Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 1-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 9-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương II- Tích phân bội (tiếp)

Nội dung buổi ba/năm

- *Các ứng dụng vật lý của Tích phân bội hai (Mục 20.3)*
- *Tính diện tích mặt cong (Mục 20.8)*

Tiết thứ nhất

- *Các ứng dụng vật lý của Tích phân bội hai (Mục 20.3)*

1). Tính khối lượng tấm phẳng
2). Mô men đối với các trục Ox, Oy…
3). Tọa độ khối tâm của tấm phẳng
4). Mô men quán tính…

1). Tính khối lượng tấm phẳng

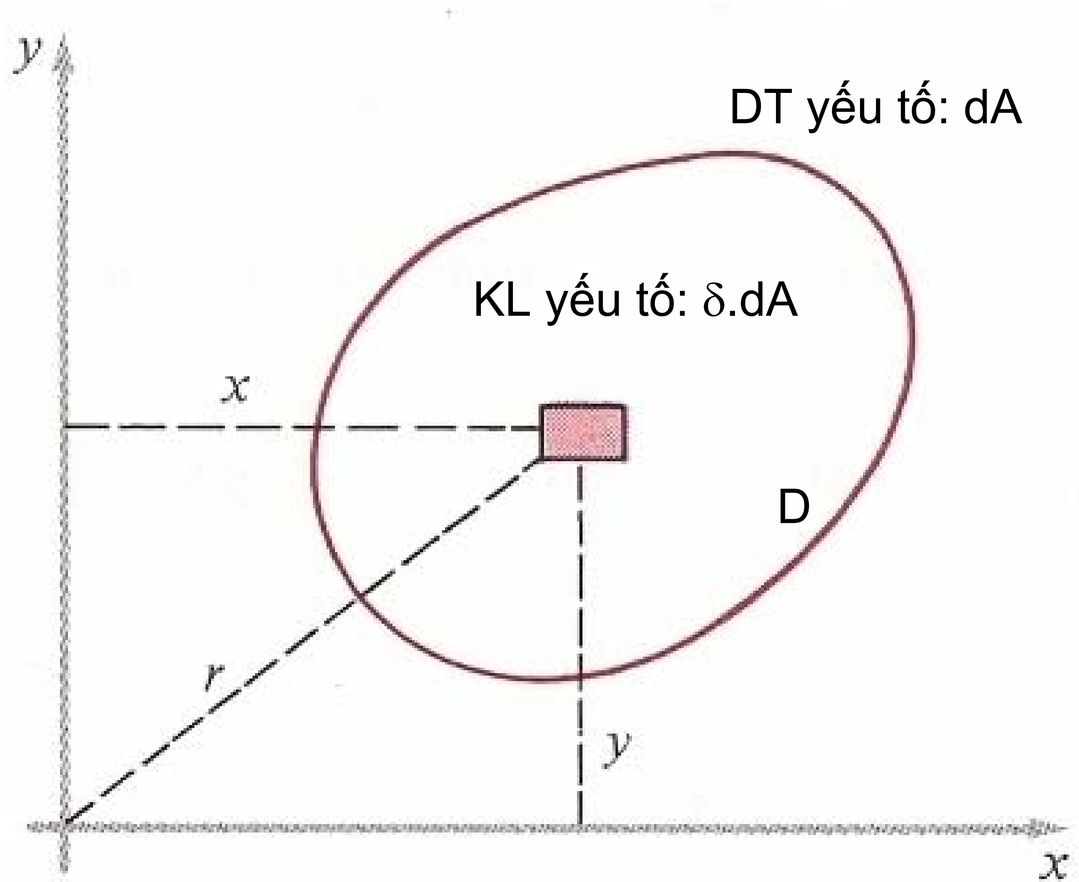
- Tấm phẳng D⊂(xy) có ***khối lượng riêng*** (tỷ trọng, mật độ) phụ thuộc vào từng điểm
- Khối lượng của yếu tố diện tích dA là:
- ***Công thức*** tính khối lượng của tấm phẳng

$$\delta = \delta(x, y)$$

$$\delta(x, y)\, dA$$

$$M = \iint_D \delta(x, y)\, dA$$

Hình 20.14 (trang 129)



Trong hình vẽ trên

- Ta coi x là khoảng cách từ khối lượng yếu tố: $\delta(x, y)dA$ đến trục y,
- y là khoảng cách từ khối lượng yếu tố: $\delta(x, y)dA$ đến trục x
- Khi xét tác dụng quay của khối lượng quanh một trục, người ta đưa ra khái niệm ***mô men đối với trục*** (bằng tích giữa khối lượng và khoảng cách từ nó đến trục (còn gọi là ***cánh tay đòn***))

2).Mô men

- Khối lượng của yếu tố diện tích dA có ***mô men đối với trục x; (trục y)***

$$y\delta\left(x,y\right)dA;(x\delta\left(x,y\right)dA)$$

- ***Công thức*** tính mô men đối với trục x; trục y của tấm phẳng

$$\begin{cases} M_x = \iint\limits_D y\delta\left(x,y\right)dA \\ M_y = \iint\limits_D x\delta\left(x,y\right)dA \end{cases}$$

3). Tọa độ khối tâm của tấm phẳng

- ***Tọa độ khối tâm*** của tấm phẳng D, với hàm khối lượng riêng (tỷ trọng, mật độ):

$$\delta = \delta(x, y)$$

được tính theo công thức:

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\iint\limits_D x\delta(x, y)\,dA}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,dA} \\ \bar{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\iint\limits_D y\delta(x, y)\,dA}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,dA} \end{cases}$$

4). Mô men quán tính

- ***Mô men quán tính*** của tấm phẳng D đối với ***trục x***; (trục y)

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dA$$

$$(I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dA)$$

- ***Mô men quán tính*** của tấm phẳng D đối với ***gốc O***

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA$$

Tấm phẳng đồng chất

- Khối lượng riêng $\delta(x, y) = \rho$ = hằng số tại $\forall(x, y) \in D$
- Khi đó các công thức trên sẽ đơn giản hơn…
- Các bạn ***tự viết lại*** các công thức tính khối lượng, mô men và mô men quán tính đối với hai trục, đối với gốc O và công thức cho tọa độ khối tâm của tấm phẳng đồng chất

Ví dụ 1

- Biết khối lượng riêng theo M(x, y) là $\delta(M) = xy$. Tính khối lượng, mô men và mô men quán tính đối với trục x, đối với gốc O và xác định tọa độ khối tâm của hình vuông OABC, biết A(a, 0); B(a, a); C(0, a)
- ***HD.*** Khối lượng

$$M = \iint_D xy dA = \int_0^a \int_0^a xy dy dx = \int_0^a \frac{a^2}{2} x dx = \frac{a^4}{4} (DVKL)$$

Mô men đối với trục x, trục y

- Mô men của tấm vuông OABC đối với trục y

$$M_y = \iint_D x(xy)dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^a x^2 y dy dx = \int_0^a \frac{a^2 x^2}{2} dx = \frac{a^5}{6}$$

- Do ***tính đối xứng,*** Mô men của tấm vuông OABC đối với trục x cũng bằng: $a^5/6$

Tọa độ khối tâm

của tấm vuông OABC được tính theo công thức:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{2a}{3}; \\ \overline{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

Mô men quán tính

- đối với trục Ox; trục Oy và đối với gốc O

$$I_x = \iint_D y^2 (xy) dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^a xy^3 dydx = \int_0^a \frac{a^4 x}{4} dx = \frac{a^6}{8} = I_y$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)(xy) dxdy = I_x + I_y = \frac{a^6}{4}$$

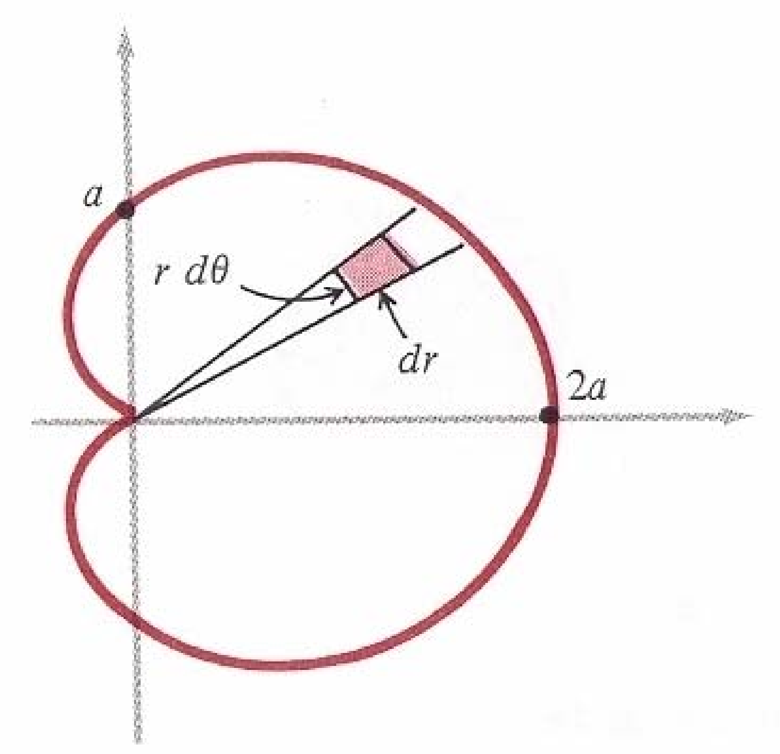
Ví dụ 2

- Xác định tọa độ khối tâm của hình tim đồng chất có biên:

  $$r = a(1+\cos\theta)$$

- ***HD.*** Do tính đối xứng, khối tâm của hình tim sẽ nằm trên trục x, nghĩa là:

- Hình 20.19, trang 135



$$\bar{y}=0; \qquad \bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dA}{A}=\frac{2}{3\pi a^2}\iint\limits_D x\,dA$$

$$\iint\limits_D x\,dA=\iint\limits_{D_1} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta=\cdots=\frac{5\pi a^3}{4}\to\bar{x}=\frac{5a}{6}$$

Tiết thứ hai

- *Các ứng dụng của Tích phân bội hai*

  (Ôn tập và nâng cao)

1). Diện tích mặt cong (Mục 20. 8)
2). Ví dụ ứng dụng

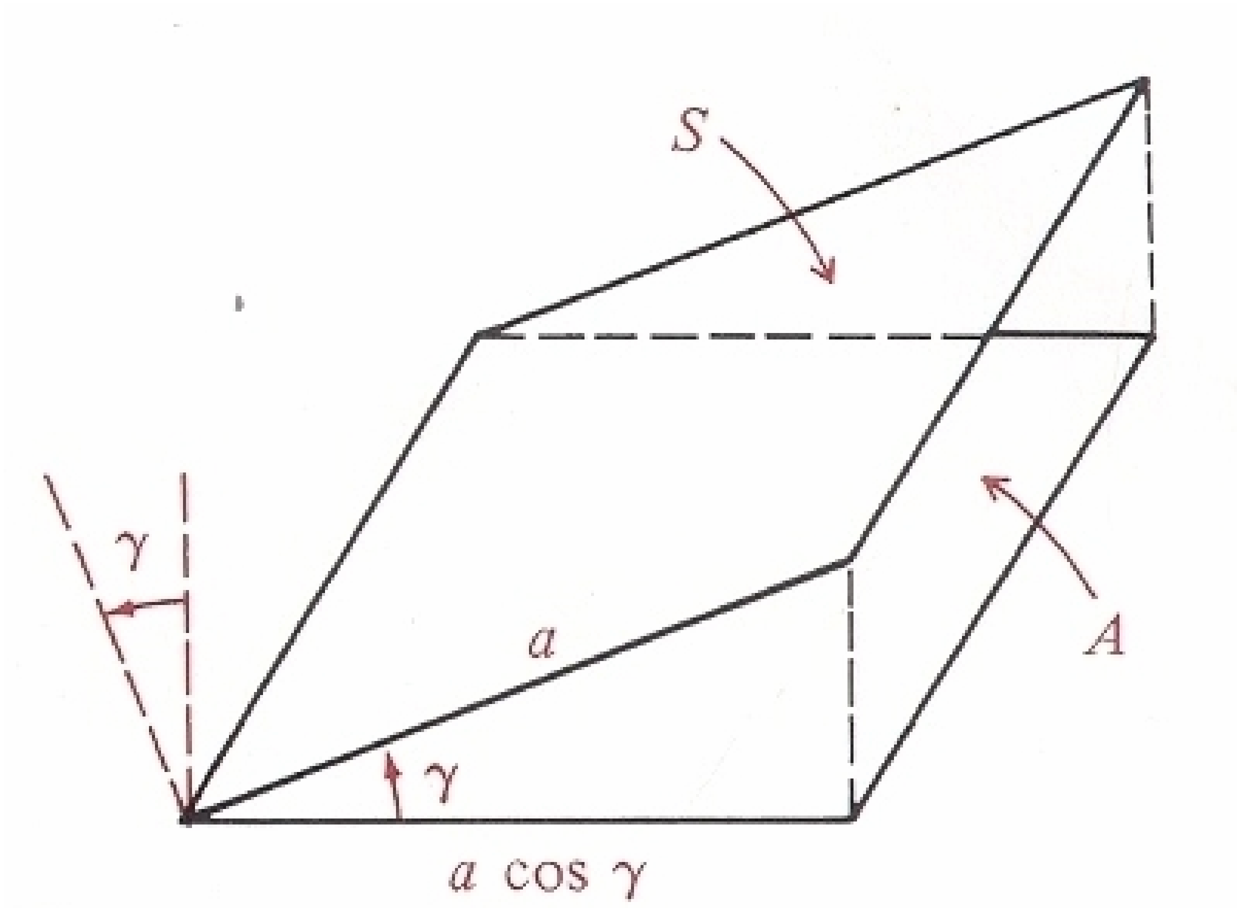
1). Diện tích mặt cong (Mục 20. 8)

- Xét mặt cong có phương trình z = f(x, y) xác định trên miền hữu hạn $D \subset (xy)$
- ***Hình chiếu vuông góc*** của phần mặt cong khá bé (với diện tích dS) xuống (xy) là một hình phẳng trong D có diện tích dA = dxdy
- Theo ***định lý về diện tích hình chiếu***, ta có:

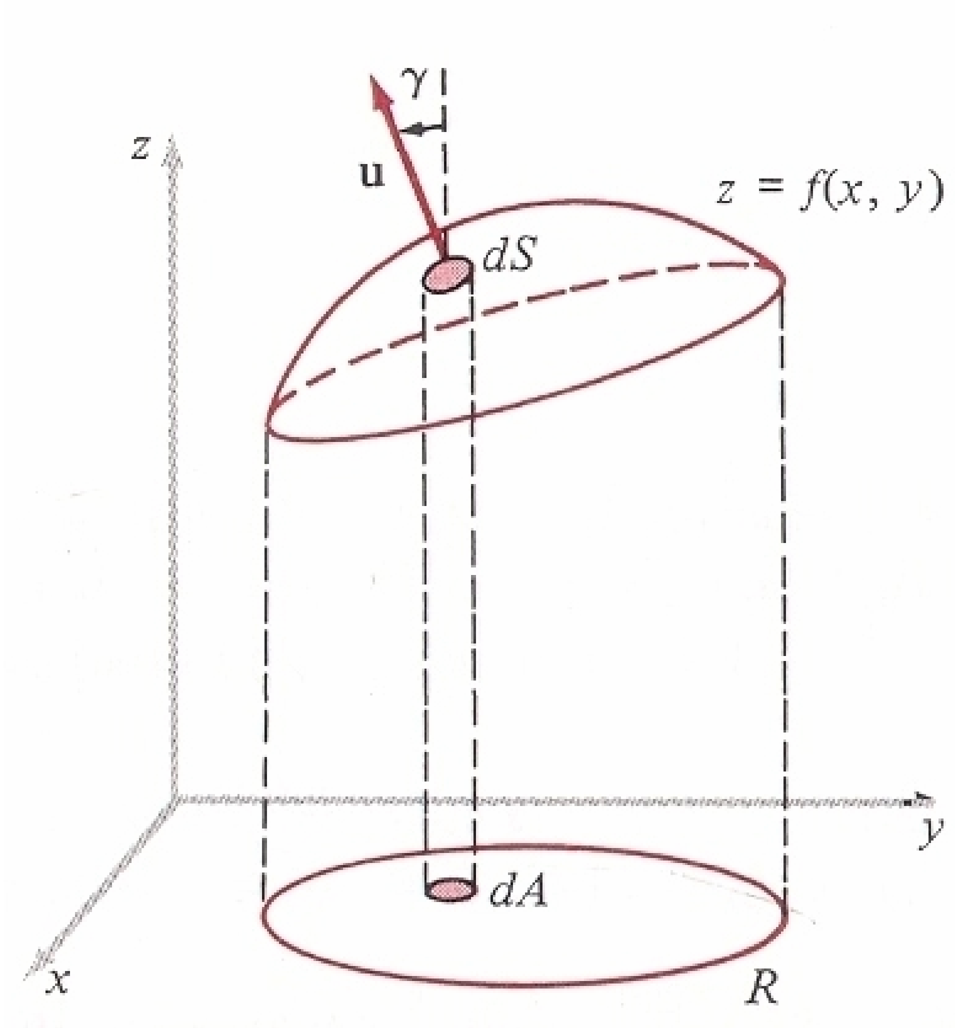
$$dS.\ \cos\gamma = dA$$

- với γ là góc giữa pháp tuyến tại một điểm trên dS với chiều dương của trục z

Hình 20.35, trang 158



Hình 20.36, trang 159



Tính dS

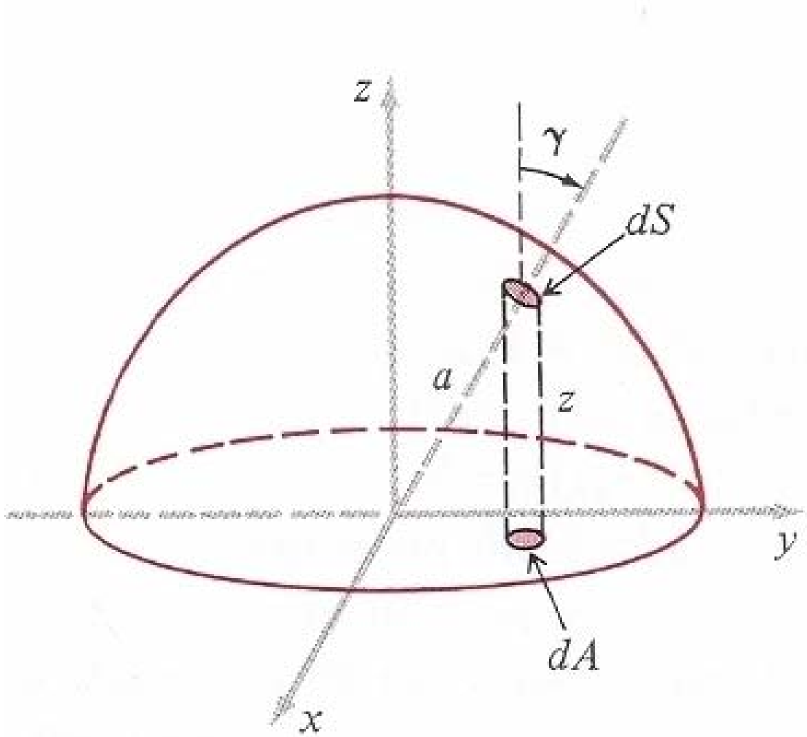
$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}.\vec{k}}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{(-z_x.0 - z_y.0 + 1.1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

$$dS = \frac{dA}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.dA$$

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.dA = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.dxdy$$

3). Ví dụ 1

- Tính DT nửa mặt cầu bán kính a bằng ***TP bội hai*** (Hình 20.37, trang 160)
- ***HD.*** Xét nửa mặt cầu trên:
- Đầu tiên hãy tính dS?
- Sau đó, xác định miền lấy TP bội hai (Nên tính theo hệ tọa độ nào?)



Tính vi phân diện tích dS

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)};$$

$$z_x = -\frac{x}{z}; z_y = -\frac{y}{z};$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}$$

Diện tích nửa cầu trên

$$S = \iint_D dS = a \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}$$

$$= a \iint_{D_1} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{a}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - r^2)$$

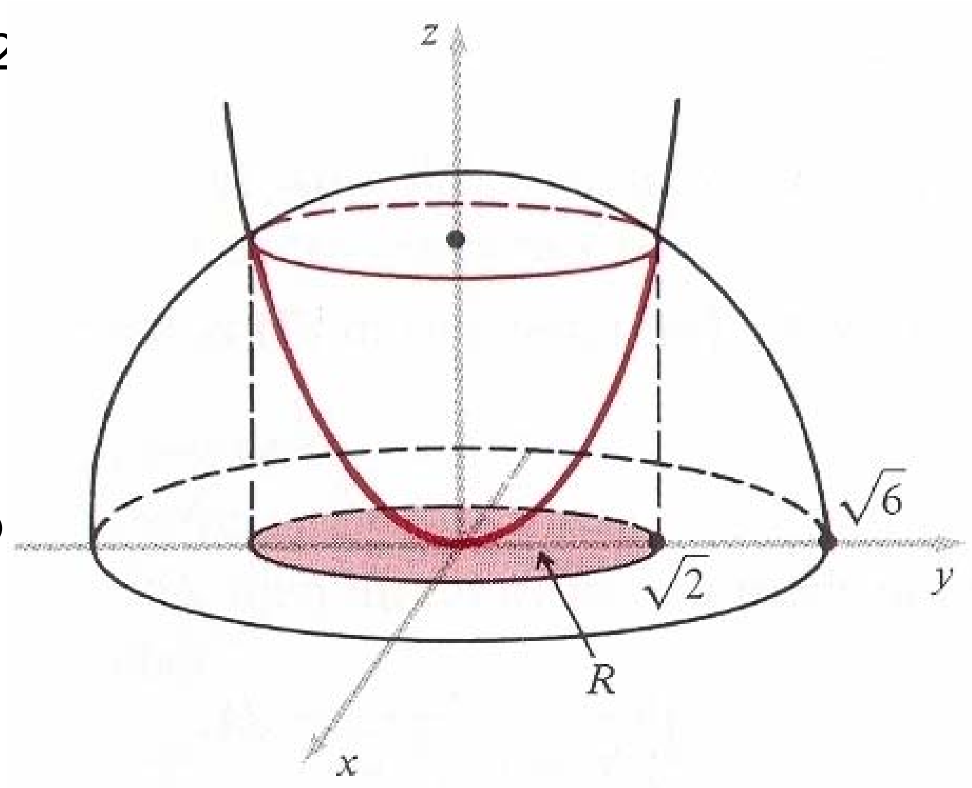
$$= -a.2\pi.\sqrt{a^2 - r^2}\,\Big|_0^a = 2\pi a^2$$

Ví dụ 2

- Tính DT ***phần mặt cong parabôlôít tròn xoay***: $z = x^2 + y^2$ ***nằm trong mặt cầu:***

  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$
- ***HD.*** Tìm z, z_x, z_y.
- Tính dS
- Xác định miền lấy TP và xác định các cận TP

- Hình 20.38, trang 161



HD giải VD 2

- $z = x^2 + y^2 \rightarrow z_x = 2x;\ \ z_y = 2y;$
- $dS = [1 + 4(x^2 + y^2)]^{1/2}dxdy$
- ***Giải phương trình:*** $[x^2 + y^2]^2 = 6 - (x^2 + y^2)$ được: $x^2 + y^2 = 2$ (loại giá trị: $x^2 + y^2 = -3$)
- Suy ra ***hình chiếu trên (xy)*** của phần mặt parab…tròn xoay là hình tròn: $x^2 + y^2 \leq 2$
- Nên tính TP trong HTĐ cực trên miền D_1: $0 \leq \theta \leq 2\pi;\ 0 \leq r \leq \sqrt{2}$

Thực hiện phép tính

$$S=\iint_{D_1}\sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta=$$

$$4\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(1+4r^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4r^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13\pi}{3}\qquad(DVDT)$$

2). Ví dụ ứng dụng

- Tính khối lượng và xác định tọa độ khối tâm của tam giác OAB biết A(a, 0) B(0, a) và O(0, 0). Cho khối lượng riêng $\delta = x^2 + y^2$

$$M = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)dydx$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3} \right] dx = \frac{a^4}{6}(DVKL)$$

$$M_x = \iint_D (x^2y + y^3)\,dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2y + y^3)\,dydx$$

$$\int_0^a \left[x^2 \frac{(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{4} \right] dx = \frac{a^5}{15} \rightarrow \bar{y} = \frac{2a}{5}$$

$$M_y = \iint_D (x^3 + xy^2)\,dxdy = \frac{a^5}{15} \qquad \rightarrow \bar{x} = \frac{2a}{5}$$

Nội dung BG-10-TII-(Tuần thứ 10)

- *Tích phân bội ba và ứng dụng (Mục 20.5)*
- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược những ý chính trong các mục sẽ học
- Hết BG-9-Toán II (Ngày 15/4/2008)

Chương I- Không gian ba chiều và Hàm nhiều biến

- Thời lượng: 6 buổi
- Nội dung buổi thứ nhất:
  - Phép tính véc tơ: Mục 17.3; 18.1; 18.2;18.3 (Tự đọc)
  - Giải tích của hàm véc tơ một biến (Mục 17.4; 17.6)
  - Đường thẳng và mặt phẳng-Mục 18.4 (Tự đọc)
  - Mặt trụ, Mặt tròn xoay, Mặt bậc hai (Mục 18.5; 18.6)

Tiết thứ nhất

Giải tích Hàm véc tơ một biến số

(Mục 17.4, tr.551 và 17.6, trang 566)

1). Các khái niệm cơ bản

2). Nghiên cứu hàm véc tơ một biến số theo phương pháp tọa độ

3). Nghiên cứu hàm véc tơ một biến số theo đường đầu tốc. Ứng dụng của Giải tích véc tơ

I).Các khái niệm cơ bản về Hàm véc tơ của một biến số

- Véc tơ vận tốc, véc tơ gia tốc của một chất điểm chuyển động thường thay đổi phương, hướng hoặc độ dài theo thời gian. Ta nói:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}(t); \vec{a} = \vec{a}(t)$$

- Người ta có thể mô tả: Kim đồng hồ, cánh quạt, dòng nước… chuyển động bằng những véctơ biến đổi theo thời gian t

Định nghĩa hàm véc tơ một biến số

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

- Nếu ứng với mỗi giá trị biến số (thường là thời gian) t $\in$T$\subset \Re$, ta có quy luật để xác định một véc tơ **r** (về cả phương, hướng và độ lớn (mô đun)) thì ta nói có một hàm véc tơ theo biến số t trên T

Giới hạn

- Xét hàm véc tơ một biến số: $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- Giới hạn được định nghĩa như sau:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \leftrightarrow$$

$$\left\{ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < \left| t - t_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| \vec{r}(t) - \vec{a} \right| < \varepsilon \right\}$$

Tính liên tục và Đạo hàm

- Hàm véc tơ liên tục tại t_0 nếu

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

- Đạo hàm của hàm véc tơ tại một điểm:

$$\vec{r}\,'(t_0) = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Ý nghĩa cơ học của ĐH cấp I, cấp II

- Tương tự như khi ta xét hàm một biến số:
  - Đạo hàm cấp một của một hàm véc tơ tại một điểm cho ta véc tơ vận tốc, thể hiện suất biến đổi theo biến số của hàm véc tơ tại điểm đó
  - Đạo hàm cấp hai của một hàm véc tơ tại một điểm cho ta véc tơ gia tốc, thể hiện suất biến đổi theo biến số của hàm vận tốc tại điểm đó
- Sau đây, ta sẽ xét các công thức tính đạo hàm …

Công thức tính đạo hàm của tích

$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{r}(t)) = \alpha\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad (\alpha = const)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r_1}(t)\bullet\vec{r_2}(t)) = \vec{r_1}(t)\bullet\frac{d\vec{r_2}(t)}{dt} + \vec{r_2}(t)\bullet\frac{d\vec{r_1}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r_1}(t);\vec{r_2}(t)\right] = \left[\frac{d\vec{r_1}(t)}{dt};\vec{r_2}(t)\right] + \left[\vec{r_1}(t);\frac{d\vec{r_2}(t)}{dt}\right]...$$

Các công thức ĐH khác như

- ĐH của một tổng (hiệu) các vt
- ĐH hàm hợp
- ĐH của hàm vt có phương không đổi…

tương tự như các công thức đã học đối với ĐH của hàm một biến số. Chẳng hạn:

$$\vec{r} = \vec{r}\left[u(t)\right] \to \vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{du}$$

2). Nghiên cứu hàm véc tơ theo các tọa độ trong KG

- Nếu

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

- thì

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

Các đạo hàm cấp cao

$$\vec{r}\,'' = \vec{r}\,''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}^{\,(n)} = \vec{r}^{\,(n)}(t) = x^{(n)}(t)\vec{i} + y^{(n)}(t)\vec{j} + z^{(n)}(t)\vec{k} \ldots$$

Như vậy:

- Ta có thể xét *sự liên tục* cũng như tính *đạo hàm các cấp* của một hàm véc tơ thông qua các hàm tọa độ của nó
- Ta còn có thể xác định độ lớn, phương hướng của các véc tơ đạo hàm và ứng dụng các phép tính đó trong cơ học
- Sau đây ta xét một vài ứng dụng của Giải tích véc tơ *trong mặt phẳng xy*

Các ví dụ

- Ví dụ 1. (Trang 607) Cho hàm véc tơ:

$$\vec{r}(t) = 4\cos 2t.\vec{i} + 3\sin 2t.\vec{j}$$

- Coi gốc O là điểm đầu chung cho các VT, Xác định quỹ tích điểm cuối *(đường đầu tốc).* Tính đạo hàm và tìm thời điểm tại đó đạo hàm đạt giá trị lớn nhất

