taller : boolean) ;
    begin
        if Root = nil then
            begin
                new (Root) ;
                with Root^ do
                    begin
                        key: = x ;
                        left : = nil ;
                        right : = nil ;
                        bal : = EH ;
                    end ;
                    taller : = true ;
                end else
    if x < Root ^. key then
        begin
          Insert (Root^.left, x, taller) ;
          if taller then {cây con trái cao lên }
            case Root^.bal of
```

```
                    LH : begin
                            LeftBalance (Root) ;
                            taller: = false ;
                         end ;
                    EH : begin
                              Root^.bal = LH ;
                              taller : = true ;
                            end ;
                    RH : begin
                              Root^.bal : = EH ;
                              taller : = false ;
                            end ;
                  end ;
            end else
if x > Root^.key then
  begin
        Insert (Root^.right, x, taller) ;
        if taller then {cây con phải cao lên}
           case Root^.bal of
                LH : begin
                        Root^.bal : = EH ;
                        taller : = false ;
                   end ;
                EH : begin
                        Root^.bal : = RH ;
                        taller : = true ;
                      end ;
                RH : begin
                        RightBalance (Root) ;
                        taller : = false
                   end ;
```

```
                end else taller : = false
        end ;
```

2. ***Loại bỏ khỏi cây cân bằng.***

Trong mục này ta sẽ xét phép toán loại một đỉnh có khoá x cho trước khỏi cây cân bằng, sao cho sau khi loại cây vẫn còn là cây cân bằng.

Chúng ta sẽ sử dụng thuật toán loại một đỉnh khỏi cây tìm kiếm nhị phân. Cần lưu ý rằng, thuật toán này làm cho độ cao của cây giảm đi 1 hoặc không thay đổi. Chúng ta sẽ đưa vào các thủ tục tham biến h kiểu boolean để chỉ độ cao của cây sau khi loại bỏ có ngắn đi haykhông, h = true nếu độ cao của cây giảm đi 1 và h = false nếu độ cao của cây không thay đổi.

Nếu đỉnh bị loại thuộc cây con trái của cây P và việc loại bỏ làm giảm độ cao của cây con trái thì ta phải biến đổi cây P và xác định lại trạng thái cân bằng của các đỉnh chịu sự biến đổi. Phép biến đổi cây trong trường hợp này được mô tả bởi thủ tục LeftBalance.

Tương tự, nếu đỉnh bị loại thuộc cây con phải của cây P và việc loại bỏ làm giảm độ cao của cây con phải, thì ta biến đổi cây P bởi thủ tục RightBalance.

Các thủ tục LefBalance và RightBalance sẽ sử dụng các phép quay RotateLeft, RotateRight và các kỹ thuật tương tự như trong các thủ tục RightBalance và LeftBalance trong phép toán xen vào.

Sau đây sẽ viết thủ tục LeftBalance, còn thủ tục RightBalance giành lại cho bạn đọc.

```
procedure   LeftBalance (var P : pointer ; var h : boolean) ;
{Áp dụng thủ tục này khi độ cao cây con trái của P giảm đi}
  var     Q, R : pointer :
begin
  case P^.bal  of
     LH : begin
                P^.bal:= EH ;
                h:= true
```

```
        end ;
    EH : begin
            P^.bal : = RH ;
            h : = false
        end ;
     RH : begin
            Q:= P^.right ;
            case Q^.bal  of
            EH : begin
                    P^.bal:= RH ;
                    Q^.bal : = LH ;
                    RotateLeft (P) ;
                    h : = false ;
                end ;
            RH : begin
                    P^.bal : = EH ;
                    Q^.bal : = EH ;
                    RotateLeft (P) ;
                    h : = true
                end ;
            LH : begin
                    R : = Q^.left ;
                    case  R^.bal of
                      EH : begin
                              P^.bal : = EH ;
                              Q^.bal : = EH ;
                           end ;
                    LF : begin
                              P^.bal : = EH ;
                              Q^.bal : = RH ;
                           end ;
```

```
                RH : begin
                        P^.bal : = LH ;
                        Q^.bal : = EH
                     end ;
                end {hết case R^.bal}
                R^.bal : = EH ;
                RotateRight (Q) ;
                P^.right : = Q ;
                RotateLeft (P) ;
                h : = true
              end
            end {hết case Q^.bal }
          end
      end {hết case P^.bal}
  end ;
```

Sau đây là thủ tục Del. Thủ tục này loại khỏi cây đỉnh P. Trong trường hợp cả hai con của P đều khác trống, thủ tục Del sử dụng thủ tục Erase để xoá đi đỉnh ngoài cùng bên phải của cây con trái của P. Nhưng trước khi xoá, khoá của đỉnh P được thay bằng khoá của đỉnh ngoài cùng bên phải đó.

```
procedure  Del (var P : pointer ; var h : boolean) ;
    procedure Erase (var Q : pointer ; var h : boolean) ;
      begin
          if Q^.right < > nil then
            begin
                Erase (Q^.right, h) ;
                if  h  then RightBalance (Q,h)
             end   else
             begin
                P^.key : = Q^.key ;
```

```
                    Q : = Q^.left ;
                    h : = true
                end
            end ; {hết thủ tục Erase}
        begin {bắt đầu thủ tục Del }
          if P^.right = nil  then
            begin
                P: = P^.left ;
                h: = true
              end   else
           if P^.left = nil  then
            begin
                P: = P^.right ;
                h : = true
            end  else
            begin
                Erase(P^.left, h) ;
                if  h  then  LeftBalance (P, h)
            end ;
        end ;
```

Đến đây chúng ta có thể viết được thủ tục loại bỏ khỏi cây gốc Root đỉnh có khoá x cho trước. Đó là thủ tục đệ quy Delete, nó sử dụng các thủ tục LeftBalance, RightBalance và Del.

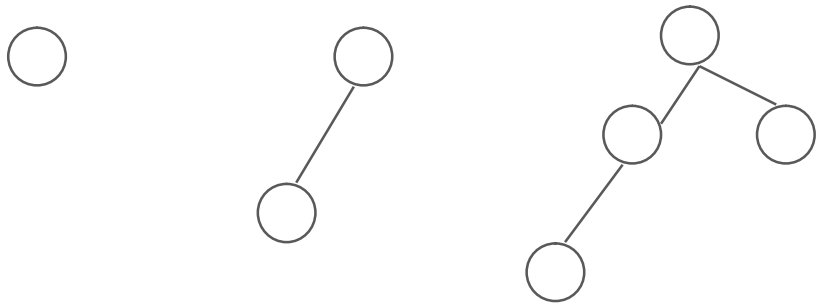
```
procedure  Delete (var Root : pointer ; x : keytype ; var h : boolean)
    begin
        if Root < > nil   then
        if x < Root^.key then
            begin
                Delete (Root^.left, x, h) ;
```

```
                if h then  LeftBalance (Root,h)
        end  else
if x > Root^. key  then
        begin
                Delete (Root^.right , x, h) ;
                if  h  then  RightBalance (Root,h)
        end  else  Del (Root, x, h)
end ;
```

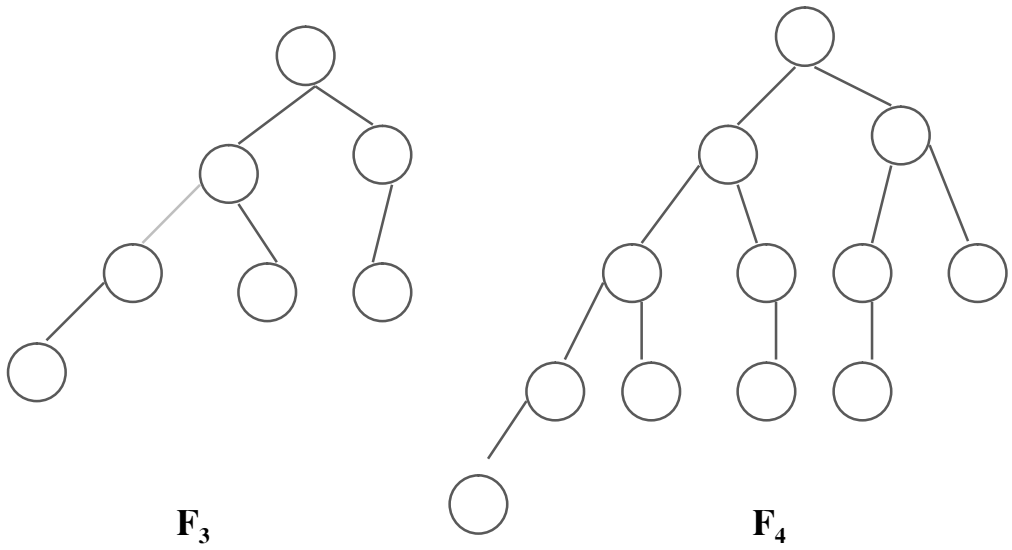
4.8. THỜI GIAN THỰC HIỆN CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÂY CÂN BẰNG.

Chúng ta đã biết rằng, thời gian trung bình thực hiện các phép toán trên cây tìm kiếm nhị phân là 0(logn). Chúng ta sẽ chỉ ra rằng, trên cây cân bằng, trong trường hợp xấu nhất, thời gian thực hiện các phép toán cũng là 0(logn). Muốn vậy ta cần phải xác định, trong trường hợp xấu nhất thì độ cao của cây cân bằng n đỉnh sẽ như thế nào.

Thay cho việc xác định độ cao lớn nhất (độ cao trong trường hợp xấu nhất) mà cây cân bằng n đỉnh có thể có, ta xác định số nhỏ nhất các đỉnh mà cây cân bằng có độ cao h phải có. Gọi F_h là cây có độ ao h với số đỉnh nhỏ nhất. Khi đó một trong hai cây con của nó phải có độ cao h - 1, còn cây con kia phải có độ cao h-1 hoăch h-2. Nhưng vì F_h là cây có độ cao h với số đỉnh nhỏ nhất, nên ta suy ra rằng, một cây con của nó (cây con trái) có độ cao h-1, còn cây con phải có độ cao h-2, đồng thời các cây con này phải có số đỉnh nhỏ nhất. Vậy cây con trái của F_h là F_{h-1}, cây con phải là F_{h-2}. Chúng ta sẽ gọi các cây cân bằng F_h là cây Fibonacci (vì qui luật xây dựng chúng tương tự như qui luật xây dựng có thành phần của dãy số Fibonacci).



F_0 F_1 F_2



Hình 4.22. Minh hoạ một số cây Fibonacci

Nếu ký hiệu $|T|$ là số đỉnh của cây T, chúng ta có quan hệ đệ quy sau đây

$$|F_h| = |F_{h-1}| + |F_{h-2}| + 1$$

trong đó $|F_0| = 1$, $|F_1| = 2$. Thêm 1 vào hai vế ta có

$$(|F_h| + 1) = (|F_{h-1}| + 1) + (|F_{h-2}| + 1)$$

Như vậy $|F_h| + 1$ là các thành phần của dãy số Fibonacci, cụ thể đó là thành phần f_{h+3} của dãy số Fibonacci. Theo công thức De Moive, ta có đánh giá sau :

$$|F_h| + 1 \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{h+3}$$

Gọi số đỉnh của cây Fibonacci có độ cao h là n, $|F_h| = n$. Giải phương trình trên theo h, bằng cách lấy logarit cả hai vế, ta có

$$h \approx 1{,}44 \log n$$

Như vậy, độ cao của cây cân bằng n đỉnh trong trường xấu nhất là 0(logn).

Chương 5

TẬP HỢP

Tập hợp là một cấu trúc cơ bản của toán học. Trong thiết kế thuật toán, chúng ta thường xuyên phải sử dụng đến mô hình dữ liệu tập hợp. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu mô hình dữ liệu tập hợp, các phương pháp cài đặt tập hợp. Sau đó chúng ta sẽ nghiên cứu một số kiểu dữ liệu trừu tượng, đó là từ điển và hàng ưu tiên, được xây dựng dựa trên khái niệm tập hợp, nhưng chỉ quan tâm đến một số phép toán nào đó.

5.1. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

Chúng ta xem rằng, độc giả đã làm quen với tập hợp. Do đó chúng ta chỉ trình bày ngắn gọn một số khái niệm được sử dụng đến sau này.

Trong toán học, có hai phương pháp để xác định một tập hợp A. Đơn giản nhất là liệt kê tất cả các phần tử của tập A (nếu tập A hữu hạn). Chẳng hạn, A = {1, 2, 3} có nghĩa là A tập hợp chỉ gồm 3 phần tử 1, 2, 3. Cách khác, ta cũng có thể xác định một tập A bằng cách nêu lên các đặc trưng cho ta biết chính xác một đối tượng bất kỳ có là một phần tử của tập A hay không. Ví dụ, A = {x| x là số nguyên chẵn}. Ta cần quan tâm đến một tập đặc biệt : tập trống ϕ, đó là tập hợp không chứa phần tử nào cả.

Với hai tập bất kỳ A, B và một đối tượng x bất kỳ, ta có các quan hệ sau đây:

$x \in A$ (x thuộc A), quan hệ này đúng nếu và chỉ nếu x là phần tử của tập A.

$A \subseteq B$ (A là tập con của B), quan hệ này đúng nếu và chỉ nếu mọi phần tử của tập A là phần tử của tập B.

A = B nếu và chỉ nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.

Các phép toán cơ bản trên tập hợp

Các phép toán cơ bản trên tập hợp là hợp, giao, hiệu. Cho hai tập A và B, khi đó hợp của A và B, $A \cup B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B. Còn giao của A và B là tập $A \cap B$ gồm tất cả các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B. Hiệu A-B là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Chẳng hạn, nếu A = {1, 2, 3, 4}

và B = { 3, 4, 5} thì A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5}, còn A ∩ B = {3, 4} và A-B = {1, 2}.

Tích đê-cac của hai tập hợp A và B là tập hợp A x B gồm tất cả các cặp phần tử (a, b), trong đó a ∈ A và b ∈ B. Chẳng hạn, nếu A = {1, 2}, B = {a, b, c} thì A x B = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}.

Quan hệ nhị nguyên trên tập hợp

Khi xét một tập hợp, trong nhiều trường hợp ta cần quan tâm đến quan hệ giữa các phần tử của tập hợp. Một quan hệ nhị nguyên (gọi tắt là quan hệ) R trên tập A là một tập con nào đó của tích đê-cac A x A, tức là R ⊆ A x A.

Nếu a, b là các phần tử của tập A và (a, b) ∈ R thì ta nói a có quan hệ R với b và ký hiệu là aRb. Ví dụ : A = {a, b, c} và R = {(a, a), (a, c), (b, a), (c, b)}, khi đó a có quan hệ R với c vì (a,c) ∈ R còn b không có quan hệ R với c vì cặp (b, c) ∉ R.

Một quan hệ R có thể có các tính chất sau :

- Quan hệ R trên tập A có tính *phản xạ,* nếu aRa, với mọi a ∈ A.

- Quan hệ R có tính *đối xứng*, nếu mỗi khi có aRb thì cũng có bRa.

- Quan hệ R có tính *bắc cầu*, nếu mỗi khi có aRb và bRc thì cũng có aRc.

- Quan hệ R có tính *phản đối xứng*, nếu mỗi khi có aRb và a ≠ b thì không có bRa.

Ví dụ nếu A là tập các số nguyên Z và R là quan hệ nhỏ hơn (<) trên các số, tức là với các số nguyên n và m bất kỳ, nRm nếu và chỉ nếu n < m, thì dễ dàng thấy rằng, < là quan hệ có tính bắc cầu và phản đối xứng, nhưng không có tính phản xạ và đối xứng.

Hai dạng đặc biệt quan trọng là quan hệ *tương đương* và quan hệ *thứ tự bộ phận*. Một quan hệ R trên tập A được gọi là quan hệ tương đương, nếu nó thoả mãn các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Khi trên tập A được xác định một quan hệ tương đương R, ta có thể phân hoạch tập A thành các lớp tương đương sao cho hai phần tử bất kỳ thuộc cùng một lớp nếu và chỉ nếu chúng tương đương với nhau.

Chẳng hạn, trên tập các số nguyên Z ta xác định quan hệ R như sau : nRm nếu và chỉ nếu n-m chia hết cho 3. Dễ dàng thấy rằng, quan hệ đó thoả mãn cả ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Tập Z được phân thành 3 lớp tương đương, đó là các tập số nguyên có dạng 3k, 3k+1 và 3k+2.

Một quan hệ R trên tập A được gọi là quan hệ thứ tự bộ phận, nếu nó thoả mãn các tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu. Khi trên tập A được xác định quan hệ thứ tự bộ phận, ta nói A là tập được sắp thứ tự bộ phận. Chẳng hạn, A là tập các số nguyên dương, quan hệ R được xác định như sau : nRm nếu và chỉ nếu n là ước của m. Khi đó R có cả ba tính chất phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu, do đó nó là quan hệ thứ tự bộ phận. Quan hệ thứ tự bộ phận R sẽ được ký hiệu là $\leq$, do đó aRb sẽ được viết là a $\leq$ b. Tập được sắp thứ tự bộ phận A được gọi là tập được sắp thứ tự hoàn toàn, hay tập được sắp thứ tự tuyến tính, nếu với mọi cặp phần tử a, b thuộc A ta luôn luôn có a $\leq$ b hoặc b $\leq$ a. Chẳng hạn, tập các số nguyên, tập các số thực đều là các tập được sắp thứ tự tuyến tính với quan hệ $\leq$ thông thường.

Mô hình dữ liệu tập hợp

Trong thiết kế thuật toán, khi sử dụng tập hợp như một mô hình dữ liệu, ngoài các phép toán hợp, giao, hiệu, chúng ta phải cần đến nhiều phép toán khác. Sau đây chúng ta sẽ đưa ra một số phép toán quan trọng nhất, các phép toán này sẽ được mô tả bởi các thủ tục hoặc hàm.

1. Phép hợp :

Procedure Union (A, B : set; var C : set);

Thủ tục tìm hợp của tập A và tập B, kết quả là tập C.

2. Phép giao :

Procedure Intersection (A, B : set; var C : set);

Thủ tục tìm giao của tập A và tập B, kết quả là tập C.

3. Phép trừ :

Procedure Difference (A,B: set ; var C: set);

Thủ tục tìm hiệu của tập A và tập B, kết quả là C.

4. Xác định một phần tử có thuộc tập hợp hay không :

Function Member (x: element ; A: set) : boolean ;

Hàm Member nhận giá trị true nếu x$\in$A và false nếu không.

5. Phép xen vào :

Procedure Insert (x: element ; var A: set);

Thủ tục này thêm phần tử x vào tập A, do đó sau khi thực hiện thủ tục, giá trị mới của A là A $\cup\{x\}$.

6. Phép loại bỏ :

Procedure Delete (x : element ; var A: set);

Thủ tục này loại bỏ x khỏi tập A . Sau thủ tục này ,tham biến A nhận giá trị mới là A-{x}.

7. Tìm phần tử nhỏ nhất (phần tử lớn nhất).

Procedure Min (A: set ; var x: element);

Phép toán này chỉ áp dụng trên các tập hợp sắp thứ tự tuyến tính . Sau khi thực hiện thủ tục, x là phần tử nhỏ nhất của tập A .

Vấn đề được đặt ra bây giờ là , ta cần biểu diễn tập hợp như thế nào để các phép toán được thực hiện với hiệu quả cao .

5.2.Cài đặt tập hợp.

Có nhiều phương pháp biểu diễn tập hợp. Trong từng áp dụng, tuỳ thuộc vào các phép toán cần thực hiện và cỡ (số phần tử) của tập hợp mà ta lựa chọn cách cài đặt sao cho các phép toán thực hiện có hiệu quả .

Trước hết, chúng ta cần biết rằng, các phần tử của tập hợp có thể là đối tượng phức tạp (không phải là các số nguyên, số thực hoặc các kí tự). Các đối tượng này có thể được biểu diễn bởi bản ghi mà các trường là các thuộc tính của đối tượng. Mỗi phần tử được hoàn toàn xác định bởi các giá trị của một số trường nào đó (khoá). Trong trường hợp này, ta có thể mô tả kiểu dữ liệu của các phần tử của tập hợp như sau.

```
type     elementtype = record
                         key : keytype;
                          [Các trường khác]
                        end;
```

5.2.1.Cài đặt tập hợp bởi vectơ bit.

Giả sử các tập hợp mà ta quan tâm đều là tập con của một tập "vũ trụ" nào đó . Giả sử cỡ của tập vũ trụ tương đối nhỏ và các phần tử của nó là các số nguyên từ 1 đến n (hoặc được mã hoá bởi các số nguyên 1..n). Khi đó ta có thể dùng vectơ bit (mảng boolean) để biểu diễn tập hợp. Một tập A được biểu diễn bởi vectơ bit (A[1] , A[2] ,..., A[i] ,..., A[n]), trong đó thành phần thứ i , A[i] là true nếu và chỉ nếu i là phần tử của tập A.

