Quy hoạch tuyến tính

CHƯƠNG I

LÝ THUYẾT CƠ BẢN VỀ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày cách xây dựng mô hình quy hoạch tuyến tính của những bài toán dạng đơn giản. Đây là những kiến thức quan trọng để xây dựng mô hình cho những bài toán phức tạp hơn trong thực tế sau này. Các khái niệm về ‘’ lồi’’ được trình bày để làm cơ sở cho phương pháp hình học giải quy hoạch tuyến tính. Một ví dụ mở đầu được trình bày một cách trực quan để làm rõ khái niệm về phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

Nội dung chi tiết của chương bao gồm :

I- GIỚI THIỆU BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1- Bài toán vốn đầu tư

2- Bài toán lập kế hoạch sản xuất

3- Bài toán vận tải

II- QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT VÀ CHÍNH TẮC

1- Quy hoạch tuyến tính tổng quát

2- Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

3- Phương án

III- ĐẶC ĐIỂM CỦA TẬP HỢP CÁC PHƯƠNG ÁN

1- Khái niệm lồi và tính chất

2- Đặc điểm của tập các phương án

3- Phương pháp hình học

IV- MỘT VÍ DỤ MỞ ĐẦU

V- DẤU HIỆU TỐI ƯU

1- Ma trận cơ sở - Phương án cơ sở - Suy biến

2- Dấu hiệu tối ưu

CHƯƠNG I

LÝ THUYẾT CƠ BẢN VỀ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

I- GIỚI THIỆU BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Có thể tạm định nghĩa quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu mà *hàm mục tiêu* (vấn đề được quan tâm) và các *ràng buộc* (điều kiện của bài toán) đều là hàm và các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính. Đây chỉ là một định nghĩa mơ hồ, bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ được xác định rõ ràng hơn thông qua các ví dụ .

Các bước nghiên cứu và ứng dụng một bài toán quy hoạch tuyến tính điển hình là như sau :

a- Xác định vấn đề cần giải quyết, thu thập dữ liệu.

b- Lập mô hình toán học.

c- Xây dựng các thuật toán để giải bài toán đã mô hình hoá bằng ngôn ngữ thuận lợi cho việc lập trình cho máy tính.

d- Tính toán thử và điều chỉnh mô hình nếu cần.

e- Áp dụng giải các bài toán thực tế.

1- Bài toán vốn đầu tư

Người ta cần có một lượng (tối thiểu) chất dinh dưỡng i=1,2,..,m do các thức ăn j=1,2,...,n cung cấp. Giả sử :

a_{ij} là số lượng chất dinh dưỡng loại i có trong 1 đơn vị thức ăn loại j

(i=1,2,...,m) và (j=1,2,..., n)

b_i là nhu cầu tối thiểu về loại dinh dưỡng i

c_j là giá mua một đơn vị thức ăn loại j

Vấn đề đặt ra là phải mua các loại thức ăn như thế nào để tổng chi phí bỏ ra ít nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu về dinh dưỡng. Vấn đề được giải quyết theo mô hình sau đây :

Gọi $x_j \geq 0$ (j= 1,2,...,n) là số lượng thức ăn thứ j cần mua .

Tổng chi phí cho việc mua thức ăn là :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Vì chi phí bỏ ra để mua thức ăn phải là thấp nhất nên yêu cầu cần được thỏa mãn là :

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn 1 là : $a_{i1}x_1$ $(i=1\rightarrow m)$

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn 2 là : $a_{i2}x_2$

....

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn n là : $a_{in}x_n$

Vậy lượng dinh dưỡng thứ i thu được từ các loại thức ăn là :

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \quad (i=1\rightarrow m)$$

Vì lượng dinh dưỡng thứ i thu được phải thỏa yêu cầu b_i về dinh dưỡng loại đó nên ta có ràng buộc sau :

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \geq b_i \quad (i=1\rightarrow m)$$

Khi đó theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình toán sau đây :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases} \end{array}}$$

2- Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Từ m loại nguyên liệu hiện có người ta muốn sản xuất n loại sản phẩm

Giả sử :

a_{ij} là lượng nguyên liệu loại i dùng để sản xuất 1 sản phẩm loại j

(i=1,2,...,m) và (j=1,2,..., n)

b_i là số lượng nguyên liệu loại i hiện có

c_j là lợi nhuận thu được từ việc bán một đơn vị sản phẩm loại j

Vấn đề đặt ra là phải sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu sao cho tổng lợi nhuận thu được từ việc bán các sản phẩm lớn nhất trong điều kiện nguyên liệu hiện có.

Gọi $x_j \geq 0$ là số lượng sản phẩm thứ j sẽ sản xuất (j=1,2,...,n)

Tổng lợi nhuận thu được từ việc bán các sản phẩm là :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Vì yêu cầu lợi nhuận thu được cao nhất nên ta cần có :

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất sản phẩm thứ 1 là $a_{i1}x_1$

Lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất sản phẩm thứ 2 là $a_{i2}x_2$

....

Lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất sản phẩm thứ n là $a_{in}x_n$

Vậy lượng nguyên liệu thứ i dùng để sản xuất là các sản phẩm là

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$$

Vì lượng nguyên liệu thứ i=1→m dùng để sản xuất các loại sản phẩm không thể vượt quá lượng được cung cấp là b_i nên :

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

Vậy theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình sau đây :

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

3- Bài toán vận tải

Người ta cần vận chuyển hàng hoá từ m kho đến n cửa hàng bán lẻ. Lượng hàng hoá ở kho i là s_i (i=1,2,...,m) và nhu cầu hàng hoá của cửa hàng j là d_j

(j=1,2,...,n). Cước vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho i đến của hàng j là $c_{ij} \geq 0$ đồng.

Giả sử rằng tổng hàng hoá có ở các kho và tổng nhu cầu hàng hoá ở các cửa hàng là bằng nhau, tức là :

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Bài toán đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển để tiền cước là nhỏ nhất, với điều kiện là mỗi cửa hàng đều nhận đủ hàng và mỗi kho đều trao hết hàng.

Gọi $x_{ij} \geq 0$ là lượng hàng hoá phải vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j. Cước vận chuyển chuyển hàng hoá i đến tất cả các kho j là :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Cước vận chuyển tất cả hàng hoá đến tất cả kho sẽ là :

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình toán sau đây :

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1,2,\ldots,n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m) & (j = 1,1,\ldots,n) \end{cases}$$

II- QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT VÀ CHÍNH TẮC

1- Quy hoạch tuyến tính tổng quát

Tổng quát những bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể trên, một bài toán quy hoạch tuyến tính là một mô hình toán tìm cực tiểu (min) hoặc cực đại (max) của hàm mục tiêu tuyến tính với các ràng buộc là bất đẳng thức và đẳng thức tuyến tính. Dạng tổng quát của một bài toán quy hoạch tuyến tính là :

$$\min/\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i \in I_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i \in I_2) \qquad \text{(II)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i & (i \in I_3) \end{cases} \\ \begin{cases} x_j \ge 0 & (j \in J_1) \\ x_j \le 0 & (j \in J_2) \qquad \text{(III)} \\ x_j \ \text{tùy ý} & (j \in J_3) \end{cases} \end{cases}$$

Trong đó :

- (I) *Hàm mục tiêu*

Là một tổ hợp tuyến tính của các biến số, biểu thị một đại lượng nào đó mà ta cần phải quan tâm của bài toán.

- (II) *Các ràng buộc của bài toán*

Là các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính n biến số, sinh ra từ điều kiện của bài toán.

- (III) *Các các hạn chế về dấu của các biến số*

Người ta cũng thường trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính dưới dạng ma trận như sau :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gọi a_i ($i=1 \to m$) là dòng thứ i của ma trận A, ta có :

$$
\begin{array}{ll}
\min/\max \quad z(x) = c^T x & \text{(I)} \\
\left\{\begin{array}{l}
\begin{cases} a_i x = b_i & (i \in I_1) \\ a_i x \le b_i & (i \in I_2) \\ a_i x \ge b_i & (i \in I_3) \end{cases} \\
\begin{cases} x_j \ge 0 & (j \in J_1) \\ x_j \le 0 & (j \in J_2) \\ x_j \text{ tùy ý} & (j \in J_3) \end{cases}
\end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{(II)} \\ \\ \\ \text{(III)} \end{array}
\end{array}
$$

Người ta gọi :

- A là ma trận hệ số các ràng buộc.
- c là vectơ chi phí (c^T là chuyển vị của c)
- b là vectơ giới hạn các ràng buộc.

2- Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu = và các biến số đều không âm.

$$
\begin{array}{ll}
\min/\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \text{(I)} \\
\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,\dots,m) & \text{(II)} \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\dots,n) & \text{(III)} \end{cases}
\end{array}
\qquad (m \le n)
$$

$$
\begin{array}{ll}
\min/\max \quad z(x) = c^T x & \text{(I)} \\
\begin{cases} Ax = b & \text{(II)} \\ x \ge 0 & \text{(III)} \end{cases}
\end{array}
\qquad \mathrm{rang}(A)=m
$$

Người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát thành bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc nhờ các quy tắc sau đây :

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≤ thì người ta cộng thêm vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* $x_{n+i} \ge 0$ để được dấu = .

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≥ thì người ta trừ vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$ để được dấu = .

Các biến phụ chỉ là những đại lượng giúp ta biến các ràng buộc dạng bất đẳng thức thành đẳng thức, nó phải không ảnh hưởng gì đến hàm mục tiêu nên không xuất hiện trong hàm mục tiêu.

- Nếu biến $x_j \leq 0$ thì ta đặt $x_j = -x'_j$ với $x'_j \geq 0$ rồi thay vào bài toán.

- Nếu biến x_j là tuỳ ý thì ta đặt $x_j = x'_j - x''_j$ với x'_j , x''_j đều ≥ 0 rồi thay vào bài toán.

- Trong trường hợp trong số các ràng buộc có dòng mà vế phải của dòng đó là giá trị âm thì đổi dấu cả hai vế để được vế phải là một giá trị không âm.

Dựa vào các phép biến đổi trên mà người ta có thể nói rằng bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu = , vế phải và các biến số đều không âm.

Ví dụ :

Biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1\ , x_5 \geq 0 \\ x_4 \leq 0 \\ x_2\ , x_3 \ \text{tùy ý} \end{cases} \end{cases}$$

Bằng các thay thế :

$$\begin{aligned} x_4 &= -x'_4 && (x'_4 \geq 0) \\ x_2 &= x'_2 - x''_2 && (x'_2, x''_2 \geq 0) \\ x_3 &= x'_3 - x''_3 && (x'_3, x''_3 \geq 0) \end{aligned}$$

ta được :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5$$
$$\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') + x_4 - x_7 = -1 \\ 2(x_3' - x_3'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0$$

hay :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5$$
$$\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ -(x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4 + x_7 = 1 \\ 2(x_3' - x_3'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0$$

3- Phương án

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc :

$$\min/\max\quad z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

- $x=[x_1\ \ x_2\ \ ...\ \ x_n]^T$ là một phương án của (P) khi và chỉ khi Ax = b.
- $x=[x_1\ \ x_2\ \ ...\ \ x_n]^T$ là một phương án khả thi của (P) khi và chỉ khi Ax = b và $x \geq 0$.
- Một phương án tối ưu của (P) là một phương án khả thi của (P) mà giá trị của hàm mục tiêu tương ứng đạt min/max.

III- ĐẶC ĐIỂM CỦA TẬP HỢP CÁC PHƯƠNG ÁN

1- Khái niệm lồi và các tính chất

a- Tổ hợp lồi

- Cho m điểm x^i trong không gian R^n . Điểm x được gọi là tổ hợp lồi của các điểm x^i nếu :

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$$

- Khi x là tổ hợp lồi của hai điểm x^1, x^2 người ta thường viết :

$$x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2 \qquad (0\leq\lambda\leq 1)$$

Nếu $0<\lambda<1$ thì x được gọi là tổ hợp lồi thật sự.

- Đoạn thẳng

Tập hợp tất cả các tổ tổ hợp lồi của 2 điểm bất kỳ A, B$\in R^n$ được gọi là đoạn thẳng nối A và B . Ký hiệu :

$\delta_{AB}= \{x = \lambda A + (1-\lambda)B$ với $\lambda\in[0,1] \}$

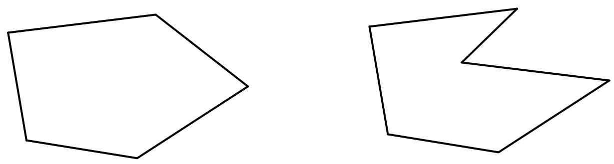
Định lý

Tổ hợp lồ có tính chất bắc cầu.

b- Tập hợp lồi

Tập con S của R^n được gọi là tập hợp lồi khi S chứa toàn bộ đoạn thẳng nối hai điểmbất kỳ của S.

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \quad \forall x,y\in,\lambda\in[0,1]$$



Tập hợp rỗng và tập hợp chỉ có một phần tử được xem là tập hợp lồi.

Định lý

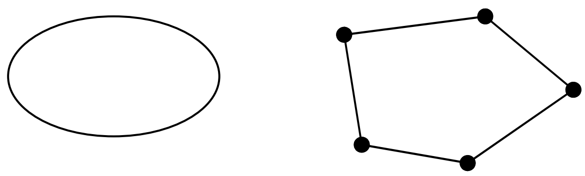
Giao của một số bất kỳ các tập hợp lồi là một tập hợp lồi.

Định lý

Nếu S là một tập hợp lồi thì S chứa mọi tổ hợp lồi của một họ điểm bất kỳ trong S.

c- Điểm cực biên của một tập hợp lồi

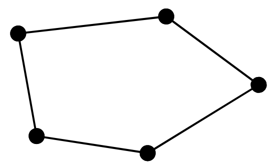
Điểm x trong tập lồi $S \subset R^n$ được gọi là điểm cực biên nếu không thể biểu diễn được x dưới dạng tổ hợp lồi thật sự của hai điểm phân biệt của S.



d- Đa diện lồi và tập lồi đa diện

Đa diện lồi

Tập hợp S tất cả các tổ hợp của các điểm x^1, x^2,....,x^m cho trước được gọi là đa diện lồi sinh ra bởi các điểm đó.



Đa diện lồi là một tập hợp lồi.

Trong đa diện lồi người ta có thể loại bỏ dần các điểm là tổ hợp của các điểm còn lại. Khi đó người ta thu được một hệ các điểm, giả sử là y^1, y^2,...,y^p ($p \le m$) . Các điểm này chính là các điểm cực biên của đa diện lồi, chúng sinh ra đa diện lồi đó.

Số điểm cực biên của đa diện lồi là hữu hạn.

Siêu phẳng - Nửa không gian

$A=[a_{ij}]_{m.n}$ là ma trận cấp m.n

A_i (i=1,2,...,m) là hàng thứ i của A

Siêu phẳng trong R^n là tập các điểm $x=[x_1,x_2,.....,x_n]^T$ thỏa

$$A_i\, x = b_i$$

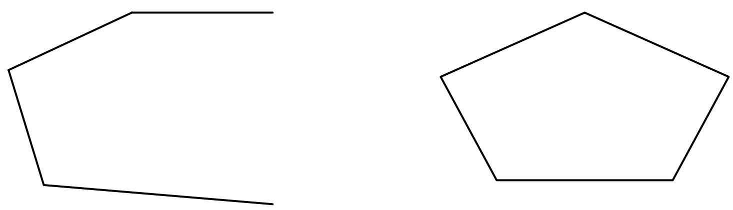
Nửa không gian trong R^n là tập các điểm $x=[x_1,x_2,.....,x_n]^T$ thỏa

$$A_i\, x \ge b_i$$

Siêu phẳng và nửa không gian đều là các tập hợp lồi.

Tập lồi đa diện

Giao của một số hữu hạn các nửa không gian trong R^n được gọi là tập lồi đa diện.



Tập lồi đa diện là một tập hợp lồi.

Nếu tập lồi đa diện không rỗng và giới nội thì đó là một đa diện lồi

2- Đặc điểm của tập hợp các phương án

Định lý

Tập hợp các phương án của một quy hoạch tuyến tính là một tập lồi đa diện.

Nếu tập hợp lồi đa diện này không rỗng và giới nội thì đó là một đa diện lồi, số điểm cực biên của nó là hữu hạn.

Định lý

Tập hợp các phương án tối ưu của một quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

Xét quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} Ax = b & \text{(II)} \\ x \geq 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Giả sử A=[aij]m.n có cấp m.n, $m \leq n$, rang(A)=m .

Gọi A^j (j=1,2,...,n) cột thứ j của ma trận A, quy hoạch tuyến tính chính tắc trên có thể viết :

$$\min/\max \ z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_nA^n = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Gọi $S=\{x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T \geq 0 \ / \ x_1A^1+ x_2A^2+\ldots+ x_nA^n=b\}$ là tập các phương án của bài toán.

$x^0 = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right]^T \in S$ là một phương án khác 0.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để x^0 là phương án cực biên (điểm cực biên của S) là các cột A^j ứng với $x_j^0>0$ là độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Số phương án cực biên của một quy hoạch tuyến tính chính tắc là hữu hạn. Số thành phần > 0 của một phương án cực biên tối đa là bằng m.

Khi số thành phần > 0 của một phương án cực biên bằng đúng m thì phương án đó được gọi là một phương án cơ sở.

Định lý

Nếu tập các phương án của một quy hoạch tuyến tính chính tắc không rỗng thì quy hoạch tuyến tính đó có ít nhất một phương án cực biên.

Bổ đề

Nếu

$\bar{x}$ là một phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

x^1, x^2 là các phương án của quy hoạch tuyến tính.

$\bar{x}$ là tổ hợp lồi thực sự của x^1, x^2

thì x^1, x^2 cũng là phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

Định lý

Nếu quy hoạch tuyến tính chính tắc có phương án tối ưu thì thì sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

Ví dụ : xét quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\max\ z(x) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Với hệ A^1 A^2 ta tính được $x^1 = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}^T$

Với hệ A^1 A^3 ta tính được $x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

Với hệ A^2 A^3 ta tính được $x^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix}^T$

Vì các thành phần của phương án cực biên là > 0 nên ta chi xét x^2 và x^3 . Khi đó :

$z(x^2)=2.1+3.0=2$

$z(x^3)=2.0+3.1/3=1$

Vậy $x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ là một phương án tối ưu.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để một quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu là tập các phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn.

