BÀI 1: GIỚI THIỆU VECTƠ & PHƯƠNG PHÁP GAUSS GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

Theo dòng lịch sử, môn Đại số tuyến tính khởi đầu với việc giải và biện luận các hệ phương trình bậc nhất. Về sau để có thể hiểu rõ cấu trúc của tập nghiệm và điều kiện để một hệ phương trình bậc nhất có nghiệm, người ta xây dựng những khái niệm trừu tượng hơn như không gian vectơ và phép biến đổi tuyến tính.

Ngày nay ĐSTT được ứng dụng vào hàng loạt lĩnh vực khác nhau, từ Giải tích tới Hình học, từ Cơ học, Vật lý tới Kỹ thuật... Vì thế, nó trở thành một môn học cơ sở cho sinh viên các chuyên ngành khoa học cơ bản và công nghệ trong tất cả các trường đại học.

1. GIỚI THIỆU VECTƠ

1.1. VECTƠ HÌNH HỌC

1.1.1. Định nghĩa

Vectơ hình học là đoạn thẳng được định hướng

1.1.2. Các phép toán vectơ

Phép cộng hai vectơ: Tổng $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ của hai vectơ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{w}$ được xác định theo Quy tắc ba điểm hoặc Quy tắc hình bình hành.

Phép nhân vectơ với một vô hướng: Tích $c\boldsymbol{v}$ của vectơ $\boldsymbol{v}$ với số thực c là một vectơ được xác định như sau:

1) Nếu $x \geq 0$ thì $x\boldsymbol{v}$ cùng hướng với $\boldsymbol{v}$;

   Nếu $x < 0$ thì $x\boldsymbol{v}$ ngược hướng với $\boldsymbol{v}$;

2) $|x\boldsymbol{v}| = |x|\cdot|\boldsymbol{v}|$.

c thường được gọi một ***vô hướng***.

Phép trừ hai vectơ: Hiệu hai vectơ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{w}$ được xác định bởi

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} := \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w}).$$

Tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n$ là một vectơ có dạng $c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\dots+c_n\boldsymbol{v}_n$ với $c_1, c_2, \dots, c_n \in R$.

Nhận xét

1) Khi vectơ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, tập tất cả các tổ hợp $c\boldsymbol{v}$ lấp đầy một đường thẳng.

2) Khi những vectơ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{w}$ không cùng phương, tập tất cả các tổ hợp $c_1\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{w}$ lấp đầy một mặt phẳng.

3) Khi ba vectơ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ không đồng phẳng, tập tất cả các tổ hợp $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$ lấp đầy không gian.

Chú ý: Tích vô hướng của hai vectơ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{w}$ là số thực

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} := |\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{w}|\cos\varphi,$$

trong đó φ là góc giữa hai vectơ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{w}$.

1.2 ▪ BIỂU DIỄN VECTƠ HÌNH HỌC DƯỚI DẠNG TỌA ĐỘ

Việc tính một tổ hợp tuyến tính của nhiều vectơ hình học nói chung là phức tạp. Tuy nhiên việc này được giải quyết rất đơn giản khi biểu thị các vectơ hình học dưới dạng tọa độ.

Với mỗi vectơ hình học $\boldsymbol{v}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy luôn luôn tồn tại duy nhất hai số x và y sao cho $\boldsymbol{v} = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}}$. Ta gọi cặp số (x, y) là ***tọa độ*** của $\boldsymbol{v}$. Để tiện làm việc về sau, cặp số này còn được viết ở dạng

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ta đồng nhất $\boldsymbol{v}$ với cặp số này:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Với mỗi vectơ $\boldsymbol{v}$ hình học trong không gian $Oxyz$ luôn luôn tồn tại duy nhất ba số x, y và z sao cho

$$\boldsymbol{v} = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}..$$

Ta gọi bộ ba số (x, y, z) là ***tọa độ*** của $\boldsymbol{v}$. Để tiện làm việc về sau, bộ ba số này còn được viết ở dạng

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ta đồng nhất $\boldsymbol{v}$ với cặp số này:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Giả sử

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

và c là một vô hướng. Ta có

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}, \ c\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = x.x' + y.y', \ |\boldsymbol{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Đối với các vectơ hình học trong không gian ta cũng có những điều tương tự trên.

1.3 ▪ MỞ RỘNG KHÁI NIỆM VECTƠ

Từ mục 1.2, ta có thể mở rộng khái niệm vectơ một cách tự nhiên như sau:

Gọi dãy gồm n số thực

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

là một ***vectơ cột n - thành phần***. Ta còn có thể viết như sau

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

nhưng không được hiểu là vectơ hàng.

Tập các vectơ cột n - thành phần được kí hiệu là $\mathbb{R}^n$

Trên tập R^n ta định nghĩa các phép toán, tổ hợp, tích vô hướng, độ dài của vectơ tương tự như ở mục 1.2. Hai vectơ n - thành phần được gọi là ***vuông góc*** nếu tích vô hướng của chúng bằng không.

Sau này ta gọi R^n là một ***không gian n-chiều***. Như vậy, tập các vectơ hình học trên mặt phẳng, hay ***không gian 2-chiều*** là

$$R^2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, x, y \in R\}$$

Tập các vectơ hình học trong không gian, hay ***không gian 3-chiều*** là

$$R^2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, x, y, z \in R\}$$

2. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

2.1■ ĐỊNH NGHĨA

Một hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn (hệ $m \times n$) là một hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Trong đó các a_{ij}, b_j là các số thực, x_i là các ẩn.

2.2. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐSTT

2.2.1. Dạng hàng: Là dạng biểu diễn trong định nghĩa 2.1

2.2.2. Dạng phương trình véc tơ:

Ký hiệu

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, .., n; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ phương trình có thể viết dưới dạng phương trình véc tơ

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n = b$$

2.2.3. Dạng ma trận:

Định nghĩa Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Được gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình

Ký hiệu $h_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Ta định nghĩa phép nhân ma trận $m \cdot n$ với véc tơ n tọa độ (kết quả là véc tơ m tọa độ) như sau

$$Ax = x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_nc_n = \begin{bmatrix} h_1 \cdot x \\ h_2 \cdot x \\ \vdots \\ h_m \cdot x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ phương trình có thể viết dưới dạng $Ax = b$

Ví dụ 1. Thực hiện phép nhân ma trận với véc tơ theo hai cách

$a.\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$b.\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ví dụ 2. Hãy biểu diễn các hệ sau dưới ba dạng: hàng, phương trình véc tơ và phương trình ma trận

$$a.\quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$b.\quad x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c.\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.3 ▪ PHƯƠNG PHÁP KHỬ GAUSS

2.3.1. Ma trận bậc thang và trụ

Quan sát các ma trận sau và nhận xét

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nhận xét: Nếu kẻ một đường chéo từ phần tử hàng 1 cột 1 thì tất cả các phần tử dưới đường chéo đều bằng 0.

Những ma trận như trên được gọi là ma trận hình thang và những phần tử khác 0 đầu tiên trong một hàng gọi là trụ

2.3.2. Ma trận mở rộng

Định nghĩa. Đối với hệ $Ax=b$, ta gọi ma trận $[A|b]$ là ma trận mở rộng của hệ

Ví dụ. Xác định ma trận mở rộng của hệ

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y = -2 \\ y - 5z = 1 \end{cases}$$

2.3.3. Hệ dạng bậc thang và cách giải

Định nghĩa. Hệ dạng bậc thang là hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng dạng bậc thang. Ẩn có hệ số là trụ được gọi là biến trụ. Những ẩn còn lại được gọi là biến tự do.

Ví dụ. Trong các hệ sau hệ nào là hệ bậc thang, xác định biến trụ và biến tự do ở các hệ bậc thang

$$a.\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y = -2 \\ y - 5z = 1 \end{cases}$$

$$b.\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -y + 3z = 2 \\ 5z = 1 \end{cases}$$

$$c.\begin{cases} x - y + 2z + t = 11 \\ 2y + 3z - t = -1 \\ -5z + 3t = 3 \end{cases}$$

Một trường hợp đặc biệt của hệ bậc thang là hệ tam giác

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots . + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Trong đó $a_{ii} \neq 0$.

Cách giải hệ dạng tam giác: Sử dụng phép thế ngược từ dưới lên.

Rõ ràng hệ tam giác có nghiệm duy nhất.

Ví dụ. Hệ $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -y + 3z = 2 \\ 5z = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(-1, -\frac{7}{5}, \frac{1}{5})$

Cách giải hệ bậc thang:

Chuyển tất cả các hạng tử chứa biến tự do sang vế phải và coi các biến tự do như các tham số, hệ bậc thang trở thành hệ tam giác

Ví dụ. Xét hệ

$$\begin{cases} \mathbf{1}x - y + 3z + t = 1 \\ \mathbf{-1}y + 3z - t = 2 \end{cases}$$

Chuyển hệ về

$$\begin{cases} 1x - y = 1 - 3z - t \\ \quad -1y = 2 - 3z + t \end{cases}$$

Khi đó coi z, t như các tham số thực tùy ý, ta có nghiệm của hệ có dạng

$$(-1 - 2t, -2 + 3z - t, z, t)$$

2.3.4. Giải hệ phương trình bất kỳ

Để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát bất kỳ, ta sử dụng phương pháp khử Gauss. Tư tưởng của phương pháp khử Gauss là chuyển hệ bất kỳ về hệ bậc thang bằng cách sử dụng các phép biến đổi hàng, cụ thể là:

- Đổi chỗ hai hàng của hệ
- Lấy một phương trình cộng (trừ) với bội của một phương trình khác trong hệ
- Nhân cả hai vế của một phương trình với một số khác 0.

Chú ý: Trong quá trình thực hiện nếu xuất hiện phương trình dạng $0 = 0$ thì ta loại khỏi hệ, còn nếu xuất hiện dạng $0 = b$ thì hệ vô nghiệm.

Ví dụ. Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} ax + y + z = 3 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

a. Giải hệ với a = 3

b.Tìm a để hệ vô nghiệm

Giải.

a. $[A|b] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 30 & 18 \end{bmatrix}$

Từ đây ta có

$$(x, y, z) = (\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5})$$

a. $[A|b] = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & a^2 - 3 \\ 0 & a - 1 & a^2 - 1 & a^2 - 3 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a^2 - 1 & a - 1 & a^2 - 3 \\ 0 & 0 & a(a-1)(a+2) & a(a^2 - 3) \end{bmatrix}$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $a = 1$ hoặc $a = -2$

<u>Chú ý.</u> Ta sử dụng trụ trong cột *j* để khử các số cùng cột *j* nằm bên dưới và khử theo quy tắc **"từ trên xuống dưới, từ trái qua phải"**

Ví dụ. Giải hệ

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG
BÀI GIẢNG TUẦN 1

1. Mở rộng khái niệm vectơ trong R^n

2. Ba cách biểu diễn một hệ phương trình đại số tuyến tính.

3. Phương pháp khử Gauss

BÀI 2: MA TRẬN

Trong mục này ta định nghĩa những phép toán số học với ma trận và xét một số tính chất đại số của chúng. Ma trận là một trong những công cụ mạnh nhất trong toán học. Để sử dụng ma trận có hiệu quả, ta phải thành thạo số học ma trận.

1. KHÁI NIỆM MA TRẬN

1.1. Định nghĩa

a. *Một bảng số gồm m · n số thực được xếp thành m hàng và n cột được gọi là một* ***ma trận m×n***:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dùng những chữ cái A, B, C,...để đặt tên cho ma trận.

a_{ij} là ***phần tử nằm ở hàng i và cột j***.

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ là ***hàng thứ i***

$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ là ***cột thứ j***

Đôi khi ta viết tắt ma trận trên là (a_{ij}).

b. *Ma trận n×n được gọi là* ***ma trận vuông cấp n***.

Các phần tử a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ *lập nên* ***đường chéo*** *của nó.*

c. ***Ma trận tam giác trên*** $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$

Ma trận tam giác dưới. $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

d. ***Ma trận đường chéo*** $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$

e. ***Ma trận đơn vị*** $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

f. ***Ma trận-không O*** *là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0.*

g. *Nói* $A = (a_{ij})$ *và* $B = (b_{ij})$ *bằng nhau nếu* $a_{ij}=b_{ij}$ *với mỗi cặp i và j.*

2. CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

2.1. Phép nhân ma trận với một số

2.1.1.Định nghĩa *Nếu* $A = (a_{ij})$ *là ma trận m×n và c là một số, thì*

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ... & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ... & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & ... & ca_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận đối *của A là ma trận (-1)A, ký hiệu là -A.*

Ví dụ 1

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Nhận xét Nhân một vectơ của R^n với một vô hướng chính là nhân một ma trận n×1 với một số.

2.2. Phép cộng ma trận

2.2.1. Định nghĩa *Nếu* $A = (a_{ij})$ *và* $B = (b_{ij})$ *là hai ma trận m×n, thì*

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Nhận xét Cộng hai vectơ của R^n chính là cộng hai ma trận $n\times1$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

2.3. Phép nhân ma trận

2.3.1. Định nghĩa *Giả sử A là ma trận $m \times n$, B là ma trận $n \times p$. Khi đó ma trận tích $C = AB$ là một ma trận $m \times p$ được tính bởi*

$$C = AB = [A\boldsymbol{b_1}\ \ A\boldsymbol{b_2}\ \ \ldots A\boldsymbol{b_p}]$$

Trong đó $\boldsymbol{b_j}$ là cột thứ j của ma trận B (j=1,..,p)

Ví dụ 3

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \left[A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}$$

$$BA = \left[B\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}\ B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\ B\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & 30 \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Chú ý.

1) Ma trận $C = AB$ có phần tử hàng i cột j là

$$\boldsymbol{c_{ij} = (hàng\ i\ của\ A) \cdot (cột\ j\ của\ B)}$$

Ví dụ 4

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ thì không thể nhân A với B

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

2) Hai ma trận vuông có thể nhân với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng cỡ.

3) Nói chung $AB \neq BA$

4) $AB = O$ không suy ra $A=O$ hoặc $B=O$.

Ví dụ 5

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ thì $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.4. Những tính chất của phép toán ma trận

Định lý 2.2.1 Với những ma trận bất kỳ A, B, C và những số thực bất kỳ x, y ta có các đẳng thức sau

1. $A + B = B + A$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. $A + O = A$

4. $A + (-A) = O$

5. $x(A + B) = xA + xB$

6. $(x + y)A = xA + yA$

7. $(xy)A = x(yA)$

8. $1A = A$

9. $A(BC) = (AB)C$

10. $A(B + C) = AB + AC$

11. $(A+B)C = AC + BC$

12. $AI = A, IA = A$

13. $AO = O, OA = O$

3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

3.1. Định nghĩa *Ma trận vuông A được gọi là **ma trận khả nghịch** nếu tồn tại ma trận B sao cho AB = BA = I. Ta gọi B là **ma trận nghịch đảo** của A.*

Nếu A khả nghịch thì **ma trận nghịch đảo của nó là duy nhất.** Điều này cho phép ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

Ví dụ 6

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ có $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Tổng quát

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ khả nghịch nếu và chỉ nếu $ad - bc \neq 0$. (tại sao?) Khi ấy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Định lý 2.3.1 Nếu A và B là hai ma trận $n \times n$ khả nghịch, c là số khác 0, thì

1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

Chú ý

1) Khi A khả nghịch, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ có nghiệm duy nhất là $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

2) Giả sử tồn tại $\boldsymbol{x}$ khác vectơ-không sao cho $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Khi ấy A không khả nghịch.

3.2. Tìm A^{-1} bằng phương pháp Gauss-Jordan

Tư tưởng của phương pháp Gauss-Jordan là sử dụng các phép toán hàng trên ma trận [A I], bao gồm

I. *Đổi chỗ hai hàng của ma trận.*

II. *Lấy một hàng của ma trận trừ đi bội của một hàng khác trong ma trận.*

III. *Nhân một hàng của ma trận với một số khác 0.*

để biến đổi ma trận [A I] thành ma trận [I B], khi đó $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$

$$[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{I}] \to [\boldsymbol{I}\ \ \boldsymbol{A}^{-1}].$$

Ví dụ 7. *Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$[A|I] = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 57 & 0 & 6 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 19 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 19 & 0 & 0 & 6 & 17 & -10 \\ 0 & 57 & 0 & 6 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 19 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{19} & \frac{17}{19} & -\frac{10}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix}$$

Vậy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{19} & \frac{17}{19} & -\frac{10}{19} \\ \frac{2}{19} & -\frac{7}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{1}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix}$$

Chú ý. ***Để biến đổi*** $[A\ \ I] \to [I\ \ A^{-1}]$ ta dùng đường chéo chính chia ma trận *A* thành 2 phần, sử dụng trụ để khử, phần dưới đường chéo khử "Từ trên xuống dưới, từ trái sang phải", phần trên đường chéo khử "Từ dưới lên trên, từ phải sang trái "

4. MA TRẬN CHUYỂN VỊ

4.1. Định nghĩa *Cho A là ma trận m×n.* ***Ma trận chuyển vị*** *của A, ký hiệu là* A^T*, là ma trận có cột thứ j là hàng thứ j của A (j = 1, ..., m).*

Ví dụ

Nếu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ thì $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

4.2. Nhận xét

Nếu A là ma trận $m \times n$, thì A^T là ma trận $n \times m$ và $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Tính chất 2.4.1

1. $(A^T)^T = A$

2. $(cA)^T = cA^T$

3. $(A + B)^T = A^T + B^T$

4. $(AB)^T = B^T A^T$

5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

4.3. Định nghĩa *Ma trận A được gọi là **ma trận đối xứng** nếu $A^T = A$.*

Ví dụ Hai ma trận sau là ma trận đối xứng

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

A là ma trận $n \times n$ đối xứng $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}\ \forall i$ và $j \in \{1, ..., n\}$.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 2

1. Khái niệm ma trận.

2. Các phép toán ma trận và tính chất.

3. Ma trận nghịch đảo. Phương pháp Gauss-Jordan để tìm ma trận nghịch đảo.

4. Ma trận chuyển vị.

BÀI 3: ĐỊNH THỨC

Tìm một tiêu chuẩn thuận tiện để biết khi nào một ma trận vuông khả nghịch.

Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Khi nào thì ma trận *A* khả nghịch? Ta thấy

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy nếu *ad* - *bc* ≠ 0, thì *A* khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ad - *bc* là định thức cấp 2 (của ma trận *A*).

Ta muốn **mở rộng khái niệm định thức cho ma trận *n*×*n* bất kỳ** để tìm được tiêu chuẩn khả nghịch cho ma trận *n*×*n*.

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÔNG THỨC TÍNH ĐỊNH THỨC

1.1. Định nghĩa: Định thức của một ma trận vuông A cấp $n \times n$ là một số thực đại diện cho ma trận A, kí hiệu là $\det A$ hoặc $|A|$. Định thức cho ta biết ma trận A có khả nghịch không, cụ thể là:

$$\det A \neq 0 \implies A \text{ khả nghịch}$$

$$\det A = 0 \implies A \text{ không khả nghịch}$$

1.2. Công thức tính định thức

1.2.1. Định thức cấp 2

Định thức của ma trận vuông cấp hai $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ví dụ. Tính các định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1.2.2. Định thức cấp 3

Định thức của ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ là

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

$$-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Quy tắc Sarrus: Viết thêm hai cột 1, 2 vào bên phải ma trận

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Những số hạng $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$ tương ứng với “đường chéo đi xuống”, còn những số hạng $-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ tương ứng với “đường chéo đi lên”.

1.2.3. Định thức cấp n

Định nghĩa *Giả sử A là ma trận n×n có các phần tử là a_{ij}. Bỏ đi hàng i và cột j của A, được ma trận (n-1)×(n-1), ký hiệu là M_{ij}. Ta gọi số* $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ *là* ***phần phụ đại số của*** *a_{ij}, ký hiệu là* ***C_{ij}.***

Ví dụ 3 Cho A là ma trận 3×3. Phần phụ đại số của a_{12} là

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}.$$

Công thức Phần phụ đại số Cho A là ma trận $n \times n$ với $n \geq 2$. Ta có:

$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$ (*Khai triển định thức theo hàng i*),

$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$ (*Khai triển định thức theo cột j*).

Những công thức này còn được gọi là ***Khai triển Laplace*** theo hàng hay cột.

Ví dụ 5 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Giải Khai triển theo hàng 1, ta có

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -4 + 9 + 2(-3) = -1.$$

Chú ý Khi sử dụng Công thức phần phụ đại số, ta nên khai triển định thức theo hàng (hay cột) có nhiều 0 nhất.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐỊNH THỨC

Tính chất 3.1.1 $\det I = 1$.