Hướng dẫn

- Ta có: x(t) = 4cos2t; y(t) = 3sin2t, *đường đầu tốc* là một ellip có phương trình:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\vec{r}\,'(t)=-8\sin 2t.\vec{i}+6\cos 2t.\vec{j}$$

Nghiên cứu thêm về VT Đạo hàm

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{64\sin^2 2t + 36\cos^2 2t} = \sqrt{36 + 28\sin^2 2t}$$

$$\cos(\vec{r}\,'(t), \vec{i}) = -\frac{8\sin 2t}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}; \cos(\vec{r}\,'(t), \vec{j}) = \frac{6\cos 2t}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}$$

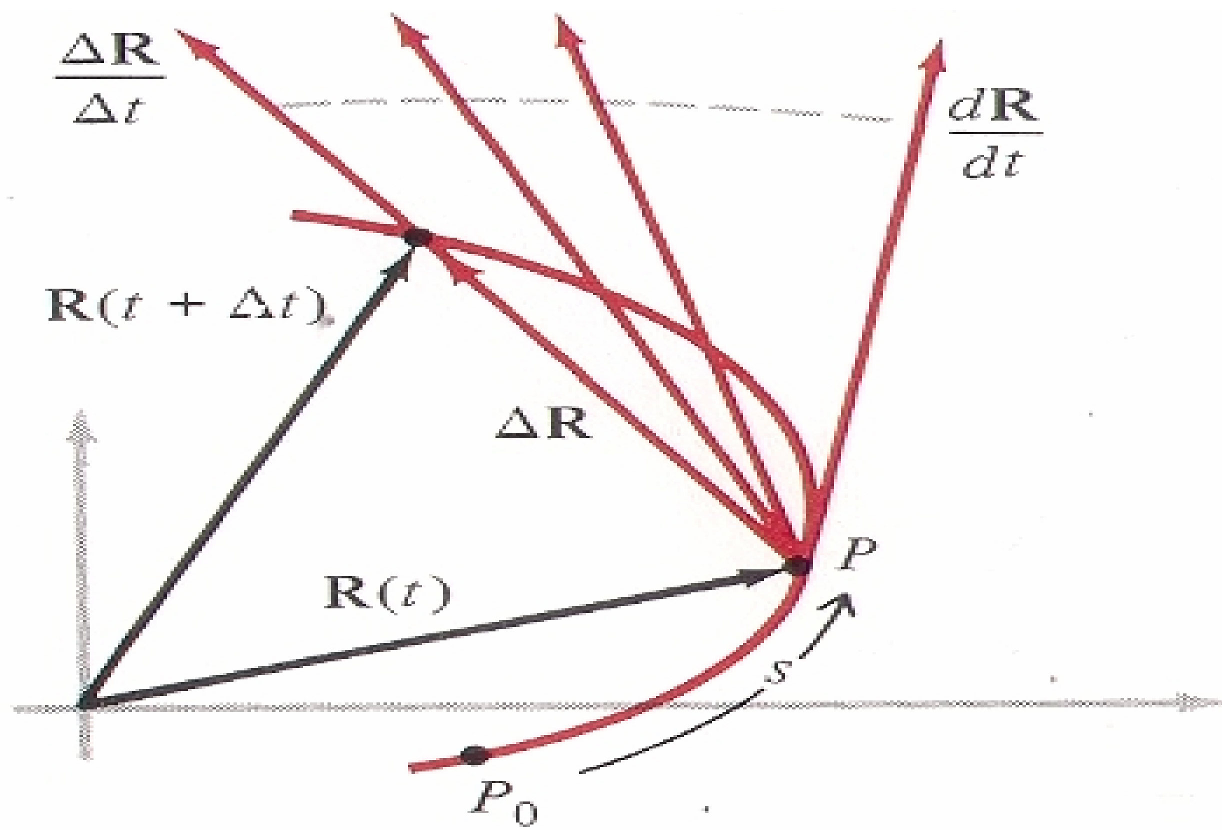
$$GTLN \left|\vec{r}\,'(t)\right| = 8 \; khi \;\; \sin 2t = \pm 1 \leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

$$GTBN \left|\vec{r}\,'(t)\right| = 6 \; khi \;\; \sin 2t = 0 \leftrightarrow t = k\frac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$$

3). Nghiên cứu hàm véc tơ theo Đường đầu tốc

- Đưa các véc tơ xác định theo từng thời điểm về cùng một gốc O(0; 0). Khi đó, các điểm ngọn của véc tơ tạo thành một *đường đầu tốc* (còn gọi là tốc đồ)
- Vẽ hai véc tơ có gốc O ứng với thời điểm t và t + Δt, ta có thể biểu diễn được *véc tơ hiệu* ***Δr*** sau đó cho $\Delta t \to 0$ để xác định phương của véc tơ giới hạn (VTđạo hàm)

Véc tơ đạo hàm tiếp xúc đường đầu tốc tại P (H.17-36)



ĐH vt có độ dài không đổi

- Giả sử hàm véc tơ chỉ biến đổi phương hướng theo t nhưng *giữ nguyên độ dài*. Khi đó, véc tơ đạo hàm tại mỗi điểm luôn có phương vuông góc với véc tơ đó. Thật vậy:

$$\vec{r}^{\,2}(t) = \left|\vec{r}(t)\right|^2 = const \rightarrow 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 0$$

$$\leftrightarrow \vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$$

Giải thích cách khác

- Xét hàm ***véc tơ đơn vị***:

$$\vec{r}(\theta) = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$$

- Khi đó ĐH sẽ là VT ***đơn vị vuông góc*** vì:

$$\vec{r}\,'(\theta) = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$$

$$\rightarrow \vec{r}(\theta).\vec{r}\,'(\theta) = 0$$

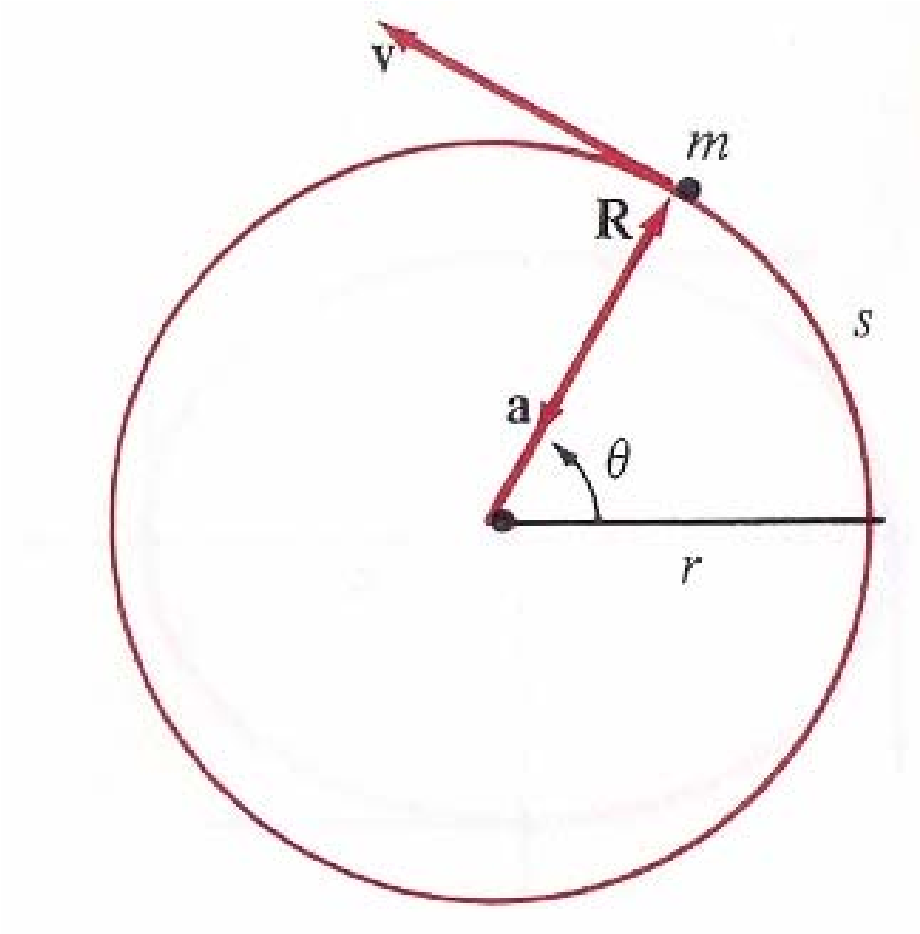
Ví dụ 2- Chuyển động tròn đều

- Xét một chất điểm M quay ngược chiều kim đồng hồ theo đường tròn: $x^2+ y^2= R^2$ với tốc độ v không đổi. Tính gia tốc của chất điểm và xác định lực gây nên chuyển động này
- Theo Hình 17.39-tr.555, Ta có:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (R\cos\theta)\vec{i} + (R\cos\theta)\vec{j};$$

$$(\widetilde{OM} = R\theta = s \leftrightarrow \theta = \frac{s}{R})$$

Hình 17.39-Trang 555



Tính vận tốc

- VT vận tốc là:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{Rdt} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$= \frac{v}{R} \cdot \left[-R\sin\theta \cdot \vec{i} + R\cos\theta \cdot \vec{j} \right]$$

$$= v\left[-\sin\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j} \right]$$

Tính gia tốc

- VT gia tốc là:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{Rdt} \cdot \frac{d\vec{v}}{d\theta}$$

$$= -\frac{v^2}{R} \cdot \left[\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j} \right]$$

Vậy trong chuyển động tròn đều

- *Vận tốc chất điểm* có phương tiếp tuyến với quỹ đạo (vuông góc với bán kính OM), có hướng theo chiều quay, có độ lớn không đổi là tốc độ v
- *Gia tốc chất điểm* hướng về tâm O, có độ lớn bằng v^2/R
- Lực gây nên chuyển động này chính là *lực hướng tâm*, có độ lớn bằng $F = m.\ v^2/R$

Tương tự ta có thể nghiên cứu

các chuyển động khác

- *VT đạo hàm cấp I* cho ta vận tốc biến thiên của hàm vt tại thời điểm được xét
- *VT đạo hàm cấp II* cho ta gia tốc biến thiên (hay là vận tốc biến thiên của ĐH cấp I) của hàm vt tại thời điểm được xét
- Cách dùng tọa độ dễ hiểu và dễ tính nhưng không trực quan bằng cách dùng tốc đồ (đường đầu tốc)

Tọa độ tự nhiên trên quỹ đạo

- Trên quỹ đạo của động điểm, ta chọn một *điểm gốc P_0*, quy định một *chiều dương* và một *đơn vị độ dài* (H.17.36)
- Khi đó vị trí động điểm P được xác định nhờ *một số đại số s*, có giá trị bằng độ dài cung P_0 P, người ta gọi s là *tọa độ tự nhiên* của P trên quỹ đạo được xét
- Khi biết phương trình quỹ đạo và tọa độ (x; y) của P ta có thể tính được TĐTN s

Điều ngược lại

không đơn giản trong mọi trường hợp, nghĩa là, khi có TĐTN ta không thể xác định dễ dàng

(x; y) trong nhiều trường hợp

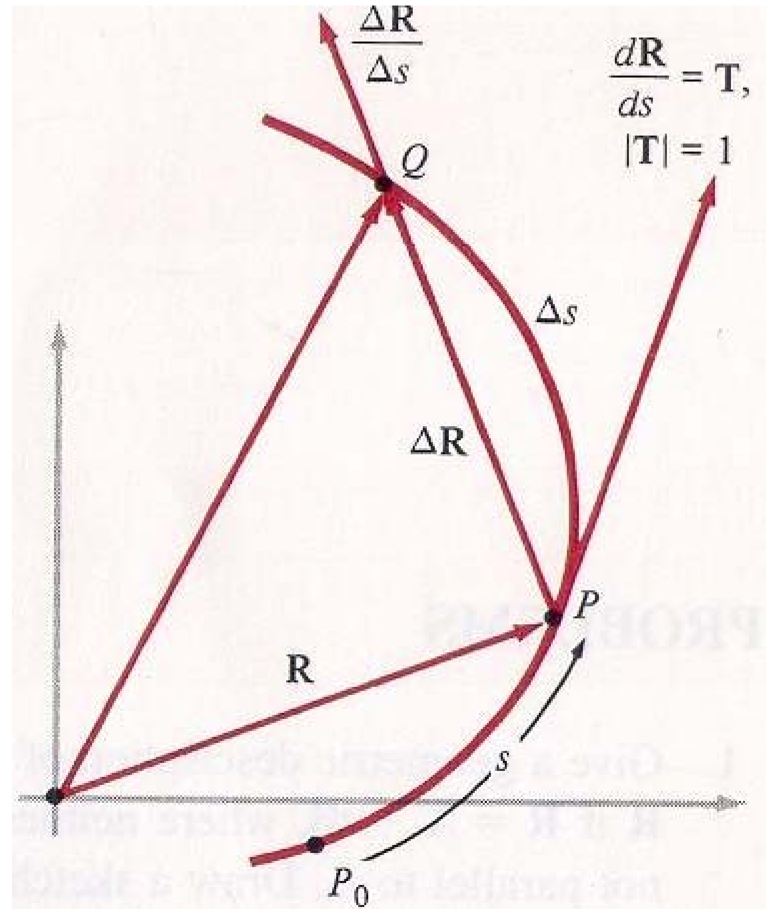
- Tuy vậy, TĐTN có tính trực quan hơn, và người ta vẫn hay dùng tọa độ này trong cơ học thay cho tham số t (thời gian)
- Khi dùng TĐTN phương trình chuyển động của chất điểm là: s = s(t); v(t) = s'(t); *trong chuyển động thẳng* thì gia tốc a(t) = s''(t) = v'(t)

Véc tơ tiếp tuyến đơn vị

- Hình 17.40 trang 556

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to \infty} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta s} = \vec{T};$$

$$\left|\vec{T}\right| = 1; \frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}$$



Véc tơ vận tốc

- Ta có thể tính như sau:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v(t) \cdot \vec{T}$$

VT gia tốc

- Ta có: $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v'(t)\cdot\vec{T} + v(t)\cdot\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$= s''(t)\cdot\vec{T} + v(t)\cdot\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot s'(t)$$

$$= s''(t)\cdot\vec{T} + v^2(t)\cdot\frac{d\vec{T}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}$$

$$= s''(t)\cdot\vec{T} + v^2(t)\cdot k\cdot\frac{d\vec{T}}{d\theta}$$

Vậy VTgia tốc gồm hai thành phần

- *Thành phần tiếp tuyến:*

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T}$$

Và thành phần thứ hai là

- ***Thành phần pháp tuyến (hướng tâm)*** với k là ***độ cong*** của quỹ đạo tại điểm được xét (k = 1/ρ với ρ là ***bán kính cong***):

$$\overrightarrow{a_n} = kv^2\vec{n}$$

Khi học môn Cơ học lý thuyết

các bạn sẽ gặp lại các công thức trên

- Khi đó cần nhớ ***công thức tính độ cong*** của (C): y = y(x) tại một điểm (x; y):

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Vậy, véc tơ gia tốc bằng

$$\overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

Chú ý

- Gia tốc pháp liên quan đến ***lực hướng tâm*** mà ta đã học trong môn Vật lý. Lực này phụ thuộc vào tốc độ của động điểm và độ cong của quỹ đạo tại thời điểm được xét
- Trong ***chuyển động thẳng***, do quỹ đạo có độ cong k = 0 tại mọi điểm, thành phần gia tốc pháp triệt tiêu
- Trong ***chuyển động tròn đều***, bán kính cong bằng R tại mọi điểm, thành phần gia tốc tiếp triệt tiêu
- Nghiên cứu vận tốc và gia tốc theo cách này trực quan hơn

Tiết thứ hai

Mặt trụ, Mặt tròn xoay,
Mặt bậc hai

1). Mặt trụ

2). Mặt tròn xoay (***Mục 18.5, trang 41***)

3). Mặt bậc hai (***Mục 18.6, trang 46***)

1).Phương trình đường trong (xy)

- Ta đã biết rằng: Trong mặt phẳng xy, một đường thường được biểu diễn bằng một ***phương trình F(x; y) = 0***, ví dụ:

$$F(x;y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

$$F(x;y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0;$$

$$F(x;y) = ax + by + c = 0...$$

Phương trình mặt trong không gian

- Trong không gian ba chiều xyz, một mặt thường được biểu diễn bằng một ***phương trình F(x; y; z) = 0***, ví dụ:

$$F(x;y;z) = ax + by + cz + d = 0;$$

$$F(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0;$$

$$F(x;y;z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

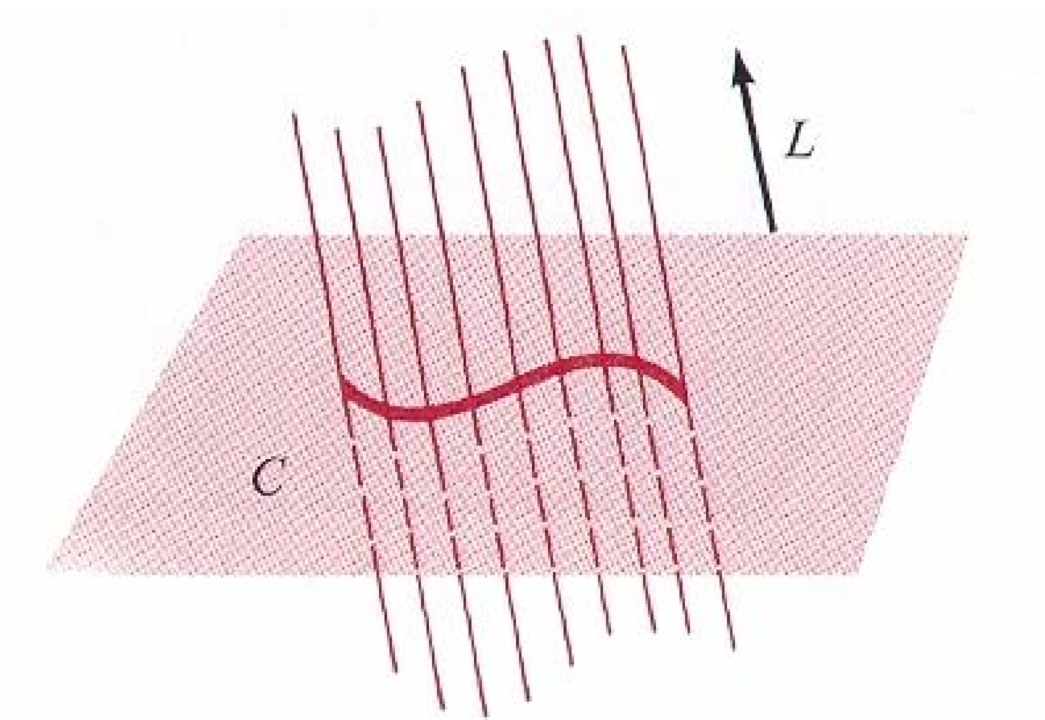
$$F(x;y;z) = x^2 + y^2 - 25 = 0; \ \ldots$$

Mặt trụ

- Là một mặt tạo bởi một đường thẳng di động, có *phương không đổi* và luôn tựa vào một đường cong phẳng cố định gọi là *đường chuẩn* (Đường thẳng di động không song song hoặc nằm trong mặt phẳng chứa đường chuẩn)
- Xem hình vẽ 18.25 trang 41 (SGK-Giải tích nhiều biến số)
- Mỗi vị trí của ĐT cho ta một *đường sinh*

Hình 18.25 trang 41

Mặt trụ tổng quát



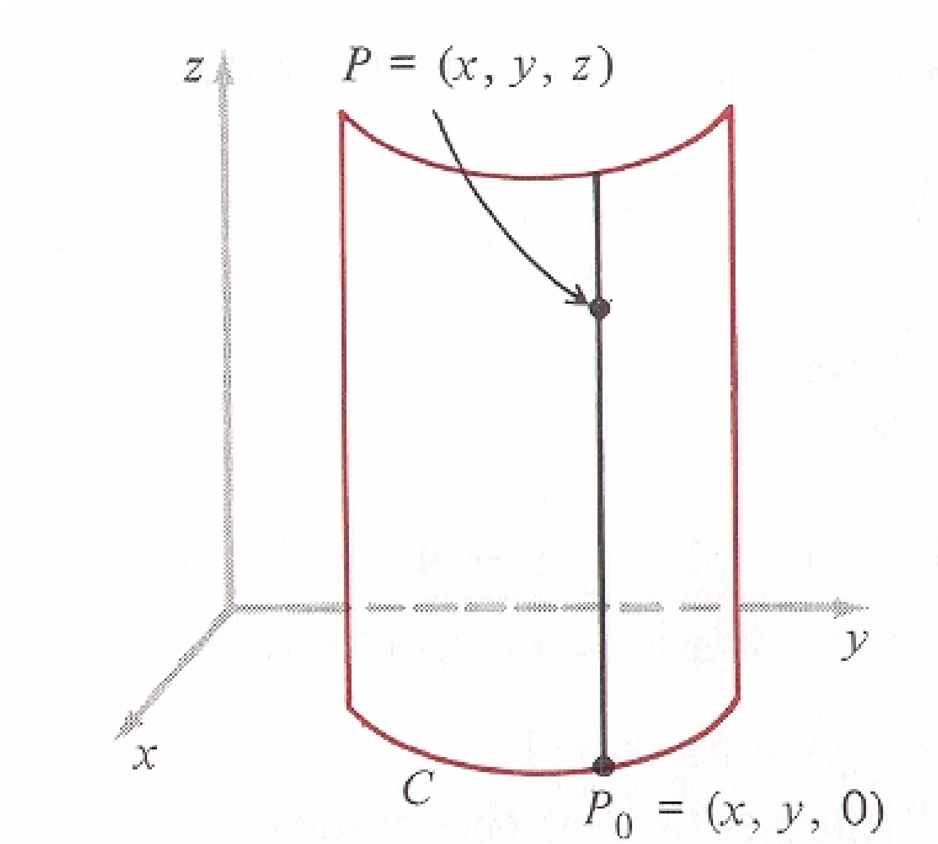
Các ví dụ về mặt trụ

- ***Mặt phẳng*** là một mặt trụ với đường chuẩn là một đường thẳng
- ***Mặt trụ tròn xoay*** có đường chuẩn là một đường tròn và đường sinh vuông góc với mặt phẳng chứa đường chuẩn
- ***Phương trình***:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

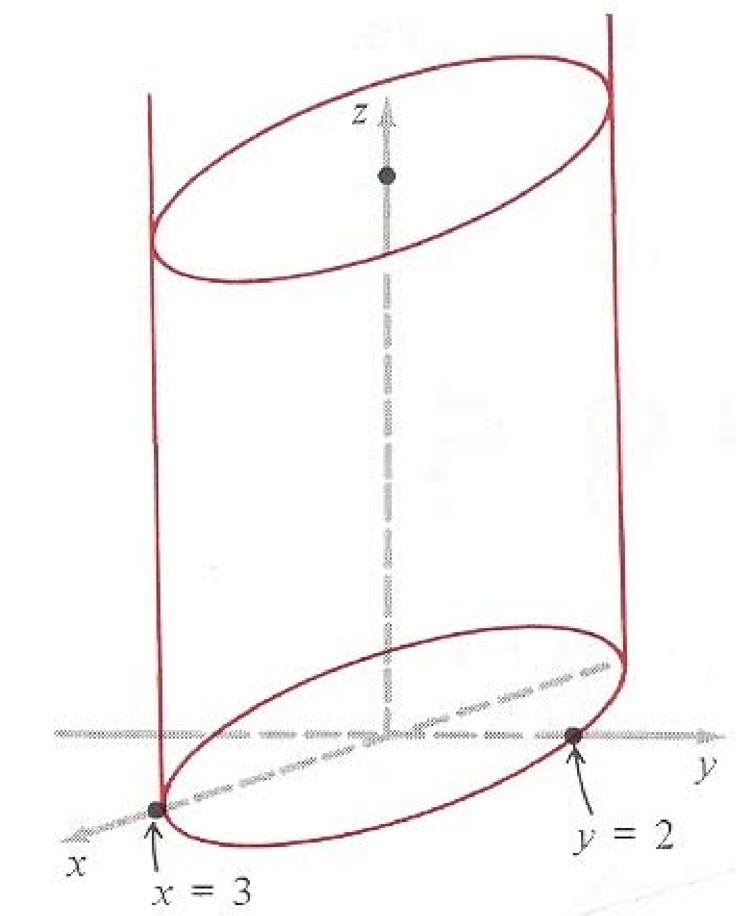
biểu diễn một mặt trụ tròn xoay. (Các bạn tự vẽ hình biểu diễn)

Hình 18.26- Mặt trụ trong không gian 3 chiều



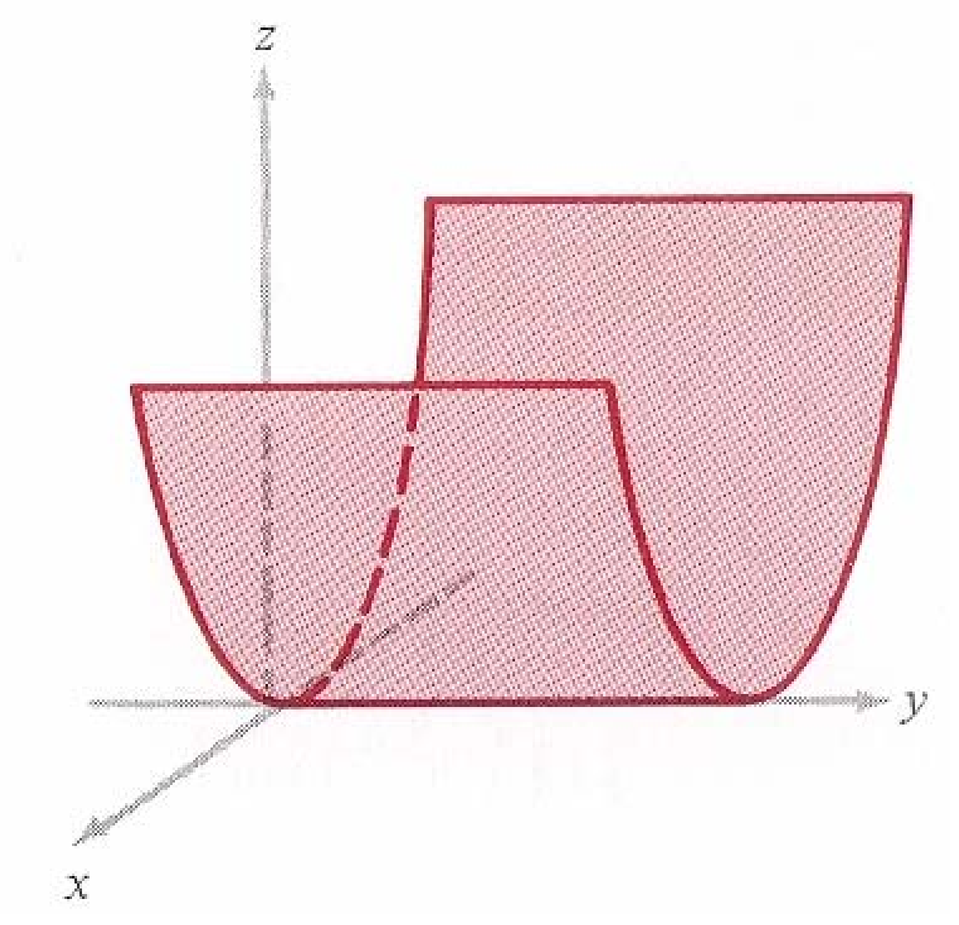
Hình 18.27-Mặt trụ elliptic (tr.42)

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$



Hình 18.28-Mặt trụ parabôlic (tr.43)

$$z = x^2$$



2). Mặt tròn xoay

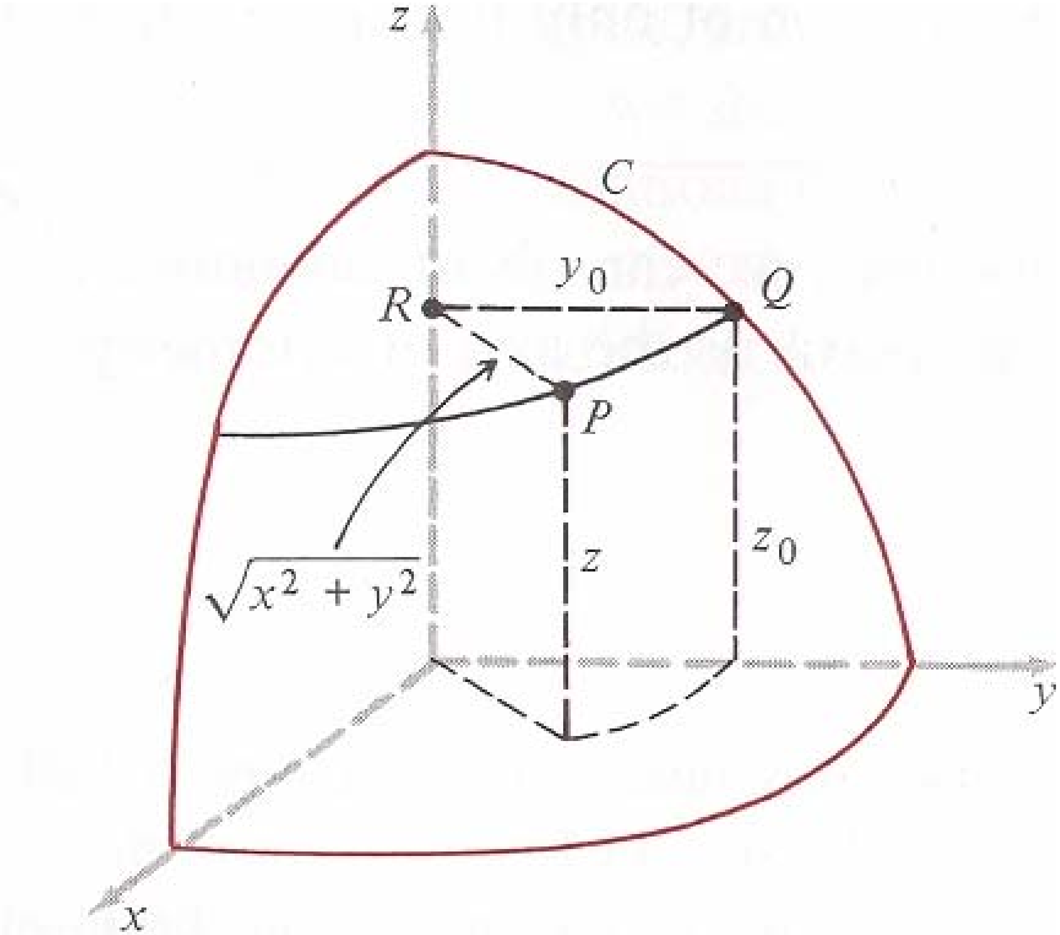
- Mặt tròn xoay là mặt sinh ra do một đường cong phẳng quay một vòng quanh một đường thẳng cố định nằm trong mặt phẳng chứa đường cong đó
- Mặt trụ tròn xoay, mặt cầu, mặt nón tròn xoay là các mặt tròn xoay quen thuộc mà ta đã gặp trong môn Hình học sơ cấp…