Định lý

Nếu tập các phương án của một quy hoạch tuyến tính không rỗng và là một đa diện lồi thì quy hoạch tuyến tính đó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

3- Phương pháp hình học

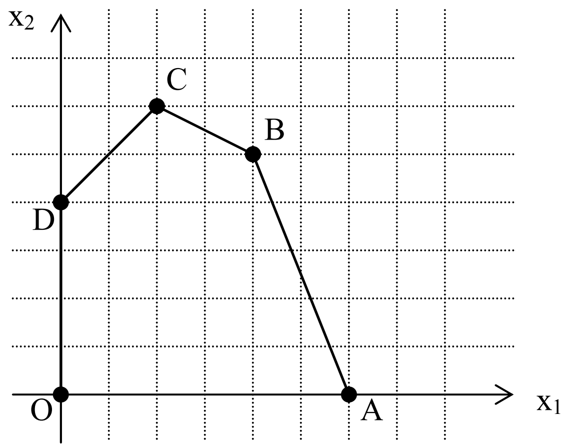
Từ những kết quả trên người ta có cách giải một quy hoạch tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học thông qua ví dụ sau :

Ví dụ : xét quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



A,B,C,D,O là các điểm cực biên. Giá trị hàm mục tiêu tại đó là :

z(A)=3.6+2.0=18

z(B)=3.4+2.5=22

z(C)=3.2+2.6=18

z(D)=3.0+2.8=8

z(O)=3.0+2.0=0

Phương án tối ưu của bài toán đạt được tại B : x_1=4 và x_2=5

IV- MỘT VÍ DỤ MỞ ĐẦU

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ z(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào các *biến phụ* w_1, w_2, $w_3 \ge 0$ (làm cho các ràng buộc bất đẳng thức thành đẳng thức) . Ta được :

$$\min\ z(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

Thực hiện việc chuyển vế ta được bài toán ban đầu như sau :

$$\min\ z(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ w_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ w_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

Một phương án khả thi xuất phát (chưa là phương án tối ưu) của bài toán là :

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$w_1=5$ $\qquad$ $w_2=11$ $\qquad$ $w_3 = 8$

Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là $z(x) = 0$

Người ta sẽ cải tiến phương án xuất phát này để được một phương án mới tốt hơn, nó làm cho giá trị của hàm mục tiêu giảm xuống. Người ta làm như sau :

Vì hệ số của x_1 trong hàm mục tiêu là âm và có giá trị tuyệt đối lớn nhất nên nếu tăng x_1 từ bằng 0 lên một giá trị dương (càng lớn càng tốt) và đồng thời vẫn giữ x_2 và x_3 bằng 0 thì giá trị của hàm của hàm mục tiêu sẽ giảm xuống. Khi đó các biến ở vế trái của bài toán (I) sẽ bị thay đổi theo nhưng phải thoả ≥ 0 . Sự thay đổi của chúng không ảnh hưởng đến sự thay đổi của hàm mục tiêu. Thực hiện ý tưởng trên ta được :

$$\begin{cases} w_1 = 5 - 2x_1 \ge 0 \\ w_2 = 11 - 4x_1 \ge 0 \\ w_3 = 8 - 3x_1 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_2 = x_3 = 0$$

Suy ra : $\begin{cases} x_1 \le \dfrac{5}{2} \\ x_1 \le \dfrac{11}{4} \\ x_1 \le \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 \le \dfrac{5}{2}$ (dòng 1 được chọn)

Người ta chọn $x_1 = \dfrac{5}{2}$ nên nhận được một phương án tốt hơn được xác định như sau :

$$x_2 = x_3 = w_1 = 0$$
$$x_1 = \frac{5}{2} \quad w_2 = 1 \quad w_3 = \frac{1}{2}$$

Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là $z(x) = -\dfrac{25}{2}$

Bước tiếp theo là biến đổi bài toán (I) thành một bài toán tương đương bằng cách từ dòng 1 (dòng được chọn) tính x_1 theo các biến còn lại và thế giá trị nhận được vào các dòng còn lại, ta được :

$$\min\ z(x) = -\frac{25}{2} + \frac{5}{2}w_1 + \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$
$$\begin{cases} \mathbf{x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}w_1 - \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3} \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ w_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}w_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

Thực hiện tương tự như trên, người ta tăng x_3 từ bằng 0 lên một giá trị dương cho phép và đồng thời vẫn giữ x_2 và w_1 bằng 0 thì giá trị của hàm của hàm mục tiêu sẽ giảm xuống. Khi đó các biến ở vế trái của bài toán (II) sẽ bị thay đổi theo nhưng phải thoả ≥ 0 . Ta được :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 \ge 0 \\ w_2 = 1 \ge 0 \\ w_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 \le 5 \\ x_3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 \le 1 \text{ (dòng 3 được chọn)}$$

Khi đó người ta chọn x_3=1 nên thu được một phương án tốt hơn được xác định như sau :

$$x_2 = w_1 = w_3 = 0$$
$$x_1 = 2 \quad x_3 = 1 \quad w_2 = 1$$

Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là z(x)=-13

Bước tiếp theo là biến đổi bài toán (II) thành một bài toán tương đương bằng cách từ dòng 3 (dòng được chọn) tính x_3 theo các biến còn lại và thế giá trị nhận được vào các dòng còn lại, ta được :

$$\min \ z(x) = -13 + w_1 + 3x_2 + w_3$$
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ \mathbf{x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3} \end{cases} \qquad \text{(III)}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Đến đây vì không có hệ số nào của hàm mục tiêu là âm nên không thể làm giảm giá trị của hàm mục tiêu theo cách như trên nữa. Phương án thu được ở bước sau cùng chính là phương án tối ưu của bài toán.

Đối với bài toán max, thay cho việc làm tăng biến có hệ số âm trong hàm mục tiêu người ta làm tăng biến có hệ số dương cho đến khi các hệ số trong hàm mục tiêu hoàn toàn âm.

V- DẤU HIỆU TỐI ƯU

1- Ma trận cơ sở - Phương án cơ sở - Suy biến

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

a- Ma trận cơ sở

Người ta gọi cơ sở của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (P) là mọi ma trận B không suy biến (có ma trận nghịch đảo) mxm trích ra từ m cột của ma trận ràng buộc A. Các cột còn lại được gọi là ma trận ngoài cơ sở, ký hiệu là N .

b- Phương án cơ sở - Phương án cơ sở khả thi

B là một cơ sở của bài toán (P).

Khi đó, bằng cách hoán vị các cột của A người ta có thể luôn luôn đặt A dưới dạng :

$A = [\ B \ \ N\ ]$

Do đó, người ta cũng phân hoạch x và c như sau :

$x^T = [\ x_B \ \ x_N\ ]$

$c^T = [\ c_B \ \ c_N\ ]$

Một phương án x của bài toán (P) thoả :

$$Ax = b \Leftrightarrow [\,B \ \ N\,]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b$$

Phương án cơ sở

Người ta gọi một phương án cơ sở tương ứng với cơ sở B là một phương án đặc biệt, nhận được bằng cách cho :

$$x_N = 0$$

Khi đó x_B được xác định một cách duy nhất bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Cramer :

$$Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b$$

Phương án cơ sở khả thi

Một phương án cơ sở là phương án cơ sở khả thi nếu :

$$x_B = B^{-1}b \geq 0$$

Cơ sở tương ứng với một phương án khả thi được gọi là cơ sở khả thi .

Ví dụ : xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc :

$$\min/\max z(x) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 + x_5 = 20 \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_4 + x_6 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 28 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,6)$$

Ma trận ràng buộc là

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Có thể chọn ba cột bất kỳ và kiểm chứng xem đó có thể là cơ sở không.

Một cơ sở được chọn và sắp xếp lại là

$$\begin{array}{cccccc} x_5 & x_6 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Các cột x_5 x_6 x_3 tạo thành một ma trận cơ sở . Các biến tương ứng được gọi là các biến (trong) cơ sở .

Các cột x_1 x_2 x_4 tạo thành một ma trận ngoài cơ sở. Các biến tương ứng được gọi là các biến ngoài cơ sở.

Một phương án cơ sở khả thi của bài toán là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	28	0	20	10

c- Suy biến

Một phương án cơ sở khả thi được gọi là suy biến nếu $x_B = B^{-1}b \geq 0$ có những thành phần bằng 0. Sự suy biến là một hiện tượng thường xảy ra trong một số bài toán như bài toán vận tải, dòng dữ liệu, đường đi ngắn nhất....... Đây là hiện tượng khá phức tạp (có nhiều cách giải quyết sẽ được xét sau). Vì vậy trong những phần tiếp theo ta giả sử rằng phương án cơ sở khả thi là không suy biến, tức là $x_B = B^{-1}b > 0$ (dương thực sự) .

2- Dấu hiệu tối ưu

Theo trên, khi một bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì tồn tại một cơ sở khả thi (tối ưu) B* , tức là phương án cơ sở x* tương ứng với B* là phương án tối ưu.

Vấn đề bây giờ là xác định một thủ tục để tìm B*. Chúng ta sẽ thấy rằng thủ tục đó được suy ra một cách trực tiếp từ việc chứng minh dấu hiệu tối ưu sau đây.

Định lý 4 (dấu hiệu tối ưu)

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max \;\; z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để một *phương án cơ sở khả thi x* có dạng :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

của bài toán là *phương án tối ưu* là :

$$\boxed{\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \le 0}$$ đối với bài toán max

$$\boxed{\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ge 0}$$ đối với bài toán min

Với :

A = [B | N]

c^T= [c_B | c_N]

Người ta thường gọi :

c_N là chi phí ngoài cơ sở

c_B là chi phí cơ sở

$\bar{c}_N^T$ là chi phí trượt giảm

$c_B^T B^{-1} N$ là lượng gia giảm chi phí

Chứng minh (cho bài toán max)

Điều kiện đủ

Giả sử x* là một phương án cơ sở khả thi với ma trận cơ sở B và thoả

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \le 0$$

thì cần chứng minh x* là phương án tối ưu, nghĩa là chứng minh rằng với mọi phương án bất kỳ của bài toán ta luôn có :

$$z(x) \le z(x^*)$$

Xét một phương án khả thi x bất kỳ , x thoả :

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ x_B \ge 0 \quad x_N \ge 0 \end{cases}$$

B là ma trận cơ sở của phương án cơ sở khả thi x*

B có ma trận nghịch đảo là B^{-1}

$$\Rightarrow \begin{cases} Bx_B + Nx_N = b \\ x_B \ge 0 \qquad x_N \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \qquad (B^{-1}B = I) \\ x_B \ge 0 \qquad x_N \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}.b \\ x_B \geq 0 \qquad x_N \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B \geq 0 \qquad x_N \geq 0 \end{cases}$$

Tính giá trị hàm mục tiêu đối với phương án x ta được :

$$\begin{aligned} z(x) &= c^T x \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T \left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \qquad (1) \end{aligned}$$

Vì x* là phương án cơ sở khả thi tương ứng với ma trận cơ sở B nên

$$\begin{cases} x_B^* = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N^* = 0 \end{cases}$$

Tính giá trị hàm mục tiêu đối vơi phương án cơ bản x* ta được :

$$\begin{aligned} z(x^*) &= c^T x^* \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = c_B^T x_B^* + c_N^T x_N^* \\ &= c_B^T x_B^* = c_B^T B^{-1}b \qquad (\text{ vì } x_N^* = 0\,) \qquad\qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$z(x) \leq z(x^*) \quad \text{ vì } c_N - c_B^T B^{-1}N \leq 0$$

Vậy x* là phương án tối ưu.

Điều kiện cần

Giả sử $x^* = \begin{bmatrix} x_B^* = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N^* = 0 \end{bmatrix}$ là phương án tối ưu với ma trận cơ sở B, cần chứng minh rằng : $\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N \leq 0$.

($\overline{c}_N$ là vectơ có n-m thành phần)

Ta sẽ chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử rằng tồn tại một thành phần c_s của $\bar{c}_N$ mà $c_s > 0$. Dựa vào c_s người ta xây dựng một vectơ x như sau :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = x_B^* - B^{-1}Nx_N \\ x_N = \theta I_s \geq 0 \end{bmatrix}$$

Trong đó $\theta>0$ và I_s là một vectơ có (n-m) thành phần bằng 0, trừ thành phần thứ s bằng 1 . Vậy

$$x = \begin{bmatrix} x_N = \theta I_s \geq 0 \\ x_B = x_B^* - B^{-1}N\theta I_s = B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Do $B^{-1}b \geq 0$ nên người ta có thể chọn $\theta>0$ đủ nhỏ để $x_B > 0$

Vậy x được chọn như trên sẽ thoả :

$$x \geq 0 \qquad (3)$$

Ta kiểm chứng x thỏa ràng buộc của bài toán bằng cách tính :

$$\begin{aligned} Ax &= [B \quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Bx_B + Nx_N \\ &= B\left(x_B^* - B^{-1}N\theta I_s\right) + N\theta I_s \\ &= B\left(B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s\right) + N\theta I_s \\ &= BB^{-1}b - BB^{-1}N\theta I_s + N\theta I_s \\ &= b - N\theta I_s + N\theta I_s \\ &= b \qquad (4) \end{aligned}$$

Từ (3) và (4) cho thấy x là một phương án khả thi của bài toán

Bây giờ ta chỉ ra mâu thuẩn bằng so sánh giá trị hàm mục tiêu tại x và x* . Ta có :

$$\begin{aligned} z(x) &= c^Tx \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^Tx_B + c_N^Tx_N \\ &= c_B^T\left(x_B^* - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^Tx_N \\ &= c_B^Tx_B^* - c_B^TB^{-1}Nx_N + c_N^Tx_N \\ &= c_B^Tx_B^* + c_N^Tx_N^* - c_B^TB^{-1}Nx_N + c_N^Tx_N \qquad (\text{vì } c_N^Tx_N^* = 0) \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} + \left(c_N^T - c_B^TB^{-1}N\right)x_N \\ &= c^Tx^* + \left(c_N^T - c_B^TB^{-1}N\right)\theta I_s \end{aligned}$$

$$= c^T x^* + \bar{c}_N^T \theta I_s = c^T x^* + \bar{c}_N^T I_s \theta$$

$$= z(x^*) + \bar{c}_s\theta > z(x^*) \qquad (\text{ vì } \bar{c}_s\theta > 0)$$

Vậy x* không phải là phương án tối ưu nên mâu thuẩn với giả thiết .

Chú ý

Qua việc chứng minh định lý dấu hiệu tối ưu ta thấy rằng từ một phương án cơ sở khả thi chưa tối ưu có thể tìm được các phương án khả thi càng lúc càng tốt hơn nhờ lặp lại nhiều lần công thức (*). Vấn đề được đặt là đại lượng θ được chọn như thế nào để nhanh chóng nhận được phương án tối ưu.

Bổ đề

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\max\ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

với B là một cơ sở khả thi nào đó và x^0 là phương án cơ sở tương ứng, tức là

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_B^0 = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N^0 = 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad z(x^0) = c_B^T B^{-1} b$$

Xét $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$.

Nếu tồn tại một biến ngoài cơ sở x_s sao cho $\bar{c}_s > 0$ với $\bar{c}_s$ là thành phần thứ s của $\bar{c}_N$ thì :

a- Hoặc là người ta có thể làm tăng một cách vô hạn giá trị của x_s mà không đi ra khỏi tập hợp các phương án khả thi, và trong trường hợp này phương án tối ưu của bài toán không giới nội.

b- Hoặc là người ta có thể xác định một cơ sở khả thi khác là $\hat{B}$ có phương án cơ sở khả thi $\hat{x}$ tương ứng với nó là tốt hơn , tức là :

$$z(x^0) < z(\hat{x})$$

Chứng minh

Trong quá trình chứng minh định lý dấu hiệu tối ưu ta có phương án mới được xác định như sau :

$$x = \begin{bmatrix} x_N = \theta I_s \geq 0 \\ x_B = x_B^* - B^{-1}N\theta I_s = B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s \end{bmatrix}$$

Ký hiệu :

$\overline{N} = B^{-1}N$

$\overline{N}_s$ là cột s của $\overline{N}$

$\overline{b} = B^{-1}b$

Như vậy ta có : $x = \begin{bmatrix} x_B = \overline{b} - \theta\,\overline{N}_s \\ x_N = \theta I_s \end{bmatrix}$

Hai trường hợp có thể xảy ra như sau :

a- Trường hợp $\overline{N}_s \le 0$

Trong trường hợp này x_s có thể nhận một giá trị θ lớn tuỳ mà vẫn đảm bảo $x_B \ge 0$, nghĩa là x luôn luôn thoả ≥ 0 . Khi đó như đã biết giá trị hàm mục tiêu tương ứng là

$$
\begin{aligned}
z(x) &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\
&= c_B^T\left(B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s\right) + c_N^T\theta I_s \\
&= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}N\theta I_s + c_N^T\theta I_s \\
&= z(x^0) + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N\right)\theta I_s \\
&= z(x^0) + \overline{c}_N^T\theta I_s \\
&= z(x^0) + \overline{c}_s\theta
\end{aligned}
$$

với $\overline{c}_s\theta$ có thể lớn vô hạn thì giá trị của hàm mục tiêu là không giới nội.

b- Trường hợp tồn tại i=1→m sao cho $\overline{N}_{is} > 0$

($\overline{N}_{is} > 0$ là thành phần thứ i của $\overline{N}_s$)

Trong trường hợp này giá trị của θ>0 mà x_s có thể nhận không thể tăng vô hạn vì phải đảm bảo x_B>0. Giá trị lớn nhất $\hat{\theta}$ của θ mà x_s có thể nhận được xác định như sau :

$$
\hat{\theta} = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}, \overline{N}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{N}_{rs}}
$$

$$
(\forall i = 1 \to m)
$$

Phương án cơ sở khả thi mới có các thành phần như sau :

$$
\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B = \overline{b} - \hat{\theta}\,\overline{N}_s \\ \hat{x}_N = \hat{\theta}\, I_s \end{bmatrix}
$$

và giá trị hàm mục tiêu tương ứng là :

$$z(\hat{x}) = z(x^0) + \hat{\theta}\,\bar{c}_s > z(x^0)$$

Ghi chú :

Trong trường hợp bài toán không suy biến, nếu $\hat{\theta}$ được xác định một cách duy nhất thì phương án mới $\hat{x}$ có đúng m thành phần khác 0. Thật vậy :

- Biến x_s đang bằng 0 trong phương án x^0 trở thành dương thật sự vì $x_s = \hat{\theta}$

- Biến x_r đang dương thật sự bây giờ nhận giá trị :

$$\hat{x}_r = \bar{b}_r - \hat{\theta}\bar{N}_{rs} = \bar{b}_r - \frac{\bar{b}_r}{\bar{N}_{rs}}\bar{N}_{rs} = \bar{b}_r - \bar{b}_r = 0$$

Vậy phương án mới $\hat{x}$ là một phương án cơ sở. Nó tương ứng với cơ sở ở $\hat{B}$ được suy ra từ B bằng cách thay thế cột r bằng cột s.

Người ta nói rằng hai cơ sở B và $\hat{B}$ là kề nhau, chung tương ứng với những điểm cực biên kề nhau trong tập hợp lồi S các phương án khả thi của bài toán.

CÂU HỎI CHƯƠNG 1

1- Trình bày các bước nghiên cứu một quy hoạch tuyến tính.

2- Định nghĩa quy hoạch tuyến tính chính tắc.