Ví dụ

$$\det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 0.0 = 1$$

Tính chất 3.1.2 Định thức đổi dấu khi đổi chỗ hai cột hoặc hai hàng.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Tính chất 3.1.3 Định thức là hàm tuyến tính đối với một cột (hàng) khi cố định những cột (hàng) còn lại.

Ví dụ

$$\begin{vmatrix} ta & b \\ tc & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Chú ý. Với ma trận vuông A cấp $n \times n$ thì $\det(tA) = t^n \det A$

(tại sao?)

Tính chất 3.1.4 Nếu hai cột của *A* giống nhau, thì det*A* = 0. (tại sao?)

Tính chất 3.1.5 det*A* không đổi khi trừ một cột (hàng) của *A* đi một bội của cột (hàng) khác của *A*. (tại sao?)

Tính chất 3.1.6 Ma trận vuông có cột (hàng) toàn 0 thì định thức của nó bằng 0. (tại sao?)

Tính chất 3.1.7 Nếu *A* là ma trận tam giác thì det*A* = tích các phần tử trên đường chéo. (tại sao?)

Tính chất 3.1.8 Ma trận *A* khả nghịch khi và chỉ khi det$A \neq 0$.

Tính chất 3.1.9 Nếu *A* và *B* là hai ma trận vuông cùng cấp, thì det(*AB*)= det*A*det*B*.

Chú ý. Nếu *A* khả nghịch thì

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Tính chất 3.1.10 detA^T= det*A*.

Chú ý. Từ tính chất 5 và tính chất 7 ta có thêm một cách tính định thức là:

Biến đổi ma trận *A* bằng cách sử dụng phép biến đổi hàng trừ một hàng của *A* đi một bội của hàng khác của *A* để đưa về ma trận tam giác rồi sử dụng tính chất 7.

Ví dụ 8 Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Giải

$$D=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&3\\-3&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&3&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH THỨC

3.1. Giải hệ phương trình tuyến tính

Định lí 3.3.1 (Quy tắc Cramer) Giả sử $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ là hệ $n\times n$. Nếu $\det A\neq 0$, thì $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ có nghiệm duy nhất

$$x_1=\frac{\det B_1}{\det A}, x_2=\frac{\det B_2}{\det A}, \dots, x_n=\frac{\det B_n}{\det A}.$$

Trong đó ma trận B_j nhận được từ A khi thay vectơ $\mathbf{b}$ vào cột thứ j của nó.

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\-2x_1+x_2&=0\\-4x_1+x_3&=0.\end{aligned}$$

Giải

$$\det A=7, \det B_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1,$$

$$\det B_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&0&0\\-4&0&1\end{vmatrix}=2, \det B_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&0\\-4&0&0\end{vmatrix}=4.$$

Theo Quy tắc Cramer

$$x_1=\frac{1}{7}, x_2=\frac{2}{7}, x_3=\frac{4}{7}.$$

3.2. Công thức tìm A^{-1}

Định nghĩa *Giả sử A là ma trận n×n có các phần tử là a_{ij}. C_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}.* ***Ma trận phần phụ đại số*** *của A là*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Định lí 3.3.2 Nếu A khả nghịch thì

$$A^{-1} = C^T/\det A.$$

Ví dụ 2 Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải Khai triển Laplace theo hàng 1, ta có $|A| = 5$,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6, C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Theo định lý trên

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 3

1. **Định nghĩa định thức cấp *n*.**
2. **Các tính chất cơ bản của định thức.**
3. **Công thức phần phụ đại số.**
4. **Ứng dụng của định thức**

BÀI 4: KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ KHÔNG GIAN CON

MỞ ĐẦU. Xét tập các số thực R và tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp hai $Mat(R,2)$ với phép cộng và phép nhân thông thường. Ta thấy với cả hai tập hợp trên các tính chất sau đều đúng

V1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ $\forall$ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ trong **V** (*luật giao hoán*)

V2. $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ $\forall$ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ trong **V** (*luật kết hợp*)

V3. $\exists$ phần tử $\boldsymbol{0}$ trong **V** sao cho $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$

V4. Đối với mỗi $\boldsymbol{v}$ trong **V** $\exists$ $(-\boldsymbol{v}) \in \mathbf{V}$ sao cho $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$

V5. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$

V6. $(ab)\boldsymbol{v} = a(b\boldsymbol{v})$ $\forall a, b \in$ R và $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ (*luật kết hợp*)

V7. $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$ $\forall a \in$ R và $\forall$ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ (*luật phân phối phải*)

V8. $(a + b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v}$ $\forall a, b \in$ R và $\forall$ $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$ (*luật phân phối trái*)

Ngoài hai tập hợp trên, còn nhiều tập hợp khác cũng thỏa mãn các tính chất trên với phép cộng và phép nhân vô hướng định nghĩa phù hợp. Vì lý do ấy, đã ***xuất hiện một lý thuyết chung*** cho các hệ thống toán học chứa phép cộng và phép nhân với vô hướng mà được áp dụng cho nhiều bộ môn của toán học. Đó là ***Lý thuyết không gian vectơ***.

1. KHÔNG GIAN VECTƠ

1.1. Định nghĩa *Một* ***không gian vectơ*** **V** *trên* R *là một tập hợp không rỗng có hai phép toán*:

* *Phép* ***cộng vectơ*** *cho tương ứng mỗi cặp phần tử* **u, v** *thuộc* **V** *với duy nhất một phần tử thuộc* **V**, *được ký hiệu là* **u** +**v**. *Phép cộng này thỏa mãn các điều kiện* V1 *đến* V4,

* *Phép* ***nhân với vô hướng*** *cho tương ứng mỗi số thực c và phần tử* **v** *thuộc* **V** *với duy nhất một phần tử thuộc* **V**, *được ký hiệu là c***v**. *Phép nhân này thỏa mãn các điều kiện* V5 *đến* V8.

Các phần tử của **V** được gọi là những vectơ mà không nhất thiết là vectơ hình học.

Gọi phần tử ***0*** là vectơ-không, gọi ***-v*** là vectơ đối của vectơ ***v***.

Phép cộng một vectơ với vectơ đối của một vectơ được gọi là *phép trừ*:

u - ***v*** := ***u*** + (-***v***).

Một thành phần quan trọng của định nghĩa là "*tính chất đóng*" của hai phép toán

Đ1. Nếu ***v***∈**V** và *a* là một số thực thì ***av***∈**V**.

Đ2. Nếu ***v*** và ***u*** thuộc **V**, thì ***v*** + ***u***∈**V**.

Ví dụ 1. Cho **V** = {(*x*, 1) | *x* ∈R}

với phép cộng và phép nhân với vô hướng quen thuộc.

(3, 1) và (5, 1) ∈ **V**, nhưng (3, 1) + (5, 1) = (8, 2)∉ **V**.

Phép toán + không phải là phép toán trên **V** do không tuân theo tính chất Đ2. Vì vậy **V** không phải là không gian vectơ.

Ví dụ về một số không gian vectơ thực

1) R^2, R^3.

2) R^n

3) Tập hợp **M**(*m*×*n*, R) tất cả những ma trận cỡ *m*×*n* với các phần tử thực.

Chú ý. Tính chất $V3$ thường được sử dụng để kiểm tra một tập hợp với các phép toán trên đó không phải là không gian véc tơ

Ví dụ 2. Chứng minh $\left\{\begin{bmatrix} a & -a \\ a^2 & 1 \end{bmatrix}, a \in R\right\}$ với phép cộng và nhân vô hướng thông thường không phải là một không gian véc tơ.

2. KHÔNG GIAN CON

2.1. Định nghĩa *Nếu* **W** *là một tập con không rỗng của không gian vectơ thực* **V** *và* **W** *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) *c**v*** ∈ **W** ∀***v*** ∈**W** *và* ∀ *vô hướng c*

(ii) ***v*** + ***u*** ∈ **W** ∀ ***v*** *và* ***u*** ∈ **W**

thì **W** *được gọi là một* ***không gian con*** *của* **V**.

Chú ý

1. Tất cả các phép toán trên W đều là trên V nên W cũng thỏa mãn 8 tính chất trong định nghĩa không gian véc tơ. Vì thế W cũng là không gian véc tơ. Vì vậy, muốn chứng minh 1 tập hợp là 1 không gian véc tơ, ta có thể chứng minh nó là không gian con của một không gian véc tơ đã biết.

2. Mọi không gian con M của V đều phải chứa véc tơ không của V.

3. Các điều kiện (**i**) và (**ii**) nói lên rằng **W** đóng đối với hai phép toán. Có thể gộp hai điều kiện này lại thành một điều kiện:

$\forall$ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{u}$ $\in$**W**, x và y là các vô hướng bất kỳ, thì $x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{u} \in$ **W**.

Ví dụ 3 Cho **W** = $\{(x_1, x_2) | x_2 = 2x_1\} \subset \mathrm{R}^2$.

Nếu $(a, 2a), (b, 2b) \in$ **W** và x, y là hai vô hướng tùy ý, thì

$x(a, 2a) + y(b, 2b) = (xa, x2a) + (yb, y2b) = (xa+yb, 2(xa+yb))$

cũng $\in$ **W**. Do đó **W** là một không gian con của R^2

Ví dụ 4 Cho **W** = $\{(x, 1) \mid x$ là số thực bất kỳ$\}$.

W $\subset \mathrm{R}^2$, nhưng **W** không đóng đối với phép cộng của R^2, nên **W** không phải là không gian con của R^2.

Ví dụ 5 Theo định nghĩa, tập tất cả các ma trận tam giác trên cỡ $n\times n$, tập tất cả các ma trận tam giác dưới cỡ $n\times n$, tập tất cả các ma trận đường chéo cỡ $n\times n$ là những không gian con của không gian vectơ $\mathbf{M}(n\times n, \mathrm{R})$.

2.2. Bốn không gian con chủ yếu liên quan đến một ma trận

2.2.1.KHÔNG GIAN CỘT

Định nghĩa *Cho A là ma trận m×n, có các vectơ cột* $\boldsymbol{c}_j$ *(j = 1,..., n). Ta gọi tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột* $\boldsymbol{c}_j$ *(j = 1,..., n)*

$\boldsymbol{C}(A) = \{ x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n \mid x_j \in \mathrm{R} \}$

*là **không gian cột của A**.*

Trong Chương 1 ta đã định nghĩa phép nhân một ma trận $A = (a_{ij})$ có cỡ $m\times n$ với một vectơ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1c_1 + \cdots + x_nc_n$$

Vì vậy, ta cũng có thể hiểu $\boldsymbol{C}(A)$ như tập hợp tất cả những vectơ có dạng $A\boldsymbol{x}$ với $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$.

Nhận xét ***Tìm nghiệm của*** $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ***chính là biểu thị b như một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột của*** A. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ có nghiệm khi và chỉ khi $\boldsymbol{b}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)$. Khi $\boldsymbol{b}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)$, nó là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột của A. Những hệ số trong một tổ hợp cho ta một nghiệm $\boldsymbol{x}$ của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Ví dụ 6 Xác định $C(A)$ với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Giải.

$$C(A) = \{x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

$$= \{(x_1 + 2x_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

Vậy $C(A)$ là R^2

Ví dụ 7 Tìm điều kiện của c để b thuộc $C(A)$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Giải

Yêu cầu đề bài tương đương "tìm c để phương trinh $Ax=b$ có nghiệm"

Xét ma trận mở rộng

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & c & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & c-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy vơi $c = 1$ thì $b \in C(A)$

Định lý 4.2.1 Nếu A là ma trận $m \times n$, thì $\boldsymbol{C}(A)$ là một không gian con của R^m.

Chứng minh

Nếu $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}(A)$, thì $\exists$ $\boldsymbol{x}$ và $\boldsymbol{y} \in R^n$ sao cho $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{y}$.

Với t và $s \in R$, thì

$t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{u} = tA\boldsymbol{x} + sA\boldsymbol{y} = A(t\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y})$,

nên $t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{u}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)$. Do đó $\boldsymbol{C}(A)$ là một không gian con.

Ví dụ 8 Hãy mô tả các không gian cột (là những không gian con của R^2) của

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Giải

$$C(A) = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in R\}$$

Do đó $\boldsymbol{C}(A) = R^2$.

$\boldsymbol{C}(B)$ gồm tất cả các vectơ có dạng

$$C(B) = \{\, x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (x_1 + 2x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in R\}$$

Do đó $\boldsymbol{C}(B)$ là đường thẳng với vectơ chỉ phương (1, 2).

$$C(C) = \{\, x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = (x_1 + 2x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

Do đó $\boldsymbol{C}(C) = R^2$.

2.2.2. KHÔNG GIAN NGHIỆM

Định nghĩa *Tập nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ được gọi là **không gian nghiệm của A** và được ký hiệu là $\boldsymbol{N}(A)$.*

Định lý 4.2.2 Nếu A là ma trận $m \times n$, thì $\boldsymbol{N}(A)$ là một không gian con của R^n.

Chứng minh

$\forall$ $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{N}(A)$, với mọi vô hướng a và b, thì

$A(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}) = aA\boldsymbol{v} + bA\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{0} + b\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$,

nên $a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}$ cũng thuộc $\boldsymbol{N}(A)$.Do đó $\boldsymbol{N}(A)$ là một không gian con của R^n

Ví dụ 9 Hãy mô tả không gian nghiệm của

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Giải

$$N(A) = \{x \in R^2 : Ax = 0\}$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0$$

Vậy $N(A) = \{x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \in R\}$

$$N(B) = \{x \in R^2 : Bx = 0\}$$

$$Bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Vậy $N(B) = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

$$N(C) = \{x \in R^2 : Cx = 0\}$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0$$

Vậy $N(C) = \{x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \in R\}$

Ví dụ 10 Xét phương trình $x + 2y + 3z = 0$ xác định một mặt phẳng đi qua gốc tọa độ. Mặt phẳng này là không gian con của R^3. Đó chính là $\boldsymbol{N}(A)$ với $A = [1 \ \ 2 \ \ 3]$.

2.2.3. KHÔNG GIAN HÀNG VÀ KHÔNG GIAN NGHIỆM TRÁI

Định nghĩa *Cho A là ma trận thực. Ta gọi tập hợp* $\boldsymbol{C}(A^T)$ *là* ***không gian hàng của** A*, $\boldsymbol{N}(A^T)$ *là* ***không gian nghiệm bên trái của** A*.

Nhận xét

1) Nếu A là ma trận thực $m \times n$, có các vectơ hàng là $\boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{h}_m$, thì

$$\boldsymbol{C}(A^T) = \{ y_1\boldsymbol{h}_1 + y_2\boldsymbol{h}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{h}_m \mid y_j \in R \}$$

hay $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ gồm tất cả những vectơ có dạng $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ với $\boldsymbol{y} \in \mathrm{R}^m$.

2) $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ là tập nghiệm của $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Chuyển vị hai vế của phương trình này ta có $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ (Vectơ $\boldsymbol{y}$ nằm phía bên trái A, nên $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ được gọi là không gian nghiệm bên trái của A).

Định lý 4.2.3 Nếu A là ma trận $m \times n$, thì $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ là một không gian con của R^n và $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ là một không gian con của R^m.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 4

1. Định nghĩa không gian vectơ thực.

2. Định nghĩa không gian con.

3. Bốn không gian con chủ yếu của một ma trận A: $\boldsymbol{C}(A)$, $\boldsymbol{N}(A)$, $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Mối quan hệ giữa sự có nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ và không gian $\boldsymbol{C}(A)$.

BÀI 5: HẠNG CỦA MA TRẬN VÀ NGHIỆM ĐẦY ĐỦ CỦA *Ax=0* , *Ax=b*

1. HẠNG CỦA MA TRẬN

Hệ phương trình $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ có thể thu gọn về một hệ phương trình tuyến tính tương đương mà có số phương trình ít hơn.

Chẳng hạn

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \to x_1 - 3x_2 = 0$$

VẤN ĐỀ: ***Ax*=*0* có thể thu gọn về ít nhất bao nhiêu phương trình?**

Trong tuần 1 ta có thể đưa ma trận *A* về ma trận *U* có dạng bậc thang nhờ những phép toán hàng sau đây:

(i) *Đổi chỗ 2 hàng nào đó.*

(ii) *Thay hàng bởi hiệu của hàng ấy với bội của hàng khác.*

Ngoài ra, để đơn giản hóa các tính toán, đôi khi ta còn dùng thêm phép toán hàng sau

(iii) *Nhân một hàng với một số khác không.*

1.1. Định nghĩa *Cho một ma trận A. Dùng những phép toán hàng ta biến đổi A về ma trận bậc thang U. Số tất cả các trụ trong U được gọi là **hạng** của A, ký hiệu là r(A).*

Ví dụ 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

nên $r(A) = 2$.

Chú ý

1) $r(A) = 0$ khi và chỉ khi $A = O$.

2) Nếu A là ma trận $m \times n$ thì $r(A) \le \min\{m, n\}$.

Nhận xét

1) Nếu A là ma trận $n \times n$ thì $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

2) Nếu ma trận A là ma trận con của ma trận B thì $r(A) \le r(B)$.

3) $r(A) = r(A^T)$

1.2. Thu gọn hệ thuần nhất

Định nghĩa *Một hàng (cột) của A được gọi là một **hàng trụ** (**cột trụ**, tương ứng), nếu sau các phép toán hàng để đưa A về ma trận bậc thang nó chứa một trụ.*

Ví dụ 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \to U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Rightarrow$ hàng 1 và hàng 2 là hai hàng trụ, cột 1 và cột 3 là hai cột trụ.

Định lý Nếu $r(A) = r$, thì $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ tương đương với $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, trong đó B gồm tất cả các hàng trụ của A .

Ví dụ 3 Cho hệ

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 0.$$

Do các hàng 1 và 2 sau những phép toán hàng chứa trụ là 1 và 4 nên theo Định lý 2 hệ này tương đương với hệ

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0.$$

2. CẤU TRÚC NGHIỆM CỦA $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Ở đây ta sẽ thấy rằng mọi nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ đều biểu diễn (dưới dạng tổ hợp tuyến tính) theo một số nghiệm nào đó, gọi là các ***nghiệm đặc biệt***.

Đối với hệ thuần nhất $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, trong quá trình đưa ma trận mở rộng $[A\ \boldsymbol{0}]$ về ma trận bậc thang ta thấy rằng cột cuối luôn luôn là $\boldsymbol{0}$ nên ta chỉ cần làm việc với A.

Ví dụ 4 Giải hệ

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 0$$

$$3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 0.$$

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên hệ tương đương với

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$4x_3 + 4x_4 = 0.$$

Biến trụ là x_1 và x_3, biến tự do là x_2 và x_4.

$$x_1 + 2x_3 = -x_2 - 3x_4$$

$$4x_3 = -4x_4.$$

Cho x_2 và x_4 giá trị thực bất kỳ ta tìm giá trị của x_1 và x_3

$$x_3 = -x_4, x_1 = -x_2 - x_4.$$

⇒Mọi nghiệm của hệ có dạng

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Nhận xét

Trong $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, số biến trụ = $r(A)$, số biến tự do = (số cột của A) - $r(A)$.

2.1. Định nghĩa *Khi giải* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cho một *biến tự do bằng* 1, *và cho các biến tự do còn lại bằng* 0, *ta được một nghiệm gọi một* ***nghiệm đặc biệt***.

Trong ví dụ trên, x_2 và x_4 là các biến tự do.

Cho $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, thu được nghiệm đặc biệt $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cho $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, thu được nghiệm đặc biệt

$$\boldsymbol{s}2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mỗi nghiệm của hệ có thể tách như sau

$$x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇒Nghiệm bất kỳ của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ là tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{s}_1$ và $\boldsymbol{s}_2$:

$$\boldsymbol{x} = x_2\boldsymbol{s}_1 + x_4\boldsymbol{s}_2.$$

2.2. Định nghĩa *Nếu $\boldsymbol{s}_1,\ldots, \boldsymbol{s}_k$ là tất cả các nghiệm đặc biệt của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, gọi*

$c_1\boldsymbol{s}_1+\cdots+c_k\boldsymbol{s}_k$,

*với c_1, ..., c_k là những số thực bất kỳ, là **nghiệm đầy đủ** hay **nghiệm tổng quát** của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.*

Nghiệm tổng quát của hệ trong ví dụ trên là $\boldsymbol{x} = x_2\boldsymbol{s}_1 + x_4\boldsymbol{s}_2$.

2.3. Định lý Cho $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ là hệ n ẩn

* Nếu $r(A) = n$, thì hệ có nghiệm duy nhất ($\boldsymbol{N}(A) = \{\boldsymbol{0}\}$).

