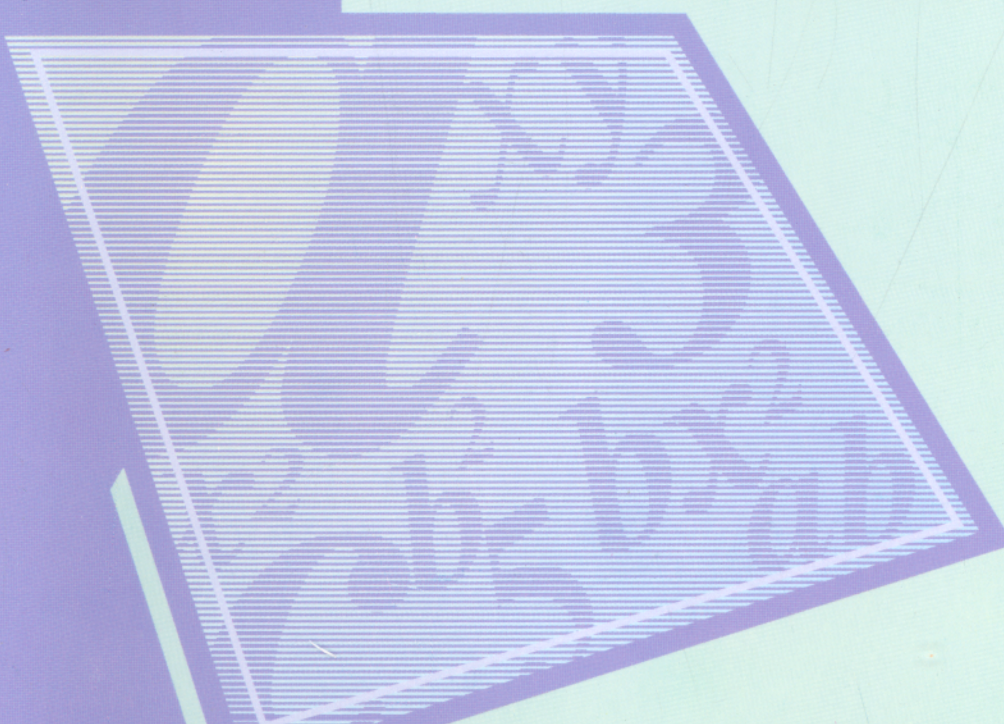
NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH - DƯƠNG THỦY VỸ

Bài tập TOÁN HỌC CAO CẤP

Tập 1

(DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH - DƯƠNG THỦY VỸ

BÀI TẬP
TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP 1

(Dành cho sinh viên các trường Cao đẳng)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

11 – 2007/CXB/339 – 2119/GD

Mã số : 7K615T7 - DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Làm bài tập là một khâu rất quan trọng trong việc học toán, nó giúp cho người học toán hiểu được lý thuyết thấu đáo hơn, rèn luyện tư duy khoa học, kỹ năng tính toán và khả năng vận dụng toán học vào giải quyết vấn đề (problem solving), kích thích niềm say mê học tập, say mê tìm tòi của người học. Vì vậy, cuối mỗi chương của bộ sách ***"Toán học cao cấp"*** *viết cho các hệ, lớp Cao đẳng của các trường Đại học Kỹ thuật, chúng tôi đã đề ra một số không ít bài tập. Bộ sách* ***"Bài tập toán học cao cấp"*** *này được viết nhằm trình bày bài giải và hướng dẫn của hầu hết các bài tập đã ra trong bộ sách trên. Ngoài ra, một số bài tập khác cũng đã được bổ sung.*

Mỗi chương của bộ sách đều mở đầu bằng phần Tóm tắt lý thuyết, nhằm nhắc lại các điểm mấu chốt của lý thuyết về những : định nghĩa, định lý cơ bản, phương pháp cơ bản, công thức cơ bản. Phần Đề bài và phần Bài giải và hướng dẫn của mỗi chương được xếp tách rời nhau.

Chúng tôi không khuyến khích người học khi làm bài tập sử dụng ngay bài giải trong sách này mà không tự mình giải các bài tập đó. Gặp khó khăn khi làm một bài tập nào đó, người học nên xem lại phần Tóm tắt lý thuyết và nếu cần cả phần tương ứng trong giáo trình. Chỉ nên xem lời giải trong sách sau khi đã giải xong bài để đánh giá kết quả học tập của mình. Chỉ trong quá trình vừa học lý thuyết, vừa làm bài tập thì người học mới dần dần hiểu được các khái niệm toán học mới, nắm được các phương pháp cơ bản và nhớ được các kết quả cơ bản.

Hy vọng rằng quyển sách này sẽ giúp các bạn sinh viên học tốt môn Toán, yêu thích môn Toán và say mê tìm tòi các vấn đề toán học trong công nghệ và kỹ thuật.

Chúng tôi mong nhận được ý kiến của bạn đọc đối với bộ sách này. Xin chân thành cảm ơn.

Các tác giả

Chương I

TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ. SỐ THỰC VÀ SỐ PHỨC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ký hiệu

$A \Rightarrow B$	A kéo theo B.
$A \Leftrightarrow B$	A tương đương B.
$\forall x$	với mọi x.
$\exists y$	tồn tại y.

2. Tập hợp và phần tử của tập hợp

$a \in A$	phần tử a thuộc tập hợp A.
$b \notin A$	phần tử b không thuộc tập hợp A.
$\varnothing$	tập hợp rỗng.
$A \subset B$	A là tập hợp con của B.

$(A \subset B)$ và $(B \subset A) \Leftrightarrow A = B$.

Hợp	$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A)$ hoặc $(x \in B)$.
Giao	$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A)$ và $(x \in B)$.
Hiệu	$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A)$ và $(x \notin B)$.
Phần bù	$A \subset E$ thì $E \setminus A = \overline{A}$ là phần bù của A.
Tính đề các	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
	$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$.

3. Ánh xạ

$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ là một quy luật ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $f(x) \in Y$. Phần tử $y = f(x)$ gọi là ảnh của x, x gọi là nghịch ảnh của y.

Nếu $A \subset X$ thì tập $\{f(x) \mid x \in A\}$ ký hiệu là $f(A)$ và $f(A)$ gọi là ảnh của tập hợp A.

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là đơn ánh nếu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; điều đó tương đương với $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$.

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

Nếu $f : X \to Y$ là một song ánh thì tồn tại ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \to X$. Khi đó f là một ánh xạ 1 – 1 hai chiều giữa X và Y.

4. Tập hợp hữu hạn và vô hạn. Tập hợp đếm được và không đếm được

Tập hợp gọi là hữu hạn nếu nó gồm một số hữu hạn phần tử, gọi là vô hạn nếu nó gồm vô hạn phần tử.

Tập vô hạn gọi là đếm được nếu có thể đánh số được các phần tử của nó, là không đếm được trong trường hợp ngược lại. $\mathbb{N}$ là tập hợp đếm được.

5. Tập hợp số thực. Trị tuyệt đối

Tập hợp các số hữu tỷ và các số vô tỷ gọi là tập hợp các số thực, ký hiệu $\mathbb{R}$. Đó là một tập hợp không đếm được.

Trị tuyệt đối của số thực x ký hiệu là $|x|$, được định nghĩa như sau

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Ta có :

$$(|x - x_o| < \alpha) \Leftrightarrow (x_o - \alpha < x < x_o + \alpha),$$

$$(|x - x_o|) > \beta) \Leftrightarrow (x < x_o - \beta) \cup (x > x_o + \beta),$$

$$x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b,$$

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b.$$

Ngoài ra :

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|,$$

$$|xy| = |x| . |y|,$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \; y \neq 0.$$

6. Số phức

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$$

- Dạng chính tắc : $z = a + ib$, $a, b \in R$, i là đơn vị ảo ;

  $a = \text{Re}z$, $b = \text{Im}z$;

  $\overline{z} = a - ib$ là số phức liên hợp của z.

- Giả sử $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó :

  $z_1 = z_2$ nếu $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$;

  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$;

  $z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

- Dạng lượng giác : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, trong đó

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \alpha = \arg z,$$

được xác định từ phương trình $\text{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, α được chọn sao cho sinα cùng dấu với b.

- Giả sử $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

  thì $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right], \; r_2 \neq 0.$$

- Công thức Moivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

- Công thức khai căn

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

B – ĐỀ BÀI

1. Tìm tập hợp các nghiệm thực của phương trình hay bất phương trình dưới đây :

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

b) $x^2 - 4x + 3 > 0$;

c) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$;

d) $x^2 - x + 1 = 0$;

e) $x^2 - x + 1 > 0$;

f) $x^2 - x + 1 \leq 0$.

Ký hiệu các tập hợp nghiệm tương ứng là A, B, C, D, E, F. Tìm : $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$.

2. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Hãy viết tất cả các phần tử của tích Đề-các $A \times B$.

3. Cho $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$; $B = \{y \mid 1 \leq y \leq 2\}$.

Hãy biểu diễn hình học của tích Đề-các $A \times B$ lên mặt phẳng toạ độ.

4. Trong các ánh xạ sau :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 7$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 3$;

c) $f : [4, 9] \subset \mathbb{R} \to [21, 96] \subset \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 3$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 2|x|$;

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto e^{x+1}$;

f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x(x + 1)$

ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Nếu nó là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược.

5. a) Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$. Nó có phải là đơn ánh, toàn ánh không ? Tìm ảnh $f(\mathbb{R})$.

b) Cho $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^* = R \setminus \{0\}$), $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$. Tìm $f \circ g$.

6. Cho ánh xạ $f : E \to F$; A, B là hai tập con của E.

a) Chứng minh rằng nếu $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

b) Nếu f là đơn ánh thì $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

7. Cho a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$ và $ad - bc = 1$ ($\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên). $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ xác định bởi $f : (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$. Chứng minh rằng f là song ánh, tìm f^{-1}.

8. Tìm tất cả các số hữu tỷ x, sao cho $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ là số hữu tỷ.

9. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ, từ đó chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ cũng là số vô tỷ.

10. Giải các bất phương trình :

a) $|2x - 3| < 1$; b) $(x - 2)^2 \geq 4$;

c) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$; d) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$.

11. Tìm x, y, z, t là các số thực thỏa mãn hệ

$$\left.\begin{array}{l}(1 + i)x + (1 + 2i)y + (1 + 3i)z + (1 + 4i)t = 1 + 5i \\ (3 - i)x + (4 - 2i)y + (1 + i)z + 4it = 2 - i\end{array}\right\}$$

12. Tính :

a) $(1 + 2i)^6$; b) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$.

13. Thực hiện phép tính :

a) $\dfrac{1 + i\text{tg}\alpha}{1 - i\text{tg}\alpha}$; b) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$.

14. Tìm $x, y \in \mathbb{C}$ là nghiệm của hệ :

a) $\left.\begin{array}{l}(3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i\end{array}\right\}$;

b) $\left.\begin{array}{l}(2 + i)x + (2 - i)y = 6 \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8\end{array}\right\}$.

15. Tính :

a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

16. Giải phương trình bằng cách biến đổi vế trái về tích của hai nhân thức bậc hai với hệ số thực hoặc phức :

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$; b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

17. Đưa về dạng lượng giác các số phức sau :

a) $1-i$; b) $1+i\sqrt{3}$; c) $-1+i\sqrt{3}$;

d) $-1-i\sqrt{3}$; e) $1-i\sqrt{3}$; g) $2i$; h) -3.

18. Tìm biểu diễn hình học của các số phức z thỏa mãn :

a) $|z|<2$; b) $|z-i|\le 1$; c) $|z-1-i|<1$.

19. Tính :

a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

20. Cho $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $\omega_1^n+\omega_2^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

21. Tính :

a) $\sqrt[3]{2-2i}$; b) $\sqrt[4]{-4}$.

22. Tính

a) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

23. a) Tính cos5x, sin6x theo sinx và cosx.

b) Biểu diễn $\sin^4x$, $\cos^5x$ theo sin, cos bởi góc bội của x.

24. Tính tổng :

a) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots$; b) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$

25. Giải các phương trình sau trên tập hợp $\mathbb{C}$:

a) $x^2 - (1 + i\sqrt{3})x - 1 + i\sqrt{3} = 0$;

b) $x^3 - 6x + 9 = 0$;

c) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$;

d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;

e) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$.

B – BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. Bằng cách giải phương trình và bất phương trình ta được :

a) $A = \{1, 3\}$ là hai điểm $x = 1$ và $x = 3$ trên trục số thực ;

b) $B = \{x \mid x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)\} \Leftrightarrow -\infty < x < 1$ hoặc $3 < x < +\infty$;

c) $C = \{x \mid x \in [1, 3]\} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

d) $D = \{\varnothing\} \Leftrightarrow \bar{\exists} x \in \mathbb{R}$;

e) $E = \{x \mid \forall x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty$.

f) $F = \{\varnothing\} \Leftrightarrow \bar{\exists} x \in \mathbb{R}$.

Từ các tập A, B, C, D, E, F trên ta có :

$A \cup B = \{x \mid x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)\} \Leftrightarrow -\infty < x \le 1$ hoặc $3 \le x < +\infty$;

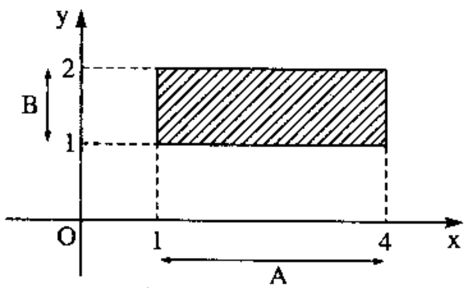
$A \cap B = \{\varnothing\} \Leftrightarrow \bar{\exists} x \in \mathbb{R}$;

$A \cup C = C$; $A \cap C = A$.

2. $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$ thì

$A \times B = \{(1, 2) ; (1, 3) ; (1, 4) ; (2, 2) ; (2, 3) ; (2, 4) ; (3, 2) ; (3, 3) ; (3, 4)\}$.

3. Tập hợp tất cả những điểm nằm trong hình chữ nhật, kể cả 4 cạnh (hình 1.1).



Hình 1.1

4. a) Cho $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ta có $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow x_1 + 7 = x_2 + 7 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Vậy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là đơn ánh.

Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, từ $\alpha = f(x) = x + 7 \Rightarrow x = \alpha - 7 \in \mathbb{R}$, vậy f là toàn ánh.

Ánh xạ f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, suy ra $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ là song ánh, nên tồn tại ánh xạ ngược $x = f^{-1}(y) = y - 7$.

b) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định như sau :

$$f : x \mapsto f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Đơn ánh : Từ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 3 = x_2^2 + 2x_2 - 3$ (1)

$$\Rightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0.$$

Vậy với $x_2 \in \mathbb{R}$ cố định thì hoặc $x_1 = x_2$ hoặc $x_1 = -x_2 - 2$. Phương trình (1) có nhiều hơn một nghiệm nên f không phải là đơn ánh.

Toàn ánh : Cho $f(x) = x^2 + 2x - 3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ,

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - (3 + \alpha) = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm chỉ khi $\Delta' = 1 + (3 + \alpha) = 4 + \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq -4$, vô lý vì $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Vậy f không phải toàn ánh.

c) Theo câu b), từ $f(x_1) = f(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$ và $x_1 = -x_2 - 2$. Nhưng vì $x_2 \in [4, 9]$ nên $x_1 = -x_2 - 2 < 0$ (loại). Vậy từ $f(x_1) = f(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$ nên f là đơn ánh.

Cũng theo câu b), lấy $\alpha \in [21, 96]$ thì $\alpha > -4$ thỏa mãn. Vậy f là toàn ánh nên f là song ánh, suy ra tồn tại ánh xạ ngược :

$$x = f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4 + y}.$$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f : x \mapsto f(x) = 3x - 2|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ 5x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Dễ dàng kiểm tra f là song ánh, vì vậy tồn tại ánh xạ ngược

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{nếu } y \geq 0, \\ \dfrac{1}{5}y & \text{nếu } y < 0. \end{cases}$$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $f : x \mapsto f(x) = e^{x+1}$.

Hàm số $y = e^{x+1} > 0$ và đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$ nên nó là song ánh. Vậy tồn tại ánh xạ ngược $x = f^{-1}(y) = \ln y - 1$.

g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, xác định $f : x \mapsto f(x) = x(x + 1)$.

Đơn ánh : Từ $f(x_1) = f(x_2)$ với $x_1 = n \in \mathbb{N}$; $x_2 = m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n(n + 1) = m(m + 1)$

$\Rightarrow (n - m)(n + m + 1) = 0 \Rightarrow n = m$ (còn $n = -m - 1$ loại). Vậy f là đơn ánh.

Toàn ánh : Cho $y \in \mathbb{N}$ bất kỳ và $y = n(n + 1) \Rightarrow n^2 + n - y = 0$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}.$$

Rõ ràng $1 + 4y$ không thể là số chính phương với mọi $y \in \mathbb{N}$, chẳng hạn với $y = 3 \in \mathbb{N}$.

Vậy f không phải là toàn ánh, do đó không là song ánh.

5. a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Đơn ánh : Từ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1}{1 + x_1^2} = \dfrac{2x_2}{1 + x_2^2}$

$$\Rightarrow 2(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0. \tag{1}$$

Trong phương trình này ngoài $x_1 = x_2$, còn có $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ $(x_2 \neq 0)$.

Vậy f không phải là đơn ánh.

Toàn ánh : Cho $f(x) = y \in \mathbb{R}$ (bất kỳ), ta được

$$y = \frac{2x}{1 + x^2} \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0. \tag{2}$$

Phương trình (2) xem như phương trình bậc hai đối với x, có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \leq 1$.

Vậy f không phải là toàn ánh và $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

b) $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* = \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$; $g : x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$ thì

$$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{2\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2x}{1+x^2} = f(x).$$

Vậy $(f\circ g)(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$.

6. a) Ta phải chứng minh $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

Cho $y \in f(A)$ thì tồn tại $x \in A$ để $y = f(x)$.

Lại do $A \subset B$ nên $x \in B$ để $y = f(x)$, vậy $f(x) \in f(B) \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

b) Giả thiết f là đơn ánh, để chứng minh $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ta cần chứng minh :

1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

2) $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Thực vậy, giả sử $y \in f(A \cap B)$ thì $\exists x \in A \cap B$ để $y = f(x)$. Lại do $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ và $x \in B \Rightarrow y = f(x)$ vừa thuộc $f(A)$, vừa thuộc $f(B)$. Vậy $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. (1)

Ngược lại, do f là đơn ánh nên với $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ thì $\exists x_1 \in A$ để $y = f(x_1)$, lại do $y \in f(B)$ thì $\exists x_2 \in B$ để $y = f(x_2)$.

Vì f là đơn ánh nên $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Vậy với $y \in f(A) \cap f(B)$ thì tồn tại $x = x_1 = x_2 \in A \cap B$ để $y = f(x)$

$$\Rightarrow \quad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B). \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

7. Xét ánh xạ $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$

Đơn ánh : Giả sử $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 = cx_2 + dy_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0 \\ c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Đó là một hệ hai phương trình tuyến tính đối với hai ẩn $(x_1 - x_2)$ và $(y_1 - y_2)$. Vì định thức của hệ (*) $\Delta = ad - bc = 1$ theo giả thiết, nên nó có một nghiệm duy nhất $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$, do đó $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Suy ra f là đơn ánh.

Toàn ánh : Cần chứng minh rằng với mọi cặp $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, có tồn tại một cặp $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ sao cho $f(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (ax + by, cx + dy) = (u, v)$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

Vì $\Delta = ad - bc = 1 \neq 0$ nên hệ hai phương trình tuyến tính trên đối với x, y có một nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\Delta} = du - bv, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\Delta} = av - cu.$$

Vậy f là toàn ánh, do đó f là song ánh. Vì vậy tồn tại ánh xạ ngược

$$f^{-1}(u, v) = (du - bv, av - cu).$$

8. Giả sử x và $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ là số hữu tỷ, do đó $y - x = q$ cũng là số hữu tỷ. Ta biểu diễn x theo q : $y - x = \sqrt{x^2 + x + 3} - x = q$ $\Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 3} = q + x \Rightarrow x^2 + x + 3 = x^2 + 2qx + q^2 \Rightarrow x = \dfrac{q^2 - 3}{1 - 2q}$.

Dễ dàng kiểm tra $q \neq \dfrac{1}{2}$.

Ta cần khẳng định với $q \in \mathbb{Q}\left(q \neq \dfrac{1}{2}\right)$ và $x = \dfrac{q^2 - 3}{1 - 2q} \in \mathbb{Q}$ thì $y \in \mathbb{Q}$.

Thực vậy, $y = \sqrt{x^2 + x + 3} = \sqrt{\left(\dfrac{q^2 - 3}{1 - 2q}\right) + \dfrac{q^2 - 3}{1 - 2q} + 3} =$

$$= \sqrt{\frac{q^4 - 2q^3 + 7q^2 - 6q + 9}{(1-2q)^2}} = \frac{\sqrt{(q^2 - q + 3)^2}}{|1-2q|} = \frac{q^2 - q + 3}{|1-2q|}$$

là số hữu tỷ với $q \in \mathbb{Q}\left(q \neq \frac{1}{2}\right)$.

9. Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỷ. Giả sử $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0,\ p,\ q \in \mathbb{Z})$ là số hữu tỷ, khi đó $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ là số chẵn : $p^2 = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Vậy $2q^2 = 2k$ $\Rightarrow q^2 = k \Rightarrow k$ là số chính phương. Điều đó vô lý vì không phải số nguyên dương nào cũng đều là số chính phương. Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Ta lại chứng minh $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ cũng là số vô tỷ. Thực vậy, giả sử $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ khi đó $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})\right] = \sqrt{2}$$

cũng là số hữu tỷ, vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỷ đã xét ở trên.

10. a) $|2x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

b) $(x-2)^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ hoặc $x \geq 4$.

c) $x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$.

d) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 < 0$

$\Rightarrow 3 < x < 4$.

11. Do $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, từ điều kiện bằng nhau của hai số phức và từ hệ đã cho ta suy ra hệ

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 3x + 4y + z = 2 \\ -x - 2y + z + 4t = -1 \end{cases}$$

Bằng phương pháp loại trừ ẩn, ta được :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + 2z + 3t = 4 \\ y - 2z - 3t = -1 \\ -y + 2z + 5t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + 2z + 3t = 4 \\ 2y = 3 \\ 2t = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ : $x = -2$; $y = \dfrac{3}{2}$; $z = 2$; $t = -\dfrac{1}{2}$.

12. a) $(1 + 2i)^6 = (1 + 2i)^3(1 + 2i)^3 = (1 + 6i + 12i^2 + 8i^3)^2$

$$= [(1 - 12) + i(6 - 8)]^2 = (-11 - 2i)^2 = 117 + 44i.$$

Chú ý : Bảng hệ số luỹ thừa của nhị thức (tam giác Pascal).

$a + b$	1	1					
$(a + b)^2$	1	2	1				
$(a + b)^3$	1	3	3	1			
$(a + b)^4$	1	4	6	4	1		
$(a + b)^5$	1	5	10	10	5	1	
$(a + b)^6$	1	6	15	20	15	6	1

. . . .

Sử dụng bảng hệ số này với chú ý : $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$; $i^5 = i$, $i^6 = -1$ ta cũng được kết quả trên.

b) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5 = [1 + 5(2i) + 10(2i)^2 + 10(2i)^3 + 5(2i)^4 + (2i)^5] -$ $- [1 - 5(2i) + 10(2i)^2 - 10(2i)^3 + 5(2i)^4 - (2i)^5] = 10(2i) + 20(2i)^3 + 2(2i)^5$ $= 20i - 160i + 64i = -76i.$

13. a) $\dfrac{1 + i\text{tg}\alpha}{1 - i\text{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$

$$= \frac{\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha + i^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - i^2\sin^2\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha .$$

b) Đặt $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2} = \dfrac{A}{B}$.

$$A = (1 + 2i)^2 - (1 - i)^3 = (1 + 4i + 4i^2) - (1 - 3i + 3i^2 - i^3)$$
$$= (-3 + 4i) + (2 + 2i) = -1 + 6i.$$

Tương tự ta có

$$B = (3 + 2i)^3 - (2 + i)^2 = -12 + 42i.$$

Vậy $\dfrac{A}{B} = \dfrac{-1 + 6i}{-12 + 42i} = \dfrac{-1 + 6i}{-6(2 - 7i)} = \dfrac{(1 - 6i)(2 + 7i)}{6(2 - 7i)(2 + 7i)}$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2 - 5i - 42i^2}{4 - 49i^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{44 - 5i}{53} = \frac{44}{318} - \frac{5}{318} i.$$

14. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 - i & 4 + 2i \\ 4 + 2i & -(2 + 3i) \end{vmatrix} = -(3 - i)(2 + 3i) - (4 + 2i)^2 = -(21 + 23i)$;

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 + 6i & 4 + 2i \\ 5 + 4i & -(2 + 3i) \end{vmatrix} = 2 - 44i \ ;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 - i & 2 + 6i \\ 4 + 2i & 5 + 4i \end{vmatrix} = 23 - 21i.$$

Vậy $\quad x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{2 - 44i}{-(21 + 23i)} = 1 + i$;

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{23 - 21i}{-(21 + 23i)} = i.$$

b) $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 + i & 2 - i \\ 3 + 2i & 3 - 2i \end{vmatrix} = (2 + i)(3 - 2i) - (2 - i)(3 + 2i) = -2i$;

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 2 - i \\ 8 & 3 - 2i \end{vmatrix} = 2 - 4i \ ; \ \Delta y = \begin{vmatrix} 2 + i & 6 \\ 3 + 2i & 8 \end{vmatrix} = -(2 + 4i).$$

Vậy $\quad x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{2 - 4i}{-2i} = 2 + i$; $\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = 2 - i.$

15. a) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3})^2 = \dfrac{1}{4}(1 + 3i^2 - 2i\sqrt{3})$

$$= -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(-1+i\sqrt{3})^3 = \frac{1}{8}[-1+3\sqrt{3}i - 3(i\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}i)^3]$

$$= \frac{1}{8}(-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i) = 1.$$

16. a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = x^2(x^2+6x+9) - 100i^2$

$= x^2(x+3)^2 - 100i^2 = [x(x+3) - 10i][x(x+3)+10i]$

$= (x^2+3x-10i)(x^2+3x+10i) = 0$

Xét $x^2 + 3x - 10i = 0$: $\Delta = 9 + 40i = 5^2 + (4i)^2 + 2.5(4i) = (5+4i)^2$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm (5+4i)}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ -4-2i. \end{cases}$$

Còn $x^2 + 3x + 10i = 0$: $\Delta = 9 - 40i = (5-4i)^2$.

Vậy $x_{3,4} = \frac{-3 \pm (5-4i)}{2} = \begin{cases} 1-2i \\ -4+2i. \end{cases}$

Do đó $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100$

$= (x-1-2i)(x-1+2i).(x+4+2i)(x+4-2i)$

$= [(x-1)^2 - 4i^2][(x+4)^2 - 4i^2]$

$= (x^2-2x+5)(x^2+8x+20) = 0.$

b) $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = x^4 + 2(x^2 - 12x + 36)$

$= x^4 + 2(x-6)^2 = x^4 - [\sqrt{2}(x-6)]^2 i^2$

$= [x^2 - \sqrt{2}(x-6)i][x^2 + \sqrt{2}(x-6)i] = 0.$

Xét $x^2 - \sqrt{2}(x-6)i = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x.i + 6\sqrt{2}i = 0$:

$\Delta = 2i^2 - 24\sqrt{2}i = 18i^2 - 16i^2 - 24\sqrt{2}i$

$= 16 - 24\sqrt{2}i + 18i^2 = (4-3\sqrt{2}i)^2.$

Vậy $x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}i \pm (4-3\sqrt{2}i)}{2} = \begin{cases} 2-i\sqrt{2} \\ -2+2i\sqrt{2}. \end{cases}$

Còn $x^2 + \sqrt{2}ix - 6\sqrt{2}i = 0$: $\Delta = 2i^2 + 24\sqrt{2}i = (4 + 3\sqrt{2}i)^2$

$$\Rightarrow \qquad x_{3,4} = \begin{cases} 2 + i\sqrt{2} \\ -2 - 2i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = (x^2 - 4x + 6)(x^2 + 4x + 12) = 0$.

17. a) $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ vì $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, còn α : $\text{tg}\alpha = \frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}$ hoặc chọn $\alpha + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

b) $z = 1 + i\sqrt{3}$ có $r = \sqrt{1 + 3} = 2$; $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ hoặc $\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$, ta chọn $\alpha = \frac{\pi}{3}$ vì $\sin\frac{\pi}{3}$ cùng dấu với $b = \sqrt{3} > 0$.

Vậy $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

c) $z = -1 + i\sqrt{3}$ có $r = 2$; $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\pi}{3}$ hoặc $\alpha_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Chọn $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ vì $\sin\frac{2\pi}{3}$ cùng dấu với $b = \sqrt{3}$. Vậy $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

d) $z = -1 - i\sqrt{3}$ có $r = 2$; $\text{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$ hoặc $\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$. Chọn $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ vì $\sin\frac{4\pi}{3}$ cùng dấu với $b = -\sqrt{3} < 0$.

Vậy $z = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

e) $z = 1 - i\sqrt{3}$ có $r = 2$; $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{\pi}{3}$ hoặc $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$. Chọn $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ hay $\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ vì $b = -\sqrt{3} < 0$.

Vậy $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$.

g) $z = 2i = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]$.

h) $z = -3 = 3[\cos\pi + i\sin\pi]$.

18. a) $|z| = |x + iy| < 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \Rightarrow x^2 + y^2 < 4$ là tập hợp tất cả các điểm nằm trong hình tròn tâm O(0, 0) bán kính R = 2.

b) $|z - i| = |x + iy - i| = |x + (y - 1)i| \le 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \le 1$

$\Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 \le 1$ là tập hợp tất cả các điểm nằm trong hình tròn tâm I(0, 1) bán kính R = 1 (kể cả các điểm trên đường tròn).

c) $|z - 1 - i| = |(x - 1) + i(y - 1)| < 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 1$ là tập hợp các điểm nằm trong hình tròn tâm I(1, 1) bán kính R = 1.

19. a) $A = (1 + i)^{25}$. Ta có $z = i + 1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ nên

$$A = (1+i)^{25} = (\sqrt{2})^{25}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]^{25} = 2^{\frac{25}{2}}\left[\cos 25\frac{\pi}{4} + i\sin 25\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{12}\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 6\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 6\pi\right)\right] = 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{12}(1 + i).$$

b) $$A = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20} = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{20}(1 + i)^{20}}{(1 - i)^{20}(1 + i)^{20}}$$

$$= \frac{1}{2^{20}}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{20} . \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{20}$$

$$= \frac{1}{2^{20}}\left[2^{20}\left(\cos\frac{20}{3}\pi + i\sin\frac{20}{3}\pi\right) . 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{4} + i\sin\frac{20\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2^{10}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right][\cos\pi + i\sin\pi]$$

$$= 2^{10}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right)\right] = 2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 2^9(1 - i\sqrt{3}).$$

c) $A=\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}=\left(1+\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{24}=\left(\cos 0+\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{24}$

$$=\left(2\cos^2\frac{5\pi}{12}+2i\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}\right)^{24}=2^{24}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)^{24}(\cos 10\pi+i\sin 10\pi)$$

$=2^{24}\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)^{24}$. Lại do $\cos^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow\left(\cos\frac{5\pi}{12}\right)^{24}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^{12}=\frac{(2-\sqrt{3})^{12}}{2^{24}}.$$

Vậy $A=(2-\sqrt{3})^{12}$.

20. Ta có $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ nên

$$\omega_1^n=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}.$$

Còn $\omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$

nên $\omega_2^n=\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3}$.

Vậy $\omega_1^n+\omega_2^n=\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{4n\pi}{3}\right)+i\left(\sin\frac{2n\pi}{3}+\sin\frac{4n\pi}{3}\right)$

$$=2\cos\frac{6n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi}{3}+i2\sin\frac{6n\pi}{3}\cos\frac{2n\pi}{3}=2\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

21. a) $\omega=\sqrt[3]{2-2i}=\sqrt[3]{2(1-i)}=\sqrt{2}\sqrt[3]{\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}}$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{(7+8k)\pi}{12}+i\sin\frac{(7+8k)\pi}{12}\right)\text{ với } k=0,1,2.$$

Khi $k = 0$: $\quad \omega_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$;

$k = 1$: $\quad \omega_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right)$;

$k = 2$: $\quad \omega_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$.

b) $\omega = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$
với $k = 0, 1, 2, 3$.

22. a) $\omega = \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3} - i}}$: xét $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

$\Rightarrow \omega = \sqrt[8]{z} = \frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left\{\cos\frac{(5 + 24k)\pi}{96} + i\sin\frac{(5 + 24k)\pi}{96}\right\}$ với $k = \overline{0, 7}$.

b) $\omega = \sqrt[6]{\frac{1-i}{1 + i\sqrt{3}}}$: xét $z = \frac{1-i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

Vậy $\omega = \sqrt[6]{z} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left[\cos\frac{(17 + 24k)\pi}{72} + i\sin\frac{(17 + 24k)\pi}{72}\right]$ với $k = \overline{0,5}$.

23. a) Xét $(\cos 5x + i\sin 5x) = (\cos x + i\sin x)^5$

$= \cos^5 x + 5i\cos^4 x\sin x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 10i\cos^2 x\sin^3 x + 5\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x$

$= (\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) + i(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x)$

$\Rightarrow \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$.

Tương tự ta có $\sin 6x = 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$.

b) Giả sử $\alpha = \cos x + i\sin x$ thì $\overline{\alpha} = \cos x - i\sin x = \alpha^{-1}$.

Vậy $\alpha^k = \cos kx + i\sin kx$; $\alpha^{-k} = \cos kx - i\sin kx$

$$\Rightarrow \cos kx = \frac{\alpha^k + \alpha^{-k}}{2} \; ; \; \sin kx = \frac{\alpha^k - \alpha^{-k}}{2i}.$$

Như vậy khi $k = 1$: $\cos x = \dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}$, $\sin x = \dfrac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}$. Suy ra :

$$\bullet\ \sin^4 x = \left(\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\alpha^4 - 4\alpha^3\alpha^{-1} + 6\alpha^2\alpha^{-2} - 4\alpha\alpha^{-3} + \alpha^{-4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\alpha^4 - 4\alpha^2 + 6 - 4\alpha^{-2} + \alpha^{-4}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[(\alpha^4 + \alpha^{-4}) - 4(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 6\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 4.2\cos 2x + 6\right).$$

$$= \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}.$$

$$\bullet\ \cos^5 x = \left(\frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^5 =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\alpha^5 + 5\alpha^4\alpha^{-1} + 10\alpha^3\alpha^{-2} + 10\alpha^2\alpha^{-3} + 5\alpha\alpha^{-4} + \alpha^{-5}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x\right) = \frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}.$$

24. Xét $(1 + i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (i)^k = C_n^0 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + \ldots$

$$= (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots) \qquad (1)$$

Mặt khác $\quad 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ nên

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right). \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta được :

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} \ ;$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

25. a) $\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(-1 + i\sqrt{3}) = 2 - 2i\sqrt{3}$

$$= 3 - 2i\sqrt{3} + i^2 = (\sqrt{3} - i)^2.$$

Vậy $x_{1,2} = \dfrac{(1 + i\sqrt{3}) \pm (\sqrt{3} - i)}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{cases}$

b) $x^3 - 6x + 9 = (x + 3)(x^2 - 3x + 3) = 0.$

Vậy $x_1 = -3$; $x_{2,3} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$

c) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = (x + 1)(x^2 + 5x + 25) = 0$

Vậy $x_1 = -1$; $x_{2,3} = \dfrac{-5 \pm i5\sqrt{3}}{2}.$

d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = x^2(x^2 - 2) - 2x(x^2 - 2) + 4(x^2 - 2)$

$= (x^2 - 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3}.$

e) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = x^2(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 3) - 5(x^2 + 3)$

$= (x^2 + 3)(x^2 + 2x - 5) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$; $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}.$

Chương II

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ. GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số một biến số

Giả sử $X \subset \mathbb{R}$, ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}$ gọi là hàm số một biến số xác định trên tập hợp X. Đó là một quy tắc cho ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y = f(x) \in \mathbb{R}$ và ký hiệu $f : x \mapsto y = f(x)$. Nếu hàm số được cho bởi biểu thức $y = f(x)$ thì miền xác định (MXĐ) của hàm số được hiểu là tập hợp những điểm x tại đó f(x) có nghĩa. Miền giá trị (MGT) của hàm số là tập hợp

$$f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \forall x \in X\}.$$

Nếu $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ là một song ánh thì f có hàm số ngược, ký hiệu là $f^{-1} : Y \to X$, nó cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

2. Dãy số và giới hạn của dãy số

• Dãy số là một tập hợp số viết theo thứ tự xác định, ký hiệu

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \text{ hay } \{x_n\}.$$

Số a gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, bé tùy ý, tồn tại một số tự nhiên n_o sao cho $\forall n > n_o$, $|x_n - a| < \varepsilon$, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Dãy số có giới hạn gọi là dãy số hội tụ.

• Nếu các dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ đều có giới hạn hữu hạn thì :

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n \ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n . y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n . \lim_{n\to\infty} y_n \ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\text{nếu } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

• Nếu $x_n \geq y_n$ với $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ thì $a \geq b$.

Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ với $\forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Nếu dãy số x_n tăng (giảm) và bị chặn trên (bị chặn dưới) thì nó hội tụ.

Một giới hạn đáng chú ý : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

3. Giới hạn của hàm số

• Cho hàm số f(x) xác định trong lân cận điểm a (có thể trừ tại a). Ta nói hàm số f(x) có giới hạn A khi x dần tới a nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ và ký hiệu

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

• Nếu $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$ thì :

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2.$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x).f_2(x)) = A_1.A_2.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} \quad (\text{nếu } A_2 \neq 0).$$

• Nếu $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ ở lân cận điểm a và nếu

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = A \ \text{ thì}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Ứng với tiêu chuẩn này, ta được :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ;$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

• Vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (VCL) :

f(x) là VCB khi $x \to a$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, là VCL khi $x \to a$ nếu $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Nếu f(x) là VCB khi $x \to a$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \to a$.

Nếu f(x) và g(x) là hai VCB khi $x \to a$ và nếu $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, ta nói f(x) và g(x) là hai VCB tương đương khi $x \to a$, ký hiệu $f(x) \sim g(x)$.

Nếu $f(x) \sim \bar{f}(x)$, $g(x) \sim \bar{g}(x)$ khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Nếu f(x) và g(x) là hai VCB khi $x \to a$ và nếu $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ thì $f(x) + g(x)$ và f(x) là hai VCB tương đương khi $x \to a$.

Nếu F(x) và G(x) là hai VCL khi $x \to a$ và nếu $\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = 1$, ta nói F(x) và G(x) là hai VCL tương đương khi $x \to a$, ký hiệu $F(x) \sim G(x)$.

Nếu $F(x) \sim \bar{F}(x)$, $G(x) \sim \bar{G}(x)$ khi $x \to a$ thì

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)}.$$

Nếu F(x) và G(x) là hai VCL khi $x \to a$ và nếu $\lim_{x \to a} \frac{G(x)}{F(x)} = 0$ thì $F(x) + G(x)$ và F(x) là hai VCB tương đương khi $x \to a$.

• Hàm số liên tục

Cho hàm số f(x) xác định trong (a, b). Ta nói f(x) liên tục tại $x_o \in (a, b)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$, f(x) liên tục trong (a, b) nếu nó liên tục tại mọi $x_o \in (a, b)$.

Các hàm số sơ cấp liên tục trong miền xác định của chúng. Từ tính liên tục của các hàm số sơ cấp, suy ra các giới hạn sau :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1 \;; \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e \;;$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} = 1 \;; \qquad \lim_{\alpha \to 0} \frac{a^{\alpha} - 1}{\alpha} = \ln a \;;$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu .$$

Nếu f(x) không liên tục tại x_o thì ta nói nó gián đoạn tại x_o.

x_o là điểm gián đoạn bỏ được của f(x) nếu f(x) không xác định tại x_o nhưng tồn tại $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$; x_o là điểm gián đoạn loại 1 của f(x) nếu tồn tại tại các giới hạn hữu hạn $f(x_o + 0)$ và $f(x_o - 0)$, nhưng $f(x_o + 0) \neq f(x_o - 0)$; x_o là điểm gián đoạn loại 2 nếu ít nhất một trong các giới hạn $f(x_o + 0)$, $f(x_o - 0)$ không tồn tại hay vô hạn.

Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a, b] thì nó bị chặn trên [a, b], đạt giá trị lớn nhất và bé nhất của nó trên đoạn đó.

Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a, b], f(a).f(b) < 0 thì tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho f(c) = 0.

4. Đạo hàm và vi phân

• Cho hàm số y = f(x) xác định trong khoảng (a, b), $x_o \in (a, b)$. Nếu tồn tại

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o},$$

giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm số y = f(x) tại x_o, ký hiệu là $f'(x_o)$ hay $y'(x_o)$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_o thì nó liên tục tại x_o.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm của (a, b), ta nói $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b).

• Nếu các hàm số $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại x thì :

1) $u(x) + v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$;

2) $u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $[u(x).v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$;

3) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x và $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$; $v(x) \neq 0$.

• Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f[g(x)]$ có đạo hàm theo x và

$$y'(x) = y'(u).u'(x).$$

• Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản :

1) $(c)' = 0$ (c là hằng số) ;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$;

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$;

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$;

10) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$;

13) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\mathrm{arccotg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

• Đạo hàm cấp cao

$$y = f(x),\ y' = f'(x),\ y''(x) = [f'(x)]' = f''(x), \ldots,$$

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x) \ ;\ (n \geq 3).$$

Đối với đạo hàm cấp cao ta có :

$[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$;

$[u(x).v(x)]^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x)$, ở đây $v^{(0)}(x) = v(x)$, $u^{(0)}(x) = u(x)$.