3- Trình bày khái niệm về phương án của một quy hoạch tuyến tính.

4- Trình bày cơ sở lý thuyết của phương pháp hình học giải một quy hoạch tuyến tính hai biến.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1- Một nhà máy cán thép có thể sản xuất hai loại sản phẩm : thép tấm và thép cuộn. Nếu chỉ sản xuất một loại sản phẩm thì nhà máy chỉ có thể sản xuất 200 tấn thép tấm hoặc 140 tấn thép cuộn trong một giờ . Lợi nhuận thu được khi bán một tấn thép tấm là 25USD, một tấn thép cuộn là 30USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong một tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn .

Vấn đề đặt ra là nhà máy cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong một tuần để đạt lợi nhuận cao nhất. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính cho vấn đề trên.

2- Có 3 người cùng phải đi một quảng đường dài 10km mà chỉ có một chiếc xe đạp một chổ ngồi. Tốc độ đi bộ của người thứ nhất là 4km/h, người thứ hai là 2km/h, người thứ ba là 2km/h. Tốc độ đi xe đạp của người thứ nhất là 16km/h, người thứ hai là 12km/h, người thứ ba là 12km/h.

Vấn đề đặt ra là làm sao để thời gian người cuối cùng đến đích là ngắn nhất. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính cho vấn đề trên.

3- Một nhà máy sản xuất ba loại thịt : bò, lợn và cừu với lượng sản xuất mỗi ngày là 480 tấn thịt bò, 400 tấn thịt lợn, 230 tấn thịt cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt có thể nấu chín để bán là 420 tấn trong giờ và 250 tấn ngoài giờ. Lợi nhuận thu được từ việc bán một tấn mỗi loại thịt được cho trong bảng sau đây :

	Tươi	Nấu chín trong giờ	Nấu chín ngoài giờ
Bò	8	14	11
Lợn	4	12	7
Cừu	4	13	9

Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính để nhà máy sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

4- Một xưởng mộc làm bàn và ghế. Một công nhân làm xong một cái bàn phải mất 2 giờ, một cái ghế phải mất 30 phút. Khách hàng thường mua nhiều nhất là 4 ghế kèm theo 1 bàn do đó tỷ lệ sản xuất giữa ghế và bàn nhiều nhất là 4:1. Giá bán một cái bàn là 135USD, một cái ghế là 50USD. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính để xưởng mộc sản xuất đạt doanh thu cao nhất, biết rằng xưởng có 4 công nhân đều làm việc 8 giờ mỗi ngày.

5- Một nhà máy sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một cái mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp 2 lần thời gian làm ra một cái kiểu thứ hai. Nếu sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì nhà máy làm được 500 cái mỗi ngày. Hàng ngày, thị trường tiêu thụ nhiều nhất là 150 cái mũ kiểu thứ nhất và 200 cái kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một cái mũ kiểu thứ nhất là 8USD, một cái mũ thứ hai là 5USD. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính để nhà máy sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

6- Trong hai tuần một con gà mái đẻ được 12 trứng hoặc ấp được 4 trứng nở ra gà con. Sau 8 tuần thì bán tất cả gà con và trứng với giá 0,6USD một gà và 0,1USD một trứng. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính bố trí 100 gà mái đẻ trứng hoặc ấp trứng sao cho doanh thu là nhiều nhất.

7- Giải những bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây bằng phương pháp hình học :

a)-
$$\max z = x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

b)-
$$\min w = -x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

c)-
$$\max z = 5x_1 + 6x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \text{ tuy ý} \end{cases}$$

d)-
$$\min \; w = -2x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e)-
$$\max \; z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

f)-
$$\max \; z = 3x_1 - 4x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

g)-
$$\min/\max \; z(x) = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ x_1 + 4x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

CHƯƠNG II

GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH

Chương này trình bày một cách chi tiết nội dung của giải thuật đơn hình. Sau phần cơ sở lý thuyết của giải thuật là các ví dụ tương ứng. Các ví dụ được trình bày đúng theo các bước của giải thuật. Kiến thức trong chương này cần thiết cho việc lập trình giải quy hoạch tuyến tính trên máy tính.

Nội dung chi tiết của chương bao gồm :

CHƯƠNG II: GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH

I- GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH CƠ BẢN

Chương này trình bày một phương pháp để giải bài toán quy hoạch tuyến tính đó là phương pháp đơn hình. Phương pháp đơn hình được George Bernard Dantzig đưa ra năm 1947 cùng lúc với việc ông khai sinh ra quy hoạch tuyến tính. Đây là một phương pháp thực sự có hiệu quả để giải những bài toán quy hoạch tuyến tính cở lớn trong thực tế. Với cách nhìn hiện đại ý tưởng của phương pháp đơn hình rất đơn giản. Có nhiều cách tiếp cận phương pháp đơn hình, chương này trình bày một trong các cách đó.

1- Cơ sở xây dựng giải thuật đơn hình cơ bản

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc :

$$\max\ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Giả sử rằng B^0 là một cơ sở khả thi xuất phát của bài toán (không nhất thiết là m cột đầu tiên của ma trận A) . Thuật toán đơn hình cơ bản được xây dựng dựa trên các bước sau :

a- Gán $B = B^0$ và $l=0$ (số lần lặp)

b- $l = l+1$

c- Với cơ sở hiện thời B tính :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$: phương án cơ sở khả thi tương ứng

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_N^T B^{-1} N$$: dấu hiệu tối ưu

d- Nếu $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0$ thì giải thuật dừng và bài toán có phương án tối ưu là x .

Ngược lại, nếu tồn tại s sao cho $\bar{c}_s > 0$ ($\bar{c}_s$ là thành phần thứ s của $\bar{c}_N$) thì sang bước e e- Tính : $\overline{A}_s = B^{-1}A_s$ (A_s là cột thứ s của A)

Nếu $\overline{A}_s \le 0$ thì giải thuật dừng và phương án tối ưu không giới nội.

Ngược lại, nếu tồn tại $\overline{a}_{is} \in \overline{A}_s$ mà $\overline{a}_{is} > 0$ thì tính :

$$\hat{x}_s = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}, \overline{a}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \qquad (i = 1 \to m)$$

$\overline{a}_{is}$ là các thành phần của $\overline{A}_s$.

$\hat{x}_s$ là thành phần thứ s của phương án mới $\hat{x}$.

f- Gọi x_t là biến tương ứng với cột thứ r của cơ sở B. Khi đó biến x_s sẽ nhận giá trị $\hat{x}_s > 0$ (vào cơ sở), biến x_t sẽ nhận giá trị $\hat{x}_t = 0$ (ra khỏi cơ sở). Như vậy phương án mới $\hat{x}$ tương ứng với cơ sở mới $\hat{B}$ (thay đổi cơ sở) được xác định như sau :

$$\hat{B} = B \cup \{ t \} - \{ s \}$$

g- Gán B = $\hat{B}$ và quay về b .

Về mặt hình học, giải thuật này được hiểu như là một quá trình duyệt qua các điểm cực biên của đa diện lồi S các phương án khả thi của bài toán.

Về mặt đại số, giải thuật này được hiểu như là một quá trình xác định một chuỗi các ma trận cơ sở kề B^0 B^1 B^2 .... mà các phương án cơ sở tương ứng x^0 x^1 x^2........ là ngày càng tốt hơn, tức là :

$$z(x^0) < z(x^1) < z(x^2) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chú ý :

Nếu cơ sở ban đầu B^0 chính là m cột đầu tiên của ma trận A thì trong giải thuật trên t chính là r .

2- Định lý về sự hội tụ

Với giả thiết bài toán không suy biến, giải thuật đơn hình trên đây sẽ hội tụ về phương án tối ưu sau một số hữu hạn lần lặp.

Bằng sự thống kê người thấy rằng nói chung giải thuật đơn hình sẽ hội tụ với số lần lặp ít nhất phải là từ m đến 3m (m là số ràng buộc) .

3- Giải thuật đơn hình cơ bản

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max\ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Giả sử rằng sau khi hoán vị các cột trong A ta chọn được ma trận cơ sở B thoả sự phân hoạch sau đây :

$$A = [B \quad N]$$
$$c^T = [c_B \quad c_N]$$
$$x^T = [x_B \quad x_N]$$

Giải thuật đơn hình cơ bản được thực hiện như sau :

a- Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

b- Tính các tham số :

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \overline{b} \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu $z(x) = c_B^T x_B$

. Ma trận $\overline{N} = B^{-1}N$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T \overline{N}$$

- Nếu $\overline{c}_N^T \leq 0$ thì kết thúc giải thuật với phương án tối ưu là :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \overline{b} \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

và giá trị hàm mục tiêu là :

$$z(x) = c_B^T x_B$$

- Nếu tồn tại $\overline{c}_s \in \overline{c}_N$ mà $\overline{c}_s > 0$ thì sang bước d.

d- Xác định chỉ số của phần tử pivot trong ma trận $\overline{N}$

. Xác định chỉ số cột s của pivot

$$\overline{c}_s = \max \left\{ \overline{c}_k > 0 \in \overline{c}_N \right\}$$

Nếu $\overline{N}_{is} \le 0$ thì giải thuật dừng, bài toán không có phương án tối ưu. Ngược lại thì tiếp tục.

. Xác định chỉ số dòng r của pivot

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}, \overline{N}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{N}_{rs}} \quad (i = 1,2,...,m)$$

Phần tử $\overline{N}_{rs}$ trong ma trận $\overline{N}$ được gọi là phần tử pivot

Trong trường hợp bài toán min

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T \overline{N}$$

- Nếu $\overline{c}_N^T \ge 0$ thì kết thúc giải thuật với phương án tối ưu là :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \overline{b} \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

và giá trị hàm mục tiêu là :

$$z(x) = c_B^T x_B$$

- Nếu tồn tại $\overline{c}_s \in \overline{c}_N$ mà $\overline{c}_s < 0$ thì sang bước d.

d- Xác định chỉ số của phần tử pivot trong ma trận $\overline{N}$

. Xác định chỉ số cột s của pivot

$$\overline{c}_s = \max\left\{|\,\overline{c}_k\,| \quad \overline{c}_k < 0 \in \overline{c}_N\right\}$$

Nếu $\overline{N}_{is} \le 0$ thì giải thuật dừng, bài toán không có phương án tối ưu. Ngược lại thì tiếp tục.

. Xác định chỉ số dòng r của pivot

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}, \overline{N}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{N}_{rs}} \quad (i = 1,2,...,m)$$

Phần tử $\overline{N}_{rs}$ trong ma trận $\overline{N}$ được gọi là phần tử pivot

e- Thực hiện các hoán vị :

. Cột thứ s trong ma trận N với cột thứ r trong ma trận B

. Phần tử thứ s trong c_N^T với phần tử thứ r trong c_B^T

. Biến x_s trong x_N^T với biến x_r trong x_B^T

f- Quay về (a)

Ví dụ : Tìm phương án tối ưu cho bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc sau đây bằng giải thuật đơn hình cơ bản

$$\max\ z(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

Ta có :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\qquad N \qquad\qquad\qquad B$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}$$

$$\qquad x_N^T \qquad\qquad\qquad x_B^T$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\qquad c_N^T \qquad\qquad\qquad c_B^T$$

Lần lặp1

a- Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

$$B^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b- Tính các tham số

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \overline{b} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x) = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

. Tính ma trận :

$$\overline{N} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \overline{N} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Chuyển sang bước d

d- Xác định chỉ số của pivot

. Xác định chỉ số cột pivot s :

$$\overline{c}_s = \max \left\{ \overline{c}_k > 0 \in \overline{c}_N \right\} = \max \{ 2, 1 \} = 2 = \overline{c}_1$$

Vậy s=1

Ma trận cột s=1 trong ma trận $\overline{N}$ là $\overline{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

. Xác định chỉ số dòng pivot r :

$$\min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}} \right\} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_1}{\overline{N}_{11}}, \frac{\overline{b}_2}{\overline{N}_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{6}{1} \right\} = 3 = \frac{\overline{b}_1}{\overline{N}_{11}}$$

Vậy r = 1

e- Hoán vị

. Cột thứ s=1 trong ma trận N và cột thứ r=1 trong ma trận B

. Phần tử thứ s=1 trong c_N^T với phần tử thứ r=1 trong c_B^T

. Biến thứ s=1 trong x_N^T với biến thứ r=1 trong x_B^T

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$c^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow c^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\right] \rightarrow x^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & x_5 \end{array}\right]$$

f- Quay về bước a

Lần lặp 2

a. Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b- Tính các tham số

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \overline{b} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x) = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 6$$

. Tính ma trận :

$$\overline{N} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \overline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Chuyển sang bước d

d- Xác định chỉ số của pivot

. Xác định chỉ số cột pivot s :

$$\overline{c}_s = \max \left\{ \overline{c}_k > 0 \in \overline{c}_N \right\} = \max \left\{ 3 \right\} = 3 = \overline{c}_2$$

Vậy s=2

Ma trận cột s=2 trong ma trận $\overline{N}$ là $\overline{N}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

. Xác định chỉ số dòng pivot r :

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}\right\} = \min\left\{\frac{\overline{b}_2}{\overline{N}_{22}}, \frac{\overline{b}_3}{\overline{N}_{23}}\right\} = \min\left\{\frac{3}{3}, \frac{5}{1}\right\} = 1 = \frac{\overline{b}_2}{\overline{N}_{22}}$$

Vậy r = 2

e- Hoán vị

. Cột thứ s=2 trong ma trận N và cột thứ r=2 trong ma trận B

. Phần tử thứ s=2 trong c_N^T với phần tử thứ r=2 trong c_B^T

. Biến thứ s=2 trong x_N^T với biến thứ r=2 trong x_B^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & | & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & | & x_1 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \to x^T = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & | & x_1 & x_2 & x_5 \end{bmatrix}$$

f- Quay về bước a

Lần lặp 3

a. Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

b- Tính các tham số

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \overline{b} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x) = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 9$$

. Tính ma trận :

$$\overline{N} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \overline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} < 0 : \text{dừng}$$

Vậy phương án tối ưu sẽ là :

$$\begin{cases} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Giá trị hàm mục tiêu là $z(x) = 9$ với $x_1 = 4$ và $x_2 = 1$

4- Chú ý trong trường hợp suy biến

Trong trường hợp bài toán suy biến, nghĩa là $\bar{b}_r = 0$, ta có :

$$\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = 0$$

cho nên giá trị của hàm mục tiêu không thay đổi khi thay đổi cơ sở, vì :

$$z(\hat{x}) = z(x) + \bar{c}_s \hat{x}_s = z(x)$$

Vậy thì, có thể sau một số lần thay đổi cơ sở lại quay trở về cơ sở đã gặp và lặp như vậy một cách vô hạn. Người ta có nhiều cách để khắc phục hiện tượng này bằng cách xáo trộn một chút các dữ liệu của bài toán, sử dụng thủ tục từ vựng, quy tắc chọn pivot để tránh bị khử.

II- GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH CẢI TIẾN

1- Một cách tính ma trận nghịch đảo

Trong giải thuật đơn hình cơ bản hai ma trận kề B và $\hat{B}$ chỉ khác nhau một cột vì vậy có thể tính ma trận nghịch đảo $\hat{B}^{-1}$ một cách dễ dàng từ B^{-1}. Để làm điều đó chỉ cần nhân (bên trái) B^{-1} với một ma trận đổi cơ sở được xác định như sau :

$$\begin{array}{cc} \mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & \frac{-\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & \frac{-\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \frac{1}{\bar{a}_{rs}} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \frac{-\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & .. & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \rightarrow \text{dòng } r \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\uparrow \text{cột } r & \end{array}$$

Khi đó :

$$\hat{B}^{-1} = \mu B^{-1}$$

Ta thấy rằng ma trận đổi cơ sở μ được thiết lập giống như một ma trận đơn vị mxm, trong đó cột r có các thành phần được xác định như sau :

$\frac{-\bar{a}_{is}}{\bar{a}_{rs}}$: đối với thành phần i ≠ r.

$\frac{1}{\bar{a}_{rs}}$: đối với thành phần r .

Khi mà ma trận cở sở xuất phát là ma trận đơn vị, sau một số bước đổi cơ sở B^0 B^1 B^2 .... B^q tương ứng với các ma trận đổi cơ sở μ^0 μ^1 μ^2 …….μ^{q-1} người ta có cách tính ma trận nghịch đảo như sau :

$$\left[B^q\right]^{-1} = \mu^0.\mu^1 ......\mu^{q-1}$$

2- Quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là quy hoạch tuyến tính chính tắc mà trong đó có thể rút ra một ma trận cơ sở là ma trận đơn vị. Quy hoạch tuyến tính chuẩn có dạng :

$$\min/\max \ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} [I \quad N]\, x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3- Giải thuật đơn hình cải tiến

Từ những kết quả trên người ta xây dựng giải thuật đơn hình cải tiến đối với bài toán qui hoạch tuyến tính (max) dạng chuẩn như sau :

a- Khởi tạo

$$\bar{A}_0 = A$$
$$\bar{b}_0 = b$$

b- Thực hiện bước lặp với k = 0,1,2, ...

. Xác định phương án cơ sở khả thi :

$$x^k = \begin{bmatrix} x_{B_k} = \bar{b}_k \\ \\ x_{N_k} = 0 \end{bmatrix}$$

. Tính giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x^k) = c_{B_k}^T x_{B_k} = c_{B_k}^T \bar{b}_k$$

. Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\bar{c}_k^T = c^T - c_{B_k}^T \bar{A}_k$$

- Nếu $\bar{c}_k^T \leq 0$ thì giải thuật dừng và :

$$x^k = \begin{bmatrix} x_{B_k} = \overline{b}_k \\ x_{N_k} = 0 \end{bmatrix}$$ là phương án tối ưu

$$z(x^k) = c_{B_k}^T x_{B_k} = c_{B_k}^T \overline{b}_k$$ là giá trị hàm mục tiêu

- Ngược lại thì sang bước (c)

c- Cập nhật các giá trị mới :

.Tính pivot

.Tính ma trận chuyển cơ sở μ^k

.Tính $\overline{A}_{k+1} = \mu^k \overline{A}_k$

.Tính $\overline{b}_{k+1} = \mu^k \overline{b}_k$

.Tăng số lần lặp k=k+1.