* Nếu $r(A) < n$, thì hệ có tất cả $n - r(A)$ nghiệm đặc biệt $\boldsymbol{s}_1,\ldots, \boldsymbol{s}_{n-r(A)}$ và $\boldsymbol{N}(A)$ gồm tất cả những tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{n-r(A)}$. (Trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r(A)$ biến tự do).

Hệ quả

Nếu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ có số phương trình nhỏ hơn số ẩn thì nó có vô số nghiệm.

3. CẤU TRÚC NGHIỆM CỦA $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Ở đây ta sẽ thấy rằng mọi nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ đều là tổng của một nghiệm nào đó của nó và nghiệm đầy đủ của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

3.1. Nghiệm riêng

3.1.1. Định nghĩa *Một nghiệm nào đó của $A\boldsymbol{x}= \boldsymbol{b}$ được gọi là một **nghiệm riêng**,* ký hiệu là $\boldsymbol{x}_p$

3.1.2. Cách tìm một nghiệm riêng

Dùng phép khử để đưa $[A\ \ \boldsymbol{b}]$ về dạng bậc thang $[U\ \ \boldsymbol{c}]$.

Trong hệ $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$, ta gán 0 cho những biến tự do rồi giải ra các biến trụ, sẽ tìm được một nghiệm riêng.

Ví dụ 5

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6$$

$$3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 7.$$

Giải Thực hiện phép khử trên ma trận

$$[Ab] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 10 & 6 \\ 3 & 3 & 10 & 13 & 7 \end{array}\right] \to [Uc] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Gán 0 cho x_2 và x_4, ta nhận được $x_1 = -1$ và $x_3 = 1$. Vậy một nghiệm riêng là $\mathbf{x}_p = (-1, 0, 1, 0)$.

3.2.Nghiệm đầy đủ

3.2.1. Định lý Giả sử $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ có nghiệm riêng là $\mathbf{x}_p$. Khi ấy, tập nghiệm của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ là $\{\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n \mid \mathbf{x}_n \in \mathbf{N}(A)\}$.

Chứng minh

Với $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$, do $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_n = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$, nên $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ là nghiệm của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Ngược lại, nếu $\mathbf{x}$ là một nghiệm của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ta đặt $\mathbf{x}_n = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$. Do $A\mathbf{x}_n = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, nên $\mathbf{x}_n \in \mathbf{N}(A)$.

Định lý này là cơ sở cho định nghĩa sau đây.

3.2.2. Định nghĩa *Nếu $\mathbf{x}_p$ là nghiệm riêng của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_n$ là nghiệm đầy đủ của $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ta gọi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ là **nghiệm đầy đủ** hay **nghiệm tổng quát** của $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.*

Ví dụ 6 Hệ

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 = 6$$

$$3x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 7$$

có nghiệm đầy đủ là $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_p + x_2\mathbf{s}_1 + x_4\mathbf{s}_2$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 5

1. Hạng của ma trận và cách tìm.

2. Cấu trúc nghiệm của hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Biện luận hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

3. Cấu trúc nghiệm của hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Biện luận hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

BÀI 6: SỰ ĐỘC LẬP, CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

MỞ ĐẦU Một không gian vectơ có vô số các vectơ và việc nghiên cứu một tập hợp gồm vô số phần tử không hề đơn giản. Câu hỏi đặt ra là: liệu có thể có một nhóm gồm n phần tử trong một không gian vectớ V "đại diện" cho V để việc nghiên cứu V được chuyển thành nghiên cứu trên nhóm n vectơ trên V được không?

1. SỰ ĐỘC LẬP, CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

1.1. Định nghĩa *Cho $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ là những vectơ trong không gian vectơ $\boldsymbol{V}$. Một tổng có dạng $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, trong đó $x_1, \dots, x_n$ là các vô hướng được gọi là một tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$. Tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ được ký hiệu là* $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$

Định lý 6.1.1. Nếu $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ là những vectơ trong không gian vectơ $\boldsymbol{V}$, thì $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ là một không gian con của $\boldsymbol{V}$.

Ta nói $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ là không gian con của $\boldsymbol{V}$ *sinh bởi* (hoặc *căng bởi*) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$.

Có thể tình cờ xảy ra $\mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{V}$, khi ấy ta nói rằng các vectơ $\boldsymbol{v}_1$, ... ,$\boldsymbol{v}_n$ *sinh ra* $\boldsymbol{V}$ (hoặc *căng* $\boldsymbol{V}$) hay $\{\boldsymbol{v}_1, \dots ,\boldsymbol{v}_n\}$ là một *tập sinh* của $\boldsymbol{V}$.

1.2. Định nghĩa *Ta nói rằng tập $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ là một **tập sinh** của không gian $\boldsymbol{V}$, nếu và chỉ nếu mỗi vectơ trong $\boldsymbol{V}$ có thể biểu diễn được ở dạng một tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v}_1, \dots ,\boldsymbol{v}_n$.*

Ví dụ 1 Tập tất cả các vectơ cột của ma trận A là tập sinh của $\boldsymbol{C}(A)$. Tập tất cả các vectơ hàng của ma trận A là tập sinh của $\boldsymbol{C}(A^T)$. Tập tất cả những nghiệm đặc biệt của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ là tập sinh của $\boldsymbol{N}(A)$.

Ví dụ 2 Nững tập nào sau đây là tập sinh của R^2?

$$\text{(a)}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} \text{(b)} \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\right\} \quad \text{(c)} \quad \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

Giải Cho $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ là vectơ bất kỳ trong R^2. Do

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ và } \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}$$

nên mỗi tập vectơ trong (a) và (b) đều là một tập sinh của R^2.

$x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$vô nghiệm, nên $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ không phải là tổ hợp tuyến tính của $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$. Suy ra, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ không phải là tập sinh của R^2.

Ví dụ 3 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ là một tập sinh của không gian $\boldsymbol{P}_n$ vì một đa thức $\in \boldsymbol{P}_n$ có dạng

$$a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Ví dụ 4 Tập

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

là một tập sinh của $\boldsymbol{M}(2\times 2, R)$.

1.3. Sự độc lập tuyến tính

Trong Ví dụ 2 ta thấy mỗi tập vectơ ở (a) và (b) đều là tập sinh của R^2, nhưng tập vectơ ở (a) là một tập con thực sự của tập vectơ ở (b), nên một vectơ trong tập ở (b) là thừa. Vì vậy, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: khi nào một tập sinh của không gian vectơ $\boldsymbol{V}$ không thừa một vectơ nào (tức là nếu bỏ đi bất cứ một vectơ nào của tập sinh này thì được tập vectơ mới không phải là tập sinh của $\boldsymbol{V}$). Ta sẽ có câu trả lời với khái niệm *độc lập tuyến tính*.

1.3.1. Định nghĩa

1) *Ta nói các vectơ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ của không gian vectơ $\boldsymbol{V}$* ***độc lập tuyến tính****, nếu $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ kéo theo $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.*

2) *Ta nói các vectơ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ của không gian vectơ $\boldsymbol{V}$* ***phụ thuộc tuyến tính****, nếu chúng không độc lập tuyến tính. Điều này có nghĩa là tồn tại ít nhất một vô hướng x_j khác không sao cho $x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$.*

Ví dụ 5 Các vectơ

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}3\\10\\13\end{bmatrix}$$

phụ thuộc tuyến tính vì

$$1.\boldsymbol{v}_1 + 1.\boldsymbol{v}_2 + (-1)\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Tuy nhiên $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0},$$

Khi ấy ta có hệ thuần nhất

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 8x_2 = 0$$

$$3x_1 + 10x_2 = 0$$

Hệ này có nghiệm duy nhất là $x_1 = x_2 = 0$, nên $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ độc lập tuyến tính.

<u>Ví dụ 6</u> Trong **M**(2×2, R), các vectơ

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

độc lập tuyến tính, vì

$$a_{11}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$

hay

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$

kéo theo $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$.

<u>Định lý 6.1.2.</u> Các vectơ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ của R^m độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hạng của ma trận $[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ bằng n.

<u>Chứng minh</u> Ký hiệu $A = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$. Xét hệ $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Dãy $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với $r(A) = n$.

<u>1.3.2. Nhận xét</u> Định lý này cung cấp cho ta một phương tiện hữu hiệu để kiểm tra sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của dãy vectơ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ trong R^m: Trước hết tính hạng của ma trận $A = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$. Nếu $r(A) = n$ thì dãy này độc lập tuyến tính. Nếu $r(A) \neq n$, thì dãy này phụ thuộc tuyến tính.

<u>Ví dụ 7</u> Xác định các vectơ sau đây có phụ thuộc tuyến tính hay không

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}3\\10\\13\end{bmatrix}.$$

Giải

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \\ 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nên $r[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = 2 < 3$. Suy ra $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ phụ thuộc tuyến tính.

Hệ quả 6.1.3. Nếu $n > m$ thì mọi dãy gồm n vectơ trong R^m phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh Ký hiệu $A = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$. Xét hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Với dãy vectơ $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ trong R^m thì $A = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$ là ma trận $m \times n$ nên $r(A) \le \min\{m, n\} = m < n$. Theo Định lý 2 suy ra $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ phụ thuộc tuyến tính.

1.4. Cơ sở của một không gian vectơ

Ở trên ta đã biết rằng một tập sinh của không gian $\boldsymbol{V}$ là không thừa một vectơ nào khi và chỉ khi nó độc lập tuyến tính. Điều này là nền tảng cho định nghĩa sau đây.

1.4.1. Định nghĩa *Tập vectơ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ được gọi là một **cơ sở** của không gian vectơ $\boldsymbol{V}$ nếu nó có hai tính chất:*

1. *$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ là tập sinh của $\boldsymbol{V}$.*
2. *$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ độc lập tuyến tính.*

Ví dụ 8

1) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$(các vectơ cột của ma trận I cỡ $n \times n$) là một cơ sở của R^n, được gọi là ***cơ sở chính tắc***.

2) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ là một cơ sở của không gian $\mathbf{P}_n$, được gọi là ***cơ sở chính tắc***.

Chú ý $\mathbf{Z} = \{\boldsymbol{0}\}$ không có cơ sở vì $\boldsymbol{0}$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 9 Hệ vectơ

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

không phải là một cơ sở của R^2 (do cùng phụ thuộc tuyến tính).

1.4.2. Ứng dụng của cơ sở Nếu $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ là cơ sở của không gian $\boldsymbol{V}$, thì mỗi $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ được biểu diễn một cách duy nhất ở dạng tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$: $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$

Khẳng định này cho phép thay thế mỗi vectơ $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ bởi vectơ $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ (sao cho $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$). Trong Hình học sơ cấp cách làm này được gọi là Phương pháp tọa độ, cho phép phiên dịch một bài toán hình học sang một bài toán đại số mà có thể dễ giải quyết hơn.

1.5. Số chiều của một không gian vectơ

Định lý 6.1.4 Nếu $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ và $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m\}$ là hai cơ sở của không gian $\boldsymbol{V}$ thì $m = n$.

1.5.1. Định nghĩa *Cho $\boldsymbol{V}$ là một không gian vectơ. Nếu $\boldsymbol{V}$ có một cơ sở gồm n vectơ, ta nói rằng $\boldsymbol{V}$ có **số chiều** bằng n. Quy ước không gian $\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{0}\}$có số chiều bằng* 0.

Ví dụ 10 Số chiều của R^n bằng n. Số chiều của không gian $\mathbf{P}_n$ bằng $n + 1$. Số chiều của $\mathbf{M}(m\times n, R)$ bằng $m\times n$.

1.5.2. Ý nghĩa của số chiều

1) Ta thừa nhận khẳng định: Nếu $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ là hai không gian con của không gian $\boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{W}_1 \subset \boldsymbol{W}_2$, thì chiều của $\boldsymbol{W}_1 \leq$ chiều của $\boldsymbol{W}_2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}_2$.

Như vậy, số chiều là một chỉ số đo "độ lớn" của một không gian con.

2) Ta thừa nhận khẳng định: Nếu không gian $\boldsymbol{V}$ có số chiều bằng n, thì $\boldsymbol{V}$ có nhiều nhất là n vectơ độc lập tuyến tính và $\boldsymbol{V}$ được sinh ít nhất bởi n vectơ.

Như vậy số chiều là "chặn trên" cho số vectơ độc lập tuyến tính và là "chặn dưới " cho số vectơ của một tập sinh của không gian.

Định lý 6.1.5. Nếu $\boldsymbol{V}$ là một không gian vectơ có số chiều $n > 0$, thì một tập con gồm n vectơ bất kỳ của $\boldsymbol{V}$ là cơ sở của $\boldsymbol{V}$ khi và chỉ khi các vectơ của tập con này độc lập tuyến tính.

Hệ quả 6.1.6. Tập vectơ $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ là cơ sở của R^n khi và chỉ khi $r([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = n$ (hay $\det[\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n] \neq 0$).

Chứng minh R^n có số chiều bằng n, nên $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ là cơ sở của R^n khi và chỉ khi $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ độc lập tuyến tính. Nhưng theo Định lý 4.6.1 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $r([\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]) = n$.

Ví dụ 11

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right\} \text{ là cơ sở của } R^2 \text{ do } \begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{vmatrix} \neq 0.$$

2. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA BỐN KHÔNG GIAN CON CHỦ YẾU LIÊN QUAN ĐẾN MỘT MA TRẬN

2.1. Định lý cơ bản của Đại số tuyến tính (Phần 1)

Cho A là ma trận $m \times n$ có hạng bằng r. Khi đó ta có:

- Số chiều của $\boldsymbol{C}(A)$, $\boldsymbol{C}(A^T)$ cùng bằng r.
- Số chiều của $\boldsymbol{N}(A)$ bằng $n - r$.
- Số chiều của $\boldsymbol{N}(A^T)$ bằng $m - r$.

2.2. Chú ý: Cách tìm cơ sở của bốn không gian con của một ma trận A

- Tập tất cả các cột trụ của A là một cơ sở của $\boldsymbol{C}(A)$.
- Tập tất cả các hàng trụ của A là một cơ sở của $\boldsymbol{C}(A^T)$.
- Tập tất cả các nghiệm đặc biệt của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ là một cơ sở của $\boldsymbol{N}(A)$.
- Tập tất cả các nghiệm đặc biệt của $A^T x = 0$ là một cơ sở của $N(A^T)$.

Ví dụ 12 Tìm cơ sở và số chiều của 4 không gian con chủ yếu liên quan đến

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\2 & 6 & 1 & 16\\5 & 15 & 0 & 25\end{bmatrix}.$$

Giải

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\2 & 6 & 1 & 16\\5 & 15 & 0 & 25\end{bmatrix} \to U == \begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 5\\0 & 0 & 1 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

A có các cột trụ là cột 1 và cột 3, A có các hàng trụ là hàng 1 và hàng 2, còn $r(A) = 2$.

$\boldsymbol{C}(A)$ có: Cơ sở là (1, 2, 5) và (0, 1, 0) (hai cột trụ). Số chiều là 2.

$\boldsymbol{C}(A^T)$ có: Cơ sở là (1, 3, 0, 5) và (2, 6, 1, 16) (hai hàng trụ). Số chiều là 2.

N(A) có: Cơ sở là (-3, 1, 0, 0) và (-5, 0, -6, 1) (hai nghiệm đặc biệt của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$). Số chiều là 2.

N(A^T) có: Cơ sở là (-5, 0, 1) (nghiệm đặc biệt của $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$). Số chiều là 1.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 6

1. Tập sinh của một không gian vectơ.

2. Khái niệm độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính. Phương pháp kiểm tra sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của một dãy vectơ trong R^n.

3. Cơ sở và số chiều của một không gian vectơ.

4. Định lý cơ bản của Đại số tuyến tính (Phần 1) về chiều của bốn không gian con chủ yếu liên quan đến một ma trận.

BÀI 7: GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

MỞ ĐẦU. Ta biết việc nhân hai ma trận $A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}$ là việc thực hiện $m\times p$ phép nhân vô hướng hai vectơ. Như vậy, với một ma trận vuông $A_{n\times n}$, nếu ta muốn tính A^k thì ta cần thực hiện $(k-1)n^2$ phép nhân vô hướng hai vectơ và khi k đủ lớn thì việc tính toán trở nên rất phức tạp. Hơn nữa, để tính A^n ta bắt buộc phải tính A^{n-1}. Câu hỏi đặt ra là: có cách nào tính A^n đơn giản hơn và không cần tính A^{n-1} không?

1. VECTƠ RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

1.1. Định nghĩa *Cho A là một ma trận n×n.*

Khi có vô hướng λ và *vectơ* ***v*** *≠* ***0*** *sao cho*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

thì λ được gọi là một ***giá trị riêng*** *của A, vectơ* **v** *được gọi là một* ***vectơ riêng*** *của A ứng với λ.*

1.2. Phương pháp tìm giá trị riêng và vectơ riêng

Định lý 7.1.1. Cho *A* là một ma trận *n*×*n*.

(i) λ là giá trị riêng của *A* ⇔ λ là nghiệm của det(*A*-*tI*) = 0 (tức là det(*A*-λ*I*) = 0).

(ii) ***v*** là một vectơ riêng của *A* ứng với giá trị riêng λ ⇔ ***v*** là nghiệm không tầm thường của hệ (*A*-λ*I*)***x*** = ***0***.

Định nghĩa $\det(A-\lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng; phương trình $\det(A-\lambda I)=0$ được gọi là phương trình đặc trưng của ma trận A.

1.3. Các bước tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận *A*:

Bước 1 Tính đa thức đặc trưng det(*A*-*tI*).

Bước 2 Giải phương trình đặc trưng det(*A*-*tI*) = 0 để tìm các giá trị riêng.

Bước 3 Giả sử λ là một giá trị riêng. Giải hệ $(A-\lambda I)x=0$, tìm tất cả các nghiệm đặc biệt của hệ thì các nghiệm đặc biệt đó là tất cả các vectơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ 1 Tìm giá trị riêng, vectơ riêng của $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Giải Tính $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8$

$= \lambda^2 - 8\lambda + 7.$

$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 7$

+Với $\lambda = 1$: hệ phương trình $(A - 1.I)x = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

+Với $\lambda = 7$: hệ phương trình $(A - 1.I)x = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow s_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chú ý

1) A có một giá trị riêng = 0 $\Leftrightarrow$ det$A$ = 0.

2) Ứng với một giá trị riêng có vô số vectơ riêng khác nhau.

3) Một vectơ riêng chỉ ứng với duy nhất một giá trị riêng.

Thật vậy, giả sử ma trận A có vectơ riêng $\boldsymbol{v}$ đồng thời ứng với giá trị riêng λ_1 và λ_2. Từ $A\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}$ và $A\boldsymbol{v} = \lambda_2\boldsymbol{v} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Do $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, nên $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, hay $\lambda_1 = \lambda_2$).

Cho đa thức $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$. Với ma trận vuông A bất kỳ, ta xác định ma trận $f(A) = b_0I + b_1A + b_2A^2 + \cdots + b_mA^m$.

Định lý 7.1.2 Cho A cỡ $n\times n$ và $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$. Giả sử $\boldsymbol{v}$ là một vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ.

(i) Nếu A khả nghịch thì $\boldsymbol{v}$ là một vectơ riêng của A^{-1} ứng với giá trị riêng λ^{-1}.

(ii) $\boldsymbol{v}$ là một vectơ riêng của ma trận $f(A)$ ứng với giá trị riêng $f(\lambda)$.

Ví dụ Nếu ma trận A có một giá trị riêng là λ thì ma trận $A^2 + 2A$ có một giá trị riêng tương ứng là $\lambda^2 + 2\lambda$.

Nhận xét Định lý này cho phép ta tìm giá trị riêng của một ma trận phức tạp $f(A)$ thông qua ma trận A để việc tính toán được đơn giản hơn.

Định lý 7.1.3. Nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận $n\times n$ có n giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, thì

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

($a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ gọi là ***vết*** của A và ký hiệu là tr(A))

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det A.$$

Ví dụ 2 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tính định thức của $A^{2011} + 2010A + 2009I$.

Giải

A có hai giá trị riêng : $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 7$

$\Rightarrow A^{2011} + 2010A + 2009I$ có hai giá trị riêng là $\lambda_1' = 4020$ và $\lambda_2' = 7^{2011} + 2010.7 + 2009$

$$\Rightarrow \det(A^{2011} + 2010A + 2009I) = \lambda_1' \cdot \lambda_2'$$

$$= 4020(7^{2011} + 2010.7 + 2009)$$

2. CHÉO HÓA MỘT MA TRẬN

Xét vấn đề phân tích ma trận A cỡ $n\times n$ thành tích có dạng $S\Lambda S^{-1}$, trong đó Λ là một ma trận đường chéo.