• Vi phân

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x thì

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

trong đó $\alpha(\Delta x)$ là một VCB bậc cao so với Δx khi $\Delta x \to 0$. Biểu thức $f'(x).\Delta x$ là phần chính bậc nhất của số gia $f(x + \Delta x) - f(x)$ và gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x, ký hiệu $dy = f'(x)dx$.

Nếu f(x) có vi phân tại x, ta nói nó khả vi tại x. Vậy nếu f(x) có đạo hàm tại x thì nó khả vi tại x.

Nếu Δx khá nhỏ ta có công thức gần đúng

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

B – ĐỀ BÀI

1. Cho $f(x) = x^2 + 1$. Tính $f(4)$; $f(\sqrt{2})$; $f(a+1)$; $f(a^4)$; $[f(a)]^2$; $f(2a)$.

2. Cho $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$. Viết $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ và $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

3. Cho $f(u) = \mathrm{tg}u$. Hãy chứng minh rằng :

$$f(2u) = \frac{2f(u)}{1 - [f(u)]^2}.$$

4. Cho $g(t) = \lg\dfrac{1-t}{1+t}$. Chứng minh rằng khi $a, b \in (-1, 1)$ thì

$$g(a) + g(b) = g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

5. Cho $f(x) = \lg x$; $g(x) = x^3$. Tính $f[g(2)]$; $g[f(2)]$.

6. Cho $f(x) = x^2$. Tìm $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $(b \neq a)$.

7. Tìm miền xác định của các hàm số sau đây :

a) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

b) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{7-x}$;

c) $y = \lg\dfrac{a+x}{a-x}$ $(a > 0)$;

d) $y = \arcsin^2 x$;

e) $y = a^{x+2}$ $(a > 0, a \neq 1)$;

f) $y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{2x+\pi}{3}\right)$;

g) $y = \lg\dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$;

h) $= \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 7x + 10}}$;

i) $y = \sqrt{\lg\dfrac{5x - x^2}{4}}$;

k) $y = \log_x 5$;

l) $y = \arccos\dfrac{3}{4 + 2\sin x}$;

m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$;

n) $y = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$;

o) $y = \log|4 - x^2|$;

p) $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$;

q) $y = \sqrt{\cos(\sin x)} + \arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$.

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn, hàm số lẻ, không chẵn không lẻ :

a) $y = 2^x$; b) $y = 1 - x^2$;

c) $y = 2^{-x^2}$; d) $y = \text{cotg}x$;

e) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$; f) $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$;

g) $y = \dfrac{x}{a^x - 1}$ $(a > 0, a \neq 1)$; h) $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

9. Trong số các hàm số sau, hàm số nào là hàm số tuần hoàn, tìm chu kỳ của chúng :

a) $y = \sin^2 x$; b) $y = \sin(x^2)$;

c) $y = x\cos x$; d) $y = \sin\dfrac{1}{x}$;

e) $y = 1 + \text{tg}x$; f) $y = 1 - \sin x$;

g) $y = \sin\dfrac{x}{2}$; h) $y = |\sin x|$;

i) $y = 2\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$; k) $y = 3\cos\dfrac{x-\pi}{3}$.

10. Tìm hàm số ngược của các hàm số sau trên miền tồn tại của nó :

a) $y = 10^{x+1}$; b) $y = 1 + \log(x+2)$; c) $y = \dfrac{2^x}{1+2^x}$;

d) $y = 2\sin 3x$; e) $y = x^2 - 2x$ khi $x \geq 1$.

11. Hãy thử lại rằng hàm số $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ có hàm ngược là chính nó.

Với điều kiện nào của a, b, c, d thì hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có hàm số ngược là chính nó.

12. Vẽ đồ thị các hàm số sau (dùng điểm đặc biệt và phép dời trục đã biết ở phổ thông) :

a) $y = -3x + 5$; b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$; c) $y = x^2 + 2x - 1$;

d) $y = \dfrac{1}{x-1}$; e) $y = \sin 2x$; f) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

g) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; h) $y = \log_2 x$; i) $y = \log_2 \dfrac{1}{x}$;

k) $y = |\sin x|$; l) $y = |x - 2|$; m) $y = x - |x|$;

n) $y = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } -\pi \le x \le 0\,; \\ 1 & \text{nếu } 0 < x < 1\,; \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } 1 \le x \le 2. \end{cases}$

13. Viết một số số hạng đầu tiên của các dãy số sau, nếu số hạng tổng quát là :

a) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$; b) $x_n = 2^{-n}\cos n\pi$.

14. Sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy số. Chứng minh rằng dãy $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$ có giới hạn bằng $\dfrac{3}{5}$.

15. Chứng minh rằng dãy số : $\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{3}{4}\,;\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{7}{8}\,;\dfrac{1}{8}\,;\ldots$ có số hạng tổng quát

$$x_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} & \text{với n là số lẻ ;} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{với n là số chẵn ;} \end{cases}$$

từ đó suy ra dãy số đã cho không hội tụ (giải thích).

16. Chứng minh rằng các dãy số sau có giới hạn bằng "0" khi $n \to \infty$:

a) $x_n = \dfrac{1}{n^k}$ $(k > 0)$; b) $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{n}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n}\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$; d) $x_n = (-1)^n \dfrac{2}{5\sqrt[3]{n}+1}$.

17. Tìm giới hạn của các dãy số sau :

a) $x_n = \dfrac{3n^2 + 5n + 4}{10 + 6n^2}$; b) $x_n = \left[\dfrac{2n^3 + 2n^2 + 1}{4n^3 + 7n^2 + 3n + 4}\right]^4$;

c) $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{5n^3 + n + 1}$; d) $x_n = \sqrt[n]{6n + 3}$;

e) $x_n = \sqrt{2n + 3} - \sqrt{n - 1}$; g) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$;

h) $x_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n + 1)}$;

i) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}$; k) $x_n = \dfrac{1}{2n}\cos n^3 - \dfrac{3n}{6n + 1}$.

18. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

19. Chứng minh rằng dãy số $x_n = \dfrac{2n - 1}{3n + 1}$ là dãy tăng, còn dãy số $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$ là dãy giảm khi $n \geq 10$.

20. Tìm giới hạn của các dãy số sau :

$x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$; $z_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$;

$y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

21. Sử dụng định nghĩa về giới hạn của hàm số, chứng minh rằng :

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2) = 1$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = 2$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2} = \dfrac{2}{3}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $(a > 1)$.

22. So sánh các VCB sau (bậc VCB và VCB tương đương) :

Khi $x \to 0$, hãy so sánh VCB $\varphi(x) = x$ với các VCB sau :

$f_1 = \mathrm{tg}x^3$; $f_2 = \sqrt[3]{\sin^2 x}$; $f_3 = \sqrt{9 + x} - 3$;

$f_4 = 1 - \cos x$; $f_5 = \text{arctg}\sqrt[3]{x}$.

23. Chứng minh rằng khi $x \to 0$, các VCB sau tương đương :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{2}x \ ; \quad 1 - \frac{1}{1+x} \sim x \ ; \quad \sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}} \ .$$

24. Hãy so sánh các VCL sau (khi $x \to \infty$) :

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ và $\varphi(x) = 2x^3 + 2x - 1$;

b) $f(x) = 2x^2 + 2x$ và $\varphi(x) = (x+2)^2$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+a}$ và $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$.

25. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 5}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 8}{x^2 + 1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ $n \in \mathbb{N}^*$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$;

k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{3x^2}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{cotg}\,x$;

q) $\lim\limits_{y\to 1} (1-y)\text{tg}\dfrac{y}{2}\pi$

r) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$;

s) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

t) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{cx}$;

u) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$;

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}$.

26. Sử dụng các VCB tương đương, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x}{3x+4x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\operatorname{tg}x)^2+(1-\cos 2x)^4+x^5}{7\operatorname{tg}^7 x+\sin^6 x+2\sin^5 x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

27. Tìm giới hạn một phía của các hàm số sau :

a) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \text{nếu } x\le 1\\ 3x-5 & \text{nếu } x>1\end{cases}$ khi $x\to 1$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ khi $x\to 1$.

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ khi $x\to 0$.

28. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=3x^4-2x^2+3x$ liên tục với x bất kỳ.

29. Tìm điểm gián đoạn và bước nhảy nếu có của các hàm số sau :

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3) & \text{khi } -\infty<x\le 1,\\ 6-5x & \text{khi } 1<x<3,\\ x-3 & \text{khi } 3\le x<+\infty\ ;\end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.

30. Xét sự liên tục của các hàm số sau :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0, \\ 1 & \text{khi } x = 0 ; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

31. Cho $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$. Tính $f(1)$; $f'(1)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

32. Cho $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}$. Tính $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$?

33. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = x^3\text{arctg}x$; b) $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$;

c) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$; d) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

e) $y = (2x^3 + 5)^4$; g) $y = \text{tg}^6 x$;

h) $y = \text{tg}(\ln x)$; i) $y = \ln\left(\text{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

k) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; l) $y = \ln(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1})$;

m) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + k} + \dfrac{k}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + k})$;

n) $y = \arcsin\dfrac{2x^2}{1 + x^4}$ với $|x| < 1$; o) $y = \text{arctg}\dfrac{\ln x}{3}$;

p) $y = e^x\text{arctg}e^x - \ln\sqrt{1 + e^{2x}}$; q) $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$.

34. Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng cách trước hết hãy lấy lôgarit của hai vế :

a) $y = x^{x^2}$; b) $y = (\sin x)^{\text{tg}x}$;

c) $y = \dfrac{(2x - 1)^3\sqrt{3x + 2}}{(5x + 4)^2\sqrt[3]{1 - x}}$; d) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

35. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau :

a) $y = e^{x^2}$; b) $y = \ln\sqrt[3]{1 + x^2}$.

36. Chứng minh rằng hàm $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$; c_1, c_2 là hai hằng số tùy ý, thỏa mãn phương trình :

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

37. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y = x\ln x$; b) $y = \dfrac{1}{1+2x}$;

c) $y = xe^x$; d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

38. So sánh số gia và vi phân của hàm số $y = 2x^3 + 5x^2$.

39. Tính giá trị gần đúng của M = arcsin0,51 bằng vi phân.

40. Tính giá trị gần đúng của diện tích hình tròn có bán kính bằng 3,02m.

41. Tính vi phân của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$; b) $y = \text{arctg}e^{2x}$.

c) $y = x(\ln x - 1)$; d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

C – BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(4) = 4^2 + 1 = 17$; $f(\sqrt{2}) = 3$;

$f(a+1) = (a+1)^2 + 1 = a^2 + 2a + 2$; $f(a^4) = a^8 + 1$;

$[f(a)]^2 = (a^2+1)^2$; $f(2a) = 4a^2 + 1$.

2. $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3x+5} \Rightarrow \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x} - 1}{3\dfrac{1}{x} + 5} = \dfrac{1-x}{3+5x}$;

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \varphi^{-1}(x) = \left[\frac{x-1}{3x+5}\right]^{-1} = \frac{3x+5}{x-1}.$$

3. $f(u) = \text{tgu} \Rightarrow f(2u) = \text{tg}(2u) = \text{tg}(u+u) = \dfrac{2\text{tgu}}{1 - \text{tg}^2 u} = \dfrac{2f(u)}{1 - [f(u)]^2}$.

4. $g(t) = \lg\dfrac{1-t}{1+t}$ khi $t \in (-1, 1)$ thì $\dfrac{1-t}{1+t} > 0$.

Vì vậy $g(a) + g(b) = \lg\dfrac{1-a}{1+a} + \log\dfrac{1-b}{1+b} = \lg\dfrac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}$. (1)

Mặt khác, $g\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right) = \log\dfrac{1 - \dfrac{a+b}{1+ab}}{1 + \dfrac{a+b}{1+ab}} = \lg\dfrac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}$

$$= \lg\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $g(a) + g(b) = g\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

5. $f(x) = \lg x$; $g(x) = x^3 \Rightarrow f[g(x)] = \lg[g(x)] = \lg x^3 = 3\lg x$;

$$g[f(x)] = [f(x)]^3 = (\lg x)^3.$$

Vậy : $f[g(2)] = 3\lg 2$; $g[f(2)]^3 = (\lg 2)^3$.

6. $f(x) = x^2 \Rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = \dfrac{b^2 - a^2}{b-a} = b + a$.

7. a) $y = \sqrt{1 - x^2}$ có MXĐ : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1$.

b) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{7-x}$ có MXĐ : $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 7 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 7$.

c) $y = \lg\dfrac{a+x}{a-x}$ có MXĐ : $\begin{cases} \dfrac{a+x}{a-x} > 0 \\ a \neq x \,;\, a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+x)(a-x) > 0 \\ a \neq x \,;\, a > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -a < x < a.$$

d) $y = \arcsin^2 x$ có MXĐ : $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

e) $y = a^{x+2}$ $(a > 0, a \neq 1)$ có MXĐ : $-\infty < x < +\infty$.

f) $y = \text{tg}\dfrac{2x+\pi}{3}$ có MXĐ : $\dfrac{2x+\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{2}k\pi$.

g) $y = \lg\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ có MXĐ : $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-3x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

h) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+7x+10}}$ có MXĐ : $\begin{cases} x^2 + 7x + 10 \neq 0 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+7x+10} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty < x < -5 \\ -2 < x \leq 1 \\ 2 \leq x < +\infty \end{array}\right.$

i) $y = \sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ có MXĐ : $\lg\dfrac{5x-x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{5x-x^2}{3} \geq 1$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4.$

k) $y = \log_x 5$ có MXĐ : $x > 0, x \neq 1$.

l) $y = \arccos\dfrac{3}{4+2\sin x}$ có MXĐ : $-1 \leq \dfrac{3}{4+2\sin x} \leq 1$.

Do $4 + 2\sin x > 0\ \forall x \Rightarrow \dfrac{3}{4+2\sin x} \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 4 + 2\sin x$

$\Rightarrow \quad \sin x \geq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$ có MXĐ : $|x| - x > 0 \Rightarrow |x| > x$

$\Rightarrow \quad x < 0$ (vì $x \geq 0$ thì $|x|$ không thể $> x$).

n) $y = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$ có MXĐ : $\arcsin(\log_2 x) \geq 0$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \log_2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2.$

o) $y = \lg|4 - x^2|$ có MXĐ : $\forall x \neq \pm 2$.

p) $y = \log_2\log_3\log_4 x$ có MXĐ : $\log_3\log_4 x > 0 \Rightarrow \log_4 x > 1 \Rightarrow x > 4$.

q) $y = \sqrt{\cos(\sin x)} + \arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$ có MXĐ : $\begin{cases} \cos(\sin x) \geq 0 & (1) \\ \left|\dfrac{1+x^2}{2x}\right| \leq 1 & (2) \end{cases}$

Từ bất đẳng thức (2) ta suy ra $\begin{cases} 1+|x|^2 \le 2|x| \\ x \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-|x|)^2 \le 0 \\ x \ne 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \pm 1.$$

Với $x = \pm 1$ thì bất đẳng thức (1) thỏa mãn.

Vậy MXĐ : $x = \pm 1$.

8. a) $y = 2^x$: Hàm số đã cho không chẵn, không lẻ vì $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x} \ne y(x)$.

b) $y = 1 - x^2$: Ta có $y(-x) = 1 - (-x)^2 = 1 - x^2 = y(x)$. Vậy hàm đã cho là hàm số chẵn.

c) $y = 2^{-x^2}$: Do $y(-x) = 2^{-(-x)^2} = 2^{-x^2} = y(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) $y = \text{cotg}x$: Do $y(-x) = \text{cotg}(-x) = -\text{cotg}x$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

e) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$: Do $y(-x) = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2} = y(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

f) $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$: Do $y(-x) = \dfrac{a^{-x} - a^x}{2} = -\dfrac{a^x - a^{-x}}{2} = -y(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

g) $y = \dfrac{x}{a^x - 1}$: Do $y(-x) = \dfrac{-x}{a^{-x} - 1}$. Vậy hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

h) $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$: Do $y(-x) = \lg\dfrac{1-x}{1+x} = \lg\left[\dfrac{1+x}{1-x}\right]^{-1}$

$$= -\log\frac{1+x}{1-x} = -y(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

9. a) $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x + 2k\pi)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(x + k\pi).$$

Vậy hàm số đã cho tuần hoàn chu kì $T = \pi$.

b) $y = \sin x^2$: Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn chu kì T, tức là

$\sin(x + T)^2 = \sin x^2 \Rightarrow (x + T)^2 = x^2 + 2k\pi$ hoặc $(x + T)^2 = \pi - x^2 + 2k\pi$

$\Rightarrow k = \dfrac{2Tx + T^2}{2\pi}$ hoặc $k = \dfrac{(x + T)^2 + x^2 - \pi}{2\pi}$, điều này không thể xảy ra vì $k \in \mathbb{Z}$. Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

c) $y = x\cos x$: Tương tự ta suy ra hàm số đã cho không tuần hoàn.

d) $y = \sin\dfrac{1}{x}$ không tuần hoàn.

e) $y = 1 + \text{tg}x$: Do $y = 1 + \text{tg}x = 1 + \text{tg}(x + \pi)$ nên là hàm số tuần hoàn chu kỳ $T = \pi$.

f) $y = 1 - \sin x = 1 - \sin(x + 2k\pi)$, tuần hoàn chu kỳ $T = 2\pi$.

g) $y = \sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(\dfrac{x}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(\dfrac{x + 4k\pi}{2}\right)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $T = 4\pi$.

h) $y = |\sin x| = |\sin(x + k\pi)|$, tuần hoàn chu kỳ $T = \pi$.

i) $y = 2\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$= 2\sin\left[\left(3x + \dfrac{2}{3}k\pi\right) + \dfrac{3\pi}{4}\right]$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

k) $y = 3\cos\dfrac{x - \pi}{3} = 3\cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = 3\cos\left[\dfrac{1}{3}(x + 6k\pi) - \dfrac{\pi}{3}\right]$ là hàm số tuần hoàn chu kì $T = 6\pi$.

10. a) $y = 10^{x+1} > 0\ \forall x \Rightarrow x + 1 = \lg y \Rightarrow x = \lg y - 1$ hay $x = \lg\dfrac{y}{10}$.

Đổi vai trò của x, y ta được $y = \log\dfrac{x}{10}$.

b) $y = 1 + \lg(x + 2)$ có MXĐ : $x > -2$ và là hàm liên tục đơn điệu $\forall x > -2$, nên tồn tại hàm số ngược

$$x + 2 = 10^{y-1} \ \Rightarrow\ x = 10^{y-1} - 2.$$

Đổi vai trò của x, y ta được $y = 10^{x-1} - 2$.

c) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$ là hàm số liên tục và đơn điệu $\forall x$, $0 < y < 1$, nên tồn tại hàm số ngược :

$$2^x = y + y2^x \Rightarrow 2^x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \log_2 \frac{y}{1-y}.$$

Đổi vai trò của x, y ta được $y = \log_2 \dfrac{x}{1-x}$ với $0 < x < 1$.

d) $y = 2\sin 3x$ là hàm số tuần hoàn chu kì $T = \dfrac{2\pi}{3}$, xét trong đoạn $-\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{6}$ hàm số đơn điệu tăng, liên tục, nên tồn tại hàm số ngược :

$$3x = \arcsin\frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}.$$

Đổi vai trò của x, y ta được $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

e) Hàm số $y = x^2 - 2x$ khi $x \ge 1$ liên tục và đơn điệu tăng nên tồn tại hàm số ngược $x = 1 + \sqrt{1 + y}$. Đổi vai trò của x, y ta được : $y = 1 + \sqrt{1 + x}$.

11. Hàm số $y = f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ xác định khi $x \neq -1$. Nó liên tục và đơn điệu giảm trong tập hợp $X = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, miền giá trị tương ứng của nó là tập hợp $Y = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Do đó tồn tại hàm số ngược $x = f^{-1}(y)$ có miền xác định là Y và miền giá trị là X.

Từ $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, suy ra $y + yx = 1 - x$ hay $x(1 + y) = 1 - y$. Do đó $x = \dfrac{1 - y}{1 + y}$. Đổi vai trò của x, y ta được :

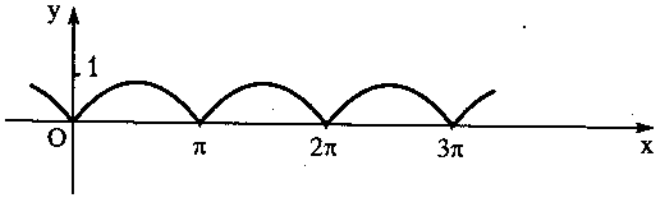
$$y = f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Vậy $f(x) = f^{-1}(x)$.

Lập luận như trên, ta thấy rằng hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có hàm số ngược là $y = f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$. Do đó hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ trùng nhau khi và chỉ khi $a = -d$.