Cách thiết lập PTr. Mặt tròn xoay

- ***Ví dụ:*** Cho đường cong (C) $\subset$ (yz) có phương trình: f(y; z) = 0 quay một vòng quanh trục z
- Khi đó điểm Q(0, y_0, z_0)$\in$(C)(f(y_0,z_0)= 0) sẽ quay tròn quanh trục z và tạo thành các điểm P(x, y, z_0). Hình vẽ 18.29 trang 43 cho ta hệ thức:

$$y_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Hình vẽ 18.29 (tr.43)



Suy ra, phương trình mặt tròn xoay

sẽ là:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$$

- Có thể bỏ dấu căn nhờ các phép biến đổi tương đương
- ***Ví dụ 3:*** Viết phương trình mặt tròn xoay tạo bởi đường thẳng z = 3y trong (yz) quay một vòng quanh trục z? (Xem trang 44)

Hướng dẫn giải VD 3 (trang 44)

- Xuất phát từ f(y, z) = 3y – z = 0 là phương trình đường thẳng đã cho trong (yz)
- Lập luận như trên sẽ có phương trình mặt tròn xoay phải tìm:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = \pm 3\sqrt{x^2+y^2} - z = 0$$

- Tương đương với:

$$z^2 = 9(x^2+y^2)$$

3). Đường và Mặt bậc hai

- Tự đọc mục 15.6 để hiểu rõ thêm về *đường bậc hai*
- Trong (xy) phương trình

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

với các hệ số A,B,…,F cho trước (A, B, C không đồng thời triệt tiêu) biểu diễn một đường cônic (E,H,P) hoặc suy biến thành cặp đường thẳng, một điểm hay tập rỗng

Mặt bậc hai

- Trong KG ba chiều (xyz) phương trình

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 +$$
$$+ Dxy + Eyz + Fzx +$$
$$+ Gx + Hy + Iz + J = 0$$

với các hệ số A,B,…,J cho trước (A, B, C không đồng thời triệt tiêu) sẽ biểu diễn một mặt bậc hai hoặc một vài hình suy biến khác…

6 dạng mặt bậc hai hay gặp

Ngoài các mặt bậc hai như mặt trụ E, trụ H, trụ P… còn có:

1. Ellipsôit
2. Hypecbôlôit một tầng
3. Hypecbôlôit hai tầng
4. Mặt nón elliptic
5. Parabôlôit elliptic
6. Parabôlôit hypecbôlic (Xem trang 46)…

Nguyên tắc chung để vẽ MBH

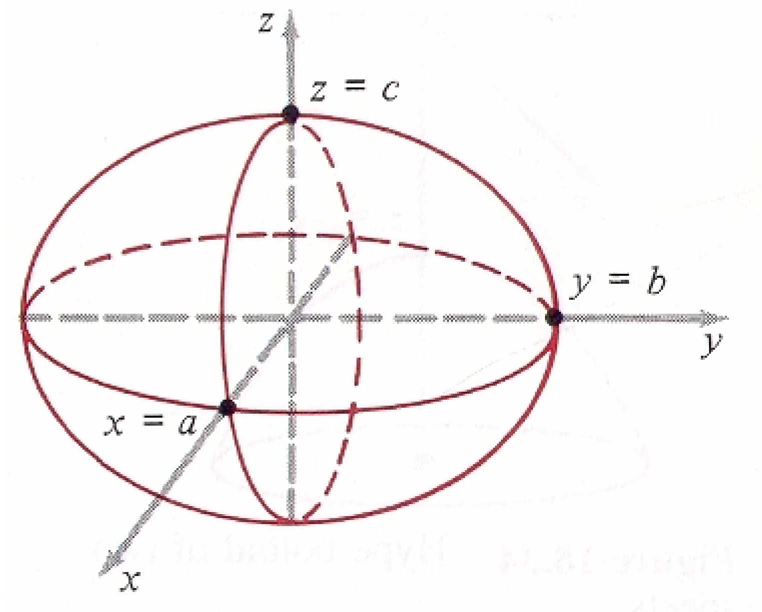
- Chú ý tính đối xứng qua tâm, qua trục, qua mặt phẳng (nếu có)
- Chú ý tới các điều kiện xác định cho x, y, z
- Giao tuyến của 6 loại MBH kể trên (nếu có) với các mặt phẳng song song với các mp tọa độ là các đường cônic, hãy xác định trước các giao tuyến này
- Nên xác định giao tuyến kín (E hay đường tròn) trước, giao tuyến không kín sau…

VD-1 trang 47 về mặt Ellipsoit

- Phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$(a,b,c>0)$$

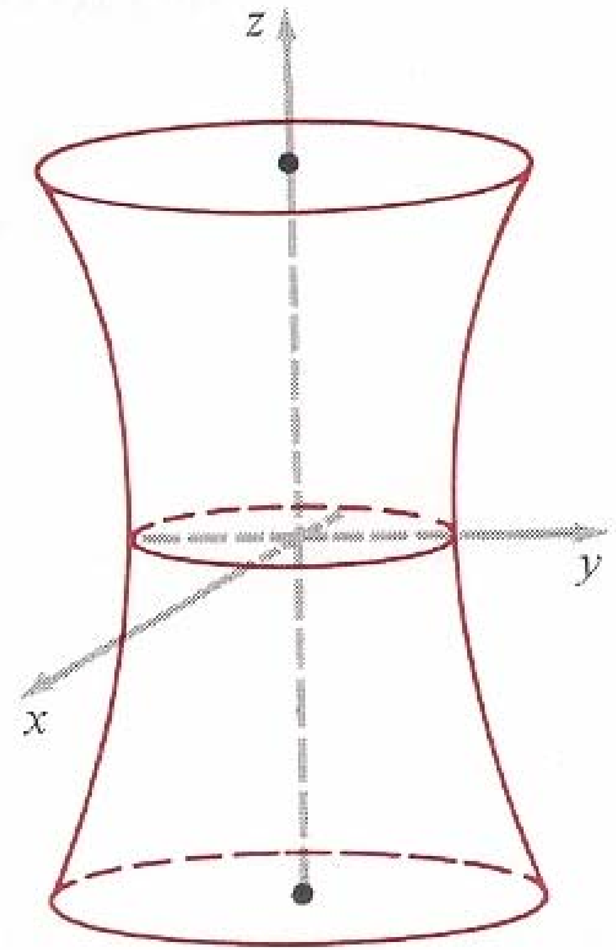


VD-2- Hypecboloit một tầng

- Phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$(a,b,c>0)$$

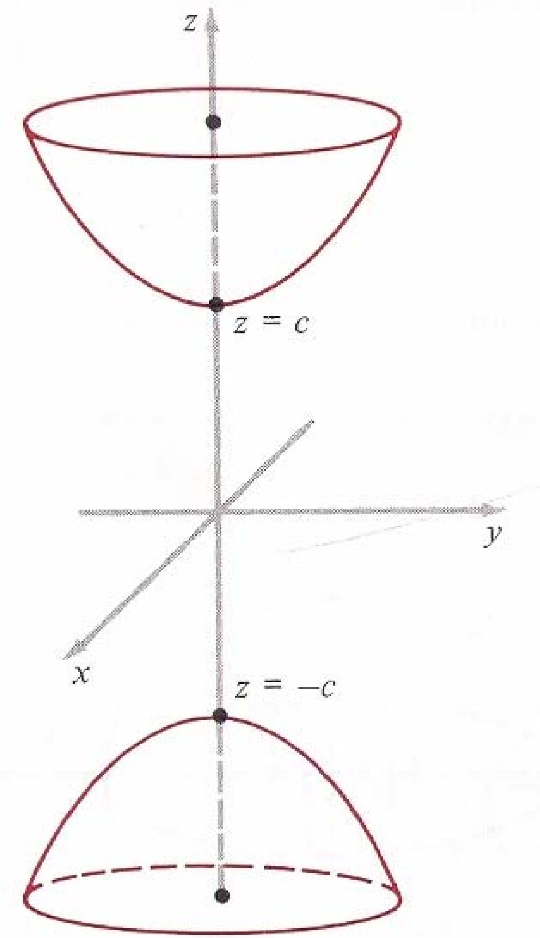


VD-3-tr.48- Hypecboloit hai tầng

- Phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$$(a,b,c>0)$$

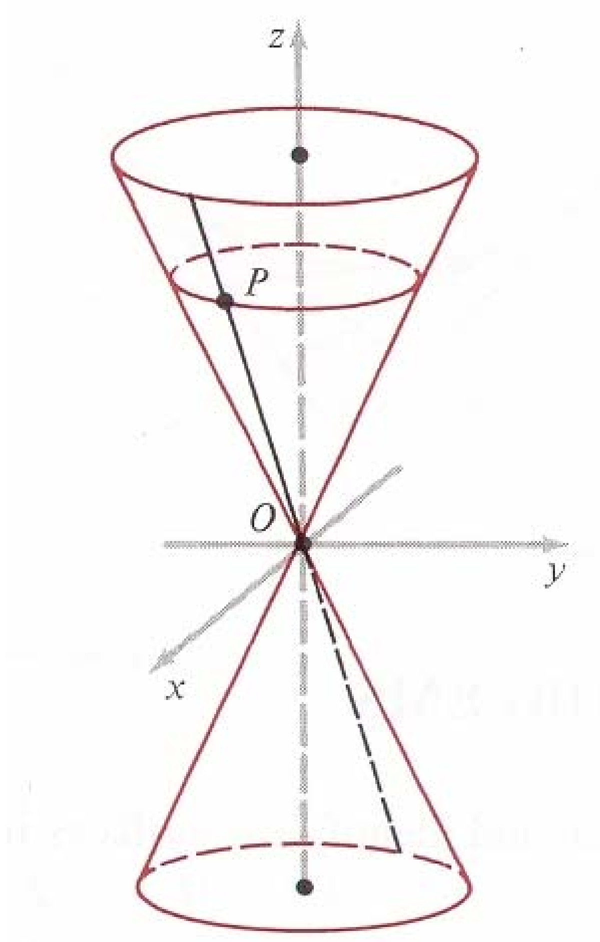


VD-4-tr.49- Mặt nón elliptic

- Phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$(a,b,c>0)$$

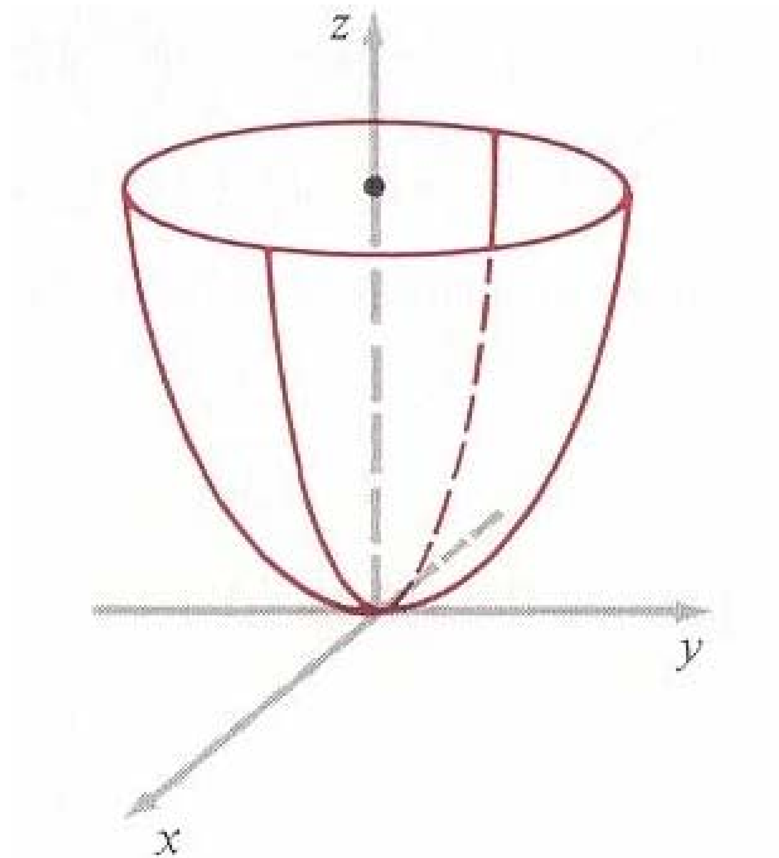


VD-5-tr.50- Mặt Parabôlôit elliptic

- Phương trình:

$$z = ax^2 + by^2$$

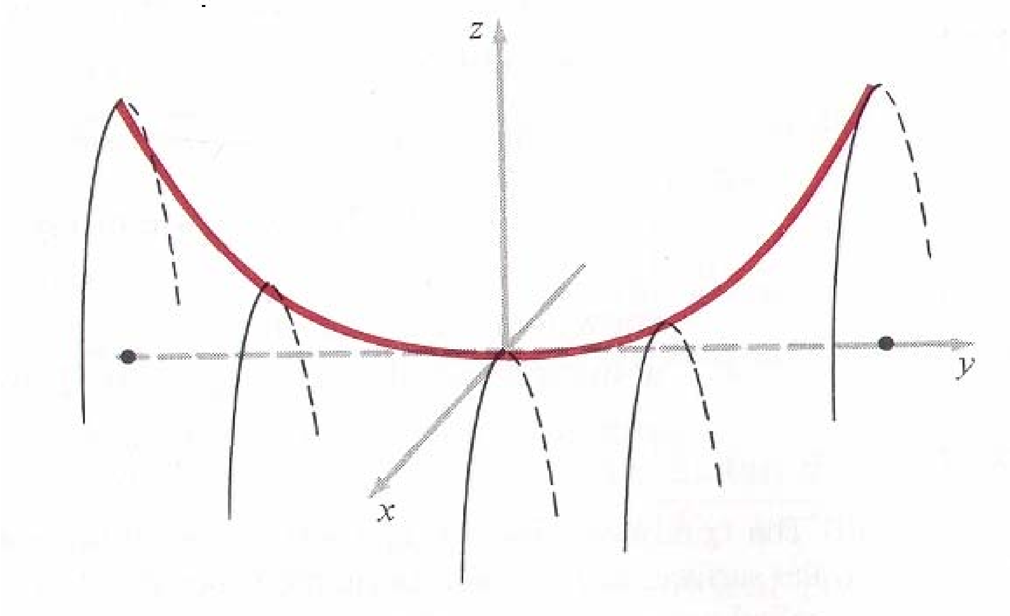
$$(a, b > 0)$$



VD-6- Mặt Parabôlôit hypecbolic

- Phương trình:

$$z = -ax^2 + by^2$$
$$(a, b > 0)$$



Ví dụ và Bài tập lẻ

- Nhớ đọc kỹ các ví dụ, tự làm các BT số lẻ (trước khi tham khảo phần *Hướng dẫn*) của các mục: 17-4; 17-6; 18-5; 18-6
- Nghiên cứu thêm về *mặt kẻ, mặt kẻ hai lần* trong các bài tập 23, 24, 25 trang 51

BG-2-TII-(Tuần thứ hai)

- *Hệ tọa độ trụ, Hệ tọa độ cầu (Mục 18-7)*
- *Chương 19- Các mục 19-1; 19-2; 19-4*

- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược các ý chính trong các mục sẽ học

- Hết BG-1-Toán II (Ngày 14/2/2008)

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 3-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương I- Không gian ba chiều và Hàm nhiều biến (tiếp)

Nội dung buổi thứ ba/sáu

- *Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (Mục 19.3)*
- *Bổ túc thêm về: Đạo hàm và vi phân hàm nhiều biến*

Tiết thứ nhất

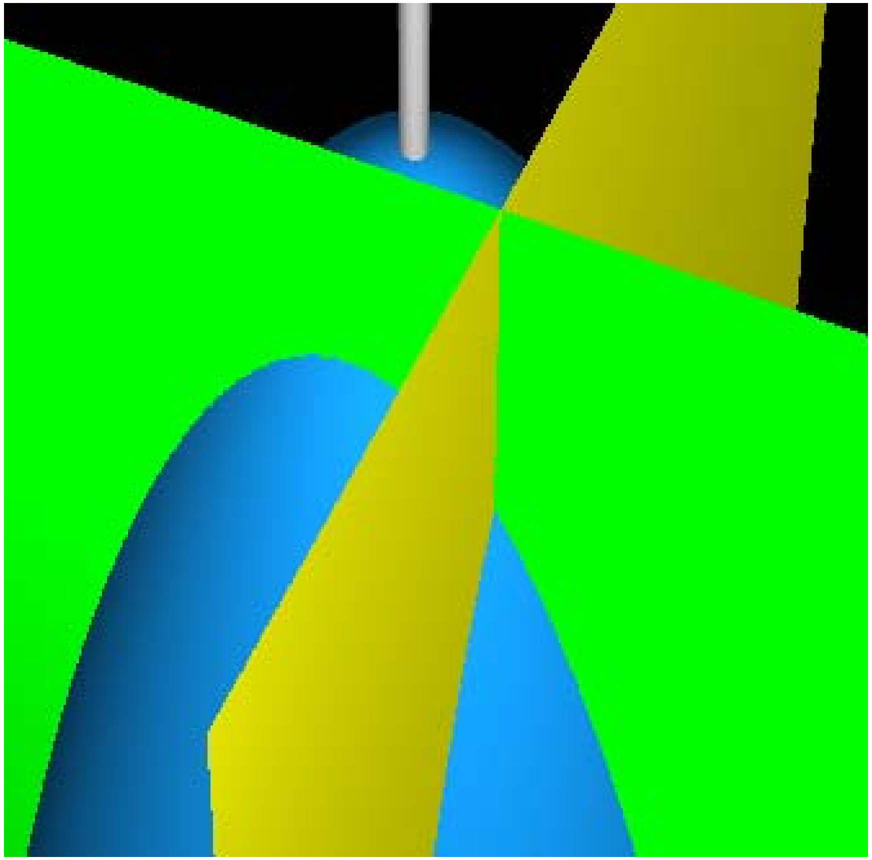
Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong (Mục 19.3)

1). Ví dụ mở đầu
2). Thiết lập phương trình tiếp diện (MPTX)
3). Các ví dụ

1). Ví dụ mở đầu

- Xét mặt cong $z = 4 - x^2 - y^2$ và hai mặt phẳng $x = 1$; $y = 1$
- Giao tuyến của mặt cong và hai mặt phẳng này là các đường parabôn cùng đi qua điểm $P_0(1,1,2)$
- Hai tiếp tuyến tại P_0 của hai đường parabôn nói trên nằm trong một *mặt phẳng tiếp xúc* với mặt cong tại P_0.

Hình vẽ minh họa



Nhận xét một cách trực quan

- Mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến nói trên sẽ chứa ***tất cả các tiếp tuyến khác*** (của các đường cong nằm trên mặt) tại (1,1,2)
- Mặt phẳng tiếp xúc ***khá gần với*** mặt cong tại điểm (1,1,2) (Tiếp diện)
- Mặt cong bất kỳ ***chưa chắc có tiếp diện tại mọi điểm*** (Tại mỗi điểm (khác đỉnh) trên mặt nón có một MPTX, chứa đường sinh qua điểm đó, nhưng tại đỉnh nón thì không có tiếp diện)

2).Thiết lập phương trình tiếp diện

- $z - 2 = A(x - 1) + B(y - 1)$
- Trên mặt phẳng $y = 1$, ta có:

  $z - 2 = A(x - 1)$ (PTr đường thẳng)
- Chứng tỏ A là hệ số góc của đường thẳng này $\rightarrow A = z_x(1,1,2) = -2$
- Tương tự, $B = z_y(1,1,2) = -2$

$$\rightarrow z - 2 = -2(x - 1) - 2(y - 1)$$

$$\leftrightarrow 2x + 2y + z - 6 = 0$$

Tổng quát

- Phương trình tiếp diện của mặt cong: $z = z(x, y)$ tại điểm $P_0(x_0 , y_0, z_0)$ là:

$$z - z_0 = z_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

3). Các ví dụ

- **Ví dụ 1.** Tìm mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong

$$z = f(x, y) = 2xy^3 - 5x^2$$

tại điểm (3, 2, 3).

- HD. Điểm đã cho có nằm trên mặt cong hay không?
- Tính f_x và f_y tại điểm này, sau đó thế vào phương trình tiếp diện

Ví dụ 2

- Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

tại điểm (1, 2, –3)

- HD. Điểm đã cho thuộc nửa cầu dưới, có phương trình là:

$$z = -\sqrt{14 - x^2 - y^2}$$

Tính các hệ số

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; f_x(1,2) = \frac{1}{3}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{14 - x^2 - y^2}}; f_y(1,2) = \frac{2}{3}$$

$$z + 3 = \frac{1}{3}(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 2)$$

Cách dùng ĐH hàm ẩn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \to$$

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \to \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

(tiếp tục)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \rightarrow$$

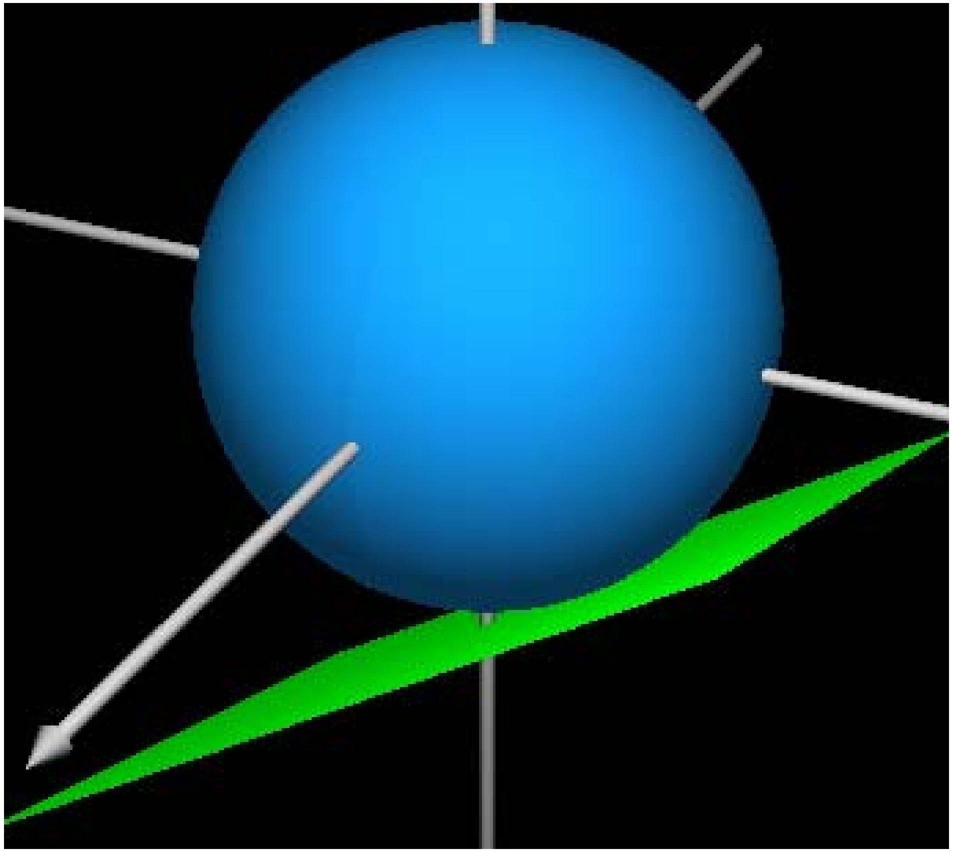
$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};$$

$$z_x = \frac{1}{3}; z_y = \frac{2}{3} \rightarrow PTrMPTX$$

Kết luận

- MPTX của nửa cầu dưới tại (1,2,-3) có phương trình: $x + 2y - 3z - 14 = 0$
- Các bạn có thể nhận được phương trình tiếp diện mặt cầu bằng phương pháp phân đôi tọa độ
- Hãy tự chứng minh công thức phân đôi tọa độ cho tiếp diện mặt cầu và mặt ellip-xôít

Hình vẽ minh họa



Ví dụ 3

- Viết phương trình tiếp diện của mặt nón $z^2 = a(x^2 + y^2)$ tại một điểm cho trước

  (x_0, y_0, z_0) (khác với đỉnh nón)

- Dùng hàm ẩn hoặc tính trực tiếp sẽ có: z_x và z_y tại điểm đã cho, thay vào PT sẽ có:

$$z - z_0 = a\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) + a\frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

(Biến đổi tiếp)

$$\leftrightarrow z_0(z - z_0) = ax_0(x - x_0) + ay_0(y - y_0)$$

$$\leftrightarrow z_0 z = a(x_0 x + y_0 y)$$

- ***Nhận xét***: Các MPTX đều có một điểm chung(?)
- Pháp tuyến của MPTX tại điểm (x_0, y_0, z_0) có phương trình tham số là:
  $x = x_0 + ax_0t$; $y = y_0 + ay_0t$; $z = z_0 - az_0t$

Làm các bài tập lẻ (Trang 74,75)

- Chú ý BT 18 chính là ví dụ 3 vừa được xét
- Hãy tự viết phương trình một mặt nón cụ thể và phương trình tiếp diện của nó tại một điểm. Viết phương trình tham số của pháp tuyến mặt nón tại điểm này
- Bài tập 17, 19, 20 cũng có dạng như BT 18

Tiết thứ hai

Đạo hàm và vi phân hàm nhiều biến
(Bổ sung các ví dụ)

1). Đường mức và Mặt mức
2).Tính giới hạn hàm 2,3 biến
3). Xét tính liên tục
4). Ứng dụng của đạo hàm riêng
5). Bổ đề cơ bản. Tính vi phân và ứng dụng

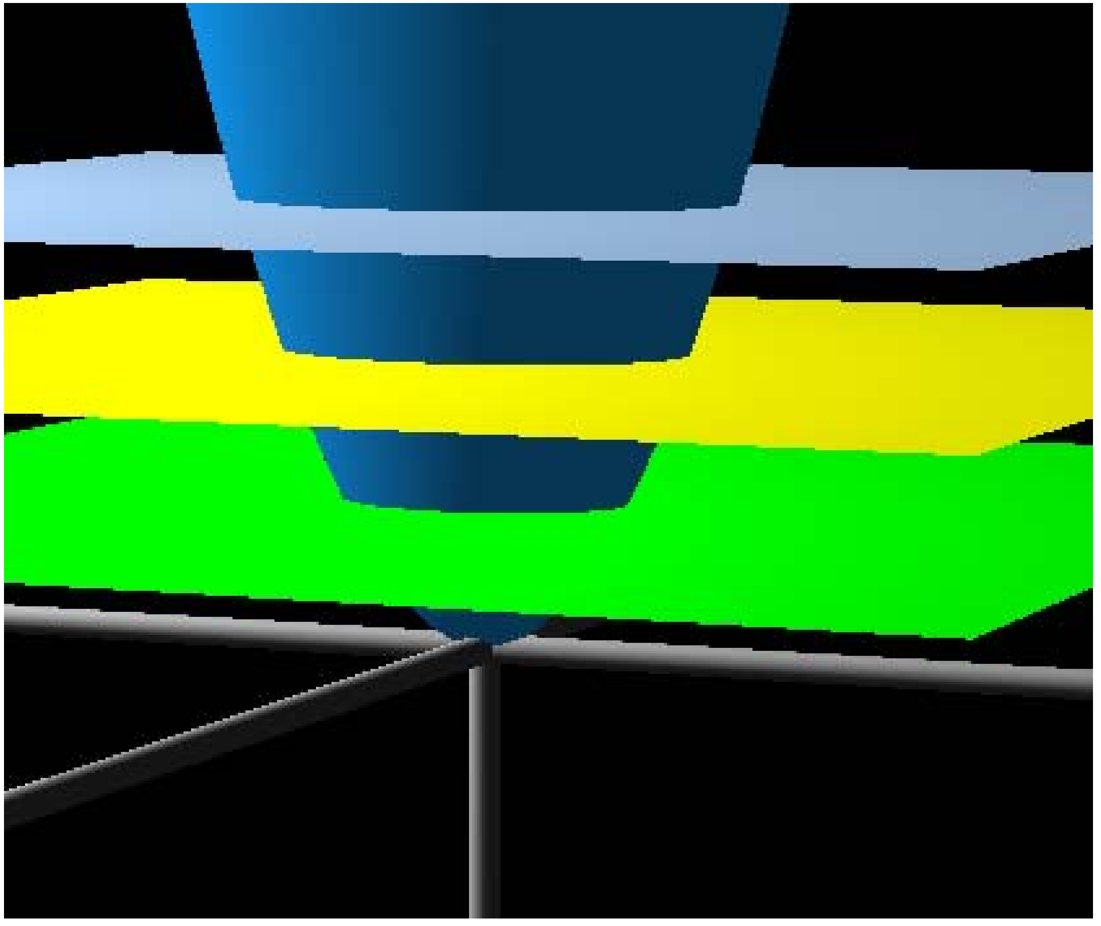
1). Đường mức và Mặt mức

- Biểu diễn hàm đã cho bằng một số đường mức (BT lẻ từ 15 đến 23, trang 62)
- BT 15. $z = x^2 + 2y^2$ (Parabôlôít Eliptic)

Các đường mức có phương trình:

$z = c \geq 0$; $x^2 + 2y^2 = c$. Đó là các ellip nằm trong các mặt phẳng nằm ngang có tâm đối xứng nằm trên trục z

Hình vẽ các đường mức



Mặt mức của hàm 3 biến

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ là tập hợp các điểm trong không gian thỏa mãn phương trình: $x^2 + y^2 - z^2 = c$
- Mặt mức *chứa (0,0,0) (c = 0) là mặt nón: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$*
- Mặt mức chứa *(0,a,a) (c = 0)* cũng là mặt nón: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- Mặt mức chứa *(a,a,a) (c = a^2)* là mặt:

  $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$.(Hypecboloit một tầng)

Mặt mức (tiếp)

- Mặt mức chứa (0,1,2) ($c = -3$) là mặt:

  $x^2+ y^2-z^2 = -3$.(Hypecboloit hai tầng)
- Ví dụ này cho ta thấy điều gì?
- *Giá trị c tại từng mặt mức sẽ tăng hay giảm theo quy luật nào?* Suy nghĩ về câu hỏi này từ các ví dụ đơn giản với hàm

  $u = ax + by + cz$ hoặc $u = x^2+ y^2+ z^2$ và sau này, ta sẽ có câu trả lời tổng quát

2). Giới hạn hàm hai biến

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = ?; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy + 9}} = ?;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = ?; \qquad \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2} = ?$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left[\ln(x^4 + y^2)\right] = ?$$

VD khác về giới hạn

- Chứng tỏ rằng có thể cho $(x, y) \to (0, 0)$ theo một cách nào đó để hàm $z = x/(y-x)$ tiến đến bất kì giá trị $k \neq 0$ nào cho trước
- Thực vậy, cho $y = mx$ với $m \neq 0$ và $m \neq 1$. Dễ thấy là hàm $z \to 1/(m-1)$, cho giá trị này bằng $k \neq 0$ ta sẽ tìm được m. Chẳng hạn nếu $k = 3$ thì $m = 4/3$;

  $k=2$ thì $m = 3/2$…

3). Xét tính liên tục

- Tìm ***tập các điểm gián đoạn*** của mỗi hàm 2 biến sau đây:

$$z = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y};$$

$$z = \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)}$$

Xét tính liên tục hàm 3 biến

- Tìm ***tập các điểm gián đoạn*** của mỗi hàm 3 biến sau đây:

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}; u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1};$$

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2 + 1}$$

4). Ứng dụng của ĐHR

- a) Măt cong: $z = x^2/(y^2-3)$ giao với mặt phẳng $x = 3$ theo một đường cong. Viết phương trình tiếp tuyến của giao tuyến này tại điểm có $y = 2$
- HD. Giao tuyến có phương trình:

  $z = 9/(y^2-3)$; $x = 3$.