Ta quan tâm đến vấn đề này bởi vì khi $A = S\Lambda S^{-1}$ thì rất dễ tính lũy thừa của nó với cấp bất kỳ.

2.1. Định nghĩa *Một ma trận vuông A được nói là **chéo hóa được** nếu tồn tại ma trận S khả nghịch và ma trận đường chéo Λ sao cho $S^{-1}AS = \Lambda$.*

Định lý 7.2.1. Một ma trận A cỡ $n\times n$ chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Ví dụ 3 Xét xem ma trận sau có chéo hóa được không

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Giải det(A - tI) = t^2 nên A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Hệ $(A - 0I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ là

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Hệ này có nghiệm tổng quát là $t(1, 1)$ với $t \in$ R, nên hai vectơ riêng bất kỳ của A đều cùng phương. Suy ra chúng phụ thuộc tuyến tính. Do đó A không chéo hóa được.

Định lý 7.2.2 Nếu $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ là các vectơ riêng ứng với những giá trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ của ma trận A (cỡ $n\times n$) thì $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ độc lập tuyến tính.

Hệ quả 7.2.3 Nếu A là ma trận $n\times n$ có n giá trị riêng đôi một khác nhau $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, thì A chéo hóa được.

Nói rõ hơn, nếu $S = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2 \ldots \boldsymbol{v}_n]$ với $\boldsymbol{v}_j$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_j ($j = 1, \ldots, n$), thì S khả nghịch và $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Ví dụ 4 Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được không?

Giải Ma trận suy biến A có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$ và hai vectơ riêng tương ứng $x_1 = (1, -1), x_2 = (1, 2)$. Ta có $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nên $S^{-1}\Lambda S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

2.2. Chú ý

1) Nếu S là ma trận khả nghịch sao cho $S^{-1}AS = \Lambda = \text{diag}\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, thì vectơ cột j của S là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ_j. Gọi S là ***ma trận vectơ riêng***, Λ là ***ma trận giá trị riêng*** của A.

2) Ma trận vectơ riêng S không duy nhất.

3) Nếu A là ma trận $n\times n$ có n giá trị riêng nhưng không đôi một khác nhau, thì A có thể chéo hóa được hay không tùy thuộc vào nó có n vectơ riêng độc lập tuyến tính hay không.

Ví dụ 5 Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

chỉ có hai giá trị riêng nhưng có ba vectơ riêng độc lập tuyến tính nên A chéo hóa được

4) Nếu $S^{-1}AS = \Lambda$, thì $A = S\Lambda S^{-1}$.

2.3. Ứng dụng của giá trị riêng và vectơ vào tính lũy thừa của một ma trận

Nếu $S^{-1}AS = \Lambda \Rightarrow S^{-1}A^mS = \Lambda^m \Rightarrow A^m = S\Lambda^mS^{-1}$.

Ví dụ 6 Tính A^k với $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Giải. $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 18.$

$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = -3$

$$\lambda_1 = 6 \Rightarrow (A - 6\lambda)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -4 & 5 \\ 4 & -5 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow 4y = 5z$$

$\Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$

$$\lambda_1 = -3 \Rightarrow (A + 3\lambda)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} -5 & 5 \\ 4 & 4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \Leftrightarrow y = -z$$

$\Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

$S = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ nên $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG

BÀI GIẢNG TUẦN 7

1. Định nghĩa giá trị riêng và vectơ riêng.

2. Phương pháp tìm giá trị riêng và vectơ riêng.

3. Định nghĩa ma trận chéo hóa được, ma trận vectơ riêng, ma trận giá trị riêng.

4. Những điều kiện để một ma trận chéo hóa được.

BÀI 8: TÍNH TRỰC GIAO

MỞ ĐẦU Trong hình học sơ cấp, tích vô hướng (trong R^2, R^3) là một phép tính quan trọng. Nhờ nó mà có thể thiết lập công thức tính góc giữa các đường thẳng và mặt phẳng, công thức tính khoảng cách, điều kiện vuông góc … Ta tìm cách mở rộng khái niệm này trong R^n bằng cách định nghĩa:

Cho $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

1. Tích vô hướng $v \cdot w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$
2. Độ dài vectơ $\|v\| = \sqrt[2]{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

1. TÍNH TRỰC GIAO CỦA BỐN KHÔNG GIAN CHỦ YẾU LIÊN QUAN ĐẾN MỘT MA TRẬN

1.1. Phần bù trực giao

1.1.1. Định nghĩa

(a) *Khi* **v·w** = 0 *ta nói vectơ* **v** ***trực giao*** *với vectơ* ***w***.

(b) *Giả sử* ***V*** *và* ***W*** *là các không gian con của* R^n. Ta *nói V trực giao với W nếu mọi vectơ* **v** *trong* ***V*** *trực giao với mọi vectơ* **w** *trong* ***W***.

Ví dụ 1

1) Vectơ $\boldsymbol{0} \in R^n$ trực giao với mọi vectơ trong R^n.

2) $\boldsymbol{v} = (2, -3, 1)$ và $\boldsymbol{w} = (1, 1, 1)$ trực giao trong R^3 bởi vì

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 2\cdot1 - 3\cdot1 + 1\cdot1 = 0.$$

3)

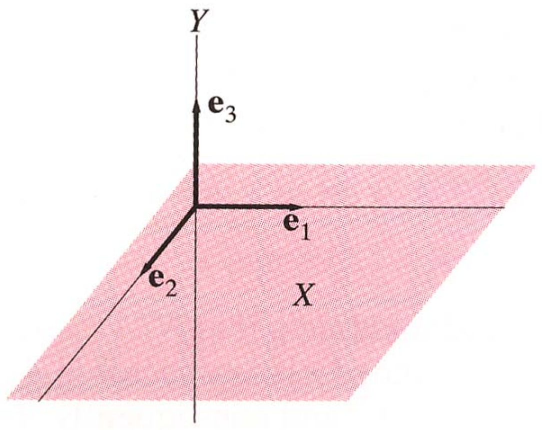
$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cho các tích vô hướng } \begin{matrix} 1+3-4=0 \\ 5+2-7=0 \end{matrix}$$

Do đó $\boldsymbol{x} = (1, 1, -1)$ trực giao với các hàng của A.

Ví dụ 2

1) Cho $\boldsymbol{V} = \{(x, 0, 0)|x \in \mathrm{R}\}$ và $\boldsymbol{W} = \{(0, y, 0)|x \in \mathrm{R}\}$ là hai không gian con của R^3. Nếu $\boldsymbol{v}$ thuộc $\boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{w}$ thuộc $\boldsymbol{W}$, thì $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x \cdot 0 + 0 \cdot y + 0 \cdot 0 = 0$,nên $\boldsymbol{V}$ trực giao với $\boldsymbol{W}$.

2) Cho $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$là cơ sở chính tắc của R^3. $\boldsymbol{V} = \mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ và $\boldsymbol{W} = \mathrm{Span}(\boldsymbol{e}_3)$. Nếu $\boldsymbol{v}$ thuộc $\boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{w}$ thuộc $\boldsymbol{W}$, thì $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = (x_1, x_2, 0)$ và $\boldsymbol{w} = y_3\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, y_3)$,nên $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + 0 \cdot y_3 = 0$. Do đó $\boldsymbol{V}$ trực giao với $\boldsymbol{W}$.



1.1.2. Định nghĩa *Cho* $\boldsymbol{V}$ *là không gian con của* R^n. *Tập tất cả các vectơ trong* R^n *mà trực giao với mọi vectơ trong* $\boldsymbol{V}$ *được gọi là* ***phần bù trực giao*** *của V, và ký hiệu là* $\boldsymbol{V}^{\perp}$.

$\boldsymbol{V}^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^n \mid \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \text{ với mọi } \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}\}$.

Định lý 8.1.1 (Định lý cơ bản của Đại số tuyến tính (Phần 2))

Nếu A là ma trận thực $m \times n$, thì $\boldsymbol{N}(A) = \boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})^{\perp}$ và $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{C}(A)^{\perp}$

1.2. Tổ hợp những cơ sở từ các không gian con

Định lý 8.1.2 Nếu $\boldsymbol{V}$ là một không gian con của R^n, thì

(số chiều của $\boldsymbol{V}$) + (số chiều của $\boldsymbol{V}^{\perp}$) = n.

Ngoài ra, nếu $\{\boldsymbol{v}_1, \dots , \boldsymbol{v}_r\}$ là một cơ sở của $\boldsymbol{V}$ và $\{\boldsymbol{v}_{r+1}, \dots , \boldsymbol{v}_n\}$ là một cơ sở của $\boldsymbol{V}^{\perp}$, thì $\{\boldsymbol{v}_1, \dots , \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \dots , \boldsymbol{v}_n\}$ là một cơ sở của R^n.

Hệ quả 8.1.3 Nếu A là ma trận thực $m\times n$, thì với mỗi $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, tồn tại duy nhất $\boldsymbol{x_r} \in \boldsymbol{C}(A^T)$ và $\exists!\ \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{N}(A)$ sao cho $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x_r} + \boldsymbol{x_n}$.

Ví dụ 3 Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hãy phân tích vectơ $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ thành $\boldsymbol{x_r} + \boldsymbol{x_n}$.

Giải Các hàng trụ $\boldsymbol{h}_1 = (1, 0, 1, 0)$ và $\boldsymbol{h}_2 = (0, 1, 0, 1)$ lập nên cơ sở của không gian hàng $\boldsymbol{C}(A^T)$.

Các nghiệm đặc biệt $\boldsymbol{s}_1 = (1, 0, -1, 0)$ và $\boldsymbol{s}_2 = (0, 1, 0, -1)$ lập nên cơ sở của không gian nghiệm $\boldsymbol{N}(A)$.

$\{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^4$.

Vectơ bất kỳ $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ có thể biểu diễn qua $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ như sau

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lấy

$$x_r = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ và } x_n = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. CƠ SỞ TRỰC CHUẨN VÀ PHƯƠNG PHÁP TRỰC GIAO HÓA GRAM-SCHMIDT

2.1. Định nghĩa

(a) Tập vectơ $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ *của* $\mathbb{R}^n$ *được gọi là* ***tập trực giao*** *nếu các vectơ của tập đôi một trực giao, tức là* $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$ *khi* $i \neq j$.

(*b*) *Tập vectơ* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ *của* R^n *được gọi là* ***tập trực chuẩn*** *nếu nó là một tập trực giao và mỗi vectơ của tập đều có độ dài bằng 1, tức là*

$$\boldsymbol{v_i v_j} = \begin{cases} 0 \text{ khi } i \neq j \\ 1 \text{ khi } i = j \end{cases}$$

(*c*) *Một cơ sở của* R^n *đồng thời là một tập trực giao được gọi là một* ***cơ sở trực giao***. *Một cơ sở của* R^n *đồng thời là một tập trực chuẩn được gọi là một* ***cơ sở trực chuẩn***.

Ví dụ 1

$\{(1, 1, 1), (2, 1, -3), (4, -5, 1)\}$ là một tập trực giao trong R^3.

Cơ sở chính tắc $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ của R^n là một cơ sở trực chuẩn.

Chú ý Khi cho một tập trực giao $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ gồm các vectơ khác $\boldsymbol{0}$, ta có thể tạo ra một tập trực chuẩn $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ khi đặt

$$u_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i \ (i = 1, \ldots, k).$$

2.2. Phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt

Giả sử $\boldsymbol{V}$ là một không gian con của không gian R^n và $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ là một cơ sở của $\boldsymbol{V}$. Phương pháp trực giao hóa Gram - Schmidt nhằm xây dựng một cơ sở trực giao $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ của $\boldsymbol{V}$ từ cơ sở trên.

Trước hết, đặt $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$.

Giả sử đã xây dựng được tập trực giao $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{i-1}\}$, ta tìm tiếp $\boldsymbol{u}_i$ dưới dạng

$\boldsymbol{u}_i = a_{i1}\boldsymbol{u}_1 + a_{i2}\boldsymbol{u}_2 + \cdots + a_{i\,i-1}\boldsymbol{u}_{i-1} + \boldsymbol{v}_i$,

trong đó $a_{i1}, \ldots, a_{i\,i-1}$ là các số thực được xác định từ i - 1 điều kiện $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0$ ($j = 1, \ldots, i-1$).

Quá trình này tiếp diễn cho tới $i = n$. Có thể chứng minh $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ là một cơ sở trực giao của $\boldsymbol{V}$.

Khi chia mỗi $\boldsymbol{u}_i$ cho độ dài của nó, ta thu được một cơ sở trực chuẩn của $\boldsymbol{V}$

Ví dụ 2 Cho cơ sở của R^3 là

$$\{\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0), \boldsymbol{v}_2 = (2, 0, -2), \boldsymbol{v}_3 = (3, -3, 3)\}.$$

Xây dựng cơ sở trực chuẩn của R^3.

Giải Ta đặt $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0)$. Tìm $\boldsymbol{u}_2$ dưới dạng

$$\boldsymbol{u}_2 = a_{21}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_2.$$

$\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$, nên $0 = a_{21}\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1$. Suy ra

$$a_{21} = -(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1)/(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1) = -2/2 = -1.$$

Vậy $\boldsymbol{u}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, -2)$.

Tìm $\boldsymbol{u}_3$ dưới dạng

$$\boldsymbol{u}_3 = a_{31}\boldsymbol{u}_1 + a_{32}\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_3.$$

$\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ và $\boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$, nên

$$0 = a_{31}\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 + a_{32}\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1$$

$$0 = a_{31}\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + a_{32}\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2$$

Hệ này tương đương với hệ

$$0 = 2a_{31} + 6$$

$$0 = 6a_{32} - 6.$$

Giải hệ được: $a_{31} = -3$, $a_{32} = 1$. Vậy

$$\boldsymbol{u}_3 = -3\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1).$$

Độ dài của $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$: $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3}$.

Chia mỗi $\boldsymbol{u}_i$ cho độ dài của nó được một cơ sở trực chuẩn:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trường hợp đặc biệt Khi $n = 3$, từ tập $\{v_1, v_2, v_3\} \in V$ ta có tập trực giao $\{q_1, q_2, q_3\}$ của V xác định bằng công thức:

$$q_1 = v_1, q_2 = v_2 - \frac{q_1^T v_2}{q_1^T q_1} q_1, q_3 = v_3 - \frac{q_1^T v_3}{q_1^T q_1} q_1 - \frac{q_2^T v_3}{q_2^T q_2} q_2$$

2.3. Ma trận trực giao

2.3.1. Định nghĩa *Một ma trận thực Q cỡ n×n được gọi là ma trận trực giao nếu các vectơ cột của Q lập thành một tập trực chuẩn*

Ví dụ 3

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ là một ma trận trực giao.}$$

Ma trận *I* hiển nhiên là một ma trận trực giao.

Định lý 8.2.1 Nếu *Q* là ma trận trực giao *n*×*n*, thì

1. Các cột của Q lập thành một cơ sở trực chuẩn của R^n.

2. $Q^TQ = I$

3. $Q^T = Q^{-1}$

4. $(Q\mathbf{v})\cdot(Q\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$

5. $||Q\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 8

1. Hai vectơ trực giao. Hai không gian con trực giao.

2. Phần bù trực giao của một không gian con. Định lý cơ bản của ĐSTT (Phần 2). Tổ hợp những cơ sở từ các không gian con.

3. Cơ sở trực giao, cơ sở trực chuẩn. Phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt

4. Ma trận trực giao.

BÀI 9: PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

1. KHÁI NIỆM PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Ánh xạ f từ tập $\boldsymbol{X}$ vào tập $\boldsymbol{Y}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ với duy nhất một phần tử $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{Y}$.

Ta đã gặp những ánh xạ đặc biệt:

* Trong Hình học sơ cấp: phép chiếu, phép quay, phép đối xứng trục và phép đối xứng tâm, phép vị tự.

* Trong Giải tích: phép lấy đạo hàm, phép lấy tích phân xác định.

Những ánh xạ này đều có một tính chất chung, đó là tính tuyến tính.

1.1. Định nghĩa *Một ánh xạ T từ không gian vectơ* $\boldsymbol{V}$ *vào không gian vectơ* $\boldsymbol{W}$ *được gọi là một* ***phép biến đổi tuyến tính*** *nếu với mọi* $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}$ *và với mọi vô hướng* x:

(a) $T(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w})$ (b) $T(x\boldsymbol{v})= xT(\boldsymbol{v})$.

Chú ý Hai điều kiện (a) và (b) tương đương với một điều kiện (gọi là ***tính tuyến tính***):

$$\text{(c)}\quad T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w})$$

với mọi $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}$ và với mọi vô hướng x và y.

Tính chất 9.1.1 Nếu $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ là phép biến đổi tuyến tính , thì

(i) $T(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$

(ii) $T(-\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v})$ đối với mọi $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}$.

(iii) Nếu $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ là những phần tử của $\boldsymbol{V}$ và $x_1, \dots, x_n$ là các vô hướng, thì

$$T(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = x_1T(\boldsymbol{v}_1) + x_2T(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{v}_n).$$

1.2. Những ví dụ về các phép biến đổi tuyến tính

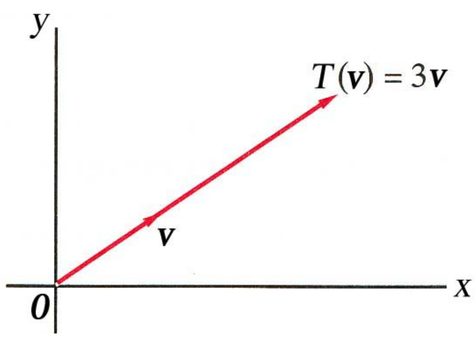
1.2.1. Ví dụ về những phép biến đổi trên R^2

1) Cho T là ánh xạ xác định bởi $T(\boldsymbol{v}) = 3\boldsymbol{v}$ với mọi $\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^2$.

$$T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = 3(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = x(3\boldsymbol{v}) + y(3\boldsymbol{w}) = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w})$$

$\Rightarrow$ T là phép biến đổi tuyến tính.

Ta có thể xem T như phép dãn vectơ 3 lần.



2) Xét ánh xạ T xác định bởi $T(\boldsymbol{v}) = x_1\boldsymbol{e}_1$ với mọi $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$. Như vậy $T(\boldsymbol{v}) = (x_1, 0)$. Nếu $\boldsymbol{w} = (y_1, y_2)$, thì

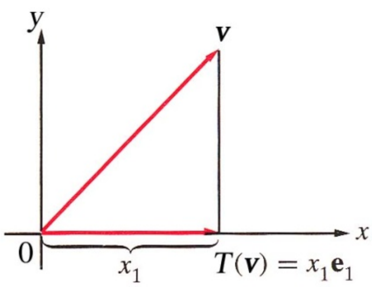
$$x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} xx_1 + yy_1 \\ xx_2 + yy_2 \end{bmatrix}$$

nên

$$T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = (xx_1 + yy_1)\boldsymbol{e}_1 = x(x_1\boldsymbol{e}_1) + y(y_1\boldsymbol{e}_1) = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w})$$

$\Rightarrow$ T là một phép biến đổi tuyến tính.

Ta có thể xem T như phép chiếu lên trục Ox.



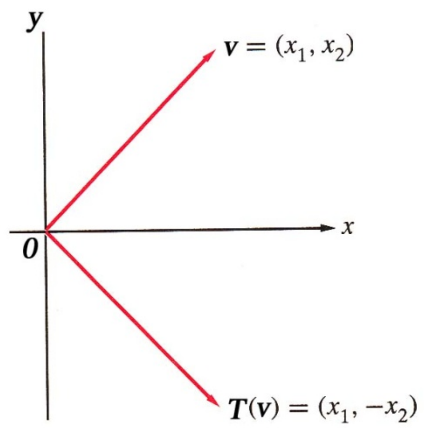
3) Cho T là ánh xạ xác định bởi $T(\boldsymbol{v}) = (x_1, -x_2)$ $\forall \boldsymbol{v} = (x_1, x_2) \in R^2$. Từ

$$T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} xx_1 + yy_1 \\ -(xx_2 + yy_2) \end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w})$$

$\Rightarrow$ T là một phép biến đổi tuyến tính.

Ta có thể xem T như phép lấy đối xứng các vectơ qua trục Ox.

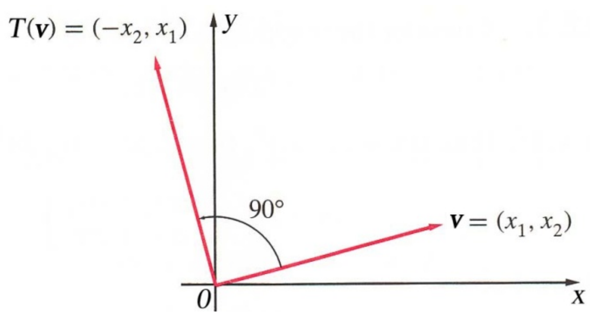


4) Ánh xạ T xác định bởi $T(\boldsymbol{v}) = (-x_2, x_1)$ là tuyến tính, do

$$T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} -(xx_2 + yy_2) \\ xx_1 + yy_1 \end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w})$$

Ta có thể xem T như phép quay mỗi vectơ trong R^2 một góc 90^0 theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.