Quay về bước b

Ví dụ

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây bằng phương pháp đơn hình cải tiến :

$$\max\ z(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Bước khởi tạo

$$\overline{A}_0 = A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\qquad\qquad N_0 \qquad\qquad B_0$$

$$c^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\qquad c_{N_0}^T \qquad c_{B_0}^T$$

Bước lặp k=0

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_{B_0} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \\ x_{N_0} = 0 \end{bmatrix}$$

$$z(x^0) = c_{B_0}^T \overline{b}_0 = [0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$\overline{c}_0^T = c^T - c_{B_0}^T \overline{A}_0 = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] - [0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}$ suy ra pivot : $\overline{a}_{11} = 1$

$$\mu^0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = \mu^0 \overline{A}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{b}_1 = \mu^0 \overline{b}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix}$$

Bước lặp k=1

$$x^1 = \begin{bmatrix} x_{B_1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \overline{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix} \\ x_{N_1} = 0 \end{bmatrix}$$

$$z(x^1) = c_{B_1}^T \overline{b}_1 = [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix} = 6$$

$$\overline{c}_1^T = c^T - c_{B_1}^T \overline{A}_1 = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] - [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$= [\ 0\ 3\ -2\ \ 0\ \ 0\ ]$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ suy ra pivot : } \bar{a}_{22} = 3$$

$$\mu^1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 = \mu^1 \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_2 = \mu^1 \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=2

$$x^2 = \begin{bmatrix} x_{B_2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \bar{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ x_{N_2} = 0 \end{bmatrix}$$

$$z(x^2) = c_{B_2}^T \bar{b}_2 = [2\ \ 1\ \ 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 9$$

$$\bar{c}_2^T = c^T - c_{B_2}^T \bar{A}_2 = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] - [2\ \ 1\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

= [0 0 -1 -1 0] : thoả dấu hiệu tối ưu.

Vậy kết quả của bài toán là :

. Phương án tối ưu $x = x^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

. Giá trị hàm mục tiêu z(x) = 9

4- Phép tính trên dòng - Bảng đơn hình

Các bước thực hiện giải thuật đơn hình cải tiến được trình bày lần lượt trong các bảng, gọi là bảng đơn hình. Trong thực hành, để cập nhật những giá trị mới ta có thể làm như sau :

. Tìm pivot.

. Chia dòng chứa pivot cho pivot.

. Khử các phần tử trên cột chứa pivot.

. Tính dấu hiệu tối ưu.

. Tính giá trị hàm mục tiêu .

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_0$
0	3	1	-1	1	0	0	3
0	4	1	2	0	1	0	6
0	5	-1	2	0	0	1	2
c^T		2	1	0	0	0	$z(x^0)$
$\bar{c}_0^T$		2	1	0	0	0	0

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_1$
2	1	1	-1	1	0	0	3
0	4	0	3	-1	1	0	3
0	5	0	1	1	0	1	5
c^T		2	1	0	0	0	$z(x^1)$
$\bar{c}_1^T$		0	3	-2	0	0	6

c_{B_2}	i_{B_2}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_2$
2	1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	4
1	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
0	5	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	4
c^T		2	1	0	0	0	$z(x^2)$
$\bar{c}_2^T$		0	0	-1	-1	0	9

III- PHƯƠNG PHÁP BIẾN GIẢ CẢI BIÊN

1- Bài toán cải biên

a- Cải biên bài toán quy hoạch tuyến tính

Người ta có thể biến đổi một bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc thành dạng chuẩn bằng cách cộng một cách phù hợp vào vế trái của ràng buộc i một biến giả $x_{n+i} \geq 0$ để làm xuất hiện ma trận đơn vị. Vì các biến giả cải biên có ảnh hưởng đến hàm mục tiêu nên cũng sẽ có sự cải biên hàm mục tiêu.

Vậy, người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, gọi là bài toán xuất phát, thành bài toán dạng chuẩn, gọi là bài toán cải biên (mở rộng)

Ví dụ :

Biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây thành dạng chuẩn

$$\max z(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ -4x_2 - x_3 + 6x_4 = 18 \\ 3x_2 + 8x_4 = 28 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4)$$

Bài toán xuất phát có các biến, ma trận ràng buộc và chi phí :

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [2 \quad 1 \quad 1 \quad -1]$$

Bằng cách thêm biến giả x_5, x_6 lần lượt vào ràng buộc 2 và 3 . Ta được bài toán cải biên :

$$\max\ z'(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - M(x_5 + x_6)$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ -4x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 18 \\ 3x_2 + 8x_4 + x_6 = 28 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

$z'(x)$ là hàm mục tiêu cải biên sẽ được giải thích trong phần tiếp theo.

Các biến, ma trận ràng buộc các hệ số và chi phí của bài toán cải biên là

$$x^T = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6]$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$c^T = [2\ \ 1\ \ 1\ \ -1\ \ -M\ \ -M]$$

b- Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán cải biên

Người ta kiểm chứng rằng :

- Nếu $x^T = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n]$ là phương án (tối ưu) của bài toán xuất phát thì $\overline{x}^T = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0]$ là phương án (tối ưu) của bài toán cải biên tương ứng.

Vậy nếu bài toán cải biên không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng sẽ không có phương án tối ưu.

- Nếu $\overline{x}^T = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0]$ là phương án tối ưu của bài toán cải biên thì $x^T = [x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n]$ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát

- Nếu bài toán cải biên có một phương án tối ưu mà trong đó có ít nhất một biến giả có giá trị dương thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

- Nếu bài toán cải biên (dạng chuẩn) có phương án tối ưu thì cũng sẽ phương án cơ sở tối ưu.

Ví dụ

1- Xét bài toán :

$$\min\ z(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5$$
$$\begin{cases} -3x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Bài toán cải biên không có phương án tối ưu nên bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu .

2- Xét bài toán :

$$\min\ z(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3$$
$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3)$$

Phương án tối ưu của bài toán cải biên :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{5} & \frac{22}{15} & 0 \end{bmatrix}$$

Phương án tối ưu của bài toán xuất phát :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{5} & \frac{22}{15} \end{bmatrix}$$

3- Xét bài toán :

$$\min\ z(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$
$$x_j \quad (j = 1,2,3)$$

Phương án tối ưu của bài toán cải biên :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 & 43 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài toán xuất phát không có phương án tối ưu .

Hai phương pháp biến giả cải biên thương dùng là phương pháp hai pha và phương pháp M vô cùng lớn .

2- Phương pháp hai pha

Pha 1

Tìm phương án tối ưu cho bài toán cải biên với hàm mục tiêu cải biên là :

min (tổng tất cả biến giả cải biên)

Pha 2

Tìm phương án tối ưu cho bài toán xuất phát với phương án cơ sở khả thi xuất phát là phương án tối ưu tìm được ở pha 1. Ở pha 2 này các biến giả cải biên bị loại ra khỏi ma trận các hệ số ràng buộc, và vectơ chi phí được cập nhật lại, do đó dấu hiệu tối ưu cũng được cập nhật lại

Đây là phương pháp thuận lợi cho việc lập trình ứng dụng giải thuật đơn hình cải tiến.

Ví dụ : Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3)$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách thêm biến phụ x_4 , x_5 ta được

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Ma trận các hệ số ràng buộc là :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ không chứa ma trận đơn vị

Áp dụng phương pháp đơn hình cải biên hai pha như sau :

Pha 1

Thêm biến giả (cải biên) $x_6 \geq 0$ vào ràng buộc thứ hai để được ma trận đơn vị . Khi đó bài toán cải biên có dạng :

$$\min\ w(x) = x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

Có ma trận các ràng buộc là :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ có chứa ma trận đơn vị}$$

Giải bài toán cải biên bằng giải thuật đơn hình cải tiến

Khởi tạo

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=0

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_0$
0	4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$
1	6	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$
c^T		0	0	0	0	0	1	$w(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		-1	-2	-3	0	1	0	$\frac{7}{3}$

Bước lặp k= 1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_1$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
0	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		0	0	0	0	0	1	$w(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		0	0	0	0	0	1	0

Ta được phương án tối ưu . Xong pha 1 . Chuyển sang pha 2.

Pha 2

Loại bỏ biến giả cải biên $x_6 \geq 0$

Khởi tạo

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\overline{b}_0 = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=0

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_0$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$

Bước lặp k=1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_1$
0	4	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$
4	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		1	0	-5	0	2	$\frac{14}{3}$

Bước lặp k=2

c_{B_2}	i_{B_2}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_2$
0	5	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$
4	2	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{3}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^2)$
$\overline{c}_2^T$		1	0	-3	-2	0	$\frac{16}{3}$

Bước lặp k=3

c_{B_3}	i_{B_3}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_3$

0	5	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$
3	1	1	2	2	1	0	$\frac{8}{3}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^3)$
$\bar{c}_3^T$		0	-2	-5	-2	0	8

Kết quả của bài toán đã cho :

. Phương án tối ưu $\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$

. Giá trị hàm mục tiêu $z(x)=z(x^3)= 8$

3- Phương pháp M vô cùng lớn

Phương pháp M vô cùng lớn (M là số vô cùng lớn) tương tự như phương pháp hai pha, ngoại trừ ở pha 1 hàm mục tiêu cải biên có dạng sau đây cho bài toán max/min

max [z(x) - M*(tổng các biến giả cải biên)]

min [z(x) + M*(tổng các biến giả cải biên)]

Bằng phương pháp này, trong quá trình tối ưu, các biến giả cải biên sẽ được loại dần ra khỏi ma trận cơ sở : tất cả đều bằng 0. Nếu trong quá trình tìm phương án tối ưu mà không loại bỏ được các biến giả cải biên ra khỏi cơ sở thì bài toán vô nghiệm.

So với phương pháp hai pha thì phương pháp này tránh được việc phải cập nhật lại dữ liệu cho bài toán gốc nhưng không tiện lợi bằng trong lập trình ứng dụng.

Ví dụ : Xét bài toán tương tự như trên

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Thêm biến giả cải biên $x_6 \geq 0$ vào ràng buộc thứ hai đồng thời cải biên hàm mục tiêu theo như trên ta được :

$$\max\ w(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 - Mx_6$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

Tìm phương án tối ưu cho bài toán cải biên này bằng phương pháp đơn hình cải tiến

Khởi tạo

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & -M \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=0

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_0$
0	4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$
-M	6	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$
c^T		3	4	1	0	0	-M	$w(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		3+M	4+2M	1+3M	0	-M	0	$-\frac{7M}{3}$

Bước lặp k= 1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_1$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		3	4	1	0	0	-M	$w(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}-M$	$\frac{7}{9}$

Do $x_6 = 0$ (vì ngoài cơ sở) nên bị loại ra khỏi bảng và ta tiếp tục tìm phương án tối ưu cho bài toán gốc đã cho có phương án cơ sở khả thi được khởi tạo như sau :

c_{B_0}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_0$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$

Các bước tiếp theo được thực hiện giống như phương pháp hai pha.

IV- QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH SUY BIẾN

Khi thực hiện thuật toán đơn hình trường hợp bất thường có thể xảy ra là khi xác định biến ra thì tồn tại tỷ số $\frac{b_i}{a_{ik}} = 0$, tức là tồn tại b_i=0, hay không có tỷ số nào dương thật sự. Người ta xem đây là trường hợp suy biến. Khi một bảng đơn hình rơi vào tình trạng suy biến thì có thể gây khó khăn mà cũng có thể không khi ta tiếp tục thực hiện thuật toán đơn hình.

1- Các ví dụ về quy hoạch tuyến tính suy biến

Ví dụ 1 : xét quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -3x_1 \le 6 \\ -2x_1 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_5 = 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

với ma trận hệ số là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		b
1	-2	1	0	0		2
-3	0	0	1	0		6
-2	0	0	0	1		0

có chứa ma trận đơn vị. Áp dụng thuật toán đơn hình cải tiến ta được :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	3	1	-2	1	0	0	2
0	4	-3	0	0	1	0	6
0	5	-2	0	0	0	1	0
c^T		1	-1	0	0	0	w=7
$\bar{c}^T$		1	-1	0	0	0	

Đây là trường hợp suy biến, biến vào là x_2, nó được tăng lên đến mức vẫn thỏa những điều kiện về dấu của các biến trong cơ sở x_3, x_3, x_5 . Đó là :

$$\begin{cases} x_3 = 2 + 2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 6 + 0x_2 \geq 0 \\ x_3 = 0 + 0x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \geq -\dfrac{2}{2} \\ \forall x_2 \geq 0 \\ \forall x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Như vậy x_2 có thể lớn tùy ý nên hàm mục tiêu không bị giới nội. Vậy bài toán không có phương án tối ưu. Trường hợp này ở bảng đơn hình không có tỷ số nào dương thật sự để xác định biến ra.

Ví dụ 2 : xét quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -3x_1 \leq 6 \\ -2x_1 \leq 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_5 = 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

với ma trận hệ số là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		b
1	2	1	0	0		2
-3	0	0	1	0		6
-2	0	0	0	1		0

có chứa ma trận đơn vị. Áp dụng thuật toán đơn hình cải tiến ta được :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	3	1	**2**	1	0	0	2
0	4	-3	0	0	1	0	6
0	5	-2	0	0	0	1	0
c^T		1	-1	0	0	0	w=7
$\bar{c}^T$		1	-1	0	0	0	

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	4	-3	0	0	1	0	6
0	5	-2	0	0	0	1	0
c^T		1	-1	0	0	0	w=6
$\bar{c}^T$		$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	

Đây là bảng đơn hình tối ưu.

Ví dụ 3 : xét quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ w(x) = -3 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \le 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn :

$$\min\ w(x) = -3 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

với ma trận hệ số :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		b
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0		1
-1	1	1	0	1		0

có chứa ma trận đơn vị . Áp dụng giải thuật đơn hình cải tiến :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	5	-1	**1**	1	0	1	0
c^T		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	w=-3
$\bar{c}^T$		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	

x_2 vào , x_5 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1		1
-2	2	-1	1	-1	0		0
c^T		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	w=-3
$\bar{c}^T$		$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2	

x_1 vào , x_4 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	2	0	2
-2	2	0	1	0	2	1	2
c^T		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	w=-6
$\bar{c}^T$		0	0	1	3	2	

Đây là bảng đơn hình tối ưu

Ví dụ 4 : xét quy hoạch tuyến tính

$$\min\ z(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 - 5{,}5x_2 - 2{,}5x_3 + 9x_4 \le 0 \\ 0{,}5x_1 - 1{,}5x_2 - 0{,}5x_3 + x_4 \le 0 \\ x_1 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn

$$\min\ w(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 - 5{,}5x_2 - 2{,}5x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ 0{,}5x_1 - 1{,}5x_2 - 0{,}5x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_7 = 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0$$

với ma trận hệ số

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0,5	-5,5	-2,5	9	1	0	0
0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1

b
0
0
1

có chứa ma trận đơn vị . Áp dụng phương pháp đơn hình cải tiến

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	5	**0,5**	-5,5	-2,5	9	1	0	0	0
0	6	0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		-10	57	9	24	0	0	0	

x_1 vào , x_5 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
-10	1	1	-11	-5	18	2	0	0	0
0	6	0	**4**	2	-8	-1	1	0	0
0	7	0	11	5	-18	-2	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		0	-53	-41	204	20	10	0	

x_2 vào , x_6 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
-10	1	1	0	**0,5**	-4	-0,75	2,75	0	0
57	2	0	1	0,5	-2	-0,25	0,25	0	0
0	7	0	0	-0,5	4	0,75	-2,75	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		0	0	-14,5	98	6,75	13,25	0	

x_3 vào , x_1 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b

9	3	2	0	1	-8	-1,5	5,5	0	0
57	2	-1	1	0	**2**	0,5	-2,5	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		29	0	0	-18	-15	93	0	

x_4 vào , x_2 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
9	3	-2	4	1	0	**0,5**	-4,5	0	0
24	4	-0,5	0,5	0	1	0,25	-1,25	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		20	9	0	0	-10,5	70,5	0	

x_5 vào , x_3 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	5	-4	8	2	0	1	-9	0	0
24	4	0,5	-1,5	-0,5	1	0	**1**	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		-22	93	21	0	0	-24	0	

x_6 vào , x_4 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	5	0,5	-5,5	-2,5	9	1	0	0	0
0	6	0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		-10	57	9	24	0	0	0	

Bảng đơn hình hiện thời giống với bảng đơn hình xuất phát : đây là hiện tượng xoay vòng .

2- Xử lý trường hợp suy biến

Theo các ví dụ trên, trong trường hợp quy hoạch tuyến tính suy biến thì sau một số lần lặp có thể phương án nhận được vẫn như cũ mà không có sự thay đổi nào, có thể phương án nhận được tốt hơn, có thể phương án nhận được là một phương án đã nhận trước đó rồi và từ đó cứ xoay vòng mãi. Do đó nếu không có biện pháp phòng ngừa thì thuật toán đơn hình sẽ có thể kéo dài vô tận.

Khi thực hiện thuật toán đơn hình thì hiện tượng suy biến xảy ra khi có sự tình cờ khử lẫn nhau làm cho tồn tại $\bar{b}_i$ nào đó bằng 0. Trong trường hợp này có thể có nhiều biến thỏa điều kiện của biến ra. Gặp trường hợp này cần phải lựa chọn biến ra sao cho tránh được hiện tượng xoay vòng.

Người ta thường dùng phương pháp nhiễu loạn, phương pháp từ vựng để tránh sự tình cờ khử lẫn nhau này. Trong thực tiễn tính toán người ta đã đề ra một quy tắc xử lý khá đơn giản, gọi là quy tắc Bland, khi dùng giải thuật đơn hình giải các quy hoạch tuyến tính suy biến, đó là :

Với x_k là biến vào , biến ra x_r được chọn là biến có chỉ số nhỏ nhất thỏa điều kiện chọn biến ra :

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} > 0 \right\} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Ví dụ :

Xét quy hoạch tuyến tính suy biến :

$$\min\ w(x) = -\frac{4}{3}x_4 - +2x_5 - x_6 + 16x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_4 - 2x_5 - x_6 + 12x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 - \frac{1}{6}x_6 + \frac{2}{3}x_7 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 - 9x_7 = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Áp dụng quy tắc Bland ta thấy :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
0	1	1	0	0	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	-2	-1	12	0
0	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0
0	3	0	0	1	0	1	1	-9	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\bar{c}^T$		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	

Biến ra có thể là x_1 hay x_2 . Chọn x_1

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
$-\frac{4}{3}$	4	3	0	0	1	-6	-3	36	0

0	2	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	**2**	$\frac{4}{3}$	$-\frac{34}{3}$	0
0	3	0	0	1	0	1	1	-9	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\overline{c}^T$		4	0	0	0	-6	-5	64	

Biến ra là x_2

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\overline{b}$
$-\frac{4}{3}$	4	$-\frac{3}{2}$	3	0	1	0	**1**	2	0
2	5	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{17}{3}$	0
0	3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\overline{c}^T$		$-\frac{1}{2}$	3	0	0	0	-1	30	

Biến ra có thể là x_4 hay x_5 . Chọn x_4

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\overline{b}$
-1	6	$-\frac{3}{2}$	3	0	1	0	1	2	0
2	5	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	-7	0
0	3	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	-4	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\overline{c}^T$		-2	6	0	1	0	0	32	

Biến ra là x_5

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\overline{b}$
-1	6	0	-6	0	-3	6	1	-40	0
0	1	1	6	0	$-\frac{8}{3}$	4	0	-28	0

0	3	0	6	1	3	-5	0	**31**	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=
$\overline{c}^T$		0	-6	0	$-\frac{13}{3}$	81	0	-24	

Biến ra là x_3

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\overline{b}$
-1	6	0	$\frac{54}{31}$	$\frac{40}{31}$	$\frac{27}{31}$	$-\frac{14}{31}$	1	0	$\frac{80}{31}$
0	1	1	$-\frac{18}{31}$	$\frac{28}{31}$	$\frac{4}{93}$	$-\frac{16}{31}$	0	0	$\frac{56}{31}$
16	7	0	$\frac{6}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\boldsymbol{\frac{3}{31}}$	$-\frac{5}{31}$	0	1	$\frac{2}{31}$
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w= $-\frac{48}{31}$
$\overline{c}^T$		0	$\frac{42}{31}$	$\frac{24}{31}$	$-\frac{187}{93}$	$\frac{128}{31}$	0	0	

Đến đây không còn hiện tượng suy biến.