  Hệ số góc $z_y = -18/(y^2-3)^2$; bằng (-18) tại $y = 2 \rightarrow z - 9 = -18(y - 2)$; $x = 3 \rightarrow \ldots$(?)

(tiếp)

- b) Chứng tỏ rằng mỗi hàm số u(x,t) sau đây: $u = (x + at)^3$; $u = (x - at)^5$;

  $u = \sin(x + at)^3$; $u = e^{x - at}$…thỏa mãn *phương trình truyền nhiệt*: $a^2 u_{xx} = u_{tt}$.
- HD. Tính các ĐHR rồi thay vào PT. Có thể mở rộng nghiệm phương trình cho các hàm số $u = u(x \pm at)$ với u là hàm bất kì có ĐHR cấp hai theo x và theo t hay không?

5).Tính vi phân toàn phần

- Cho $z = x^2 + 3xy - y^2$.Tính dz tại điểm (2, 3) với $\Delta x = 0,05$; $\Delta y = -0,04$. So sánh dz và Δz
- $dz = (2x+3y)\,\Delta x + (3x - 2y)\,\Delta y$

  Tại (2,3) dz = 0,65
- $\Delta z = z(2,05;\ 2,96) - z(2,\ 3) = 0,6449$
- Vậy $dz \approx \Delta z$ nhưng tính dz dễ hơn

Công thức gần đúng

- $z(x+\Delta x; y + \Delta y) \approx z(x; y) + dz$
- Áp dụng để tính gần đúng:

$$A = \sqrt{9.(1,95)^2 + (8,1)^2};$$

$$B = \sin 89^0 + \cos 61^0$$

HD tính gần đúng A

- Chọn hàm hai biến z(x, y)

$$z = \sqrt{9.x^2 + y^2}$$

- Chọn điểm x = 2; y = 8 $\rightarrow$ Δx và Δy
- Tính vi phân dz tại (x, y)
- Tính giá trị xấp xỉ của z(2-0,5; 8+0,1)
- Các bạn tự tính và so sánh với cách tính khác…

HD tính gần đúng B

- Chọn hàm hai biến $z(x, y) = \sin x + \cos y$
- Chọn điểm $x = \pi/2$; $y = \pi/3 \rightarrow \Delta x$ và Δy
- Tính vi phân dz tại (x, y)
- Tính giá trị xấp xỉ của $z(x+\Delta x, y+\Delta y)$
- Các bạn tự tính và so sánh với cách tính khác…

Nội dung BG-4-TII-(Tuần thứ tư)

- *Trường vô hướng, Đạo hàm theo hướng, Véc tơ gradien (Mục 19.5)*
- *Quy tắc dây chuyền, Đạo hàm dưới dấu tích phân (Mục 19.6)*

- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược các ý chính trong các mục sẽ học

- Hết BG-3-Toán II (Ngày 6/3/2008)

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 5-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương I- Không gian ba chiều và Hàm nhiều biến (tiếp)

Nội dung buổi thứ năm/sáu

- *Cực trị (Cực đại và Cực tiểu) của hàm nhiều biến (Mục 19.7)*
- *Cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến. Phương pháp Nhân tử Lagrange (Mục19.8)*

Tiết thứ nhất

- *Cực trị tự do của hàm nhiều biến (Cực đại, cực tiểu, GTLN. GTBN) (Mục 19.7)*

1). Các định nghĩa về cực trị
2). Điều kiện cần và Điều kiện đủ của cực trị
3). Các ví dụ

1). Cực trị của hàm f(x, y)

- ***Cực tiểu (tương đối)***
- ***$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ $\forall(x,y)$ thuộc lân cận điểm***

(x_0, y_0) (Điểm trong TXĐ)

- ***$f(x, y) = f(x_0, y_0) \leftrightarrow$***

$$(x, y) \equiv (x_0, y_0)$$

- ***Tại các điểm khác trong lân cận thì:***

$$f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

- ***$f(x_0, y_0) = f_{CT}$ (GTCT)***

- ***Cực đại (tương đối)***
- ***$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $\forall(x,y)$ thuộc lân cận điểm***

(x_0, y_0) (Điểm trong TXĐ)

- ***$f(x, y) = f(x_0, y_0) \leftrightarrow$***

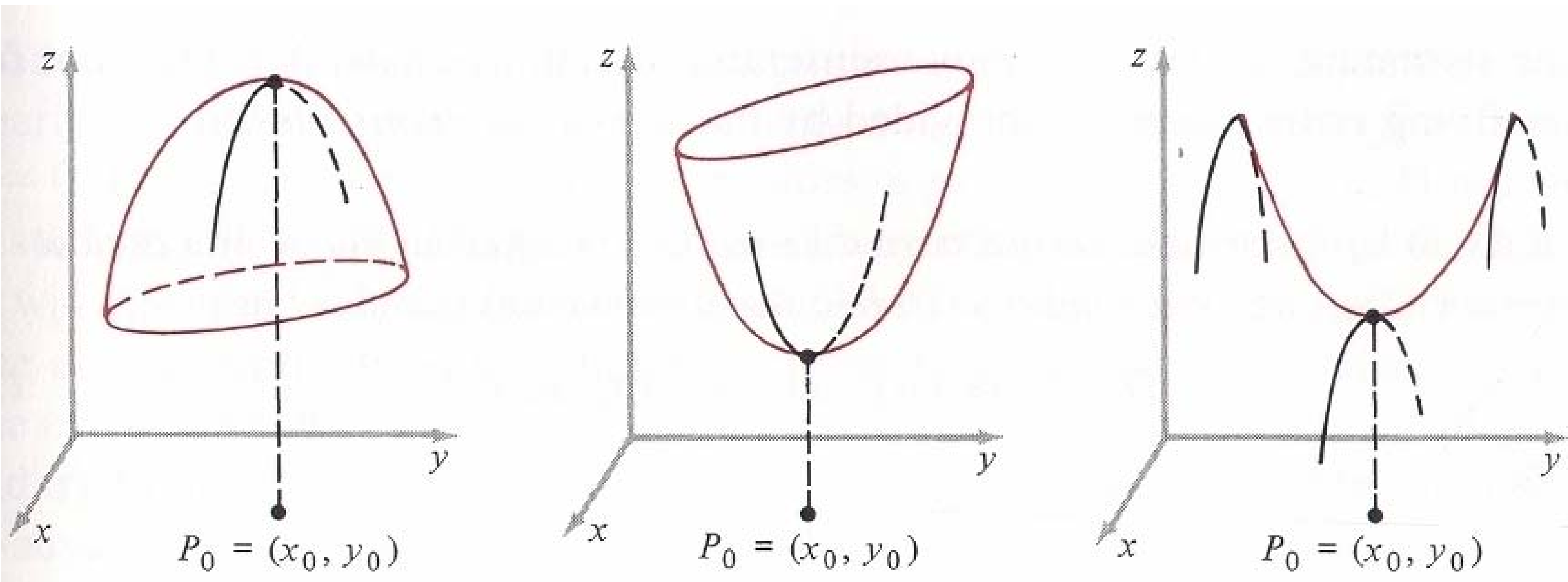
$$(x, y) \equiv (x_0, y_0)$$

- ***Tại các điểm khác trong lân cận thì:***

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

- ***$f(x_0, y_0) = f_{CĐ}$ (GTCĐ)***

Hình 19.13 (trang 92)



Giá trị bé nhất, Giá trị lớn nhất

- ***Cực tiểu (tuyệt đối)***
- ***$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ $\forall(x,y)$ thuộc miền được xét***
- ***$f(x, y) = f(x_0, y_0)$ xẩy ra tại ít nhất một điểm***
- ***Điểm cực tiểu tuyệt đối không nhất thiết phải là điểm trong của TXĐ.***
- ***ĐCTTĐ có thể là điểm biên, có thể tạo nên một miền liên tục***
- ***$f(x_0, y_0) = f_{BN}$ (GTBN)***

- ***Cực đại (tuyệt đối)***
- ***$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $\forall(x,y)$ thuộc miền được xét***
- ***$f(x, y) = f(x_0, y_0)$ xẩy ra tại ít nhất một điểm***
- ***Điểm cực đại tuyệt đối không nhất thiết phải là điểm trong của TXĐ***
- ***ĐCĐTĐ có thể là điểm biên, có thể tạo nên một miền liên tục***
- ***$f(x_0, y_0) = f_{LN}$ (GTLN)***

2).Điều kiện cần của cực trị

- Nhớ lại định lý Phéc ma về ĐK cần của cực trị ***hàm một biến***: $y = f(x)$
- Nếu hàm $y = f(x)$ đạt ***cực trị*** tại $x = x_0$ và ***có đạo hàm*** $f'(x_0)$ tại điểm này thì $f'(x_0) = 0$
- ***Ý nghĩa hình học***: Tiếp tuyến của ĐTHS tại điểm cực trị nằm ngang (song song hoặc trùng với trục hoành)

Với hàm 2 biến: f(x, y)

- Nếu hàm z = f(x; y) đạt cực đại hoặc cực tiểu tại (x_0, y_0) và có các ĐHR: f_x và f_y tại điểm này, thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} = 0; \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0, y_0)} = 0$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) = \vec{0}$$

Suy ra

- Cực trị của hàm hai biến (nếu có) chỉ có thể đạt tại các ***điểm tới hạn*** của nó
- Điểm tới hạn bao gồm các ***điểm dừng*** (Tại đó các ĐHR triệt tiêu) và các điểm tại đó có ít nhất một ĐHR không xác định
- Trong giáo trình này, ta chỉ xét các điểm tới hạn là điểm dừng

Quy tắc tìm Điểm dừng

- Điểm dừng (x_0, y_0) của hàm $f(x, y)$ có tọa độ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \end{cases}$$

Điều kiện đủ của cực trị

- Với hàm một biến y = f(x), ĐK: $f'(x_0) = 0$ chưa đủ để kết luận là hàm có cực trị tại x_0. ĐK đủ để hàm y = f(x) có cực trị là gì?
- *Quy tắc I.* $f'(x_0) = 0$ và f'(x) đổi dấu qua x_0. Khi nào có CT? (CĐ)?
- ***Quy tắc II.*** $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ ($f''(x_0) > 0$ thì x_0 là ĐCT tương đối; $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là ĐCĐ tương đối

Với hàm hai biến f(x, y)

- Có các ĐHR liên tục đến cấp 2 trong một lân cận điểm dừng (x_0, y_0)
- Tính $A = f_{xx}$; $B = f_{xy}$; $C = f_{yy}$ tại điểm này
- Tính ***biệt số*** $D = AC – B^2 = f_{xx}. f_{yy} - f_{xy}^2$;
- Các trường hợp xẩy ra như sau:

I. D>0 và A>0$\leftrightarrow$ ĐTH là ***điểm cực tiểu***

II. D>0 và A<0$\leftrightarrow$ ĐTH là ***điểm cực đại***

III. D<0 $\leftrightarrow$ ĐTH là ***điểm yên ngựa***, tại đó không có cực trị

IV. D = 0 $\leftrightarrow$***Nghi vấn(?). Phải dùng cách khác***

3).Ví dụ1, trang 92

- Tìm các kích thước của một hình hộp chữ nhật, có thể tích V= 4 cho trước sao cho tổng diện tích xung quanh và một đáy của nó đạt giá trị bé nhất?
- ***HD.*** Gọi ba kích thước của hộp là x, y, z (z là chiều cao; x,y,z đều dương).
- Ta có: diện tích

$$S = xy+2yz+2xz \to \text{GTBN}$$

- Do $xyz = 4$ nên $S = xy + 8/x + 8/y$

Ví dụ 1 (tiếp) (trang 93)

- Giải hệ $S_x = 0$; $S_y = 0$ sẽ có $x = y = 2$; $z = 1$. Ta có một điểm dừng (2, 2, 1)
- Xét điều kiện đủ: D>0; A>0 có ĐCT
- ***Chú ý:*** Khi có ***duy nhất một cực trị***, cực trị này sẽ vừa là tương đối, vừa là tuyệt đối
- ***KL:*** Hộp có đáy là hình vuông, cạnh bằng 2, chiều cao hộp là 1(ĐVĐD) thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ví dụ 2 (trang 93)

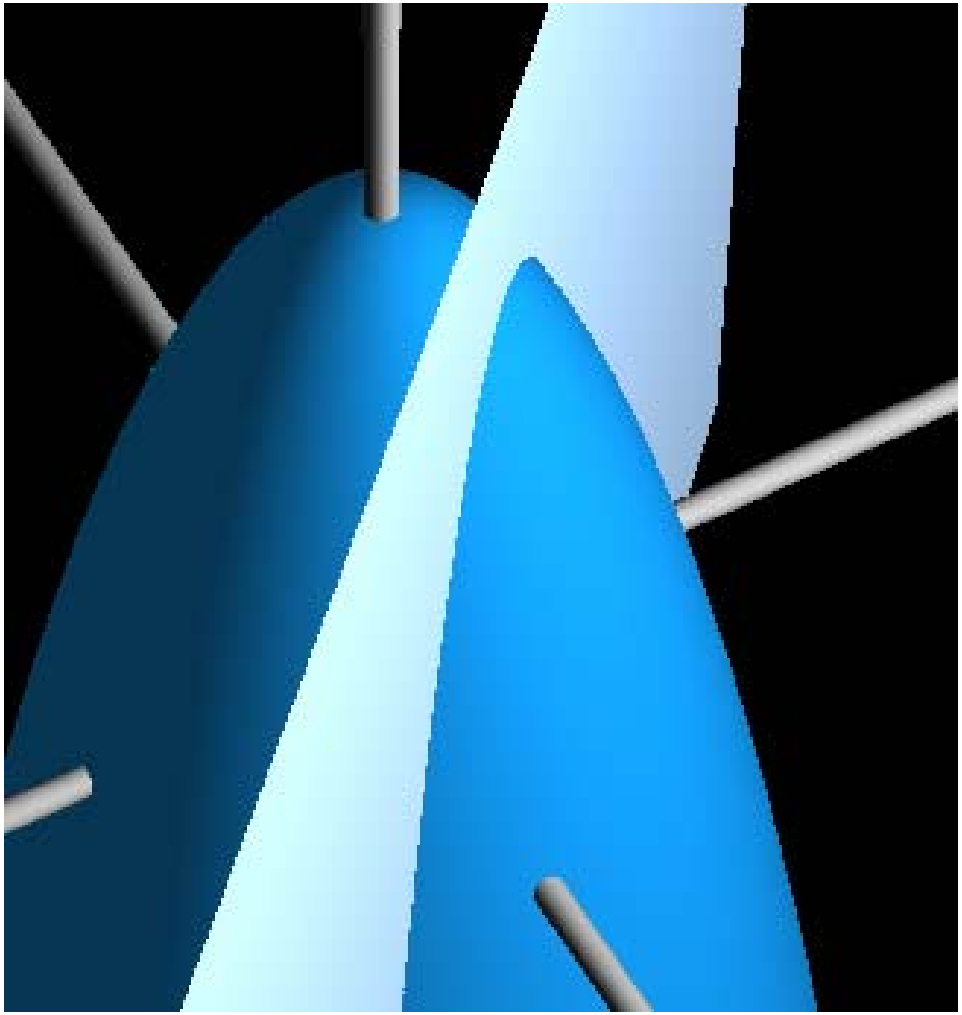
- Tìm và phân loại các điểm tới hạn của hàm $z = 3x^2+2xy+y^2+10x+2y+1$
- ***HD.*** Tìm TXĐ và các ĐHR: z_x, z_y.
- Tìm được một điểm tới hạn (cũng là điểm dừng): (2, 1)
- Tính các ĐHR cấp 2: A = 6; B = 2; C = 2 $\rightarrow$ D = AC – B^2 = 8>0; A(C)>0 $\rightarrow$ Hàm có cực tiểu (cũng là GTBN): z(-2,1)= - 6

Tiết thứ hai

- *Cực trị có điều kiện và Phương pháp nhân tử Lagrange (Mục 19.8)*

1). Bài toán tìm Cực trị có điều kiện
2). Phương pháp nhân tử Lagrange
3). Các ví dụ và bài tập

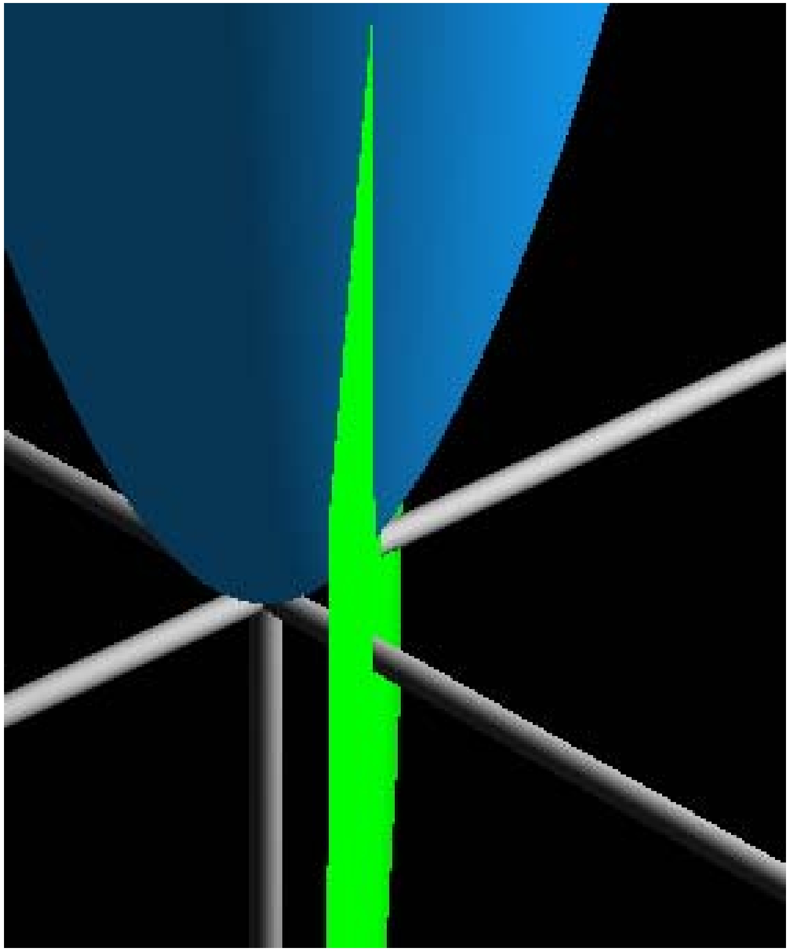
Hình vẽ minh họa



1). Bài toán tìm cực trị có ĐK

- Tìm cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$ thỏa mãn điều kiện $g(x, y) = 0$
- ***Ví dụ.*** $z = x^2 + y^2$ (a) với ĐK: $x+y = 1$ (b)
- Nhận thấy (a) biểu diễn một mặt tròn xoay còn (b) biểu diễn một mặt phẳng song song với trục z
- Hai mặt này cắt nhau theo một đường cong→(Có thể dùng (b)để đưa z về 1 biến)

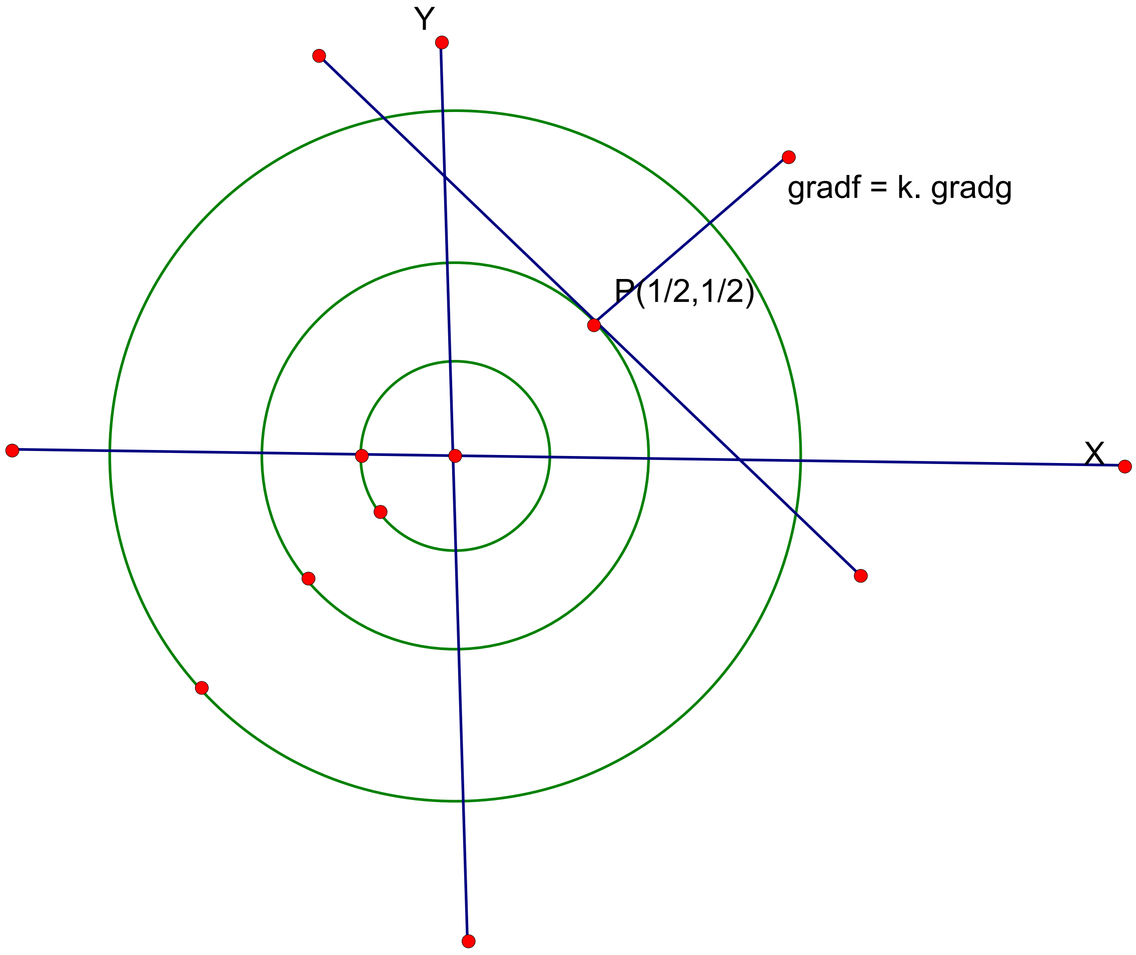
Hình vẽ minh họa có z_{BN}



Với bài toán trên

- Trong (xy), xét các đường mức: $x^2 + y^2 = c = r^2$ là các đường tròn có bán kính r tăng dần từ 0 đến $+\infty$ và đường thẳng (b)
- Nhận thấy khi $r = \sqrt{2}/2$, đường mức tiếp xúc với đường thẳng: $x + y = 1$
- Tại tiếp điểm (1/2, 1/2), hai pháp tuyến của đường mức và của đường thẳng ***cùng phương (vt gradf = λgradg)***

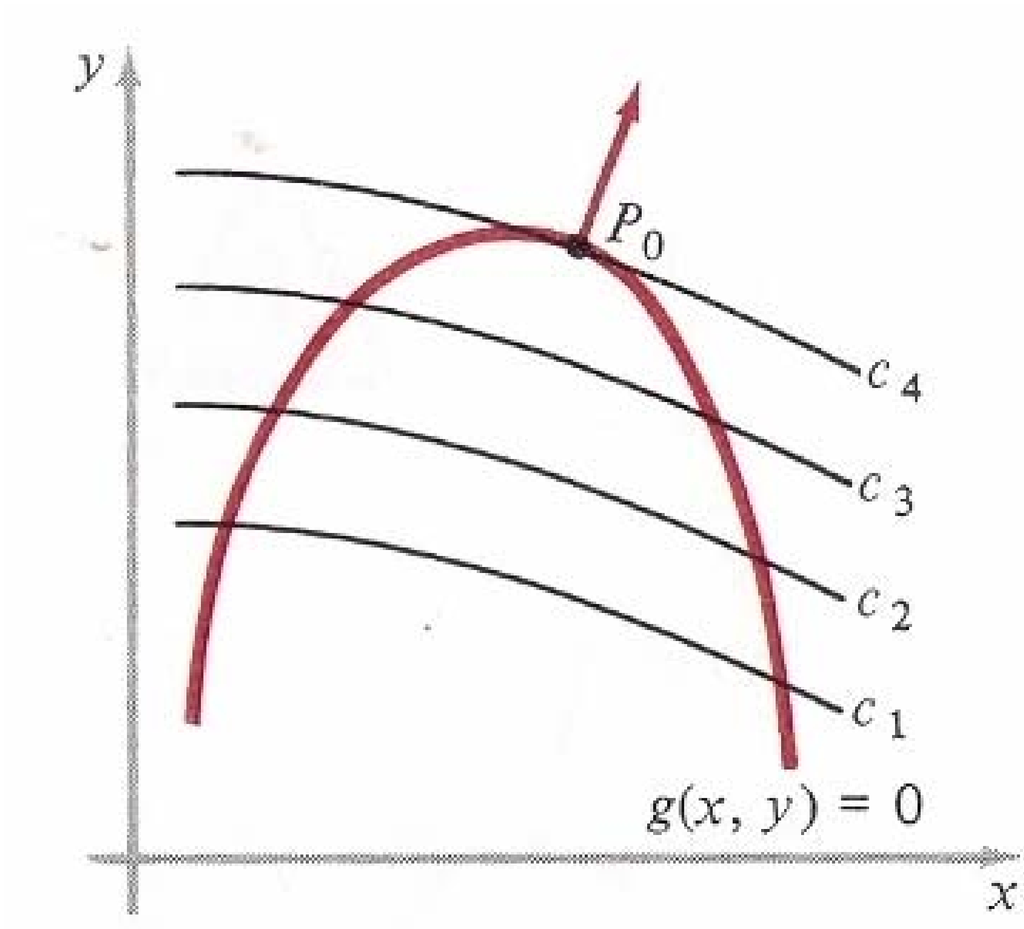
Hình vẽ chứng tỏ: $z_{BN} = z(P) = 1/2$



Tổng quát hơn

- ĐK g(x, y) = 0 được minh họa bởi một đường cong trong (xy)
- z = f(x, y) biểu diễn một mặt cong trong không gian với các đường mức trong (xy) được vẽ trên hình 19.16 trang 98
- (Trên hình có 4 đường mức ứng với các giá trị c_i tăng dần)$\rightarrow$f(x,y) đạt max tại đâu?