5) Xét ánh xạ T xác định bởi

$$T(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

với mọi $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$. Vì

$$T(x\boldsymbol{v}) = (\mathrm{x}^2\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}^2\mathrm{x}_2^2)^{\frac{1}{2}} = |x|T(\boldsymbol{v})$$

nên $xT(\boldsymbol{v}) \neq T(x\boldsymbol{v})$ khi $x < 0$ và $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Do đó, T không phải là một phép biến đổi tuyến tính.

1.2.2. Ví dụ về những phép biến đổi từ R^n vào R^m

6) Ánh xạ $T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^1$ xác định bởi

$$T(\boldsymbol{v}) = x_1 + x_2 \text{ với mọi } \boldsymbol{v} = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2.$$

là một phép biến đổi tuyến tính do

$$T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = (xx_1 + yy_1) + (xx_2 + yy_2)$$

$$= x(x_1 + x_2) + y(y_1 + y_2) = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w}).$$

7) Ánh xạ $T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ xác định bởi

$$T(\boldsymbol{v}) = (x_2, x_1, x_1 + x_2) \text{ với mọi } \boldsymbol{v} = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2.$$

là một phép biến đổi tuyến tính do

$$T(x\boldsymbol{v}) = (xx_2, xx_1, xx_1 + xx_2) = xT(\boldsymbol{v})$$

và

$$T(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (x_2 + y_2, x_1 + y_1, x_1 + y_1 + x_2 + y_2)$$

$$= (x_2, x_1, x_1 + x_2) + (y_2, y_1, y_1 + y_2) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w})$$

Chú ý rằng nếu ta cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

thì đối với mỗi $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2$

$$A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = T(\boldsymbol{v})$$

Nói chung, nếu A là một ma trận $m \times n$, ta có thể định nghĩa một phép biến đổi T từ R^n vào R^m như sau

$$T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

đối với mỗi $\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$.

Ánh xạ T là tuyến tính do

$$T(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = A(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = xA\boldsymbol{v} + yA\boldsymbol{w} = xT(\boldsymbol{v}) + yT(\boldsymbol{w}).$$

Như vậy ta có thể xem mỗi ma trận A cỡ $m \times n$ như một ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R^m.

1.2.3. Ví dụ về những phép biến đổi từ V vào W

8) Nếu $\boldsymbol{V}$ là một không gian vectơ, thì ánh xạ I□ xác □inh bởi $I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ đối với mọi $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, được gọi là ***ánh xạ đồng nhất***. I là phép biến đổi tuyến tính từ $\boldsymbol{V}$ vào chính nó

$$I(x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}) = x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w} = xI(\boldsymbol{v}) + yI(\boldsymbol{w}).$$

9) Ánh xạ T từ $C[a, b]$ (không gian vectơ gồm tất cả những hàm liên tục trên $[a, b]$) vào R^1 xác định bởi

$$T(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Nếu f và $g \in C[a, b]$, thì

$$T(xf + yg) = \int_a^b (xf + yg)(t)dt$$

$$= x\int_a^b f(t)dt + y\int_a^b g(t)dt = xT(f) + yT(g).$$

Vì vậy, T là một phép biến đổi tuyến tính.

10) Cho D là ánh xạ từ $C^1[a, b]$ (không gian vectơ gồm tất cả những hàm có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$)vào $C[a, b]$:$D(f) = f'$

D là một phép biến đổi tuyến tính do

$$D(xf + yg) = xf' + yg' = xD(f) + yD(g).$$

1.3. Ảnh và Hạt nhân

1.3.1. Định nghĩa *Cho $T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ là một phép biến đổi tuyến tính.* ***Ảnh*** *của T là tập $\{T(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$.*

Hạt nhân *của T là tập $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \mid T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\}$*

Định lý 9.1.2 Nếu $T: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ là một phép biến đổi tuyến tính, thì

(i) Hạt nhân của T là một không gian con của $\boldsymbol{V}$.

(ii) Ảnh của T là một không gian con của $\boldsymbol{W}$.

(iii) (số chiều của hạt nhân của T) + (số chiều của ảnh của T) = số chiều của V.

1.3.2. Nhận xét Cho $T: R^n \to R^n$ có $Tv = Av$ thì:

Ảnh của $T = C(A)$

Nhân của $T = N(A)$

Ví dụ 11 Cho $T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ xác định bởi

$$T(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ với } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Một vectơ $\boldsymbol{v}$ thuộc nhân của $T \Leftrightarrow x_1 = 0$. Như vậy hạt nhân của T là

$$\{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Do $T(\boldsymbol{v}) = x_1\boldsymbol{e}_1$ nên ảnh của T là không gian con của $\mathbb{R}^2$ sinh bởi $\boldsymbol{e}_1$.

2. MA TRẬN CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

2.1. Trường hợp phép biến đổi tuyến tính $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Ta sẽ chỉ ra tồn tại ma trận A cỡ $m\times n$ sao cho $T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$

Đối với $j = 1, \dots, n$ ta xác định vectơ

$$\boldsymbol{a}_j = T(\boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{R}^m$$

Cho

$$A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_n]$$

Với vectơ bất kỳ

$$\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

thì

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

nên

$$T(\boldsymbol{v}) = x_1T(\boldsymbol{e}_1) + x_2T(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e}_n)$$

$$= x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = A\boldsymbol{v} \quad \text{(xem 1.2)}$$

A được gọi là ***ma trận chính tắc*** của T.

Ví dụ 1 Cho phép biến đổi tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$T(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} \text{ với } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Để tìm ma trận chính tắc của T phải xác định $T(\boldsymbol{e}_1)$, $T(\boldsymbol{e}_2)$, $T(\boldsymbol{e}_3)$.

$$T(\boldsymbol{e}_1) = T((1,\ 0,\ 0)) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = T((0,\ 1,\ 0)) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{e}_3) = T((0,\ 0,\ 1)) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

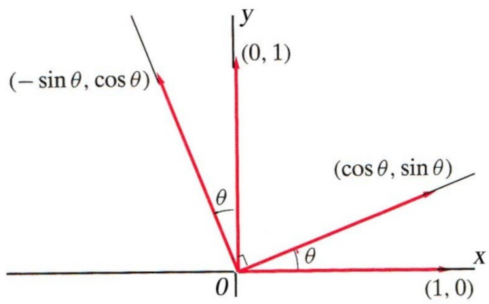
$\Rightarrow$ Ma trận chính tắc

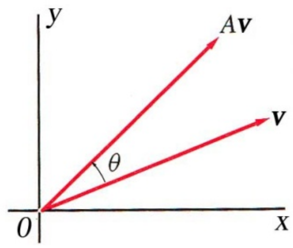
$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Để kiểm tra kết quả, hãy tính

$$A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 + x_2\\x_2 + x_3\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2 Cho $T : \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$ là phép biến đổi tuyến tính mà quay mỗi vectơ một góc θ theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.





Trong hình vẽ $\boldsymbol{e}_1$ được chuyển thành vectơ ($\cos\theta$, $\sin\theta$), $\boldsymbol{e}_2$ được chuyển thành vectơ ($-\sin\theta$, $\cos\theta$). Ma trận chính tắc

$$A = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Nếu $\boldsymbol{v}$ là một vectơ trong R^2, thì để quay $\boldsymbol{v}$ ngược chiều kim đồng hồ một góc θ chỉ cần nhân với A.

2.2. Trường hợp tổng quát khi $T : V \to W$ là một phép biến đổi tuyến tính, trong đó V và W là hai không gian có chiều tương ứng là m và n.

Ta cũng có thể dùng ma trận để biểu diễn T. Trước hết ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa. Trong không gian R^n cho một cơ sở là $S = \{v_1, \dots, v_n\}$. Nếu một vectơ $v \in R^n$ biểu diễn qua tổ hợp các vectơ cơ sở $v = x_1v_1 + \cdots . + x_nv_n$ thì $v = (x_1, \dots, x_n)_s$ gọi là tọa độ của v trong cơ sở S.

Ví dụ 3 Cho cơ sở $S = \left\{v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}$. Tìm tọa độ vectơ $v = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$

(a) trong cơ sở của S

(b) trong cơ sở tự nhiên $E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

Giải (a) Giả sử: $v = x_1v_1 + x_2v_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 4\\x_2 = 1\end{cases}$ nên $v = (4,1)_S$

(b) Giả sử: $v = y_1e_1 + y_2e_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = y_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}y_1 = 3\\y_2 = 5\end{cases}$ nên $v = (3,5)_E$

Định lý 9.2.1 Nếu $E = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ và $F = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ lần lượt là cơ sở của những không gian vectơ $\boldsymbol{V}$ và $\boldsymbol{W}$, thì ứng với mỗi phép biến đổi tuyến tính $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ có một ma trận A sao cho

$$[T(\mathbf{v})]_F = A[\mathbf{v}]_E \text{ đối với mỗi } \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}.$$

A là ma trận của T theo các cơ sở E và F, có cột thứ j là

$$\mathbf{a}_j = [T(\mathbf{v}_j)]_F \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Từ định lý này ta có quy tắc tìm ma trận A như sau:

Bước 1. Tìm ảnh của từng vectơ cơ sở $T(v_j), j = 1, \dots, n$ của không gian nguồn.

Bước 2. Tìm tọa độ của các vectơ này trong cơ sở của không gian đích.

Ví dụ 4 Cho $T : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ là phép biến đổi tuyến tính xác định bởi

$$T(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{w}_1 + (x_2 + x_3)\mathbf{w}_2$$

đối với mỗi $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$, trong đó

$$w_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ và } w_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận A của T theo các cơ sở $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ và $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$.

Giải

$$T(\boldsymbol{e}_1) = 1\boldsymbol{w}_1 + 0\boldsymbol{w}_2$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = 0\boldsymbol{w}_1 + 1\boldsymbol{w}_2$$

$$T(\boldsymbol{e}_3) = 0\boldsymbol{w}_1 + 1\boldsymbol{w}_2$$

Cột j của A là tọa độ của $T(\boldsymbol{e}_j)$ theo cơ sở $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$. Như vậy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5 Cho $T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ là phép biến đổi tuyến tính xác định bởi

$$T(x\boldsymbol{w}_1 + y\boldsymbol{w}_2) = (x + y)\boldsymbol{w}_1 + 2y\boldsymbol{w}_2$$

trong đó $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ là cơ sở ở Ví dụ 3. Hãy tìm ma trận A biểu diễn T theo cơ sở $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$.

Giải

$$T(\boldsymbol{e}_1) = 1\boldsymbol{w}_1 + 0\boldsymbol{w}_2$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = 1\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2$$

Như vậy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 6 Cho phép biến đổi tuyến tính $D : \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1$, xác định bởi

$$D(p) = p' \quad \text{(đạo hàm của } p\text{)}.$$

Cho $\{x^2, x, 1\}$ và $\{x, 1\}$ là cơ sở của $\mathbf{P}_2$ và $\mathbf{P}_1$ tương ứng. Hãy tìm một ma trận biểu diễn D.

Giải

$$D(x^2) = 2x + 0\cdot 1$$

$$D(x) = 0x + 1\cdot 1$$

$$D(1) = 0x + 0\cdot 1$$

Như vậy ma trận của D theo các cơ sở $\{x^2, x, 1\}$ và $\{x, 1\}$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu $p(x) = ax^2 + bx + c$, thì tọa độ của p theo cơ sở $\{x^2, x, 1\}$ là (a, b, c). Để tìm tọa độ của vectơ $D(p)$ trong cơ sở $\{x, 1\}$, ta chỉ cần nhân

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix}.$$

Như vậy, $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 9

1. Khái niệm phép biến đổi tuyến tính.

2. Ảnh và hạt nhân của một phép biến đổi tuyến tính.

3. Ma trận biểu diễn một phép biến đổi tuyến tính.

BÀI 10: MA TRẬN CHUYỂN CƠ CỞ

MỞ ĐẦU. Trong một không gian vectơ có thể chọn được nhiều tập vectơ làm cơ sở. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính phụ thuộc vào cơ sở của 2 không gian nguồn và đích. Do đó việc tìm mối quan hệ giữa các cơ sở giúp cho xác định quan hệ các ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính.

1. Ma trận của ánh xạ đồng nhất và Phép chuyển cơ sở

Nhắc lại: Khi $\boldsymbol{V}$ là một không gian vectơ, ánh xạ I

$I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ đối với mọi $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$,

được gọi là ***ánh xạ đồng nhất***. Ma trận của I như thế nào?

Giả sử $\boldsymbol{V}$ có cơ sở $E = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ trong không gian nguồn,

và cơ sở $F = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ trong không gian đích.

$\boldsymbol{a}_j = [I(\boldsymbol{v}_j)]_F = [\boldsymbol{v}_j]_F \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

thì I có ma trận $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \dots \boldsymbol{a}_n]$ theo các cơ sở E và F

Ví dụ 1 Cho hai cơ sở của R^2 là

$E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ và $F = \{\boldsymbol{w}_1 = (3, 7), \boldsymbol{w}_2 = (2, 5)\}$.

Tìm ma trận của $I : R^2 \to R^2$

a) theo các cơ sở *E* và *F*.

b) theo các cơ sở *F* và *E*.

Giải

a) (1, 0) = 5(3, 7) - 7(2, 5) và (0, 1) = -2(3, 7) + 3(2, 5), nên $[\boldsymbol{e}_1]_F = (5, -7)$, $[\boldsymbol{e}_2]_F = (-2, 3)$. Như vậy ma trận của I là

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $\mathbf{w}_1 = 3(1, 0) + 7(0, 1)$ và $\mathbf{w}_2 = 2(1, 0) + 5(0, 1)$, nên $[\mathbf{w}_1]_E = (3, 7) = \mathbf{w}_1$, $[\mathbf{w}_2]_E = (2, 5) = \mathbf{w}_2$. Như vậy ma trận của I□ là

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2].$$

Chú ý

1) Nếu R^n có hai cơ sở $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (cơ sở chính tắc) và $F = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, thì ma trận của của ánh xạ đồng nhất theo cơ sở F và E là $[\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2 \ldots \mathbf{w}_n]$.

2) Nếu E trùng F, thì ma trận của I theo cơ sở E và F là ma trận đơn vị cỡ $n \times n$.

Giả sử không gian $\boldsymbol{V}$ có hai cơ sở E và F. Gọi A là ma trận của ánh xạ đồng nhất $I : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ theo các cơ sở E và F. Cho vectơ $\mathbf{v}$ thuộc $\boldsymbol{V}$ có tọa độ theo cơ sở E và F lần lượt là $[\mathbf{v}]_E$ và $[\mathbf{v}]_F$. Theo Định lý 7.2.1

$$[\mathbf{v}]_F = A[\mathbf{v}]_E$$

Đây chính là công thức liên hệ tọa độ của cùng một vectơ $\mathbf{v}$ theo hai cơ sở E và F. Vì vậy A còn được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ F sang E.

Chú ý Ma trận chuyển cơ sở A từ F sang E là ma trận khả nghịch và A^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ E sang F

Ví dụ 2 Cho hai cơ sở của R^2 là $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ và $F = \{\mathbf{w}_1 = (3, 7), \mathbf{w}_2 = (2, 5)\}$. Biết $\mathbf{v} \in \mathrm{R}^2$ có tọa độ theo cơ sở F là (1, -1). Tìm tọa độ của $\mathbf{v}$ theo cơ sở E.

Giải

Theo Ví dụ 6b), ma trận chuyển cơ sở từ E sang F là

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Do công thức liên hệ tọa độ, ta có tọa độ của $\mathbf{v}$ theo cơ sở E bằng

$$[v]_E = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính hợp

Cho các phép biến đổi tuyến tính $S : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$, $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$. Ta xác định ánh xạ $\boldsymbol{U}$ vào $\boldsymbol{W}$, bằng cách thực hiện liên tiếp S và T

$$T(S(\boldsymbol{u})).$$

Ký hiệu ánh xạ này là TS. Nó là phép biến đổi tuyến tính.

TS được gọi là ***phép biến đổi tuyến tính hợp*** của S với T.

Ví dụ 3 Các phép biến đổi tuyến tính $S : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, $T : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^1$ cho bởi

$$S((x_1, x_2)) = (x_1\text{-}x_2,\ x_1\text{-}x_2,\ 2x_1)$$

$$T((x_1,x_2, x_3)) = x_1 + x_2 - x_3.$$

Ta có

$$(TS)((x_1, x_2)) = T(S((x_1, x_2)))$$

$$= T((x_1\text{-}x_2,\ x_1\text{-}x_2,\ 2x_1)) = x_1\text{-}x_2 + x_1\text{-}x_2 - 2x_1 = -\,2x_2.$$

Câu hỏi : Ma trận của TS liên hệ với ma trận của T và S như thế nào?

Định lý Cho H, E, F lần lượt là cơ sở của các không gian vectơ $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$. Giả sử A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $S : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ theo các cơ sở H và E, B là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $T : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ theo các cơ sở E và F. Ta có ma trận của TS theo các cơ sở H và F là BA.

Ví dụ 4 Các phép biến đổi tuyến tính $S : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, $T : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^1$ cho bởi

$$S((x_1, x_2)) = (x_1\text{-}x_2,\ x_1\text{-}x_2,\ 2x_1) \qquad T((x_1,x_2, x_3)) = x_1 + x_2 - x_3.$$

Tìm ma trận chính tắc của TS.

Giải

Cách 1: Ta có

$$(TS)((x_1, x_2)) = -\,2x_2 = [0 \quad -2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

nên ma trận chính tắc của TS là [0 -2].

Cách 2:

$$S((x_1, x_2)) = (x_1\text{-}x_2, x_1\text{-}x_2, 2x_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$T((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 - x_3 = [1 \;\; 1 \;\; -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

nên ma trận chính tắc của S và T tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = [1 \;\; 1 \;\; -1].$$

Ma trận chính tắc của TS là $BA = [0 \;\; -2]$.

Định nghĩa *Phép biến đổi tuyến tính $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ được gọi là **phép biến đổi tuyến tính khả nghịch** nếu tồn tại một phép biến đổi tuyến tính $L : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ thỏa điều kiện*

$$(TL)(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \text{ và } (LT)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \text{ với mọi } \mathbf{w} \in \mathbf{W} \text{ và với mọi } \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

(*Tức là TL và LT là những ánh xạ đồng nhất*). *Ta gọi L là **phép biến đổi nghịch đảo** của T, ký hiệu là T^{-1}.*

Câu hỏi : Khi nào T khả nghịch? Nếu T khả nghịch, thì ma trận của T^{-1} và ma trận của T liên hệ với nhau thế nào?

Hệ quả Cho E, F lần lượt là cơ sở của các không gian vectơ $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$. Giả sử A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ theo các cơ sở E và F.

Khi ấy, T khả nghịch nếu và chỉ nếu A khả nghịch.

Ngoài ra $T^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ có ma trận theo các cơ sở F và E là A^{-1}.

3. Các ma trận đồng dạng

Khi $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ là một phép biến đổi tuyến tính và $\mathbf{V}$ là không gian vectơ n- chiều, ma trận biểu diễn T sẽ phụ thuộc vào cơ sở được chọn của $\mathbf{V}$. Nếu cơ sở thay đổi thì ma trận biểu diễn T cũng thay đổi. Mối quan hệ giữa các ma trận này thế nào?

Định lý Cho E và F là hai cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{V}$ và $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ là phép biến đổi tuyến tính. Cho M là ma trận chuyển cơ sở từ E sang F. Nếu A là ma trận của T theo cơ sở E và B là ma trận của T theo cơ sở F, thì

$$B = M^{-1}AM.$$

Ví dụ 10 Cho phép biến đổi tuyến tính $T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ xác định bởi

$$T(\boldsymbol{v}) = (2x_1, x_1 + x_2).$$

với mọi $\boldsymbol{v} = (x_1,x_2)$. Tìm ma trận của T theo cơ sở

$$F = \{\boldsymbol{w}_1 = (1, 1), \boldsymbol{w}_2 = (-1, 1)\}.$$

Giải Ma trận chính tắc của T (chính là ma trận theo cơ sở chính tắc $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$) là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận chuyển cơ sở từ E sang F là

$$M = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, ma trận của T theo cơ sở F là

$$M^{-1}AM = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa *Cho A và B là hai ma trận n×n. B được gọi là* ***đồng dạng*** *với A nếu tồn tại ma trận khả nghịch M sao cho*

$$B = M^{-1}AM$$

Chú ý

1) Nếu B đồng dạng với A, thì $A = MBM^{-1} = (M^{-1})^{-1}BM^{-1}$ là đồng dạng với B. Vì vậy ta có thể nói A và B là các ma trận đồng dạng.