Biến vào là x_7

CÂU HỎI CHƯƠNG 2

1- Trình bày cơ sở lý thuyết của thuật toán đơn hình cơ bản.

2- Định nghĩa quy hoạch tuyến chuẩn.

3- Trình bày các bước lập bảng đơn hình theo phép toán trên dòng .

4- Cải biên một quy hoạch tuyến tính tổng quát như thế nào ? . Cách giải quy hoạch tuyến tính cải biên và quy hoạch tuyến tính gốc.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1- Tìm phương án tối ưu của bài toán sau đây bằng phương pháp đơn hình cơ bản

a)-
$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b)-
$$\min\ z = -2x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 5x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c)-
$$\min w = x_1 + 2x_3 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

2- Tìm phương án tối ưu của bài toán sau bằng phương pháp đơn hình cải tiến

a) $\max z = 5x_1 + 3x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 80 \\ x_1 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) $\max z = x_1 + 2x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c) $\max z = 5x_1 + 3x_2 + x_3$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3- Tìm phương án tối ưu của các bài toán sau bằng phương pháp biến giả cải biên.

a) $\max z = 3x_1 - x_2$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 100 \\ \\ \end{cases}$$

$x_1 \geq 10$

$x_2 \geq 0$

b) $\min w = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\max z = 3x_1 + x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1 \to 3 \end{cases}$$

d)- $\max z = 2x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

e)- $\min w = -x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

f)- $\max z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -3 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

g)- $\min w = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

CHƯƠNG III
BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Chương này trình bày trình bày khái niệm đối ngẫu, các quy tắc đối ngẫu và giải thuật đối ngẫu. Đây là các kiến thức có giá trị trong ứng dụng vì nhờ đó có thể giải một quy hoạch tuyến tính từ quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của nó.

Nội dung chi tiết của chương này bao gồm :

CHƯƠNG III
BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

I- KHÁI NIỆM VỀ ĐỐI NGẪU

Đối ngẫu là một khái niệm cơ bản của việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính vì lý thuyết đối ngẫu dẫn đến một kết quả có tầm quan trọng về mặt lý thuyết và cả mặt thực hành.

1- Đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Xét một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ z(x) = c^T x \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

Giả sử rằng x* là phương án tối ưu cần tìm của bài toán và x^0 là một phương án của bài toán thì một cận trên của giá trị mục tiêu tối ưu được xác định vì :

$$c^T x^* \leq c^T x^0$$

Tuy chưa tìm được phương án tối ưu x* nhưng nếu biết thêm được một cận dưới của giá trị mục tiêu tối ưu thì ta đã giới hạn được phần nào giá trị mục tiêu tối ưu. Người ta ước lượng cận dưới này theo cách như sau :

Với mỗi vectơ $x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \geq 0$ thuộc R^n chưa thoả ràng buộc của bài toán, tức là

$$b - Ax \neq 0$$

người ta *nới lỏng* bài toán trên thành bài toán nới lỏng :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min L(x,y) = c^T x + y^T(b - Ax) \\ x \geq 0 \\ y^T = [\, y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m] \text{ tuỳ ý} \in R^m \end{array}}$$

Gọi g(y) là giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán nới lỏng, ta có :

$$g(y) = \min \{ c^T x + y^T(b - Ax) \} \qquad (x \geq 0)$$

$\leq\ c^T x + y^T(b - Ax)$

Trong trường hợp x là phương án của bài toán ban đầu, tức là :

$b - Ax = 0$

thì

$g(y) \leq c^T x$

Vậy g(y) là một cận dưới của giá trị mục tiêu bất kỳ nên cũng là cận dưới của giá trị mục tiêu tối ưu.

Một cách tự nhiên là người ta quan tâm đến bài toán tìm cận dưới lớn nhất, đó là :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ g(y) \\ y \text{ tuỳ ý} \in R^m \end{array}}$$

Bài toán này được gọi là *bài toán đối ngẫu* của bài toán ban đầu. Trong phần sau người ta sẽ chứng minh giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán đối ngẫu bằng với giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán gốc ban đầu.

Người ta đưa bài toán đối ngẫu về dạng dể sử dụng bằng cách tính như sau :

$$\begin{aligned} g(y) &= \min \{ c^T x + y^T(b - Ax) \} && (x \geq 0) \\ &= \min \{ c^T x + y^T b - y^T Ax \} && (x \geq 0) \\ &= \min \{ y^T b + (c^T - y^T A)x \} && (x \geq 0) \\ &= y^T b + \min \{ (c^T - y^T A)x \} && (x \geq 0) \end{aligned}$$

Ta thấy :

$$\min_{(x\geq 0)} (c^T - y^T A)x = \begin{cases} 0 \quad \text{khi } c^T - y^T A \geq 0 \\ \text{không xác đinh khi } c^T - y^T A < 0 \end{cases}$$

Vậy ta nhận được :

$g(y) = y^T b$ với $c^T - y^T A \geq 0$

Suy ra bài tóan đối ngẫu có dạng :

$$\max\ g(y) = y^T b$$

$$\begin{cases} y^T A \leq c^T \\ y \in R^m \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Hay là :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ g(y) = b^T y \\ \begin{cases} A^T y \le c \\ y \in R^m \text{ tùy ý} \end{cases} \end{array}}$$

2- Định nghĩa đối ngẫu trong trường hợp quy hoạch tổng quát

Trong trường hợp quy hoạch tuyến tính tổng quát, những quy tắc sau đây được áp dụng để xây dựng bài toán đối ngẫu :

- Hàm mục tiêu đối ngẫu :

  . max $\leftrightarrow$ min

- Biến đối ngẫu :

  . Mỗi ràng buộc $\leftrightarrow$ một biến đối ngẫu

- Chi phí đối ngẫu và giới hạn ràng buộc :

  . Chi phí đối ngẫu $\leftrightarrow$ giới hạn ràng buộc

- Ma trận ràng buộc đối ngẫu :

  . Ma trận chuyển vị

- Chiều của ràng buộc và dấu của biến :

  . Ràng buộc trong bài toán max có dấu $\le$ thì biến đối ngẫu trong bài toán min có dấu ≥ 0 (trái chiều)

  . Ràng buộc trong bài toán max có dấu $=$ thì biến đối ngẫu trong bài toán min có dấu tùy ý.

  . Ràng buộc trong bài toán max có dấu $\ge$ thì biến đối ngẫu trong bài toán min có dấu ≤ 0 (trái chiều)

  . Biến của bài toán max có dấu ≥ 0 thì ràng buộc đối ngẫu trong bài toán min có dấu $\ge$ (cùng chiều)

  . Biến của bài toán max có dấu tùy ý thì ràng buộc đối ngẫu trong bài toán min có dấu $=$.

  . Biến của bài toán max có dấu ≤ 0 thì ràng buộc trong bài toán đối ngẫu min có dấu $\le$ (cùng chiều)

Xét các ràng buộc dạng ma trận của một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát như sau :

$$
\begin{array}{c}
a_i^T \rightarrow \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & \mathbf{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & \mathbf{a_{mj}} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}
\begin{matrix} = \\ \le \\ \ge \end{matrix}
\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

$$\uparrow A_j$$

Ký hiệu :

a_i^T là dòng thứ i (i=1,2,...,m)

A_j là cột thứ j (j=1,2,...,n)

Khi đó, mối liên hệ giữa hai bài toán đối ngẫu có thể được trình bày như sau :

$z(x) = c^T x \rightarrow \min$	$w(y) = y^T b \rightarrow \max$	Ràng buộc / Dấu
$a_i^T x = b_i$ $a_i^T x \le b_i$ $a_i^T x \ge b_i$	y_i tự do $y_i \le 0$ $y_i \ge 0$	Cùng chiều
$x_j \ge 0$ $x_j \le 0$ x_j tự do	$y^T A_j \le c_j$ $y^T A_j \ge c_j$ $y^T A_j = c_j$	Trái chiều

Ví dụ

a- Hai bài toán sau đây là đối ngẫu :

$$
\begin{aligned}
&\max\ z(x) = 30x_1 + 10x_2 \\
&\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases} \qquad \text{(P)} \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min\ w(y) = 4y_1 + 6y_2 \\
&\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \ge 30 \\ y_1 + 2y_2 \ge 10 \end{cases} \qquad \text{(D)} \\
&y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

b- Hai bài toán sau đây là đối ngẫu :

$$\min\ w(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ 7x_1 + x_3 - 2x_4 \ge 5 \end{cases} \qquad \text{(D)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, x_3 \text{ tuy y }, x_4 \le 0$$

$$\max\ z(y) = 6y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 5y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 7y_4 \le 1 \\ 2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \le -1 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4 = 1 \\ 5y_1 - 4y_2 - 2y_4 \ge 2 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

$$y_1 \le 0, y_2 \ge 0, y_3 \text{ tuy y, } y_4 \ge 0$$

Đối với cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau :

- Cả hai bài toán đều không có phương án tối ưu .

- Cả hai bài toán đều có phương án, lúc đó chúng đều có phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu đối với hai phương án tối ưu là bằng nhau.

- Một trong hai bài toán không có phương án, còn bài toán kia thì có phương án, khi đó bài toán có phương án không có phương án tối ưu.

3- Các định lý về sự đối ngẫu

a- Định lý 1 (đối ngẫu yếu)

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$\text{(P)} \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{(D)} \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \ge c \\ y \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Nếu $\overline{x}$ là phương án của bài toán (P)

$\overline{y}$ là phương án của bài toán (D)

thì $z(\overline{x}) \le w(\overline{y})$

nghĩa là giá trị hàm mục tiêu của bài toán max không vượt quá giá trị hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu min trên các phương án bất kỳ của mỗi bài toán .

Chứng minh

$\overline{x}$ là phương án của (P) nên : $A\overline{x} = b$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}^T A\overline{x} = \overline{y}^T b = b^T\overline{y} = w(\overline{y})$$

$\overline{y}$ là phương án của (D) nên : $A^T\overline{y} \geq c$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}^T A \geq c^T$$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}^T A\overline{x} \geq c^T\overline{x} = z(\overline{x})$$

Vậy $z(\overline{x}) \leq w(\overline{y})$

Định lý này được phát biểu và chứng minh cho hai bài toán đối ngẫu trong trường hợp tổng quát .

b- Định lý 2

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$(P) \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

$\overline{x}$ là phương án khả thi của bài toán (P)

$\overline{y}$ là phương án khả thi của bài toán (D)

Nếu $z(\overline{x}) = w(\overline{y})$ thì $\overline{x}$, $\overline{y}$ lần lượt là phương án tối ưu tương ứng của (P và (D).

Chúng minh

- Nếu $\overline{x}$ không là phương án tối ưu của bài toán (P) thì tồn tại một phương án x sao cho :

$$z(\overline{x}) < z(x)$$

$\Rightarrow \quad w(\overline{y}) < z(x)$: điều này mâu thuẫn với định lý 1.

- Nếu $\overline{y}$ không là phương án tối ưu của bài toán (D) thì tồn tại một phương án y sao cho :

$$w(y) < w(\overline{y})$$

$\Rightarrow \quad w(y) < z(\overline{x})$: điều này mâu thuẫn với định lý 1.

Vậy $\overline{x}$ và $\overline{y}$ lần lượt là phương án tối ưu của (P) và (D).

c- Định lý 3

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \ge c \\ y \ \ \text{tùy ý} \end{cases}$$

Nếu x* là phương án tối ưu của bài toán (P) đối với cơ sở B thì phương án tối ưu y* của bài toán (D) được tính bởi công thức :

$$(y^*)^T = c_B^T B^{-1}$$

Chứng minh

Do x* là phương án tối ưu của (P) với cơ sở B nên thoả dấu hiệu tối ưu

$$c^T - c_B^T.B^{-1}A \le 0$$

$$\Rightarrow \quad c_B^T.B^{-1}A \ge c^T$$

$$\Rightarrow \quad (y^*)^T A \ge c^T$$

$\Rightarrow$ y* là một phương án của (D)

Mặt khác x* được tính bởi công thức :

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* = B^{-1}b \\ x_N^* = 0 \end{bmatrix}$$

và giá trị mục tiêu tối ưu của (P) là :

$$z(x^*) = c^T x^* = c_B^T x_B^*$$

Ta có :

$$\begin{aligned} w(y^*) &= b^T y^* = b^T (c_B^T B^{-1})^T = (c_B^T B^{-1})b \\ &= c_B^T (B^{-1}b) = c_B^T x_B^* = c_B^T x_B^* = z(x^*) \end{aligned}$$

Theo định lý 2 thì y* là phương án tối ưu của (D).

Định lý này cho phép tìm phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu từ bài toán gốc. Trong đó :

- c_B^T được xác định trong bảng đơn hình tối ưu của (P).
- B^{-1} gồm m cột tương ứng với m cột của ma trận cơ sở ban đầu lấy từ bảng đơn hình tối ưu của bài toán gốc.

d- Định lý 4 (sự đối ngẫu)

Xét hai bài toán đối ngẫu

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

- Nếu (P) và (D) đều có phương án khả thi thì chúng có phương án tối ưu và giá trị của hàm mục tiêu tương ứng là bằng nhau.

- Nếu một trong hai bài toán có phương án tối ưu không giới nội thì bài toán còn lại không có phương án khả thi.

Chứng minh

- Đây là kết quả của định lý 3 .

- Giả sử rằng phương án tối ưu của (D) không giới nội, tức là tồn tại một phương án khả thi y của (D) sao cho w(y)= $b^T y$ nhỏ tuỳ ý. Điều này cũng có nghĩa là : với mọi M>0 lớn tuỳ ý luôn tìm được một phương án khả thi $\overline{y}$ của (D) sao cho :

$$b^T \overline{y} \leq -M$$

Nếu (P) có phương án khả thi là $\overline{x}$ thì theo định lý 1 ta có :

$$z(\overline{x}) = c^T \overline{x} \leq w(\overline{y}) = b^T \overline{y} < -M$$

Điều này dẫn đến mâu thuẩn

e- Định lý 5 (tính bổ sung)

Xét hai bài toán đối ngẫu

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

$\overline{x}$, $\overline{y}$ là phương án khả thi tương ứng của (P) và (D).

Điều kiện cần và đủ để $\overline{x}$, $\overline{y}$ cũng là phương án tối ưu là :

$$\overline{x}^T (A^T \overline{y} - c^T) = 0$$

Chứng minh

- Do $\overline{x}$ là phương án khả thi của (P) nên :

$$
\begin{aligned}
& A\bar{x} = b \\
\Rightarrow \quad & (A\bar{x})^T = b^T \\
\Rightarrow \quad & \bar{x}^T A^T = b^T \\
\Rightarrow \quad & \bar{x}^T A^T \bar{y} = b^T \bar{y} \\
\Rightarrow \quad & \bar{x}^T A^T \bar{y} - \bar{x}^T c = b^T \bar{y} - c^T \bar{x} \qquad (x^T c = c^T x) \\
\Rightarrow \quad & \bar{x}^T (A^T \bar{y} - c) = b^T \bar{y} - c^T \bar{x} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

- Theo kết quả (*) :

. Nếu $\bar{x}, \bar{y}$ là phương án tối ưu của (P) và (D) thì theo định lý 4

$$
\begin{aligned}
& c^T \bar{x} = b^T \bar{y} \\
\Rightarrow \quad & c^T \bar{x} - b^T \bar{y} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \bar{x}^T (A^T \bar{y} - c) = 0
\end{aligned}
$$

. Nếu $\bar{x}^T (A^T \bar{y} - c) = 0 \Rightarrow b^T \bar{y} - c^T \bar{x} = 0 \Rightarrow b^T \bar{y} = c^T \bar{x}$

Theo định lý 2 thì $\bar{x}, \bar{y}$ là phương án tối ưu .

II- GIẢI THUẬT ĐỐI NGẪU

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{l} \max\ z(x) = c^T x \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{và} \quad \text{(D)} \quad \begin{array}{l} \min\ w(y) = b^T y \\ \begin{cases} A^T y \ge c \\ y \text{ tuy } y \end{cases} \end{array}
$$

Chúng ta sẽ xét xem giải thuật đơn hình cơ bản đã biết trong chương trước được áp dụng như thế nào đối với bài toán đối ngẫu.

Giả sử rằng B là một cơ sở của bài toán (P) thoả :

$$y = c_B^T B^{-1} \quad \text{và} \quad N^T y \ge c_N$$

Nếu B cũng là một cơ sở khả thi của bài toán gốc, tức là $x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1} b = \bar{b} \ge 0 \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$, thì (theo định lý đối ngẫu) y, x lần lượt là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và bài toán gốc. Nếu không thì $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ không là phương án của bài toán gốc vì $x_B = \bar{b} = B^{-1} b$ không thể ≥ 0.