12. Sinh viên tự vẽ đồ thị của các hàm số a), b), c), d), e), f), g), h), i). Đó là các hàm số quen thuộc, có thể vẽ đồ thị của chúng bằng cách dùng các điểm đặc biệt.

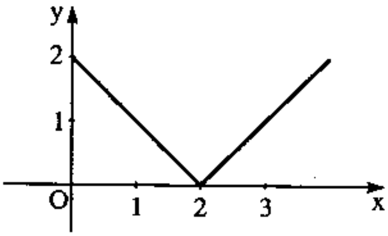
k) Vì $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{nếu } \sin x < 0 \end{cases}$, nên đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ được suy từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ bằng cách lấy đối xứng đối với trục Ox phần của đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm dưới trục Ox và giữ nguyên phần còn lại. Cũng dễ nhận thấy rằng hàm số $y = |\sin x|$ là tuần hoàn với chu kì π. Đồ thị của nó được cho ở hình 2.1.



Hình 2.1

l) $y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \geq 2, \\ -x + 2 & \text{nếu } x < 2. \end{cases}$

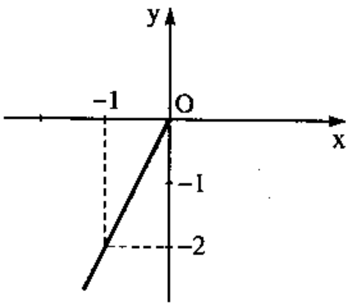
Đồ thị của nó được cho ở hình 2.2.



Hình 2.2

m) $y = x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \geq 0, \\ 2x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đồ thị của nó được cho ở hình 2.3.



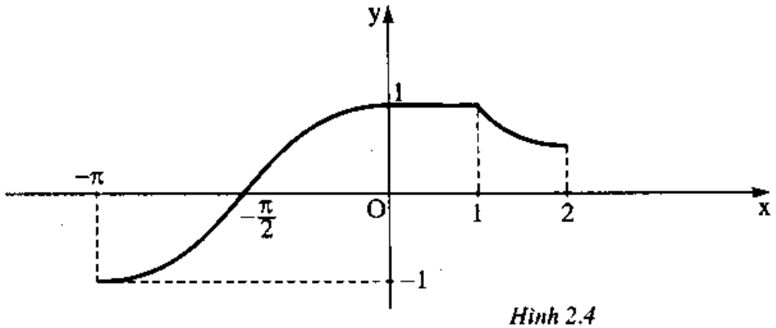
Hình 2.3

n) Lập bảng biến thiên của hàm số

$$y = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		1		$\frac{3}{2}$		2
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\longrightarrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

Đồ thị của nó được cho ở hình 2.4.



Hình 2.4

13. a) Dãy số $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{3}$:

$$x_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\quad x_2 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

$$x_3 = \sin\frac{3\pi}{3} = 0\ ;\quad x_4 = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \ldots$$

b) Dãy số $x_n = 2^{-n}\cos n\pi$:

$$x_1 = 2^{-1}\cos\pi = -\frac{1}{2}\ ;\quad x_2 = 2^{-2}\cos 2\pi = \frac{1}{4}\ ;\ \ldots$$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$ nếu $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$:

Thật vậy

$\forall\varepsilon > 0, \exists n_o(\varepsilon) : \forall n > n_o \Rightarrow \left|\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} - \dfrac{3}{5}\right| < \varepsilon^{(*)}$ hay

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{5(5n^2-1)} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{8}{25\varepsilon} + \frac{1}{5} \Rightarrow n > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Đặt $n_o = \left[\dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}\right] + 1$, khi đó $\forall n > n_o(\varepsilon)$ bất đẳng thức (*) được thỏa mãn.

15. Dãy số $x_n = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} & \text{nếu n là số lẻ,} \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{nếu n là số chẵn.} \end{cases}$

Ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1 & \text{khi n là số lẻ,} \\ 0 & \text{khi n là số chẵn.} \end{cases}$

Vậy dãy số đã cho không hội tụ.

16. a) Dãy số $x_n = \dfrac{1}{n^k}$ $(k > 0)$.

Cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Thực vậy $\forall\varepsilon > 0, \exists n_o(\varepsilon) : \forall n > n_o$

$\Rightarrow |x_n| = \dfrac{1}{n^k} < \varepsilon$ (*) $\Rightarrow n^k > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$; chọn $n_o = \left[\sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$, khi đó $\forall n > n_o$ ta sẽ có bất đẳng thức (*). Vậy $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$.

b) Dãy số $x_n = \dfrac{1-(-1)^n}{n}$. Do $|x_n| < \dfrac{2}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Vậy dãy số x_n có giới hạn là 0 khi $n \to \infty$.

c) Dãy số $x_n = \dfrac{1}{n}\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$. Do $|x_n| \le \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$ nên dãy đã cho có giới hạn 0 khi $n \to \infty$.

d) Hoàn toàn tương tự, dãy đã cho có giới hạn 0 khi $n \to \infty$.

17. a) Theo quy tắc ngắt bỏ VCL trong một tổng :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 4}{6n^2 + 10} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{6n^2} = \frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n^3 + 2n^2 + 1}{4n^3 + 7n^2 + 3n + 4}\right]^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

c) Do $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, nên

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{5n^3 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{5n^3 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{30n^3} = \frac{1}{15}.$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n+3} = \lim_{n\to\infty} (6n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 6^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{n} = 1$$

Chú ý $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (xem chứng minh trong bài 18 dưới đây).

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$ có dạng $\infty - \infty$, nhân và chia cho biểu thức liên hợp ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)-(n-1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+4}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2n} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}}} = \infty.$$

g) $$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n^2 - n^3)^{\frac{2}{3}} - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{n} - 1\right)^{\frac{1}{3}} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Chú ý, ở đây sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

h) Do $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $\forall k = 1, 2, ...$

nên $x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots$

$$+\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}\cos n^3 - \frac{3n}{6n+1}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n}{6n} = -\frac{1}{2}.$

Chú ý $|\cos n^3| \le 1$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n^3}{2n} = 0.$

18. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Do liên hệ của giới hạn và VCB nên ta đặt $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha$. Ta sẽ chứng minh rằng α là VCB khi $n \to \infty$.

Thật vậy $n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \dots + \alpha^n$

$$\Rightarrow \forall n > 1 \text{ thì } n > 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 \text{ hay } n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{n}{2}\alpha^2 \text{ (vì } n > 1)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 < \frac{2}{n}. \text{ Vậy khi } n \to \infty \text{ thì } \alpha \text{ là VCB}$$

hay $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha) = 1$ là điều phải chứng minh.

19. a) Dãy số $x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ là dãy số tăng.

Cần chỉ ra rằng $x_{n+1} > x_n$ $\forall n = 1, 2, \dots$

Thực vậy, giả thử $x_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3n+4} > x_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$

$$\Rightarrow 6n^2 + 5n + 1 > 6n^2 + 5n - 4 \Rightarrow 1 > -4 \text{ đương nhiên đúng.}$$

b) Dãy số $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$. Do $x_{n+1} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{10^n.10}{n!(n+1)} = x_n.\dfrac{10}{n+1}$. Bởi vì $\dfrac{10}{n+1} < 1$ khi $n \geq 10$ nên $x_{n+1} = x_n.\dfrac{10}{n+1} < x_n$, điều này chứng tỏ dãy số x_n đã cho là dãy giảm.

20. * Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = 1$.

* Tương tự ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$.

* Do $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$

và $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} > \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = x_n$.

Như vậy $x_n < y_n < z_n$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

21. a) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) : |x-1| < \delta \Rightarrow |(3x-2)-1| < \varepsilon \Rightarrow |3(x-1)| = 3|x-1| < \varepsilon$ $\Rightarrow |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Vậy với $\varepsilon > 0$ cho trước, tìm được $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ để $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-1| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được đối với câu b, c.

d) $\forall M > 0$ đủ lớn, $\exists N(M) : \forall x > N \Rightarrow |a^x| > M$.

Từ điều kiện $|a^x| > M \Rightarrow a^x > M \Rightarrow x\ln a > \ln M \Rightarrow x > \dfrac{\ln M}{\ln a} = \log_a M$.

Vậy với M đủ lớn cho trước, ta tìm được $A = \log_a M$ để $\forall x > A \Rightarrow |a^x| > M$ hay $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

22. Ta xét :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}x^3}{x} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\text{tg}x^3}{x^3}.x^2\right] = 0.$$

Vậy $f_1(x) = \text{tg}x^3$ là VCB bậc cao hơn so với $\varphi(x) = x$ khi $x \to 0$.

$$* \lim_{x \to 0} \frac{f_2(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty.$$

Nghĩa là $f_2(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$ là VCB bậc thấp hơn so với x.

$$* \lim_{x \to 0} \frac{f_3(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x[\sqrt{9 + x} + 3]} = \frac{1}{6}$$

Vậy $f_3(x) = \sqrt{9 + x} - 3$ là VCB cùng bậc với $\varphi(x) = x$ khi $x \to 0$.

$$* \lim_{x \to 0} \frac{f_4(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}.\frac{x}{4} = 0$$

Vậy $f_4(x) = 1 - \cos x$ là VCB bậc cao hơn so với $\varphi(x) = x$ khi $x \to 0$.

$$* \lim_{x \to 0} \frac{f_5(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{arctg}\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{arctg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} . \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$$

Vậy $f_5(x) = \text{arctg}\sqrt[3]{x}$ là VCB bậc thấp hơn so với $\varphi(x) = x$.

23. * Xét $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{2}x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\frac{1}{2}x.\sqrt{1+x}} = \lim_{x \to 0} 2\frac{x}{x\sqrt{1+x}\left[\sqrt{1+x} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1 + x}\left[\sqrt{1 + x} + 1\right]} = 1.$$ Vậy $1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \sim \dfrac{1}{2}x$ khi $x \to 0$.

* Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(1+x)} = 1$

Vậy $1-\dfrac{1}{1+x} \sim x$ khi $x \to 0$.

* Xét $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}} = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\dfrac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x^3}}{x\sqrt{x}}}} = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\dfrac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = 1$

Vậy $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ khi $x \to +0$.

24. a) Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+5}{2x^3+2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{2+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}} = 0.$

Vậy f(x) là VCL bậc thấp hơn so với φ(x).

b) Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+2x}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}} = 2.$

Vậy f(x) = φ(x) là hai VCL cùng bậc.

c) Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+a}}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{x}} = 1.$

Vậy $\sqrt[3]{x+a} \sim \sqrt[3]{x}$ khi $x \to \infty$.

25. Áp dụng quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp trong một tổng đối với câu a, b, c (vì $x \to \infty$), ta được :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+8}{x^2+1} = \infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \dfrac{1}{8}$.

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}{x-1} = n$.

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]} = \dfrac{1}{2}$.

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(x-1)} = \frac{2}{3}.$$

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2$.

k) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}\left[1 - \dfrac{3}{1+x+x^2}\right]$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\left[\frac{1+x+x^2-3}{1+x+x^2}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\left[\frac{x-1+(x^2-1)}{1+x+x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-[1+(x+1)]}{1+x+x^2} = -1.$$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 0$.

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x}.2 = 2$. Chú ý : $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$.

n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2.\dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{1}{27}$,

ở đây sử dụng $\sin X \sim X$ khi $X \to 0$.

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{2}.\left|\dfrac{x}{2}\right|} = \sqrt{2}$.

p) $\lim\limits_{x\to 0} x\text{cotg}x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x.\cos x}{\sin x} = 1$.

q) $\lim\limits_{y\to 1}(1-y)\text{tg}\dfrac{\pi y}{2}$. Để thuận lợi ta đặt $x = 1 - y$. Khi $y \to 1$ thì $x \to 0$.

Khi đó $f(y) = (1-y)\text{tg}\dfrac{\pi}{2}y = x\text{tg}\dfrac{\pi}{2}(1-x) = x\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}x\right) = x\text{cotg}\dfrac{\pi}{2}x = \dfrac{x}{\text{tg}\dfrac{\pi}{2}x}$.

Vậy $\lim\limits_{y\to 1}(1-y)\text{tg}\dfrac{\pi y}{2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\text{tg}\dfrac{\pi}{2}x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\dfrac{\pi}{2}x} = \dfrac{2}{\pi}$.

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$.

s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}.\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = e$$

Chú ý : Có thể sử dụng công thức $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$.

t) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{cx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{cx}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{cx}-\lim_{x\to0}\frac{e^{bx}-1}{cx}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{cx}-\lim_{x\to0}\frac{bx}{cx}=\frac{a-b}{c}.$$

u) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}}{\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x}}=\dfrac{a-b}{a-b}=1.$

v) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x.x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-2}{\cos x}.\frac{x.\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^3}=-\frac{1}{2}.$$

26. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\ln(1+4x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{4x}=\dfrac{5}{4}.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{4}.\sin\dfrac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^2}{4}}{\dfrac{x^2}{16}}=4.$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+(\cos x-1)\right]}{\dfrac{1}{4}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4(\cos x-1)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-8\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-8\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=-2.$$

Chú ý : Ở đây sử dụng công thức $(1+x)^p-1\sim px$ khi $x\to0$.

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}(x+x^2)}{4x}=\dfrac{1}{8}.$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \text{arctg}^2 x}{3x + 4x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

(Dùng quy tất ngắt bỏ VCB bậc cao trong một tổng).

g) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x - \text{tg}x)^2 + (1-\cos 2x)^4 + x^5}{7\text{tg}^7 x + \sin^6 x + 2\sin^5 x}$.

Ta có $(\sin x - \text{tg}x)^2 = \sin^2 x\left(1 - \dfrac{1}{\cos x}\right)^2 = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}(\cos x - 1)^2$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^2 \sim 4x^2.\frac{x^4}{16} = \frac{x^6}{4} \text{ khi } x \to 0.$$

$(1 - 2\cos x)^4 = (2\sin^2 x)^4 \sim 16x^8$;

$7\text{tg}^7 x \sim 7x^7$; $\sin^6 x \sim x^6$; $2\sin^5 x \sim 2x^5$ khi $x \to 0$.

Vậy $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^6}{4} + 16x^8 + x^5}{7x^7 + x^6 + 2x^5} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{2x^5} = \dfrac{1}{2}$.

h) $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+3x)}{(\text{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}} - 1)}$.

Do $\sin\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$; $\ln(1+3x) \sim 3x$;

$(\text{arctg}\sqrt{x})^2 \sim (\sqrt{x})^2 = x$; $e^{5\sqrt[3]{x}} - 1 \sim 5\sqrt[3]{x}$ khi $x \to 0$.

Vậy $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}.3x}{x.5\sqrt[3]{x}} = \dfrac{3}{5}$.

27. a) Khi $x \le 1$ thì $f(x) = -2x + 3$, vì vậy $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0}(-2x+3) = 1$ (giới hạn trái).

Khi $x > 1$ thì $f(x) = 3x - 5$, nên $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0}(3x - 5) = -2$ (giới hạn phải).

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \ge 1 \\ -(x+1) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Vậy $f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} (x+1) = 2$ (giới hạn phải) ;

$f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} -(x+1) = -2$ (giới hạn trái).

c) $$f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{x} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x} & \text{khi } 0 \le x \le \pi \\ -\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{x} & \text{khi } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Vậy $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}.2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (giới hạn phải) ;

$f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}.x} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ (giới hạn trái).

28. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3x$. Xét $x = x_0$ bất kỳ và tìm

$$\lim_{x \to x_o} (3x^4 - 2x^2 + 3x) = 3x_o^4 - 2x_o^2 + 3x_o = f(x_o).$$

Vậy $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ hay hàm số f(x) liên tục tại điểm $x = x_o$, mà x_o bất kỳ. Vậy hàm số f(x) liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

29. a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+3) & \text{khi } -\infty < x \le 1 \\ 6 - 5x & \text{khi } 1 < x < 3 \\ x - 3 & \text{khi } 3 \le x < +\infty \end{cases}$$

Trên mỗi khoảng tương ứng hàm số liên tục vì các hàm số đó là các hàm số sơ cấp. Ta chỉ cần xét thêm tại điểm x = 1 và x = 3.

Khi x = 1 ta có : $f(1-0) = \lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{5}(2x^2+3) = 1$;

$f(1+0) = \lim\limits_{x \to 1+0} (6-5x) = 1$; $f(1) = \frac{1}{5}(2+3) = 1$.

Vậy hàm số liên tục tại điểm x = 1.

Khi x = 3 :

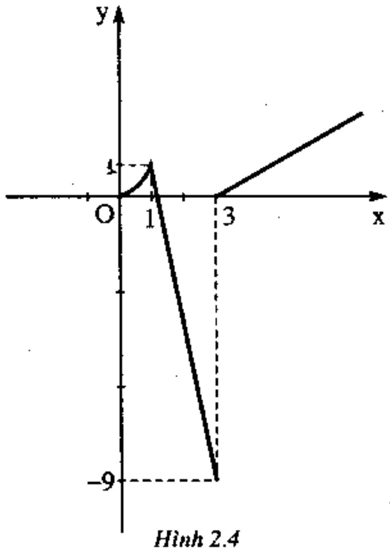
$f(3-0) = \lim\limits_{x\to 3-0}(6-5x) = -9$;

$f(3+0) = \lim\limits_{x\to 3-0}(x-3) = 0$;

$f(3-0) \neq f(3+0)$.

Vậy hàm số gián đoạn loại 1 và có bước nhảy

$\lambda = |f(3+0) - f(3-0)| = |0-(-9)| = 9.$



Hình 2.4

b) $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3} = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -1 & \text{khi } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Hàm số gián đoạn loại 1 tại $x = \dfrac{3}{2}$ vì $f\left(\dfrac{3}{2}+0\right) = 1$; $f\left(\dfrac{3}{2}-0\right) = -1$, hàm số có bước nhảy $\lambda = 2$.

30. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Với $x \neq 0$ hàm f(x) liên tục vì $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ là hàm số sơ cấp. Ta cần xét khi x = 0.

Ta đã có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. Vậy hàm số liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to \pm 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$ vì $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$.

Còn khi x = 0 thì f(0) = 0, vậy hàm liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

31. $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$ thì $f(1) = 1$; $f(a^2) = 3a^2 - 2|a|$;

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 2\ ;\ f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}.$$

32. $$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x} = 2x^2 - 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x - \frac{1}{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = 4x - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = 4.\frac{1}{4} - \frac{1}{2.\frac{1}{4}.\sqrt{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1 - 4 + 16 = 13.$$

33. Tính đạo hàm :

a) $y' = [x^3\text{arctg}x]' = x^3(\text{arctg}x)' + \text{arctg}x.(x^3)' = \dfrac{x^3}{1 + x^2} + 3x^2\text{arctg}x.$

b) $$y' = \left[x\sqrt{x}(3\ln x - 2)\right]' = \left[x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)\right]'$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}}.\frac{3}{x} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

c) $$y' = \left[\frac{\arcsin x}{x}\right]' = \frac{x.\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1 - x^2}.\arcsin x}{x^2\sqrt{1 - x^2}}.$$

d) $$y' = \left[\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right]' =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

e) $y' = [(2x^3 + 5)^4]' = 4(2x^3 + 5)^3.6x^2 = 24x^2(2x^3 + 5)^3.$

g) $y' = [\mathrm{tg}^6 x]' = 6\mathrm{tg}^5 x.\dfrac{1}{\cos^2 x} = 6(1 + \mathrm{tg}^2 x).\mathrm{tg}^5 x$.

h) $y' = [\mathrm{tg}(\ln x)]' = \dfrac{1}{\cos^2(\ln x)}.\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\left[1 + \mathrm{tg}^2(\ln x)\right].$

i) $y' = \left[\ln\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{\sin x}.$

k) $y' = \left[\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left[1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$

l) $y' = \left[\ln\left(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}\right)\right]' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}}\left[\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x + 1}} + \frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x - 1}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}}\cdot\frac{\cos\left[\sqrt{2\sin x - 1} + \sqrt{2\sin x + 1}\right]}{\sqrt{2\sin x + 1}.\sqrt{2\sin x - 1}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}.$$

m) $y' = \left[\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 + k} + \dfrac{k}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + k}\right)\right]' =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + k} + \frac{x}{2}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + k}} + \frac{k}{2}.\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + k}}\left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + k} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + k}} + \frac{k}{2}.\frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$$

$$= \frac{(x^2 + k) + (x^2 + k)}{2\sqrt{x^2 + k}} = \sqrt{x^2 + k}.$$

n) $y' = \left[\arcsin\dfrac{2x^2}{1 + x^4}\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x^2}{1 + x^4}\right)^2}}\left[\dfrac{2x^2}{1 + x^4}\right]' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^4)^2 - 4x^4}{(1+x^4)^2}}} \cdot \frac{(1+x^4)4x - 2x^2.4x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}} \cdot \frac{4x(1+x^4-2x^4)}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}.$$

o) $y' = \left[\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{3}\right]' = \frac{1}{1+\left(\frac{\ln x}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{3}{x(9+\ln^2 x)}.$

p) $y' = \left[e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{1+e^{2x}}\right]' = \left[e^x \operatorname{arctg} e^x\right]' - \left[\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right]'$

$$= e^x \operatorname{arctg} e^x + e^x . \frac{1}{1+e^{2x}} . e^x - \frac{1}{2} . \frac{1}{1+e^{2x}} . 2e^{2x}$$

$$= e^x \operatorname{arctg} e^x + \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - \frac{e^{2x}}{1+e^2 x} = e^x \operatorname{arctg} e^x .$$

q) $y' = \left[\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos^2 x \cos x + \sin x . 2\cos x \sin x}{\cos^4 x}$

$$+ \frac{1}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{\cos x . \cos x - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} = \frac{2}{\cos^3 x}.$$

34. a) $y = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} y' = 2x\ln x + x^2 . \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$

Vậy $y' = y[x(2\ln x + 1)] = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$.

b) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{tg} x . \ln(\sin x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + tgx.\frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + 1.$$

$$\text{Vậy } y' = y\left[\frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + 1\right] = (\sin x)^{tgx}\left[\frac{1}{\cos^2 x}\ln(\sin x) + 1\right].$$

c) $y = \dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}$

$$\Rightarrow \quad \ln y = 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}y' = 3.\frac{2}{2x-1} + \frac{1}{2}.\frac{3}{3x+2} - 2.\frac{5}{5x+4} - \frac{1}{3}.\frac{-1}{1-x}.$$

$$\text{Vậy } y' = \frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2.\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right].$$

d) $y = x^{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow \ln y = \dfrac{1}{\ln x}.\ln x = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}y' = 0 \Rightarrow y' = 0.$$

35. a) $y = e^{x^2} \Rightarrow y' = 2xe^{x^2}$

$$y'' = \left[2xe^{x^2}\right]' = 2e^{x^2} + 2x.2xe^{x^2} = 2e^{x^2}\left[1 + 2x^2\right].$$

b) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2} = \dfrac{1}{3}\ln(1+x^2)$

$$y' = \frac{1}{3}.\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2}{3}.\frac{x}{1+x^2}.$$

$$y'' = \left[\frac{2}{3}.\frac{x}{1+x^2}\right]' = \frac{2}{3}.\frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{3}\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

36. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$; $y' = -c_1e^{-x} - 2c_2e^{-2x}$.