2) Một phép biến đổi tuyến tính từ không gian vectơ V vào chính nó có các ma trận theo những cơ sở khác nhau đồng dạng.

3) Nếu A và B là các ma trận đồng dạng, thì đa thức đặc trưng của chúng trùng nhau.Thật vậy

$$\det(B - tI) = \det(M^{-1}AM - t(M^{-1}IM))$$

$$= \det(M^{-1}(A - tI)M) = \det(A - tI).$$

Như vậy, hai ma trận đồng dạng thì các giá trị riêng (kể cả bội) trùng nhau.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG
BÀI GIẢNG TUẦN 10

1. Ma trận của ánh xạ đồng nhất. Ma trận chuyển cơ sở.

2. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính hợp. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính nghịch đảo.

3. Mối quan hệ giữa các ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính từ một không gian vectơ vào chính nó.

BÀI 11: PHÉP CHIẾU VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU

MỞ ĐẦU

Trong chương này ta tìm hiểu một trong những kỹ thuật để xây dựng công thức từ các số liệu thực nghiệm.

Giả sử ta làm một dãy thí nghiệm, và hy vọng đầu ra y gần như là một hàm tuyến tính đối với đầu vào t, tức là một hàm có dạng

$$y = C + Dt.$$

Ví dụ như: Trong một số khoảng thời gian, ta đo khoảng cách đến một vệ tinh đang trên đường tới sao Hỏa. Trong trường hợp này t là thời gian, y là khoảng cách, và trừ khi động cơ hoạt động hoặc lực hấp dẫn là mạnh, vệ tinh có thể di chuyển với vận tốc v gần như không đổi: $y = y_0 + vt = C+Dt$

Giả sử trong một dãy thí nghiệm ta thu được m kết quả y tại m giá trị t khác nhau

$$(t_1; y_1), (t_2; y_2), \ldots, (t_m; y_m).$$

Làm thế nào để tính C và D từ những kết quả này?

Nếu quan hệ này đúng là tuyến tính, và không có sai số khi thí nghiệm, thì không có gì đáng làm; hai phép đo của y tại những giá trị khác nhau của t sẽ đủ để xác định đường thẳng $y = C + Dt$ và toàn bộ những kết quả đo khác sẽ nằm trên đường này. Nhưng nếu có sai số, và những điểm đo thêm chệch khỏi đường thẳng, thì hệ phương trình 2 ẩn sau đây vô nghiệm

$$C + Dt_1 = y_1$$

$$C + Dt_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$C + Dt_m = y_m$$

Ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t \end{bmatrix} \text{ - ma trận hệ số,} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \text{ - vectơ ẩn,} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ta viết gọn hệ trên ở dạng $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Phương pháp bình phương tối thiểu, còn gọi là ***phương pháp bình phương nhỏ nhất***, là một kỹ thuật để tìm một nghiệm gần đúng cho một hệ phương trình tuyến tính không có nghiệm đúng.

Ý tưởng chính của phương pháp là mở rộng khái niệm nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ để phương trình này luôn có nghiệm.

Cụ thể: Do $\boldsymbol{C}(A)$ (không gian con của R^m) gồm tất cả những vectơ có dạng $A\boldsymbol{x}$, nên $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{C}(A)$. Trong $\boldsymbol{C}(A)$ ta chọn vectơ $\boldsymbol{p}$ sao cho $\boldsymbol{p}$ gần $\boldsymbol{b}$ nhất, tức là $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}\|$ nhỏ nhất. Khi đó $\boldsymbol{x} = \hat{x}$ sao cho $\boldsymbol{p} = A\hat{x}$ được gọi là ***nghiệm bình phương tối thiểu*** của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Nếu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ có nghiệm thông thường thì $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{C}(A)$, nên $\boldsymbol{p} = A\hat{x}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)$ mà gần $\boldsymbol{b}$ nhất chính là $\boldsymbol{b} \Rightarrow \hat{x}$ trùng với nghiệm thông thường. Như vậy nghiệm bình phương tối thiểu là mở rộng của nghiệm thông thường.

1. PHÉP CHIẾU

Bây giờ ta mở rộng khái niệm phép chiếu trong hình học sơ cấp. Thay cho đường thẳng hay mặt phẳng đi qua gốc tọa độ của R^3, ta xét không gian cột $\boldsymbol{C}(A)$, là không gian con của R^m.

1.1. Định nghĩa *Cho A là ma trận thực cỡ m×n, **b** là vectơ trong* R^m. ***Hình chiếu*** *của **b** trên không gian cột **C**(A) là vectơ **p** thuộc **C**(A) sao cho **b** - **p** trực giao với mọi vectơ thuộc **C**(A)*

1.2. Cách tìm hình chiếu

Giả sử A có cột j là $\boldsymbol{a}_j$ ($j = 1,..., n$).

$$\boldsymbol{C}(A) = \{\, x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \mid x_j \in \mathrm{R} \,\}$$

$\Rightarrow$ mỗi vectơ $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}(A)$ có dạng $\boldsymbol{y} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$.

$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ trực giao với mọi $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{C}(A) \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}) = 0$ ($j = 1,..., n$).

$$\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0} \quad (1)$$

Mặt khác $\boldsymbol{p}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)$, nên $\boldsymbol{p}$ có dạng $\boldsymbol{p} = A\hat{x}$. Pt (1) tương đương

$$A^{T}(\boldsymbol{b} - A\hat{x}) = \boldsymbol{0}$$

Ta viết lại phương trình này ở dạng quen thuộc

$$A^{T}A\hat{x} = A^{T}\boldsymbol{b} \qquad (2)$$

(2) được gọi là ***phương trình chuẩn tắc***.

1.3. Phương pháp xác định hình chiếu như sau:

Giải phương trình chuẩn tắc (2) để xác định $\hat{x}$. Hình chiếu của $\boldsymbol{b}$ trên không gian $\boldsymbol{C}(A)$ là $\boldsymbol{p} = A\hat{x}$.

Ví dụ 1 Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm hình chiếu $\boldsymbol{p}$ của $\boldsymbol{b}$ trên $\boldsymbol{C}(A)$.

Giải

$$A^{T}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ và } A^{T}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Phương trình chuẩn tắc $A^{T}A\hat{x} = A^{T}\boldsymbol{b}$ là

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải phương trình này ta được

$$x = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Hình chiếu là

$$p = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Có ba câu hỏi được đặt ra đối với ma trận thực A cỡ $m\times n$ và vectơ $\boldsymbol{b}$ trong R^m:

1) Hình chiếu $\boldsymbol{p}$ của $\boldsymbol{b}$ trên $\boldsymbol{C}(A)$ có luôn luôn tồn tại?

2) Nếu tồn tại hình chiếu thì nó có duy nhất không?

3) Độ dài của $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ so với độ dài của $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}$ với $\boldsymbol{y}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)\backslash\{\boldsymbol{p}\}$ thế nào?

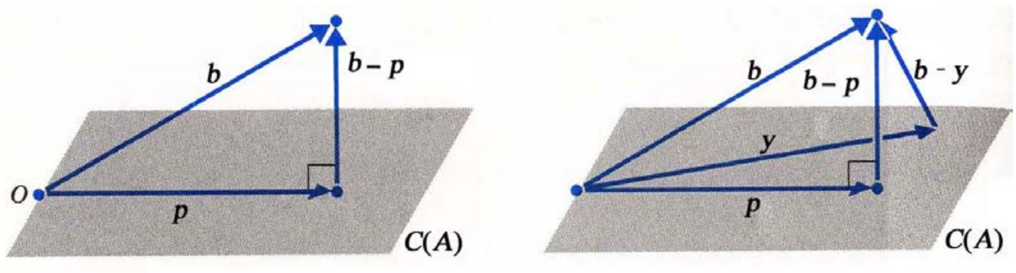
Định lý sau đây trả lời cả ba câu hỏi này.

Định lý 11.1.1 Cho A là ma trận thực cỡ $m\times n$. Đối với mỗi $\boldsymbol{b}\in R^m$ $\exists!$hình chiếu $\boldsymbol{p}$ của $\boldsymbol{b}$ trên $\boldsymbol{C}(A)$. Ngoài ra

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}\|$$

đối với bất kỳ $\boldsymbol{y}$ thuộc $\boldsymbol{C}(A)\backslash\{\boldsymbol{p}\}$.

Bình luận T/c của hình chiếu $\boldsymbol{p}$ như trong hình học sơ cấp: $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ trực giao với mọi vectơ của $\boldsymbol{C}(A)$. Bất đẳng thức $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}\|$ nói lên rằng $\boldsymbol{p}$ là vectơ thuộc không gian $\boldsymbol{C}(A)$ mà gần $\boldsymbol{b}$ nhất.



Chú ý Vì $\boldsymbol{p}$ luôn tồn tại và $\boldsymbol{p} = A\hat{x}$, nên $\hat{x}$ luôn tồn tại. Nói chung thì $\hat{x}$ không duy nhất, mặc dù $\boldsymbol{p} = A\hat{x}$ là duy nhất.

Ví dụ 2 Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ và } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm $\hat{x}$ và tìm hình chiếu $\boldsymbol{p}$ của $\boldsymbol{b}$ trên $\boldsymbol{C}(A)$.

Giải

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ và } A^T b = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Phương trình chuẩn tắc $A^T A\hat{x} = A^T\boldsymbol{b}$ là

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Nó có nghiệm tổng quát $\hat{x} = (t, t - 2)$ ($\hat{x}$ không duy nhất).

Hình chiếu là

$$p = Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Sau đây là điều kiện để $\hat{x}$ là duy nhất.

Định lý 11.1.2 Nếu A là ma trận thực cỡ $m \times n$, có hạng bằng n, thì $A^T A$ khả nghịch và phương trình chuẩn tắc

$$A^T A\hat{x} = A^T\boldsymbol{b}$$

có nghiệm duy nhất ($\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T\boldsymbol{b}$).

1.4. Định nghĩa *Cho A là ma trận thực cỡ $m \times n$, có hạng bằng n. Ma trận*

$P = A(A^T A)^{-1} A^T$ *được gọi là* ***ma trận chiếu***

Nhận xét

P chính là ma trận chính tắc của một phép biến đổi tuyến tính từ R^m vào R^m, cho tương ứng mỗi vectơ $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^m$ với hình chiếu $\boldsymbol{p} = P\boldsymbol{b}$ của nó trên $\boldsymbol{C}(A)$. Phép biến đổi tuyến tính này chính là phép chiếu (vuông góc) lên $\boldsymbol{C}(A)$.

Ví dụ 3 Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm ma trận chiếu *P*. Từ đó tính ***p*** và so sánh với Ví dụ 1.

Giải

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$p = Pb = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kết quả là ***p*** như ở Ví dụ 1.

2. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP CHIẾU

2.1.Mở rộng khái niệm nghiệm của phương trình *Ax = b*

*A**x*** = ***b*** có thể vô nghiệm. Bây giờ dựa vào phép chiếu ta đi *mở rộng khái niệm nghiệm của A**x*** = ***b*** để nó luôn có nghiệm.

Với mỗi vectơ *A**x***, ||***b*** - *A**x***||= khoảng cách từ ***b*** tới *A**x***.

Với hình chiếu ***p*** = $A\hat{x}$ của ***b*** trên ***C***(*A*), theo định lý 11.1.1

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| > \|\mathbf{b} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{b} - A\hat{x}\| \quad \forall A\mathbf{x} \in \mathbf{C}(A)\backslash\{\mathbf{p}\},$$

nên ||***b*** - *A**x***|| đạt *min* tại ***x*** = $\hat{x}$.

Định nghĩa *Cho A là ma trận thực cỡ m×n, **b**∈R^m.* ***Nghiệm bình phương tối thiểu*** *của Ax = **b** là $\hat{x}$ sao cho*

$$||b - A\hat{x}|| = \min_{x \in R^n} ||b - Ax||$$

Với mỗi vectơ $A\mathbf{x}$ thuộc $\mathbf{C}(A)$, gọi $\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ là ***vectơ sai số***. Khi đó nghiệm $\hat{x}$làm cho $||\mathbf{e}||$ nhỏ nhất. Nghiệm bình phương tối thiểu $\hat{x}$ luôn tồn tại (nhưng có thể không duy nhất) và tìm được bằng cách giải phương trình chuẩn tắc $A^TA\hat{x} = A^T\mathbf{b}$.

2.2. Chọn đường khớp nhất với một tập điểm dữ liệu trên mặt phẳng

Giả sử bằng thực nghiệm thu được tập hợp gồm các điểm (t_i, y_i) (i = 1, 2, ..., n), gọi là tập điểm dữ liệu. Để tìm mối quan hệ hàm giữa t và y ta thường chọn một hàm số $f(t)$ thuộc lớp hàm số quen thuộc, như lớp hàm đa thức. Trên mặt phẳng tọa độ, đồ thị của $f(t)$ là một đường cong có thể không đi qua tất cả các điểm dữ liệu, tức là nói chung $f(t_i) \approx y_i$. Độ lệch giữa $f(t_i)$ và y_i là $f(t_i) - y_i$. Đồ thị của hàm số $f(t)$ thuộc lớp hàm số đã chọn sao cho $\sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - y_i)^2$ bé nhất được gọi là ***đường khớp nhất với tập điểm dữ liệu*** . Ta ứng dụng phương pháp bình phương tối thiểu để lựa chọn một đường khớp nhất.

Ví dụ 5

Cho dữ liệu

T	0	3	6
Y	1	4	5

Hãy tìm đường thẳng khớp nhất.

Giải Đường phải tìm có phương trình dạng $y = C + Dt$. Ta xác định C và D bằng cách giải hệ phương trình

$$C + D\cdot 0 = 1$$

$$C + D\cdot 3 = 4$$

$$C + D\cdot 6 = 5$$

Hệ này không có nghiệm thông thường, nên ta đi tìm nghiệm bình phương tối thiểu.

Ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

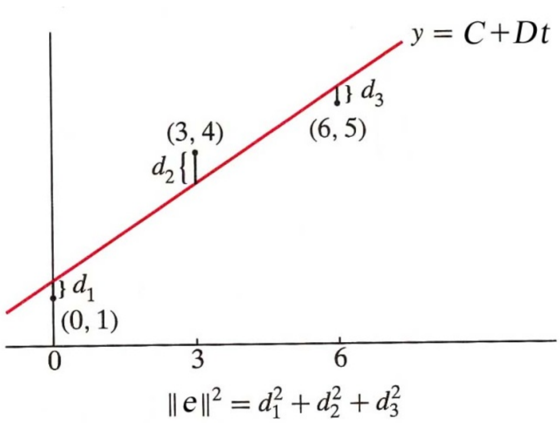
ta có phương trình chuẩn tắc

$A^T A\hat{x} = A^T\boldsymbol{b}$ hay $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 42 \end{bmatrix}$

Giải hệ này được nghiệm bình phương tối thiểu $x = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Như vậy đường khớp nhất là

$$y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t.$$



Ví dụ 6

Cho dữ liệu

t	0	1	2	3
y	3	2	4	4

Hãy tìm đường parabol khớp nhất.

Giải Parabol phải tìm có phương trình dạng $y = C + Dt + Et^2$. Ta xác định C, D và E bằng cách giải hệ phương trình

$$C + D\cdot 0 + E\cdot 0 = 3$$

$$C + D\cdot 1 + E\cdot 1 = 2$$

$$C + D\cdot 2 + E\cdot 4 = 4$$

$$C + D\cdot 3 + E\cdot 9 = 4$$

Hệ này không có nghiệm thông thường, nên ta đi tìm nghiệm bình phương tối thiểu.

Ký hiệu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

ta có phương trình chuẩn tắc

$$A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \\ 54 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ này được nghiệm bình phương tối thiểu $\hat{x} = (2.75, -0.25, 0.25)$

Như vậy đường khớp nhất là

$$y = 2.75 - 0.25t + 0.25t^2.$$

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 11

1. Hình chiếu $\boldsymbol{p}$. Phương trình chuẩn tắc.

2. Điều kiện để phương trình chuẩn tắc có nghiệm duy nhất. Ma trận của phép chiếu.

3. Khái niệm nghiệm bình phương tối thiểu $\hat{\boldsymbol{x}}$ của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ và cách tìm.

4. Cách chọn đường khớp nhất với tập điểm dữ liệu trên mặt phẳng.

BÀI 12: BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Từ thời cổ đại, khi thực hiện các công việc của mình, loài người đã luôn hướng tới cách làm tốt nhất trong các cách làm có thể được (tìm phương án tối ưu trong các phương án). Khi toán học phát triển, người ta đã mô hình hóa toán học các việc cần làm, nghĩa là biểu thị các mục tiêu cần đạt được, các yêu cầu hay các điều kiện cần thỏa mãn bằng ngôn ngữ toán học để tìm lời giải tối ưu cho nó. Từ đó hình thành nên các bài toán tối ưu.

1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1.Một số ví dụ thực tế dẫn đến bài toán QHTT

Bài toán bố trí máy trong sản xuất

Một phân xưởng có hai máy M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm I và II. Một tấn sản phẩm loại I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại II lãi 1.6 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm loại I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm loại II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 một ngày chỉ làm việc không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Lập mô hình toán Gọi x_i là số tấn sản phẩm loại i sản xuất trong một ngày.

Số giờ làm việc/ngày của M_1 là $3x_1 + x_2$ và M_2 là $x_1 + x_2$.

Số tiền lãi mỗi ngày là $2x_1 + 1.6x_2$ (triệu đồng).

Ta phải tìm $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ sao cho

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 1.6x_2 \to \max$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Bài toán về chế độ dinh dưỡng

Người ta cần một lượng chất dinh dưỡng A, B, C do các thức ăn α, β, γ, δ cung cấp. Hàm lượng chất dinh dưỡng có trong 1 đơn vị thức ăn cho như sau

	A	B	C
α :	20	5	0.5
β :	15	8	0
γ :	5	2	2
δ :	10	25	0

Nhu cầu dinh dưỡng: chất A không dưới 250g, chất B không dưới 170g, chất C không vượt quá 30g. Giá mua một đơn vị thức ăn α, β, γ, δ tương ứng là 2, 2.5, 0.8, 1.5 nghìn đ/g. Hãy lập một thực đơn sao cho bữa ăn có giá thành rẻ nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu về dinh dưỡng.

Lập mô hình toán Gọi khối lượng thức ăn α, β, γ, δ cần mua tương ứng là x_1, x_2, x_3, x_4.

Tổng hàm lượng A trong bữa ăn = $20x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 10x_4$.

Tổng hàm lượng B trong bữa ăn = $5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 25x_4$.

Tổng hàm lượng C trong bữa ăn = $0.5x_1 + 2x_3$.

Giá thành bữa ăn = $2x_1 + 2.5x_2 + 0.8x_3 + 1.5x_4$.

Ta phải tìm $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho

$$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 2.5x_2 + 0.8x_3 + 1.5x_4 \to \min$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 + 5x_3 + 10x_4 \geq 250 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 25x_4 \geq 170 \\ 0.5x_1 + 2x_3 \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán vận tải

Biết số lượng hàng có trong kho A_i là a_i (i = 1, 2), yêu cầu của cửa hàng B_j là b_j (j = 1, 2), cước phí vận chuyển một đơn vị hàng từ A_i đến B_j tương ứng là c_{ij}. Lập kế hoạch vận chuyển hàng sao cho các cửa hàng đều nhận đủ hàng và tổng cước phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Lập mô hình toán

Gọi x'_j = số lượng hàng vận chuyển từ A_1 đến cửa hàng B_j.

Gọi x''_j = số lượng hàng vận chuyển từ A_2 đến cửa hàng B_j.

Tổng lượng hàng chuyển từ A_1 đến hai cửa hàng = $x'_1 + x'_2$.

Tổng lượng hàng chuyển từ A_2 đến hai cửa hàng = $x''_1 + x''_2$.

Tổng lượng hàng B_1 nhận được từ hai kho = $x'_1 + x''_1$.

Tổng lượng hàng B_2 nhận được từ hai kho = $x'_2 + x''_2$.

Tổng cước phí phải trả = $c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{21}x''_1 + c_{22}x''_2$.