Để tiện việc trình bày ta xét (m=3 , n=5) :

$$\max\ z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$$

$$(P) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Các dữ liệu của (P) được trình bày trong bảng sau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}		b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}		b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}		b_3

và bài toán đối ngẫu

$$\min\ w(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

$$(D) \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \geq c_3 \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_4 \geq c_4 \\ a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 \geq c_5 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \text{ tuy y}$$

Người ta đưa (D) về dạng chính tắc bằng cách thêm các biến phụ y_4 y_5, y_6, y_7, $y_8 \geq 0$. Chúng không ảnh hưởng đến hàm mục tiêu.

$$\min\ w(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + 0.y_4 + 0.y_5 + 0.y_6 + 0.y_7 + 0.y_8$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 - y_4 = c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 - y_5 = c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 - y_6 = c_3 \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_4 - y_7 = c_4 \\ a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 - y_8 = c_5 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \text{ tuy y - } y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 \geq 0$$

Các dữ liệu của (D) được trình bày trong bảng sau :

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8

b_1	b_2	b_3	0	0	0	0	0

a_{11}	a_{21}	a_{31}	-1	0	0	0	0	c_1
a_{12}	a_{22}	a_{32}	0	-1	0	0	0	c_2
a_{13}	a_{23}	a_{33}	0	0	-1	0	0	c_3
a_{14}	a_{24}	a_{34}	0	0	0	-1	0	c_4
a_{15}	a_{25}	a_{35}	0	0	0	0	-1	c_5

Giả sử rằng m cột đầu tiên của A là một cơ sở B của (P) thì hai bảng trên được trình bày rút gọn như sau :

x_B^T	x_N^T	
c_B^T	c_N^T	
B	N	b

Bảng (P)

y^T	$y_4 \ldots y_8$		
b^T	0		
B^T	$-I_m$	0	c_B
N^T	0	$-I_{n-m}$	c_N

Bảng (D)

Để đưa bài toán đối ngẫu về dạng chuẩn người ta nhân (bên trái) bảng (D) với bảng sau đây :

$\left(B^{-1}\right)^T$	0
$\left(B^{-1}N\right)^T$	$-I_{n-m}$

Khi đó người ta được bảng kết quả có dạng :

	m	m		n-m	
	y^T	$y_4y_5y_6$		y_7y_8	
	0	$\bar{b} = B^{-1}b$		0	
m	I_m	$-\left(B^{-1}\right)^T$	0		$\left(c_B^T B^{-1}\right)^T$
n-m	0	$-\left(\bar{N}\right)^T = -\left(B^{-1}N\right)^T$	I_{n-m}		$-\bar{c}_N = -\left(c_N^T - c_B^T B^{-1} N\right)^T$

Bảng này cho ta một quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với ma trận đơn vị (cơ sở) tương ứng với các cột y_1 y_2 y_3 y_7 y_8 .

Áp dụng giải thuật đơn hình cơ bản vào kết quả này cho ta quy tắc đổi cơ sở như sau :

Tính : $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$

a- Nếu $\bar{b} \geq 0$ thì giải thuật kết thúc, khi đó :

$y = c_B^T B^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu .

$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc .

b- Nếu tồn tại r sao cho $\bar{b}_r \in \bar{b}, \bar{b}_r < 0$ thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Nếu trong dòng r của $\bar{N}$ có thành phần < 0 thì người ta tính :

$$\frac{\bar{c}_s}{\bar{N}_{rs}} = \min_{\forall j : \bar{N}_{ij} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{N}_{rj}} \right\}$$

Như vậy : đối với bài toán đối ngẫu thì biến y_r đi vào cơ sở và biến y_s ra khỏi cơ sở, trong khi đó đối với bài toán gốc thì biến x_s đi vào cơ sở và biến x_r ra khỏi cơ sở.

- Nếu mọi thành phần trong dòng r của $\bar{N}$ đều > 0 thì phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là không giới nội, điều này (theo định lý đối ngẫu) dẫn đến bài toán gốc không có phương án.

Ví dụ : Xét bài toán

$$\min\ w(x) = x_1 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad (D)$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4)$$

Bài toán đối ngẫu của (D) là :

$$\max z(y) = y_1 + 2y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 1 \\ -2y_1 + 3y_2 \leq 0 \\ y_1 \leq -1 \\ y_2 \leq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

y_1, y_2 là tùy ý

Ta có thể chọn bài toán (D) hoặc (P) để giải tìm phương án tối ưu bằng phương pháp đơn hình, từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại theo kết quả trên. Trong ví dụ này ta chọn bài toán (D) để giải vì có chứa sẵn ma trận đơn vị.

Giải bài toán (D) bằng phương pháp đơn hình cải tiến ta được :

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}_0$
-1	3	1	-2	1	0	1
0	4	1	**3**	0	1	2
c^T		1	0	-1	0	$w(x^0)$
$\bar{c}_0^T$		2	-2	0	0	-1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}_1$
-1	3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
0	2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
c^T		1	0	-1	0	$w(x^1)$
$\bar{c}_1^T$		$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$

Giải thuật dừng vì thoả dấu hiệu tối ưu của bài toán min.

Phương án tối ưu của bài toán (D) là :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \quad x_2 = \dfrac{2}{3} \quad x_3 = \dfrac{7}{3} \quad x_4 = 0 \\ w(x) = w(x^1) = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Suy ra phương án tối ưu của (P) là :

$$\begin{cases} y^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ z(y) = b^T y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

CÂU HỎI CHƯƠNG 3

1- Bạn hiểu như thế nào về khái niệm đối ngẫu ?

2- Quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của một quy hoach tuyến tính chính tắc có dạng như thế nào ?

3- Bạn hãy nêu ra các quy tắc đối ngẫu. Cho ví dụ .

4- Giá trị hàm mục tiêu của hai quy hoạch tuyến tính đối ngẫu thì như thế nào ? . Chứng minh

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1- Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max z = 7x_1 + 5x_2$$

$$(P)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1\ ,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a- Tìm bài toán đối ngẫu (D) từ bài toán (P)

b- Tìm phương án tối ưu cho bài toán (P)

c- Từ bảng đơn hình tối ưu của (P). Hãy tìm phương án tối ưu cho bài toán (D)

2- Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min w = x_1 + x_2$$

$$(D)\quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ x_i \ge 0,\ \forall i = 1 \to 5 \end{cases}$$

a- Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán (D)

b- Tìm phương án tối ưu của bài toán (D)

c- Từ bảng đơn hình tối ưu của bài toán (D). Hãy tìm phương án tối ưu cho bài toán đối ngẫu ở câu a.

3- Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min w = -2x_1 - x_4$$

$$(D)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_2 + 2x_4 \ge 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 8 \\ x_i \text{ tùy ý } (i=1 \to 4) \end{cases}$$

Tìm bài toán đối ngẫu (P) của bài toán (D). Từ bài toán (P) hãy chỉ ra rằng (P) không tồn tại phương án tối ưu do đó (D) cũng tồn tại phương án tối ưu.

4- Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

$$(D)\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \le 3 \\ 4x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_j \ge 0\ \ (j = 1 \to 4) \end{cases}$$

1- Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

2- Giải bài toán đã cho rồi suy ra kết quả của bài toán đối ngẫu.

5- Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3$$

$$(D)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le -2 \\ x_1, x_2 \text{ tuú ý}, x_3 \le 0 \end{cases}$$

a- Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

b- Giải bài toán đối ngẫu rồi suy ra kết quả của bài toán đã cho.

CHƯƠNG IV
ỨNG DỤNG QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày các bài toán để thấy khả năng ứng dụng rộng rãi của quy hoạch tuyến tính. Bài toán trò chơi được trình bày một cách chi tiết, các bày toán còn lại chỉ trình bày mô hình. Việc giải các bài toán này được nghiên cứu thêm trong các môn tiếp theo.

Nội dung chi tiết của chương này bao gồm :

ỨNG DỤNG QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu sơ lược một số khái niệm và phương pháp cơ bản trong lý thuyết trò và một số bài toán thực tế mà người ta sẽ đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính để giải .

I- MỞ ĐẦU

Trong thực tế hay gặp tình huống là phải chọn một quyết định (bấp bênh) do phải đối mặt với một đối thủ thông minh và có quyền lợi đối lập với ta : ví dụ trong các trò chơi tranh chấp, trong quân sự, trong vận động tranh cử....

Nghiên cứu việc chọn quyết định trong những trường hợp đối kháng này có tên gọi là lý thuyết trò chơi. Ở đây người chọn quyết định và đối thủ đều được gọi là người chơi. Mỗi người chơi có một tập hợp các hành động để lựa chọn được gọi là chiến lược.

Chúng ta xét một trường hợp đơn giản là trò chơi hai người : phần thưởng sẽ là cái được của một người và chính là cái mất của người kia.

Giải một trò chơi nghĩa là tìm chiến lược tốt nhất cho mỗi người chơi. Hai người chơi thường được ký hiệu là A và B, chiến lược tương ứng của mỗi người được ký hiệu là :

$$A : i \ (i=1 \rightarrow m)$$

$$B : j \ (j=1 \rightarrow n)$$

Giải thưởng ứng với chiến lược (i,j) của hai người được ký hiệu là a_{ij} và được viết thành một bảng như sau :

B / **A**	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Ví dụ :

1	***2***	***3***	4	← **B**

A →	1	1	0	-2	1
	2	2	2	1	0
	3	-1	-1	0	3

Đối với A :

- Nếu A đi nước 1 (dòng 1) thì A sẽ :

. Thắng 1 điểm nếu B đi nước 1 (thắng)

. Thắng 0 điểm nếu B đi nước 2 (hoà)

. Thắng -2 điểm nếu B đi nước 3 (thua)

. Thắng 1 điểm nếu B đi nước 4 (thắng)

Những trường hợp còn lại là tương tự .

Đối với B :

- Nếu B đi nước 2 (cột 2) thì B sẽ :

. Thua 0 điểm nếu A đi nước 1

. Thua 2 điểm nếu A đi nước 2

. Thua -1 điểm nếu A đi nước 3

Những trường hợp còn lại là tương tự .

Nghiệm tối ưu của trò chơi, có khi gọi tắt là nghiệm, là bộ chiến lược (i*,j*) có tính chất là nếu một người lấy chiến lược khác còn người kia vẫn giữ nguyên thì phần thưởng cho người đi khác sẽ bị thiệt hại. Giải trò chơi có nghĩa là tìm nghiệm tối ưu.

II- BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

1- Trò chơi có nghiệm ổn định

Hai nhà chính trị A và B vận động tranh cử 1 ghế ở nghị viện trong 2 ngày cuối quan trọng nhất ở hai thành phố P và Q. Mỗi người phải đặt kế hoạch vận động mà không biết được kế hoạch của đối phương. Các cố vấn đưa ra 3 chiến lược :

- Ở mỗi thành phố một ngày
- Ở cả 2 ngày ở thành phố P
- Ở cả 2 ngày ở thành phố Q và đánh giá kết quả vận động tương ứng

như sau :

1	***2***	***3***	←

B

1	1	2	4
A → 2	1	0	5
3	0	1	-1

Dữ liệu là tổng số phiếu, tính theo đơn vị là ngàn, mà A sẽ dành được từ B hay ngược lại .

Đây là một trường hợp đơn giản mà người ta có thể giải được bằng khái niệm chiến lược bị trội hơn như sau :

- Đối với A thì chiến lược 3 bị trội hơn bởi chiến lược 1 và 2 vì nó mang đến cho A số điểm thắng ít, nên dù B có chọn chiến lược nào thì A cũng vẫn chọn chiến lược 1 hoặc 2 mà bỏ chiến lược 3 . Ta có :

	1	***2***	***3*** ← **B**
1	1	2	4
A → 2	1	0	5
3	0	1	-1

- Đối với B thì chiến lược 3 bị trội hơn bởi chiến lược 1 và 2 vì nó mang đến cho B số điểm thua nhiều nên B bỏ chiến lược 3. Ta có :

	1	***2***	***3*** ← **B**
1	1	2	4
A → 2	1	0	5
3	0	1	-1

- Đối với A thì chiến lược 2 bị trội hơn bởi chiến lược 1 vì vậy A bỏ chiến lược 2. Ta có :

	1	***2***	***3*** ← **B**

A →			
1	1	2	4
2	1	0	5
3	0	1	-1

- Đối với B thì chiến lược 2 bị trội hơn bởi chiến lược 1 vì vậy B bỏ chiến lược 2. Ta có :

A → \ ← B	***1***	***2***	***3***
1	1	2	4
2	1	0	5
3	0	1	-1

Cuối cùng thì bộ chiến lược (1,1) là nghiệm tối ưu của trò chơi với kết quả là người A thu thêm được 1 (ngàn) phiếu từ người B.

Trong nhiều trường hợp, khi dùng chiến lược bị trội hơn chỉ mới giảm được cở của bài toán mà chưa giải quyết xong vấn đề đặt ra.

Chiến lược MaxiMin và MiniMax

Xét ví dụ tương tự như ví dụ trên nhưng bảng kết quả vận động được các cố vấn đánh giá như sau :

A → \ ← B	***1***	***2***	***3***
1	-3	-2	6
2	1	0	2
3	5	-2	-4

Đây là trường hợp người chọn quyết định nghĩ là đối phương thông minh và cố ý chọn quyết định chống lại mình nên họ luôn nghĩ đến chiến lượt "ăn chắc" , đó là MaxiMin(A) và MiniMax(B) như sau :

a- MaxiMin(A)

A luôn xem B là đối thủ thông minh. Khi A đi nước i_0 (dòng i_0) thì B sẽ chọn nước đi j_0 (cột j_0) sao cho A thắng điểm ít nhất . Nghĩa là B đi vào ô :

$$a_{i_0 j_0} = \underset{\forall j}{\mathrm{Min}} \left\{ a_{i_0 j} \right\}$$

Trong tình huống đó A sẽ chọn nước đi sao cho A thắng nhiều điểm nhất. Chiến thuật của A là đi vào ô :

$$g_A = a_{i_A j_A} = \text{MaxiMin (A)} = \max_i \left\{ \min_j \left\{ a_{ij} \right\} \right\}$$

A đi nước 1 thì B sẽ đi nước 1 : a_{11}=-3

A đi nước 2 thì B sẽ đi nước 2 : a_{22}=0

A đi nước 3 thì B sẽ đi nước 3 : a_{33}=-4

A → \ ← B	***1***	***2***	***3***
1	-3	-2	6
2	1	0	2
3	5	-2	-4

Vậy MaxiMin(A) = a_{22} = 0

b- MiniMax(B)

B luôn xem A là đối thủ thông minh. Khi B đi nước j_0 (cột j_0) thì A sẽ chọn nước đi i_0 (dòng i_0) sao cho B thua điểm nhiều nhất . Nghĩa là A đi vào ô

$$a_{i_0 j_0} = \max_{\forall i} \left\{ a_{ij_0} \right\}$$

Trong tình huống đó B sẽ chọn nước đi sao cho B thua ít điểm nhất. Chiến thuật của B là đi vào ô :

$$g_B = a_{i_B j_B} = \text{MiniMax (B)} = \min_j \left\{ \max_i \left\{ a_{ij} \right\} \right\}$$

A → \ ← B	***1***	***2***	***3***
1	-3	-2	6
2	1	0	2
3	5	-2	-4

B đi nước 1 thì A sẽ đi nước 3 : a_{31}=5

B đi nước 2 thì A sẽ đi nước 2 : a_{22}=0

B đi nước 3 thì B sẽ đi nước 1 : a_{13}=6

Vậy MiniMax(B) = a_{22}= 0

Lần này ta thấy rằng :

MaxiMin(A) = MiniMax(B) = a_{22}= 0

Bộ chiến lược (2,2) có giá trị là 0 là nghiệm tối ưu của trò chơi vì nếu người nào đi lệch và người kia đi đúng thì người đi đúng thu lợi nhiều hơn giá trị của trò chơi. Nghiệm tối ưu trong trường hợp này còn được gọi là nghiệm ổn định.

2- Trò chơi không có nghiệm không ổn định

Xét ví dụ tương tự như trên với bảng kết quả được các chuyên gia đánh giá như sau :

		1	***2***	***3***	← **B**
	1	0	-2	2	
A →	2	5	4	-3	
	3	2	3	-4	

Khi A và B dùng chiến lược MaxiMin và MiniMax của mình thì cho kết quả như sau :

MaxiMin(A) = a_{12} = -2

MiniMax(B) = a_{13} = 2

Vì MaxiMin(A) và MiniMax(B) là khác nhau nên trò chơi không có nghiệm ổn định. Ta xem điều gì có thể xảy ra ?

- A tính rằng nếu B thực hiện đúng chiến lược của mình là chọn cột 3 thì A sẽ chọn chiến lược 1 để thắng 2 từ B (thay vì thắng -2)

		1	***2***	***3***	← **B**
	1	0	-2	2	
A →	2	5	4	-3	
	3	2	3	-4	

- Lúc này B sẽ suy tính và thấy rằng phải chọn chiến lược 2 để thua -2 từ A (thay vì thua 2).

1	***2***	***3***	←

B

A →			
1	0	-2	2
2	5	4	-3
3	2	3	-4

- Đến lượt A cũng đủ thông minh để tính liền được 2 nước, biết được B sẽ chọn chiến lược 2 nên A sẽ dùng chiến lược 2 để thắng 4 từ B .

A →	***1***	***2***	***3***	**← B**
1	0	-2	2	
2	5	4	-3	
3	2	3	-4	

- Nhưng B cũng tính được điều này nên sẽ quay lại chọn chiến lược 3 để thua -3 từ A .

A →	***1***	***2***	***3***	**← B**
1	0	-2	2	
2	5	4	-3	
3	2	3	-4	

- Cũng như B , A cũng sẽ tính được điều này nên sẽ quay lại chọn chiến lược 1 để thắng 2 từ B.

A →	***1***	***2***	***3***	**← B**
1	0	-2	2	
2	5	4	-3	
3	2	3	-4	

Như vậy ta đã xoay đúng một vòng, và nếu cứ lập luận như vậy thì ta sẽ xoay vòng mãi. Những bộ chiến lược nhận được trong khi xoay vòng là những nghiệm không ổ định.

Chiến lược hỗn hợp

Để có được lời giải của trò chơi không có nghiệm ổn định người ta đưa ra khái niệm chiến lược hỗn hợp. Mỗi người chơi không chọn một chiến lược thuần túy như trước đây mà chọn một phân bố xác suất sử dụng tất cả các chiến lược.