Hình 19.16 trg 98 chỉ rõ ĐCĐ P_0



Để tìm điểm P_0, ta có hệ

$$\overrightarrow{grad}\, f = \lambda \overrightarrow{grad}\, g \leftrightarrow \overrightarrow{grad}(f - \lambda g) = \vec{0}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0; \quad (L = f - \lambda g) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -g(x, y) = 0 \end{cases}$$

2). Phương pháp Nhân tử Lagrange

- Thiết lập Hàm Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

- Giải hệ phương trình (L) để tìm các điểm dừng của hàm Lagrange (Trong hệ này ta đã coi $g(x, y) = -\partial L/\partial\lambda$ và xét BT ***cực trị tự do*** của ***hàm ba biến***)
- Kết luận về cực trị có điều kiện(tương đối hoặc tuyệt đối)

Tương tự cho hàm ba biến

- f(x, y, z) với ***một điều kiện*** g(x, y, z) =0
- Thiết lập Hàm Lagrange:

  $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$
- Giải hệ 4 phương trình (L) để tìm các điểm dừng của hàm Lagrange
- Kết luận về cực trị có điều kiện(tương đối hoặc tuyệt đối)

Cụ thể là phải giải hệ

$$\overrightarrow{grad}\, f = \lambda \overrightarrow{grad}\, g \leftrightarrow \overrightarrow{grad}(f - \lambda g) = \vec{0}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -g(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (L = f - \lambda g)$$

Khi có hai điều kiện

$$g(x, y, z) = 0 \text{ và } h(x, y, z) = 0$$

- Thiết lập Hàm (L) với ***hai nhân tử:***

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$$

- Giải hệ 5 phương trình (L) để tìm các điểm dừng của hàm Lagrange
- Kết luận về cực trị có điều kiện(tương đối hoặc tuyệt đối)

Cụ thể là phải giải hệ

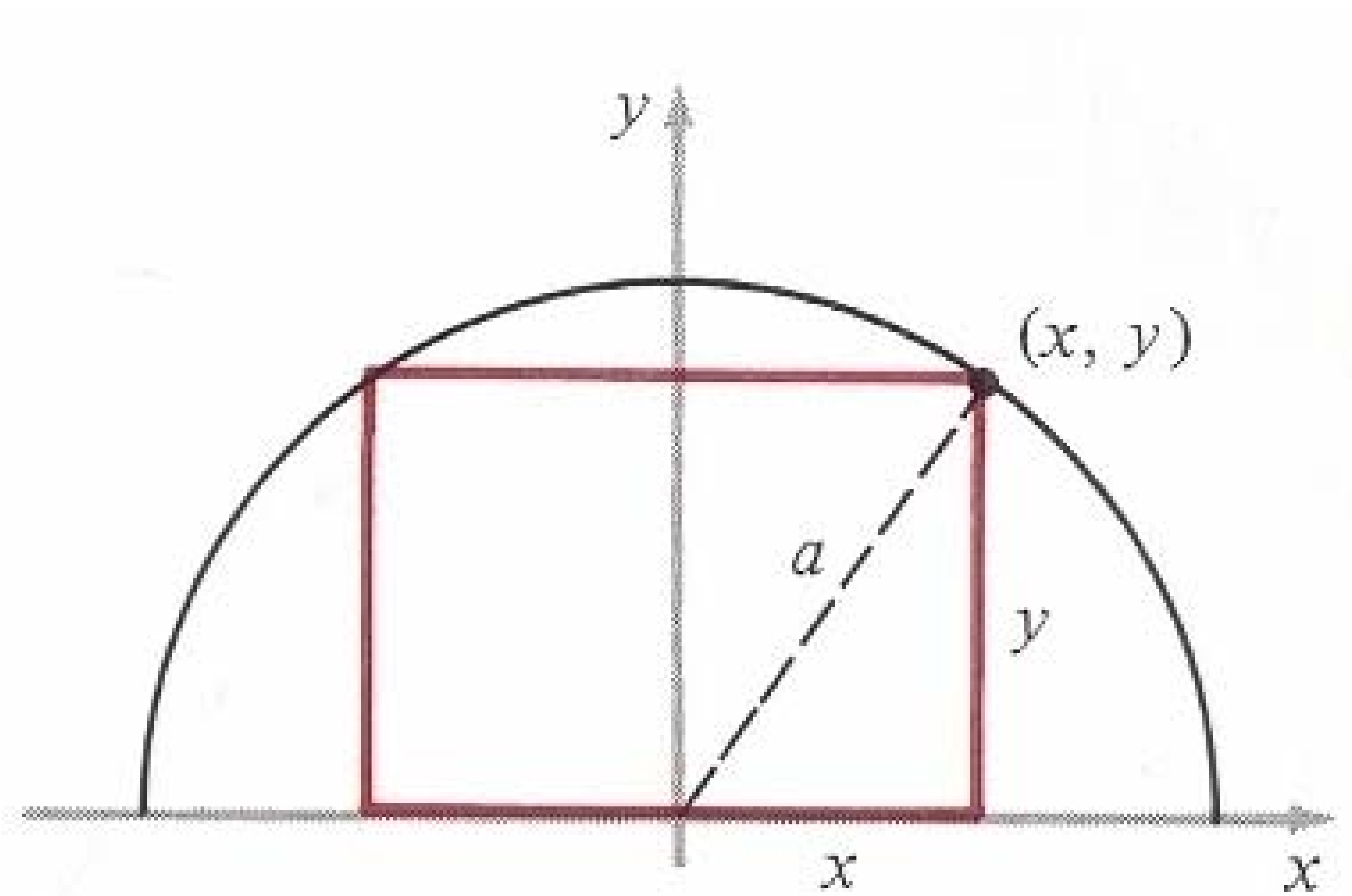
$$\overrightarrow{grad} f = \lambda \overrightarrow{grad} g + \mu \overrightarrow{grad} h \leftrightarrow \overrightarrow{grad}(f - \lambda g - \mu h) = \vec{0}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} - \mu \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} - \mu \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} - \mu \dfrac{\partial h}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -g(x,y,z) = 0; \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = -h(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad (L = f - \lambda g)$$

3). Các ví dụ

- Tìm kích thước của một hình chữ nhật, nội tiếp trong nửa hình tròn, bán kính a sao cho diện tích của nó lớn nhất
- (Đã giải bài này trong phần Toán I…)
- ***HD.*** Yêu cầu bài toán dẫn đến tìm x, y dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = a^2$ sao cho hàm $A = 2xy$ đạt GTLN
- Khi đó: Hàm $L = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - a^2)$

Hình 19.15 (trang 97)



Hướng dẫn giải Ví dụ 1(tiếp)

- Hàm Lagrange: $L = 2xy - \lambda(x^2 + y^2 – a^2)$
- Viết hệ 3 phương trình (L)
- Từ hai phương trình đầu, rút ra: $y = \lambda x$ và $x = \lambda y$.
- Thế vào phương trình thứ ba, sẽ có:

$$\lambda(x^2 + y^2)=a^2 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

- Với $\lambda = -1$, ta có $y = -x$ (loại do x, y đều dương). Với $\lambda=1 \rightarrow x = y = a\sqrt{2}/2 \rightarrow$KL

Ví dụ 2 (trang 101)

- Tìm điểm P nằm trên mặt phẳng: x + 2y + 3z = 6 sao cho khoảng cách P tới gốc tọa độ đạt GTBN
- HD. $L = x^2+y^2+z^2 - \lambda(x + 2y + 3z - 6)$
- Các bạn tự viết hệ 4 phương trình (L)
- Giải được: $\lambda = 6/7 \rightarrow P(3/7, 6/7, 9/7)$
- (Vì sao biết khoảng cách OP là cực tiểu và cũng là GTBN ?)

Ví dụ 3 (trang 101)

- Tìm điểm P nằm trên giao tuyến hai mặt phẳng: $x+y+z=1$; $3x + 2y + z = 6$ sao cho khoảng cách từ P tới gốc tọa độ đạt GTBN
- HD. $L = x^2+y^2+z^2 - \lambda(x + y + z - 1)$

  $-\mu(3x + 2y + z - 6)$
- Các bạn tự viết hệ 5 phương trình (L)
- Giải được: $\mu = 4$; $\lambda = -22/3$

  $\rightarrow P(7/3, 1/3, -5/3)$

Nội dung BG-6-TII-(Tuần thứ sáu)

- *Phương trình Laplace, Phương trình truyền nhiệt, Phương trình truyền sóng (Mục 19.8)*
- *Hàm ẩn và đạo hàm hàm ẩn (Mục 19.9)*
- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược những ý chính trong các mục sẽ học

- Hết BG-5-Toán II (Ngày 21/3/2008)

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 6-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương I- Không gian ba chiều và Hàm nhiều biến (tiếp)

Nội dung buổi thứ sáu/sáu

- *Phương trình Laplace, Phương trình truyền nhiệt, Phương trình truyền sóng (Mục 19.8)*
- *Hàm ẩn và Đạo hàm hàm ẩn (Mục 19.9)*

Tiết thứ nhất

- *Phương trình Laplace, Phương trình truyền nhiệt, Phương trình truyền sóng (Mục 19.8)*

1). Về ba phương trình nêu trên
2). Ví dụ và Bài tập

Phương trình Đạo hàm riêng

- ***Phương trình vi phân thường***
- $F(x, y(x), y'(x), \ldots$

  $\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$
- ***Ví dụ***

  $2xy + y'' = 6x$

  $(3xy - 4)dx + (x^2 - y^2)dy = 0 \ldots.$

- ***Phương trình Đạo hàm riêng***
- $F(x, y, z, w(x, y, z), w_x, w_y, w_z, w_{xyz} \ldots) = 0$
- ***Ví dụ***

  $y\partial w/\partial x + 4(x-y).\partial^2 w/\partial x^2 = 0$

  $\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 = 0 \ldots$

1). Phương trình Laplace

- *Phương trình Laplace: $\Delta w = \nabla^2 \mathbf{w} = 0$*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

- *Hoặc trong KG hai chiều: $\Delta w = \nabla^2 \mathbf{w} = 0$*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Phương trình ***truyền nhiệt***

- Trong KG ***ba chiều:***

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}$$

- Trong KG ***một chiều***

$$a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial t}$$

Phương trình ***truyền sóng***

- Trong KG ***ba chiều:***

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

- Trong KG ***một chiều***

$$a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

2).Ví dụ và Bài tập

- A).Chứng tỏ rằng hàm 3 biến sau thỏa mãn phương trình Laplace:

$$w = \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

HD giải Bài tập A)

- Đặt r = $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$

- ***Tính đạo hàm*** của w = 1/r (r>0)

$$\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x-x_1}{r}=-\frac{x-x_1}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_1)}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3(x-x_1)^2}{r^5}$$

Tương tự, ta tính được:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3(x - x_1)^2}{r^5}; \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3(y - y_1)^2}{r^5}; \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial z^2} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3(z - z_1)^2}{r^5}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta \mathrm{w} = \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial z^2} = 0$$

B). Viết phương trình Laplace trong hệ tọa độ cực

- Giả sử ta có hàm w = f(x, y) thỏa mãn PT Laplace trong KG hai chiều: $w_{xx} + w_{yy} = 0$
- Dùng ***hệ tọa độ cực***, ta tính các ĐHR cấp 1:

(***Chú ý:*** x = rcosθ; y = rsinθ)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial r} = \cos\theta.\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + sin\theta.\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = \cos\theta.\mathrm{w}_x + sin\theta.\mathrm{w}_y; \\ \dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial \theta} = -rsin\theta.\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial x} + r\cos\theta.\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial y} = -rsin\theta.\mathrm{w}_x + r\cos\theta.\mathrm{w}_y \end{cases}$$

(tính tiếp ĐHR hai lần theo r)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial r^2} = \mathrm{w}_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta.\mathrm{w}_x + \sin\theta.\mathrm{w}_y\right]$$

$$= \cos\theta\frac{\partial \mathrm{w}_x}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial \mathrm{w}_y}{\partial r}$$

$$= \cos\theta\left[\cos\theta.\mathrm{w}_{xx} + \sin\theta.\mathrm{w}_{xy}\right]$$

$$+ \sin\theta\left[\cos\theta.\mathrm{w}_{yx} + \sin\theta.\mathrm{w}_{yy}\right]$$

$$= \cos^2\theta.\mathrm{w}_{xx} + 2\sin\theta.\cos\theta.\mathrm{w}_{xy} + \sin^2\theta.\mathrm{w}_{yy}$$

(tính tiếp ĐHR hai lần theo θ)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[-r\sin\theta.\mathrm{w}_x + r.\cos\theta.\mathrm{w}_y\right]$$

$$= -r\left[\cos\theta.\mathrm{w}_x + \sin\theta.\mathrm{w}_y\right]$$

$$-r\sin\theta.\frac{\partial \mathrm{w}_x}{\partial\theta} + r\cos\theta.\frac{\partial \mathrm{w}_y}{\partial\theta}$$

$$= -r\mathrm{w}_r - r\sin\theta\left[-r\sin\theta.\mathrm{w}_{xx} + r\cos\theta.\mathrm{w}_{xy}\right]$$

$$+ r.\cos\theta\left[-r\sin\theta.\mathrm{w}_{yx} + r\cos\theta.\mathrm{w}_{yy}\right]$$

$$= -r\mathrm{w}_r + r^2\left[\sin^2\theta.\mathrm{w}_{xx} - 2\sin\theta.\cos\theta.\mathrm{w}_{xy} + \cos^2\theta.\mathrm{w}_{yy}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} = 0$$

C).Giải Phương trình truyền nhiệt

một chiều, dạng: $$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

- ***HD.*** Hãy tìm nghiệm w(x, t) của PT dưới ***dạng tách biến:***

$$w(x, t) = G(x).H(t)$$

với G và H là hai hàm có ĐHR liên tục đến cấp cần thiết

(HD tiếp C)

- Như vậy: w_{xx} = G''(x).H(t); w_t = G(x).H'(t)
- PT đưa về dạng ***phân li biến số:***
- $a^2G''H = GH' \rightarrow a^2G''/G = H'/H$
- Do vế phải là hàm của t, trong khi vế trái là hàm của x, ta có hai vế đều là một hằng số $\lambda \rightarrow a^2G'' = \lambda G$ và $H' = \lambda H$. Giải các ***PT vi phân thường*** này sẽ có G(x) và H(t)
- Chẳng hạn nếu λ = - 1, ta sẽ có:

Nghiệm của 2 phương trình

- $a^2G''(x) = -G(x)$ là các hàm:

  $$G(x) = C_1\sin ax + C_2\cos ax$$

  với C_1 và C_2 là hai hằng số tùy ý
- $H'(t) = -H(t) \leftrightarrow dH/H = dt$ (Tích phân hai vế theo t) $\rightarrow \ln|H| = -t + C$, hay là $H(t) = k.e^{-t}$.
- Vậy nghiệm của PT truyền nhiệt với $\lambda = -1$ là: $w = k.e^{-t}.(C_1\sin ax + C_2\cos ax)$
- Các hằng số C_1, C_2 và k được XĐ theo ĐK

Phương trình truyền sóng

một chiều có dạng:

$$a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

- Hãy chứng tỏ rằng các hàm w có dạng:

$$w = F(x + at) + G(x - at)$$

với F và G là hai hàm có ĐHR liên tục đến cấp hai (a là hằng số) đều nghiệm đúng PT(Xem lại BT 30, trang 70 và BG-3-TII)

Tiết thứ hai

- *Hàm ẩn và Đạo hàm hàm ẩn (Mục 19.9)*

1). Các định lý về hàm ẩn
2). Tính đạo hàm hàm ẩn
3). Các ví dụ và bài tập

1). Các định lý về hàm ẩn

- Ta đã làm quen với hàm ẩn và đạo hàm hàm ẩn trong phần Toán I
- Chẳng hạn hệ thức: $x^2 + y^2 = 1$ chứa các hàm ẩn: $y = \pm\sqrt{(1-x^2)}$
- Đạo hàm $dy/dx = y'(x) = -x/y \quad (y \neq 0)$
- ***Hai câu hỏi đặt ra là:***

  \+ Khi nào tồn tại hàm ẩn $y = y(x)$ trong hệ thức

  $$F(x, y) = c \text{ (Hằng số)}$$

  \+ Khi có hàm ẩn $y = y(x)$, tính $y'(x)$ như thế nào?

Định lý 1 về sự tồn tại của hàm ẩn

Nếu

- hàm $F(x, y)$ có đạo hàm riêng F_x, F_y liên tục tại mọi điểm thuộc lân cận (x_0, y_0)
- $F(x_0, y_0) = c$ (hằng số); $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

thì

- tồn tại một hàm ẩn $y = f(x)$ khả vi (có đạo hàm) trên một khoảng I chứa x_0, sao cho $y_0 = f(x_0)$ và $F[x, f(x)] = c$

Theo định lý này

- Hệ thức: $x^2 + y^2 = 25$ (C) có chứa hàm ẩn: $y = f(x)$ do $F(x, y) = x^2 + y^2$ thỏa mãn các giả thiết đã nêu
- Điều kiện $F_y \neq 0$ chính là $y \neq 0$
- $dy/dx = y'(x) = -x/y$
- Tính $y'(3)$; $y'(-4)$; $y'(\pm 5)$
- Tính các HSG tiếp tuyến đường tròn (C) tại các điểm $(3, \pm 4)$, $(-4, \pm 3)$, $(\pm 5,0)$. Vẽ hình minh họa …

Ví dụ 1 (trang113)

- Hệ thức $F(x, y) = x^2y^5 - 2xy + 1 = 0$ thỏa mãn các giả thiết của định lý trên tại (1,1)
- (F có các ĐHR liên tục tại mọi điểm (x, y); Điểm (1,1) thỏa mãn $F(1, 1) = 0$ và $F_y(1,1) \neq 0$)
- Suy ra, tồn tại hàm ẩn $y = f(x)$ khả vi trên một tập I nào đó chứa điểm 1, hơn nữa ta còn có: $f(1) = 1$ và $F(x, f(x)) = 0$
- Tính $y'(x)$ và $y'(1)$ như thế nào?

2).Tính Đạo hàm hàm ẩn

- $F(x, y) = x^2y^5 - 2xy + 1 = 0$
- ***Cách 1.*** Đạo hàm hai vế theo x, coi y là hàm của x, ta có:

  $2xy^5 - 2y + (5x^2y^4 - 2x)y' = 0 \rightarrow y' = ?$ (ĐK?) $\rightarrow y'(1) = ?$
- ***Cách 2.*** Suy từ $$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{y=HS} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow y'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad (F_y \neq 0)$$

Định lý 2 về sự tồn tại của hàm ẩn

Nếu

- hàm F(x, y, z) có các đạo hàm riêng liên tục tại mọi điểm thuộc lân cận (x_0, y_0, z_0)
- $F(x_0, y_0, z_0) = c$ (hằng số); $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

thì

- tồn tại hàm ẩn z = f(x,y) khả vi (có đạo hàm liên tục) trên một miền D chứa điểm (x_0, y_0) sao cho:

$$z_0 = f(x_0, y_0) \text{ và } F[x, y, f(x,y)] = c$$

Tính ĐH hàm ẩn (VD 2, trg.114)

- $F(x, y, z) = x^2z+yz^5 + 2xy^3 =13$ và $(1, 2, -1)$
- ***Cách 1.*** Đạo hàm hai vế theo x, coi z là hàm của x và y (còn y là hằng số),ta có:

  $2xz +2y^3 + (x^2 + 5yz^4)z_x = 0 \rightarrow z_x = ?$ (ĐK?) $\rightarrow z_x(1,2) = ?$
- ***Tương tự,*** Đạo hàm hai vế theo y, coi z là hàm của x và y (còn x là hằng số),ta có:

  $z^5 +6xy^2 + (x^2 + 5yz^4)z_y = 0 \rightarrow z_y = ?$ (ĐK?) $\rightarrow z_y(1,2) = ?$

Cách hai để tính z_x và z_y

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{y,z=HS} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{x,z=HS} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{y,z=HS}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{x,z=HS}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad (F_z \neq 0)$$

Tìm ***cực trị*** hàm ẩn

- ***Ví dụ.*** Cho đường cong: $x^3+y^3 = 3xy$ (C) ($x, y > 0$) tạo nên một ***lá Đề-các***. Tìm tọa độ điểm cao nhất trên (C)
- ***HD.*** Hệ thức (C) có chứa hàm ẩn $y= y(x)$
- Tính ĐH hàm ẩn: $y'=(y - x^2)/(y^2 - x)$ ($y^2 \neq x$)
- Điểm cao nhất ứng với tung độ y đạt cực đại (cũng là GTLN), nghĩa là tại đó $y' = 0$
- Giải hệ: $y = x^2$; $x^3+y^3 = 3xy \to (x = 2^{1/3}, y = 4^{1/3})$ thỏa mãn ĐK

Đề cương ôn tập *Chương I* -TII

1). Quỹ đạo, Vận tốc, Gia tốc

2). Mặt trụ, Mặt tròn xoay, Mặt bậc hai. Vẽ hình và thiết lập phương trình của chúng

3). Tọa độ trụ, Tọa độ cầu. Mặt cong trong các hệ tọa độ trụ và cầu

4). Hàm 2, 3 biến: MXĐ, Tính liên tục, Đường mức, Mặt mức

5). Đạo hàm riêng và Vi phân của Hàm nhiều biến

(tiếp)

6). Đường thẳng tiếp xúc, Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại một điểm

7). Đạo hàm hàm hợp (Quy tắc dây chuyền)

8). Đạo hàm theo hướng và véc tơ gradien

9). Cực trị và cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến

10). PT Laplace, PT truyền nhiệt và PT truyền sóng

11). ĐH hàm ẩn, Cực trị hàm ẩn

Nội dung BG-7-TII-(Tuần thứ bẩy)

- Chương II. Tích phân bội (gồm 5 Bài giảng)
- ***BG 7: Tính thể tích bằng tích phân lặp (Mục 20.1)***

  Tích phân bội hai (Mục 20.2; 20.3)
- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược những ý chính trong các mục sẽ học
- Hết BG-6-Toán II (Ngày 27/3/2008)

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 7-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương II- Tích phân bội

Nội dung buổi một/năm

- *Tính thể tích bằng tích phân lặp*

  (Mục 20.1)

- *Tích phân bội hai*

  (Mục 20.2)

Tiết thứ nhất

- *Tính thể tích bằng tích phân lặp*

  (Mục 20.1)

1). Các ví dụ mở đầu
2). Tính thể tích bằng Tích phân lặp
3). Các ví dụ về tính thể tích và diện tích

1). Các ví dụ mở đầu

- Ta đã học công thức tính thể tích:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

- Khi đã tính được diện tích thiết diện A(x) thì chỉ cần tích phân từ a đến b, sẽ nhận được V
- ***Để tính A(x), nhiều khi ta phải dùng tích phân***

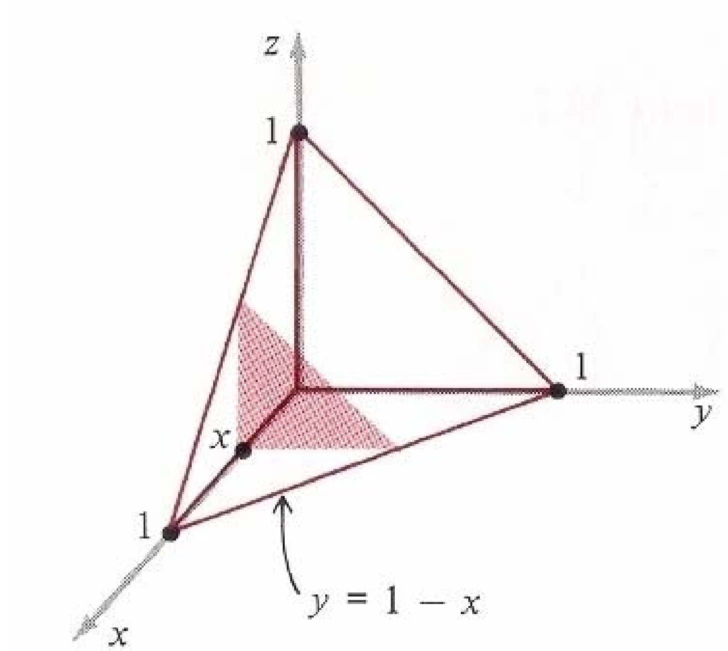
Ví dụ 1

- Tính thể tích tứ diện giới hạn bởi ba mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng: x + y + z = 1
- Dùng công thức:

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

- Trong đó: A(x) là DT tam giác vuông cân…

- Hình 20.3 (Trang 117)

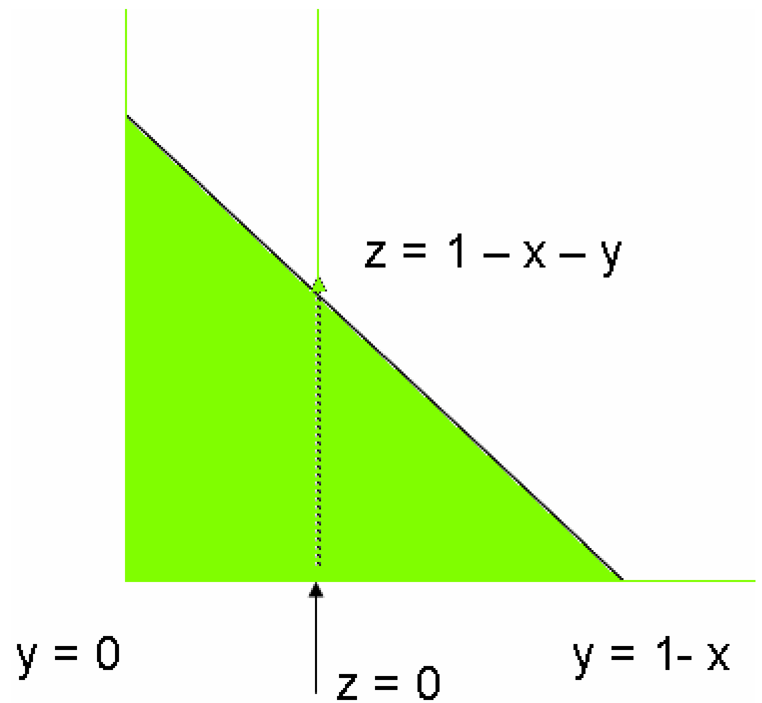


Tính A(x) bằng tích phân

$$A(x) = \int_0^{1-x} z dy = \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy$$

$$= (y - xy - \frac{y^2}{2})\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$V = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$



Ví dụ 2

- Tính thể tích của một lăng trụ cong, đáy là một hình chữ nhật (D): $0 \le x \le 2$; $1 \le y \le 2$, các mặt bên thẳng đứng, phía trên là mặt cong:

$$z = f(x, y) \ge 0 \text{ trên miền } (D)$$

- Khi đó

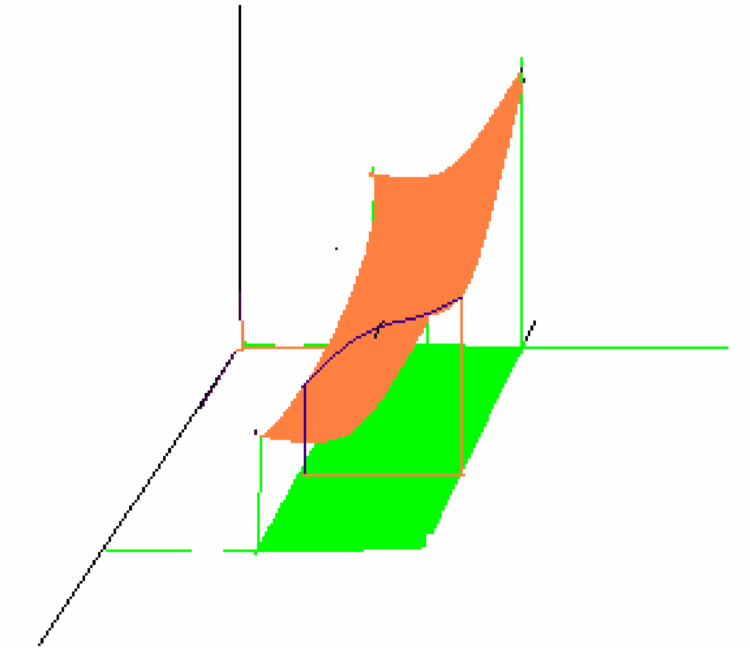
$$V = \int_0^2 A(x)\,dx; \quad A(x) = \int_1^2 f(x, y)\,dy$$

Tính A(x) trong VD2

$$A(x) = \int_1^2 z\,dy = \int_1^2 f(x,y)\,dy$$

$$V = \int_0^2 \left[\int_1^2 f(x,y)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_0^2 \int_1^2 f(x,y)\,dy\,dx$$



2). Tính V bằng Tích phân lặp

- Như vậy thể tích ***lăng trụ cong đã cho*** sẽ là:

$$V = \int_0^2 \left[\int_1^2 f(x,y)dy \right] dx = \int_0^2 \int_1^2 f(x,y)dydx$$