```
const n = ...;
type   Set = array[1..n] of boolean;
var    A,B,C : set;
           x : 1..n;
```

Dễ dàng thấy rằng, với cách cài đặt này, tất cả các phép toán cơ bản trên tập hợp đều được thực hiện rất dễ dàng, và với thời gian thực hiện cùng lắm là tỷ lệ với cỡ của tập vũ trụ, tức là O(n). Chẳng hạn, để thêm x vào tập A, ta chỉ cần thực hiện lệnh

A[x]: = true

Còn để xác định x có là tập con của tập A hay không ta chỉ cần biết A[x] là true hay false.

Các phép hợp, giao, hiệu của hai tập hợp cũng được thực hiện rất đơn giản. Sau đây là hàm Union thực hiện phép lấy hợp của hai tập A và B.

```
procedure    Union (A, B : Set; var C: Set ) ;
     var i: integer;
     begin
         for i : = 1 to n do C[i] : = A[i] or B[i]
         end;
```

5.2.2.Cài đặt tập hợp bởi danh sách

Chúng ta cũng có thể biểu diễn tập hợp bởi danh sách L=(a_1, a_2,..., a_n), trong đó các thành phần a_i của danh sách là các phần tử của tập hợp. Nhớ lại rằng, một danh sách có thể được cài đặt bởi mảng, hoặc bởi danh sách liên kết. Do đó chúng ta có thể cài đặt tập hợp bởi mảng hoặc bởi danh sách liên kết.

***1. Cài đặt tập hợp bởi mảng* :**

Giả sử số phần tử của tập hợp không vượt quá một hằng nào đó maxsize. Khi đó ta có thể biểu diễn tập hợp bởi một mảng. Các thành phần của mảng bắt đầu từ thành phần đầu tiên sẽ lưu giữ các phần tử của tập hợp. ta sẽ đưa vào một biến last ghi lại chỉ số của thành phần cuối cùng của mảng có chứa phần tử của tập hợp.

```
const maxsize = ...;
```

```
type Set = record
            last : integer;
            element : array [1..maxsize] of elementtype;
        end;
```

Trong cách cài đặt này, một không gian nhớ cố định (do cỡ của mảng qui định) được dùng để lưu giữ các phần tử của tập hợp. Việc thực hiện các phép hợp, xen vào có thể dẫn đến các tập hợp có số phần tử vượt quá cỡ của mảng. Do đó khi sử dụng cách cài đặt này chúng ta phải chọn maxsize thích hợp để tiết kiệm bộ nhớ và tránh trường hợp bị tràn.

Chúng tôi để lại cho độc giả tự viết các thủ tục và hàm thực hiện các phép toán tập hợp trong cách cài đặt này.

2. Cài đặt tập hợp bởi danh sách liên kết

Việc biểu diễn tập hợp bởi danh sách liên kết sẽ khắc phục được hạn chế về không gian khi dùng mảng. ta có thể sử dụng phương pháp này để biểu diễn tập hợp có số phần tử nhiều ít tuỳ ý, miễn là bộ nhớ của máy cho phép. Tuy nhiên trong cách cài đặt này, việc thực hiện các phép toán tập hợp sẽ phức tạp hơn. Mỗi thành phần trong danh sách liên kết biểu diễn tập hợp là một tế bào có khai báo như sau :

```
type pointer = ^ Cell;
     Cell   = record
                elementtype;
                next : pointer;
                end;
```

Các tập hợp A, B, C sẽ được biểu diễn bởi các danh sách liên kết, trong đó các con trỏ A, B, C sẽ trỏ tới đầu của các danh sách đó.

```
var A, B, C : pointer;
```

Sau đây chúng ta sẽ trình bày sự thực hiện các phép toán khi tập hợp được cài đặt bởi danh sách liên kết. Phép toán Member (x,A) chính là phép tìm kiếm phần tử x trong danh sách liên kết A.

Cho hai tập hợp A và B được biểu diễn bởi các danh sách liên kết. Việc tìm danh sách C biểu diễn hợp, giao hoặc hiệu của A và B được tiến hành bởi cùng một phương pháp. Chẳng hạn, muốn tìm giao của A và B,

ta phải so sánh mỗi phần tử e của danh sách A với lần lượt từng phần tử của danh sách B. Nếu trong danh sách B có một phần tử cùng là e thì phần tử e được đưa vào danh sách C.

Sau đây là thủ tục thực hiện phép giao :

```
procedure Intersection (A, B : pointer; var C : pointer);
var Ap, Bp, Cp : pointer;
      found : boolean;
begin
      C : = nil;
      Ap : = A;
      while Ap < > nil do
            begin
                  Bp : = B;
                  found : = false;
                  while (Bp < > nil) and (not found) do
                    if Bp ^. element + Ap ^. element then
                          found : = true else Bp : = Bp^.next;
                  if found then
                          begin
                                new (Cp);
                                Cp ^. element : = Ap ^.
element;
                                Cp ^. next : = C;
                                C : = Cp
                          end;
                  Ap : = Ap ^. next
            end
      end;
```

Để tìm hợp của A và B, đầu tiên ta sao chép danh sách B để có danh sách C là bản sao của B. Sau đó ta so sánh mỗi phần tử e của danh sách A với từng phần tử của danh sách B. Nếu không có phần tử nào của B là e thì ta thêm e vào danh sách C. Một cách tương tự đối với phép toán A-B.

Trong cách cài đặt tập hợp bởi danh sách (không được sắp) như trên, khi thực hiện các phép toán hợp, giao, trừ, ta phải so sánh mỗi phần tử của danh sách A với từng phần tử của danh sách B. Do đó thời gian thực hiện các phép toán đó là $0(n^2)$, trong đó n = max (| A|, |B|), ở đây | A|

ký hiệu số phần tử của tập A.

***C. Cài đặt tập hợp bởi danh sách được sắp* :**

Trong trường hợp các tập hợp là các tập con của tập vũ trụ được sắp tuyến tính bởi quan hệ thứ tự nào đó, thì các phép toán tập hợp sẽ được thực hiện nhanh hơn nếu ta cài đặt các tập bởi các danh sách được sắp. Một tập được biểu diễn bởi danh sách được sắp, nếu các thành phần của danh sách được sắp xếp theo thứ tự tăng dần (hoặc giảm dần) : $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Chú ý : thay cho việc xét chính các phần tử của tập hợp, ta có thể xét các khoá của chúng. Nếu tập các khoá là tập được sắp tuyến tính thì ta cũng có thể cài đặt tập hợp bởi danh sách được sắp theo khoá.

Với các danh sách được sắp A và B, để tìm danh sách được sắp C biểu diễn hợp, giao, hiệu của chúng, ta chỉ cần so sánh mỗi phần tử a của danh sách A với các phần tử của danh sách B cho tới khi hoặc tìm được trong danh sách B một phần tử bằng a, hoặc tìm được một phần tử b > a. Hơn nữa, nếu đối với một phần tử a_i trong danh sách A, ta đã tìm được một phần tử b_k trong danh sách B sao cho $a_i \leq b_k$, thì đối với phần tử tiếp theo a_{i+1} trong danh sách A ta chỉ cần bắt đầu sự tìm kiếm trong danh sách B kể từ thành phần b_k. Do đó thời gian thực hiện các phép toán hợp, giao, trừ sẽ tỷ lệ với số phần tử của tập hợp, O(n), trong đó n = max (| A|, | B|).

Sau đây chúng ta sẽ viết các thủ tục thực hiện các phép hợp và giao của các tập hợp được biểu diễn bởi các danh sách được sắp A và B. Danh sách được sắp C biểu diễn hợp (hoặc giao) là danh sách vòng tròn, con trỏ C trỏ tới cuối danh sách, còn C^.next trỏ tới đầu danh sách .

```
procedure Union (A,B : pointer ; var C: pointer );
var Ap , Bp , Cp : pointer ;
procedure Add ( Cp : pointer ; var C: pointer);
{Thêm Cp vào cuối danh sách C }
        begin
           if C=nil then
                 begin
                    C:=Cp;
                     C^.next :=C
              end else
                 begin
```

```
                    Cp^.next :=C^.next;
                    C^.next := Cp;
                    C:=Cp
                end
        end;
begin
        C:= nil;
        Ap:=A;
        Bp:=B;
        while ( Ap<>nil) and (Bp<> nil)
                if Ap^.element < = Bp^.element then
                    begin
                        new(Cp);
                        Cp^.element:=Ap^.element
                        Add(Cp,C);
                     if Ap^.element=Bp^.element then
                        begin
                              Ap := Ap^.next ;
                              Bp := Bp^.next
                           end else Ap:=Ap^.next
                    end else
                    begin
                          new(Cp);
                          Cp^.element:=Bp^.element
                          Add(Cp,C);
                          Bp:=Bp^.next
                    end;
                while Ap < > nil do
                    begin
                        new(Cp);
                        Cp^.element:=Ap^.element;
                            Add (Cp,C);
                while Bp < > nil do
                    begin
                          new (Cp);
                    C ^. element : Bp ^. element ;
                    Add (Cp, C)
```

```
        end;
    end;


    procedure Intersection(A,B : pointer; var C: pointer);
        var Ap, Bp, Cp : pointer;
        begin
            C:=nil;
            Ap:=A;
            Bp:=B;
            while ( Ap< > nil ) and (Bp< > nil) do
              if Ap^.element= Bp^.element then
                begin
                    new(Cp);
                    Cp^.element := Ap^.element;
                Add(Cp,C);
                    Ap:= Ap^.next;
                    Bp := Bp^.next;
                end else
                if Ap^.element < Bp^.element then Ap :=
Ap^.next
                    else Bp := Bp^.next
            end;
```

5.3.Từ điển

5.*3.1.Từ điển*

Trong nhiều áp dụng, khi sử dụng mô hình dữ liệu tập hợp để thiết kế thuật toán, ta không cần đến các phép toán lấy hợp, giao, hiệu của các tập . Thông thường khi đã lưu giữ một tập hợp thông tin nào đó, ta chỉ cần đến phép toán thêm một phần tử mới nữa vào tập hợp, loại khỏi tập hợp một phần tử và tìm xem trong tập hợp có chứa một phần tử nào đó hay không.

Mô hình giữ liệu tập hợp, nhưng chỉ xét đến những phép toán Insert, Delete và Member được gọi là kiểu giữ liệu trừu tượng từ điển (Dictionary)

Sau đây chúng ta sẽ nêu ra các phương pháp đơn giản mà chúng ta đã biết trong các chương trước để cài đặt từ điển. Trong mục 5. 4 chúng ta sẽ trình bày một kỹ thuật mới để cài đặt từ điển.

5.3.2.Các phương pháp đơn giản cài đặt từ điển

Từ điển là một tập hợp, do đó đương nhiên ta có thể sử dụng các phương pháp cài đặt tập hợp để cài đặt từ điển .

Chúng ta có thể biểu diễn từ điển bởi vectơ bit. Khi đó các phép toán trong từ điển được thực hiện rất đơn giản với thời gian hằng. Tuy nhiên, ta chỉ có thể áp dụng được phương pháp này nếu từ điển là tập hợp có thể dùng làm tập chỉ số cho mảng .

Chúng ta có thể biểu diễn từ điển bởi danh sách. Đến lượt mình, danh sách có thể được cài đặt bởi mảng hoặc bởi danh sách liên kết. Khi cài đặt từ điển bởi mảng hoặc bởi danh sách liên kết , mỗi phương pháp đều có ưu điểm và nhược điểm mà chúng ta đã phân tích ở chương 3. Thời gian để thực hiện các phép toán Insert, Delete, Member nói chung là O(n) với từ điển có n phần tử.

Giả sử từ điển là một tập được sắp thứ tự tuyến tính . Trong trường hợp này, ta có thể biểu diễn từ điển bởi cây tìm kiếm nhị phân. Với cách cài đặt này các phép toán Member, Insert và Delete là các phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ trên cây tìm kiếm nhị phân được xét trong chương 4. Thời gian trung bình để thực hiện các phép toán trên cây tìm kiếm nhị phân là O(logn), trong trường hợp xấu nhất khi cây suy biến thành danh sách là O(n). Nếu ta biểu diễn từ điển bởi cây cân bằng, thì thời gian thực hiện các phép toán, ngay cả trong trường hợp xấu nhất cùng là 0(logn). Tuy nhiên như chúng ta đã biết, việc thực hiện các phép toán xen vào và loại bỏ trên cây cân bằng khá phức tạp.

5. 4. Cấu trúc dữ liệu bảng băm.
Cài đặt từ điển bởi bảng băm.

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một kỹ thuật quan trọng, được gọi là phương pháp băm (hashing). Chúng ta sẽ áp dụng phương pháp băm để cài đặt từ điển. Băm là phương pháp rất thích hợp để cài đặt tập hợp có số phần tử lớn và thời gian cần thiết để thực hiện các phép toán từ điển, ngay cả trong trường hợp xấu nhất, là tỷ lệ với cỡ của tập hợp.

Chúng ta sẽ đề cập đến hai phương pháp băm khác nhau. Một gọi là băm mở (open hasing) cho phép sử dụng một không gian không hạn chế để lưu giữ các phần tử của tập hợp. Phương pháp băm khác được gọi là băm đóng (closed hashing) sử dụng một không gian cố định và do đó tập hợp được cài đặt phải có cỡ không vượt quá không gian cho phép.

5.4.1. Bảng băm mở :

Tư tưởng cơ bản của băm mở là phân chia tập hợp đã cho thành một số cố định các lớp. Chẳng hạn, ta muốn phân thành N lớp được đánh số 0, 1, ..., N-1. Ta sử dụng mảng T với chỉ số chạy từ 0 đến N-1. Mỗi thành phần T [i] của mảng được nói đến như một "rổ" đựng các phần tử của tập hợp thuộc lớp thứ i. Các phần tử của tập hợp thuộc mỗi lớp được tổ chức dưới dạng một danh sách liên kết. Do đó T [i] sẽ chứa con trỏ trỏ đến danh sách của lớp i. Ta sẽ gọi mảng T là bảng băm (hash table).

Việc phân chia các phần tử của tập hợp vào các lớp được thực hiện bởi *hàm băm* (hash function) h. Nếu x là một giá trị khoá của phần tử nào đó của tập hợp thì h(x) là chỉ số nào đó của mảng T và ta gọi h(x) là giá trị băm (hash value) của x. Như vậy h là ánh xạ từ tập hợp các khoá K vào tập hợp {0, 1, ..., N-1}.

Hàm băm

Có hai tiêu chuẩn chính để lựa chọn một hàm băm. Trước hết nó phải cho phép tính được dễ dàng và nhanh chóng giá trị băm của mỗi khoá. Thứ hai nó phải phân bố đều các khoá vào các rổ. Trên thực tế tiêu chuẩn thứ hai rất khó được thực hiện. Sau đây chúng ta đưa ra một số phương pháp thiết kế hàm băm :

1. Phương pháp cắt bỏ : giả sử khoá là số nguyên (nếu khoá không phải là số nguyên, ta xét đến các mã số của chúng). Ta sẽ bỏ đi một phần nào đó của khoá, và lấy phần còn lại làm giá trị băm của khoá. Chẳng hạn, nếu khoá là các số nguyên 10 chữ số và bảng băm gồm 1000 thành phần, khi đó ta có thể lấy chữ số thứ nhất, thứ ba và thứ bẩy từ bên trái làm giá trị băm. Ví dụ : h (7103592810) = 702. Phương pháp cắt bỏ rất đơn giản, nhưng nó thường không phân bố đều các khoá.

2. Phương pháp gấp : giả sử khoá là số nguyên. Ta phân chia khoá thành một

số phần, sau đó kết hợp các phần lại bằng một cách nào đó (chẳng hạn, dùng phép cộng hoặc phép nhân) để nhận giá trị băm. Chẳng hạn, nếu khoá là số nguyên 10 chữ số, ta phân thành các nhóm ba, ba, hai và hai chữ số từ bên trái, cộng các nhóm với nhau, sau đó cắt cụt nếu cần thiết, ta sẽ nhận được giá trị của hàm băm. Ví dụ 7103592810 được biến đổi thành 710+359+28+10 = 1107, do đó ta có giá trị băm là 107. Vì mọi thông tin trong khoá đều được phản ánh vào giá trị băm, nên phương pháp gấp cho phân bố đều các khoá tốt hơn phương pháp cắt bỏ.

3. Phương pháp sử dụng phép toán lấy phần dư : giả sử khoá là số nguyên, và giả sử ta muốn chia tập hợp các khoá thành N lớp. Chia số nguyên cho N rồi lấy phần dư làm giá trị băm. Điều này trong Pascal được thực hiện bằng phép toán MOD. Tính phân bố đều các khoá của

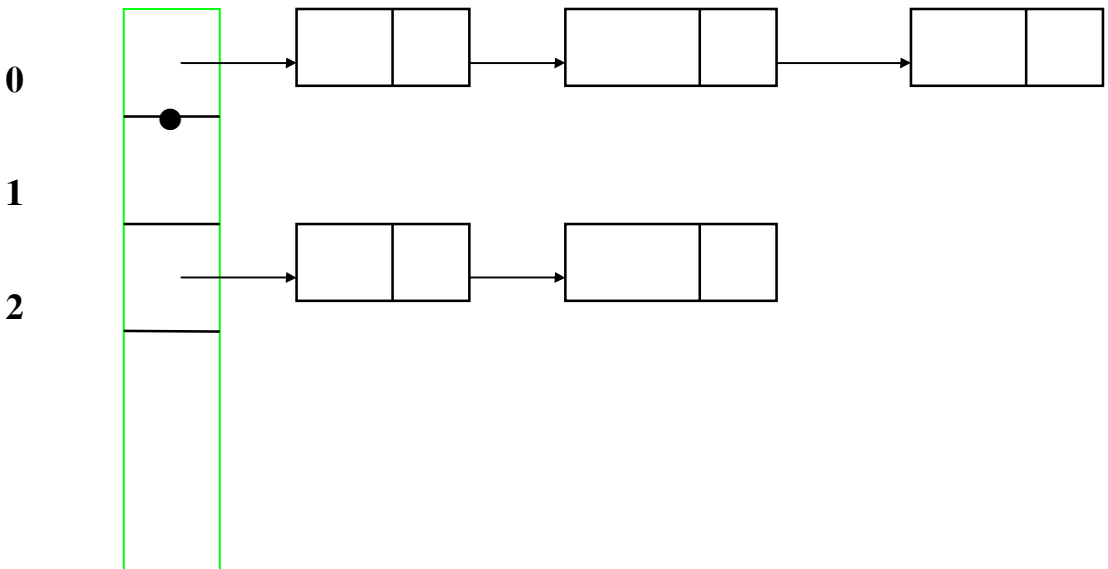
hàm băm được xác định bằng phương pháp này phụ thuộc nhiều vào việc chọn N. Tốt nhất chọn N là số nguyên tố. Chẳng hạn thay cho chọn N = 1000, ta lấy N= 997 hoặc N = 1009.

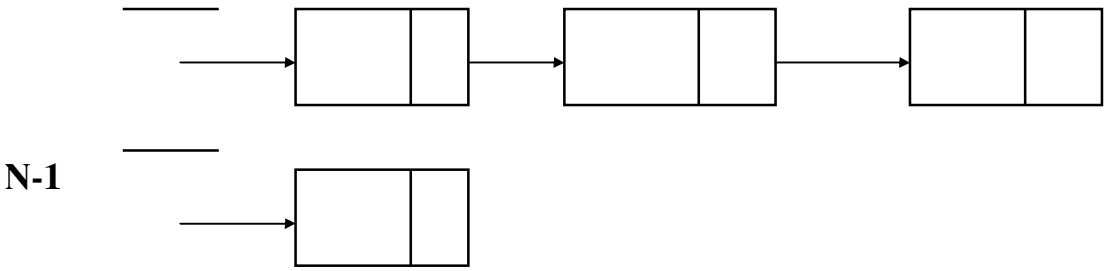
Sau đây ta sẽ viết một hàm băm trong Pascal để băm các khoá là các xâu kí tự có độ dài 10 thành các giá trị từ 0 đến N-1

```
type        keytype = string [10]

function            h (x : keytupe) : 0..N-1;
    var     I, Sum : integer;
    begin
        Sum : = 0;
        for i = 1 to 10 do
            Sum : = Sum + ord(x[i]);
        h : = Sum mod N
    end;
```

Trong hàm băm trên, ta đã chuyển đổi các xâu kí tự thành các số nguyên bằng cách lấy tổng số của các mã số của từng kí tự trong xâu (ord (c) là mã số của kí tự c).

Cấu trúc dữ liệu bảng băm mở được minh hoạ trong hình 5.1





Hình 5.1 Bảng băm mở.

Chúng ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu bảng băm mở biểu diễn từ điển như sau :

```
const       N =   ...;
type        pointer = ^ element;
            element = record
                        key : keytype;
                        next : pointer
                      end;

            Dictionary = array [0 .. N-1] of pointer;
            var T : Dictionary;
```

Việc khởi tạo một từ điển rỗng được thực hiện bằng lệnh sau

```
for i : = 0 to N-1 do T [i] : = nil;
```

Các phép toán từ điển trên bảng băm mở

Sau đây chúng ta sẽ đưa ra các thủ tục thực hiện các phép toán từ điển.