Xét trò chơi giữa A và B có ma trận điểm dương có dạng tổng quát :

		1	***2***	**...**	n ← **B**
	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
→	...	...	...	...	...
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Giả sử rằng :

$$\text{MaxiMin}(A) = a_{i_A j_A} = g_A$$

$$\text{MiniMax}(B) = a_{i_B j_B} = g_B$$

$$a_{i_A j_A} \neq a_{i_B j_B}$$

Gọi :

. $p_i > 0$ ($i=1\rightarrow m$) là tần suất nước đi thứ i của A với

$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$

. $q_j > 0$ ($j=1\rightarrow n$) là tần suất nước đi thứ j của B với

$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$

			q_1	***q_2***	**...**	q_n
			1	***2***	**...**	n ← **B**
	p_1	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A	p_2	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
→	...	...	...	...	...	...
	p_m	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Vấn đề đặt ra là :

-Tìm tần suất $p_i > 0$ của nước đi thứ i ($i = 1 \to m$) của A sao cho đối với mỗi nước đi thứ j của B số điểm thắng trung bình của A không nhỏ thua g_A :

$$p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_ma_{mj} \qquad (\forall j = 1 \to n)$$

Cũng có nghĩa là tìm p_i sao cho :

$$p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_ma_{mj} \geq g_1 \geq g_A \quad (\forall j = 1 \to n)$$

$$g_1 \to \max$$

- Tìm tần suất $q_j > 0$ của nước đi thứ j ($j = 1 \to n$) của B sao cho đối với mỗi nước đi thứ i của A số điểm thua trung bình của B không lớn hơn g_B :

$$q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_na_{in} \; (\forall i = 1 \to m)$$

Cũng có nghĩa là tìm các q_j sao cho :

$$q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_na_{in} \leq g_2 \leq g_B \qquad (\forall i = 1 \to m)$$

$$g_2 \to \min$$

Khi đó hai bài toán quy hoạch tuyến tính thu được là :

$$\begin{cases} \max\ g_1 \quad \left(\min\ \dfrac{1}{g_1}\right) \\ p_1 + p_2 + ... + p_m = 1 \\ p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_ma_{mj} \geq g_1 \qquad (j = 1 \to n) \\ p_i > 0 \quad (i = 1 \to n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ g_2 \quad \left(\max\ \dfrac{1}{g_2}\right) \\ q_1 + q_2 + ... + q_n = 1 \\ q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_na_{in} \leq g_2 \qquad (i = 1 \to m) \\ q_j > 0 \quad (j = 1 \to m) \end{cases}$$

Chia các ràng buộc của bài toán thứ nhất cho $g_1 > 0$ và đặt :

$$x_i = \frac{p_i}{g_1} \quad (i = 1 \to m)$$

Chia các ràng buộc của bài toán thứ hai cho $g_2 > 0$ và đặt :

$$y_j = \frac{q_j}{g_2} \quad (j = 1 \to n)$$

Khi đó hai bài toán quy hoạch tuyến tính trên trở thành :

$$(D)\begin{cases} \min \dfrac{1}{g_1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m \ge 1 & (j = 1 \to n) \\ x_i > 0 \quad (i = 1 \to m) \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} \max \dfrac{1}{g_2} = y_1 + y_2 + \ldots + y_3 \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \le 1 & (i = 1 \to m) \\ y_j > 0 \quad (j = 1 \to m) \end{cases}$$

Đây là hai bài toán đối ngẫu . Chọn một trong hai để giải

Ví dụ **:**

Xét trò chơi giữa A và B có bảng điểm như sau :

A → \ B ←	***1***	***2***	***3***
1	-1	2	1
2	1	-2	2
3	3	4	-3

Theo chiến thuật của A và của B ta có :

MaxiMin(A) = a_{11}

MiniMax(B) = a_{23}

Tăng đồng loạt các ô của bảng điểm lên 4 ta được :

A → \ B ←	***1***	***2***	***3***
1	3	6	5
2	5	2	6
3	7	8	1

Gọi

$p_i \geq 0$ là tần suất nước đi thứ i của A $(i=1\rightarrow 3)$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$q_j \geq 0$ là tần suất nước đi thứ j của B $(j=1\rightarrow 3)$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

Thực hiện tương tự như trên ta được hai bài toán đối ngẫu như sau :

A →	q_1	q_2	q_3 ← B
p_1	3	6	5
p_2	5	2	6
p_3	7	8	1

$$(D)\ \begin{cases} \min w = \dfrac{1}{g_1} = x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0\ ,\ x_3 > 0 \end{cases} \qquad (P)\ \begin{cases} \max z = \dfrac{1}{g_2} = y_1 + y_2 + y_3 \\ 3y_1 + 6y_2 + 5y_3 \leq 1 \\ 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 8y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1 > 0\ ,\ y_2 > 0\ ,\ y_3 > 0 \end{cases}$$

Ta chọn bài toán (P) để giải.

Đưa bài toán (P) về dạng chuẩn :

$$(P)\ \begin{cases} \max z = \dfrac{1}{g_2} = y_1 + y_2 + y_3 + 0.y_4 + 0.y_5 + 0.y_6 \\ 3y_1 + 6y_2 + 5y_3 + y_4 = 1 \\ 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + y_5 = 1 \\ 7y_1 + 8y_2 + y_3 + y_6 = 1 \\ y_1 > 0\ ,\ y_2 > 0\ ,\ y_3 > 0,\ y_4 > 0\ ,y_5 > 0\ ,\ y_6 > 0 \end{cases}$$

Dùng giải thuật đơn hình cải tiến :

c_{B_0}	i_{B_0}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_0$

0	4	3	6	5	1	0	0	1
0	5	5	2	6	0	1	0	1
0	6	7	8	1	0	0	1	1
c^T		1	1	1	0	0	0	z_0
$\bar{c}_0^T$		1	1	1	0	0	0	0

c_{B_1}	i_{B_1}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_1$
0	4	0	$\frac{18}{7}$	$\frac{32}{7}$	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
0	5	0	$-\frac{26}{7}$	$\frac{37}{7}$	0	1	$-\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	1	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
c^T		1	1	1	0	0	0	z_1
$\bar{c}_1^T$		0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

c_{B_2}	i_{B_2}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_2$
0	4	0	$\frac{214}{37}$	0	1	$-\frac{32}{37}$	$\frac{7}{37}$	$\frac{12}{37}$
1	3	0	$-\frac{26}{37}$	1	0	$\frac{7}{37}$	$-\frac{5}{37}$	$\frac{2}{37}$
1	1	1	$\frac{46}{37}$	0	0	$-\frac{1}{37}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{5}{37}$
c^T		1	1	1	0	0	0	z_2
$\bar{c}_2^T$		0	$\frac{17}{37}$	0	0	$-\frac{6}{37}$	$-\frac{1}{37}$	$\frac{7}{37}$

c_{B_3}	i_{B_3}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_3$
1	2	0	1	0	$\frac{37}{214}$	$-\frac{16}{107}$	$\frac{7}{214}$	$\frac{6}{107}$
1	3	0	0	1	$\frac{13}{107}$	$\frac{9}{107}$	$-\frac{12}{107}$	$\frac{10}{107}$
1	1	1	0	0	$-\frac{23}{107}$	$\frac{17}{107}$	$\frac{13}{107}$	$\frac{7}{107}$
c^T		1	1	1	0	0	0	z_3

$\bar{c}_3^T$	0	0	0	$-\frac{17}{214}$	$-\frac{10}{107}$	$-\frac{9}{214}$	$\frac{23}{107}$

Phương án tối ưu của bài toán (P) là :

$$\begin{cases} \frac{1}{g_2} = \frac{23}{107} \\ y_1 = \frac{q_1}{g_2} = \frac{7}{107} \\ y_2 = \frac{q_2}{g_2} = \frac{6}{107} \\ y_3 = \frac{q_3}{g_2} = \frac{10}{107} \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} g_2 = \frac{107}{23} \\ q_1 = \frac{7}{23} \\ q_2 = \frac{6}{23} \\ q_3 = \frac{10}{23} \end{cases}$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (D) được tính bằng công thức sau :

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = c_B^T B^{-1} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{37}{214} & -\frac{16}{107} & \frac{7}{214} \\ \frac{13}{107} & \frac{9}{107} & -\frac{12}{107} \\ -\frac{23}{107} & \frac{17}{107} & \frac{13}{107} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{17}{214} & \frac{10}{107} & \frac{9}{214} \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{g_1} = b^T x = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{17}{214} \\ \frac{10}{107} \\ \frac{9}{214} \end{bmatrix} = \frac{23}{107}$$

Ta có :

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{g_1} = \dfrac{23}{107} \\ x_1 = \dfrac{p_1}{g_1} = \dfrac{17}{214} \\ x_2 = \dfrac{p_2}{g_1} = \dfrac{10}{107} \\ x_3 = \dfrac{p_3}{g_1} = \dfrac{9}{214} \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} g_1 = \dfrac{107}{23} \\ p_1 = \dfrac{17}{46} \\ p_2 = \dfrac{10}{23} \\ p_3 = \dfrac{9}{46} \end{cases}$$

III- BÀI TOÁN VẬN TẢI

1- Mở đầu

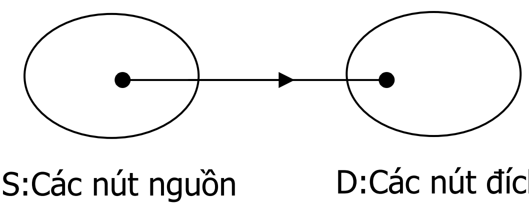
Bài toán vận tải là bài toán quan trọng nhất trong các bài toán quy hoạch tuyến tính. Người ta tổng kết rằng 85% các bài toán quy hoạch tuyến tính gặp trong ứng dụng là bài toán vận tải hoặc mở rộng của nó. Thuật ngữ bài toán vận tải thường được hiểu là bài toán vận chuyển sao cho cước phí nhỏ nhất.

2- Các khái niệm cơ bản

Bài toán vận tải được mô tả như là một bài toán về dòng dữ liệu gồm tập hợp các nút N được chia thành hai phần rời nhau : các nút nguồn S và các nút đích D, tức là :

$$\begin{cases} N = S \cup D \\ S \cap D = \varnothing \end{cases}$$

và mỗi cung (i,j) trong tập các cung A đều có gốc trong S và có ngọn trong D.



Các nút thuộc S được gọi là các nút nguồn (cung), các nút thuộc D được gọi là các nút đích (cầu). Một cách tổng quát, bài toán vận tải trình bày được bằng đồ thị.

Ở bài toán vận tải đôi khi còn có thêm giả thiết nữa là mỗi nút nguồn đều có cung nối với mọi nút đích. Ở đây ta chỉ đề cập đến bài toán vận tải có thêm giả thiết này và sẽ gọi tắt là bài toán vận tải.

Đối với bài toán vận tải người ta thường ký hiệu

$s_i \in S$ là nguồn phát ở nút i($i=1\rightarrow m$)

$d_j \in D$ là nhu cầu thu của nút j ($j=1\rightarrow n$)

Trong trường hợp các nguồn phát không chuyển hết sang các nút cầu vì đã đủ nhu cầu thì bài toán vận tải được gọi là bài toán vận tải mở. Có thể đưa một bài toán vận tải mở về một bài toán vận tải (đóng) bằng cách thêm vào một nút cầu giả thứ (n+1) với nhu cầu được xác định như sau :

$$d_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$$

3- Bài toán vận tải cân bằng thu phát

a- Thiết lập bài toán

Có m nơi $A_1, A_2,....,A_m$ cung cấp một loại hàng với khối lượng tương ứng là $a_1, a_2,....,a_m$. Hàng được cung cấp cho n nơi $B_1, B_2,...., B_n$ với khối lượng tiêu thụ tương ứng là $b_1, b_2,....,b_n$.

Cước phí chuyên chở một đơn vị hàng từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j là c_{ij} .

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu hàng để :

- Các điểm phát đều phát hết hàng
- Các điểm thu đều nhận đủ hàng
- Tổng cước phí phải trả là ít nhất

Gọi x_{ij} là lượng hàng chuyển từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j , $x_{ij} \geq 0$.

Vì tổng lượng hàng phát đi từ mỗi điểm phát A_i đến mọi điểm thu B_j bằng lượng hàng phát từ A_i nên :

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i \quad (i = 1,2,...,m)$$

Vì tổng lượng hàng thu được tại mỗi điểm thu B_j từ mọi điểm phát A_i bằng lượng hàng cần thu tại B_j nên :

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_{ji} \quad (j = 1,2,...,n)$$

Để tổng cước phí là ít nhất cần phải có :

$$\min\ z(x) = \sum_{i}\sum_{j} c_{ij}x_{ij}$$

Với các phân tích trên ta có mô hình của bài toán như sau :

$$\min \quad z(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (3)$$

Phương án - Phương án tối ưu

Một ma trận $X=[x_{ij}]_{m.n}$ thỏa (2) và (3) được gọi là phương án, thỏa thêm (1) được gọi là phương án tối ưu.

b- Dạng bảng của bài toán vận tải

Có thể giải bài toán vận tải theo cách của quy hoạch tuyến tính. Tuy nhiên do tính chất đặc biệt của bài toán vận tải nên người ta nghĩ ra một thuật toán hiệu quả hơn. Trước tiên người ta trình bày bài toán vận tải dưới dạng bảng như sau :

Thu Cước Phát	b_1	b_2	....	b_j	....	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1j} x_{1j}	....	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2j} x_{2j}	....	c_{2n} x_{2n}
....	....	....	....	....	....	
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	....	c_{ij} x_{ij}	....	c_{in} x_{in}
....	....	....	....	....	....	....
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	....	c_{mj} x_{mj}	....	c_{mn} x_{mn}

Trong bảng mỗi hàng mô tả một điểm phát, mỗi cột mô tả một điểm thu, mỗi ô mô tả một tuyến đường đi từ một điểm phát tới một điểm thu.

Dây chuyền - Chu trình

Một dãy các ô của bảng mà hai ô liên tiếp nằm trong cùng một hàng hoặc một cột, ba ô liên tiếp không cùng nằm trên một hàng hoặc một cột được gọi là một dây chuyền. Ta thấy rằng hai ô liền nhau trong một dây chuyền có chỉ số hàng hoặc chỉ số cột bằng nhau

	x	x	
		x	x
x			x

Dây chuyền : (1,2) (1,3) (2,3) (2,4) (4,4) (4,1)

Một dây chuyền khép kín, ô đầu tiên và ô cuối cùng bằng nhau, được gọi là một chu trình.Ta thấy rằng số ô trong một chu trình là một số chẵn.

x		x	
		x	x
x			x

Chu trình : (1,1) (1,3) (2,3) (2,4) (4,4) (4,1) (1,1)

Ô chọn - Ô loại

Giả sử ma trận $X=[x_{ij}]_{m.n}$ (i=1,2,...,m) (j=1,2,...,n) là một phương án của bài toán vận tải.

Những ô trong bảng tương ứng với $x_{ij} > 0$ được gọi là ô chọn, những ô còn lại được gọi là ô loại.

Phương án cơ bản

Một phương án mà các ô chọn không tạo thành một chu trình được gọi là phương án cơ bản.

Một phương án có đủ m+n-1 ô chọn được gọi là không suy biến, có ít hơn m+n-1 ô chọn được gọi là suy biến. Trong trường hợp suy biến người ta chọn bổ sung vào phương án cơ bản một số ô loại có lượng hàng bằng 0 để phương án cơ bản trở thành không suy biến

c- Giải bài toán vận tải

Xét bài toán vận tải có số lượng phát, số lượng thu và ma trân cước phí ở dạng bảng như sau :

	80	20	60
50	5	4	1
40	3	2	6
70	7	9	11

LẬP PHƯƠNG ÁN CƠ BẢN BAN ĐẦU

Phương án cơ bản ban đầu được xác định bằng cách ưu tiên phân phối nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất (r,s) (gọi là ô chọn). Khi đó : nếu điểm phát r đã phát hết hàng thì xóa hàng r của bảng và số lượng cần thu tại điểm s chỉ còn là b_s-a_r ; nếu điểm thu s đã nhận đủ hàng thì xóa cột s của bảng và số lượng phát còn lại tại điểm phát r là a_r-b_s

Bảng mới thu được có kích thước giảm đi. Tiếp tục phân phối như trên cho đến khi hết hàng.

Các ô chọn trong quá trình phân phối, sẽ không chứa chu trình, là một phương án cơ bản. Nếu phương án cơ bản suy biến, chưa đủ m+n-1 ô, thì bổ sung thêm một số " ô chọn 0 "

Áp dụng vào bài toán đang xét :

1- Phân vào ô (1,3) 50 . Hàng (1) bị xóa . Cột (3) còn thu 60-50=10

	80	20	10
0	5	4	1 *50*
40	3	2	6
70	7	9	11

2- Phân vào ô (2,2) 20 . Cột (2) bị xóa . Hàng (2) còn phát 40-20=20

	80	0	10
0	5	4	1 *50*
20	3	2 *20*	6
70	7	9	11

3- Phân vào ô (2,1) 20 . Hàng (2) bị xóa . Cột (1) còn thu 80-20=60

	60	0	10
0	5	4	1 *50*
0	3 *20*	2 *20*	6
70	7	9	11

4- Phân vào ô (3,1) 60 . Cột (1) bị xóa . Hàng (3) còn phát 70-60=10

	0	0	10
0	5	4	1 *50*
0	3 *20*	2 *20*	6
10	7 *60*	9	11

5- Phân vào ô (3,3) 10. Hết hàng.

	0	0	0
0	5	4	1 *50*
0	3 *20*	2 *20*	6
0	7 *60*	9	11 *10*

Đã có 5 ô được chọn, chúng tạo thành một phương án cơ bản không suy biến vì số ô bằng với m+n-1=3+3-1.

THUẬT TOÁN "QUY 0 CƯỚC PHÍ CÁC Ô CHỌN"

Định lý

Nếu cộng vào hàng i và cột j của ma trận cước phí $C=[c_{ij}]$ một số tùy ý r_i và s_j thì bài toán vận tải mới với ma trận cước phí mới $C'=[c'_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j]$ thì phương án tối ưu của bài toán này cũng là phương án tối ưu của bài toán kia và ngược lại.

Thuật toán "Quy 0 cước phí các ô chọn" gồm ba giai đoạn.

Giai đoạn 1 : Quy 0 cước phí các ô chọn

Sau khi xác định được phương án cơ bản có m+n-1 ô chọn, người ta cộng vào mỗi hàng i và mỗi cột j của ma trận cước phí $C=[c_{ij}]$ một số r_i và s_j sao cho ma trận cước phí mới C' tại các ô chọn thỏa $c'_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j=0$.

Tiếp tục ví dụ trên ta thấy :

5	4	1 *50*	$r_1=6$
3 *20*	2 *20*	6	$r_2=0$
7 *60*	9	11 *10*	$r_3=-4$
$s_1=-3$	$s_2=-2$	$s_3=-7$	

Các giá trị cộng vào phải thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1+r_1+s_3=0 \\ 3+r_2+s_1=0 \\ 2+r_2+s_2=0 \\ 7+r_3+s_1=0 \\ 11+r_3+s_3=0 \end{cases}$$

Chọn $r_2=0$, giải hệ ta được kết quả trên

Ma trận cước phí mới thu được là :

8	8	0 *50*

0 *20*	0 *20*	-1
0 *60*	3	0 *10*

Giai đoạn 2 : Kiểm tra tính tối ưu

Sau khi quy 0 cước phí các ô chọn nếu : các ô loại đều có cước phí ≥ 0 thì phương án đang xét là tối ưu, ngược lại thì chuyển sang giai đoạn 3

Trong ví dụ này ta chuyển sang giai đoạn 3.

Giai đoạn 3 : Xây dựng phương án mới tốt hơn

1- Tìm ô đưa vào.

Ô đưa vào là ô loại (i*,j*) có cước phí nhỏ nhất và trở thành ô chọn

Trong ví dụ này là ô (2,3).

2- Tìm chu trình điều chỉnh.

Chu trình điều chỉnh được tìm bằng cách bổ sung ô (i*,j*) vào m+n-1 ô chọn ban đầu, khi đó sẽ xuất hiện một chu trình duy nhất, gọi là chu trình điều chỉnh V .

Trong ví dụ này chu trình điều chỉnh là :

V : (2,3) (3,3) (3,1) (2,1) (2,3)

3- Phân ô chẵn lẻ cho chu trình điều chỉnh.

Đánh số thứ tự các ô trong chu trình điều chỉnh V bắt đầu từ ô (i*,j*). Khi đó chu trình điều chỉnh V được phân thành hai lớp :

V_C : các ô có số thứ tự chẵn.