$y'' = c_1e^{-x} + 4c_2e^{-2x}$. Thay vào phương trình ta được :

$$y'' + 3y' + 2y = (c_1e^{-x} + 4c_2e^{-2x}) - 3(c_1e^{-x} + 2c_2e^{-2x}) +$$
$$+ 2(c_1e^{-x} + c_2e^{-2x})$$
$$= c_1e^{-x}(1 - 3 + 2) + c_2e^{-2x}(4 - 6 + 2) = 0.$$

37. a) $y = x\ln x$.

$$y' = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1\ ;$$

$$y'' = \frac{1}{x} = x^{-1}\ ;\ y''' = (-1)x^{-2}\ ;\ y^{(4)} = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(k)} = (-1)(-2)\ \ldots\ [-(k-2)]x^{-k+1} = (-1)^{k-2}(k-2)!\ x^{-k+1}.$$

Ta chứng minh đúng với $n = k + 1$.

Thực vậy

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k-2}(k-2)!(-k+1)x^{-k}$$
$$= (-1)^{k-2}(k-2)!(-1)(k-1)x^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k} \text{ với } k \geq 1.$$

Vậy $y^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-2)!\ \dfrac{1}{x^{n-1}}$.

b) $y = \dfrac{1}{1+2x} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{x + \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^{-1}$.

$$y' = \frac{1}{2}(-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^{-2}\ ;$$

$$y'' = \frac{1}{2}(-1)(-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{2}(-1)^2.2!\left(x + \frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

Dễ dàng suy ra $y^{(n)} = \dfrac{1}{2}(-1)^n.n!\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^{-n-1}$ hay $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!2^n}{(2x+1)^{n+1}}$.

c) $y = xe^x$;

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)\ ;$$

$$y'' = e^x(1 + x) + e^x = e^x(2 + x)\ ;$$

$\Rightarrow y^{(k)} = e^x(k + x)$. Ta chứng minh đúng với $k + 1$:

$$y^{(k+1)} = e^x(k + x) + e^x = e^x[(k + 1) + x].$$

Vậy $y^{(n)} = e^x(n + x)$.

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+3}\right] = \dfrac{1}{4}\left[(x-1)^{-1} - (x+3)^{-1}\right]$

Tương tự câu b) ta được :

$$y^{(n)} = \frac{1}{4}(-1)^n.n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right].$$

38. $y = 2x^3 + 5x^2$

$$\begin{aligned}\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) &= [2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2] - [2x^3 + 5x^2]\\ &= 2(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + 10x\Delta x + 5\Delta x^2\\ &= (6x^2 + 10)\Delta x + (6x+5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3.\end{aligned}$$

Còn $dy = (6x^2 + 10x)\Delta x$; $dx = \Delta x$.

Vậy $\Delta y - dy = (6x+5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3$.

39. Xét hàm số y = arcsinx. Đặt x = 0,5 ; $\Delta x = 0{,}01$ và sử dụng công thức $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'.\Delta x$ ta được

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}.0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

40. Sử dụng công thức $S = \pi R^2$. Đặt R = 3 ; $\Delta R = 0{,}02$ ta có

$$\Delta S \approx dS = 2\pi R.\Delta R = 2\pi.3.0{,}02 = 0{,}12\pi.$$

Vậy diện tích hình tròn bán kính 3,02 m có giá trị gần đúng là

$$9\pi + 0{,}12\pi = 9{,}12\pi \approx 28{,}66\ m^2.$$

41. Sử dụng công thức $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx$:

a) $dy = \dfrac{1}{12}\left[\dfrac{x+6}{x-6}\right]\left[\dfrac{x-6}{x+6}\right]'dx = \dfrac{1}{x^2 - 36}dx$.

b) $dy = \dfrac{1}{1+e^{4x}}.2e^{2x}dx = \dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$.

c) $dy = \left[(\ln x - 1) + x.\dfrac{1}{x}\right]dx = \ln x.dx$.

d) $dy = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+4}}\left[1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right]dx = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

Chương III

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT CÁC HÀM SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Các định lý về giá trị trung bình

• *Định lý Rolle*. Nếu hàm số f(x) :

– liên tục trong khoảng đóng [a, b] ;

– khả vi tại mọi điểm trong khoảng mở (a, b) ;

– f(a) = f(b),

thì trong khoảng mở (a, b) có ít nhất một điểm c : a < c < b sao cho $f'(c) = 0$.

• *Định lý Lagrange*. Nếu hàm số f(x) :

– liên tục trong khoảng đóng [a, b],;

– khả vi tại mọi điểm trong khoảng mở (a, b),

thì trong khoảng mở (a, b) có ít nhất một điểm c : a < c < b sao cho :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Công thức này thường được viết dưới dạng :

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1.$$

• *Định lý Cauchy*. Nếu hai hàm số f(x) và g(x) :

– liên tục trong khoảng đóng [a, b] ;

– khả vi tại mọi điểm trong khoảng mở (a, b) ;

– g'(x) không triệt tiêu trong khoảng mở (a, b),

thì trong khoảng mở (a, b) có ít nhất một điểm c : a < c < b sao cho :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. Công thức Taylor

Nếu hàm số f(x) khả vi đến cấp n + 1 trong một khoảng nào đó chứa điểm x_o, thì trong khoảng ấy hàm số f(x) có thể viết dưới dạng :

$$f(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+...+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1},$$

trong đó $c = x_o + \theta(x - x_o)$, $0 < \theta < 1$.

Công thức Taylor cho phép biểu diễn gần đúng hàm số f(x) bằng đa thức $P_n(x)$:

$$f(x)\approx P_n(x)=f(x_o)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_o)+...+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-x_o)^n$$

với sai số :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_o+\theta(x-x_o))}{(n+1)!}(x-x_o)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Sai số này trong nhiều trường hợp có thể làm cho nhỏ tùy ý.

Đặc biệt, khi $x_o = 0$, công thức Taylor trở thành công thức Mac Laurin :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Dưới đây là khai triển Mac Laurin của một số hàm số sơ cấp thường dùng :

- $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

$$0<\theta<1,\ \alpha\in R,\ x\in(-1,+\infty).$$

Đặc biệt :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},\quad 0<\theta<1.$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\ 0 < \theta < 1.$$

- $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0 < \theta < 1,\ x \in R.$$

- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} +$$
$$+ \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right],\ 0 < \theta < 1,\ x \in R.$$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} +$$
$$+ \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos\left[\theta x + (2m+2)\frac{\pi}{2}\right],\ 0 < \theta < 1,\ x \in R.$$

- $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1},$$
$$0 < \theta < 1,\ -1 < x \le 1.$$

3. Quy tắc L'Hospital

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$ *và* $\frac{\infty}{\infty}$

Nếu f(x) và g(x) $\to 0$ hoặc ∞ khi $x \to a$ hoặc $x \to \infty$, và $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ có giới hạn L (hữu hạn hoặc vô hạn) khi $x \to a$ hoặc $x \to \infty$ thì :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Trường hợp $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ lại có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \to a$ hoặc $x \to \infty$ thì có thể áp dụng quy tắc L'Hospital lần nữa và nếu cần thiết, có thể áp dụng nhiều lần cho đến khi đạt được kết quả.

b) Dạng vô định $0 \times \infty$ và $\infty - \infty$

Trong trường hợp này, chuyển chúng về dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách viết tích hoặc hiệu thành thương, rồi áp dụng quy tắc L'Hospital.

c) Dạng vô định 0^0, 1^∞ và ∞^0

Vì $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ (với $f(x) > 0$) và vì tính liên tục của hàm số mũ, nên

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} g(x)\ln f(x)}$$

Vì vậy việc khử ba dạng vô định trên được đưa về khử dạng vô định $0 \times \infty$.

4. Sự tăng và giảm của hàm số

Sự tăng và giảm của hàm số $y = f(x)$ được đặc trưng bởi dấu của đạo hàm y' : nếu trong một khoảng nào đó $y' > 0$ thì hàm số tăng, còn nếu $y' < 0$ thì hàm số giảm trong khoảng ấy.

5. Cực trị của hàm số

• Ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại điểm x_o nếu ta có

$$f(x_o) \geq f(x_o + \Delta x) \quad (\text{hoặc } f(x_o) \leq f(x_o + \Delta x))$$

với $|\Delta x|$ khá bé. Giá trị cực đại, cực tiểu gọi chung là *cực trị*. Điểm tại đó hàm số đạt cực trị gọi là *điểm cực trị* của hàm số.

• Quy tắc tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ dùng đạo hàm cấp một :

1) Tính đạo hàm cấp một, tìm những điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hay không tồn tại, gọi là điểm tới hạn của hàm số.

2) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương (âm) sang âm (dương) khi x đi qua điểm tới hạn c thì c là điểm cực đại (cực tiểu). Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua điểm tới hạn c thì c không là điểm cực trị.

3) Tính giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số.

• Quy tắc tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ dùng đạo hàm cấp hai :

1) Tính đạo hàm cấp một, tìm những điểm x_o tại đó $f'(x_o) = 0$, gọi là điểm dừng.

2) Tính đạo hàm cấp hai : Nếu $f''(x_o) > 0$ thì x_o là điểm cực tiểu ; nếu $f''(x_o) < 0$ thì x_o là điểm cực đại.

3) Tính giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số.

6. Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trên đoạn [a, b]

Để tìm các giá trị này, chỉ cần tính giá trị của hàm số tại những điểm tới hạn trên đoạn [a, b] và giá trị của hàm số tại hai mút a và b. Giá trị lớn nhất (bé nhất) trong các giá trị đó chính là giá trị lớn nhất (bé nhất) của hàm số trên [a, b].

7. Sự lồi, lõm của đường cong y = f(x), điểm uốn

• Đường cong gọi là lồi (hoặc lõm) trong (a, b) nếu mọi điểm của đường cong nằm phía dưới (hoặc phía trên) mọi tiếp tuyến của nó trong khoảng ấy. Điểm phân chia phần lồi và phần lõm của đường cong liên tục và có tiếp tuyến gọi là điểm uốn.

• Quy tắc khảo sát sự lồi, lõm, tìm điểm uốn của đường cong $y = f(x)$:

1) Tính $f''(x)$, tìm những điểm c tại đó $f''(c) = 0$ hay $f''(c)$ không tồn tại.

2) Trong khoảng mà $f''(x) > 0$, đường cong lõm ; trong khoảng mà $f''(x) < 0$, đường cong lồi.

3) Khi x đi qua điểm c, nếu f'' đổi dấu thì c là điểm uốn, nếu f'' không đổi dấu thì c không là điểm uốn.

8. Tiệm cận

• Đường thẳng Δ gọi là tiệm cận của đường cong $\mathscr{C}$ nếu khoảng cách từ điểm M(x, y) trên $\mathscr{C}$ tới Δ dần tới 0 khi M chạy ra vô cực trên $\mathscr{C}$.

• Nếu $y \to \infty$ khi $x \to x_0$, đường $x = x_0$ là tiệm cận đứng.

• Nếu $y \to b$ khi $x \to \infty$, đường $y = b$ là tiệm cận ngang.

• Nếu $y \to \infty$ khi $x \to \infty$, đường cong có thể có tiệm cận xiên. Khi đó, nếu các giới hạn

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} [f(x) - kx],$$

cùng tồn tại thì y = kx + b là tiệm cận xiên đối với nhánh phải (hoặc nhánh trái).

9. Sơ đồ khảo sát hàm số y = f(x)

1) Tìm miền xác định của hàm số .

2) Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số (nếu có).

3) Tìm giao điểm của đường cong với các trục toạ độ (nếu có).

4) Tìm các đường tiệm cận của đường cong (nếu có).

5) Xét sự tăng, giảm, tìm cực trị, xét sự lồi lõm, tìm điểm uốn của đường cong (nếu có). Lập bảng biến thiên.

6) Vẽ đường cong biểu diễn.

10. Sơ đồ khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

1) Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của các hàm số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

2) Xét tính đối xứng, tính tuần hoàn (nếu có).

3) Tìm các tiệm cận của đường cong (nếu có). Nếu khi $t \to t_o$ (hoặc $t \to \pm\infty$) mà hoặc x, hoặc y, hoặc cả x và y đều dần tới ∞ thì đường cong có thể có tiệm cận.

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ (t \to \pm\infty)}} \varphi(t) = a, \quad \lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ (t \to \pm\infty)}} \psi(t) = \pm\infty$, thì x = a là tiệm cận đứng.

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ (t \to \pm\infty)}} \varphi(t) = \pm\infty, \quad \lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ (t \to \pm\infty)}} \psi(t) = b$, thì y = b là tiệm cận ngang.

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ (t \to \pm\infty)}} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k, \quad \lim\limits_{\substack{t \to t_o \\ (t \to \pm\infty)}} [\psi(t) - k\varphi(t)] = b$ thì y = kx + b là tiệm cận xiên.

4) Tính $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, xét dấu của chúng, lập bảng biến thiên gồm các dòng t, $\varphi'(t)$, $\varphi(t)$, $\psi'(t)$, $\psi(t)$.

5) Vẽ đường cong. Để vẽ chính xác hơn, ta tìm các điểm đặc biệt như giao điểm của đường cong với các trục toạ độ, tiếp tuyến của đường cong tại các điểm ấy. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm ứng với tham số t được tính bởi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Nếu không quá phức tạp, hãy tính đạo hàm cấp hai của y đối với x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

để xét tính lồi lõm và tìm điểm uốn của đường cong.

11. Sơ đồ khảo sát và vẽ đường cong $r = f(\varphi)$ trong hệ toạ độ cực

1) Tìm miền xác định của hàm số $r = f(\varphi)$.

2) Xét tính đối xứng, tuần hoàn (nếu có). Nếu hàm số $f(\varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ ω thì chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong một khoảng có độ dài ω. Ta nhận được toàn bộ đường cong từ phần đường cong đã vẽ bằng những phép quay quanh gốc O với các góc quay ω, 2ω,... Nếu $f(\varphi)$ là hàm số chẵn thì đường cong nhận trục cực làm trục đối xứng. Nếu $f(\varphi)$ là hàm số lẻ thì đường cong nhận đường thẳng đi qua gốc, thẳng góc với trục cực làm trục đối xứng.

3) Tính $r' = f'(\varphi)$, xét dấu của r' để xác định các khoảng tăng, giảm của r theo φ.

4) Tính $\operatorname{tg}V = \dfrac{r}{r'}$ tại các điểm đặc biệt.

5) Lập bảng biến thiên.

6) Vẽ đường cong.

B – ĐỀ BÀI

1. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = x - x^3$ thỏa mãn định lý Rolle trên các khoảng $-1 \le x \le 0$ và $0 \le x \le 1$. Hãy tìm các giá trị c tương ứng.

2. Chứng tỏ rằng giữa hai nghiệm của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có một nghiệm của đạo hàm $f'(x)$.

3. Hàm số $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ nhận hai giá trị bằng nhau $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$ tại hai mút của khoảng đóng [0, 4]. Hỏi hàm số trên có thỏa mãn định lý Rolle trong khoảng đóng [0, 4] không ?

4. Chứng tỏ rằng hàm số $y = \ln x$ thỏa mãn định lý Lagrange trong khoảng đóng [1, e], sau đó tìm giá trị c.

5. Dùng công thức Lagrange cho hàm số lnx để chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

6. Dùng công thức Lagrange, tính gần đúng :

a) arcsin0,54 ; b) $\log_{10}11$.

7. Viết công thức Cauchy và tìm giá trị c đối với các hàm số :

a) sinx và cosx trong khoảng đóng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

b) x^2 và $\sqrt{x}$ trong khoảng đóng [1, 4].

8. Cho $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$, tìm ba số hạng đầu trong khai triển Taylor của f(x) ở lân cận $x_o = 1$, áp dụng để tính gần đúng f(1,005).

9. Cho f(x) là một đa thức bậc 4 ; biết $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$ và $f^{(4)}(2) = 24$; hãy tính : $f(-1)$, $f'(0)$ và $f''(1)$.

10. Viết công thức Taylor cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_o = -1$.

11. Dùng công thức gần đúng $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, tính $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ và ước lượng sai số.

12. Tính $\sin 49^o$ với độ chính xác 10^{-6}.

13. Dùng quy tắc L'Hospital, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - x}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2arctgx}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{tgx}{tg3x}$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x\ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)tg\dfrac{\pi x}{2}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x\ln(x - 1)$;

i) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x - 1}\right)$;

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sin 4x)^{cotgx}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} (cotgx)^{\frac{1}{\ln x}}$.

14. Chứng tỏ rằng các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$

không thể tính bằng quy tắc L'Hospital. Hãy tìm các giới hạn ấy bằng phương pháp khác.

15. Xét sự tăng, giảm của các hàm số :

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{(x - 1)^2}$.

c) $y = \ln|x|$.

16. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $(1+x)^n > 1 + nx$ khi $x > 0$ và $n > 1$;

b) $x > \ln(1+x)$ khi $x > 0$.

17. Tìm cực trị của các hàm số :

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; b) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

c) $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{x+2}$; d) $y = x^3e^{-x}$;

e) $y = x^2 + \sqrt{x^5}$; f) $y = \sin^2 x$.

g) $y = e^x + 2\cos x + e^{-x}$.

18. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số :

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ $(-4 \le x \le 4)$;

b) $y = x^2\ln x$ $(1 \le x \le e)$;

c) $y = 2\sin x + \sin 2x$ $\left(0 \le x \le \frac{3\pi}{2}\right)$;

d) $y = \mathrm{arctg}x^2$ trong toàn bộ miền xác định.

19. Cho hình nón bán kính đáy R, chiều cao H. Tìm bán kính r, chiều cao h của hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón.

20. Xét sự lồi, lõm và tìm điểm uốn của các đường cong sau :

a) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; b) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

c) $y = \frac{1}{(x+1)^3}$; d) $y = 2 - |x^5 - 1|$.

21. Tìm các tiệm cận của những đường cong sau :

a) $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$; b) $y = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$;

c) $y = xe^x$; d) $y = x\mathrm{arccotg}x$; e) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

22. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$; b) $y = \dfrac{4x + 4}{x^2} - 2$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$; d) $y = x + 2\text{arccotg}x$;

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

23. Cho $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$, tính y'_x tại $t = 1$.

24. Cho $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$, tính y''_{x^2} tại $t = 0$.

25. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho theo tham số :

a) $\begin{cases} x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ y = t\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$

26. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho trong hệ toạ độ cực :

a) $r = a\sin 3\varphi$ $(a > 0)$; b) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ $(a > 0)$.

C – BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. Hàm số f(x) liên tục và khả vi tại mọi điểm x thuộc R, và : $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Vậy định lý Rolle áp dụng được cho các khoảng $-1 \le x \le 0$ và $0 \le x \le 1$. Ta có :

$$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \text{ khi } x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Vậy : $$-1 < c_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} < 0 \text{ và } 0 < c_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} < 1.$$

2. Dễ thấy rằng phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có hai nghiệm thực $a = 1$, $b = 3$. Nghiệm của phương trình : $f'(x) = 2x - 4 = 0$ là $c = 2$. Vậy giữa hai không điểm 1 và 3 của hàm số f(x) đúng là có một không điểm 2 của đạo hàm $f'(x)$, điều đó hoàn toàn phù hợp với định lý Rolle.

3. Hàm số $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ liên tục trên [0, 4] và $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$, nhưng đạo hàm :

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

tại điểm $x = 2$ không tồn tại. Vậy tại điểm $x = 2 \in (0, 4)$ hàm số f(x) không thỏa mãn giả thiết về khả vi của định lý Rolle.

4. Hàm số $y = \ln x$ xác định và liên tục với mọi $x > 0$, nên cũng liên tục trên [1, e]. Đạo hàm $y' = \frac{1}{x}$ xác định với mọi $x > 0$, nên $y = \ln x$ khả vi tại mọi điểm trong khoảng mở (1, e). Vậy hàm số đã cho thỏa mãn định lý Lagrange, ta có :

$$\ln e - \ln 1 = \frac{1}{c}(e - 1) \text{ với } 1 < c < e.$$

Vì : $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$, nên : $c = e - 1$.

5. Nếu $0 < b < a$, thì có thể áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $f(x) = \ln x$ trên [b, a]. Ta có :

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c} \text{ với } b < c < a.$$

Vì : $0 < b < c < a$ nên khi nghịch đảo thì bất đẳng thức đổi chiều, ta có :

$$\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c} < \frac{1}{b}.$$

Chú ý rằng $a - b > 0$ và $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$, nên :

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

Trường hợp $0 < a < b$, chứng minh tương tự (sinh viên nên tự chứng minh trường hợp này).

6. a) Ta có : $f(x) = \arcsin x$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Chọn $x_o = 0,50$; $\Delta x = 0,04$; $\theta_1 = \dfrac{1}{2}$, ta nhận được :

$$\arcsin(0,50 + 0,04) \approx \arcsin 0,50 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,52)^2}}.0,04$$

$$\approx 0,523 + 0,046 \approx 0,57.$$

b) Ta có : $f(x) = \log_{10}x$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10}$. Chọn $x_o = 10$, $\Delta x = 1$, $\theta_1 = \dfrac{1}{2}$, ta nhận được :

$$\log_{10}(10+1) \approx \log_{10}10 + \frac{1}{10+0,5}\cdot\frac{1}{\ln 10}.1 \approx 1,0413.$$

7. a) Hai hàm số $f(x) = \cos x$ và $g(x) = \sin x$ liên tục trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, khả vi trong khoảng mở $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $g'(x) = \cos x$ không triệt tiêu trong khoảng mở $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, do đó áp dụng được định lý Cauchy, ta có :

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0}{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0} = \frac{-\sin c}{\cos c}.$$

Suy ra : $\text{tg}c = 1$ và $c = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = \sqrt{x}$ liên tục trên $[1, 4]$, khả vi trong khoảng mở $(1, 4)$ và $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ không triệt tiêu trong khoảng mở $(1, 4)$, do đó theo định lý Cauchy, ta có :

$$\frac{4^2 - 1^2}{\sqrt{4} - \sqrt{1}} = \frac{2c}{\frac{1}{2\sqrt{c}}} = 4c\sqrt{c}.$$

Suy ra : $$c = \sqrt[3]{\left(\frac{15}{4}\right)^2} \approx 2,4.$$

8. Ta có : $f(1) = 1$,

$$f'(x) = 80x^{79} - 40x^{39} + 20x^{19},\ f'(1) = 60.$$

$$f''(x) = 80.79x^{78} - 40.39x^{38} + 20.19x^{18},\ f''(1) = 5140.$$

Vậy : $$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots =$$

$$= 1 + 60(x-1) + 2570(x-1)^2 + \ldots, \text{ và :}$$

$$f(1{,}005) \approx 1 + 60.0{,}005 + 2570.(0{,}005)^2,$$

$$f(1{,}005) \approx 1{,}36425.$$

9. Viết khai triển Taylor của f(x) ở lân cận $x_o = 2$, ta có :

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4.$$

Dựa vào đầu bài, ta có :

$$f(x) = -1 + 0.(x-2) + \frac{2}{2}(x-2)^2 - \frac{12}{6}(x-2)^3 + \frac{24}{24}(x-2)^4\ ;$$

$$f(x) = -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

Do đó :

$$f(-1) = -1 + (-3)^2 - 2(-3)^3 + (-3)^4 = 143.$$

$$f'(x) = 2(x-2) - 6(x-2)^2 + 4(x-2)^3.$$

$$f'(0) = -4 - 24 - 4.8 = -60.$$

$$f''(x) = 2 - 12(x-2) + 12(x-2)^2.$$

$$f''(1) = 2 - 12(-1) + 12(-1)^2 = 26.$$

10. Ta có : $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $f(-1) = -1$, $f'(x) = (-1)x^{-2}$, $f'(-1) = -1$,

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2.2!.x^{-3},\ f''(-1) = (-1).2!$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = (-1)^3.3!x^{-4},\ f'''(-1) = (-1).3!.$$

Bằng phép quy nạp, dễ dàng chứng minh rằng : $f^{(n)}(x) = (-1)^n.n!\frac{1}{x^{n+1}}$ và :

$$f^{(n)}(-1) = (-1)^n . n! \frac{1}{(-1)^{n+1}} = -n! \Rightarrow \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} = -1 .$$

Vậy :

$$\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - ... - (x+1)^n + (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{(-1+\theta(x+1))^{n+2}},$$

$0 < \theta < 1$.

Có thể giải bài này bằng cách viết : $\frac{1}{x} = \frac{-1}{1-(x+1)}$, rồi dùng khai triển Mac Laurin của $\frac{1}{1-t}$ với $t = x + 1$.

11. Ta có : $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{32} = 0,78125$.

Sai số $|R_2| = \left|\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 e^{-\frac{\theta}{4}}\right| < \frac{1}{6}.\frac{1}{64}e^o = \frac{1}{384} \approx 0,00260$ (vì $0 < \theta < 1$)

Vậy nên lấy $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0,78$.

12. Để tính $\sin 49^o$, ta viết khai triển Taylor của sinx ở lân cận $x_o = a$.

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!}\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!}\sin\left(a + \frac{2\pi}{2}\right) + ... +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!}\sin\left(a + n\frac{\pi}{2}\right) + R_n ,$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \ 0 < \theta < 1,$$

$$|R_n| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ vì } |\sin\alpha| \le 1.$$

Người ta chứng minh được rằng khi $n \to +\infty$ và với giá trị của x bất kỳ, đại lượng $\frac{x^n}{n!}$ tiến đến không. Suy ra với giá trị của x và a bất kỳ, ta có :

$\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$. Do đó, để đạt độ chính xác yêu cầu, thường chỉ cần lấy một vài số hạng đầu trong khai triển trên của sinx nếu |x – a| bé.

Đặt : $x = \frac{\pi}{180}.49$, $a = \frac{\pi}{180}.45$, ta có :

$$x - a = \frac{\pi}{180}(49 - 45) = \frac{\pi}{45},$$

$$\sin 49^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{1!45} - \frac{\pi^2}{2!45^2} - \frac{\pi^3}{3!45^3} + ... \pm \frac{\pi^n}{n!45^n}\right) + R_n,$$

$$|R_n| \le \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!45^{n+1}}.$$

Để xác định số số hạng đầu cần lấy để đạt độ chính xác 10^{-6}, ta đánh giá lần lượt các R_n :

$$|R_1| \le \frac{\pi^2}{2.45^2} < 0{,}003,$$

$$|R_2| \le \frac{\pi^3}{3.45^3} < 0{,}00006,$$

$$|R_3| \le \frac{\pi^4}{4!45^4} < 0{,}0000009 < 10^{-6}.$$

Vậy, để đạt độ chính xác 10^{-6}, chỉ cần lấy bốn số hạng đầu :

$$\sin 49^o \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{45} - \frac{\pi^2}{2.45^2} - \frac{\pi^3}{6.45^3}\right) \approx 0{,}754709$$

(giá trị của π, $\sqrt{2}$ và kết quả của các phép tính trung gian đều lấy với bảy số lẻ sau dấu phẩy).

Tất nhiên, có thể tính sin49^o theo khai triển Mac Laurin của sinx, nhưng để đạt độ chính xác 10^{-6}, cần lấy rất nhiều số hạng đầu trong khai triển ấy (sinh viên nên tự kiểm tra nhận xét này).

13. a) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x.3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

(Ở đây, ta đã thay $\sin^2 x \sim x^2$ khi $x \to 0$, nhờ đó ta không phải áp dụng quy tắc L'Hospital hai lần nữa để nhận được kết quả. Nên chú ý vận dụng kết hợp như trên để nhanh chóng đi đến kết quả).

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x) + x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{1 - \dfrac{1}{e-x}} = \frac{2e}{e-1}.$$

c) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\pi - 2arctgx}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-\dfrac{2}{1+x^2}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}.\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2(x^2+x)}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

(vì $2(x^2+x) \sim 2x^2$ và $x^2 + 1 \sim x^2$ khi $x \to +\infty$).

d) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sin 2x}.2\cos 2x}{\dfrac{1}{\sin x}.\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos 2x}{\cos x}.\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} = 1.$$

e) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \cdot \frac{-2.3\cos 3x \sin 3x}{-2\cos x \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x}$$

$$= -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = 3.$$

f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} = \lim\limits_{x \to a} \cos x \cdot \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$

$$= \cos a \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{e^x}{e^x - e^a}} = \cos a \lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{e^x(x-a)}$$

$$= \cos a \lim_{x \to a} \frac{e^x}{e^x(x-a) + e^x} = \cos a.$$

(Nếu không muốn dùng quy tắc L'Hospital, có thể tính $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{e^x(x-a)}$ như sau :

$$\lim_{x \to a} \frac{e^x - e^a}{e^x(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{e^a(e^{x-a} - 1)}{e^x(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{e^a}{e^x} \cdot \lim_{x \to a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a}$$

$$= \frac{e^a}{e^a} \cdot 1 = 1 \text{ vì } e^{x-a} - 1 \sim x - a \text{ khi } x \to a).$$

g) $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (dạng $0 \times \infty$).

Ta có : $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1-x)\sin\dfrac{\pi x}{2}}{\cos\dfrac{\pi x}{2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sin\dfrac{\pi x}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

h) $\lim\limits_{x\to1} \ln x \ln(x-1)$ (dạng $0 \times \infty$).

Ta có $\lim\limits_{x\to1} \ln x \ln(x-1) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}.\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{-x\ln^2 x}{x-1}$

$$= \lim_{x\to1}(-x).\lim_{x\to1}\frac{\ln^2 x}{x-1} = -\lim_{x\to1}\frac{2\ln x.\dfrac{1}{x}}{1} = 0.$$

(có thể tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln^2 x}{x-1}$ bằng cách khác như sau :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln^2 x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\ln x.\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln((x-1)+1)}{x-1} = 0$ (vì $\ln(1+(x-1)) \sim x-1$ khi $x \to 1$).

i) $\lim\limits_{x\to3} \lim\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$ (dạng $\infty - \infty$).

Ta có : $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right) = \lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{(x-3)(x+2)}\right)$

$$= \lim_{x\to3}\frac{x+2-5}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{5}.$$

k) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right)$ (dạng $\infty - \infty$).

Ta có : $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\ln x}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}}$

$$= -\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} = -\lim_{x\to1}\frac{1+\ln x}{2+\ln x} = -\frac{1}{2}.$$

l) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin 4x)^{\text{cotgx}}$ (dạng 1^∞).

Đặt : $y = (1 + \sin 4x)^{\cot gx}$. Lấy ln hai vế, có :

$\ln y = \cot gx \ln(1 + \sin 4x)$;

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \cot gx \ln(1 + \sin 4x) \text{ (dạng } 0 \times \infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+\sin 4x)}{\operatorname{tg}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 4.$$

Suy ra : $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot gx} = e^4$.

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ (dạng 0^0).

Đặt : $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$, ta có : $\ln y = \dfrac{1}{\ln(e^x - 1)}.\ln x$;

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} \quad \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{e^x - 1}.e^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{xe^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = 1.$$

(cũng có thể tính như sau : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}.\dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}.\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x} = 1$

vì $e^x - 1 \sim x$ khi $x \to 0^+$).

Suy ra : $$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^1 = e.$$

n) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ (dạng 1^∞).

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x + x)}$ (dạng $0 \times \infty$).

Vì : $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^x + x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + x)}{x} \quad \left(\text{dạng } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x + x}.(e^x + 1)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{2}{1} = 2\text{, nên :}$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

o) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ (dạng 1^∞).

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x}$ (dạng $0 \times \infty$).

Vì : $$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x = \lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2} \quad \left(\text{dạng } \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\cos 2x}(-\sin 2x).2}{2x}$$

$$= -6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = -6 \text{ (vì } \sin 2x \sim 2x \text{ khi } x \to 0).$$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$.

p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}$ (dạng ∞^0).

Ta có : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\ln\mathrm{tg}x}$ (dạng $0 \times \infty$)

$$\text{Vì : } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\ln tgx = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln tgx}{(2x-\pi)^{-1}} \quad \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-2(2x-\pi)^{-2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = 0, \text{ nên : } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi} = e^0 = 1.$$

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$ (dạng ∞^0).

$$\text{Ta có : } \lim_{x\to 0^+} (\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\ln\text{cotg}x} \quad \left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

$$\text{Vì : } \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\text{cotg}x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\text{cotg}x\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\cos x}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} = -1 \text{ (vì } \sin x \sim x \text{ khi } x\to 0\text{), nên :}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}.$$

14. a) Dùng quy tắc L'Hospital, ta có :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \quad \left(\text{dạng } \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

giới hạn bên phải không tồn tại vì khi $x \to 0$, $\cos\frac{1}{x}$ dao động giữa -1 và 1. Tuy nhiên, nếu kết luận giới hạn bên trái cũng không tồn tại là sai, vì ta có thể tìm giới hạn ấy bằng cách khác như sau :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1.0=0$$

(vì $\sin x \sim x$ và $\sin\frac{1}{x}$ bị chặn khi $x \to 0$).

b) Nếu áp dụng quy tắc L'Hospital, ta có :

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}\left(\text{dạng } \frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ không tồn tại vì khi $x \to \infty$, cosx dao động giữa –1 và 1, nhưng nếu dùng cách khác, ta nhận được :

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1$ (vì sinx bị chặn nên $\frac{\sin x}{x} \to 0$ khi $x \to \infty$).

15. a) $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$,

$y' = 0$ khi $x = -1$, $x = 0$ và $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho giảm trong khoảng $(-\infty, -1)$ và $(0, 2)$, tăng trong khoảng $(-1, 0)$ và $(2, +\infty)$.

b) $y'=\frac{(x-1)^2.2x-(x^2+1)2(x-1)}{(x-1)^4}=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}$

$y' = 0$ khi $x = -1$ và y' không tồn tại khi $x = 1$.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$0{,}5$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Vậy hàm số đã cho giảm trong khoảng $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$, tăng trong khoảng $(-1, 1)$.

c) Hàm số $y = \ln|x|$ xác định với mọi $x \in R$, trừ điểm $x = 0$. Ta có :

$$y' = (\ln|x|)' = \frac{|x|'}{|x|} = \pm\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x},$$

$$y' > 0 \text{ khi } x > 0 \text{ ; } y' < 0 \text{ khi } x < 0.$$

Vậy hàm số đã cho giảm trong khoảng $(-\infty, 0)$, tăng trong khoảng $(0, +\infty)$.

16. a) Xét hàm số : $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx)$.

Ta có : $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n = n[(1 + x)^{n-1} - 1]$.

Vì $x > 0$ và $n - 1 > 0$, ta có $(1 + x)^{n-1} > 1$, vậy $f'(x) > 0$ và hàm số $f(x)$ tăng trong khoảng $[0, +\infty)$. Đặc biệt, $f(0) < f(x)$ khi $0 < x$. Nhưng $f(0) = 0$, nên :

$$0 < (1 + x)^n - (1 + nx), \text{ và :}$$

$$(1 + x)^n > 1 + nx \text{ khi } x > 0, n > 1.$$

b) Có thể giải bằng hai cách :

• *Cách 1.* Xét hàm số $f(x) = x - \ln(1 + x)$. Ta có :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x}.$$

Với $x > 0$ thì $f'(x) > 0$, do đó $f(x)$ tăng trong khoảng $[0, +\infty)$.

Đặc biệt, $f(0) = 0 < f(x)$ khi $0 < x$, nên :

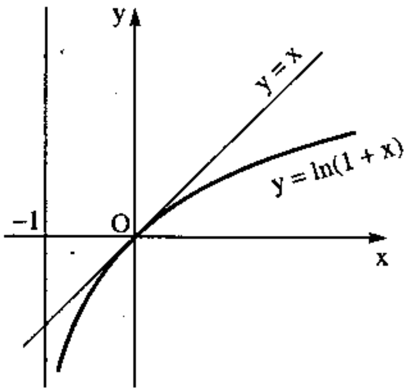
$$0 < x - \ln(1 + x).$$

Vậy đúng là $x > \ln(1 + x)$ khi $x > 0$.

• *Cách 2*. Xét hai hàm số : $y = \ln(1 + x)$ và $y = x$.

Ta có : $y' = \dfrac{1}{1 + x}$, $y'' = \dfrac{-1}{(1 + x)^2} < 0$.

Suy ra, đường cong $y = \ln(1 + x)$ luôn lồi (khi $x > -1$), do đó đường cong luôn nằm dưới mọi tiếp tuyến của nó. Ta thấy đường thẳng $y = x$ chính là tiếp tuyến với đường cong $y = \ln(1 + x)$ tại điểm $O(0, 0)$, vậy tiếp tuyến $y = x$ phải nằm trên đường cong $y = \ln(1 + x)$, và bất đẳng thức $x > \ln(1 + x)$ đúng khi $x > 0$ (hình 3.1).



Hình 3.1

17. a) Ta có : $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$.

$y' = 0$ khi $x = 1$, nhưng tại điểm này không có cực trị (khi đi qua điểm này đạo hàm không đổi dấu).

b) Miền xác định của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$ là đoạn $[-1, 1]$.

$$y' = \sqrt{1 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$y' = 0$ khi $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và không tồn tại khi $x = \pm1$. Các điểm $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là những điểm tới hạn, vì chúng nằm bên trong miền xác định của hàm số y. Còn các điểm $x = \pm1$ không phải là những điểm tới hạn, vì chúng không nằm bên trong miền xác định của hàm số y mà lại nằm trên biên.

Ta có bảng biến thiên :

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
y'	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖
y	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Suy ra : $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là điểm cực tiểu và $y_{min} = y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$;

$x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là điểm cực đại và $y_{max} = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$.

c) Miền xác định của hàm số $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{1}{x+2}$ là các khoảng $(-\infty, -2)$ và $(-2, +\infty)$. Ta có

$$y' = \frac{(x+2)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{(x+2)^2} = \frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}\cdot(x+2)^2}.$$

$y' = 0$ khi $x = 4$ và không tồn tại khi $x = 0$, $x = -2$.

Các điểm $x = 0$ và $x = 4$ là những điểm tới hạn, vì chúng nằm bên trong miền xác định của hàm số y. Còn điểm $x = -2$ không phải là điểm tới hạn, vì tại $x = -2$ hàm số y không xác định, do đó không liên tục.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$	↘	0

Suy ra : $x = 0$ là điểm cực tiểu và $y_{min} = y(0) = 0$; $x = 4$ là điểm cực đại và $y_{max} = y(4) = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

d) $y' = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2e^{-x}(3 - x)$.

$y' = 0$ khi $x = 0$ và $x = 3$, đó là những điểm dừng. Vì hàm số $y = x^3e^{-x}$ có đạo hàm cấp hai liên tục tại mọi điểm, nên để tìm điểm cực trị ta dùng đạo hàm cấp hai. :

$$y'' = 2xe^{-x}(3 - x) - x^2e^{-x}(3 - x) - x^2e^{-x} = xe^{-x}(x^2 - 6x + 6)\ ;$$

$$y''(0) = 0,\ y''(3) = -9e^{-3}.$$

Tại điểm $x = 3$, $y'' < 0$, vậy $x = 3$ là điểm cực đại của hàm số và $y_{max} = y(3) = 27e^{-3}$.