```
function    Member (x : keytype; var T : Dictionary) : boolean;
    var         P : pointer; found : boolean;
```

```
        begin
                P : = T [h(x)];
                found : = false;
            while (P < > nil) and (not found) do
                if P ^. key = x then found : = true
                                else P : = P ^. next;
                    Member : = found
        end;

procedure   Insert (x : keytype; var T : Dictionary);
        var     i : 1 .. N-1;
                P : pointer;
        begin
        if not Member (x, T) then
                begin
                i : = h (x);
                new (P);
                P ^. key : = x;
                P ^. next : = T [i];
                T[i] : = P
                end
        end;

procedure   Delete (x : keytype; var T : dictionary);
        var     i : 0 .. N-1;
                P, Q : pointer; found : boolean;
        begin
                i : = h (x);
                found : = false;
           if T[i] < > nil then
                if T [i] ^. key = x then
```

```
                begin { loại x khỏi danh sách}
                        T [i] : = T [i] ^. next;
                        found : = true
                end     else
        begin {xem xét các thành phần tiếp theo trong danh sách}
            Q : = T [i];
            P  : = Q ^. next;
            while (P < > nil) and (not found) do
                if P ^. key = x then
                        begin { loại x khỏi danh sách }
                            Q ^.  next : = P ^. next;
                            found : = true
                        end else
                        begin
                            Q : = P;
                            P : = Q ^. next;
                        end;
            end;
        end;
```

5.4.2. Bảng băm đóng :

Trong bảng băm mở, mỗi thành phần T [i] của bảng lưu giữ con trỏ trỏ tới danh sách các phần tử của tập hợp được đưa vào lớp thứ i (i = 0, ..., N-1). Khác với bảng băm mở, trong bảng băm đóng, mỗi phần tử của tập được lưu giữ trong chính các thành phần T [i] của mảng. Do đó ta có thể khai báo kiểu dữ liệu từ điển được cài đặt bởi bảng băm đóng như sau :

```
type   Dictionary = array [o .. N-1] of keytype
```

Ở đây KeyType là kiểu dữ liệu của khoá của các phần tử trong từ điển. Nhớ lại rằng, hàm băm

$$h : K \rightarrow \{0, 1, ..., N-1\}$$

là ánh xạ từ tập hợp các khoá K vào tập hợp các chỉ số 0, 1, ..., N-1 của mảng. Đây là ánh xạ nhiều-vào-một, nên có thể xẩy ra một số khóa khác nhau được ánh xạ vào cùng một chỉ số. Do đó có thể có trường hợp, ta muốn đặt khoá x vào thành phần i = h (x) của mảng, nhưng ở đó đã lưu giữ một khoá khác. Hoàn cảnh này được gọi là *sự va chạm* (collision). Vấn đề đặt ra là *giải quyết sự va chạm* như thế nào.

Sự va chạm được giải quyết bằng cách băm lại (rehashing). Chiến lược băm lại là như sau. ta sẽ lần lượt xét các vị trí h_1 (x), h_2 (x), ... cho tới khi tìm được một vị trí nào trống để đặt x vào đó. Nếu không tìm được vị trí nào trống thì bảng đã đầy và ta không thể đưa x vào bảng được nữa. Ở đây h_i (x) (i = 1, 2, ...) là các giá trị băm lại lần thứ i, nó chỉ phụ thuộc vào khoá x. Sau đây chúng ta sẽ xét một số phương pháp băm lại.

Các phương pháp băm lại.

1. Băm lại tuyến tính

Đây là phương pháp băm lại đơn giản nhất. Các hàm h_i (x) được xác định như sau :

$$h_i(x) = (h(x) + i) \bmod N.$$

Tức là, ta xem mảng là mảng vòng tròn và lần lượt xem xét các vị trí h (x) + 1, h (x) + 2, ...

Chẳng hạn, N = 10 và các khoá a, b, c, d, e có các giá trị băm như sau h (a) = 7, h(b) = 1, h (c) = 4, h (d) = 3, h (e) = 3.

	b		d	c	e		a		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Hình 5.2

Giả sử ban đầu bảng rỗng, tức là tất cả các thành phần của bảng đều chứa một giá trị empty nào đó khác với tất cả các giá trị khoá. Giả sử ta muốn đưa vào bảng rỗng lần lượt các giá trị khoá a, b, c, d, e. Khi đó a, b, c, d lần lượt được đặt vào các vị trí 7, 1, 4, 3 vào bảng. Vì h(e) = 3, ta tìm đến thành phần thứ 3 của mảng và thấy nó đã chứa d. Tìm đến thành phần h_1 (e) = h (e) + 1 = 4, lại thấy nó đã chứa c. Tìm đến thành phần h_2 (e) = 5, vị trí này rỗng, ta đưa e vào đó. Kết quả là ta có bảng băm đóng được minh hoạ trong hình 5.2.

Hạn chế cơ bản của phương pháp băm lại tuyến tính là các giá trị khoá sẽ được xếp liền vào sau các giá trị khoá ban đầu đã đưa vào bảng

mà không gặp va chạm. Do đó càng ngày các giá trị khóa trong bảng càng tụ lại thành các đoạn dài bị lấp đầy và giữa các đoạn bị lấp đầy là các khoảng trống. Và vì vậy, việc tìm ra một vị trí trống trong bảng để đưa giá trị mới vào, càng về sau càng chậm.

2. Băm lại bình phương

Phương pháp băm lại tốt hơn, cho phép ta tránh được sự tích tụ trong bảng các giá trị xung quanh các giá trị đưa vào bảng ban đầu, là sử dụng các hàm băm lại được xác định như sau :

$$h_i(x) = (h(x) + i^2) \bmod N;$$

Hạn chế của phương pháp này là ở chỗ, các giá trị băm lại không lấy đầy tất cả các chỉ số của mảng. Do đó khi cần đưa vào bảng một giá trị mới, có thể ta không tìm được vị trí rỗng, mặc dầu trong bảng hãy còn các vị trí rỗng.

Xét trường hợp chiều của mảng N là số nguyên tố. Giả sử với $i \neq j$ ta có

$$h_i(x) = h_j(x)$$

hay

$$h(x) + i^2 \equiv h(x) + j^2 \pmod N$$

Do đó

$$(i - j)(i + j) \equiv 0 \pmod N$$

Vì N là số nguyên tố, ta suy ra, một trong hai nhân thức i -j và i + j phải chia hết cho N. Do đó hoặc $i \geq N/2$ hoặc $j \geq N/2$. Từ đó ta suy ra, với i đi từ 1 đến N div 2 tất cả các giá trị băm lại đều khác nhau. Như vậy có tất cả N div 2 giá trị băm lại khác nhau. Tức là, khi gặp va chạm, phương pháp băm lại bình phương sẽ cho phép tìm đến một nửa số vị trí trong bảng. Việc tìm đến một nửa số vị trí của bảng để tìm ra một vị trí trống, trên thực tế, là ít khi cần đến, trừ trường hợp bảng đã gần đầy.

Trong các phương pháp băm lại trên, thực chất ta đã thêm vào giá trị băm ban đầu h (x) một gia số $\Delta(i)$ để nhận được giá trị băm lại ở lần thứ i.

$$h_i(x) = (h(x) + \Delta(i)) \bmod N$$

Trong trường hợp băm lại tuyến tính $\Delta(i) = i$, còn trong trường hợp băm lại bình phương $\Delta(i) = i^2$.

Còn có thể sử dụng các hàm gia số khác để nhận được các giá trị băm lại. Chẳng hạn, $\Delta(i) = c\,i$, trong đó c hằng số > 1.

$$h_i(x) = (h(x) + c\,i) \bmod N.$$

Ví dụ, với N = 8, c= 3 và h (x) = 4, các vị trí trong bảng được tìm đến là 4, 7, 2, 5, 0, 3, 6 và 1. Tất nhiên, nếu N và c có ước chung lớn hơn 1, thì phương pháp băm lại này không cho ta tìm đến tất cả các vị trí trong bảng; chẳng hạn với N = 8 và c = 2.

Một cách tiếp cận khác là sử dụng các gia số là các số ngẫu nhiên :

$$h_i(x) = (h(x) + d_i) \bmod N$$

trong đó, d_1, d_2, ... d_{N-1} là một hoán vị ngẫu nhiên của các số 1, 2, ... N-1. Cần lưu ý rằng, khi đã chọn một dãy ngẫu nhiên d_1, d_2, ... d_{N-1}, thì trong mọi phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ, nếu gặp va chạm, ta phải sử dụng cùng một dãy ngẫu nhiên đã chọn để tính các giá trị băm lại.

Các phép toán từ điển trên bảng băm đóng.

Sau đây chúng ta sẽ xét các phép toán từ điển (Insert, Delete, Member) khi từ điển được cài đặt bởi bảng băm đóng.

Để biết trong bảng có chứa khoá x hay không, ta phải " thăm dò" lần lượt các vị trí h (x), h_1 (x), h_2 (x)... Giả sử ta chưa thực hiện phép loại bỏ nào đối với bảng. Khi đó có hai khả năng. Hoặc là tìm được một vị trí của bảng chứa x, hoặc là tìm được một vị trí trống đầu tiên h_k (x). Trong trường hợp thứ hai, ta có thể kết luận rằng, bảng không chứa x, vì x không thể được đặt vào một trong các vị trí h_{k+1} (x), h_{k+2} (x), tuy nhiên tình hình sẽ khác, nếu trong bảng đã thực hiện một số lần loại bỏ. Trong trường hợp đã có sự loại bỏ trong bảng, nếu tìm ra vị trí trống đầu tiên h_k (x) ta không thể đảm bảo rằng x không ở đâu đó trong các vị trí h_{k+1} (x), h_{k+2} (x), ... Vì rằng có thể lúc đưa x và bảng, vị trí h_k (x) đã đầy, nhưng sau đó nó trở thành trống bởi một phép loại bỏ nào đó.

Để đảm bảo rằng, khi tìm ra vị trí trống đầu tiên h_k (x), ta có thể tin chắc rằng bảng không chứa x, ta đưa vào một hằng mới "bị loại bỏ" (deleted) khác với hằng "trống" (empty). Với việc đưa vào hằng deleted, mỗi khi cần loại bỏ một giá trị khỏi một vị trí nào đó trong bảng, ta chỉ cần thay giá trị của bảng tại vị trí đó bởi hằng deleted. Khi cần đưa một giá trị mới vào bảng, ta có thể đặt nó vào vị trí đã loại bỏ.

Ta có thể khai báo cấu trúc dữ liệu bảng băm đóng biểu diễn từ điển như sau :

```
const    N     = . . . ;
         empty = . . . ;
```

```
        deleted = . . . ;
```

{empty và deleted là hai hằng khác với tất cả các giá trị khoá của các phần tử của từ điển}.

```
type    Dictionary = array [ 0 .. N-1] of keytype;
var     T : Dictionary;
```

Với mỗi giá trị khoá x, để thực hiện các phép toán Insert, Delete, Member, ta đều phải xác định vị trí trong bảng có chứa x, hoặc vị trí trong bảng cần đặt x vào. Tư tưởng để tìm ra các vị trí đó là thăm dò lần lượt các vị trí h (x), h_1 (x), h_2 (x), ... Điều đó được thực hiện bởi thủ tục Location.

Sau đây ta sẽ mô tả thủ tục Location trong trường hợp sử dụng phương pháp băm lại tuyến tính.

Với mỗi giá trị khoá x, thủ tục này cho phép thăm dò các vị trí trong bảng, xuất phát từ vị trí được xác định bởi giá trị băm h (x), rồi lần lượt qua các vị trí h_1 (x), h_2 (x), ... cho tới khi hoặc tìm được vị trí có chứa x, hoặc tìm ra vị trí trống đầu tiên.

Quá trình thăm dò cũng sẽ dừng lại nếu đi qua toàn bộ bảng mà không thành công (không tìm thấy vị trí chứa x cũng không tìm thấy vị trí trống). Vị trí mà tại đó quá trình thăm dò dừng lại được ghi vào tham biến k. Ta đưa vào thủ tục tham biến j để ghi lại vị trí loại bỏ (deleted) đầu tiên hoặc vị trí trống đầu tiên mà quá trình thăm dò phát hiện ra, nếu trong bảng còn có các vị trí như thế.

```
procedure   Location (x : keytype; var k, j : integer);
var         i       : integer;
{biến i ghi lại giá trị băm đầu tiên h (x)}
begin
            i       : = h (x);
            j       : = i;
    if (T [i] = x) or (T [i] = empty) then
                    k : = i         else
            begin
                    k = (i + 1) mod N;
                    while (k < > i) and ( T [k] < > x) and
                            (T [k] < > empty) do
```

```
                    begin
                      if (T [k] = deleted) and (T [j] < > deleted)
                                then j : = k;
                       k : = (k +1) mod N
                    end;
                if (T [k] = empty) and (T [j] < > deleted)
                    then j : = k
              end;
        end;
```

Sau đây ta sẽ mô tả các thủ tục và hàm thực hiện các phép toán từ điển

```
function    Member (x : keytype; var T : Dictionary) : boolean;
    var k, j : integer;
    begin
            Location (x, k, j)
        if T [k] = x then   Member : = true
                    else   Member  : = false
    end;


    procedure   Insert (x : keytype; var T : Dictionary);
        var    k, j : integer;
begin
            Location (x, k, j);
    if T [k] < > x then
        if (T [j] = deleted) or (T[j] = empty) then T [j] := x
            else writeln (' bảng đầy')
        else writeln (' bảng đã có x')
```

```
        end;