Ta phải tìm vectơ $\boldsymbol{x} = (x'_1, x'_2, x''_1, x''_2)$ sao cho

$$f(\boldsymbol{x}) = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + c_{21}x''_1 + c_{22}x''_2 \to \min$$

và thỏa mãn các điều kiện

$$x'_1 + x'_2 \leq a_1$$

$$x''_1 + x''_2 \leq a_2$$

$$x'_1 + x''_1 = b_1$$

$$x'_2 + x''_2 = b_2$$

$$x'_1, x'_2, x''_1, x''_2 \geq 0.$$

1.2.Bài toán Quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát

Bài toán QHTT dạng tổng quát

Tìm vectơ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min (\max)$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = 1, \dots, r) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = r+1, \dots, s) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = s, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, h) \\ x_j \leq 0 \ (j = h, \dots, k) \\ x_j \in R \ (j = k, \dots, n) \end{cases}$$

Ký hiệu D là tập tất cả các vectơ $\boldsymbol{x}$ thỏa mãn hệ bất phương trình trên, thì đây chính là bài toán tìm min (max) của hàm $f(\boldsymbol{x})$ trên D.

Vectơ $\boldsymbol{x}^* \in D$ sao cho $f(\boldsymbol{x})$ đạt min (max) được gọi là một ***phương án tối ưu***, hay là một nghiệm của bài toán này.

Chú ý Bài toán QHTT có thể có một nghiệm duy nhất, vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

Ta gọi

a) $f(\boldsymbol{x})$ là ***hàm mục tiêu***.

b)

$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = 1, \dots, r) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = r+1, \dots, s) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = s, \dots, m) \end{cases}$ là ***hệ ràng buộc***.

c) $\begin{cases} x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, h) \\ x_j \leq 0 \ (j = h, \dots, k) \\ x_j \in R \ (j = k, \dots, n) \end{cases}$ là ***điều kiện tất yếu***.

Thấy rằng

1) $f(\boldsymbol{x}*) = min\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\} \Leftrightarrow -f(\boldsymbol{x}*) = max\{-f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in D\}$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_i \leq b_i$

3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + y = b_i; y \geq 0$

4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i - y = b_i; y \geq 0$ (y - ***biến chênh lệch***)

5) Nếu biến x_j không bị ràng buộc về dấu, thì có thể thay thế

$$x_j = y - z, \text{ với } y \geq 0 \text{ và } z \geq 0.$$

Từ các nhận xét trên $\Rightarrow$ bất kỳ một bài toán QHTT nào cũng có thể đưa về dạng sau đây, được gọi là ***dạng chính tắc***

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longrightarrow min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b \ \ (i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

trong đó tất cả các $b_i \geq 0$.

Ký hiệu $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m), A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n},$$

có thể viết biểu thức dưới dạng ma trận

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Ví dụ Đưa bài toán sau đây về dạng chính tắc

$$f(\boldsymbol{x}) = -3x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 1. \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ta đưa thêm vào hai biến chênh lệch x_3, x_4.

Ta được dạng chính tắc như sau

$$g(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1. \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Xét bài toán QHTT chính tắc:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} \to \min$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

với $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^m$, A là ma trận $m\times n$.

Thuật toán đơn hình (simplex method):

Xuất phát từ một phương án cực biên $\boldsymbol{v}_0$. Kiểm tra xem $\boldsymbol{v}_0$ có phải là phương án tối ưu. Nếu $\boldsymbol{v}_0$ chưa phải là phương án tối ưu thì tìm cách cải tiến nó để được một phương án cực biên khác là $\boldsymbol{v}_1$ tốt hơn $\boldsymbol{v}_0$ theo nghĩa $f(\boldsymbol{v}_1) < f(\boldsymbol{v}_0)$. Quá trình này lặp lại nhiều lần cho đến khi tìm thấy phương án cực biên tối ưu $\boldsymbol{x}^*$.

Hướng giải quyết:

1. Cách tìm một phương án cực biên xuất phát $\boldsymbol{v}_0$.

2. Làm thế nào để biết một phương án cực biên đã cho là tối ưu hay chưa, tức là cần tìm được "dấu hiệu tối ưu".

3. Làm thế nào để từ một phương án cực biên chưa tối ưu tìm được một phương án cực biên mới tốt hơn nó.

***a.* Trường hợp *A* có một ma trận con là ma trận hoán vị *P* cỡ *m*×*m*:** Có thể chọn phương án cực biên xuất phát $\boldsymbol{v}_0$ như sau: Ta chọn biến mà các hệ số nằm trong P làm biến trụ, biến mà hệ số nằm ngoài P làm biến tự do. Gán 0 cho các biến tự do rồi giải ra các biến trụ ta được $\boldsymbol{v}_0$. Rõ ràng những giá trị vừa tìm của các biến trụ quét hết những thành phần của hệ số tự do $\boldsymbol{b}$.

Ký hiệu $\boldsymbol{J} = (\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ là dãy số chỉ số của các biến trụ mà $x_\alpha = b_1$, $x_\beta = b_2$, ..., $x_\gamma = b_m$. Ký hiệu $\boldsymbol{c}' = (c_\alpha, c_\beta, \ldots, c_\gamma) \in R^m$ với $c_\alpha, c_\beta, \ldots, c_\gamma$ lần lượt là hệ số của $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\gamma$.

$$f(\boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b}, \Delta_j = \boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{c}_j \ (j = 1, \ldots, n).$$

Dấu hiệu tối ưu "Nếu $\Delta_j \leq 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$, thì $\boldsymbol{v}_0$ là phương án tối ưu". Vì vậy, gọi $\Delta_j \leq 0$ ($j = 1, \ldots, n$) là ***số kiểm tra***.

Để thuận tiện cho tính toán theo thuật toán đơn hình, người ta sắp sếp các số liệu thành một bảng gọi là bảng đơn hình như dưới đây

Biến trụ	**c'**	**b**	x_1	x_2	..	x_n	**Tỉ số**
			c_1	c_2	..	c_n	
x_α	c_α	b_1	a_{11}	a_{12}	..	a_{1n}	
...	...	...	...	...	..	...	
x_γ	c_γ	b_m	a_{m1}	a_{m2}	..	a_{mn}	
		$f(\boldsymbol{x})$	Δ_1	Δ_2	..	Δ_n	

Nếu $\boldsymbol{v}_0$ chưa phải là tối ưu, ta đi xây dựng phương án cực biên $\boldsymbol{v}_1$ tốt hơn bằng cách xây dựng bảng đơn hình mới sau đây: Chọn chỉ số s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$.

Trên hàng thứ i của cột tỉ số ta sẽ điền b_i/a_{is} nếu $a_{is} > 0$.

Chọn chỉ số r sao cho b_r/a_{rs} là số bé nhất trong cột tỉ số.

a_{rs} được gọi là trụ. Thay x_r bởi x_s, c_r bởi c_s.

Chia hàng r của ma trận $[\boldsymbol{b}\ \ A]$ cho trụ, sau đó cộng vào các hàng còn lại của $[\boldsymbol{b}\ \ A]$ bội của hàng thứ r mới này sao cho cột thứ s của A trở thành vec tơ $\boldsymbol{e}_s$.

Ta tính $f(\boldsymbol{x})$ và các số kiểm tra mới bằng cách cộng vào hàng cũ ($f(\boldsymbol{x})$, Δ_1, ..., Δ_n) bội của hàng thứ r mới sao cho Δ_s bị khử đi. Nếu tất cả các số kiểm tra mới đều không dương, thì $\boldsymbol{v}_1$ là phương án tối ưu. Còn nếu $\boldsymbol{v}_1$ chưa phải là phương án tối ưu ta lặp lại thủ tục vừa rồi để lập bảng đơn hình thứ ba .... Ta cứ lặp lại thủ tục như thế này cho đến khi tất cả các số kiểm tra đều không dương thì dừng. Khi ấy phương án cuối cùng là tối ưu.

Ví dụ 1 $f(\boldsymbol{x}) = x_4 - x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Bảng 1

Biến trụ	c'	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Tỉ số
			0	0	0	1	-1	
x_1	0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-2**	
x_2	0	**2**	**0**	**1**	**0**	**-2**	**1**	2/1
x_3	0	**3**	**0**	**0**	**1**	**3**	**1**	3/1
		$f(\boldsymbol{x})$ = 0	**0**	**0**	**0**	**-1**	**1**	

Bảng 2

Biến trụ	c'	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Tỉ số
			0	0	0	1	-1	
x_1	0	**5**	**1**	**2**	**0**	**-3**	**0**	
x_5	-1	**2**	**0**	**1**	**0**	**-2**	**1**	
x_3	0	**1**	**0**	**-1**	**1**	**5**	**0**	1/5
		$f(\boldsymbol{x})$ = -2	**0**	**-1**	**0**	**1**	**0**	

Bảng 3

Biến trụ	c'	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Tỉ số
			0	0	0	1	-1	
x_1	0	**28/5**	**1**	**7/5**	**3/5**	**0**	**0**	
x_5	-1	**12/5**	**0**	**3/5**	**2/5**	**0**	**1**	
x_4	1	**1/5**	**0**	**-1/5**	**1/5**	**1**	**0**	
		$f(\boldsymbol{x})$ = -11/5	**0**	**-4/5**	**-1/5**	**0**	**0**	

Các số điều kiện đều không dương, nên ta có phương án tối ưu $\boldsymbol{x}^*$ = (28/5; 0; 0; 1/5; 11/5) và min$f(\boldsymbol{x})$ = -11/5.

Chú ý Nếu có một số kiểm tra Δ_k mang dấu dương, nhưng cột thứ k của ma trận hệ số của hệ ràng buộc gồm toàn những số không dương, thì bài toán vô nghiệm (Khi ấy hàm mục tiêu giảm vô hạn).

b. Trường hợp *A* không chứa ma trận con là ma trận hoán vị *P* cỡ *m*×*m*:

Ta thêm một số biến để tạo ra bài toán mới có dạng như ở trường hợp ***a***. (Phương pháp này được gọi là ***Phương pháp M vô cùng lớn***).

Ví dụ 2 Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1;4}) \end{cases}$$

Giải

Ta thêm biến y (gọi là ***biến giả***) để đưa về bài toán

$$g(\boldsymbol{x}, y) = 3x_1 + 2x_2 + My \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + y = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0\ (j = \overline{1;4});\ y = 0 \end{cases}$$

Ở đây M là một hằng số dương rất lớn.

Bảng 1

Biến trụ	***c'***	***B***	x_1	x_2	x_3	x_4	y	**Tỉ số**
			3	2	0	0	M	
y	M	**4**	**1**	**2**	**-1**	**0**	**1**	2
x_4	0	**1**	**-1**	**1**	**0**	**1**	**0**	1
		$g(\boldsymbol{x},y) = 4M$	$M - 3$	$2M - 2$	$-M$	**0**	**0**	

Bảng 2

Biến trụ	c'	B	x_1	x_2	x_3	x_4	y	Tỉ số
			3	2	0	0	M	
y	M	**2**	**3**	**0**	**-1**	**-2**	**1**	2/3
x_2	2	**1**	**-1**	**1**	**0**	**1**	**0**	
		$g(\mathbf{x},y) = 2 + 2M$	**3*M* - 5**	**0**	**-*M***	**2-2*M***	**0**	

Bảng 3

Biến trụ	c'	B	x_1	x_2	x_3	x_4	y	Tỉ số
			3	2	0	0	M	
x_1	3	**2/3**	**1**	**0**	**-1/3**	**-2/3**	**1/3**	
x_2	2	**5/3**	**0**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**1/3**	
		$g(\mathbf{x},y) = 16/3$	**0**	**0**	**-5/3**	**-4/3**	**5/3- M**	

Các số điều kiện đều không dương, nên trong bài toán mới ta có phương án tối ưu

$$(\mathbf{x^*},y) = (2/3;\ 5/3;\ 0;\ 0;\ 0) \text{ và } \min g(\mathbf{x},y) = 16/3.$$

Trong phương án này $y = 0$, nên bài toán ban đầu có phương án tối ưu

$$\mathbf{x^*} = (2/3;\ 5/3;\ 0;\ 0) \text{ và } \min f(\mathbf{x}) = 16/3.$$

Chú ý Nếu ở bảng đơn hình cuối cùng biến giả nhận giá trị khác 0, ta kết luận hàm mục tiêu không có giá trị lớn nhỏ nhất.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 12

1. Bài toán QHTT tổng quát. Bài toán QHTT chính tắc.

2. Phương án tối ưu. Thuật toán đơn hình

BÀI 13: CÁC PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Giải hệ phương trình ĐSTT cỡ $n \times n$: phương pháp khử Gauss và quy tắc Cramer.

Khi hệ có nghiệm, 2 cách giải này cho nghiệm đúng sau một số hữu hạn bước (với giả thiết không có sai số làm tròn).

Hai cách giải này thường chỉ áp dụng cho hệ có kích thước nhỏ.

Giải hệ cỡ lớn, như hệ 30×30, theo quy tắc Cramer trên chiếc máy tính có tốc độ tính 20 nghìn tỉ phép tính/giây mất 378080 tỉ năm. Ngoài ra, kết quả nhận được có thể sai lệch so với nghiệm đúng rất nhiều do những sai số xuất hiện quá nhiều khi máy tính làm tròn.

Ngay cả phương pháp khử Gauss, mặc dù có số phép tính ít hơn quy tắc Cramer rất nhiều, cũng không hiệu quả trong trường hợp hệ cỡ lớn hoặc ma trận hệ số có nhiều số 0.

Ta nghiên cứu một số phương pháp hiệu quả hơn để giải hệ phương trình ĐSTT cỡ $n \times n$. Đó là các phương pháp giải gần đúng với độ chính xác tùy ý.

1. NHỮNG KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Tất cả các phương pháp giải gần đúng hệ ĐSTT sẽ trình bày đều có chung một đặc điểm là xây dựng dãy vectơ hội tụ tới nghiệm đúng.

1.1. Giới hạn của dãy vectơ

Cho dãy vectơ $v^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}\right) \in R^n; k = 1, 2, 3 \dots$

Khi $k \longrightarrow \infty$ nếu $x_1^{(k)} \longrightarrow \alpha_1, x_2^{(k)} \longrightarrow \alpha_2, \dots x_n^{(k)} \longrightarrow \alpha_n$ thì $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ được gọi là giới hạn của dãy $\{v^{(k)}\}$ hay ta nói $\{v^{(k)}\}$ hội tụ tới v.

Ví dụ 1 Xét dãy $v^{(k)} = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{2k+5}{k+1}, 2\right)$

$k \longrightarrow \infty$ thì $v^{(k)} \longrightarrow v = (0, 1, 2)$.

1.2. Chuẩn của vectơ và chuẩn của ma trận

Định nghĩa chuẩn: Cho một không gian vectơ V. Với mỗi phần tử $v \in V$ ta xác định một số thực ký hiệu là $\|v\|$ và gọi là chuẩn của v nếu nó thỏa mãn 3 điều kiện

i. $\|v\| \geq 0, \forall v$

ii. $\|cv\| \leq |c|.\|v\|;\ \forall c \in R$

iii. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|; \forall v, w \in V$

Chú ý:

1) Với định nghĩa chuẩn như vậy, có thể xây dựng được nhiều chuẩn khác nhau trên một không gian.

Ví dụ: Với không gian R^n gồm các vectơ $v = (v_1, v_2, \dots v_n) \in R^n$ ta có thể xây dựng ra các chuẩn:

$$\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

$$\|v\|_\infty = max\{|v_1|, |v_2|, \dots |v_n|\}$$

2) Tuy có thể xây dựng được nhiều chuẩn khác nhau nhưng từ nay về sau ta chỉ xét chuẩn vô hạn với vectơ và ma trận được định nghĩa như sau:

- ***Chuẩn vô hạn của vectơ:*** Với $v = (v_1, v_2, \dots v_n) \in R^n$, ta định nghĩa chuẩn vô hạn

$$\|v\|_\infty = max\{|v_1|, |v_2|, \dots |v_n|\}$$

Đối với chuẩn này ta có tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 13.1 $\{\mathbf{v}^{(k)}\}$ hội tụ tới $\mathbf{v}$ nếu và chỉ nếu $\|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\|_\infty \to 0$ khi $k \to \infty$.

- ***Chuẩn vô hạn của ma trận:*** Cho ma trận thực $B_{m\times n}$, ta định nghĩa chuẩn vô hạn

$$\|B\|_\infty = max\left\{\sum_{j=1}^{n}|b_{1j}|, \sum_{j=1}^{n}|b_{2j}|, \dots \sum_{j=1}^{n}|b_{mj}|\right\}$$

Ví dụ 2

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & -0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix}$$

có $\|B\|_\infty = \max\{0.08; 0.08; 0.03\} = 0.08$.

2. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

2.1. Nội dung phương pháp lặp đơn

Cho hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ cỡ $n \times n$. Có nhiều cách để đưa hệ này về dạng

$\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ tương đương.

Ví dụ, tách $A = S - T$, trong đó S khả nghịch, thì

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow S\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}.$$

Đặt $B = S^{-1}T$, $\boldsymbol{g} = S^{-1}\boldsymbol{b}$, ta có hệ $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$.

Xây dựng dãy vectơ $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$, như sau:

Cho trước $\boldsymbol{v}^{(0)}$ rồi tính $\boldsymbol{v}^{(k)}$ theo công thức

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g} \quad (k = 0, 1, \dots). \qquad (1)$$

(1) là ***công thức tính lặp***, $k \geq 1$ là ***số lần lặp***.

Phương pháp tính $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ thế này là ***phương pháp lặp đơn***.

Nếu $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ hội tụ thì ta nói ***phương pháp lặp đơn hội tụ***.

Giả sử $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\} \to \boldsymbol{v}$. Lấy giới hạn ở hai vế của $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g}$

ta có

$$\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g},$$

$\Rightarrow \boldsymbol{v}$ là nghiệm của $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$, tức cũng là nghiệm của $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, nếu k đủ lớn ta luôn có

$$\|\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Khi đó ta nói $\boldsymbol{v}^{(k)}$ là ***nghiệm xấp xỉ của nghiệm đúng với độ chính xác*** ε.

Trong thực hành, ta bắt buộc phải dừng tính toán ở bước thứ k nào đó và xem $\boldsymbol{v}^{(k)}$ là nghiệm gần đúng.

Ví dụ 1 Hệ phương trình

$$4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8$$
$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9$$
$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20$$

tương đương

$$x_1 = -0.06x_2 + 0.02x_3 + 2$$
$$x_2 = -0.03x_1 + 0.05x_3 + 3$$
$$x_3 = -0.01x_1 + 0.02x_2 + 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

có dạng $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$, với

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Với $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$, $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$

công thức tính lặp $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g} \Leftrightarrow$

$$x_1^{(k+1)} = -0.06x_2^{(k)} + 0.02x_3^{(k)} + 2$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.03x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} + 3$$
$$x_3^{(k+1)} = -0.01x_1^{(k)} + 0.02x_2^{(k)} + 5$$

Khởi đầu lấy $\boldsymbol{v}^{(0)} = (2, 3, 5) \Rightarrow \boldsymbol{v}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ với

$$x_1^{(1)} = -0.06(3) + 0.02(5) + 2 = 1.92$$
$$x_2^{(1)} = -0.03(2) + 0.05(5) + 3 = 3.19$$
$$x_3^{(1)} = -0.01(2) + 0.02(3) + 5 = 5.04$$

$\Rightarrow \boldsymbol{v}^{(1)} = (1.92, 3.19, 5.04)$

Nhận xét: Ta thấy với việc xây dựng nghiệm xấp xỉ như trên, ta cần quan tâm tới các vấn đề sau:

- Nghiệm xấp xỉ có dần hội tụ tới nghiệm đúng không?
- Nếu hội tụ thì sai số khi dừng ở bước thứ k là bao nhiêu?

Để trả lời hai câu hỏi này, ta có định lý sau:

2.2. Sự hội tụ của phương pháp lặp đơn và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ

Phương pháp lặp đơn áp dụng cho $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ với $B = (b_{ij})_{n\times n}$

Định lý 13.2 Nếu $||B||_\infty<1$, thì với mọi $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ cho trước dãy $\{\boldsymbol{v}^{(k)}\}$ xác định bởi

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = B\boldsymbol{v}^{(k)} + \boldsymbol{g} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

đều hội tụ tới nghiệm duy nhất $\boldsymbol{v}$ của $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$. Hơn nữa, có đánh giá sai số

$$||\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}||_\infty \le ||B||^k_\infty \frac{1}{1-||B||_\infty} ||\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)}||_\infty. \qquad (2)$$

Nhận xét

1) Với điều kiện của định lý, và với $\boldsymbol{v}^{(0)}$ và $\varepsilon > 0$ chọn trước, số lần lặp k để nghiệm xấp xỉ đạt độ chính xác ε (tức là $||\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}||_\infty < \varepsilon$), xác định từ bất phương trình

$$\frac{||B||^k_\infty}{1-||B||_\infty} ||\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)}||_\infty \le \varepsilon.$$

2) Sai số trong quá trình tính toán không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng (Phương pháp lặp đơn có khả năng tự sửa sai).