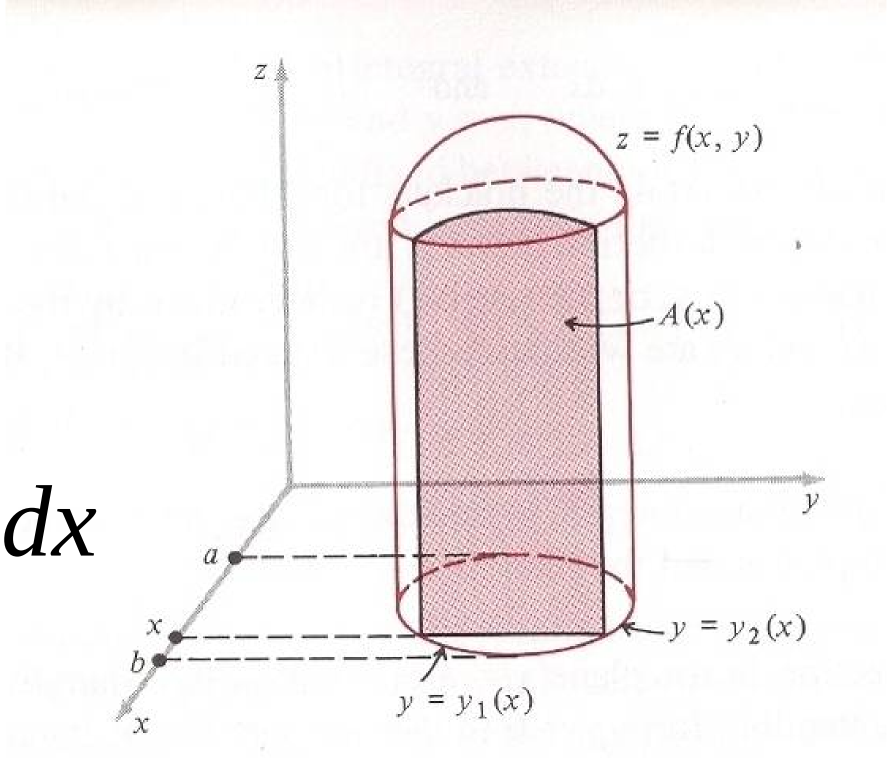
- Tích phân trên được gọi là ***Tích phân lặp***
- Cho z = f(x, y) = xy^2, ta sẽ có V = 14/3 (ĐVTT)

(Các em tự kiểm tra kết quả)

Tổng quát

- Thể tích của một ***hình trụ cong*** (H. 20.1, trang116) được tính theo công thức:

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$



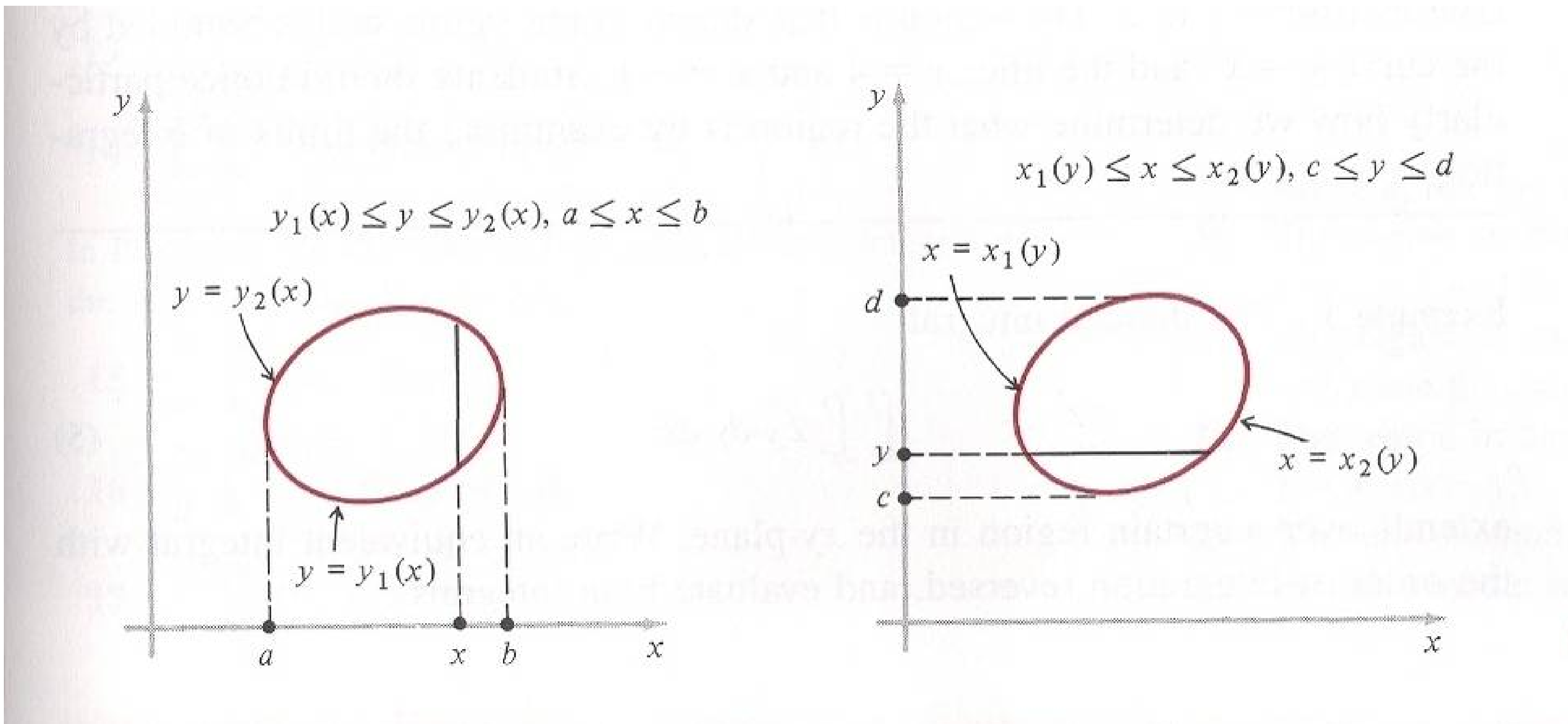
Khi cắt hình trụ cong ở hình 20.1

bởi một mặt phẳng vuông góc với Oy, ta có công thức:

$$V = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

Chú ý việc xác định cận lấy TP

- Xem hình 20.2 (trang 117)

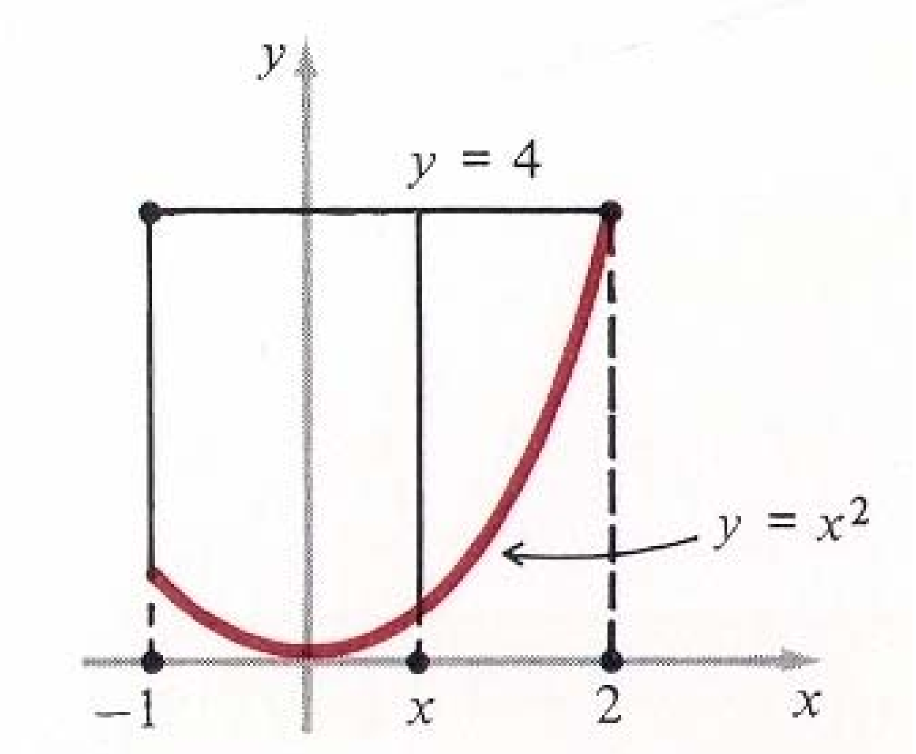


3).Ví dụ 2, trang 118

- Xác định ***miền lấy tích phân*** D ⊂ (xy) đối với TP lặp sau đây:

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{4} f(x,y)dydx$$

- Hình 20.4

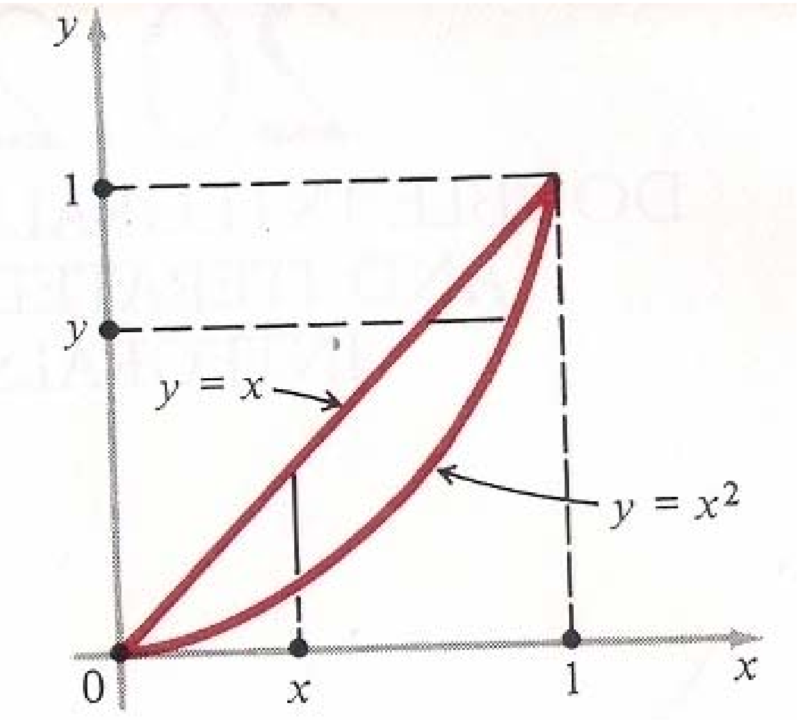


Ví dụ 3 (trang 118)

- Tính TP lặp:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y\,dy\,dx$$

- Hình 20.5



Hai cách tính

- ***Cách 1.*** **(TP theo y trước)**

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y\,dy\,dx = \int_0^1 \left(y^2 \Big|_{x^2}^{x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{2}{15}$$

Hai cách tính (tiếp)

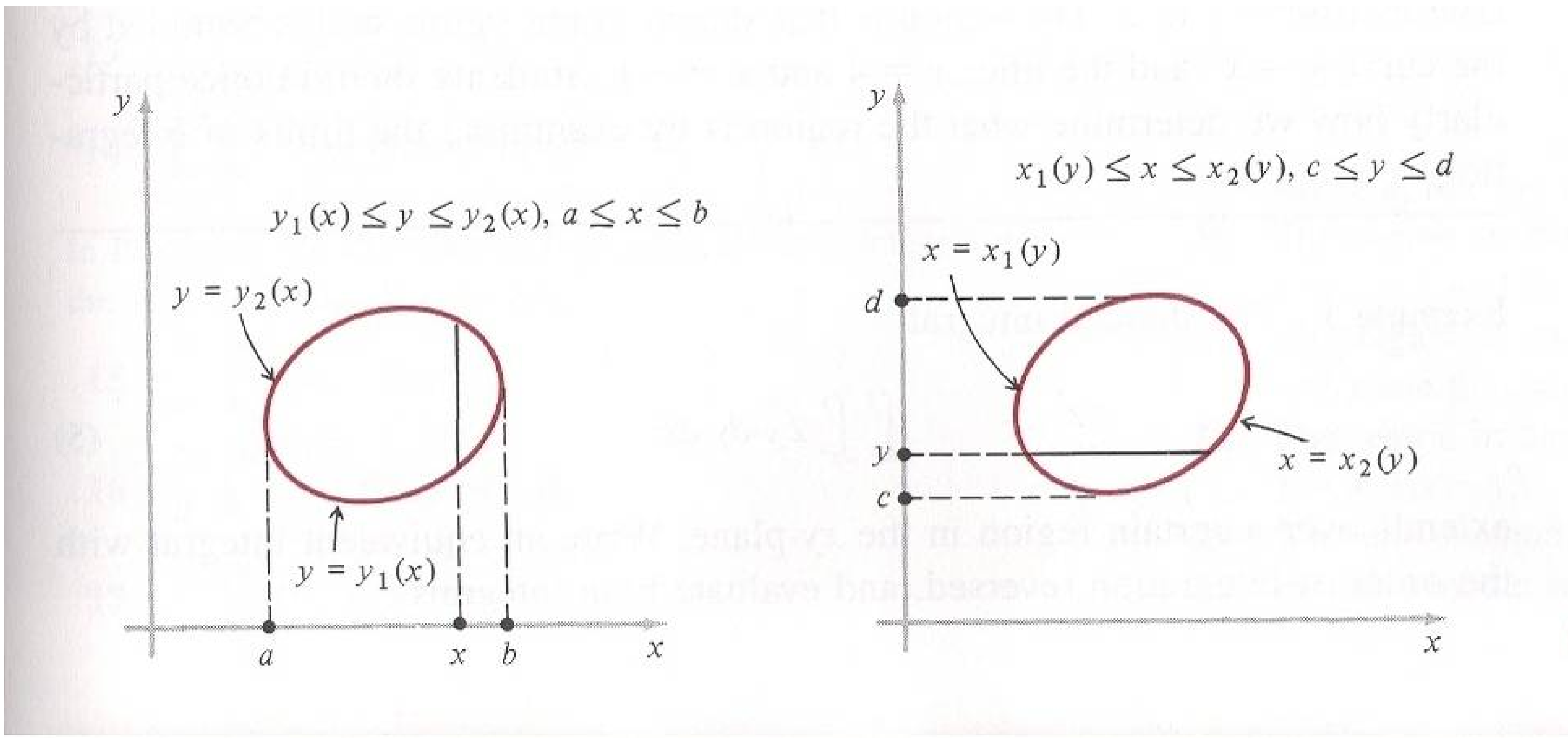
- ***Cách 2*** (TP theo x trước)

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} 2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(2y.x\Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y^{\frac{3}{2}} - 2y^2\right)dy = \frac{2}{15}$$

Tính DT hình phẳng bằng TP lặp

- Xem lại hình 20.2 (trang 117)



Công thức tính diện tích

- Chọn hàm f(x, y) ≡ 1, diện tích hình phẳng sẽ tính được nhờ hai công thức:

$$V = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dydx \quad \left(= \int_a^b \left[y_2(x) - y_1(x) \right] dx \right)$$

$$V = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dxdy \quad \left(= \int_c^d \left[x_2(y) - x_1(y) \right] dy \right)$$

Ví dụ: Diện tích miền D_1

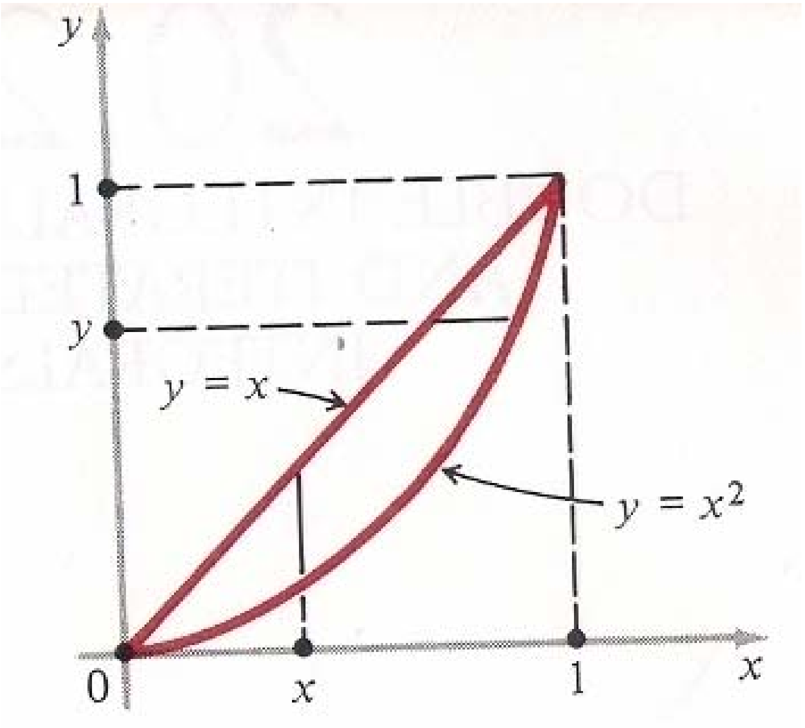
- giới hạn bởi: $y = x^2$; $y = x$ bằng:

$$\int_0^1 \int_{y=x^2}^{y=x} dydx = \int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$\int_0^1 \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dxdy = \int_0^1 (\sqrt{y} - y)dx$$

$$= \frac{1}{6}(DVDT)$$

- Hình 20.5

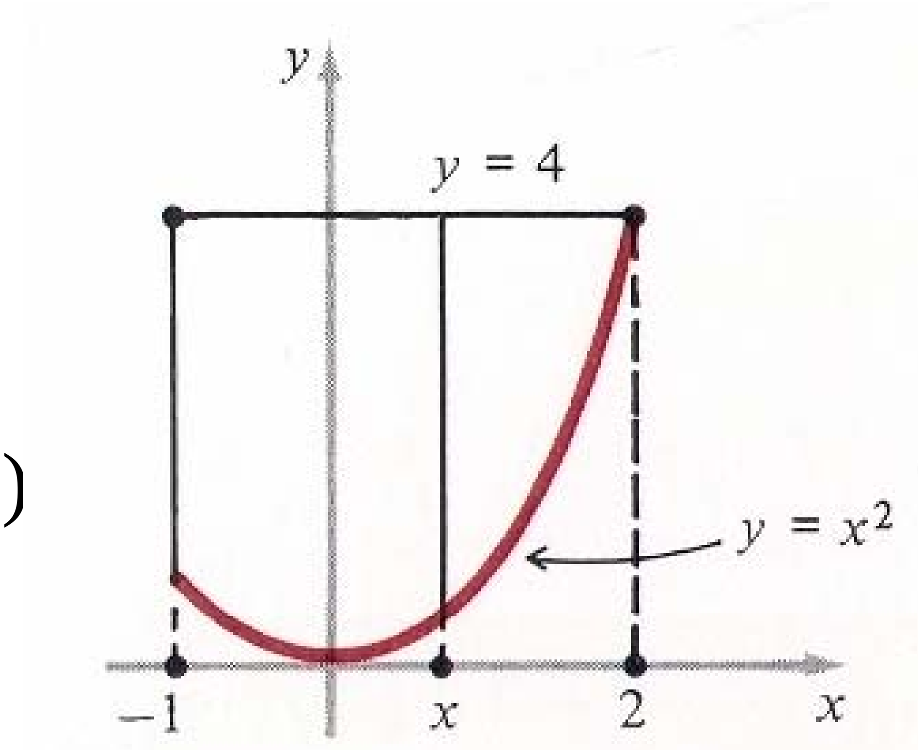


Ví dụ: Diện tích miền D_2

- giới hạn bởi: $-1 \leq x \leq 2$; $x^2 \leq y \leq 4$.
- Hình 20.4

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{4} dydx = \int_{-1}^{2}(4 - x^2)dx$$

$$= (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{2} = 9(DVDT)$$



Tiết thứ hai

- *Tích phân bội hai*

  (Mục 20.2)

1). Định nghĩa TP bội hai (TP hai lớp, Tích phân kép)

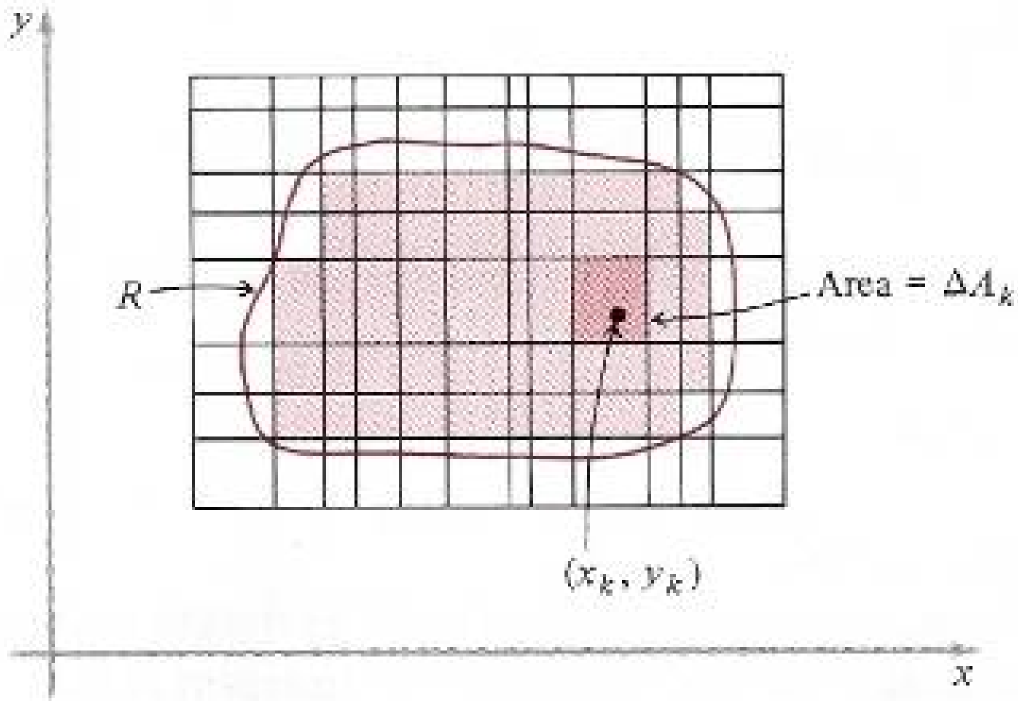
2). TP bội hai và TP lặp

3). Các ví dụ

1). Định nghĩa TP bội hai

- Xét hàm hai biến f(x, y) ***xác định và bị chặn*** trên miền phẳng hữu hạn D$\subset$ (xy)
- ***Chia*** miền D thành n miền con ***không dẫm lên nhau*** (các điểm chung (nếu có) đều nằm trên biên các miền con). Kí hiệu ΔA_k là miền con thứ k và cũng là DT của nó
- ***Chọn*** trong miền thứ k một điểm M_k tùy ý
- ***Lập tổng TP***: $$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta A_k$$

Hình 20.6 (trang 122)



Cho "đường kính" λ_k lớn nhất

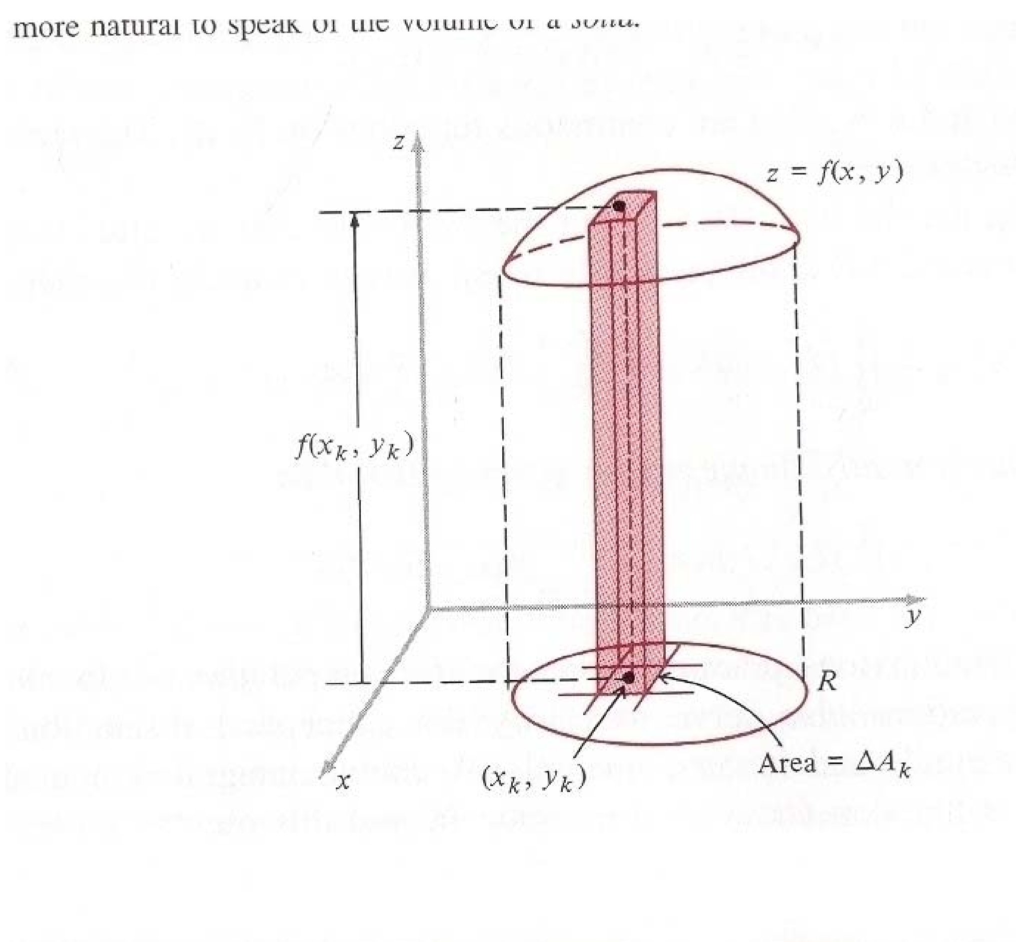
của các miền con tiến đến 0. Nếu giới hạn của tổng TP nói trên tồn tại, không phụ thuộc cách chia miền D, không phụ thuộc cách chọn điểm M_k thì ta nói hàm f(x, y) ***khả tích*** trên D và:

$$\lim_{\max \lambda_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta A_k = \iint_D f(x, y)\,dA$$

Ý nghĩa hình học của TP bội hai

- Với ***$f(x, y) \geq 0$*** trên toàn miền D (hữu hạn)
- f(x, y) liên tục trên D, TP bội hai của f(x, y) trên D có giá trị bằng ***thể tích của một hình trụ cong*** có đáy là D, giới hạn phía trên bởi mặt cong z = f(x. y), giới hạn xung quanh bởi mặt trụ (nhận biên của D là đường chuẩn, đường sinh có phương Oz)
- ***Đặc biệt,*** khi $f(x, y) \equiv 0$ TPBội 2 bằng 0; khi $f(x, y) \equiv 1$, TPBội 2 cho ta DT miền D

Hình 20.7 (trang 123)



Chú ý

- Khi hàm f(x, y) khả tích trên miền D, nghĩa là TP bội hai xác định (không phụ thuộc vào cách chia D, cách chọn M_k) ta có thể chia D bằng ***một mạng lưới các đường thẳng song song với Ox và Oy***
- Khi đó, ta có thể viết dA = dxdy và TP bội hai:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Chú ý (tiếp)

Nếu

- miền D hữu hạn, giới hạn bởi một số hữu hạn ***đường cong trơn từng mảnh*** (Mỗi mảnh đều có tiếp tuyến biến thiên liên tục)
- hàm f(x, y) liên tục trên D

thì

- TP bội hai của hàm f(x, y) trên miền D tồn tại và cho ta một giá trị xác định

2). Tích phân bội hai và TP lặp

- Xét hai loại miền phẳng D:
- ***Loại I.*** D giới hạn bởi:

$$a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$$

(Miền đơn giản có hai cạnh thẳng đứng)

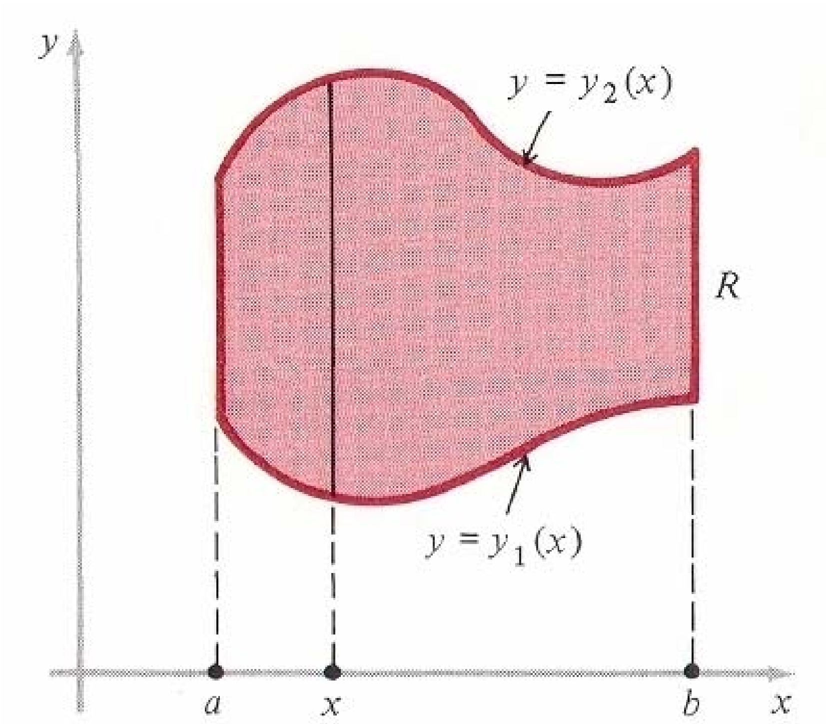
- ***Loại II.*** D giới hạn bởi

$$c \le y \le d;\ x_1(y) \le x \le x_2(y)$$

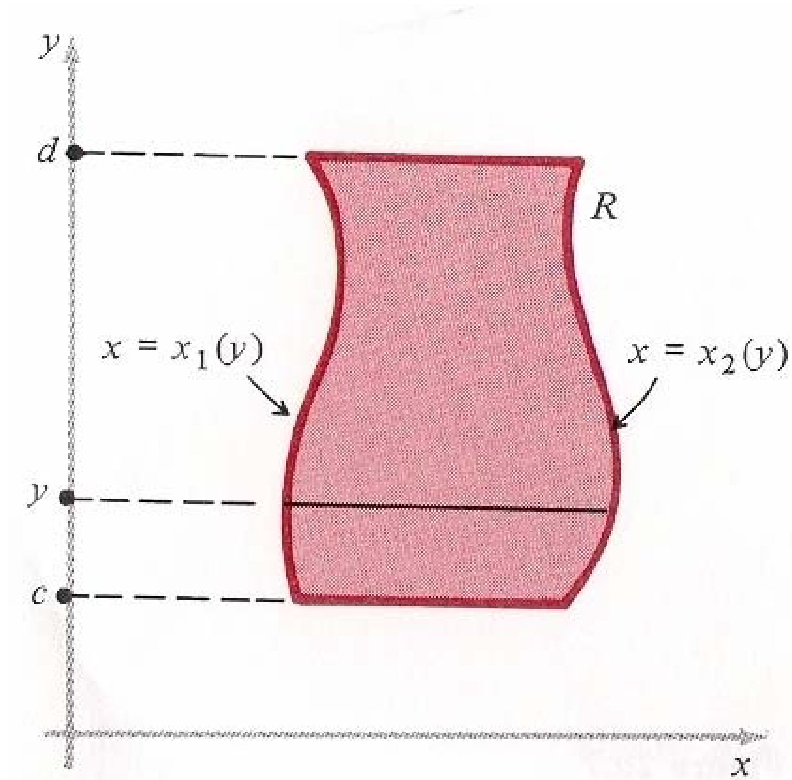
(Miền đơn giản có hai cạnh nằm ngang)