procedure       Delete (x : keytype; var T : Dictionary);
    var   k, j : integer;
    begin
                    Location (x, k, j);
                    if T [k] = x then T [k] : = deleted;
    end;
```

5.5. Phân tích và đánh giá các phương pháp băm

Bảng băm là một cấu trúc dữ liệu rất thích hợp để biểu diễn từ điển và các kiểu dữ liệu trừu tượng khác được xây dựng trên khái niệm tập hợp. Trong mục này chúng ta sẽ so sánh những ưu điểm và hạn chế của hai phương pháp băm mở và băm đóng. Chúng ta cũng sẽ phân tích và đánh giá hiệu quả của từng phương pháp.

Trong bảng băm mở, mỗi thành phần T[i] của bảng chứa con trỏ trỏ tới danh sách liên kết các phần tử của tập hợp thuộc lớp thứ i. Do đó không gian cần thiết để biểu diễn tập hợp bởi bảng băm mở sẽ là không gian cần để lưu các bản ghi biểu diễn các phần tử của tập hợp cộng thêm không gian giành cho các con trỏ (mỗi con trỏ chỉ đòi hỏi một từ máy). Trong khi đó các bản ghi biểu diễn các phần tử của tập hợp sẽ được lưu giữ trong chính bảng băm đóng. Do đó, với bảng băm đóng một không gian nhớ cố định được giành để biểu diễn tập hợp. Bảng sẽ chứa một số vị trí rỗng (càng nhiều vị trí rỗng thì càng hạn chế sự va chạm và tránh được hiện tượng đầy tràn). Như vậy, nếu các bản ghi có cỡ lớn (không gian nhớ cần cho mỗi bản ghi lớn), và ta sử dụng bảng băm đóng thì sẽ lãng phí một không gian đáng kể.

Một ưu điểm khác của bảng băm mở là không cần phải đặt ra vấn đề giải quyết sự va chạm, vì các phần tử thuộc cùng một lớp được tổ chức dưới dạng danh sách liên kết.

Sau đây chúng ta sẽ đánh giá thời gian trung bình cần để thực hiện mỗi phép toán trên từ điển trong các bảng băm.

Bảng băm mở :

Giả sử có N rổ T [0], T [1], ..., T [N-1] và có M phần tử được lưu giữ trong bảng. Giả sử rằng, hàm băm phân phối đều các phần tử vào mỗi rổ. Do đó trung bình mỗi rổ chứa M/N phần tử. Vì vậy thời gian

trung bình để thực hiện mỗi phép toán từ điển Insert, Delete và Member là 0 (M/N). Nếu ta chọn N = M thì thời gian trung bình cho mỗi phép toán Insert, Delete và Member sẽ trở thành hằng số.

Cần lưu ý rằng, ta đã đánh giá thời gian trung bình để thực hiện mỗi phép toán từ điển với giả thiết hàm băm phân phối đều các phần tử cho mỗi rổ. Trên thực tế, giả thiết này khó được thực hiện. trong trường hợp xấu nhất, tất cả các phần tử đều được đưa vào cùng một rổ, thì thời gian trung bình cho mỗi phép toán sẽ tỉ lệ với cỡ của tập hợp như trong trường hợp danh sách.

Bảng băm đóng :

Sau đây chúng ta sẽ tiến hành đánh giá thời gian trung bình để thực hiện mỗi phép toán từ điển trong bảng băm đóng. ta sẽ sử dụng phương pháp xác suất để đánh giá.

Giả sử rằng, hàm băm h phân phối đều các phần tử của tập hợp trên các chỉ số của bảng. Giả sử ta cần phải đưa một phần tử vào bảng T có chiều N và bảng đã chứa k phần tử. Khi đó xác suất để trong lần đầu ta tìm ra được một vị trí trống là $\frac{N-k}{N}$ ta gọi xác suất này là p_1, nó chính là xác suất của sự kiện cần một lần thăm dò để đưa phần tử mới vào bảng. Xác suất p_2 của sự kiện cần hai lần thăm dò để đưa phần tử mới vào bảng sẽ bằng xác suất lần thăm dò thứ nhất gặp va chạm với xác suất lần thăm dò thứ hai tìm được vị trí trống tức là :

$$p_2 = \frac{k}{N} \cdot \frac{N-k}{N-1}$$

Một cách tuần tự, ta tính được xác suất p_i của sự kiện cần i lần thăm dò để đưa phần tử mới vào bảng. Như vậy ta có :

$$p_1 = \frac{N-k}{N}$$

$$p_2 = \frac{k}{N} \cdot \frac{N-k}{N-1}$$

$$p_3 = \frac{k}{N} \cdot \frac{k-1}{N-1} \cdot \frac{n-k}{N-2},$$

$$p_i = \frac{k}{N} \cdot \frac{k-1}{N-1} \cdots \frac{k-i+2}{N-i+2} \cdot \frac{N-k}{N-i+1}$$

Cần lưu ý rằng, để đưa phần tử mới vào bảng đã chứa k phần tử đòi hỏi nhiều nhất là k + 1 lần thăm dò. Từ công thức tính giá trị trung bình (phương sai) của một đại lượng ngẫu nhiên, ta tính được số trung bình các lần thăm dò để đưa một phần tử mới vào bảng đã chứa k phần tử

$$E_k = \sum_{i=1}^{k+1} i \cdot p_i = \frac{N+1}{N-k+1}$$

Ta có nhận xét rằng, số lần thăm dò cần để tìm kiếm một phần tử trong bảng cũng chính là số lần thăm dò để đưa nó vào bảng.

Giả sử bảng có chiều là N và nó chứa M phần tử. Khi đó số trung bình các lần thăm dò cần để tìm kiếm một phần tử trong bảng là :

$$E = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} E_k = \frac{N+1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{N-k+1}$$

$$= \frac{N+1}{M} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N-M+2} \right)$$

$$= \frac{N+1}{M} \left(H_{N+1} - H_{N-M+1} \right)$$

trong đó, $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}$ **là hàm điều hoà.**

Giá trị gần đúng của hàm điều hoà được cho bởi công thức :

$$H_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \frac{1}{120N^4} - \varepsilon$$

trong đó 0 < ε < $\frac{1}{252N^6}$, còn ϒ = 0, 5772156649.

là hằng số Ơle. Do đó ta có thể xem $H_N \approx \ln N + \gamma$.

Vậy

$$E = \frac{N+1}{M}\left[\ln(N+1) - \ln(N-M+1)\right]$$

Đặt $\frac{M}{N+1} = \alpha$ **, ta có**

$$E = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{N+1}{N-M+1} = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{N-M+1}{N+1} = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha)$$

Số α được gọi là *hệ số đầy*, vì nó gần bằng tỉ số giữa số phần tử có trong bảng và chiều của bảng. Với α = 0 có nghĩa là bảng trống, còn $\alpha = \frac{N}{N+1}$ **có nghĩa là bảng đã đầy. Công thức :**

$$E = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha)$$

cho phép ta tính được số trung bình E các lần thăm dò cần thiết để tìm kiếm, xen vào bảng một phần tử, theo hệ số đầy của bảng α. Giá trị của α và E tương ứng được cho trong bảng sau :

α	E
0,1	1,05
0,25	1,15
0,5	1,39
0,75	1,55
0,9	2,56
0,95	3,15

Nhìn vào bảng này ta thấy, bảng băm đóng là một phương pháp cực kỳ có hiệu quả để cài đặt từ điển (tập hợp với các phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ), cũng như nhiều kiểu dữ liệu trừu tượng khác. Ngay cả khi bảng đã đầy tới 95%, thì cũng chỉ cần gần 3 lần thăm dò là tìm ra được phần tử cần tìm trong bảng, hoặc tìm ra được vị trí trống để đưa phần tử mới vào bảng.

Hạn chế căn bản của bảng băm đóng là không gian nhớ giành để lưu giữ các phần tử của tập hợp bị cố định. Vì vậy muốn vừa để tiết kiệm không gian nhớ vừa để tránh đầy tràn, ta cần phải đánh giá để lựa chọn chiều của bảng cho thích hợp.

5.6. Hàng ưu tiên

Trong mục này chúng ta sẽ xét kiểu dữ liệu trừu tượng hàng ưu tiên. Hàng ưu tiên là tập hợp cùng với hai phép toán Insert và DeleteMin. Phép toán Insert có ý nghĩa thông thường : xen phần tử mới vào tập hợp. Ta cần phải xác định phép toán DeleteMin. Giả sử Pri là hàm ưu tiên trên tập hợp A nào đó tức Pri là ánh từ từ tập A vào một tập P nào đó

$$\text{Pri} : A \rightarrow P$$

trong đó P là tập được sắp thứ tự tuyến tính (thông thường P là tập số nguyên hay tập số thực nào đó). Với mỗi a $\in$ A, ta gọi Pri (a) là giá trị ưu tiên của a.

Phép toán DeleteMin trên tập A là tìm trên tập a phần tử a có Pri (a) nhỏ nhất và loại nó khỏi tập A.

Thuật ngữ : "hàng ưu tiên" có ý nghĩa như sau. Từ : "hàng" nói lên rằng, các phần tử thuộc tập hợp (người hoặc đối tượng nào đó) chờ đợi được "phục vụ". Từ "ưu tiên" có nghĩa rằng, sự phục vụ ở đây không được tiến hành theo chế độ "ai vào hàng trước được phục vụ trước" như đối với hàng đã xét trong chương 3 mà phụ thuộc vào mức ưu tiên được xác định trên các phần tử của hàng.

Chúng ta có thể kể ra rất nhiều ví dụ về hàng ưu tiên. Chẳng hạn, trong một hệ phân chia thời gian thường có nhiều nhiệm vụ chờ đợi được xử lý, trong đó có những nhiệm vụ cần được xử lý trước các nhiệm vụ khác. Khi đó tập hợp các nhiệm vụ chờ đợi được xử lý lập thành một hàng ưu tiên. Trong thực tế, việc mô phỏng các quá trình gồm các sự kiện độc lập với thời gian cũng dẫn đến việc xét các hàng ưu tiên.

Cài đặt hàng ưu tiên.

Chúng ta có thể biểu diễn hàng ưu tiên bởi danh sách được sắp hoặc không được sắp. Danh sách này có thể cài đặt bởi mảng hoặc dưới dạng danh sách liên kết. Tốt nhất ta biểu diễn hàng ưu tiên dưới dạng danh sách liên kết. Nếu danh sách được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của giá trị ưu tiên của các phần tử, thì phần tử cần loại bỏ trong phép toán DeleteMin là phần tử đầu tiên trong danh sách, do đó chỉ cần thời gian

không đổi để thực hiện phép toán này. Song để xen vào danh sách một phần tử mới, ta phải tìm vị trí thích hợp để đặt nó vào , do đó phép toán Insert đòi hỏi phải có thời gian 0 (n), với danh sách có n phần tử. Nếu ta cài đặt hàng ưu tiên bởi danh sách liên kết không được sắp, thì khi xen phần tử mới vào hàng, ta chỉ cần đưa nó vào đầu danh sách. Nhưng việc thực hiện phép toán DeleteMin lại chậm.

Bạn đọc hãy viết (xem như bài tập) các thủ tục thực hiện các phép toán Insert và DeleteMin trong cách cài đặt hàng ưu tiên bởi danh sách liên kết được sắp và không được sắp.

Ta có nhận xét rằng, bảng băm không thích hợp để biểu diễn hàng ưu tiên. Lý do là, bảng băm không cho ta cách nào thuận tiện để tìm ra phần tử có giá trị ưu tiên nhỏ nhất.

Trong phần sau ta sẽ đưa ra một phương pháp mới để biểu diễn hàng ưu tiên.

5.7. Heap và cài đặt hàng ưu tiên bởi heap.

Heap là một cây nhị phân gắn nhãn với các nhãn là các giá trị thuộc tập hợp được sắp thứ tự tuyến tính, sao cho những điều kiện sau đây được thực hiện.

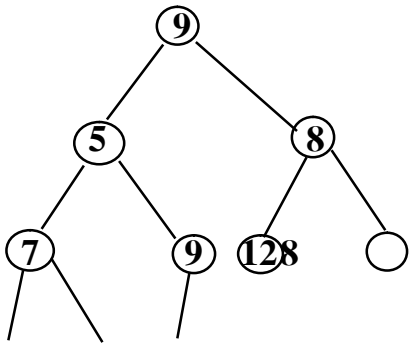
1. Tất cả các mức của cây đều đầy, trừ mức thấp nhất có thể thiếu một số đỉnh.

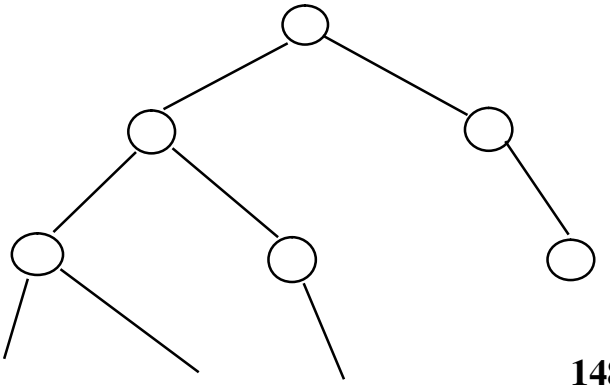
2. Ở mức thấp nhất, tất cả các lá đều xuất hiện liên tiếp từ bên trái.

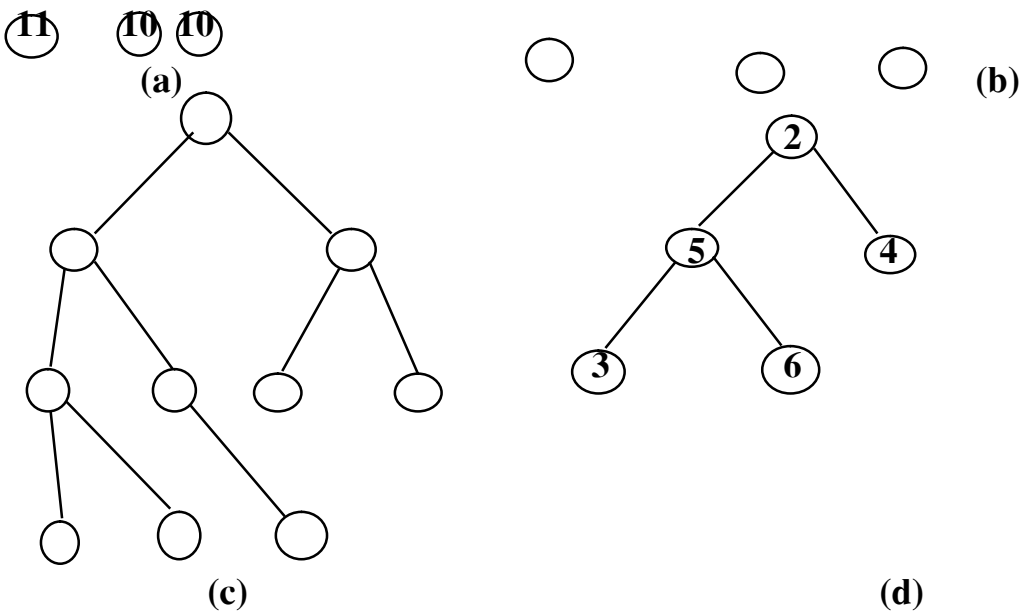
3. Giá trị của mỗi đỉnh không lớn hơn giá trị của các đỉnh con của nó.

Cần chú ý rằng, điều kiện 3 không đảm bảo heap là cây tìm kiếm nhị phân.

Hình 5.3 minh hoạ một số cây nhị phân với các giá trị của các đỉnh là các số nguyên được ghi trong mỗi đỉnh. Hình a là một heap. Còn các hình b, c, d không phải là heap. Cây trong b vi phạm điều kiện 1, hình c vi phạm điều kiện 2, còn hình d vi phạm điều kiện 3.







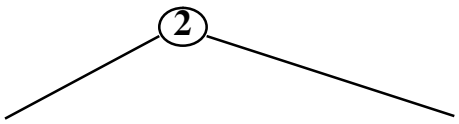
Hình 5.3

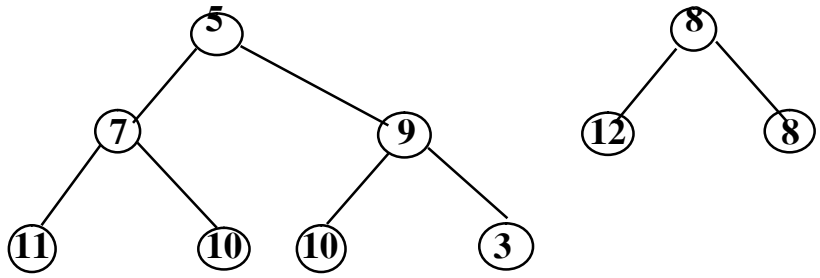
Chú ý 1) Thuật ngữ heap ở đây là hoàn toàn khác, không liên quan gì đến thuật ngữ heap dùng để chỉ vùng nhớ động. 2) một số tác giả còn gọi heap là cây được sắp bộ phận (partially ordered tree).

Khi lấy giá trị ưu tiên làm giá trị của mỗi đỉnh, ta có thể sử dụng heap để biểu diễn hàng ưu tiên. Sau đây ta sẽ xét xem các phép toán đối với hàng ưu tiên được thực hiện trên heap như thế nào.

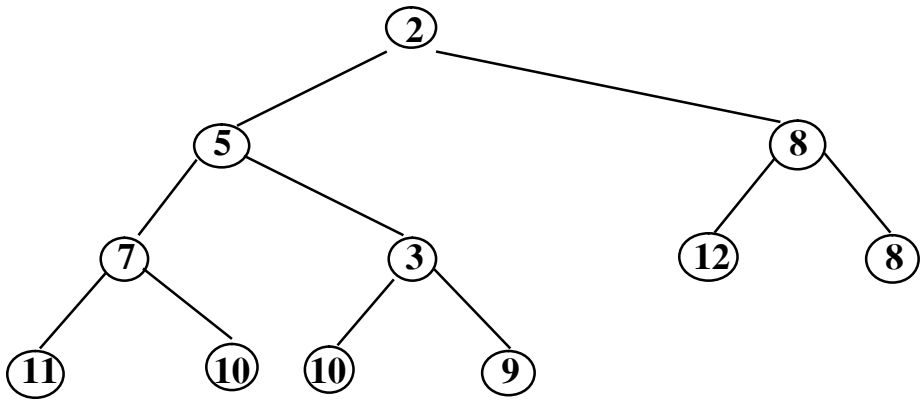
Phép toán Insert

Để xen một phần tử mới vào heap, đầu tiên ta thêm một lá mới liền kề với các lá ở mức thấp nhất, nếu mức thấp nhất chưa đầy; còn nếu mức thấp nhất đầy, thì ta thêm vào một lá ở mức mới sao cho các điều kiện của 1 và 2 của heap được bảo tồn. Hình 5.4a minh hoạ cây sau khi thêm một lá mới với giá trị ưu tiên là 3 vào heap trong hình 5.3 a. Tất nhiên là cây nhị phân trong hình 5.4 a nói chung không còn là heap, vì điều kiện 3 có thể bị vi phạm. Nếu sau khi thêm vào lá mới cây không còn là heap, thì ta theo đường từ lá mới tới gốc cây. Nếu một đỉnh có giá trị ưu tiên nhỏ hơn đỉnh cha của nó, thì ta trao đổi đỉnh đó với cha của nó. Quá trình này được minh hoạ trong hình 5.4 b và c. Dễ dàng chứng minh được rằng, sau quá trình biến đổi trên ta có một heap (bài tập).

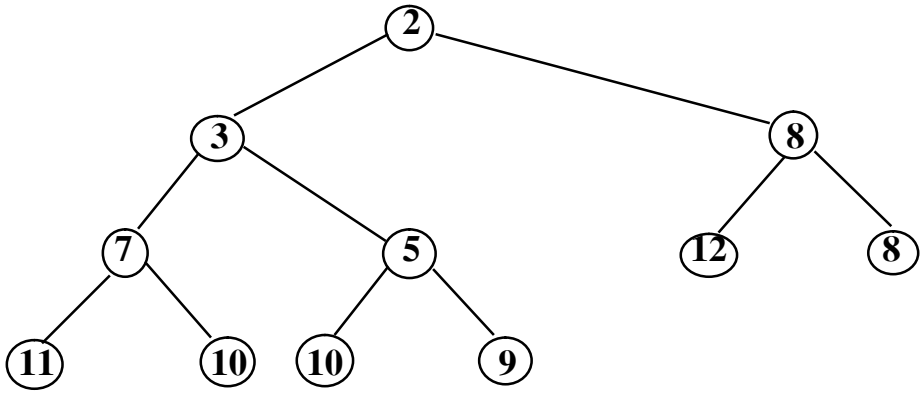




(a)



(b)

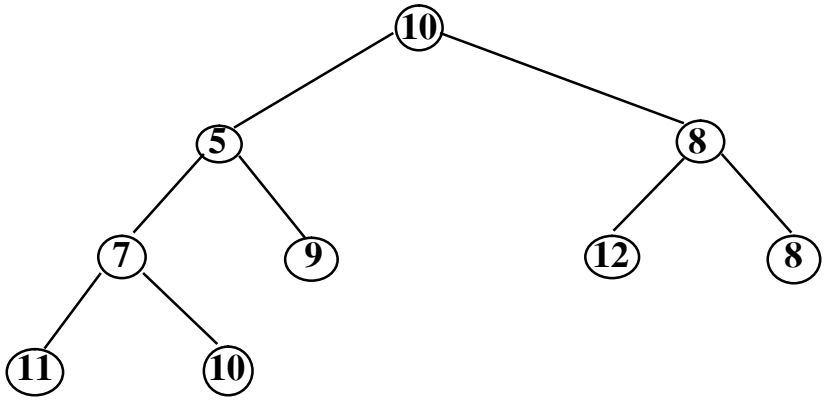


(c)

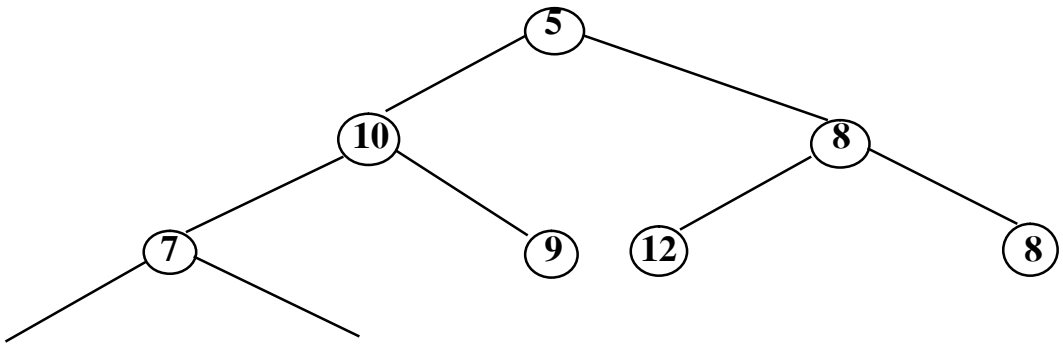
Hình 5.4

Phép toán DeleteMin

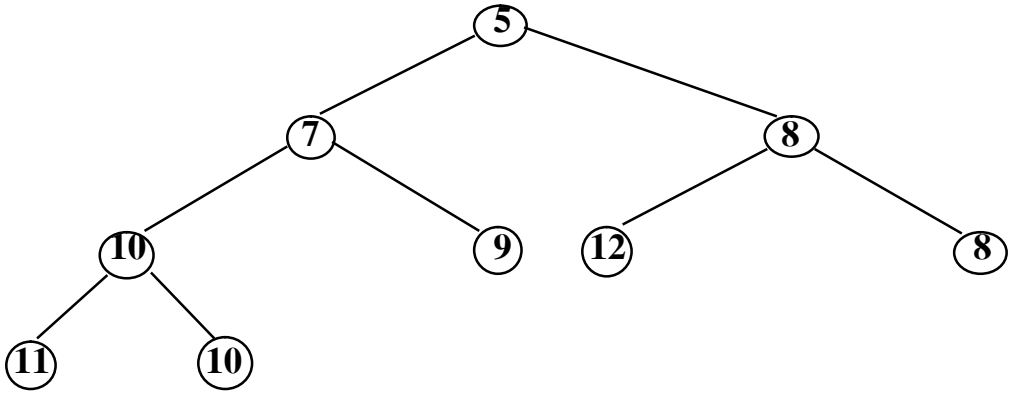
Hiển nhiên là gốc của cây có giá trị ưu tiên nhỏ nhất. Tuy nhiên nếu loại bỏ gốc thì cây không còn là cây nữa. Do đó ta tiến hành như sau : đặt vào gốc phần tử của hàng ưu tiên chứa trong lá ngoài cùng bên phải ở mức thống nhất, sau đó loại bỏ lá này khỏi cây. Hình 5.5 a minh hoạ cây nhận được từ cây trong hình 5.3 a sau phép biến đổi trên. Tới đây cây có thể không còn là heap, do điều kiện 3 của định nghĩa heap bị vi phạm ở gốc cây. Bây giờ ta đi từ gốc xuống. Giả sử tại một bước nào đó ta đang ở đỉnh a và hai đỉnh con của nó là b và c. Giả sử đỉnh a có giá trị ưu tiên lớn hơn giá trị ưu tiên của ít nhất một trong hai đỉnh b và c. Để xác định, ta giả sử rằng giá trị ưu tiên của đỉnh b không lớn hơn giá trị ưu tiên của đỉnh c, pri (b) ≤ pri (c). Khi đó ta sẽ trao đổi đỉnh a với đỉnh b và đi xuống đỉnh b. Quá trình đi xuống sẽ dừng lại cùng lắm là khi ta đạt tới một lá của cây. Ta có thể thấy quá trình diễn ra như thế nào trong hình 5.5 b và c.



(a)



(b)



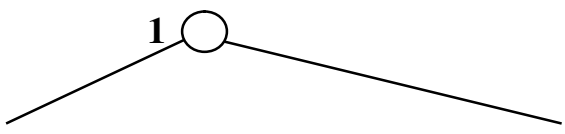
(c)

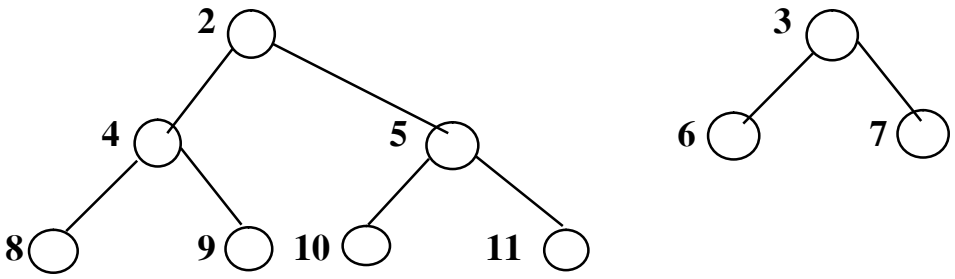
Hình 5.5

Bây giờ ta thử đánh giá thời gian cần thiết để thực hiện các phép toán Insert và DeleteMin đối với hàng ưu tiên được biểu diễn bởi heap. Giả sử hàng chứa n phần tử. Khi đó mọi đường đi trong cây không chứa nhiều hơn 1 + logn đỉnh. Thủ tục thực hiện các phép toán đã trình bày ở trên đều chứa quá trình đó đitừ lá lên gốc hoặc ngược lại. Trong quá trình mỗi đỉnh đòi hỏi một thời gian không đổi c nào đó. Do đó thời gian để thực hiện mỗi phép toán cùng lắm là c (1 + logn) ≤ 2c logn, với n ≥ 2, tức là 0 (logn).

Cài đặt heap bởi mảng

Giả sử ta đánh số các đỉnh của heap từ trên xuống dưới và từ trái sang phải (trong cùng một mức), bắt đầu từ gốc có số hiệu là 1 (xem hình 5.6)





Hình 5.6

Từ các điều kiện 1 và 2 trong định nghĩa của heap, ta nhận thấy rằng, nếu một đỉnh có số hiệu là i, thì đỉnh con bên trái (nếu có) của nó là 2i, và đỉnh con bên phải (nếu có) của nó là 2i + 1. Hay nói cách khác cha của đỉnh i là đỉnh i div 2 với i > 1. Nếu ta sử dụng mảng H với chỉ số chạy từ 1 đến N (N là số lớn nhất các phần tử có trong hàng ưu tiên), thì các đỉnh của cây kể từ gốc lần lượt theo các mức và trong cùng một mức được kể từ trái sang phải, sẽ chứa trong các thành phần của mảng H [1], H [2], ..., H [n]. Do đó ta sẽ cài đặt hàng ưu tiên bởi mảng H cùng với một biến last để ghi chỉ số cuối cùng của thành phần mảng có chứa phần tử của hàng. Chúng ta có khai báo sau

```
const     N = ......;
type      PriQueue = record
                       element : array [1.. N] of item;
                       last : integer
                       end;
```

{item là kiểu bản ghi nào đó mô tả phần tử của hàng ưu tiên}.