Ví dụ 2 Quay lại Ví dụ 1. $||B||_\infty = 0.08 < 1$, nên phương pháp lặp đơn hội tụ.

Đánh giá sai số của $\boldsymbol{v}^{(3)}$ so với nghiệm đúng $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)} = (-0.08,\ 0.19,\ 0.04)$$

$$||\boldsymbol{v}^{(3)} - \boldsymbol{v}||_\infty \le ||B||^3_\infty \frac{1}{1-||B||_\infty} ||\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)}||_\infty =$$

$$0.08^3 \frac{1}{1-0.08} \max\{0.08;\ 0.19;\ 0.04\} = 0.08^3 \frac{1}{1-0.08} 0.19 \approx 10^{-4}.$$

Độ chính xác gần 10^{-4}, nên khá là cao.

2.3.Phương pháp Jacobi

Nếu trong hệ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ma trận A có tất cả các phần tử trên đường chéo khác 0, tách $A = S - T$

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

thì $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow S\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Đặt $\mathbf{g} = S^{-1}\mathbf{b}$, và $B = S^{-1}T \Rightarrow \mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{g}$.

$$B = S^{-1}T = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Phương pháp lặp đơn tiến hành theo công thức $\mathbf{v}^{(k+1)} = B\mathbf{v}^{(k)} + \mathbf{g}$

được gọi là ***phương pháp Jacobi***.

Phương pháp Jacobi sẽ hội tụ, nếu $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ***ma trận đường chéo trội***, tức là $\forall\ i = 1, \dots, n$,

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|$$

3. PHƯƠNG PHÁP SEIDEL

3.1.Nội dung phương pháp Seidel

Quay lại Ví dụ 1 ở 13.2. Trong phương pháp lặp đơn

$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$ tính qua $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ nhờ

$$x_1^{(k+1)} = -0.06x_2^{(k)} + 0.02x_3^{(k)} + 2$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.03x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} + 3$$
$$x_3^{(k+1)} = -0.01x_1^{(k)} + 0.02x_2^{(k)} + 5$$

Cải tiến: Khi tính $x_2^{(k+1)}$ sử dụng ngay $x_1^{(k+1)}$ vừa tính được

$$x_2^{(k+1)} = -0.03x_1^{(k+1)} + 0.05x_3^{(k)} + 3$$

Khi tính $x_3^{(k+1)}$ sử dụng ngay $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}$ vừa tính được.

$$x_3^{(k+1)} = -0.01x_1^{(k+1)} + 0.02x_2^{(k+1)} + 5$$

Cụ thể:

tính $\boldsymbol{v}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$ qua $\boldsymbol{v}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$

theo các công thức

$$x_1^{(k+1)} = -0.06x_2^{(k)} + 0.02x_3^{(k)} + 2$$
$$x_2^{(k+1)} = -0.03x_1^{(k+1)} + 0.05x_3^{(k)} + 3$$
$$x_3^{(k+1)} = -0.01x_1^{(k+1)} + 0.02x_2^{(k+1)} + 5$$

Với $\boldsymbol{v}^{(0)} = (2, 3, 5)$, ta tính được $\boldsymbol{v}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$ với

$$x_1^{(1)} = -0.06(3) + 0.02(5) + 2 = 1.92$$
$$x_2^{(1)} = -0.03(1.92) + 0.05(5) + 3 = 3.1924$$
$$x_3^{(1)} = -0.01(1.92) + 0.02(3.1924) + 5 = 5.044648$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v}^{(1)} = (1.92, 3.1924, 5.044648)$$

Cách làm này được gọi là ***phương pháp Seidel*** (một biến dạng của phương pháp lặp đơn). Ý chính của phương pháp Seidel là các thành phần vừa tính được của $\boldsymbol{v}^{(k+1)}$ được sử dụng ngay để tính thành phần tiếp theo của nó.

Ưu điểm của phương pháp Seidel:

** Tiết kiệm được bộ nhớ trong máy tính*

** Nói chung pp Seidel hội tụ nhanh hơn pp lặp đơn.*

3.2.Sự hội tụ của phương pháp Seidel và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ

Phương pháp Seidel áp dụng cho phương trình $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ với $B = (b_{ij})_{n\times n}$

Định lý 10.3 Nếu $\|B\|_\infty < 1$, thì với mọi $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathrm{R}^n$ phương pháp Seidel đều hội tụ tới nghiệm duy nhất $\boldsymbol{v}$ của $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$. Hơn nữa có đánh giá sai số

$$\|\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{v}\|_\infty \le \mu^k \frac{1}{1-\mu}\|\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)}\|_\infty \qquad (3)$$

trong đó $\mu = \max_{1\le i\le n} \frac{\beta_i}{1-\alpha_i}$ với $\alpha_i = |b_{i1}| + \cdots + |b_{ii-1}|$, $\beta_i = |b_{ii}| + \cdots + |b_{in}|$.

3.3.Phương pháp Gauss - Seidel

Cho hệ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ với A có tất cả các phần tử trên đường chéo khác 0. Giống như phương pháp Jacobi, ta đưa nó về phương trình $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$. Phương pháp Seidel áp dụng cho phương trình $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ được gọi là ***phương pháp Gauss - Seidel***.

Nếu A là ma trận đường chéo trội, thì $\|B\|_\infty < 1$. Vì vậy, theo Định lý 10.3 phương pháp Gauss-Seidel hội tụ với mọi $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathrm{R}^n$.

Ví dụ 2 Xét hệ phương trình trong Ví dụ 1. Ta có $\|B\|_\infty = 0.08 < 1 \Rightarrow$ phương pháp Gauss - Seidel hội tụ.

Đánh giá sai số của $\boldsymbol{v}^{(3)}$ so với nghiệm đúng $\boldsymbol{v}$ theo (3):

$$\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)} = (-0.08;\ 0.1924;\ 0.044648)$$

$$\|\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)}\|_\infty = \max\{0.08;\ 0.1924;\ 0.044648\} = 0.1924$$

$$\beta_1 = 0.08,\ \alpha_1 = 0;\ \ \beta_2 = 0.05,\ \alpha_2 = 0.03;\ \ \beta_3 = 0,\ \alpha_3 = 0.03$$

$$\mu = \max_{1\le i\le n} \frac{\beta_i}{1-\alpha_i} = \max\{0.08;\ 0.0515463;\ 0\} = 0.08$$

$$\|\boldsymbol{v}^{(3)} - \boldsymbol{v}\|_\infty \le \mu^3 \frac{1}{1-\mu}\|\boldsymbol{v}^{(1)} - \boldsymbol{v}^{(0)}\|_\infty = 0.08^3 \frac{1}{1-0.08} 0.1924 \approx 10^{-4}.$$

Độ chính xác gần 10^{-4}, nên khá là cao.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 13

1. Nội dung của phương pháp lặp đơn. Sự hội tụ của phương pháp lặp đơn và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ. Phương pháp Jacobi.
2. Nội dung của phương pháp Seidel. Sự hội tụ của phương pháp Seidel và đánh giá sai số của nghiệm xấp xỉ. Phương pháp Gauss - Seidel.

BÀI 14: SỐ PHỨC

1. Định nghĩa

Số phức là một biểu thức dạng z = *a* + *bi*, với *a*, *b* ∈R và $i^2 = -1$.

i được gọi là ***đơn vị ảo***.

a là ***phần thực của z***, ký hiệu là Re(z).

b là ***phần ảo của z***, ký hiệu là Im(*z*).

C là tập hợp tất cả những số phức.

2.Các phép toán trên trường số phức

a. Hai số phức bằng nhau:

$$a + bi = c + di \ (a, b, c, d \in \mathrm{R}) \Leftrightarrow a = c \text{ và } b = d.$$

Chú ý Khác với tập số thực, trên C ta không xét các quan hệ <, ≤, >, ≥.

b. Các phép toán

Cho *a*, *b*, *c*, *d* ∈ R.Ta định nghĩa trên C hai phép toán

Phép cộng $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Phép nhân $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Trên C hai phép toán này có những tính chất tương tự như tính chất của phép cộng và phép nhân trên R:

* Giao hoán, kết hợp, phân phối.

* 0 + 0*i* đóng vai trò "số không" trong C.

* (-*c*) + (-*d*)*i* là số đối của *c* + *di*, viết gọn là -*c* - *di*.

* 1 + 0*i* đóng vai trò "số một" trong C.

* Nếu $c + di \neq 0 + 0i$, thì $\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}i$ là nghịch đảo của *c* + *di*

Phép trừ $(a + bi) - (c + di) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$.

Phép chia Nếu $c + di \neq 0 + 0i$, thì

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Định lý cơ bản của đại số: "*Mọi đa thức bậc n > 0 với hệ số phức đều có n nghiệm phức".*

Vì một số thực cũng là một số phức, nên từ định lý này suy ra: Mọi đa thức bậc *n* > 0 với hệ số thực đều có *n* nghiệm phức.

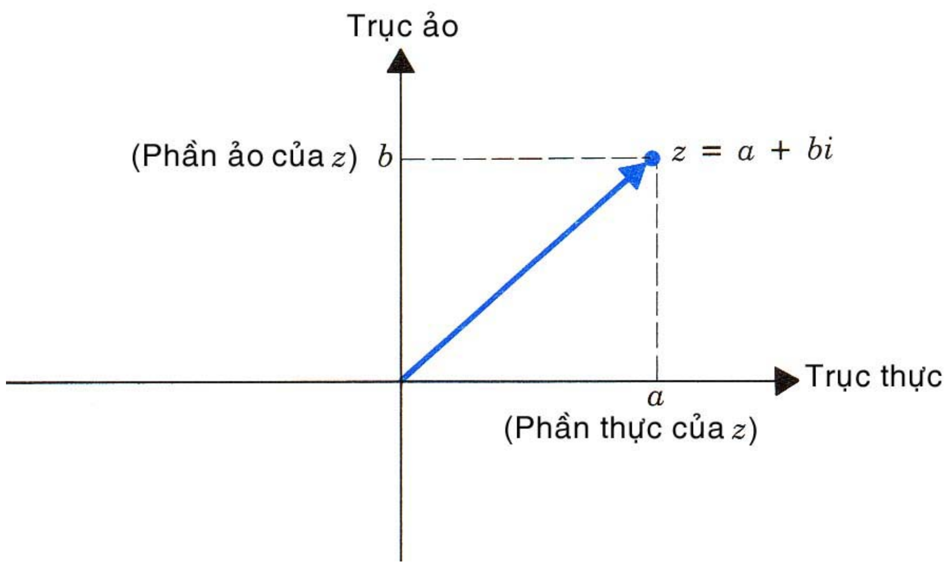
Ví dụ 1 Giải phương trình $x^2 + x + 1 = 0$.

Giải $\Delta = -3$ và căn bậc 2 của -3 là $\pm\sqrt{3}i$. Theo công thức lấy nghiệm của phương trình bậc 2, ta có 2 nghiệm

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

3.Biểu diễn hình học của số phức

Trên mặt phẳng cho một hệ trục tọa độ Đề các vuông góc *Oxy*. Mỗi số phức *a* + *bi* được biểu diễn trên mặt phẳng này bởi điểm *M*(*a*, *b*) (hay vectơ $\overrightarrow{OM}$= (*a*, *b*)).



Ox là ***trục thực***, *Oy* là ***trục ảo***, (*Oxy*) là ***mặt phẳng phức***.

Nếu *a* + *bi* được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$= (*a*, *b*), thì ta gọi *OM* là ***môđun*** của *z*, ký hiệu là |z|. Ta có

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nếu $b = 0$, thì $z = a$ là một số thực và $|z| = |a|$ nên định nghĩa về môđun là mở rộng của định nghĩa về trị tuyệt đối.

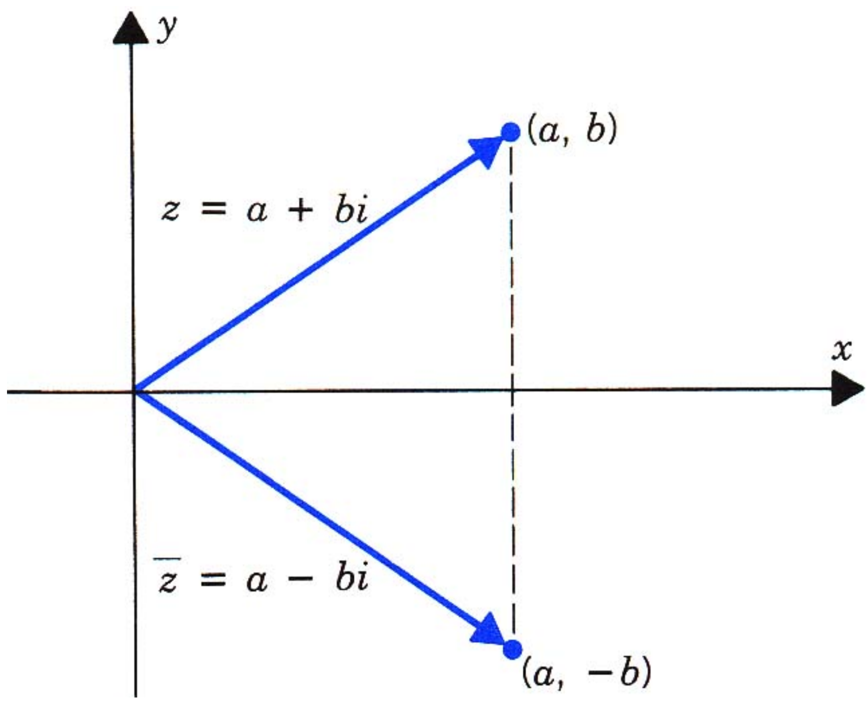
4.Liên hợp phức

Định nghĩa ***Số phức liên hợp*** của $z = a + bi$ ($a, b \in R$) là $a - bi$ và được ký hiệu bởi $\bar{z}$

Nhận xét

1) Số phức liên hợp của $\bar{z}$ lại là z (tức là $\bar{\bar{z}} = z$). Vì thế, còn nói z và $\bar{z}$ là ***hai số phức liên hợp với nhau*** (gọi tắt là ***hai số phức liên hợp***).

2) Hai số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng với nhau qua trục Ox.



Định lý 1 Đối với các số bất kỳ z_1 và z_2

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(b) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(c) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(d) $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$

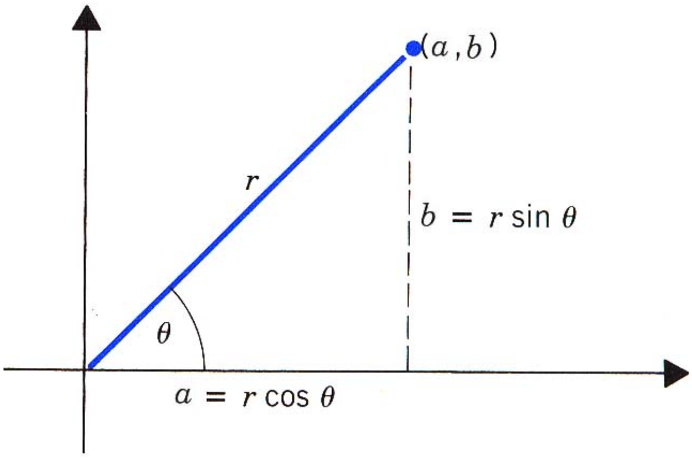
Định lý 2 Nếu một phương trình đại số với hệ số thực có nghiệm $\alpha \in$C thì nó cũng có nghiệm $\bar{\alpha}$

5.Dạng lượng giác của số phức. Công thức DeMoivre

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in$ R) là một số phức khác 0. Ta biểu diễn z bởi điểm $M(a, b)$. Ký hiệu $r = |z|$ và θ là số đo của một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM. Ta có $a = r\cos\theta$ và $b = r\sin\theta$ nên $z = a + bi$ có thể viết được ở dạng

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Đây là một ***dạng lượng giác của z***.



θ được gọi là ***acgumen*** của z, ký hiệu $\theta = \arg z$. Nếu θ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\theta + k2\pi$, $k \in$Z. Acgumen của số phức $z = 0$ không được định nghĩa.

Ví dụ 3

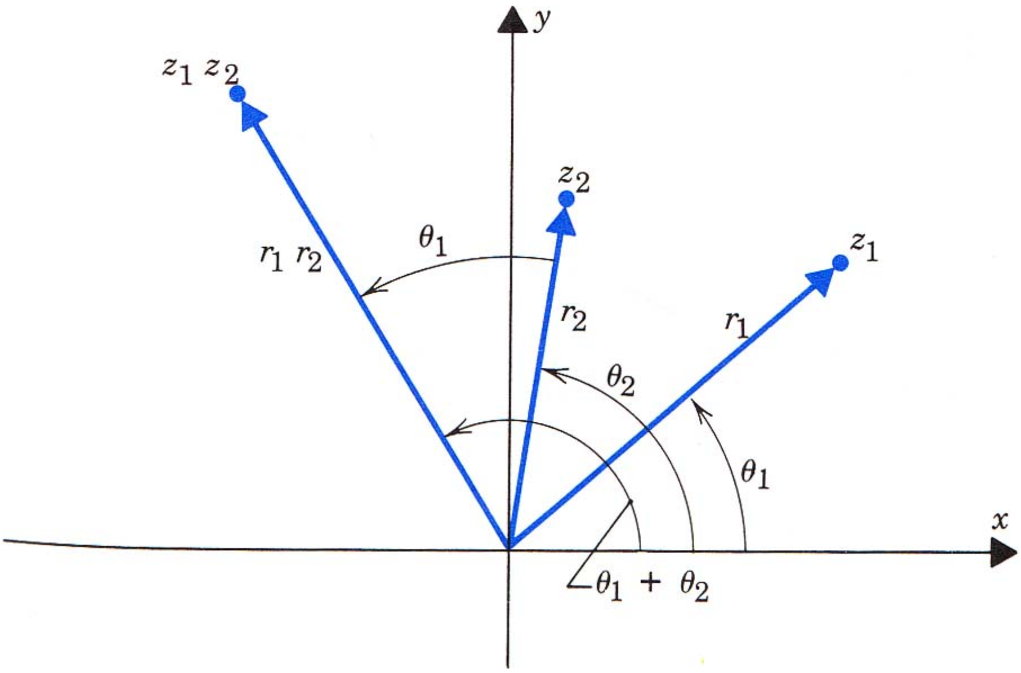
Biểu diễn $z = 1 + \sqrt{3}i$ ở dạng lượng giác.

Giải $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$. Từ $1 = 2\cos\theta$ và $\sqrt{3} = 2\sin\theta$, ta chọn ra $\theta = \pi/3$. Như vậy một dạng lượng giác của z là

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

Cho $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

thì $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$



Nếu $z_2 \neq 0$, thì chứng minh tương tự trên ta có

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Công thức DeMoivre

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \forall n \in Z$$

6.Khai căn các số phức

Nếu n là một số nguyên dương, và z là số phức tùy ý, thì số phức w bất kỳ sao cho $w^n = z$ được gọi là một ***căn bậc n của z***.

z có căn bậc 1 duy nhất là z. 0 có căn bậc n duy nhất là 0. Còn nói chung thì việc tìm các căn bậc n của số phức là khó khăn. Tuy nhiên nếu z có dạng lượng giác $r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$,thì ta có công thức tính căn bậc n của z như sau:

$$\sqrt[n]{r}[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)], k = 0,1,2 \dots n-1$$

Trong những nghiên cứu chi tiết hơn về số phức, lũy thừa phức của e đã được định nghĩa và chứng minh rằng

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \qquad (\textit{Công thức Euler})$$

Theo công thức này dạng lượng giác $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ có thể viết gọn thành $z = re^{i\theta}$.

Chú ý : Lý thuyết ĐSTT ta đã nghiên cứu từ tuần 1 đến giờ đều xét trên tập hợp số thực. Lý thuyết này hầu hết vẫn đúng khi thay tập hợp số thực bởi tập hợp số phức.

NHỮNG Ý CHÍNH TRONG BÀI GIẢNG TUẦN 14

1. Định nghĩa số phức. Tập số phức C và các phép toán.

2. Dạng lượng giác của số phức. Công thức DeMoivre. Công thức Euler.

3. Khai căn số phức.

4. Xấp xỉ hàm số bởi đa thức lượng giác.

5. Phép biến đổi Fourier rời rạc. Ý tưởng của phép biến đổi Fourier nhanh