Miền D loại I và loại II

- Hình 20.8 (trg.124)



- Hình 20.9 (trg.125)



Với hai miền loại I và loại II

- Ta có thể tính TP bội hai bằng các tích phân lặp

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$= \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

$$= \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Với các miền D khác

- Ta sẽ chia D thành một số hữu hạn các miền loại I và loại II, sau đó vận dụng tính chất ***cộng tính*** của TP để tính trên từng miền con rồi cộng lại
- Chú ý tìm ***cách lặp thích hợp*** để tính TP bội hai một cách đơn giản nhất
- Muốn làm thành thạo cần phải luyện tập nhiều

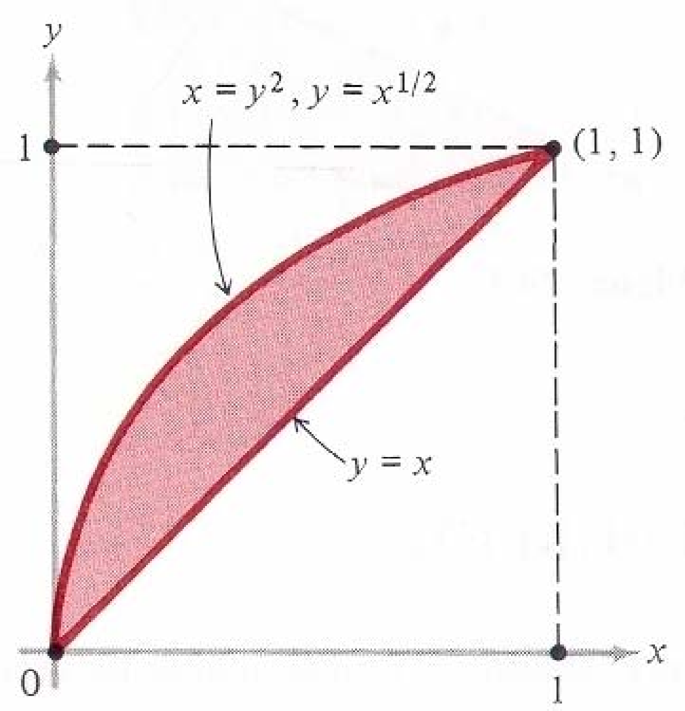
3). Ví dụ 1 (trang 124)

- Tính TPB2 ***theo hai cách khác nhau***

$$I = \iint_D 2xydxdy$$

$$D: \begin{cases} x = y^2; \\ y = x \end{cases}$$

- Hình 20.10 (trang 125)



Chú ý xác định đúng các cận TP

- Hai cách tính cho cùng một kết quả:

$$\int_0^1 \int_{y=x}^{y=\sqrt{x}} 2xydydx = \int_0^1 (xy^2)\Big|_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}$$

$$\int_0^1 \int_{x=y^2}^{x=y} 2xydxdy = \int_0^1 (x^2 y)\Big|_{x=y^2}^{x=y} dy = \int_0^1 (y^3 - y^5)dx = \frac{1}{12}$$

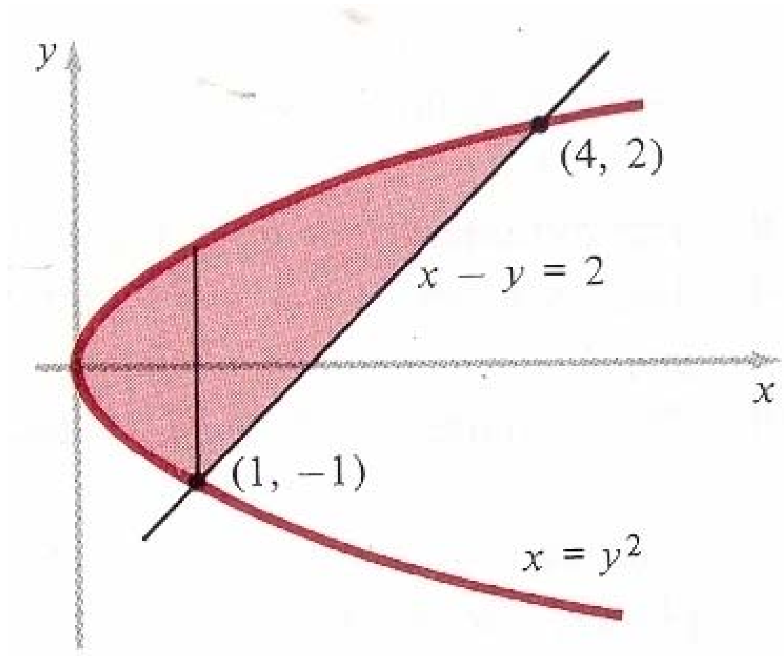
Ví dụ 2 (trang 125)

- Tính TPB2

$$I = \iint\limits_{D} (1 + 2x)\,dA$$

$$D: \begin{cases} x = y^2; \\ x - y = 2 \end{cases}$$

- Hình 20.11
-



Chú ý chọn thứ tự tính TP

- Nếu TP ***theo x trước rồi theo y***, ta có:

$$\int_{-1}^{2}\int_{x=y^2}^{x=y+2}(1+2x)dxdy=\int_{-1}^{2}(x+x^2)\Big|_{x=y^2}^{x=y+2}dy$$

$$=\int_{-1}^{2}(6+5y-y^4)dy=\frac{189}{10}$$

Nếu đổi thứ tự lấy TP

- Kết quả vẫn thế, nhưng việc tính toán phức tạp hơn rất nhiều (***TP theo y trước***)

$$\int_0^1 \int_{y=-\sqrt{x}}^{y=+\sqrt{x}} (1+2x)dydx + \int_1^4 \int_{y=x-2}^{y=+\sqrt{x}} (1+2x)dydx$$

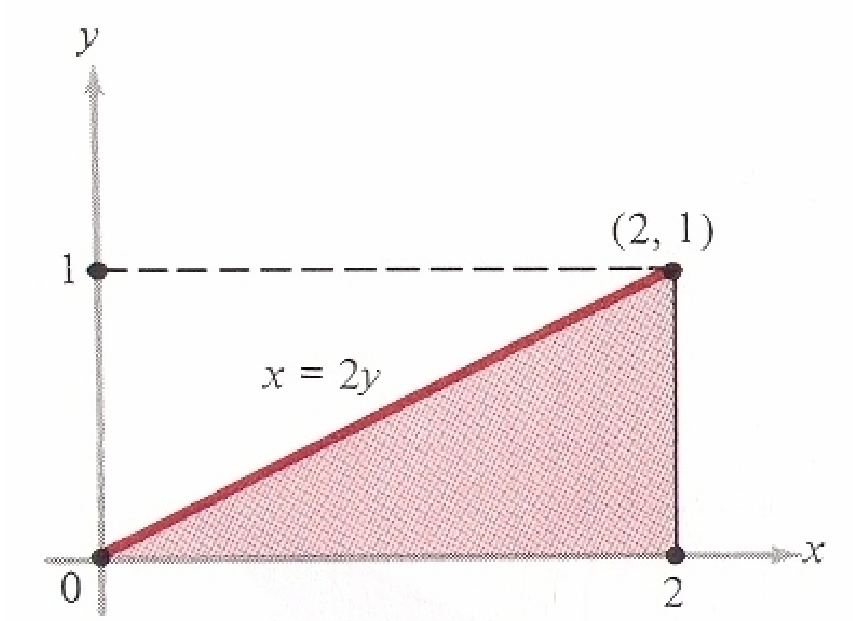
$$= \int_0^1 2\sqrt{x}(1+2x)dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)(1+2x)dx = \ldots$$

Trường hợp không thể đổi thứ tự

- Xét ví dụ 3 (trang126)
- Tính TP

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2}\, dxdy$$

- Hình 20.12 (Trang 126)



Tại sao không tính đượcTP theo x trước?

- Tính TP theo y trước có được không? Tại sao?
- Chú ý khi đổi thứ tự lấy TP, cần đổi cận

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4e^{x^2} dxdy = \int_0^2 \int_{y=0}^{y=\frac{x}{2}} 4e^{x^2} dydx$$

$$= \int_0^2 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} \Big|_0^2 = e^4 - 1$$

Nội dung BG-8-TII-(Tuần thứ tám)

- *Đổi biến trong Tích phân bội hai (Mục 20.9)*
- *TP bội hai trong hệ tọa độ cực (Mục 20.4)*
- *Các ứng dụng của Tích phân bội hai (Mục 20.3)*
- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược những ý chính trong các mục sẽ học
- Hết BG-7-Toán II (Ngày 2/4/2008)

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 8-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương II- Tích phân bội

Nội dung buổi hai/năm

- *Tích phân bội hai trong tọa độ cực*

  (Mục 20.4)

- *Đổi biến trong Tích phân bội hai*

  (Mục 20.9)

Tiết thứ nhất

- *Tích phân bội hai trong tọa độ cực*

  (Mục 20.4)

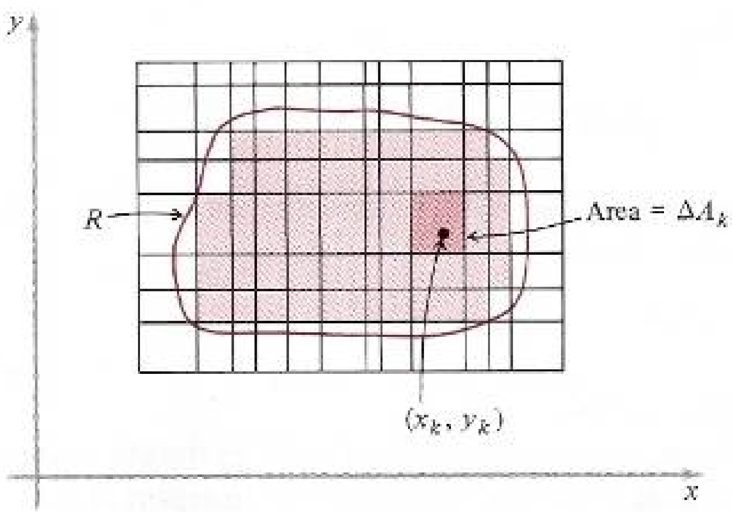
1). Yếu tố diện tích trong hệ tọa độ cực
2). Tính Tích phân bội hai trong tọa độ cực
3). Các ví dụ

1). Yếu tố DT trong hệ tọa độ cực

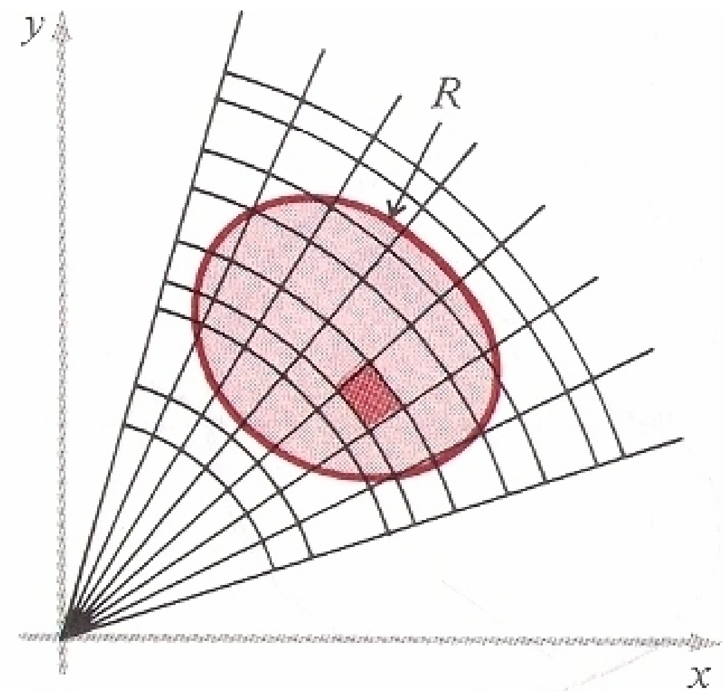
- Trong hệ tọa độ vuông góc, ta đã tính yếu tố diện tích: $dA = dx.dy$
- (Dựa trên cách chia miền lấy TP bội hai bằng một lưới các hình chữ nhật, xem lại hình 20.6, trang 122)
- Trong hệ tọa độ cực, các đường r = hằng số, θ = hằng số sẽ chia miền lấy TP bội hai theo một cách khác

Hai cách chia miền phẳng R

- Hệ TĐ vuông góc

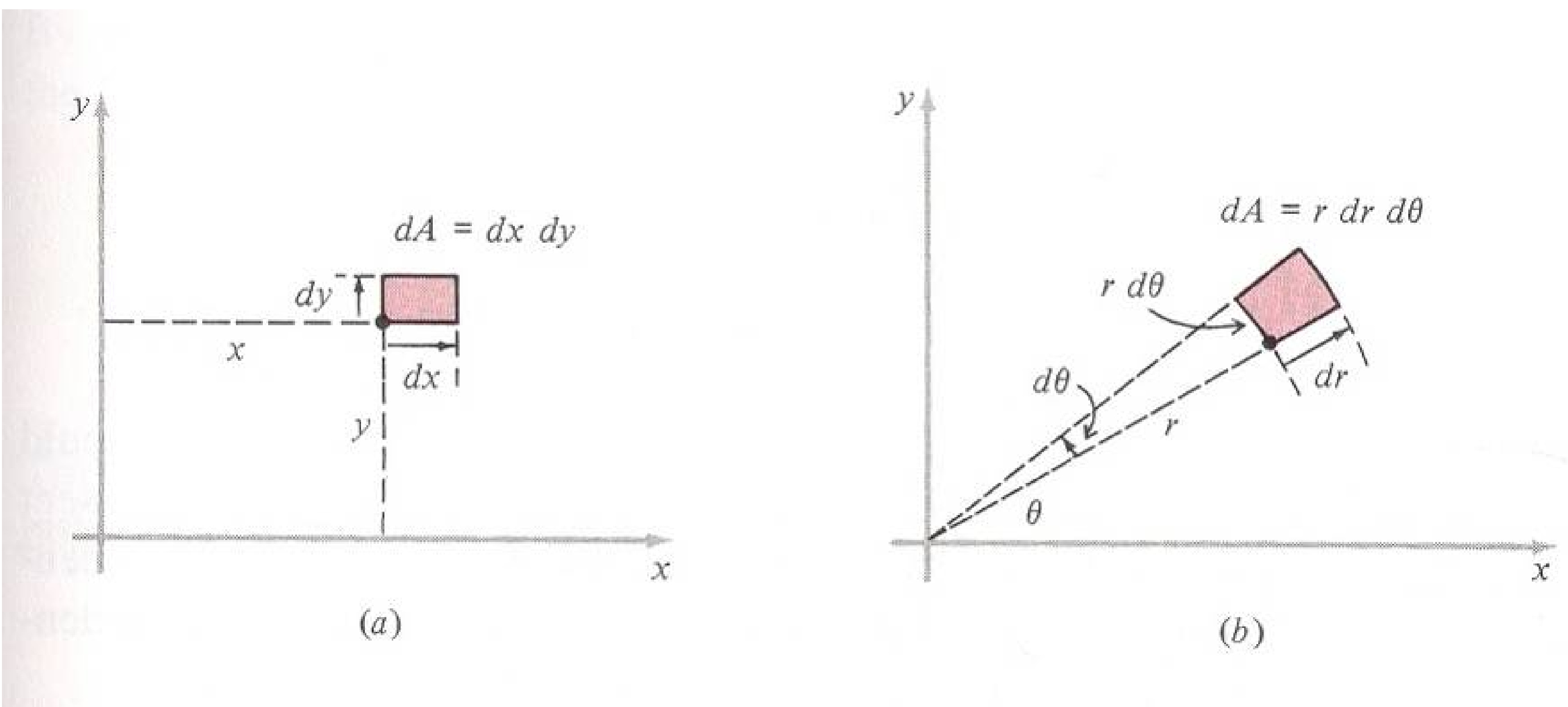


- Hệ tọa độ cực



Yếu tố diện tích trong TĐ cực

- Hình 20.17, trang 133



(tiếp)

- dA = rdrdθ
- Tích phân bội hai trong hệ tọa độ cực được tính như sau (R_1 là ảnh của miền phẳng R trong phép đổi biến):

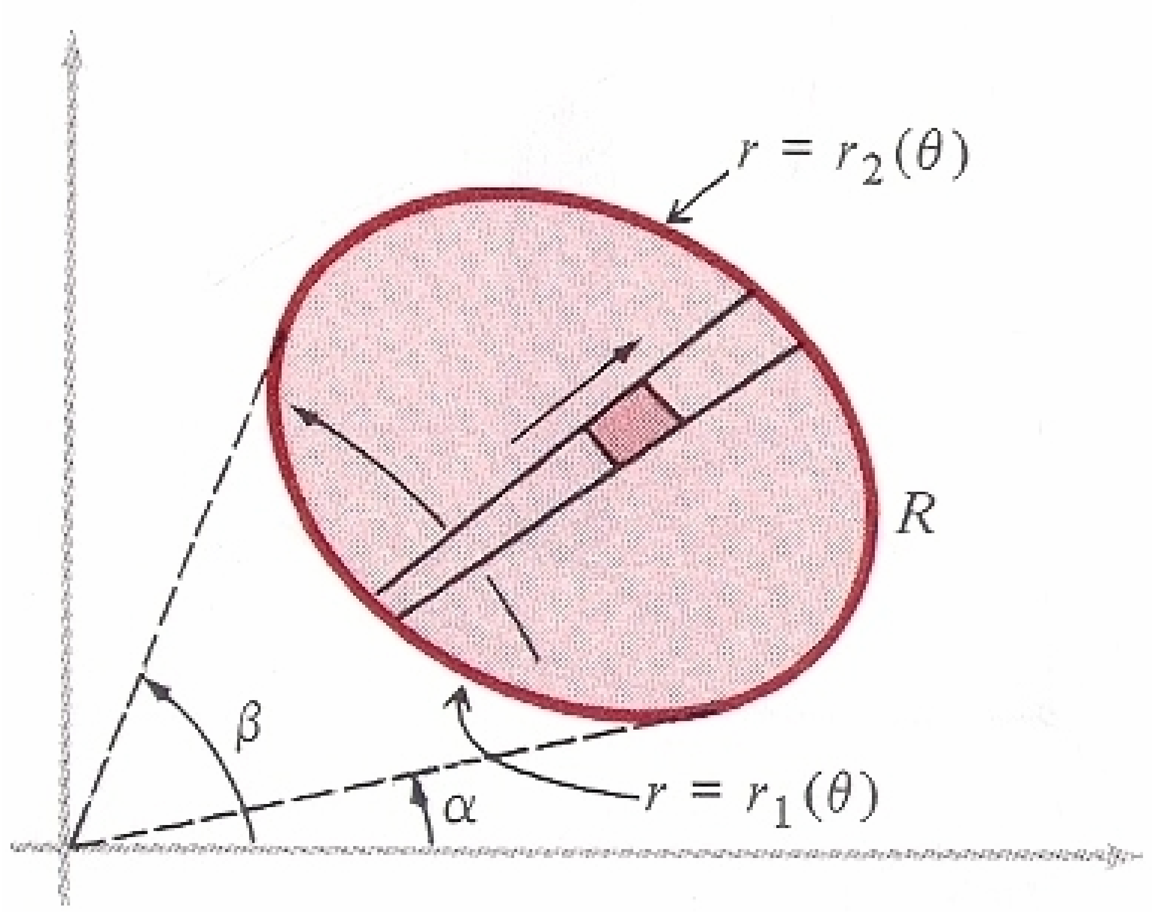
$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

2). Tính TP bội hai trong tọa độ cực

- Thay x bởi $r\cos\theta$, thay y bởi $r\sin\theta$ trong hàm f(x, y) dưới dấu TP
- Thay dA = dxdy bởi $rdrd\theta$
- Xác định cận của miền ảnh R_1 trong phép đổi biến từ $(x, y)\rightarrow(r, \theta)$
- Tính tích phân lặp trên miền ảnh

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) rdrd\theta$$

Hình 20.18, trang 134



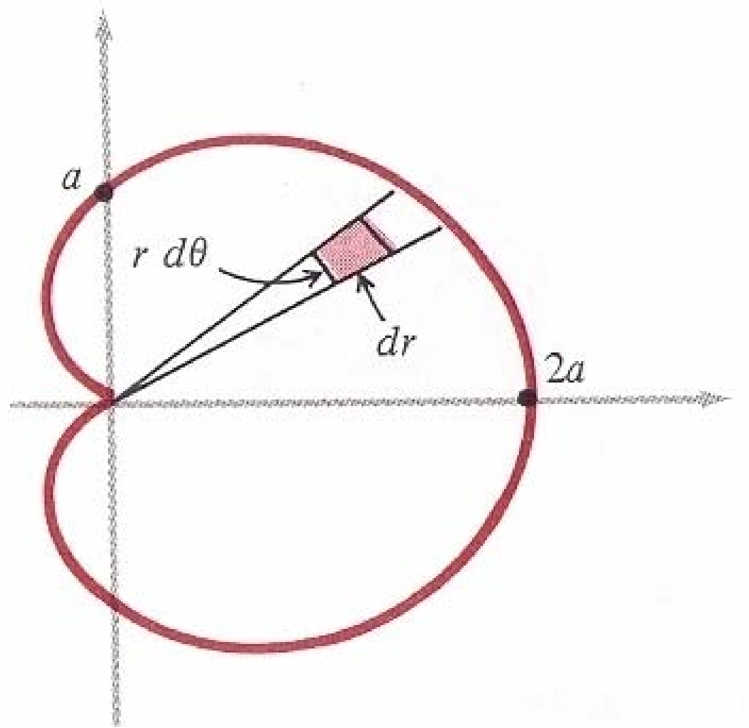
3).Ví dụ 1, trang 134

- Tính DT ***hình tim*** giới hạn bởi:r = a(1+ cosθ)
- Hình 20.19, trang 135

$$S = 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} r dr$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right] d\theta$$

$$S = \frac{3}{2}\pi a^2$$



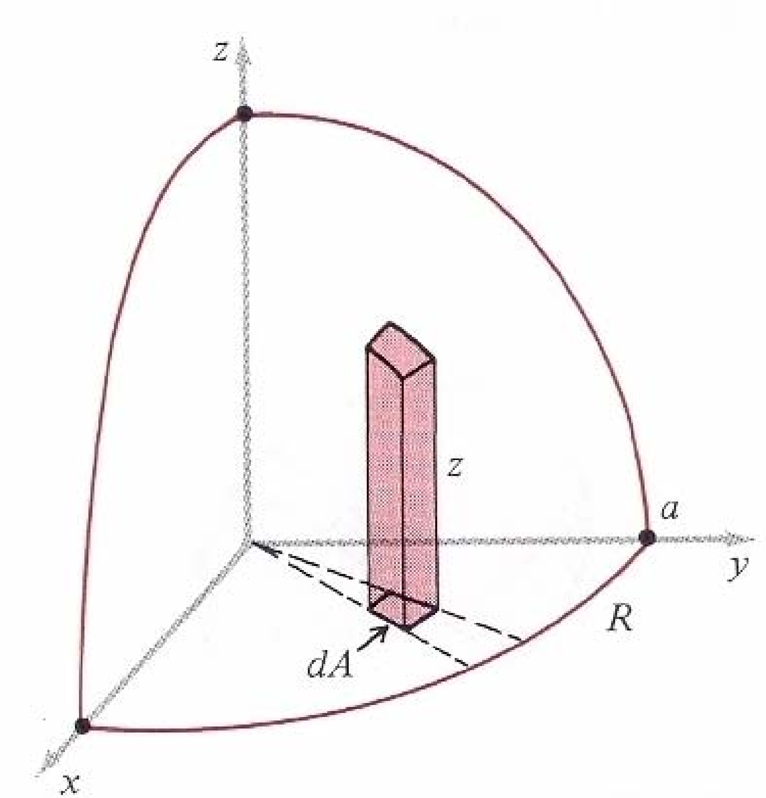
Ví dụ 2, trang 135

- Tính TT ***hình cầu*** bán kính R
- Hình 20.20, trang 135

$$V = 8\iint_R z\,dA = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - r^2)\, d\theta$$

$$= -4.\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=a} d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3$$



Ví dụ 3, trang 136

- Tính ***TP suy rộng loại I***:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

- Dễ thấy là ta không thể tìm được một nguyên hàm của hàm một biến đã cho (mặc dù biết rõ là có tồn tại NH trên (0, + ∞)
- Vì thế ***không thể tính TPSR trên bằng Giới hạn***
- Tuy nhiên ta lại có thể tính được I^2 nhờ tích phân bội hai

Tính TPSR I

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right).\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy\right) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy\right)dx$$

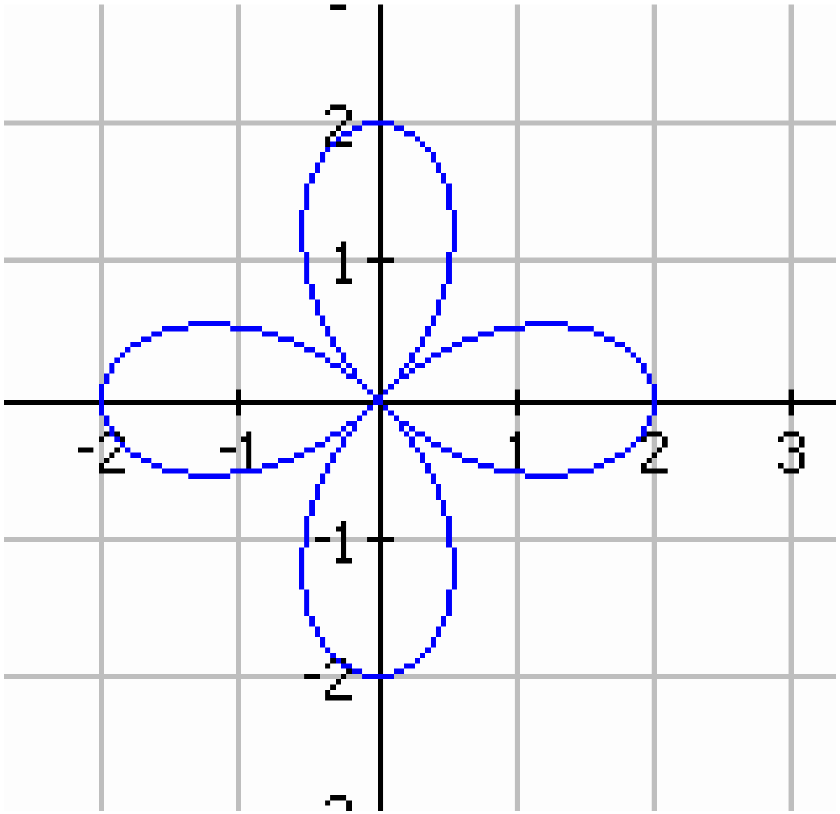
$$= \iint_R e^{-(x^2+y^2)}dydx = \iint_{R_1} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ví dụ 4

- Tính diện tích của một ***cánh hoa hồng*** trong hình hoa hồng 4 cánh giới hạn bởi đường cong:
- $r = 2\cos 2\theta$
- Xác định cận cho ***nửa cánh hoa:***
- $0 \le r \le 2\cos 2\theta$
- $0 \le \theta \le \pi/4$

- Hình vẽ:



Tính diện tích một cánh hoa

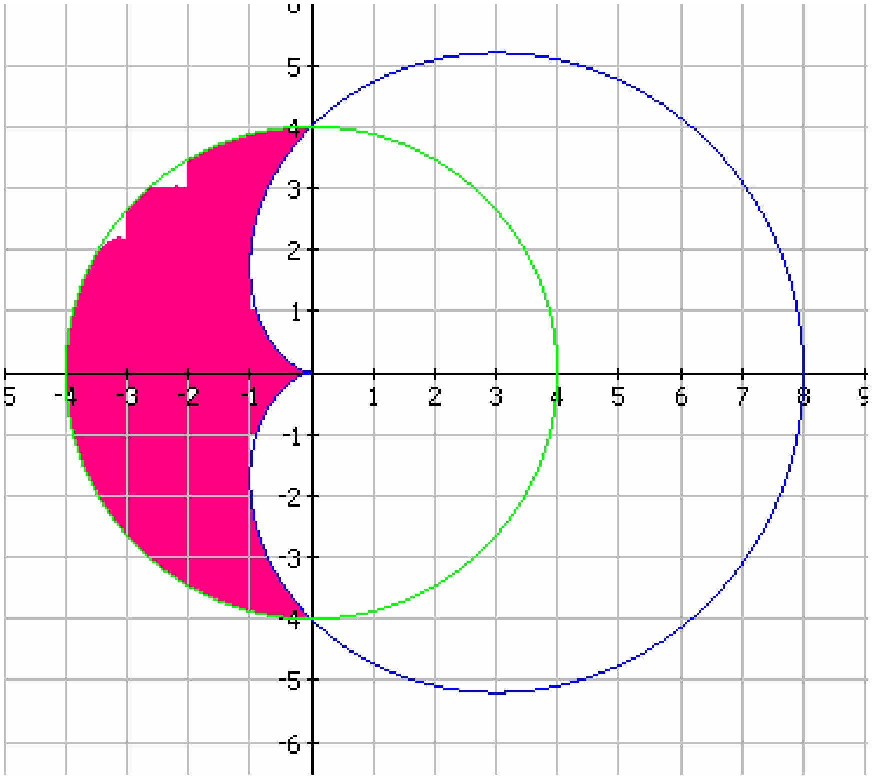
$$S = 2\iint_D r dr d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos 2\theta} r dr$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Ví dụ 5

- Tính diện tích của miền phẳng ***nằm trong đường tròn r = a và ngoài đường hình tim***
- $r = a(1+\cos\theta)$
- Xác định cận ***nửa hình***
- $a(1+\cos\theta) \le r \le a$
- $\pi/2 \le \theta \le \pi$

- Hình vẽ:



Tính DT miền tô màu đỏ

$$S = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{a(1+\cos\theta)}^{a} rdr$$

$$= -a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right] d\theta$$

$$S = \frac{(8-\pi)a^2}{4}$$

Tiết thứ hai

- *Đổi biến trong Tích phân bội hai*
  (Mục 20.9)

1). Phép đổi biến tổng quát và Định thức Jacobi (Jacobian)

2). Công thức đổi biến cho TP bội hai

3). Các ví dụ

1). Phép đổi biến TQ và ĐT Jacobi

- Xét phép đổi biến $(x, y) \to (u, v)$ với:

  $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$ là hai hàm có các ĐHR liên tục theo các biến u, v

  Ví dụ. $x = 2u - 3v$; $y = 3u - 2v$…
- Định thức cấp hai sau đây được gọi là ***ĐT Jacobi*** hay là Jacobian cho phép đổi biến $(x, y) \to (u, v)$

Định thức Jacobi

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Đảo lại

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^{-1}$$

Tính Jacobian

- Bạn hãy viết ĐT Jacobi cho phép đổi biến từ TĐ vuông góc sang TĐ cực

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

2). Công thức đổi biến cho TP bội hai

- Thay x bởi x(u, v), thay y bởi y(u, v) trong hàm f(x, y) dưới dấu TP
- Thay dxdy bởi $|J|$ dudv
- Xác định cận của miền ảnh R_1 của R trong phép đổi biến từ $(x, y) \to (u, v)$
- Tính tích phân lặp trên miền ảnh R_1.