```
var       H : PriQueuen;
```

Việc khởi tạo một hàng rỗng được thực hiện bởi lệnh

```
H.last : = 0
```

Từ các thuật toán thực hiện các phép toán Insert và DeleteMin đã trình bày, ta dễ dàng viết được các thủ tục thực hiện các phép toán trên hàng ưu tiên.

```
procedure  Insert (x : item; var H : PriQueue);
    var    i : integer;
```

```
            temp : item;
        begin
            if H. last > = N then writeln ('hàng đầy')
            else begin
                H. last : = H. last + 1;
                H. element [H. last] : = x;
                i : = H. last;
        {i ghi lại số hiệu lá mới thêm vào}
                while (i > 1) and (Pri(H.element [i]) <
                    Pri(H.element[i div 2])) do
                    begin
                        temp : = H. element [i];
                        H. element [i] : = H. element [i div
2];
                        H.element [i div 2] : = temp;
                        i : = i div 2
                    end
          {vòng lặp while thực hiện quá trình đi từ lá mới lên}
                end
            end;


    procedure   DeleteMin (var H : PriQueue; var x : item);
    {loại bỏ phần tử có giá trị ưu tiên nhỏ nhất khỏi hàng và phần tử
này được lưu vào biến x}
    var    i, j : integer;
        {i ghi lại số hiệu của các đỉnh trong quá trình đi từ gốc
xuống; j ghi lại một trong hai đỉnh con của i có giá trị ưu tiên nhỏ hơn
đỉnh kia}.
    temp : item;
        Condition3 : boolean;
```

```
        {biến condition3 chỉ ra điều kiện 3 của heap có thoả mãn hay
không}
    begin
    if  H. last = 0 then writeln (' hàng rỗng')
    else begin
                x : = H. element [1];
                H. element [1] : = H. element [ H.last];
                H. last : = H. last + 1;
                i = 1;
            condition 3 : = false;
    while (i < = H. last div 2) and (not condition 3) do
            begin
                if 2 * i = H. last then j : = 2 * i
                else if Pri (H. element [2 * i] < = Pri (H. element
[2*i+1]
                            then j : = 2 *i else j : = 2 * i +1;
                if Pri (H.element [i] > Pri (H. element [j] then
                    begin
                            temp : = H.element [i];
                            H. element [i] : = H. element [j];
                            H. element [j] : = temp;
                            i : = j
                        end   else   condition3 : = true;
                end;
            end;
    end;
```

Trong thủ tục trên, vòng lặp while thực hiện quá trình đi từ gốc xuống và dừng lại khi điều kiện 3 được thoả mãn.

Chương 6

BẢNG

Trong chương trước chúng ta đã nghiên cứu mô hình dữ liệu tập hợp và một số kiểu dữ liệu trừu tượng (từ điển, hàng ưu tiên) được xây dựng trên cơ sở khái niệm tập hợp. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu kiểu dữ liệu trừu tượng bảng được xây dựng trên cở sở khái niệm hàm (ánh xạ). Chúng ta cũng sẽ xét việc cài đặt một trường hợp đặc biệt của bảng, đó là các bảng chữ nhật.

6.1. Kiểu dữ liệu trừu tượng bảng :

Trước hết chúng ta nhắc lại khái niệm hàm trong toán học. Nhớ lại rằng, một quan hệ R từ tập A đến tập B là một tập con nào đó của tích đêcac A x B, tức là R là một tập hợp nào đó các cặp (a, b) với $a \in A$, $b \in B$. Một hàm f : $A \rightarrow B$ (f là hàm từ A đến B) là một quan hệ f từ A đến B sao cho nếu $(a, b) \in f$ và $(a, c) \in f$ thì b = c. Tức là, quan hệ f là một hàm, nếu nó không chứa các cặp (a, b), (a, c) với $b \neq c$. Nếu $(a, b) \in f$, thì ta nói b là giá trị của hàm f tại a và ký hiệu là f (a), b = f (a). Tập hợp tất cả các $a \in A$, sao cho tồn tại cặp $(a, b) \in f$, được gọi là miền xác định của hàm f và ký hiệu là Dom (f).

Có những hàm, chẳng hạn hàm $f(x) = e^x$, ta có thuật toán để xác định giá trị của hàm f(x) với mỗi x. Với những hàm như thế ta có thể cài đặt bởi các hàm trong Pascal hoặc C. Tuy nhiên có rất nhiều hàm. Chẳng hạn hàm cho tương ứng mỗi nhân viên làm việc trong một cơ quan với lương hiện tại của người đó, ta chỉ có thể mô tả bởi bảng lương. Trong các trường hợp như thế, để mô tả một hàm f : $A \rightarrow B$, ta phải lưu giữ một bảng mô tả các thông tin về các đối tượng $a \in A$ và các thông tin về các đối tượng $b \in B$ tương ứng với mỗi a.

Một bảng với tập chỉ số A và tập giá trị B là một hàm f nào đó từ A đến B cùng với các phép toán sau đây :

1. Truy xuất : với chỉ số cho trước a thuộc miền xác định của hàm, tìm ra giá trị của hàm tại a.

2. Sửa đổi : với chỉ số cho trước a thuộc miền xác định của hàm, thay giá trị của hàm tại a bởi một giá trị khác cho trước.

3. Xen vào : thêm vào miền xác định của hàm một chỉ số mới và xác định giá trị của hàm tại đó.

4. Loại bỏ : loại một chỉ số nào đó khỏi miền xác định của hàm cùng với giá trị của hàm tại đó.

Đối với bảng, các phép toán truy xuất và sửa đổi là quan trọng nhất. Thông thường trong các áp dụng, khi đã lưu giữ một bảng, ta chỉ cần đến việc truy xuất thông tin từ bảng và sửa đổi thông tin trong bảng. Tuy nhiên trong một số áp dụng ta phải cần đến các phép toán xen vào và loại bỏ.

Sau đây chúng ta đưa ra một ví dụ về bảng. Một ma trận m hàng, n cột B = [b_{ij}] có thể xem như một bảng. Tập chỉ số A ở đây là tập các cặp (i, j) với i = 1, 2, ... , M và j = 1, 2, ..., N. Nếu ma trận là ma trận các số nguyên, ta có thể xét ma trận như một hàm f từ tập chỉ số đến tập các số nguyên, trong đó F (i, j) = b_{ij}. sau này chúng ta sẽ gọi các bảng mà tập chỉ số là tập các cặp (i, j) với i = 1, 2, ..., M và j = 1, 2, ..., N là các bảng chữ nhật có M hàng và N cột.

6.2. Cài đặt bảng :

6.2.1 Cài đặt bảng bởi mảng :

Giả sử tập chỉ số của bảng là một kiểu đơn có thể dùng làm kiểu chỉ số của một mảng. Trong Pascal kiểu chỉ số của mảng có thể là miền con của các số nguyên, chẳng hạn 1 . . 1000; có thể là kiểu ký tự hoặc miền con của kiểu ký tự, chẳng hạn 'A' . . 'Z', có thể là một kiểu liệt kê hoăch miền con của kiểu liệt kê nào đó. Trong trường hợp này, ta có thể biểu diễn bảng bởi mảng. Để chỉ rằng, tại một chỉ số nào đó hàm không xác định, ta đưa thêm vào một giá trị mới undefined (không xác định) khác với tất cả các giá trị thuộc tập giá trị của bảng. Tại các chỉ số mà hàm không xác định, ta sẽ gán cho các thành phần của mảng tại các chỉ số đó giá trị undefined.

Ta có thể khai báo kiểu bảng như sau :

```
type   table = array [indextype] of valuetype;
```

{indextype là kiểu chỉ số, valuetupe là kiểu giá trị của bảng bao gồm giá trị undefine}.

```
var T : table;
    i : indextype;
```

Giả sử value1, value2 là chỉ số đầu tiên và cuối cùng, khi đó việc khởi tạo một bảng rỗng (ánh xạ không xác định khắp nơi) được thực hiện bởi lệnh

```
For i : = value1 to value2 do
```

```
T [i] : = undefined;
```

Việc cài đặt bảng bởi mảng cho phép ta truy cập trực tiếp đến mỗi thành phần của bảng. các phép toán đối với bảng được thực hiện rất dễ dàng (bạn đọc có thể thấy ngay cần phải làm gì) và chỉ đòi hỏi một thời gian 0 (1). Cần chú ý rằng, nếu tập chỉ số của bảng không thể dùng làm kiểu chỉ số của mảng, nhưng có thể mã hoá bởi một kiểu chỉ số nào đó của mảng, thì ta cũng có thể cài đặt bảng bởi mảng. Quá trình cài đặt gồm hai giai đoạn, đầu tiên là mã hoá tập chỉ số để có một kiểu chỉ số của mảng, sau đó mới dùng mảng.

6.2.2. Cài đặt bảng bởi danh sách

Vì một bảng với tập chỉ số A và tập giá trị B có thể xem như một tập nào đó các cặp (a, b), trong đó a ∈ A và b ∈ B là giá trị tương ứng với a. Do đó, ta có thể biểu diễn bảng bởi danh sách các cặp (a, b).

Nói cụ thể hơn, ta có thể cài đặt bảng bởi danh sách các phần tử, mỗi phần tử là một bản ghi có dạng :

```
type        element = record
                        index : indextype;
                        value : valuetype
                      end;
```

Ở đây danh sách có thể được cài đặt bởi một trong các cách mà ta đã xét trong chương 3. Tức là ta có thể cài đặt bởi danh sách kế cận (dùng mảng) hoặc danh sách liên kết. Các phép toán đối với bảng được qui về các phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ trên danh sách. Rõ ràng là, với cách cài đặt đặt này, các phép toán đối với bảng được thực hiện kém hiệu quả, vì chúng đòi hỏi thời gian trung bình tỉ lệ với số thành phần của bảng.

Nếu có một thứ tự tuyến tính xác định trên tập chỉ số của bảng, ta nên cài đặt bảng bởi danh sách được sắp theo thứ tự đã xác định trên tập chỉ số.

6.2.3. Cài đặt bảng bởi bảng băm.

Trong nhiều cảnh huống, bảng băm là cấu trúc dữ liệu thích hợp nhất để cài đặt một bảng.

Việc xây dựng các bảng băm (mở hoặc đóng) để biểu diễn một bảng hoàn toàn giống như việc xây dựng bảng băm cho từ điển. Chúng ta chỉ cần lưu ý một số điểm khác sau đây.

Các hàm băm sẽ "băm" các phần tử của tập chỉ số A của bảng vào các 'rổ'. Tức là nếu bảng băm gồm N rổ thì hàm băm là hàm h từ tập chỉ số A vào tập {0, 1 . . . . N-1}.

Trong bảng băm mở, đối với từ điển ta có mỗi rổ là một danh sách các phần tử của từ điển; Còn đối với bảng, với tập chỉ số A và tập giá trị B thì mỗi rổ là một danh sách nào đó, các cặp (a, b) trong đó a ∈ A, b ∈ B. Chính xác hơn, cấu trúc dữ liệu bảng băm mở biểu diễn bảng được khai báo như sau :

```
type        pointer = ^cell;
type  cell   = record
                    index : indextype;
                    value : valuetype;
                    next :  pointer
               end;
      table = array [0 . . N-1] of pointer;
```

Hiển nhiên bảng băm đóng biểu diễn bảng sẽ có cấu trúc được mô tả sau :

```
type        table = array [0 . . N-1] of element;
```

trong đó, element là bản ghi đã khai báo trong mục 6.2.2.

Trong cách cài đặt bảng bởi bảng băm (mở hoặc đóng), phép toán truy xuất và sửa đổi bảng chính là phép tìm kiếm trên bảng băm theo chỉ số a ∈ A và đọc hoặc thay đổi giá trị của trường value của bản ghi có trường index là a. Còn phép toán xen vào và loại bỏ trên bảng là phép toán xen vào và loại bỏ trên bảng băm theo chỉ số đã cho.

6.3. Bảng chữ nhật

Trong mục này chúng ta sẽ xét việc cài đặt các bảng chữ nhật, tức là các bảng mà các thành phần của bảng được xếp thành hình chữ nhật gồm M hàng và N cột. Vì tầm quan trọng đặc biệt của các bảng chữ nhật, nên trong hầu hết các ngôn ngữ lập trình bậc cao đều có phương tiện thuận tiện và hiệu quả để biểu diễn bảng chữ nhật, đó là mảng hai chiều. Chẳng hạn, trong Pascal một bảng chữ nhật M hàng và N cột có khai báo

```
type        table = array [1 . . M, 1 . . N] of elementtype;
```

trong đó elementtype là kiểu của các phần tử của bảng.

Cách tự nhiên nhất để đọc thông tin trong một bảng chữ nhật là lần lượt theo hàng và trong một hàng từ trái sang phải. Đó cũng chính là cách mà các chương trình dịch xếp các thành phần vào các vùng nhớ liên tiếp của bộ nhớ trong. Do đó, nếu T là một TABLE và biết được địa chỉ của vùng nhớ lưu giữ thành phần T [o, ơ], ta sẽ xác định được ngay địa chỉ của T [i, j]. Mảng T sẽ được giành riêng một không gian nhớ cố định gồm M x N đơn vị nhớ liên tiếp (ở đây, đơn vị nhớ được xem là vùng nhớ để lưu giữ một thành phần của mảng).

Trong nhiều bài toán, ta không cần thiết phải biểu diễn thông tin ở tại mọi vị trí trong bảng. Có thể xẩy ra, trong một bảng chỉ có một số giá trị tại một số vị trí là có nghĩa, còn các giá trị tại các vị trí còn lại là bằng nhau hoặc ta không cần quan tâm đến. Chẳng hạn như bảng các số nguyên trong hình 6.1.

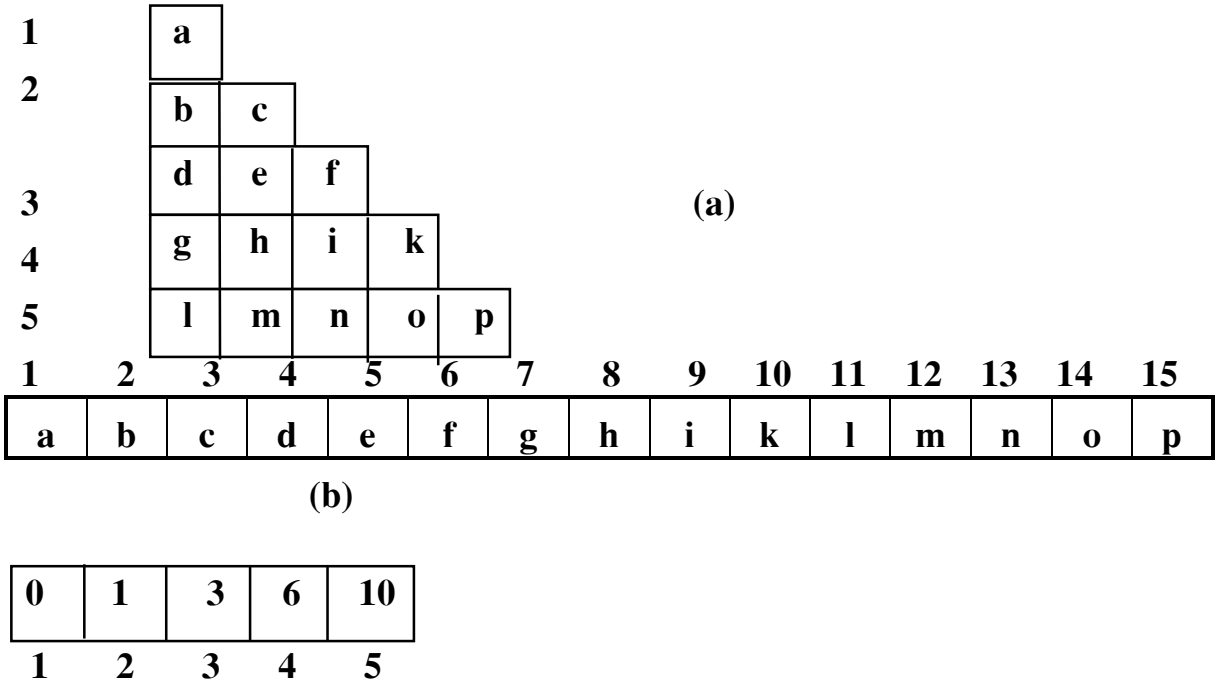
6	0	0	7	0
0	0	0	0	0
0	8	0	1	9
3	0	0	0	0

Hình 6.1 Một ví dụ về bảng thưa thớt

Bảng này chỉ chứa 6 thành phần khác không, còn 14 thành phần còn lại bằng 0. Các bảng như thế gọi là các *bảng thưa thớt*. Hiển nhiên nếu cài đặt các bảng thưa thớt bởi mảng hai chiều sẽ lãng phí nhiều bộ nhớ. Chẳng hạn một ma trận nguyên 200 x 200, mỗi hàng không có quá 4 thành phần khác 0, nếu dùng mảng sẽ dùng đến 80.000 byte. Trong khi đó, nếu dùng phương pháp thích hợp, có thể chỉ cần đến 1/10 không gian nhớ đó. Sau đây ta sẽ nghiên cứu việc cài đặt những bảng có dạng đặc biệt.

6.3.1. Bảng tam giác và bảng răng lược.

Bảng tam giác là bảng vuông (số dòng bằng số cột) mà tất cả các thành phần có nghĩa trong bảng đều nằm ở các vị trí (i, j) với j ≤ i). Ví dụ bảng trong hình 6.2a là bảng tam giác, phần chứa thông tin có nghĩa đều nằm ở các vị trí (i, j) với j ≤ i. Với bảng tam giác n dòng, ta chỉ cần lưu giữ 1 + 2 + . . . + n = n (n + 1)/2 thành phần. Ta sẽ dùng một mảng một chiều để lưu giữ các thành phần của bảng (hình 6.2b). Các thành phần của bảng lần lượt theo dòng, trong một dòng kể từ trái sang phải, được lưu vào các thành phần của mảng. Để biết được thành phần của mảng T chứa thành phần của bảng tại vị trí (i, j) bất kỳ, ta đưa vào một mảng phụ P. Mảng này có số chiều bằng số dòng của bảng. Với mỗi dòng i, 1 ≤ i ≤ n, P[i] chứa vị trí trong mảng T kể từ đó ta sẽ lưu giữ các thành phần của bảng ở dòng i (hình 6.2c)



(c)

Hình 6.2 Bảng tam giác

Ta dễ dàng tính được các giá trị của mảng P

P [1] = 0

P [2] = 1

P [3] = 2 + 1 = 3

. . . . . .

P [] = i - 1 + P[i - 1]

Biết được các P [i], ta xác định được thành phần của mảng T lưu giữ thành phần của bảng tại vị trí (i, j) bất kỳ. Cụ thể, thành phần của bảng tại vị trí (i, j) được lưu giữ tại vị trí P [i] + j của mảng T. Chẳng hạn, ký tự h ở vị trí (4, 2) trong bảng được lưu giữ ở vị trí P[4] + 2 = 6 + 2 = 8 trong mảng T. Như vậy, ta đã cài đặt một bảng tam giác bởi hai mảng một chiều T và P. Như trên đã chứng tỏ với cách cài đặt này ta có thể truy cập trực tiếp đến từng thành phần của bảng.

Một bảng răng lược là bảng chữ nhật mà trong mỗi dòng các thông tin trong bảng được xếp liên tục kể từ cột thứ nhất (số phần tử trong mỗi dòng nhiều ít tuỳ ý). Hình 6.3 minh hoạ một bảng răng lược.

1	a	b	c				
2	d	e	f	g	h	i	k
3							
4	l	m					
5	n	o	p	q	r		
6	s	t	u	v			

Hình 6.3 Minh hoạ một bảng răng lược

Bằng cách hoàn toàn tương tự như đối với bảng tam giác, ta có thể cài đặt bảng răng lược bởi hai mảng một chiều T và P. Các thành phần của bảng răng lược cũng được xếp vào mảng T lần lượt theo hàng và theo cột. Điều khác nhau duy nhất ở đây là, giá trị chứa trong mỗi thành phần khác nhau của mảng P được xác định như sau :

P [1] = 0,

P [i] = P [i - 1] + số thành phần của bảng ở dòng i - 1 với mọi i > 1. Chẳng hạn, với bảng trong hình 6.2, ta có P [1] = 0, P [2] = 3, P [3] = 10, P [4] = 10, P [5] = 12, P [6] = 17.

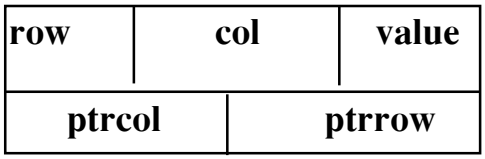
6.3.2. Bảng thưa thớt

Bảng thưa thớt là bảng chữ nhật mà các thông tin có nghĩa trong bảng được phân bố một cách thưa thớt, rải rác không theo một qui luật nào cả. Hình 6.1 cho ta một ví dụ về bảng thưa thớt, thông tin chứa trong bảng là các số nguyên. Đương nhiên ở đây là không thể dùng mảng hai chiều để biểu diễn một bảng thưa thớt, vì lãng phí nhiều bộ nhớ. ta cũng không thể dùng mảng một chiều để lưu giữ các thành phần của bảng như ta đã làm đối với bảng tam giác và bảng răng lược. Nguyên nhân là vì, các thành phần có nghiã của bảng phân bố không theo một qui luật nào, nên ta không thể định vị được thành phần của bảng ở trong mảng một chiều.

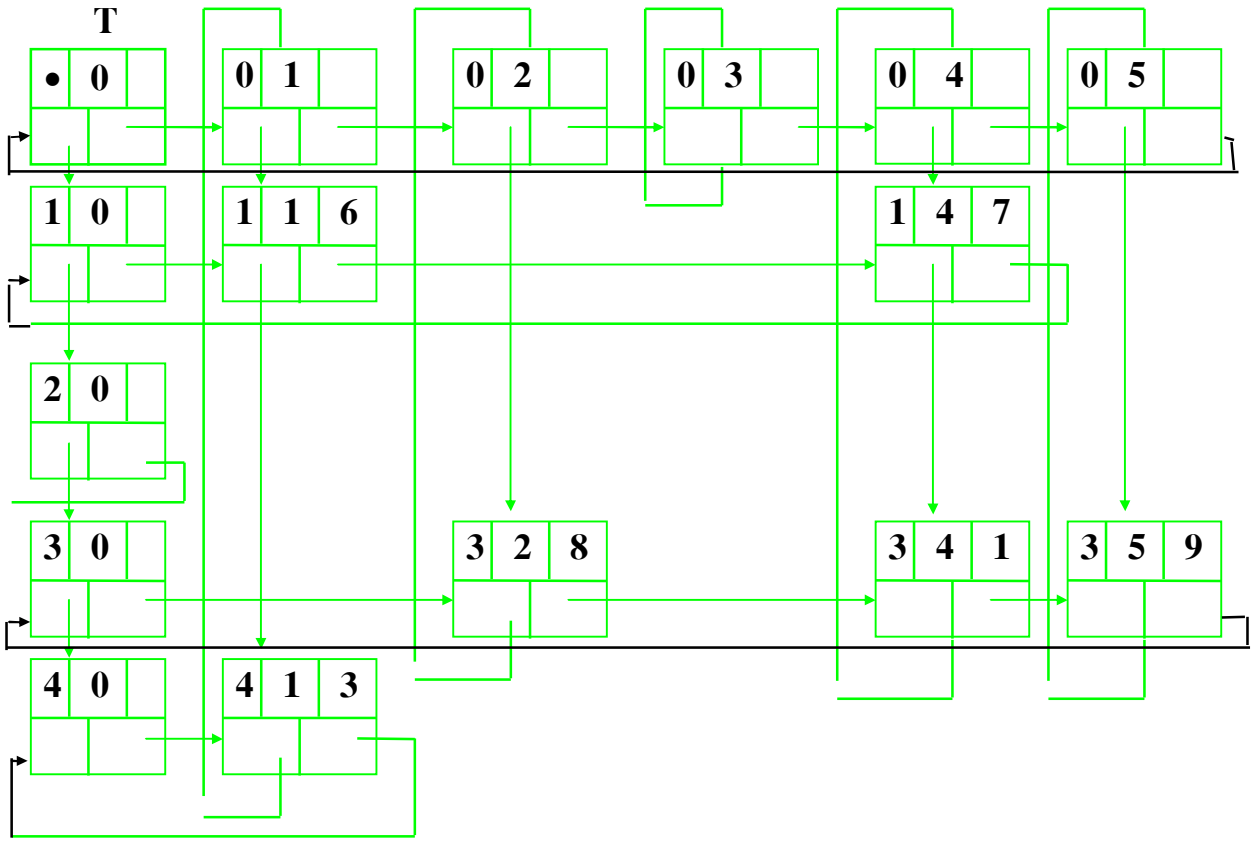
Một phương pháp tốt để cài đặt các bảng thưa thớt là dùng các danh sách liên kết để biểu diễn các hàng và các cột của bảng. Mỗi thành phần của bảng ở vị trí (i, j) được đưa vào hai danh sách : danh sách các thành phần của bảng ở dòng thứ i và danh sách các thành phần của bảng ở cột thứ j. Tức là mỗi thành phần của bảng được biểu diễn bởi một bản ghi có kiểu element được khai báo như sau :