V_L : các ô có số thứ tự lẻ.

4- Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh.

Trong số các ô có thứ tự chẵn chọn ô (r,s) được phân phối ít hàng nhất làm ô đưa ra, trở thành ô loại. Lượng hàng x_{rs} ở ô đưa ra gọi là lượng điều chỉnh.

Trong ví dụ này ô đưa ra là ô (3,3), lượng điều chỉnh là 10.

5- Lập phương án mới.

Phương án mới có được bằng cách thêm hoặc bớt lượng điều chỉnh trên chu trình điều chỉnh như sau :

Ô có thứ tự chẵn bị bớt đi lượng điều chỉnh.

Ô có thứ tự lẻ được cộng thêm lượng điều chỉnh.

Ô ngoài chu trình điều chỉnh không thay đổi

Trong ví dụ này ta thấy những ô trong chu trình điều chỉnh có sự thay đổi như sau :

Ô (2,3) được thêm 10 trở thành 10

Ô (3,3) bị bớt 10 trở thành 0

Ô (3,1) được thêm 10 trở thành 70

Ô (2,1) bị bớt 10 nên trở thành 10

Khi đó phương án mới là :

8	8	0 *50*
0 *10*	0 *20*	-1 *10*
0 *70*	3	0

Quay về giai đoạn 1.

Giai đoạn 1 : Quy 0 cước phí ô chọn

8	8	0 *50*	$r_1=-1$
0 *10*	0 *20*	-1 *10*	$r_2=0$
0 *70*	3	0	$r_3=0$
$s_1=0$	$s_2=0$	$s_3=1$	

Ma trận cước phí mới là :

7	7	0 *50*
0 *10*	0 *20*	0 *10*
0 *70*	3	1

Giai đoạn 2 : Kiểm tra tính tối ưu

Đây là phương án tối ưu

	80	20	60
50	5	4	1 **50**
40	3 **10**	2 **20**	6 **10**
70	7 **70**	9	11

Với cước phí là :

$$1.50+3.10+2.20+6.10+7.70=670$$

Khi sử dụng phương án ban đầu

	80	20	60
50	5	4	1 **50**
40	3 **20**	2 **20**	6
70	7 **60**	9	11 **10**

thì cước phí là :

$$1.50+3.20+2.20+7.60+11.10=680$$

4- Các bài toán được đưa về bài toán vận tải

Có nhiều bài toán thực tế có tính chất không phải là ''vận tải '' nhưng có mô hình toán học là bài toán vận tải. Một số bài toán như vậy là :

a- Bài toán bổ nhiệm

Giả sử tập hợp S gồm m người và tập hợp D gồm n công việc (chức vụ). Cước phí của việc bổ nhiệm người $i \in S$ vào việc $j \in D$ là c_{ij} ($i=1 \to m$, $j=1 \to n$). Bài toán đặt ra là tìm cách chia mỗi người đúng một việc sao cho cước phí bổ nhiệm là nhỏ nhất.

Người ta đặt biến (biến trên dòng) như sau :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nÕung-êi i nhËn viÖc j} \\ 0 & \text{nÕutr-êng hîp kh¸c} \end{cases}$$

thì bài toán trở thành :

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij}$$

Vì mỗi người nhận đúng 1 việc nên : $\sum_{j \in D} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in S)$

Vì mỗi việc chỉ giao cho một người nên : $\sum_{i \in S} x_{ij} = 1 \quad (\forall j \in D)$

Đây là bài toán vận tải nhưng có thêm yêu cầu là các biến x_{ij} chỉ lấy giá trị 0 hoặc 1.

Bài toán bổ nhiệm cũng có khi được gọi là bài toán chọn (Choice Problem). Nhiều bài toán thực tế đa dạng có mô hình toán học là bài toán bổ nhiệm, chẳng hạn như bài toán phân bố hoả lực vào mục tiêu cần tiêu diệt.

b- Bài toán vận tải với cung ít hơn cầu

Xét một bài toán một bài toán vận tải với S là tập hợp m nút cung và D là tập hợp n nút cầu mà tổng nguồn cung nhỏ hơn tổng nhu cầu, tức là

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \le \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Trong trường hợp này tất nhiên không thể đáp ứng đủ nhu cầu d_j cho mỗi nút $j=1 \to n$ cho nên ràng buộc có dạng bất đẳng thức thay vì là đẳng thức. Vậy :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j \qquad (\forall j = 1 \to n)$$

Người ta thường đưa bài toán này về bài toán vận tải (đóng) theo một trong hai trường hợp sau đây :

1.Trường hợp thứ nhất là có tính đến sự thiệt hại bằng tiền khi thiếu một đơn vị hàng hoá ở nút cầu j là r_j ($j=1\to n$)

Lúc này người ta đưa thêm vào một nút cung giả (m+1) với nguồn cung là

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{n} s_i$$

và cước phí tương ứng là

$$c_{(m+1)\,j} = r_j \qquad (j=1\to n)$$

Khi đó ta nhận được một bài toán vận tải (đóng)

$$\min \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ x_{ij} \ge 0 & (i = 1 \to m+1, j = 1 \to n) \end{cases}$$

2.Trường hợp thứ hai là không tính đến sự thiệt hại do thiếu hàng ở nút cầu

Lúc này ta cũng đưa về bài toán vận tải (đóng) như trên, nhưng vì không tính đến sự thiệt hại nên mục tiêu sẽ là

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Ghi chú :

Với bài toán vận tải mở, nguồn chuyển không hết sang các nhu cầu, người ta có thể tính thêm cước phí lưu kho ở mỗi nguồn cho mỗi đơn vị hàng là $c_{i\,(n+1)}$ ($i=1\to m$) . Hoàn toàn tương tự như trên, khi đưa bài toán này về bài toán vận tải (đóng) bằng cách thêm vào nút cầu giả (n+1) thì hàm mục tiêu trở thành

$$\min \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Như vậy ta chỉ cần xét bài toán vận tải (đóng)

$$\min \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1 \to m, j = 1 \to n) \end{cases}$$

c- Bài toán vận tải có đường cấm

Đây là bài toán vận tải nhưng không phải mỗi nguồn đều có cung nối với mọi đích. nghĩa là có đường cấm. Cách đưa về bài toán vận tải là dùng phương pháp M-lớn, tức là phương pháp phạt như sau :

Gọi E là tập các cung không cấm, tức là các cung (i,j), $i \in S$, $j \in D$ và bài toán có thêm điều kiện

$$x_{ij}=0 \text{ với } (i,j) \notin E$$

ta đưa bài toán có các yêu cầu

$$\min \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1 \to m, j = 1 \to n) \\ x_{ij} = 0 & \text{khi } (i, j) \notin E \end{cases} \qquad (*)$$

về bài toán vận tải bằng cách đặt cước vận chuyển mới như sau :

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{nÕu } (i, j) \in E \\ M & \text{nÕu} (i, j) \notin E \end{cases}$$

Ở đây M là một số rất lớn, được coi là số lớn hơn mọi số gặp phải khi tính toán.

Xét bài toán với cước phí mới như trên như sau :

$$\min \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1 \to n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1 \to m, j = 1 \to n) \end{cases} \qquad (**)$$

thì ta có :

Định lý :

Giả sử $x^* = [x^*_{ij}]_{m.n}$ là phương án vận chuyển tối ưu của (**) thì khi đó :

1. Nếu $x^*_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \notin E$ thì x^* là phương án vận chuyển tối ưu của bài toán vận tải có đường cấm (*)

2. Nếu tồn tại $x_{kl} \notin E$ mà $x_{kl} > 0$ thì bài toán vận tải có đường cấm (**) không có nhiệm chấp nhận được.

d- Bài toán vận tải kèm chế biến trung gian

Giả sử rằng trong mô hình vận tải có một số điểm nguồn, tức là điểm sản xuất, cho ra một số sản phẩm cần phải chế biến trước khi đến điểm cầu. Giả sử có $\lambda=1\to k$ điểm chế biến với khả năng chế biến là a_λ đơn vị sản phẩm tương ứng. Gọi cước phí vận chuyển một đơn vị bán sản phẩm từ i đến λ là $c'_{i\lambda}$ và chuyển một đơn vị sản phẩm từ λ đến j là $c''_{i\lambda}$. Bài toán đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển tất cả các sản phẩm qua chế biến đến tất cả các điểm cầu sao cho cước phí nhỏ nhất.

Gọi $x_{i\lambda j}$ là lượng sản phẩm từ i qua λ rồi qua j, ta cần tìm $x=[x_{i\lambda j}]_{mkn}$ sao cho :

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} (c'_{i\lambda} + c''_{\lambda j}) x_{i\lambda j}$$

$$\begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} x_{i\lambda j} = s_i \quad (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{k} x_{i\lambda j} = d_j \quad (j = 1 \to n) \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i\lambda j} = a_\lambda \quad (\lambda = 1 \to k) \\ x_{i\lambda j} \geq 0 \quad (i = 1 \to m, \lambda = 1 \to k, j = 1 \to n) \end{cases}$$

IV- BÀI TOÁN DÒNG TRÊN MẠNG

1- Mở đầu

Nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính có thể quy về bài toán làm cực tiểu phí tổn vận chuyển hàng trong một mạng (gồm các nút và các cung đường) sao cho đảm bảo được các nhu cầu ở một số nút sau khi biết nguồn cung cấp tại một số nút khác. Các bài toán như vậy được gọi là các bài toán dòng trên mạng hay bài toán chuyển vận (TransShipment Problem). Đây là lớp bài toán quan trọng nhất và hay gặp nhất trong quy hoạch tuyến tính. Lớp này bao gồm các bài toán quen thuộc trong thực tế như :

- Bài toán vận tải
- Bài toán mạng điện
- Bài toán mạng giao thông
- Bài toán quản lý
- Bài toán phân bổ vật tư
- Bài toán bổ nhiệm
- Bài toán kế hoạch tài chính
- Bài toán đường ngắn nhất
- Bài toán dòng lớn nhất
- ....

Vì là một bài toán quy hoạch tuyến tính nên các bài toán dòng trên mạng có thể giải được bằng bất kỳ thuật toán nào giải được bài toán quy hoạch tuyến tính, chẳng hạn bằng thuật toán đơn hình như đã biết . Tuy nhiên, nếu tận dụng những cấu trúc đặc biệt của các bài toán dòng trên mạng sẽ làm cho phương pháp đơn hình đơn giản hơn và được thực hiện nhanh hơn.

2- Phát biểu bài toán dòng trên mạng

Mạng là một đồ thị có hướng ký hiệu G=(N,A), N là tập các nút, A là tập các cung, cùng một số thông tin về số lượng bổ sung như sau :

. b_i ($i \in N$) biểu thị nguồn từ ngoài vào nút i, gọi tắt là nguồn

. u_{ij} biểu thị tải năng của cung $(i,j) \in A$

. c_{ij} biểu thị cước phí cho một đơn vị của dòng trên cung $(i,j) \in A$

. x_{ij} biểu thị lượng vận chuyển của dòng trên cung $(i,j)\in A$

Giá trị tuyệt đối $|b_i|$ được gọi là nhu cầu của nút i. Nếu $b_i>0$ thì nút i được gọi là điểm nguồn, nếu $b_i<0$ thì nút i được gọi là điểm hút. Một cách hoàn toàn tự nhiên người ta đặt hai điều kiện sau đây :

a- Tổng lượng trên dòng vào nút i bất kỳ phải bằng tổng lượng trên dòng ra khỏi nút i (luật bảo toàn dòng). Như vậy :

$$\boxed{b_i + \sum_{j\in I(i)} x_{ji} = \sum_{j\in Q(i)} x_{ij} \quad (\forall i \in N)} \qquad (1)$$

Trong đó :

I(i)= {nút j / cung $(j,i)\in A$} : những nút có cung nối đến nút i

O(i)= {nút j / cung $(i,j)\in A$} : những nút có cung nối từ nút i đến nó

b- Dòng trên cung là không âm và không vượt quá tải năng của cung. Như vậy :

$$\boxed{0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A} \qquad (2)$$

Mọi vectơ x có các thành phần x_{ij} , $(i,j)\in A$, được gọi là một dòng. Dòng x thoả điều kiện (1) và (2) được gọi là dòng chấp nhận được. Lấy tổng của (1) theo các nút i ta được :

$$\boxed{\sum_{i\in N} b_i = 0} \qquad (3)$$

Điều này có nghĩa là tổng dòng từ bên ngoài vào mạng phải bằng tổng dòng từ mạng ra ngoài. Nếu điều này điều này không thoả thì bài toán là không chấp nhận được.

Mục tiêu của bài toán là làm cực tiểu cước phí dòng trên mạng, tức là :

$$\boxed{\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}} \qquad (4)$$

trong đó cực tiểu lấy trên mọi dòng chấp nhận được. Như vậy ta nhận được một bài toán quy hoạch tuyến tính như sau :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} b_i + \sum_{j\in I(i)} x_{ji} = \sum_{j\in O(i)} x_{ij} & (\forall i \in N) \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

V- QUY HOẠCH NGUYÊN

1- Mở đầu

Quy hoạch nguyên (Integer Programming) , viết tắt là IP, là bài toán quy hoạch mà trong đó tất cả hoặc một phần các biến bị ràng buộc chỉ lấy giá trị nguyên. Trường hợp thứ nhất được gọi là quy hoạch nguyên hoàn toàn (Pure Integer Programming – PIP), trường hợp thứ hai được gọi là quy hoạch nguyên bộ phận (Mixed Integer Programming – MIP). Tuy vậy thuật ngữ ’’quy hoạch nguyên’’ được dùng chung cho cả hai trường hợp.

Mảng các bài toán có vẻ đơn giản nhất mà cũng là quan trọng nhất trong lớp các bài toán quy hoạch nguyên là các bài toán chọn các quyết định (chọn/không chọn). Chẳng hạn như bài toán bổ nhiệm, biến quyết định việc bổ nhiệm nhận giá trị như sau :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nÕu ng-êi i nhËn c«ng viÖc j} \\ 0 & \text{nÕu ng-êi i kh«ng nhËn c«ng viÖc j} \end{cases}$$

Vì các biến quyết định thường chỉ nhận một trong hai giá trị nên bài toán này còn được gọi là bài toán quy hoạch nguyên nhị phân (Binary Integer Programming) .

Một ý tưởng tự nhiên để giải bài toán quy hoạch nguyên là cứ giải như một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát tạm bỏ qua ràng buộc biến phải nguyên. Khi tìm được phương án tối ưu thì sẽ làm tròn nó để được phương án tối ưu nguyên gần đúng. Phương pháp này có thể áp dụng trong thực tế nhưng phải chú ý đến hai nguy cơ sau đây :

- Một là phương án tối ưu đã được làm tròn không chấp nhận được đối với bài toán quy hoạch nguyên.

- Hai là phương án tối ưu đã được làm tròn chấp nhận được nhưng có thể giá trị mục tiêu tương ứng là rất xa với mục tiêu tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên.

2- Bài toán quy hoạch nguyên trong thực tế

a- Bài toán balô

Một nhà thám hiểm mang theo một balô chỉ chứa được một trọng lượng không quá b. Có n loại vật dụng phải mang theo. Mỗi vật loại vật i có trọng lượng là a_i và giá trị sử dụng là c_i. Hỏi ông ta phải chọn lựa các vật mang theo như thế nào để có giá trị sử dụng là lớn nhất ?

Gọi x_i ($i=1\rightarrow n$) là số lượng vật loại i mà ông ta mang theo thì mô hình toán của bài toán balô này là quy hoạch nguyên như sau :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\ x_i \ge 0 \quad \text{vµ nguyª n} \quad (i = 1 \rightarrow n) \end{cases} \end{array}}$$

Về mặt toán học thì nếu hàm mục tiêu là min z hoặc ràng buộc là đẳng thức thì bài toán cũng gọi là bài toán balô. Bài toán balô có dạng đặc biệt và đơn giản vì chỉ có một ràng buộc ngoài ràng buộc dấu và tính nguyên. Người ta nghiên cứu được nhiều cách giải riêng cho bài toán và đưa bài toán quy hoạch nguyên về bài toán balô để giải.

b- Bài toán sản xuất có lệ phí cố định

Giả sử một nhà máy có kế hoạch sẽ sản xuất n sản phẩm. Chi phí sản xuất sản phẩm $j=1\rightarrow n$ gồm lệ phí cố định k_j , không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm j, và cước phí c_j đối với mỗi đơn vị sản phẩm j.

Gọi $x_j \ge 0$ là lượng sản phẩm $j=1\rightarrow n$ sẽ sản xuất thì chi phí sản xuất sản phẩm j sẽ là :

$$c_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{nÕu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nÕu} x_j = 0 \end{cases}$$

mục tiêu sản xuất với chi phí cực tiểu sẽ là :

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j)$$

Trong trường hợp này hàm mục tiêu z là hàm phi tuyến với các đối số là x_j ($j=1\rightarrow n$) mặc dù các ràng buộc thực tế như nguyên liệu, thị trường,.... đều là tuyến tính nên bài toán rất khó giải. Người ta có thể đưa bài toán này về bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận bằng cách đưa vào các biến phụ nhị phân như sau :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{nÕu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nÕu} x_j = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Để biểu thị y_j ($j=1\rightarrow n$) là biến nhị phân độc lập, không phụ thuộc vào x_j như trong (1) người ta đưa vào một ràng buộc tuyến tính như sau :

$$x_j \le My_j \quad (j=1\rightarrow n)$$

ở đây $M>0$ và rất lớn để ràng buộc $x_j \le \mu$ là thừa. Khi đó hàm mục tiêu và ràng buộc trên trở thành :

$$\min \ z = \sum_{j=1}^{n} (k_j y_j + c_j x_j)$$

$$\begin{cases} 0 \le x_j \le My_j \\ y_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (2)$$

Thật vậy :

- Nếu $x_j > 0$ thì y_j không thể bằng 0 nên $y_j = 1$
- Nếu $x_j = 0$ thì $y_j = 0$ hoặc $y_j=1$

Nhưng vì $k_j>0$ (nếu $k_j= 0$ thì không cần đưa vào biến phụ y_j) và hàm mục tiêu là min z nên ở thuật toán tìm phương án tối ưu luôn lấy $y_j=0$ vì phương án với $x_j=0$ và $y_j=1$ không thể là tối ưu. Khi viết đủ các ràng buộc tuyến tính khác vào ta được bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận.

CÂU HỎI CHƯƠNG 4

1- Trình bày chiến lược bị trội hơn.

2- Trình bày chiến lược MaxiMin và MiniMax.

3- Xây dựng quy hoạch tuyến tính trong trường hợp không có nghiệm ổn định.

4- Trình bày các giai đoạn giải bài toán vận tải.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1- Tìm phương án tối ưu cho bài toán lý thuyết trò chơi có ma trận điểm được cho như sau :

2	3	-2	-1
-1	5	4	-2
-2	-5	0	3

2- Giải bài toán vận tải có ma trận cước phí

	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5