3). Ví dụ 1

- Tính TP bội hai

$$I = \iint_D (y - x)dxdy$$

$$D : \begin{cases} y = x + 1; y = x - 3 \\ y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{7}{9}; y = -\dfrac{x}{3} + 5 \end{cases}$$

Dùng cách đổi biến (x,y)→(u, v)

- Đặt y – x = u; y + x/3 = v
- Ta có x = 3(v-u)/4; y = (u + 3v)/4
- ∂(x, y)/∂(u, v) = -3/4 (Có thể hiểu là:

  dxdy = 3dudv/4; dudv = 4dxdy/3)

$$\iint_{D_1} u\left|-\frac{3}{4}\right|dudv = \frac{3}{4}\int_{-3}^{1} udu \int_{7/9}^{5} dv = -\frac{38}{3}$$

Ví dụ 2

- Tính ***diện tích hình phẳng D***:

$$D:\begin{cases} y^2 = x; y^2 = \dfrac{5}{2}x \\ x^2 = 2y; x^2 = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

HD giải Ví dụ 2

- Đặt $y^2/x = u$; $x^2/y = v$
- Ta có $1 \le u \le 5/2$; $1/3 \le v \le 2$
- Định thức Jacobi $\partial(u,v)/\partial(x,y) = -3$
- Nghĩa là dudv = 3dxdy $\leftrightarrow$ dxdy = dudv/3
- Diện tích cần tìm là:

$$\iint_D dxdy = \iint_{D_1} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} \quad (DVDT)$$

Nội dung BG-9-TII-(Tuần thứ chín)

- *Các ứng dụng vật lý củaTích phân bội hai (Mục 20.3)*

- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược những ý chính trong các mục sẽ học

- Hết BG-8-Toán II (Ngày 5/4/2008)

Giải tích nhiều biến số

Bài giảng 9-Toán II (Khóa 49)

Phó Đức Anh

Trường Đại học Thủy lợi

Chương II- Tích phân bội (tiếp)

Nội dung buổi ba/năm

- *Các ứng dụng vật lý của Tích phân bội hai (Mục 20.3)*
- *Tính diện tích mặt cong (Mục 20.8)*

Tiết thứ nhất

- *Các ứng dụng vật lý của Tích phân bội hai (Mục 20.3)*

1). Tính khối lượng tấm phẳng
2). Mô men đối với các trục Ox, Oy…
3). Tọa độ khối tâm của tấm phẳng
4). Mô men quán tính…

1). Tính khối lượng tấm phẳng

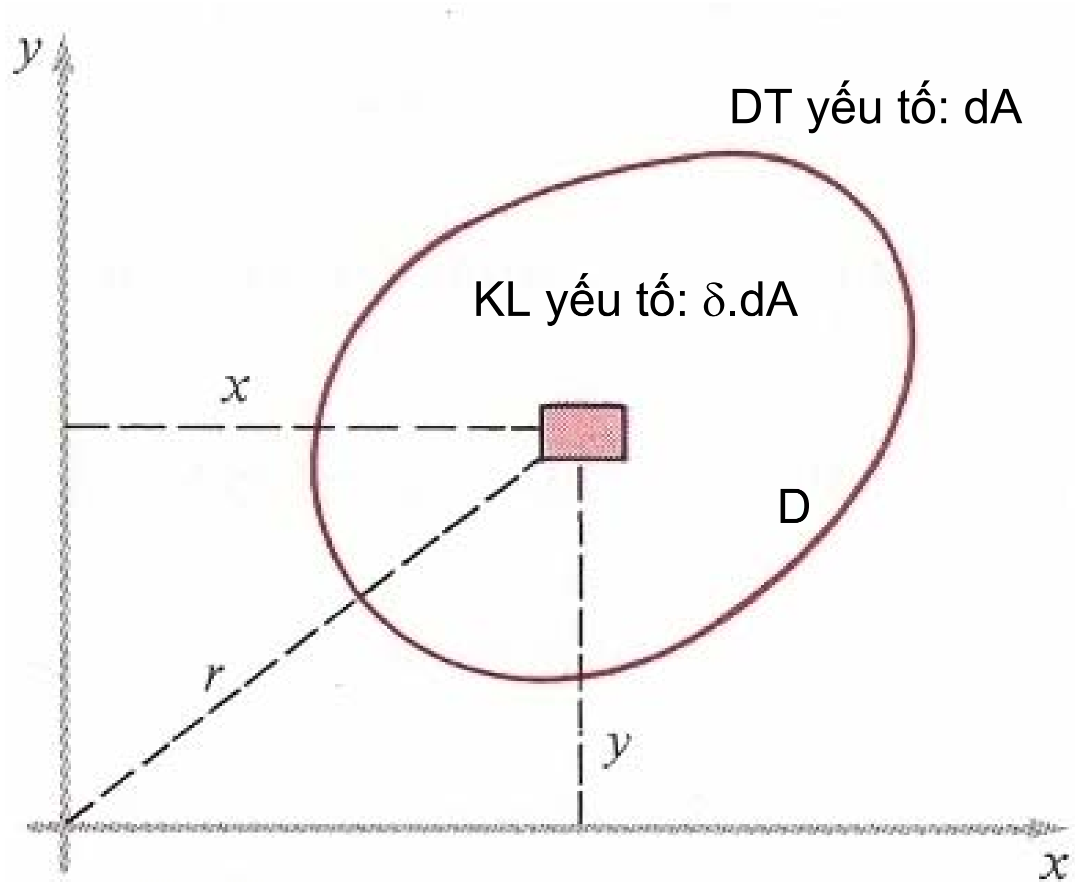
- Tấm phẳng D$\subset$(xy) có ***khối lượng riêng*** (tỷ trọng, mật độ) phụ thuộc vào từng điểm
- Khối lượng của yếu tố diện tích dA là:
- ***Công thức*** tính khối lượng của tấm phẳng

$$\delta = \delta(x, y)$$

$$\delta(x, y)\,dA$$

$$M = \iint_D \delta(x, y)\,dA$$

Hình 20.14 (trang 129)



Trong hình vẽ trên

- Ta coi x là khoảng cách từ khối lượng yếu tố: $\delta(x, y)dA$ đến trục y,
- y là khoảng cách từ khối lượng yếu tố: $\delta(x, y)dA$ đến trục x
- Khi xét tác dụng quay của khối lượng quanh một trục, người ta đưa ra khái niệm ***mô men đối với trục*** (bằng tích giữa khối lượng và khoảng cách từ nó đến trục (còn gọi là ***cánh tay đòn***))

2).Mô men

- Khối lượng của yếu tố diện tích dA có ***mô men đối với trục x; (trục y)***

$$y\delta\left(x,y\right)dA;(x\delta\left(x,y\right)dA)$$

- ***Công thức*** tính mô men đối với trục x; trục y của tấm phẳng

$$\begin{cases} M_x = \iint\limits_D y\delta\left(x,y\right)dA \\ M_y = \iint\limits_D x\delta\left(x,y\right)dA \end{cases}$$

3). Tọa độ khối tâm của tấm phẳng

- ***Tọa độ khối tâm*** của tấm phẳng D, với hàm khối lượng riêng (tỷ trọng, mật độ):

$$\delta = \delta(x, y)$$

được tính theo công thức:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\iint\limits_D x\delta(x, y)\,dA}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,dA} \\ \overline{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\iint\limits_D y\delta(x, y)\,dA}{\iint\limits_D \delta(x, y)\,dA} \end{cases}$$

4). Mô men quán tính

- ***Mô men quán tính*** của tấm phẳng D đối với ***trục x***; (trục y)

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dA$$

$$(I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dA)$$

- ***Mô men quán tính*** của tấm phẳng D đối với ***gốc O***

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA$$

Tấm phẳng đồng chất

- Khối lượng riêng $\delta(x, y) = \rho$ = hằng số tại $\forall (x, y) \in D$
- Khi đó các công thức trên sẽ đơn giản hơn…
- Các bạn ***tự viết lại*** các công thức tính khối lượng, mô men và mô men quán tính đối với hai trục, đối với gốc O và công thức cho tọa độ khối tâm của tấm phẳng đồng chất

Ví dụ 1

- Biết khối lượng riêng theo M(x, y) là $\delta(M) = xy$. Tính khối lượng, mô men và mô men quán tính đối với trục x, đối với gốc O và xác định tọa độ khối tâm của hình vuông OABC, biết A(a, 0); B(a, a); C(0, a)
- ***HD.*** Khối lượng

$$M = \iint_D xydA = \int_0^a \int_0^a xydydx = \int_0^a \frac{a^2}{2} xdx = \frac{a^4}{4} (DVKL)$$

Mô men đối với trục x, trục y

- Mô men của tấm vuông OABC đối với trục y

$$M_y = \iint_D x(xy)dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^a x^2 ydydx = \int_0^a \frac{a^2x^2}{2}dx = \frac{a^5}{6}$$

- Do ***tính đối xứng,*** Mô men của tấm vuông OABC đối với trục x cũng bằng: $a^5/6$

Tọa độ khối tâm

của tấm vuông OABC được tính theo công thức:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{2a}{3}; \\ \overline{y} = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

Mô men quán tính

- đối với trục Ox; trục Oy và đối với gốc O

$$I_x = \iint_D y^2 (xy) dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^a xy^3 dydx = \int_0^a \frac{a^4 x}{4} dx = \frac{a^6}{8} = I_y$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)(xy) dxdy = I_x + I_y = \frac{a^6}{4}$$

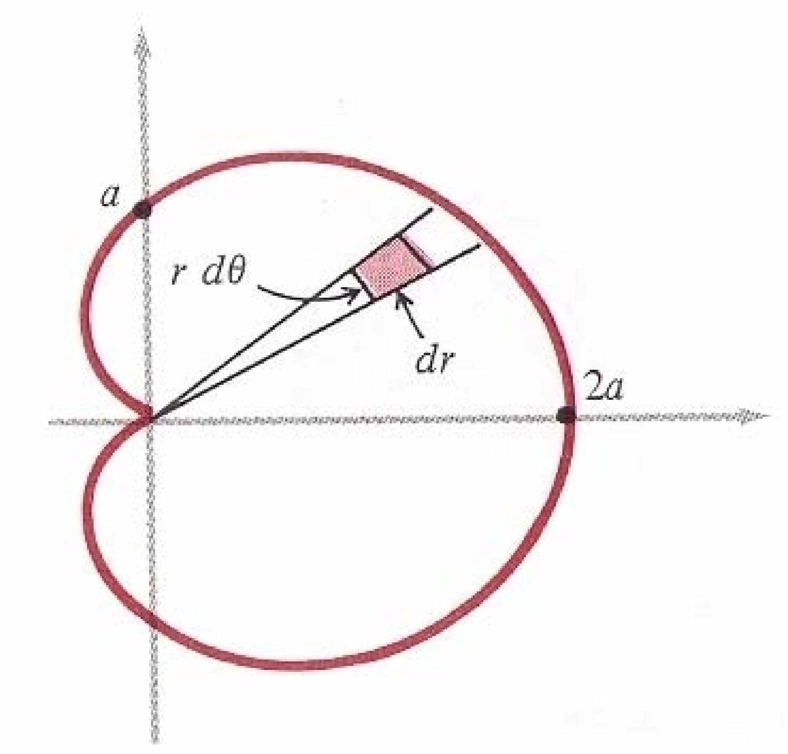
Ví dụ 2

- Xác định tọa độ khối tâm của hình tim đồng chất có biên:

  $$r = a(1+\cos\theta)$$

- ***HD.*** Do tính đối xứng, khối tâm của hình tim sẽ nằm trên trục x, nghĩa là:

- Hình 20.19, trang 135



$$\bar{y}=0; \qquad \bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dA}{A}=\frac{2}{3\pi a^2}\iint\limits_D x\,dA$$

$$\iint\limits_D x\,dA=\iint\limits_{D_1} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta=2\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta=\cdots=\frac{5\pi a^3}{4}\rightarrow\bar{x}=\frac{5a}{6}$$

Tiết thứ hai

- *Các ứng dụng của Tích phân bội hai*

  (Ôn tập và nâng cao)

1). Diện tích mặt cong (Mục 20. 8)
2). Ví dụ ứng dụng

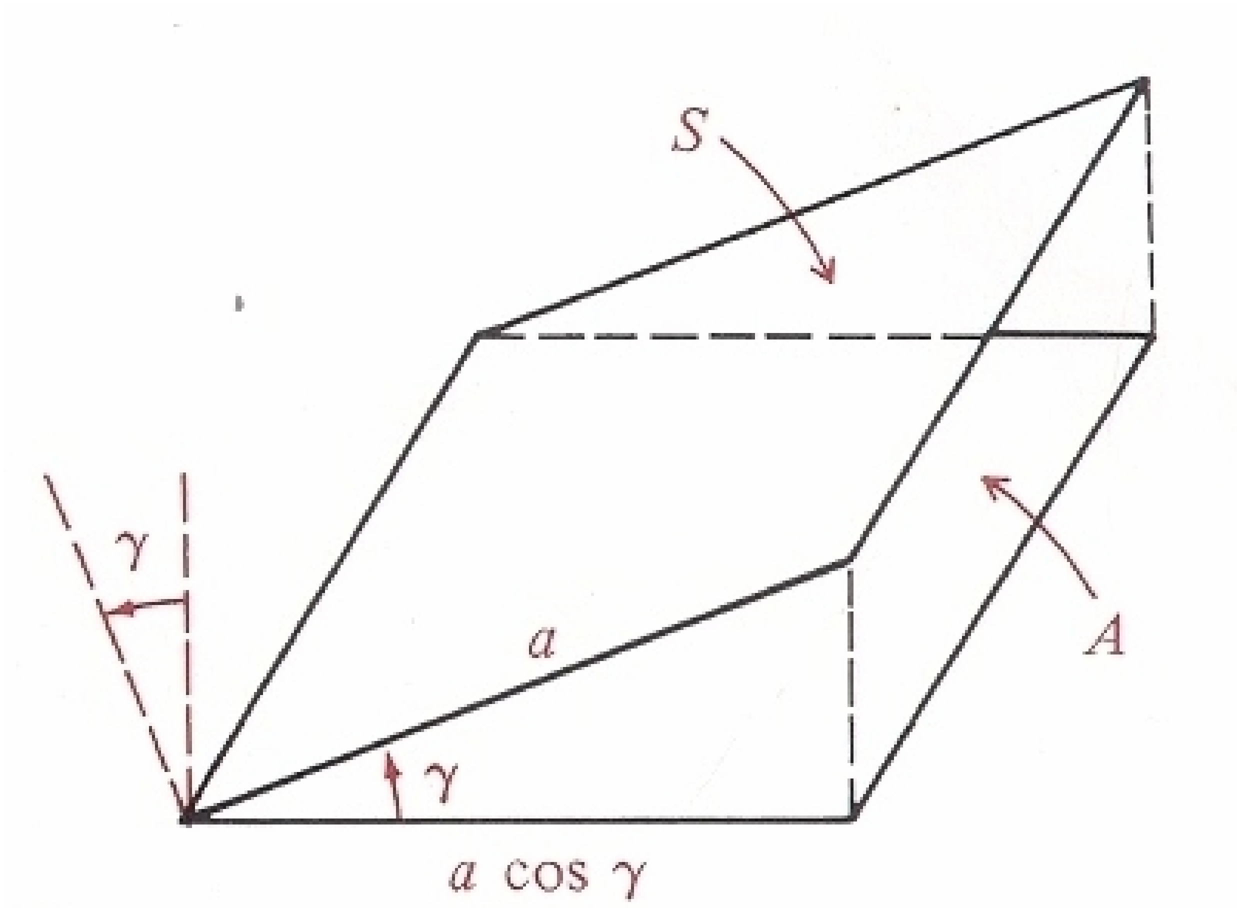
1). Diện tích mặt cong (Mục 20. 8)

- Xét mặt cong có phương trình $z = f(x, y)$ xác định trên miền hữu hạn $D \subset (xy)$
- ***Hình chiếu vuông góc*** của phần mặt cong khá bé (với diện tích dS) xuống (xy) là một hình phẳng trong D có diện tích $dA = dxdy$
- Theo ***định lý về diện tích hình chiếu***, ta có:

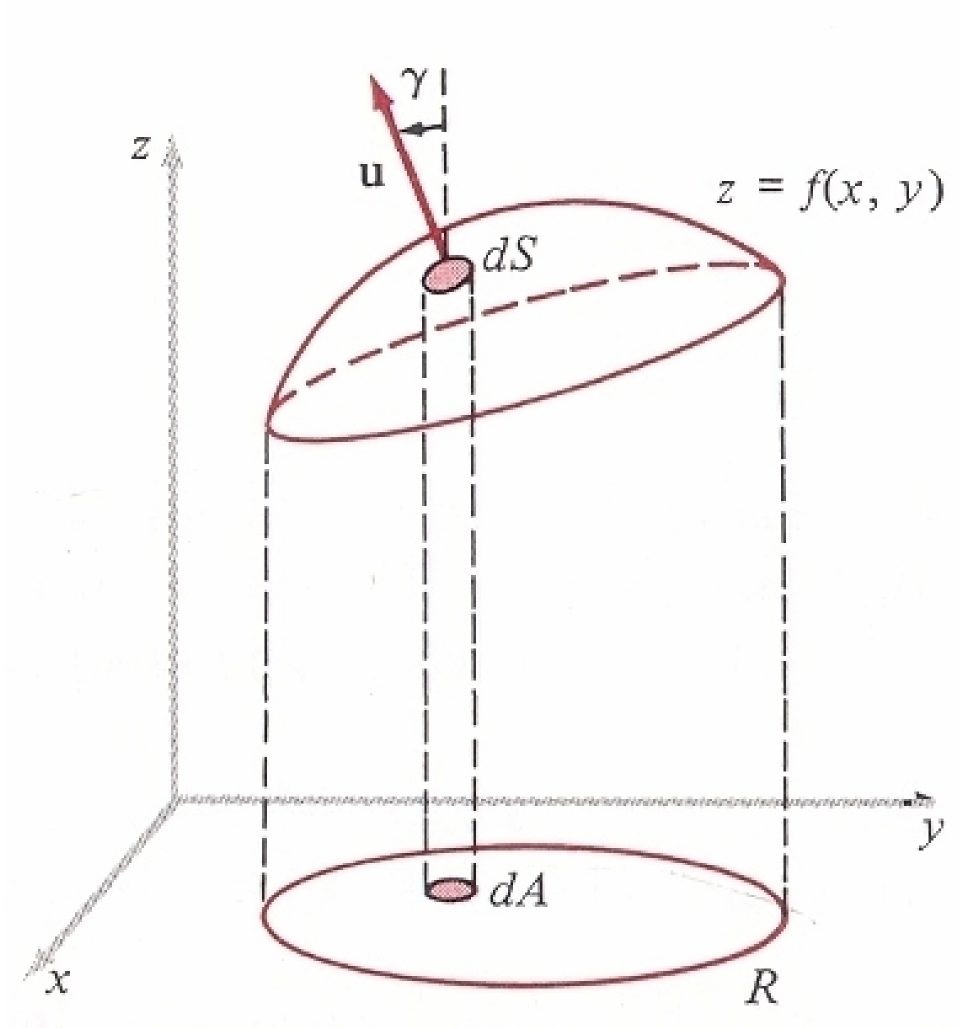
$$dS.\cos\gamma = dA$$

- với γ là góc giữa pháp tuyến tại một điểm trên dS với chiều dương của trục z

Hình 20.35, trang 158



Hình 20.36, trang 159



Tính dS

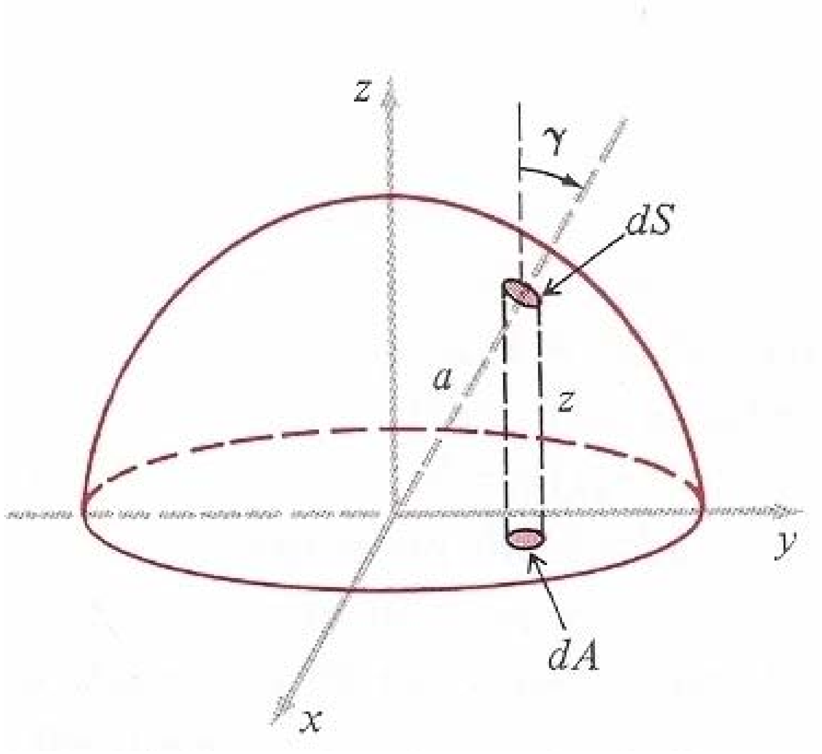
$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}.\vec{k}}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{(-z_x.0 - z_y.0 + 1.1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

$$dS = \frac{dA}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.dA$$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.dA = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.dxdy$$

3). Ví dụ 1

- Tính DT nửa mặt cầu bán kính a bằng ***TP bội hai*** (Hình 20.37, trang 160)
- ***HD.*** Xét nửa mặt cầu trên:
- Đầu tiên hãy tính dS?
- Sau đó, xác định miền lấy TP bội hai (Nên tính theo hệ tọa độ nào?)



Tính vi phân diện tích dS

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)};$$

$$z_x = -\frac{x}{z}; z_y = -\frac{y}{z};$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}} dxdy = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}$$

Diện tích nửa cầu trên

$$S = \iint_D dS = a\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}$$

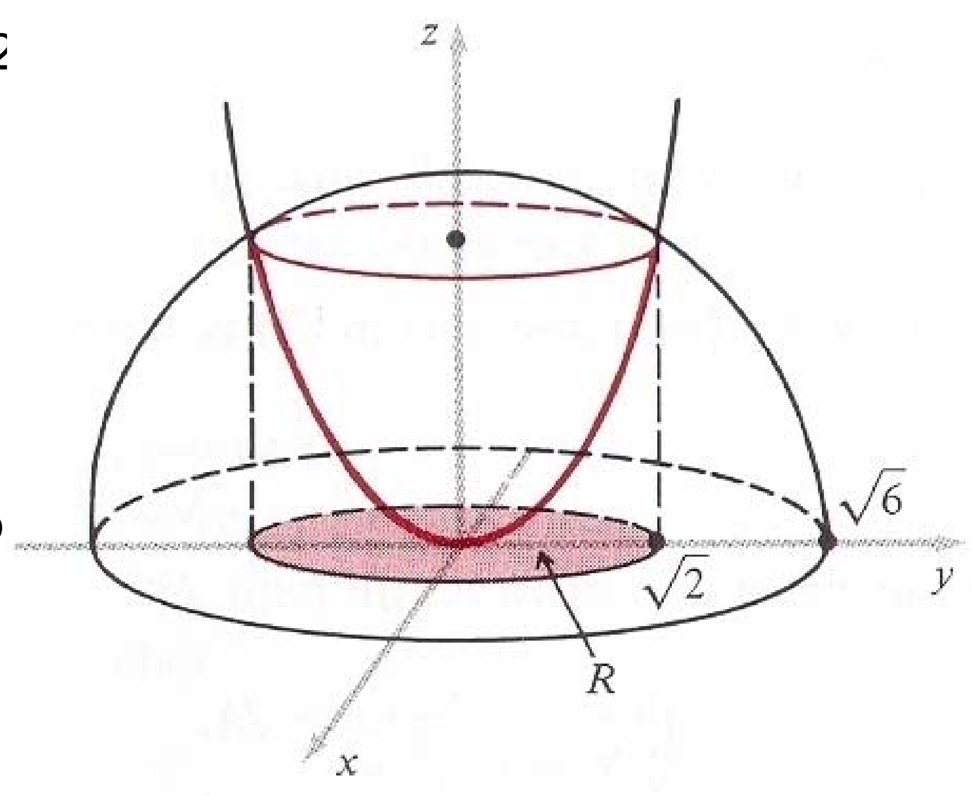
$$= a\iint_{D_1} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\frac{a}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - r^2)$$

$$= -a.2\pi.\sqrt{a^2 - r^2}\,\Big|_0^a = 2\pi a^2$$

Ví dụ 2

- Tính DT ***phần mặt cong parabôlôít tròn xoay***: $z = x^2 + y^2$ ***nằm trong mặt cầu:***

  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$
- ***HD.*** Tìm z, z_x, z_y.
- Tính dS
- Xác định miền lấy TP và xác định các cận TP
- Hình 20.38, trang 161



HD giải VD 2

- $z = x^2 + y^2 \rightarrow z_x = 2x;\ \ z_y = 2y;$
- $dS = [1 + 4(x^2 + y^2)]^{1/2} dxdy$
- ***Giải phương trình:*** $[x^2 + y^2]^2 = 6 - (x^2 + y^2)$ được: $x^2 + y^2 = 2$ (loại giá trị: $x^2 + y^2 = -3$)
- Suy ra ***hình chiếu trên (xy)*** của phần mặt parab…tròn xoay là hình tròn: $x^2 + y^2 \le 2$
- Nên tính TP trong HTĐ cực trên miền D_1: $0 \le \theta \le 2\pi;\ 0 \le r \le \sqrt{2}$

Thực hiện phép tính

$$S = \iint\limits_{D_1} \sqrt{1+4r^2}\, r dr d\theta =$$

$$4 \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1+4r^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3} \qquad (DVDT)$$

2). Ví dụ ứng dụng

- Tính khối lượng và xác định tọa độ khối tâm của tam giác OAB biết A(a, 0) B(0, a) và O(0, 0). Cho khối lượng riêng $\delta = x^2 + y^2$

$$M = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2)dydx$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a-x) + \frac{(a-x)^3}{3} \right] dx = \frac{a^4}{6}(DVKL)$$

$$M_x = \iint_D (x^2 y + y^3)\,dxdy = \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 y + y^3)\,dydx$$

$$\int_0^a \left[x^2 \frac{(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{4} \right] dx = \frac{a^5}{15} \rightarrow \bar{y} = \frac{2a}{5}$$

$$M_y = \iint_D (x^3 + xy^2)\,dxdy = \frac{a^5}{15} \qquad \rightarrow \bar{x} = \frac{2a}{5}$$

Nội dung BG-10-TII-(Tuần thứ 10)

- *Tích phân bội ba và ứng dụng (Mục 20.5)*
- Các bạn nên đọc trước để hiểu sơ lược những ý chính trong các mục sẽ học
- Hết BG-9-Toán II (Ngày 15/4/2008)