```
type        pointer = ^ element;
            element = record
                        row : integer;
                        col : integer;
                        value : valuetype;
                        ptrrow : pointer;
                        ptrcol : pointer;
                      end;
```

trong đó row và col là chỉ số hàng và cột; ptrrow và ptrcol là con trỏ liên kết trong danh sách hàng và danh sách cột; còn value là giá trị của mỗi thành phần. ta sẽ biểu diễn mỗi bản ghi dưới dạng hình 6.4a. Mỗi hàng và mỗi cột của bảng được biểu diễn bởi danh sách liên kết, vòng tròn và có đầu. Đầu của mỗi hàng có trường col = 0, còn đầu của mỗi cột có trường row = 0. Khi đó, cấu trúc dữ liệu biểu diễn bảng trong hình 6.1 được minh hoạ trong hình 6.4b.



(a)



Một phương pháp khác để cài đặt một bảng thưa thớt là sử dụng hai mảng. Một mảng hai chiều có cỡ như cỡ của bảng, mảng sẽ có giá trị là 1 tại các vị trí mà giá trị của bảng có ý nghĩa và có giá trị là 0 tại các vị trí khác. Ví dụ để biểu diễn bảng trong hình 6.1, ta sử dụng mảng được minh hoạ bởi hình 6.5 a. Bên cạnh mảng hai chiều chỉ chứa 1 hoặc 0, ta sẽ sử dụng một mảng một chiều để lưu lại các giá trị có nghĩa của bảng. Chẳng hạn, hình 6.5b minh hoạ mảng một chiều ứng với bảng trong hình 6.1

1	0	0	1	0
0	0	0	0	0

0	1	0	1	1
1	0	0	0	0

(a)

6	7	8	1	9	3

(b)

Hình 6.5 Mảng một chiều ứng với bảng trong hình 6.1

Hiệu quả tiết kiệm bộ nhớ của phương pháp này là rõ ràng. Chẳng hạn, đối với bảng các số nguyên (như trong hình 6.1), thay cho việc sử dụng mảng các số nguyên (mỗi số nguyên cần 2 byte = 16 bit) ta đã sử dụng mảng các bit.

6.4. Trò chơi đời sống

Trong mục này chúng ta trình bày một áp dụng của phương pháp cài đặt bảng bởi bảng băm để giải quyết bài toán 'trò chơi đời sống' (game of life). Trò chơi đời sống được nhà toán học Anh J.H Conway đưa ra năm 1970.

Đời sống của một cộng đồng các cơ thể sống diễn ra trên một lưới ô vuông không giới hạn. Mỗi ô vuông có thể có một cơ thể sống hoặc không. Ô vuông có một cơ thể sống gọi là tế bào sống, ngược lại là tế bào chết. Các tế bào thay đổi từ thế hệ này sang thế hệ sau tuỳ thuộc vào các tế bào sống ở lân cận. Mỗi tế bào hình vuông có tám tế bào lân cận tiếp giáp với tế bào đã cho theo các cạnh và các góc.

Các tế bào sẽ thay đổi theo các qui luật sau :

1. Nếu một tế bào sống, nhưng số tế bào sống lân cận nó không nhiều hơn 1, thì ở thế hệ sau nó sẽ chết (chết vì cô độc)

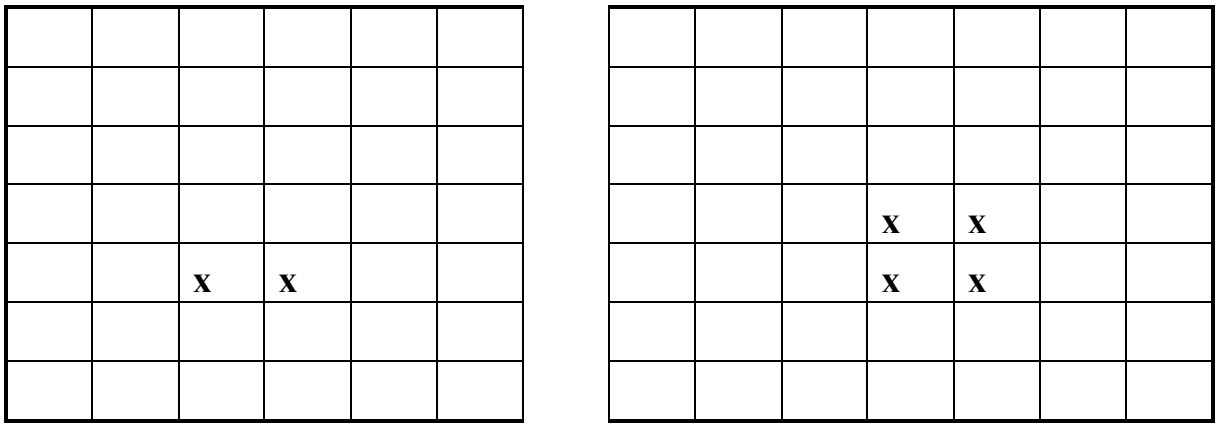
2. Nếu một tế bào sống, nhưng số tế bào sống lân cận nó là 2 hoặc 3, thì ở thế hệ sau nó vẫn sống.

3. Nếu một tế bào sống, nhưng số tế bào sống lân cận nó không ít hơn 4, thì ở thế hệ sau nó sẽ chết (chết vì quá đông!).

4. Nếu một tế bào chết và có đúng 3 tế bào sống ở lân cận, thì ở thế hệ sau nó sẽ trở thành tế bào sống. Trong trường hợp còn lại, một tế bào chết vẫn còn chết ở thế hệ sau.

5. Trong mỗi thế hệ, sự sinh ra và chết đi diễn ra đồng thời, không ảnh hưởng đến nhau.

Sau đây ta sẽ xét sự phát triển của một số cộng đồng tế bào mà thế hệ đầu tiên được cho trong các hình 6.6 (dấu chéo đánh dấu tế bào sống). Cộng đồng trong hình 6.6a sẽ biến mất sau một thế hệ , vì cả hai tế bào cùng chết do cô độc. Cộng đồng trong hình 6.6 b sẽ ổn định từ thế hệ này sang thế hệ khác, vì không có tế bào nào sinh ra cũng không có tế bào nào chết đi. Sự phát triển của cộng đồng trong hình 6.6c giành cho bạn đọc.



(a) **(b)**

(c)

Hình 6.6 Thế hệ đầu tiên của một số cộng đồng tế bào

Chúng ta có thể thấy rằng, từ những cảnh huống ban đầu nhỏ bé, một số cộng đồng có thể phát triển thành những cộng đồng rộng lớn, một số cộng đồng có thể thay đổi và ổn định sau một số thế hệ, hoặc có thể lặp đi lặp lại một số cảnh huống nào đó; một số khác có thể mất đi.

Sau khi ra đời không lâu, trò chơi đời sống đã được Martin Gardner bàn tới trong báo 'Scientific American'. Từ đó nó đã thu hút sự chú ý của nhiều người.

Trò chơi đời sống là một bài tập lập trình rất hay cho những người mới học lập trình và cho cả nhuững ai đã nắm được những cấu trúc dữ liệu phức tạp.

Đầu tiên ta có thể nghĩ ngay đến dùng một mảng chữ nhật khá lớn để biểu diễn các thế hệ của một cộng đồng tế bào. Mảng sẽ có giá trị là 1 tại các vị trí của các tế bào sống và 0 ứng với các tế bào chết. Để xác định được sự thay đổi của các tế bào từ thế hệ này sang thế hệ khác, ta chỉ cần đếm số tế bào sống lân cận mỗi tế bào và áp dụng các luật từ 1) đến 4). Cảnh huống của thế hệ tiếp theo được ghi vào một mảng mới. Ta dễ dàng viết được lược đồ chương trình thực hiện phương án trên.

```
program     LifeGame;
        const
                N = . . . ;
                M = . . . ;
        type
                row = 1 . . N;        {hàng của mảng}
                col  =  1 . . M;      {cột của mảng}
        status = (alive, dead)     {mỗi tế bào ở một trong hai trạng thái
        (status ) : sống (aive) và chết (dead)}
        Table = array [row, col] of status;
var
        T, new T : Table
        i :  row;
        j : col;
        again : boolean;
{Sau đây mô tả các thủ tục và hàm}
procedure Initiation (var T : Table);
        {đưa vào bảng ban đầu}
function      Count (i, j : integer) : 0 . . 8;
{đếm số tế bào sống lân cận tế bào ở vị trí (i, j)}
procedure   copy (new T : Table; vả T : Table);
{sao chép mảng new T sang mảngT}
```

```
begin
        Initiation (T);
        WriteTable (T);
    repeat
        for i : = 1 to N do
            for j : = 1 to M do
                case   count (i, j) of
                    0,1 :      new T [i, j] : = dead;
                      2 :      new T [i, j] : = T [i, j];
                      3 :      new T [i, j] : = alive;
                      4, 5, 6, 7, 8 :        new T[i, j] : = dead
                end;
            Copy (new T, T);
            WriteTable (T);
        Readln (again);
    until       not again
end.
```

Bạn đọc dễ dàng viết được các thủ tục và hàm trong chương trình trên. Riêng đối với hàm count, ta cần lưu ý rằng, để tính được số tế bào sống lân cận một tế bào ta chỉ cần xét 8 tế bào lân cận với tế bào đã cho, nếu nó ở giữa bảng. Còn nếu nó ở rìa bảng thì số tế bào lân cận nó sẽ không phải thế.

Bây giờ ta hãy xét những ưu tiên và hạn chế của chương trình trên. Ưu điểm của chương trình trên là đơn giản và dễ hiểu. Song nó có nhiều nhược điểm. Trước hết ta đã sử dụng mảng để mô tả cảnh huống của các thế hệ tế bào tức là ta đã đóng khung chỉ xét sự phát triển của cộng đồng tế bào trong phạm vi mảng. Trên thực tế từ cảnh huống ban đầu, một cộng đồng có thể sẽ phát triển vượt quá giới hạn của mảng, chỉ sau một số thế hệ. Ta cũng đã xét lưới tế bào như một bảng chữ nhật đầy (mỗi thành phần của bảng đều chứa thông tin), song thực ra, ta có một bảng thưa thớt, vì không cần xét tới các tế bào chết mà các tế bào lân cận nó đều chết. Một nhược điểm khác nữa là để xác định các thế hệ tế bào , ta đã tính lại số tế bào sống lân cận của mọi tế bào. Điều này làm lãng phí nhiều

thời gian, vì không phải tất cả, mà chỉ có một số tế bào có số tế bào sống lân cận thay đổi. Để khắc phục nhược điểm này, bên cạnh mảng T ta đưa vào một mảng khác Live Neighbors để ghi lại số các tế bào sống lân cận mỗi tế bào. Tức là

```
var     LiveNeighbors : array [row, col] of  0 . . 8;
```

Khi đó, từ thế hệ này sang thế hệ khác, ta chỉ cần xác định lại các giá trị của mảng LiveNeighbors tại các tế bào kề với các tế bào từ sống thành chết hoặc từ chết thành sống. Như vậy thay cho hàm Count, ta sử mảng LiveNeighbors. Bạn đọc hãy viết chương trình thực hiện đề án này. Chương trình này vẫn chưa phải là chương trình tốt, vì ta còn phải đi qua toàn bộ mảng LiveNeighbors để phát hiện ra các tế bào sẽ sinh hoặc sẽ chết đi ở thế hệ sau. Còn có nhiều cách để cải tiến chương trình (bài tập)

Như trên đã nói, việc sử dụng mảng để mô tả các thế hệ tế bào là không thích hợp, nó không phản ánh đầy đủ sự phát triển của các cộng đồng tế bào. Cần phải xét bảng các tế bào là một bảng vô hạn, trong đó tương ứng voí mỗi vị trí (i, j) là một tế bào được hoàn toàn xác định bởi vị trí của nó và số các tế bào sống lân cận nó. Do đó phương pháp tốt nhất là dùng các cấu trúc dữ liệu bảng băm mở để biểu diễn bảng các tế bào. Ở đây cần chú ý rằng, hàm băm h sẽ 'băm' các vị trí (i; j) của các tế bào vào các vị trí 0, 1, . . , N-1 của bảng băm.

h : {(i; j) | (i; j) vị trí của tế bào} → {0, 1, . . . , N-1}

Mỗi tế bào sẽ được đưa vào danh sách liên kết các tế bào thuộc một 'rổ' nào đó của bảng băm. Do đó mỗi tế bào được mô tả bởi cấu trúc bản ghi sau

```
type   cell = record
                    row,
                    col : integer;
                    state : (alive, dead);
                    count : 0 . . 8;
                    next : ^ cell;
              end;
       Table = array [0 . . N-1] of ^ cell;
```

Khi muốn xác định các tế bào sẽ sống hoặc sẽ chết ở thế hệ sau, để tránh phải xem xét toàn bộ bảng băm, ta đưa vào hai danh sách. Danh cách Change ghi lại các tế bào mà số tế bào sống lân cận ở thế hệ hiện tại, có thay đổi so với ở thế hệ trước; do đó, danh sách Change sẽ chứa các tế bào đang sống sẽ trở thành chết hoặc đang chết sẽ trở thành sống ở thế hệ sau. Danh sách NextChange sẽ ghi lại các tế bào mà số tế bào sống lân cận ở thế hệ sau, có thay đổi so với thế hệ hiện tại.

Chúng ta có thể đưa thêm vào mỗi bản ghi biểu diễn tế bào hai con trỏ. Một con trỏ để liên kết các tế bào thuộc danh sách Change và một con trỏ để liên kết các tế bào thuộc danh sách NextChange. Như vậy mỗi bản ghi tế bào sẽ có 3 trường con trỏ. Điều này sẽ tiêu tốn nhiều không gian nhớ, vì có thể chỉ có một số ít tế bào được đưa vào hai danh sách này. Do đó cách tốt hơn là ta sẽ đưa các con trỏ trỏ đến các tế bào thuộc danh sách Change (NextChange) vào danh sách Change (NextChange) thay cho việc đưa chính các tế bào thuộc danh sách Change(NextChange) vào danh sách Change (NextChange). Nói một cách khác, danh sách Change và NextChange sẽ là các danh sách liên kết, gồm các bản ghi có cấu trúc sau

```
type        node = record
                       entry : ^ cell;
                       next  : ^ node;
                   end;
```

Mỗi khi cần xác định cảnh huống của một cộng đồng tế bào ở một thế hệ nào đó, ta đi qua danh sách Change. Khi gặp tế bào từ trạng thái chết trở thành sống (hoặc từ trạng thái sống trỏ thành chết), ta chỉ cần thay đổi trường state cho nó nhận giá trị alive (hoặc dead) đồng thời ta sẽ tìm trong bảng băm những tế bào lân cận của các tế bào đó và đưa chúng vào danh sách NextChange. Nếu một tế bào là lân cận của tế bào từ chết trở thành sống (hoặc từ sống trở thành chết) thì trường count được tăng lên 1 (hoặc được giảm đi 1). Quá trình trên được thực hiện bởi thủ tục Traverse (qua đi).

Chúng ta có phác thảo chương trình sau :

```
program          LifeGame;
    const
        N =          ; {N là số thành phần của bảng băm}
```

```
type
    ptrcell =   cell {con trỏ liên kết các tế bào trong các danh
                sách mới của bảng băm}
    cell = record
        row,
        col : integer, {vị trí của tế bào}
        satate : (alive, dead) {trạng thái của tế bào}
        count : 0 . . 8; {số lân cận sống của tế bào}
        next : ptrcell
    end;
    ptrnode =  ^ node; {con trỏ liên kết trong danh sách Change và
                NextChange}
    node = record
            entry : ptrcell;
            next : ptrnode
        end;
    Table = array [0 , , N-1] of ptrcell;
var
    T : Table;
    Change, NextChange : ptrnode;
    again : boolean;
procedure  Initiation (var T : Table; var Change : ptrnode);
    {thủ tục này xây dựng bảng băm T và danh sách Change (ban đầu Change là danh sách các tế bào đang chết sẽ thành sống và đang sống sẽ thành chết) ứng với cảnh huống ban đầu}.
procedure  Traverse (var Change, NextChange : ptrnode);
    {đi qua danh sách Change, cập nhật bảng T và xây dựng
    bảng NexChange}.
procedure  WriteTable (var T : Table);
    {viết ra bảng T}
begin {chương trình chính}
        Initiation (T, Change);
```

```
        repeat
            Traverse (Change, NextChange);
            WriteTable;
            Change : = NextChange;
            readln (again)
        until  not again
    end.
```

Sau đây chúng ta sẽ mô tả chi tiết thủ tục Traverse, còn các thủ tục Initiation và WriteTable được để lại xem như bài tập.

Trong thủ tục Traverse, với mỗi lân cận (i, j) của một tế bào chết trở thành sống, (hoặc sống trở thành chết), ta phải tìm xem trong bảng băm đã có tế bào ở vị trí (i, j) chưa, nếu chưa thì đưa nó vào bảng băm (với trường state là dead và trường count bằng 1), ta sẽ dùng biến con trỏ q ghi lại địa chỉ của tế bào ở vị trí (i, j). Quá trình trên được thực hiện bằng thủ tục

GetTable (i, j : integer; var q : ptrcell)

Chúng ta sẽ sử dụng thủ tục

Add (q : ptrcell; var NextChange : ptrnode)

để đưa q vào danh sách NextChange.

Chúng ta có thể mô tả thủ tục Traverse như sau :

```
    procedure       Traverse;
        var
          p, p1 : ptrnode;
             i, j : integer;
             q : ptrcell;
    procedure       GetTable (i, j : integer; var q : ptrcell);
    procedure       Add (q : ptrcell; var NextChange : ptrnode);
    begin {bắt đầu thủ tục Traverse}
        p : = Change;
```

```
        NextChange : = nil;
        while p < > nil do
            begin
                with p  ^ do
                    with entry  ^ do
                begin
                  if (state = dead) and (count = 3) then
                    begin
                        state : = alive;
                        for i : = row -1 to row + 1 do
                        for j : = col - 1 to col + 1 do
                        if (i <> row) and (j < > col) then
            begin
                GetTable (i, j, q);
                q ^. count : = q  ^. count + 1;
                Add (q, NextChange)
            end
        end         else
if (state = alive) and ( (count < =  1) or (count > = 4) )
then bigin
            state : = dead;
            for i : = row - 1 to row + 1 do
            for j : = col - 1 to col + 1 do
            if (i < > row) and (j < > col) then
            begin
                Get Table ( i, j, q);
                q ^.  count : = q ^. count - 1;
                Add (q, NextChange)
            end
        end
end; {hết lệnh with}
```

```
        p 1 : = p;
        p : = p  ^ . next;
        dispose (p1);
        end {hết vòng lặp while}
end; {hết thủ tục Traverse}
```

Trong chương trình LifeGame, ta đã dùng danh sách Change ghi lại các tế bào mã số tế bào sống lân cận chúng ở thế hệ hiện tại có thay đổi so với ở thế hệ trước. Chúng ta cần phải đi qua danh sách Change để tìm các tế bào đang chết sẽ trở thành sống và đang sống sẽ trở thành chết ở thế hệ sau. Do đó vẫn còn lãng phí nhiều thời gian. Bây giờ thay cho dùng danh sách Change, nếu chúng ta sử dụng hai danh sách BecomeLive ghi lại các tế bào chết có khả năng thành sống và BecomeDead ghi lại các tế bào sống có khả năng thành chết thì ta sẽ thu hẹp được phạm vi các tế bào cần xem xét. Chúng tôi để lại cho bạn đọc tiếp tục phát triển và viết chương trình thực hiện đề án này.

Chương 7

CÁC CẤU TRÚC DỮ LIỆU Ở BỘ NHỚ NGOÀI

Chương này giành để trình bày mô hình tổ chức dữ liệu ở bộ nhớ ngoài, các cấu trúc dữ liệu để lưu giữ và tìm kiếm thông tin ở bộ nhớ ngoài : file băm, file có chỉ số, B cây. Với mỗi phương pháp tổ chức file, chúng ta sẽ trình bày các thuật toán để thực hiện các phép toán tìm kiếm, xen vào, loại bỏ và sửa đổi trên file.

7.1. Mô hình tổ chức dữ liệu ở bộ nhớ ngoài :

Các cấu trúc dữ liệu (CTDL) mà chúng ta xét từ đầu tới nay đều là các CTDL được lưu giữ trong bộ nhớ chính. Nhưng trong nhiều áp dụng, số các dữ liệu cần được lưu giữ vượt quá khả năng của bộ nhớ chính. Các máy tính hiện nay đều được trang bị các thiết bị bộ nhớ ngoài, thông thường là đĩa. Nó có khả năng lưu giữ một khối lượng rất lớn các dữ liệu. Tuy nhiên các thiết bị nhớ ngoài có những đặc trưng truy cập hoàn toàn khác bộ nhớ chính. Sau đây chúng ta sẽ trình bày mô hình tổng quát mà các hệ điều hành hiện đại sử dụng để quản lý dữ liệu ở bộ nhớ ngoài. Trong các mục sau chúng ta sẽ xét các CTDL để lưu giữ file sao cho các phép toán trên file được thực hiện một cách hiệu quả. Đó là file băm, file có chỉ số, B - cây.

Các hệ điều hành hiện đại đều cho chúng ta khả năng tổ chức dữ liệu ở bộ nhớ ngoài dưới dạng các file.

Chúng ta có thể quan niệm file như là một tập hợp nào đó các dữ liệu (các bản ghi) được lưu giữ ở bộ nhớ ngoài. Các bản ghi trong file có thể có độ dài cố định (số các trường của bản ghi là cố định) hoặc có thể có độ dài thay đổi. Các file với các bản ghi có độ dài cố định được sử dụng nhiều trong các hệ quản trị cơ sở dữ liệu. Các file với các bản ghi có độ dài thay đổi hay được sử dụng để lưu giữ các thông tin văn bản. Chúng ta sẽ chỉ xét các file với các bản ghi có độ dài cố định. Các kỹ thuật mà chúng ta sẽ trình bày để lưu giữ và thao tác với các file này có thể sửa đổi để áp dụng cho các file với các bản ghi có độ dài thay đổi.

Trong chương này chúng ta sẽ hiểu khoá của bản ghi là một tập hợp nào đó các trường của bản ghi hoàn toàn xác định bản ghi, tức là hai bản ghi khác nhau phải có các giá trị khác nhau trên ít nhất một trường thuộc khoá.

Trên file chúng ta cần thực hiện các phép toán sau đây :

1. ***Tìm kiếm*** **: tìm trong file các bản ghi với các giá trị cho trước trên một nhóm nào đó các trường của bản ghi.**
2. ***Xen vào*** **: xen vào file một bản ghi nào đó**
3. ***Loại bỏ*** **: loại bỏ khỏi file tất cả các bản ghi với các giá trị cho trước trên một nhóm nào đó các trường của bản ghi.**
4. ***Sửa đổi*** **: sửa tất cả các bản ghi với các giá trị cho trước trên một nhóm nào đó các trường bằng cách đặt lại giá trị trên các trường được chỉ định bởi các giá trị mới đã cho.**

Ví dụ : giả sử chúng ta có file với các bản ghi chứa các trường (tên sản phẩm, nơi sản xuất, giá). Ta các có thể cần tìm tất cả các bản ghi với tên sản phẩm = bóng đèn 60W; thêm vào file bản ghi (quạt bàn, nhà máy điện cơ, 69.000); loại bỏ tất cả các bản ghi với nơi sản xuất = nhà máy X; sửa tất cả các bản ghi với nơi sản xuất = nhà máy Z bằng cách thay giá cũ bởi giá mới.

Hệ điều hành chia bộ nhớ ngoài thành các khối vật lý (physical block) có cỡ như nhau, ta gọi tắt là các khối. Cỡ của các khối thay đổi tuỳ theo hệ điều hành, thông thường là từ 2^9 byte đến 2^{12} byte. Mỗi khối có địa chỉ, đó là địa chỉ tuyệt đối của khối ở trên đĩa, tức là byte đầu tiên của khối.

File được lưu giữ trong một số khối, mỗi khối có thể lưu giữ một số bản ghi của file. Trong một khối có thể còn một số byte chưa được sử dụng đến. Mỗi bản ghi có địa chỉ, địa chỉ của bảnghi là cặp (k, s), trong đó k là địa chỉ của khối chứa bản ghi, còn s là số byte trong khối đứng trước byte bắt đầu bản ghi (s được gọi là offset). sau này khi nói đến con trỏ tới khối (tới bản ghi) thì ta hiểu đó là địa chỉ khối (bản ghi).

File có thể được lưu giữ trong một danh sách liên kết các khối. Điển hình hơn, file có thể được lưu giữ trong các khối tổ chức dưới dạng cây. Các khối không là lá của cây chứa các con trỏ tới một số khối trong cây.

Trong mỗi khối có thể giành ra một số byte (phần này được gọi là đầu khối) để chứa các thông tin cần thiết về khối, chẳng hạn để ghi số bản ghi trong khối.

Trong một khối, không gian để lưu trữ một bản ghi được gọi là khối con. Cần phân biệt khối con đầy và rỗng. Khối con đầy là khối con có chứa bản ghi, ngược lại là khối con rỗng. Để chỉ một khối con là đầy hoặc rỗng, trong đầu khối ta giành cho mỗi khối con một bit (gọi là bit đầy), bit nhận giá trị 1 (0) nếu khối con tương ứng là đầy (rỗng). Một cách khác,

trong mỗi khối con ta giành ra một bit (bit xoá), bit nhận giá trị 1 có nghĩa là bản ghi đã bị xoá.

Đánh giá thời gian thực hiện các phép toán trên file

Các phép toán trên file (tìm kiếm, xen vào, loại bỏ, sửa đổi) được thực hiện thông qua phép toán cơ bản, đọc một khối dữ liệu ở bộ nhớ ngoài vào vùng đệm trong bộ nhớ chính hoặc viết các dữ liệu ở vùng đệm trong bộ nhớ chính vào một khối ở bộ nhớ ngoài. Ta gọi phép toán này là phép toán truy cập khối (block access). Cần chú ý rằng, việc chuyển một khối dữ liệu ở bộ nhớ ngoài vào bộ nhớ chính đòi hỏi nhiều thời gian hơn việc tìm kiếm đữ liệu trong khối khi nó đã ở trong bộ nhớ chính. Cũng cần biết rằng , các dữ liệu cần phải có ở bộ nhớ chính trước khi nó được sử dụng bằng cách nào đó. Vì vậy khi đánh giá thời gian thực hiện một thuật toán thao tác với các dữ liệu được lưu giữ trong file, chúng ta phải tính số lần cần thiết phải thực hiện phép toán truy cập khối. Số lần thực hiện phép toán truy cập khối được dùng để biểu diễn tính hiệu quả của các thuật toán trên các file.

Tổ chức file đơn giản

Phương pháp đơn giản nhất, đồng thời cũng kém hiệu quả nhất để lưu giữ các bản ghi của file là, xếp các bản ghi của file vào một số khối cần thiết theo một trật tự tuỳ ý. Các khối có thể liên kết với nhau bởi các con trỏ tạo thành một danh sách liên kết các khối. Một cách khác, ta cũng có thể sử dụng một bảng để lưu giữ địa chỉ của các khối.

Phép toán tìm kiếm các bản ghi theo các giá trị đã biết trên một số trường được thực hiện bằng cách đọc lần lượt các bản ghi trong các khối. Việc xen vào file một bản ghi mới được thực hiện bằng cách xen nó vào khối cuối cùng của file nếu trong đó còn chỗ, nếu không thì thêm vào file một khối mới và đặt bản ghi cần xen vào đó. Muốn loại bỏ các bản ghi, trước hết ta cần định vị được các bản ghi cần loại bỏ, sau đó ta sẽ tiến hành xoá bỏ. Việc xoá bỏ một bản ghi có thể thực hiện bằng nhiều cách. Chẳng hạn có thể đặt lại giá trị của bit xoá trong bản ghi. Trong trường hợp này việc sử dụng lại không gian của bản ghi này để lưu giữ bản ghi mới cần phải thận trọng. Nếu trong hệ cơ sở dữ liệu có sử dụng con trỏ trỏ tới bản ghi (trường hợp này, bản ghi được xem là bị đóng chặt), thì ta không được sử dụng không gian của nó để lưu giữ bản ghi mới này.

Với cách tổ chức file tuần tự như trên, các phép toán trên file sẽ chậm, vì chúng đòi hỏi phải xem xét toàn bộ các bản ghi trong file. Trong các mục sau này chúng ta sẽ trình bày các tổ chức file ưu việt hơn, cho

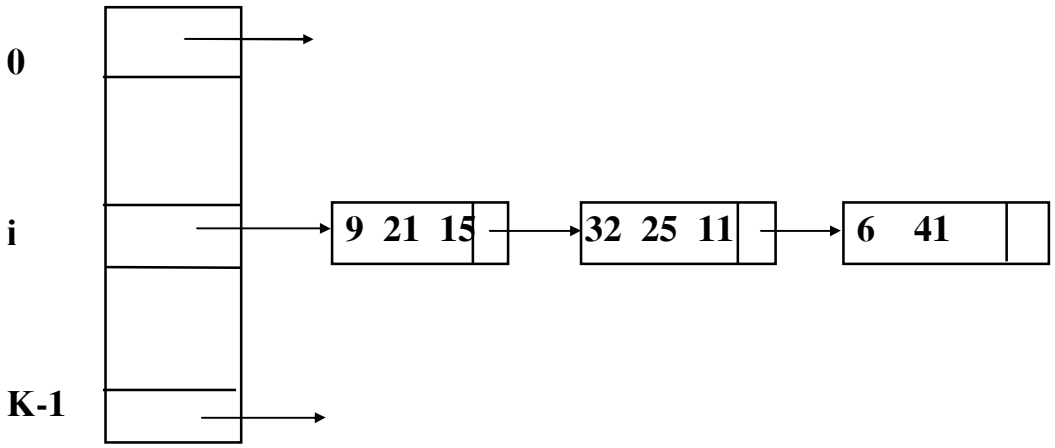
phép ta mỗi lần cần truy cập đến một bản ghi, chỉ cần đọc vào bộ nhớ chính một phần nhỏ của file.

Chúng ta không thể viết bằng Pascal hoặc bằng một ngôn ngữ khác các thủ tục có đề cập đến các dữ liệu ở mức khối vật lý và các địa chỉ khối. Do đó trong các phương pháp tổ chức file được trình bày sau đây, ta sẽ mô tả một cách không hình thức các thuật toán thực hiện các phép toán trên các file.

7.2. File băm :

Cấu trúc của file băm hoàn toàn tương tự như cấu trúc bảng băm mở ở bộ nhớ trong đã được chúng ta đề cập đến trong chương 5. Tư tưởng của tổ chức file băm là như sau : ta chia tập hợp các bản ghi của file thành K lớp. Với mỗi lớp, tạo ra một danh sách liên kết các khối, các khối này chứa các bản ghi của lớp. Ta sử dụng một bảng gồm K con trỏ, (bảng chỉ dẫn) mỗi con trỏ trỏ tới khối đầu tiên trong danh sách liên kết các khối của một lớp.

Hình 7.1 biểu diễn cấu trúc của một file băm.



Hình 7.1 Cấu trúc file băm

Việc phân phối các bản ghi của file vào các lớp được thực hiện bởi hàm băm h. Đó là hàm xác định trên tập các giá trị khoá của các bản ghi và nhận các giá trị nguyên từ 0 đến K-1. Nếu x là một giá trị khoá và h(x) = i, $0 \le i \le K-1$, thì bản ghi với khoá x thuộc lớp thứ i.

Để tìm kiếm bản ghi với khoá x cho trước, đầu tiên ta tính h(x), con trỏ chứa ở thành phần thứ i = h(x) trong bảng chỉ dẫn ta tìm đến các khối của lớp i. lần lượt đọc các khối, ta sẽ tìm ra bản ghi với khoá x, hoặc đọc hết các khối mà không thấy có nghĩa là bản ghi không có ở trong file.

Muốn xen vào file bản ghi với khoá x, ta cần kiểm tra xem nó có ở trong file hay chưa. Nếu chưa ta có thể xen nó vào khối đầu tiên trong danh sách các khối của h (x), nếu tại đó còn đủ chỗ cho bản ghi. Nếu tất cả các khối của lớp h(x) đều đầy, ta thêm vào danh sách các khối của lớp h(x) một khối mới và đặt bản ghi vào đó.

Để loại bỏ bản ghi với khoá x, trước hết ta cần xác định vị trí của bản ghi trong file bằng cách áp dụng thủ tục tìm kiếm. Sau đó có thể xoá bỏ bản ghi này bằng cách, chẳng hạn cho bit xoá nhận giá trị 1.

Cấu trúc file băm là cấu trúc rất có hiệu quả nếu các phép toán trên file chỉ đòi hỏi đến việc truy cập các bản ghi theo khoá. Giả sử file có n bản ghi, nếu hàm băm được thiết kế tốt, thì trung bình mỗi lớp chứa n/k bản ghi. Giả sử mỗi khối chứa được m bản ghi. Như vậy mỗi lớp gồm khoảng n/mk khối. Tức là các phép toán trên file băm sẽ k lần nhanh hơn so với tổ chức file tuần tự.

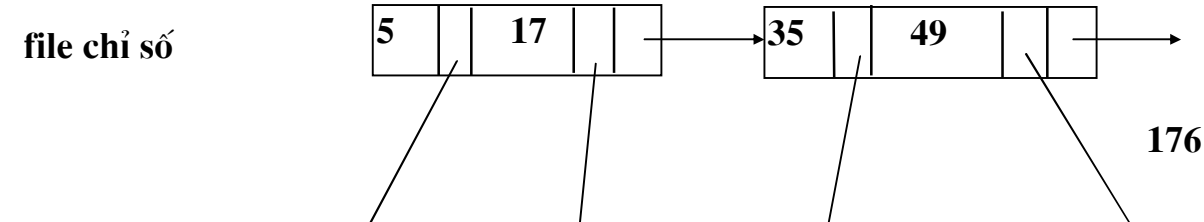
7.3. File có chỉ số (indexed file)

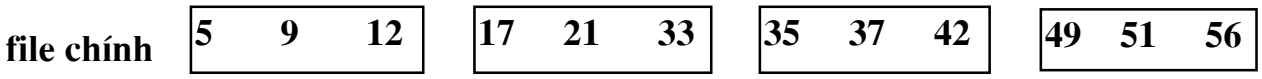
Cấu trúc file băm được tạo ra dựa trên khoá của bản ghi. Trong mục này chúng ta trình bày một phương pháp tổ chức file khác cũng dựa vào khoá của bản ghi bằng cách sắp xếp các bản ghi theo thứ tự tăng dần của các giá trị khoá.

Cấu trúc file có chỉ số được hình thành như sau :

Ta sắp xếp các bản ghi của file theo thứ tự khoá tăng dần vào một số khối cần thiết. Ta có thể sắp xếp các bản ghi vào một khối cho tới khi khối đầy. Song thông thường, trong mỗi khối người ta để giành lại một không gian cho các bản ghi được thêm vào file sau này. Lý do là để phép toán xen vào file được thực hiện dễ dàng hơn. Ta sẽ gọi file gồm các bản ghi chứa trong các khối này là file chính, để phân biệt với file chỉ số được tạo ra sau đây.

Chỉ số của một khối là cặp (v, b), trong đó b là địa chỉ của khối, còn v là giá trị khoá nhỏ nhất của các bản ghi trong khối b. Từ các khối của file chính, ta sẽ tạo ra file chỉ số (index file), file này gồm các chỉ số khối của file chính. Các chỉ số khối được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của khoá vào một số khối cần thiết. Các khối này có thể được móc nối với nhau tạo thành một danh sách liên kết. Trong trường hợp này file chỉ số gồm một danh sách liên kết các khối, các khối chứa các chỉ số khối của file chính. Một cách khác ta cũng có thể sử dụng một bảng để lưu giữ địa chỉ của các khối trong file chỉ số. Hình 7.2 minh hoạ cấu trúc của file có chỉ số.





Hình 7.2. Cấu trúc file có chỉ số

Sau đây chúng ta sẽ xét sự thực hiện các phép toán trên file được tổ chức dưới dạng file có chỉ số

***Tìm kiếm* :**

Giả sử ta cần tìm bản ghi x với khoá v cho trước. Trước hết ta cần tìm trên file chỉ số một chỉ số (v_1, b_1) sao cho v_1 là giá trị khoá lớn nhất trong file chỉ số thoả mãn điều kiện $v_1 \le v$. Ta sẽ nói v_1 phủ v.

Việc tìm kiếm trên file chỉ số một giá trị khoá v_1 phủ giá trị khoá v cho trước có thể thực hiện bằng cách tìm kiếm tuần tự hoặc tìm kiếm nhị phân.

Trong tìm kiếm tuần tự, ta cần xem xét tất cả các bản ghi của file chỉ số cho tới khi tìm thấy một chỉ số (v_1, b_1) với v_1 phủ v. Nếu v nhỏ hơn giá trị khoá của bản ghi đầu tiên trong file chỉ số thì điều đó có nghĩa là trong file chỉ số không chứa giá trị khoá phủ v.

Phương pháp có hiệu quả hơn là tìm kiếm nhị phân. Giả sử các bản ghi của file chỉ số được sắp xếp vào các khối được đánh số từ 1 đến m. Xét khối thứ $\lceil m/2 \rceil$. Giả sử (v_2, b_2) là bản ghi đầu tiên trong khối. So sánh giá trị khoá cho trước v với giá trị khoá v_2. Nếu $v < v_2$ ta tiến hành tìm kiếm trên các khối 1,2, . . ., $\lceil m/2 \rceil - 1$. Còn nếu $v \ge v_2$, ta tiến hành tìm kiếm trên các khối $\lceil m/2 \rceil$, $\lceil m/2 \rceil + 1, \ldots, m$. Quá trình trên được lặp lại cho tới khi ta chỉ cần tìm kiếm trên một khối. Lúc này ta chỉ việc lần lượt so sánh giá trị khoá v cho trước với giá trị khoá chứa trong khối này.

Để tìm ra bản ghi x với khoá v cho trước, trước hết ta tìm trên file chỉ số một chỉ số (v_1, b_1) với v_1 phủ v. Sau đó lần lượt xét các bản ghi trong khối có địa chỉ b_1 để phát hiện ra bản ghi có khoá v, hoặc không nếu trong khối không có bản ghi nào với khoá là v. Nếu trên file chỉ số không chứa giá trị khoá v_1 phủ v, thì file chính không chứa bản ghi có khoá v.

***Xen vào* :**

Giả sử ta cần thêm vào file bản ghi r với giá trị khoá v.

Giả sử file chính được chứa trong các khối $B_1, B_2, \ldots, B_k$ và các giá trị khoá của các bản ghi trong khối B_i nhỏ hơn các giá trị khoá trong khối B_{i+1}.

Trước hết ta cần tìm ra khối B_i cần phải xếp bản ghi r vào đó. Muốn vậy ta áp dụng thủ tục tìm kiếm trên file chỉ số để tìm ra chỉ số (v_1, b_1) với v_1 phủ v. Nếu tìm thấy thì B_i là khối có địa chỉ b_1, ngược lại B_i là khối B_1.

Trong trường hợp B_i chưa đầy và r còn chưa có ở trong khối B_i thì ta xếp bản ghi r vào đúng vị trí của nó, tức là phải đảm bảo trật tự tăng dần theo khoá.

Nếu B_i là B_1 thì sau khi thêm vào bản ghi r, nó trở thành bản ghi đầu tiên trong khối B_1, do đó ta cần phải tiến hành sửa đổi chỉ số của khối B_1 trong file chỉ số.

Trong trường hợp B_i đã đầy, ta tiến hành xếp bản ghi r vào đúng vị trí của nó trong B_i, khi đó còn thừa ra một bản ghi. Tìm đến khối B_{i+1} (ta biết được địa chỉ của khối B_{i+1} bằng cách tìm trong chỉ số). Nếu B_{i+1} chưa đầy thì ta xếp bản ghi thừa ra của B_i vào vị trí đầu tiên trong khối B_{i+1} đồng thời sửa lại chỉ số của B_{i+1} trong file chỉ số. Nếu khối cũng đầy hoặc không tồn tại khi B_i là B_k thì ta thêm vào file chính một khối mới và xếp bản ghi r vào khối mới này. Chỉ số của khối mới thêm vào cần phải được xen vào file chỉ số.

Loại bỏ :

Để loại bỏ bản ghi r với khoá v, ta cần áp dụng thủ tục tìm kiếm để định vị bản ghi trong file. Sau đó sẽ tiến hành xoá bỏ r bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn có thể đặt lại giá trị của bit đầy/rỗng tương ứng với bản ghi cần xoá ở đầu khối.

Sửa đổi :

Giả sử ta cần sửa đổi bản ghi với khoá v. Nếu các giá trị cần sửa không là giá trị của các trường thuộc khoá, thì ta chỉ cần áp dụng thủ tục tìm kiếm để tìm ra bản ghi và tiến hành các sửa đổi cần thiết. Nếu các giá trị cần sửa thuộc khoá thì việc sửa đổi được thực hiện bằng cách loại bỏ bản ghi cũ, xen vào bản ghi mới.

7.4. B - cây.

Mục đích của chúng ta là nghiên cứu các cấu trúc dữ liệu biểu diễn file sao cho các phép toán trên file được thực hiện hiệu quả, tức là với số lần thực hiện phép toán truy cập khối ít nhất có thể được, khi cần phải tìm kiếm, xen vào, loại bỏ hoặc sửa đổi các bản ghi trên file. B - cây là một cấu trúc dữ liệu đặc biệt thích hợp để biểu diễn file. Trong mục này chúng ta

sẽ trình bày B - cây và các kỹ thuật để thực hiện các phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ trên B - cây.

Cây tìm kiếm đa nhánh **(Multiway Search Trees)**

Cây tìm kiếm m nhánh là sự tổng quát hoá của cây tìm kiếm nhị phân, trong đó mỗi đỉnh của cây có nhiều nhất m con. Các đỉnh của cây được gắn với các giá trị khoá của các bản ghi. Nếu đỉnh a có r con ($r \leq m$) thì nó chứa đúng r - 1 khoá ($k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$), trong đó $k_1 < k_2 < \ldots < k_{r-1}$ (Chúng ta giả thiết rằng các giá trị khoá được sắp xếp thứ tự tuyến tính). Tổng quát hoá tính chất về khoá gắn với các đỉnh của cây tìm kiếm nhị phân, cây tìm kiếm m nhánh phải thoả mãn tính chất sau đây. Nếu đỉnh a có r con và chứa các khoá ($k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$) thì các khoá chứa trong các đỉnh của cây con thứ nhất của đỉnh a nhỏ hơn k_1, còn các khoá chứa trong các đỉnh của cây con thứ i (i = 2, . . . , r-1) phải lớn hơn hoặc bằng k_{i-1} và nhỏ hơn k_i, các khoá chứa trong các đỉnh của cây con thứ r phải lớn hơn hoặc bằng k_{r-1}. Mỗi lá của cây chứa một số khoá, tối đa là s.

Các phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ trên cây tìm kiếm m nhánh được thực hiện bằng các kỹ thuật tương tự như đối với cây tìm kiếm nhị phân.

B - cây (B - Trees)

B - cây là một loại đặc biệt của cây tìm kiếm m nhánh cân bằng (xem lại khái niệm cây cân bằng trong mục 7, chương 4). Cụ thể, B - cây được định nghĩa như sau :

B - cây cấp m là cây tìm kiếm m nhánh thoả mãn các tính chất sau đây

1. **Nếu cây không phải là cây chỉ gồm có gốc thì gốc có ít nhất hai con và nhiều nhất m con.**
2. **Mỗi đỉnh trong của cây, trừ gốc, có ít nhất $\lceil m/2 \rceil$ con và nhiều nhất m con.**
3. **Tất cả các lá của cây trên cùng một mức. (Nói cách khác, tất cả các đường đi từ gốc tới lá cây có cùng độ dài).**

Tư tưởng của việc tổ chức file dưới dạng B - cây là như sau. Ta sắp xếp các bản ghi của file (file chính) vào một số khối cần thiết. Mỗi khối này sẽ là lá của B - cây. Trong mỗi khối các bản ghi được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của khoá. Các chỉ số của các khối này (các lá) lại được sắp xếp vào một số khối mới. Trong mỗi khối này, các chỉ số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của khoá. Trong B - cây, các khối này sẽ là các đỉnh ở mức

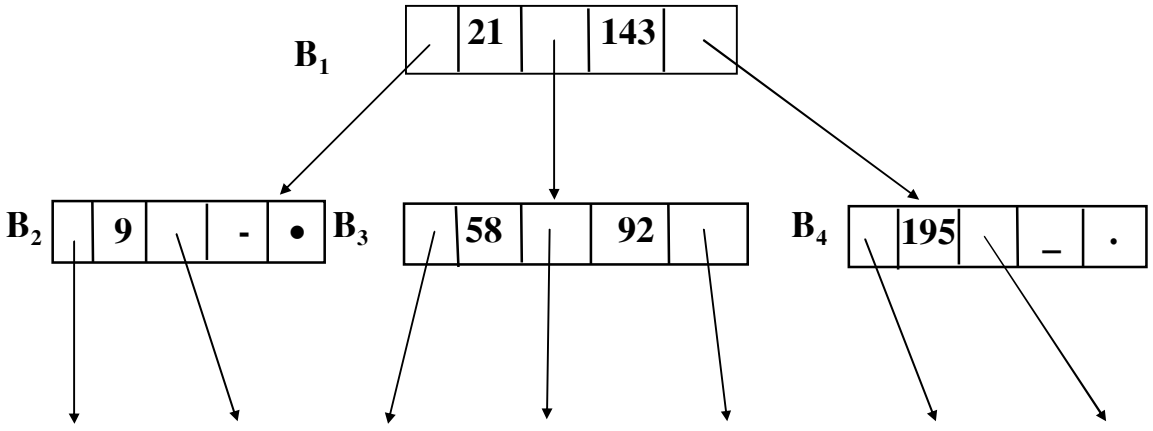
trên của mức các lá. Ta lại lấy chỉ số của các khối vừa tạo ra sắp xếp vào một số khối mới. Các khối này lại là các đỉnh ở mức trên của mức từ đó được tạo ra. Quá trình trên sẽ tiếp tục cho tới khi các chỉ số có thể xếp gọn vào một khối. Khối này là đỉnh của cây B - cây.

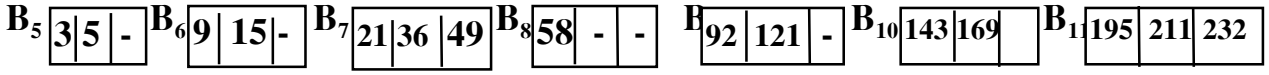
Như vậy, mỗi đỉnh của B - cây là một khối. Mỗi đỉnh trong của B - cây có dạng

$$(p_0, v_1, p_1, v_2, p_2, \ldots, v_n, p_n)$$

trong đó $v_1 < v_2 < \ldots <$ và (v_i, p_i), $0 \le i \le n$, là chỉ số của một khối, tức là v_i là giá trị khoá nhỏ nhất trong một khối, còn p_i là con trỏ trỏ tới khối chứa khoá nhỏ nhất v_i, tức là con trỏ trỏ tới đỉnh con thứ i của đỉnh trong đang nói tới. Cần lưu ý rằng, giá trị của khoá v_0 không được lưu giữ ở mỗi đỉnh trong, lý do là để tiết kiệm bộ nhớ.

Ví dụ : Hình 7.3 biểu diễn một B - cây cấp 3. B - cây được tạo thành từ 11 khối được đánh số B_1, B_2, . . . , B_{11}. Mỗi khối là đỉnh trong chứa được 3 chỉ số. Mỗi khối là lá chứa được 3 bảng ghi (3 số nguyên). File ở đây là file các số nguyên được lưu giữ ở các khối từ B_5 đến B_{11}.





Hình 7.3 B - cây

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu sự thực hiện các phép toán tìm kiếm, xen vào và loại bỏ trên B - cây.

Tìm kiếm

Giả sử chúng ta cần tìm bản ghi r có khoá v cho trước. Chúng ta cần phải tìm đường đi từ gốc của B - cây tới lá, sao cho lá này cần phải chứa bản ghi r nếu nó có ở trong file.

Trong quá trình tìm kiếm, giả sử tại một thời điểm nào đó ta đạt tới đỉnh B. Nếu khối B là lá, ta tìm trong khối B xem nó có chứa bản ghi r hay không. Nhớ lại rằng các bản ghi của file được xếp vào các khối theo thứ tự tăng dần của khoá, do đó sự tìm kiếm trong khối B có thể tiến hành bằng kỹ thuật tìm kiếm tuần tự hoặc tìm kiếm nhị phân.

Nếu B là một đỉnh trong chứa (p_0, v_1, p_1, . . . , v_n, p_n) thì ta cần xác định vị trí của giá trị khoá v trong dãy giá trị khoá v_1, v_2, . . . , v_n. Nếu $v < v_1$ thì ta đi xuống đỉnh được trỏ bởi p_0. Nếu $v_i \le v < v_{i+1}$ thì ta đi xuống đỉnh được trỏ bởi p_i (i = 1, 2, . . . n - 1). Còn nếu $v_n < v$ thì đi xuống đỉnh được trỏ bởi p_n.

***Xen vào* :**

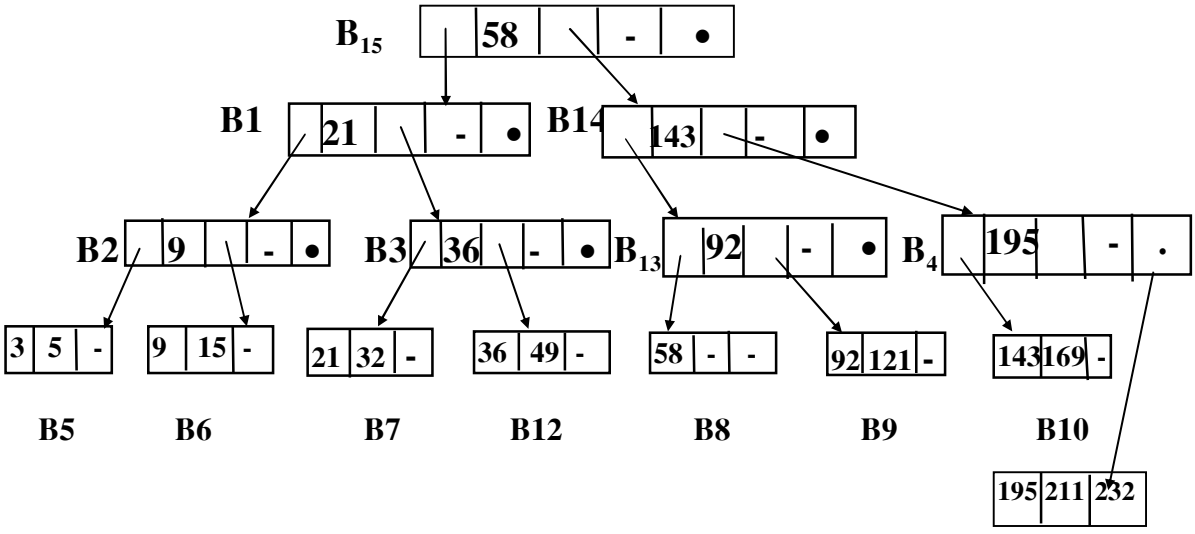
Giả sử ta cần phải xen vào B - cây một bản ghi r với khoá là v. Đầu tiên ta áp dụng thủ tục tìm kiếm để tìm ra khối B cần phải xen bản ghi r vào đó.

Nếu khối B còn đủ chỗ cho bản ghi r thì ta xếp bản ghi r vào khối B sao cho thứ tự tăng dần của khoá được bảo tồn. Chú ý rằng, r không thể là bản ghi đầu tiên của khối B, trừ khi B là lá ngoài cùng bên trái. Nếu B là lá ngoài cùng bên trái thì giá trị khoá nhỏ nhất trong khối B không có mặt trong các đỉnh là tiền thân của đỉnh B. Vì vậy trong trường hợp này chỉ cần thêm bản ghi r vào khối B là xong, không cần sửa đổi gì với các đỉnh là tiền thân của khối B.

Nếu khối B không còn đủ không gian để lưu giữ bản ghi r thì ta thêm vào B - cây một lá mới, khối B'. Chuyển một nửa số bản ghi ở cuối của khối B sang khối B'. Sau đó xếp bản ghi r vào khối B hoặc khối B' sao cho vẫn đảm bảo được tính tăng dần của các giá trị khoá. Giả sử Q là cha của B, ta có thể biết được Q nếu trong quá trình tìm kiếm, ta lưu lại vết của đường đi từ gốc tới B. Giả sử chỉ số của khối B' là (v', p'), trong đó v' là giá trị khoá nhỏ nhất trong B', còn p' là địa chỉ của khối B'. Áp dụng

thủ tục trên để xen _v', p') vào khối Q. Nếu khối Q không còn đủ chỗ cho (v', p') thì ta lại phải thêm vào B - cây một đỉnh mới Q', nó là em liền kề của Q. Sau đó lại phải tìm đến cha của đỉnh Q để đưa vào chỉ số của khối mới Q'. Quá trình có thể tiếp diễn và dẫn đến việc phải phân đôi số giá trị khoá ở gốc, nửa sau được chuyển vào khối mới. Trong trường hợp này, ta phải tạo ra một gốc mới có đúng hai con, một con là gốc cũ, một con là đỉnh mới đưa vào.

Ví dụ. Giả sử ta cần xen vào B - cây trong hình 7.3 bản ghi có khoá 32. Trước hết ta phải tìm khối cần phải đưa bản ghi này vào. Bắt đầu từ gốc B_1, vì 21 < 32 < 143, ta đi xuống B_3. Tại B_3, 32 < 58ε, ta đi xuống B_7. B_7 là lá, vậy cần phải đưa bản ghi với khoá 32 vào B7. Nhưng khối B_7 đã đầy. Ta thêm vào khối mới B_{12} và xếp các bản ghi với khoá 21, 32 vào khối B_7, xếp các bản ghi với khoá 36, 49 vào khối B_{12}. Chỉ số của khối B_{12} chứa giá trị khoá 36. Cần phải xếp chỉ số B_{12} vào cha của B_7 là B_3. Nhưng B_3 cũng đầy. Thêm vào khối mới B_{13}. Sau đó các chỉ số của các khối B_7, B_{12} được xếp vào B_3 còn các chỉ số của các khối B_8, B_9 được xếp vào B_{13}. Bây giờ chỉ số của khối B_{13} là 58 và địa chỉ của khối B_{13} cần được xếp vào khối B1. Nhưng B_1 cũng đầy thêm vào B - cây khối mới B_{14}. Xếp các chỉ số của B_2, B_3 vào B_1, các chỉ số của B_{13}, B_4 vào B_{14}. Vì B_1 là gốc, ta phải thêm vào gốc mới, khối B_{15} và xếp các chỉ số của B_1 và B_{14} vào B_{15}. Kết quả là ta có B - cây trong hình 7.4.



Hình 7.4 B - cây sau khi thêm vào B - cây trong hình 7.3

bản ghi với giá trị khoá 32

Loại bỏ

Giả sử ta cần loại khỏi B - cây bản ghi r với khoá v. Đầu tiên áp dụng thủ tục tìm kiếm để tìm ra lá B chứa bản ghi r. Sau đó loại bỏ bản ghi r trong khối B.

Giả sử sau khi loại bỏ B không rỗng. Trong trường hợp này, nếu r không phải là bản ghi đầu tiên trong B, ta không phải làm gì thêm. Nếu r là bản ghi đầu tiên trong B, thì sau khi xoá r, chỉ số của B đã thay đổi. Do đó ta cần tìm đến đỉnh Q là cha của B. Nếu B là con trưởng của Q thì giá trị khoá v' trong chỉ số (v', p') của B không có trong Q. Trong trường hợp này ta cần tìm đến tiền thân A của B sao cho A không phải là con trưởng của cha mình A'. Khi đó giá trị khoá nhỏ nhất trong B được chứa trong A'. Do đó trong A', ta cần thay giá trị khoá cũ v bởi giá trị mới v'.

Giả sử sau khi loại bỏ bản ghi r, B trở thành rỗng. Loại bỏ lá B khỏi B - cây. Điều đó dẫn đến cần loại bỏ chỉ số của B trong đỉnh cha Q của B.

Nếu sau khi loại bỏ, số các con của đỉnh Q ít hơn m/2 thì ta tìm đến đỉnh Q' là anh em liền kề của đỉnh Q. Nếu Q' có nhiều hơn $\lceil m/2 \rceil$ con thì ta phân phối lại các giá trị khoá trong Q và Q' sao cho cả hai có ít nhất $\lceil m/2 \rceil$ con. Khi đó các chỉ số của Q hoặc Q' có thể thay đổi. Ta lại phải tìm đến các tiền thân của Q đến phản ánh sự thay đổi này.

Nếu Q' có đúng $\lceil m/2 \rceil$ con, thì ta kết hợp hai đỉnh Q và Q' thành một đỉnh, một trong hai đỉnh bị loại khỏi cây, các khoá chứa trong đỉnh này được chuyển sang đỉnh còn lại. Điều này dẫn đến cần loại bỏ chỉ số của đỉnh bị loại ra khỏi cha của Q. Sự loại bỏ này được thực hiện bằng cách áp dụng thủ tục loại bỏ đã trình bày.

Quá trình loại bỏ có thể dẫn đến việc loại bỏ gốc cây, khi chúng ta cần kết hợp hai con của gốc thành một đỉnh, đỉnh này trở thành gốc mới của B-cây.

Ví dụ . Giả sử chúng ta cần loại bản ghi với khoá 58 khỏi B-cây trong hình 7.4. Đầu tiên tìm lá chứa khoá 58, đó là khối B_8. Xoá bản ghi 58, khối B_8 thành rỗng. Tìm đến cha của B_8 là B_{13}. Loại bỏ chỉ số của B_8 khỏi B_{13}, B_{13} chỉ còn một con. Số con của B_{13} ít hơn $\lceil m/2 \rceil$ (ở đây $\lceil m/2 \rceil = \lceil 3/2 \rceil = 2$). Tìm đến em liền kề của B_{13} là B_4, số con của B_4 là hai. Kết hợp hai đỉnh này thành một đỉnh B_{13}. Cần phải loại bỏ chỉ số của khối B_4 khỏi B_{14}. B_{14} trở thành chỉ có một con. Tìm đến anh liền kề của B_{14} là B_1. Số con của B_1 là hai. Kết hợp B_1 và B_{14} thành một đỉnh B_1. B_1 trở thành gốc mới của B - cây. Hình 7.5 minh hoạ B-cây nhận được từ B-cây trong hình 7.4 sau khi loại đỉnh có khoá 58.