Tại điểm $x = 0$, $y'' = 0$ nên dùng đạo hàm cấp hai không được. Ta phải xét dấu của y' tại lân cận điểm $x = 0$. Dễ thấy rằng khi qua điểm $x = 0$, y' không đổi dấu, vậy tại $x = 0$ hàm số không đạt cực trị (sinh viên nên tự xét cực trị tại điểm $x = 0$ bằng cách dùng đạo hàm cấp cao).

e) Miền xác định của hàm số $y = x^2 + \sqrt{x^5}$ là $[0, +\infty)$.

$$y' = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},$$

$$y'(0 + 0) = 0.$$

Điểm $x = 0$ nằm trên biên của miền xác định nên không phải là điểm tới hạn, vậy hàm số đã cho không có cực trị.

f) $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$,

$y' = 0$ khi $x_k = k\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Để tìm điểm cực trị, ta dùng đạo hàm cấp hai

$$y'' = 2\cos 2x,\ y''(x_k) = 2\cos k\pi.$$

Do đó, khi k chẵn, $y''(x_k) = 2 > 0$, điểm x_k là điểm cực tiểu và $y_{min} = 0$; khi k lẻ, $y''(x_k) = -2 < 0$, điểm x_k là điểm cực đại và $y_{max} = 1$.

g) $y' = e^x - 2\sin x - e^{-x}$.

$e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0$, suy ra $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $y' = 0$.

$$y'' = e^x - 2\cos x + e^{-x},\quad y''(0) = 0.$$

$$y''' = e^x + 2\sin x - e^{-x},\quad y'''(0) = 0.$$

$$y'''' = e^x + 2\cos x + e^{-x},\ y''''(0) = 4 > 0.$$

Vậy điểm $x = 0$ là điểm cực tiểu và $y_{min} = 4$.

Chú ý. Để tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, luôn có thể dùng đạo hàm cấp một. Còn dùng đạo hàm cấp hai, phải nhớ những hạn chế sau :

• Chỉ những điểm tới hạn là điểm dừng (điểm tại đó $f'(x) = 0$) mới dùng đạo hàm cấp hai để xét điểm cực trị.

• Hàm số $y = f(x)$ phải khả vi hai lần tại điểm dừng và tại lân cận điểm đó.

• Nếu tại điểm dừng, đạo hàm cấp hai bằng không thì phải dùng đạo hàm cấp một hoặc đạo hàm cấp cao (nếu có) để xét điểm cực trị.

18. a) Tính giá trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ tại các điểm tới hạn. Ta có :

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \text{ khi } x = -1 \text{ và } x = 3\ ;$$

$$y(-1) = 40,\ y(3) = 8.$$

Tính giá trị của hàm số y tại hai mút của khoảng kín $[-4, 4]$, ta có :

$$y(-4) = -41,\ \ y(4) = 15.$$

So sánh các giá trị trên, tìm được giá trị lớn nhất của hàm số y trong khoảng đóng $[-4, 4]$ bằng 40, và đạt được tại điểm tới hạn $x = -1$; còn giá trị bé nhất bằng -41, và đạt được tại mút trái của khoảng : $x = -4$.

b) $y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(1 + 2\ln x)$,

$$y' = 0 \text{ khi } x = 0 \text{ và } x = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Điểm $x = 0$ nằm ngoài miền xác định của hàm số đã cho (miền xác định là $(0, +\infty)$). Điểm $x = e^{-\frac{1}{2}}$ nằm ngoài khoảng đóng $[1, e]$. Vậy bên trong khoảng đóng $[1, e]$ không có điểm tới hạn.

Tính giá trị hàm số tại hai mút của khoảng đóng $[1, e]$, ta có : $y(1) = 0$, $y(e) = e^2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y đạt được tại mút phải của khoảng : $y(e) = e^2$, giá trị bé nhất đạt được tại mút trái của khoảng : $y(1) = 0$.

c) $y' = 2\cos x + 2\cos 2x = 2.2\cos\dfrac{3}{2}x\cos\dfrac{1}{2}x$.

$$y' = 0 \text{ khi } \cos\frac{3x}{2} = 0 \text{ và } \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Các nghiệm của phương trình đầu là : $x_k = \frac{\pi}{3}(2k+1)$, các nghiệm của phương trình thứ hai là : $x_k = \pi(2k+1)$ với $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Trong các nghiệm ấy, chỉ có hai điểm tới hạn $x_1 = \frac{\pi}{3}$ và $x_2 = \pi$ nằm bên trong khoảng đóng $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ta có :

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y(\pi) = 0.$$

Tính giá trị hàm số tại hai mút của khoảng đóng $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, ta có :

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2.$$

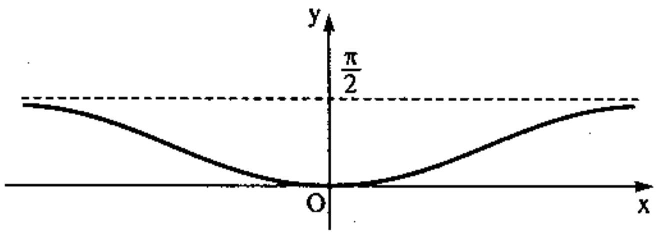
Vậy giá trị lớn nhất của hàm số y là : $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; giá trị bé nhất của hàm số y là : $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

d) $y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$, $y' = 0$ khi $x = 0$.

Điểm $x = 0$ là điểm tới hạn duy nhất của hàm số y trên toàn bộ miền xác định $(-\infty, \infty)$. Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

Suy ra giá trị bé nhất của hàm số đã cho đạt được tại điểm tới hạn duy nhất $x = 0$: $y(0) = 0$. Hàm số không có giá trị lớn nhất vì khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to \frac{\pi}{2}$ (hình 3.2).



Hình 3.2

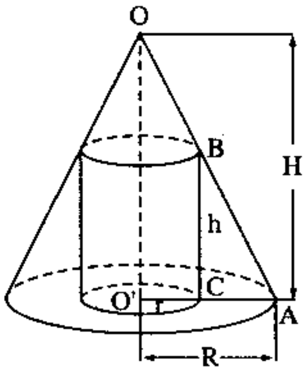
19. Gọi V là thể tích của hình tròn nội tiếp trong hình nón, ta có :

$$V = \pi r^2 h.$$

V là hàm số của hai biến số r và h. Song do hai tam giác ABC và AOO' đồng dạng, ta có :

$$\frac{h}{H} = \frac{R - r}{R}.$$

Suy ra : $h = \frac{H}{R}(R - r)$ và $V = \pi r^2 \frac{H}{R}(R - r)$ là hàm số của một biến số r. Dễ thấy rằng : $0 \le r \le R$ (hình 3.3).



Hình 3.3

Bài toán đã cho có thể phát biểu lại như sau : Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$V(r) = \frac{\pi H}{R}(R - r)r^2 \text{ trong khoảng đóng } [0, R].$$

Ta có : $$V'(r) = \frac{\pi H}{R}(2Rr - 3r^2),$$

$V'(r) = 0$ khi $r = 0$ và $r = \frac{2}{3}R$, trong đó điểm $r = 0$ không phải là điểm tới hạn vì nó nằm tại mút trái của khoảng đóng.

Tính giá trị hàm số V(r) tại $r = \frac{2}{3}R$ và tại hai mút $r = 0$, $r = R$, nhận được :

$$V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H, \ V(0) = V(R) = 0.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số V(r) là :

$$V\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

Tóm lại, hình trụ có thể tích lớn nhất, nội tiếp trong hình nón, có bán kính r và chiều cao h như sau :

$$r = \frac{2}{3}R, \ h = \frac{H}{R}\left(R - \frac{2}{3}R\right) = \frac{H}{3}.$$

20. a) $y' = 15x^4 - 20x^3$, $y'' = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$,

$y'' = 0$ khi $x = 0$ và $x = 1$.

Xét dấu của y" trong từng khoảng bằng cách lập bảng sau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y''		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		lồi		lồi	điểm uốn	lõm	

Vậy đường cong lồi trong khoảng $(-\infty, 1)$, lõm trong khoảng $(1, +\infty)$. Điểm $(1, 2)$ là điểm uốn của đường cong.

b) $y' = -\dfrac{7}{5}(x + 2)^{\frac{2}{5}}$.

$$y'' = -\frac{14}{25}(x + 2)^{-\frac{3}{5}} = -\frac{14}{25\sqrt[5]{(x + 2)^3}},$$

y" không tồn tại khi $x = -2$. Lập bảng xét dấu của y", ta có :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y''		$+$	$\|$	$-$	
y		lõm	điểm uốn	lồi	

Vậy đường cong lõm trong khoảng $(-\infty, -2)$, lồi trong khoảng $(-2, +\infty)$. Điểm $(-2, 3)$ là điểm uốn của đường cong.

c) $y' = \dfrac{-3}{(x + 1)^4}$, $y'' = \dfrac{12}{(x + 1)^5}$.

y', y" không tồn tại khi $x = -1$. Song $x = -1$ không thể là hoành độ của điểm uốn, vì tại điểm ấy đường cong gián đoạn. Khi $x < -1$, $y'' < 0$; khi $x > -1$, $y'' > 0$. Vậy đường cong lồi trong khoảng $(-\infty, -1)$, lõm trong khoảng $(-1, +\infty)$.

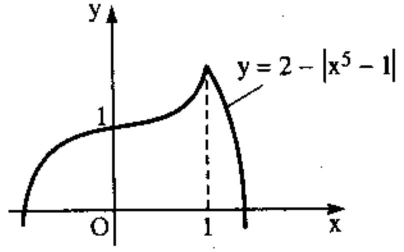
d) $y' = \pm 5x^4$, $y'' = \pm 20x^3$: dấu + ứng với những giá trị x nằm trong khoảng $(-\infty, 1)$, ở đó $x^5 - 1 < 0$; dấu − ứng với những giá trị x nằm trong khoảng $(1, +\infty)$, ở đó $x^5 - 1 > 0$.

y', y'' không tồn tại khi x = 1, y'' = 0 khi x = 0.

Xét dấu của y'' trong từng khoảng bằng cách lập bảng sau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y''		−	0	+	$\Vert$	−	
y		lồi	điểm uốn	lõm		lồi	

Vậy đường cong lồi trong các khoảng $(-\infty, 0)$ và $(1, +\infty)$, lõm trong khoảng (0, 1). Điểm (0, 1) là điểm uốn của đường cong, điểm (1, 2) không là điểm uốn của đường cong vì đường cong không có tiếp tuyến tại điểm (1, 2) (hình 3.4).



Hình 3.4

21. a) Vì $y \to \infty$ khi $x \to 1$ và $x \to 3$ nên những đường thẳng x = 1 và x = 3 là những tiệm cận đứng của đường cong.

Dễ thấy rằng $y \to 0$ khi $x \to \pm\infty$, vậy đường thẳng y = 0 là tiệm cận ngang của đường cong.

b) Hàm số $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ xác định khi $x < -\dfrac{1}{e}$ và khi $x > 0$. Khi $x \to -\dfrac{1}{e}$ thì $y \to \infty$, do đó đường thẳng $x = -\dfrac{1}{e}$ là tiệm cận đứng của đường cong.

Khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to \pm\infty$: đường cong có khả năng có tiệm cận xiên đối với cả hai nhánh vô cực phải và trái. Ta có :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = \ln e = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty}\left[x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right) - 1}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{e + \frac{1}{x}} = \frac{1}{e}.$$

Vậy đường thẳng $y = x + \frac{1}{e}$ là tiệm cận xiên đối với cả hai nhánh vô cực phải và trái của đường cong.

c) Vì :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^x} = 0$$

nên đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang đối với nhánh trái của đường cong.

Khi $x \to +\infty$ thì $y = xe^x \to +\infty$, vậy đường cong đã cho có khả năng có tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực phải. Ta có :

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

Vậy không có tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực phải.

d) Vì :

$$\lim_{x \to +\infty} x\text{arccotg}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\text{arccotg}x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1 + x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = 1,$$

nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang đối với nhánh phải của đường cong.

Khi $x \to -\infty$ thì $y = x\text{arccotg}x \to -\infty$, vậy có khả năng có tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực trái. Ta có :

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \text{arccotg}x = \text{arccotg}(-\infty) = \pi,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = \lim_{x \to -\infty} (x\text{arccotg}x - \pi x) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x - \pi}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Vậy đường thẳng $y = \pi x + 1$ là tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực trái của đường cong.

e) Khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to \pm\infty$: đường cong có khả năng có tiệm cận xiên đối với cả hai nhánh vô cực phải và trái. Tacó :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} = 1 \ ;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 6x^2} - x\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} - 1\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(1 - \frac{6}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{6}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{6}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{6}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} = -2.$$

Vậy đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên đối với cả hai nhánh vô cực phải và trái của đường cong.

22. a) • Hàm số xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Hàm số không chẵn, không lẻ, cũng không tuần hoàn.

• Khi $x = 0$, $y = 0$ và khi $y = 0$ thì :

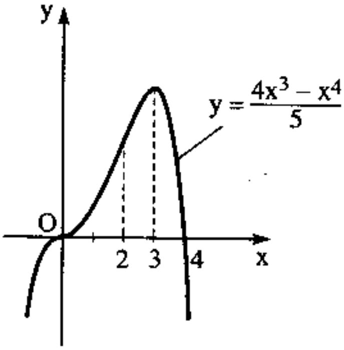
$4x^3 - x^4 = x^3(4 - x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$ và $x = 4$.

Vậy đường cong cắt các trục toạ độ tại các điểm (0, 0) và (4, 0).

• Đường cong không có tiệm cận đứng. Khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to -\infty$, do đó đường cong có khả năng có tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực phải và trái. Ta có :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^3 - x^4}{5} = \pm\infty,$$

do đó đường cong không có tiệm cận xiên.



Hình 3.5

$$y' = \frac{4}{5}x^2(3 - x),$$

$y' = 0$ khi $x = 0$ và $x = 3$.

$$y'' = \frac{12}{5}x(2 - x),$$

$y'' = 0$ khi $x = 0$ và $x = 2$.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
y'		+	0		+		0		−		
y''		−	0	+	0			−			
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{16}{5}$	↗	$\frac{27}{5}$	↘	0	↘	$-\infty$
	lồi			lõm				lồi			

Vậy đường cong có hai điểm uốn : (0, 0) và $\left(2, \frac{16}{5}\right)$. Điểm $\left(3, \frac{27}{5}\right)$ là điểm cực đại của hàm số.

• Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị như hình 3.5.

b) • Hàm số xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$ trừ điểm $x = 0$, ở đó hàm số gián đoạn.

• Hàm số không chẵn, không lẻ, cũng không tuần hoàn.

• Khi $y = 0$ thì :

$$\frac{4x + 4}{x^2} - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

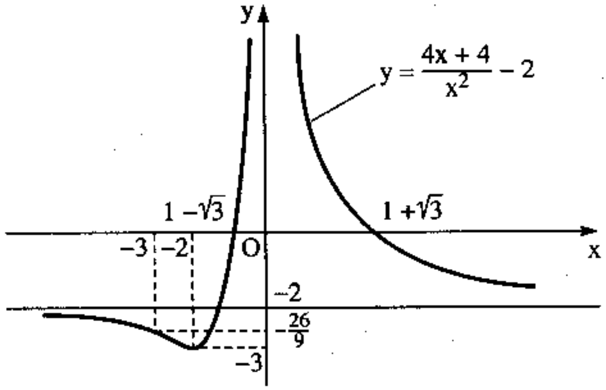
Vậy đường cong cắt trục Ox tại các điểm $(1 + \sqrt{3}, 0)$ và $(1 - \sqrt{3}, 0)$.

• Khi $x \to 0 \pm 0$ thì $y \to +\infty$, nên đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đường cong.

Khi x → ±∞ thì y → –2, nên đường thẳng y = –2 là tiệm cận ngang của đường cong.

• $y' = -\dfrac{4(x+2)}{x^3}$, y' = 0 khi x = –2, y' không tồn tại khi x = 0.

$y'' = \dfrac{8(x+3)}{x^4}$, y'' = 0 khi x = –3, y'' không tồn tại khi x = 0.



Hình 3.6

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-2		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$	$+\infty$
y'			–		0		+		‖		–	
y''		–	0			+			‖		+	
y	-2	↘	$-\frac{26}{9}$	↘	-3	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘ -2
	lồi			lõm							lõm	

Vậy đường cong có một điểm uốn $\left(-3, -\dfrac{26}{9}\right)$. Điểm (–2, –3) là điểm cực tiểu của hàm số.

• Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị như hình 3.6.

c) • Hàm số xác định và liên tục với mọi x ∈ ℝ trừ các điểm x = ±1, ở đó hàm số gián đoạn.

• Hàm số lẻ, vậy đường cong đối xứng đối với gốc toạ độ O(0, 0). Vì vậy chỉ cần khảo sát trong khoảng $[0, +\infty)$.

• Khi $x = 0$ thì $y = 0$, vậy đường cong cắt các trục toạ độ tại điểm O(0, 0).

• Khi $x \to -1$ hoặc $x \to 1$ thì $y \to \pm\infty$, nên các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$ là tiệm cận đứng của đường cong.

Khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to \pm\infty$, đường cong có khả năng có tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực phải và trái. Ta có :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0\ ;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \pm\infty.$$

Do đó đường cong không có tiệm cận xiên.

• $y' = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$, $y' = 0$ khi $x = \pm\sqrt{3}$, y' không tồn tại khi $x = \pm 1$.

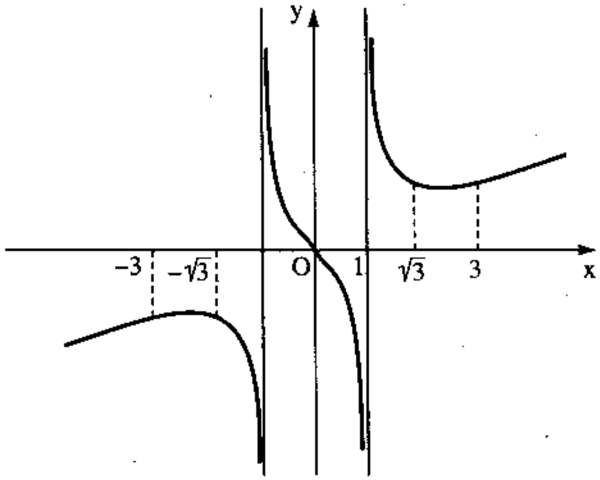
$y'' = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$, $y'' = 0$ khi $x = 0$ và $x = \pm 3$, y'' không tồn tại khi $x = \pm 1$.

Ta có bảng biến thiên :

x	0		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
y'		−	‖	−	0		+		
y''	0	−	‖		+		0	−	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1,37$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$
	lồi			lõm			lồi		

Vậy phần đường cong ứng với khoảng $[0, +\infty)$ có hai điểm uốn $(0, 0)$ và $\left(3, \frac{3}{2}\right)$; một điểm cực tiểu $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

• Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ phần đường cong ứng với khoảng $[0, +\infty)$, sau đó lấy đối xứng qua gốc $O(0, 0)$, ta nhận được toàn bộ đường cong phải vẽ (hình 3.7).



Hình 3.7

d) • Hàm số xác định và liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

• Hàm số không chẵn, không lẻ, cũng không tuần hoàn.

• Khi $x = 0$ thì $y = \pi$, khi $y = 0$ thì $x + 2\text{arccotg}x = 0 \Rightarrow x = x_1$ (không cần tìm giá trị của x_1).

Vậy đường cong cắt trục Oy tại điểm $(0, \pi)$ và cắt trục Ox tại điểm $(x_1, 0)$.

• Khi $x \to \pm\infty$ thì $y \to \pm\infty$, đường cong có khả năng có tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực phải và trái. Ta có :

$$k = \lim_{x \to \pm\infty}\left(1 + \frac{2\text{arccotg}x}{x}\right) = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty}(2\text{arccotg}x) = 2\text{arccotg}(+\infty) = 0,$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty}(2\text{arccotg}x) = 2\text{arccotg}(-\infty) = 2\pi.$$

Do đó, y = x là tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực phải và y = x + 2π là tiệm cận xiên đối với nhánh vô cực trái.

• $y' = 1 - \dfrac{2}{1 + x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, y' = 0 khi x = ±1.

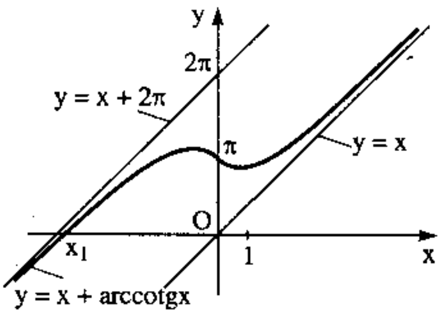
$y'' = \dfrac{4x}{(1 + x^2)^2}$, y" = 0 khi x = 0.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+	
y"		−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{3\pi}{2} - 1$	↘	π	↘	$\frac{\pi}{2} + 1$	↗	$+\infty$
	lồi					lõm			

Vậy đường cong có một điểm uốn (0, π). Điểm $\left(-1, \dfrac{3\pi}{2} - 1\right)$ là điểm cực đại, điểm $\left(1, \dfrac{\pi}{2} + 1\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số.

• Dựa vào bảng biến thiên, ta có đồ thị như hình 3.8.



Hình 3.8

e) • Hàm số xác định và liên tục với mọi x ∈ ℝ.

• Hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kỳ $\dfrac{\pi}{2}$ vì có thể viết :

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Ta chỉ cần khảo sát trong khoảng $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Sau đó, để có được toàn bộ đường cong, ta tịnh tiến phần đường cong đã vẽ sang phải và sang trái những đoạn bằng $\dfrac{\pi}{2}$.

• Khi x = 0 thì y = 1 ; y > 0 đối với mọi giá trị của x. Vậy đường cong cắt trục Oy tại điểm (0, 1) và không cắt trục Ox.

• Các tiệm cận : không có.

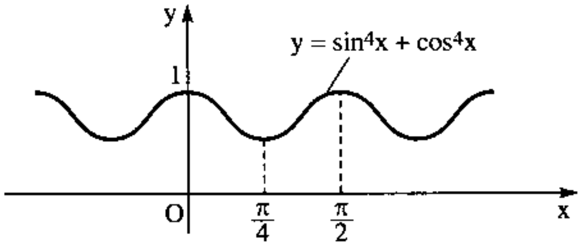
• $y' = -\sin 4x$. Trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y' = 0$ khi $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{4}$, những điểm ấy là điểm tới hạn của hàm số.

$y'' = -4\cos 4x$. Trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = 0$ khi $x = \frac{\pi}{8}$ và $x = \frac{3\pi}{8}$.

Ta có bảng biến thiên :

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	0		–		0		+		0
y''	–4	–	0		+		0	–	–4
y	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1
		lồi			lõm			lồi	

Vậy trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ đường cong có hai điểm uốn : $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$. Điểm $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ là điểm cực tiểu, điểm (0, 1) là điểm cực đại của hàm số ($y''(0) = -4 < 0$).



Hình 3.9

• Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ phần đường cong ứng với khoảng $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tịnh tiến phần đường cong đã vẽ sang phải và sang trái những đoạn bằng $\frac{\pi}{2}$ ta được toàn bộ đường cong như hình 3.9.

23. $x'_t = \ln t + 1$, $y'_t = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{1 - \ln t}{t^2(\ln t + 1)}$.

$$y'_x\big|_{t=1} = \frac{1 - \ln 1}{1^2(\ln 1 + 1)} = 1.$$

24. $x'_t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y'_t = 2t$, $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = 1 + t^2$.

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = (1 + t^2)'_t . t'_x = (1 + t^2)'_t . \frac{1}{x'_t} = 1 + t^2.$$

$$y''_{x^2}\Big|_{t=0} = 1.$$

25. a) • Các hàm số x(t) và y(t) xác định và liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$.

• x(t) là hàm số chẵn, y(t) là hàm số lẻ, vậy ta cho t biến thiên trong khoảng $[0, +\infty)$, rồi thực hiện phép đối xứng qua trục Ox.

• Khi $t \to +\infty$ thì $y(t) \to -\infty$ và $x(t) \to -1$, vậy $x = -1$ là tiệm cận đứng.

• Ta có :

$$x'_t = \frac{-4t}{(1 + t^2)^2}, \quad y'_t = \frac{1 - 4t^2 - t^4}{(1 + t^2)^2}.$$

Với $\forall t \in [0, +\infty)$ thì $x'_t = 0$ khi $t = 0$; $y'_t = 0$ khi : $1 - 4t^2 - t^4 = 0$, nghĩa là khi $t = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{4t}.$$

$y'_x = 0$ khi $t = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. Khi đó :

$$x(\sqrt{\sqrt{5} - 2}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618,$$

$$y(\sqrt{\sqrt{5} - 2}) = \sqrt{\sqrt{5} - 2}\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}300.$$

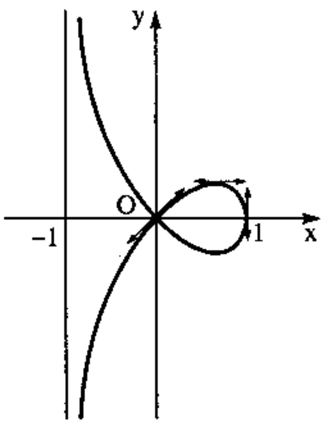
Vậy tại điểm (0,618 ; 0,300) tiếp tuyến của đường cong song song với trục Ox.

Khi t = 1, ta có x(1) = 0, y(1) = 0, $y'_x\big|_{t=1} = 1$, vậy tại điểm O(0, 0) tiếp tuyến của đường cong hợp với trục Ox một góc $\frac{\pi}{4}$.

$y'_x \to -\infty$ khi $t \to 0^+$, vậy tại điểm x(0) = 1, y(0) = 0 tiếp tuyến của đường cong song song với trục Oy.

Từ đó, suy ra bảng biến thiên của x và y :

t	0		$\sqrt{\sqrt{5}-2}$		1		$+\infty$
x'_t	0			−			
x	1	↘	0,618	↘	0	↘	−1
y'_t	1	+	0	−			
y	0	↗	0,300	↘	0	↘	$-\infty$



Hình 3.10

Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần đường cong ứng với $t \in [0, +\infty)$, lấy đối xứng qua trục Ox, ta nhận được toàn bộ đường cong như hình 3.10 (sinh viên nên tự xét dấu của y''_{x^2} để xác định khoảng lồi, lõm của đường cong).

b) • Các hàm số x(t) và y(t) xác định và liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$.

• Nếu thay t bởi −t thì x đổi thành −y, y đổi thành −x, vậy ta cho t biến thiên trong khoảng $[0, +\infty)$, rồi thực hiện phép đối xứng qua đường phân giác thứ hai y = −x.

• Khi $t \to +\infty$ thì $x(t) \to +\infty$ và $y(t) \to 0$, vậy y = 0 là tiệm cận ngang (đường cong còn một tiệm cận đứng x = 0, đối xứng đối với tiệm cận ngang qua đường phân giác thứ hai).

• Ta có :

$$x'_t = e^t(t+1), \quad y'_t = e^{-t}(1-t)$$

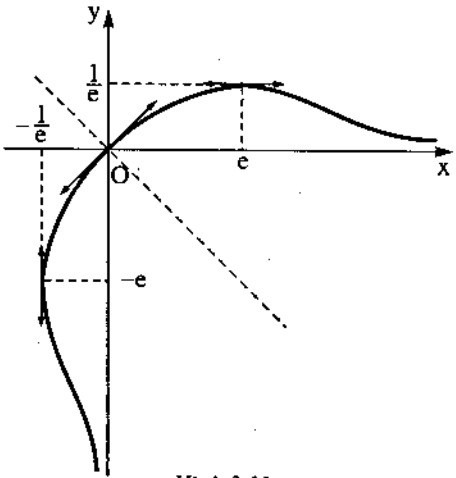
Với $\forall t \in [0, +\infty)$, thì $y'_t = 0$ khi t = 1.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-t}(1-t)}{e^t(1+t)}$$

$y' = 0$ khi $t = 1$. Khi đó : $x(1) = e$, $y(1) = \frac{1}{e}$. Vậy tại điểm $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ tiếp tuyến của đường cong song song với trục Ox. Tại điểm O(0, 0) (ứng với t = 0) tiếp tuyến của đường cong là y = x vì $y'_x\big|_{t=0} = 1$.

Từ đó, suy ra bảng biến thiên của x và y :

t	0		1		+∞
x'_t			+		
x	0	↗	e	↗	+∞
y'_t		+	0	−	
y	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



Hình 3.11

Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần đường cong ứng với $t \in [0, +\infty)$, lấy đối xứng qua đường phân giác thứ hai, ta nhận được toàn bộ đường cong như hình 3.11 (sinh viên nên tự xét dấu của y''_{x^2} để xác định khoảng lồi, lõm và điểm uốn của đường cong).

26. a) • Hàm số xác định và liên tục với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$.

• Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$, nên chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong khoảng $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

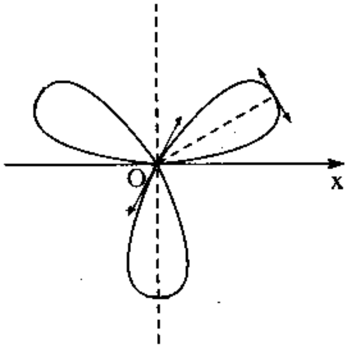
Ngoài ra $r = a\sin 3\varphi$ là hàm số lẻ, nên đường cong đối xứng đối với đường thẳng đi qua gốc cực, thẳng góc với trục cực. Chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

• Ta có : $r' = 3a\cos 3\varphi$; $r' = 0$ khi $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\operatorname{tg}V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{3}\operatorname{tg}3\varphi.$$

Ta có bảng biến thiên :

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'		+	0	−	
r	0	$\nearrow$	a	$\searrow$	0
$\operatorname{tg}V$	0		∞		0



Hình 3.12

Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần đường cong ứng với $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ (cánh hoa nằm ở góc phần tư I), lấy đối xứng qua đường thẳng đi qua gốc cực, thẳng góc với trục cực, nhận được cánh hoa thứ hai nằm ở góc phần tư II. Sau đó quay những góc $\dfrac{2\pi}{3}$ quanh O, ta nhận được toàn bộ đường cong như hình 3.12. Đường cong này thường gọi là đường hoa hồng ba cánh.

b) • Hàm số xác định và liên tục với những giá trị của φ thỏa mãn bất phương trình $\cos 2\varphi \geq 0$, vậy $2\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ hay $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

• Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π, nên chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong khoảng $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

• Ngoài ra $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ là hàm số chẵn, nên đường cong đối xứng đối với trục cực. Chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong khoảng $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

• Ta có : $r' = \dfrac{-a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$; $r' = 0$ khi $\varphi = 0$.

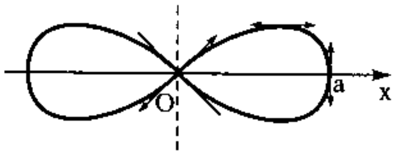
$$tgV = \frac{r}{r'} = -\cot g2\varphi .$$

Chú ý rằng tại $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $tgV = -\cot g\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra $V = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Tiếp tuyến với đường cong tại điểm $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ song song với trục cực.

Ta có bảng biến thiên :

φ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'		$-$	
r	a	$\searrow$	0
tgV	∞		0



Hình 3.13

Dựa vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần đường cong ứng với $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, lấy đối xứng qua trục cực, sau đó quay những góc π quanh O, ta nhận được toàn bộ đường cong như hình 3.13. Đường cong này thường gọi là đường Lemniscate Bernoulli.

Chương IV

ĐỊNH THỨC. MA TRẬN. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ma trận

Ma trận cỡ $m \times n$ là bảng số hình chữ nhật m hàng, n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R},$$

viết tắt là

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Khi $m = n$, ta có ma trận vuông cấp m.

Khi $m = 1$, ta có ma trận hàng (1 hàng).

Khi $n = 1$, ta có ma trận cột (1 cột).

Ma trận không ký hiệu là O, là ma trận mà mọi phần tử đều bằng 0

$$O = [0]_{m \times n}.$$

Hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ gọi là bằng nhau nếu

$$a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i, j.$$

Tổng hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ký hiệu là $A + B$, là ma trận

$$C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ với số λ ký hiệu là λA, là ma trận

$$C = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Tích của hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ ký hiệu là A.B, là ma trận

$$[c_{ij}]_{m \times n},$$

trong đó

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \forall_{i,j}$$

Nói chung $A.B \neq B.A$.

Ma trận chuyển vị của ma trận A ký hiệu là A^t, được xác định như sau :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ thì } A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$$

2. Định thức của ma trận vuông

• Xét ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận suy từ A bằng cách bỏ đi hàng i cột j là một ma trận cấp n – 1 gọi là ma trận con ứng với phần tử a_{ij}, ký hiệu là M_{ij}.

Định thức của ma trận A ký hiệu là det(A) hay |A|, được định nghĩa như sau :

– Nếu A là ma trận cấp 1 : $A = [a_{11}]$ thì $\det(A) = a_{11}$;

– Nếu A là ma trận cấp 2 : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) ;$$

– Nếu A là ma trận cấp n thì

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n}).$$

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n. Công thức trên gọi là công thức khai triển định thức theo các phần tử của hàng đầu.

• Một số tính chất của định thức :

1) $\det(A^t) = \det A$;

2) Nếu đổi chỗ hai hàng cho nhau thì định thức đổi dấu ;

3) Nếu nhân các phần tử của một hàng với số λ thì định thức được nhân lên với λ.

Từ ba tính chất trên suy ra được các tính chất khác.

Nếu A, B là hai ma trận vuông cấp n thì

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B).$$

3. Hạng của ma trận A

Hạng của ma trận A ký hiệu là r(A), là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.

4. Ma trận nghịch đảo

Ma trận đơn vị cấp n ký hiệu là E, là ma trận vuông cấp n có dạng

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Với mọi ma trận vuông cấp n ta có :

$$A.E = E.A = A.$$

A là ma trận vuông cấp n, ta nói A là khả nghịch nếu tồn tại ma trận vuông B cấp n sao cho

$$A.B = B.A = E.$$

Khi đó B gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu là A^{-1}.

Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A khả nghịch là $\det(A) \neq 0$.

Nếu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ và $\det(A) \neq 0$ thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}).$$

Nếu A và B là hai ma trận vuông khả nghịch thì tích A.B cũng là một ma trận vuông khả nghịch và

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}.$$

5. Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính là hệ có dạng :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Đặt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Hệ (1) có thể viết dưới dạng ma trận

$$AX = B \qquad (2)$$

• Hệ (1) gọi là hệ Cramer nếu m = n (tức A là ma trận vuông) và nếu $\det(A) \neq 0$ hệ Cramer có nghiệm duy nhất cho bởi

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, ..., n$$

trong đó A_j suy từ A bằng cách thay cột j bởi cột vế phải B.

• Hệ phương trình tuyến tính tổng quát (1) có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận $\overline{A} = [A, B]$ (định lý Kronecker-Capelli).

Vậy nếu $r(A) \neq r(\overline{A})$, hệ (1) vô nghiệm ; nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$, hệ chính là hệ Cramer và có một nghiệm duy nhất ; nếu $r(A) = r(\overline{A}) < n$, hệ có vô số nghiệm.

• Hệ (1) gọi là thuần nhất nếu $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$. Nó luôn có nghiệm $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ gọi là nghiệm tầm thường. Nó có nghiệm không tầm thường khi $r(A) < n$.

B – ĐỀ BÀI

1. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Tính (A + B) + C ; A + (B + C).

b) Tính 3A – 2B ; $(3A)^t$; $(3A - 2B)^t$.

2. Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Tính A + B ; A – B.

3. Thực hiện các phép tính sau :

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ \ 2 \ \ 3]$; $[1 \ \ 2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A.B và B.A.

5. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Tính : a) A.B.C ; b) A.C + B.C.

6. Thực hiện các phép tính :

a) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ (0 là ma trận không).

b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

7. Tính $A.B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{bmatrix}$.

8. Tính định thức $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

9. Tính các định thức sau :

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}$;

10. Tính các định thức sau :

a) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ \gamma - i\delta & \alpha - i\beta \end{vmatrix}$.

11. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$.

12. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, trong đó $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

13. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

14. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

15. Tính $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$.

16. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

17. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

18. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19. Thực hiện các phép tính lũy thừa :

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$;   b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$;   d) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$.

20. Tìm f(A) nếu :

a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ với $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $f(x) = x^2 - x - 1$ với $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

21. a) Cho $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tính J^2 ; J^3 suy ra J^n.

b) Hãy biểu diễn $M = \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$ theo các ma trận E, J, J^2.

22. Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thỏa mãn phương trình

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0.$$

23. Chứng minh rằng nếu A.B = B.A thì :

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 ;$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) ;$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3.$$

24. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$; c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

25. Tìm ma trận X từ các phương trình sau :

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.X.\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

d) $X.\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$;

f) $X.\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 2 & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 0 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 0 & -1 & 6\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$;

g) $2\begin{bmatrix}8 & -1 & 5\\ 1 & 6 & -2\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix}.X - \begin{bmatrix}17 & -3 & 9\\ 2 & 11 & -3\\ -5 & 7 & 2\end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$;

h) $2X.\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -3\end{bmatrix} + X.\begin{bmatrix}-1 & 2 & -5\\ -4 & 5 & 3\\ 5 & -4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

26. Tìm hạng của các ma trận sau :

a) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

27. Tìm hạng của các ma trận sau theo tham số λ :

a) $A = \begin{bmatrix}3 & \lambda & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

28. Giải các hệ Cramer sau :

a) $\left.\begin{aligned}2x_1 - x_2 - x_3 &= 4\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11\\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11\end{aligned}\right\}$; b) $\left.\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2\end{aligned}\right\}$.

29. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss :

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}\right\}$; b) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}\right\}$;

c) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \end{aligned}\right\}$;

d) $\left.\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \end{aligned}\right\}$;

e) $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}\right\}$;

g) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$;

h) $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_7 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}\right\}$;

i) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 &= 25 \end{aligned}\right\}$

30. a) Cho hệ

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= m + 11 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= m + 9 \end{aligned}\right\}$$

Tìm m để hệ có nghiệm, giải với m đó.

b) Biện luận nghiệm của hệ sau theo tham số a :

$$\left.\begin{aligned} x_2 + (a-1)x_3 + a^2x_4 &= 2a \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + ax_4 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + \quad ax_3 + 2ax_4 &= 2a - 3 \\ x_1 + 3x_2 + (a-2)x_3 + 3a^2x_4 &= 4a - 2 \end{aligned}\right\}.$$

C – BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

vì phép cộng các ma trận cùng kích thước có tính chất kết hợp.

b) $3A - 2B = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -6 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -9 & 5 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}.$$

Do $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow (3A)^t = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$.

Do $3A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -9 & 5 \\ 13 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (3A - 2B)^t = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Thực hiện phép cộng các ma trận cùng kích thước ta được :

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} ; \quad A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ \ 2 \ \ 3] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$;

$$[1 \ \ 2 \ \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = [13].$$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3+1.2+1.1 & 2.1+1.1+1.0 \\ 3.3+0.2+1.1 & 3.1+0.1+1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.1+1.2+1.1 & 3.1+1(-1)+1.0 & 3(-1)+1.1+1.1 \\ 2.1+1.2+2.1 & 2.1+1(-1)+2.0 & 2(-1)+1.1+2.1 \\ 1.1+2.2+3.1 & 1.1+2(-1)+3.0 & 1(-1)+2.1+3.1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Thực hiện phép nhân như trong bài 3 ta được :

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{bmatrix} ;$$

$$B.A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6&6\\1&7&3\\8&11&14\end{bmatrix}.$$

Vậy A.B ≠ B.A (không có tính chất giao hoán).

5. a) $$A.B.C=(A.B).C=\left(\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&7&0\\1&5&-2\\6&12&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9&15\\-5&5&9\\12&26&32\end{bmatrix}.$$

Ta có $$A.C+B.C=(A+B)C=\begin{bmatrix}9&13&15\\5&2&5\\4&11&10\end{bmatrix}.$$

6. a) $$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Vậy $$\left.\begin{array}{l}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0\end{array}\right\}.$$

b) Khai triển tương tự câu a) ta được :

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=5\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=4\\a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4=3\\a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4=0\\a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4=-1\end{array}\right\}$$

$$7.\ A.B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{bmatrix}.$$

8. Sử dụng các tính chất của định thức, ta được :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{(h_2+5h_1) \\ (h_3+7h_1)}}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & 22 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} = 68.$$

9. a) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $\begin{vmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{vmatrix} = ab - (c+id)(c-id) = ab - (c^2+d^2)$.

Chú ý $i^2 = -1$.

c) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2$.

10. Tương tự bài 9) ta được :

a) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = -1$;

c) $\begin{vmatrix} \alpha+i\beta & \gamma+i\delta \\ \gamma-i\delta & \alpha-i\beta \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2$.

11. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; b) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = 2a^2(a+x)$.

12. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1$; b) $\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2$.

c) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = 3\omega^2 - 2\omega - \omega^4$. Do $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ nên

$$\omega^4 = \omega^3.\ \omega = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \omega$$

$$\Rightarrow\ |A| = 3\omega^2 - 3\omega = 3(\omega^2 - \omega) = 3\left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= 3\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -3i\sqrt{3}.$$

13. Ta có

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b' & c'+a' & a'+b' \\ b'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c' & c'+a' & a'+b' \\ c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ b' & c' & a'+b' \\ b'' & c'' & a''+b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ b' & a' & a'+b' \\ b'' & a'' & a''+b'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c' & a' & a'+b' \\ c'' & a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ b' & c' & a' \\ b'' & c'' & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ c' & a' & b' \\ c'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

(các định thức khác có hai cột giống nhau nên bằng "0")

$$= -\begin{vmatrix} b & a & c \\ b' & a' & c' \\ b'' & a'' & c'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c & b \\ a' & c' & b' \\ a'' & c'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$ là điều phải chứng minh.

14. Sử dụng các tính chất ta sẽ có :

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (h_2 - 2h_1) \\ = \\ (h_3 - 3h_1) \\ (h_4 - 4h_1) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 7\\0 & 2 & 8 & 10\\0 & 7 & 10 & 13\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (h_3-2h_2)\\(h_4-7h_2)\end{matrix} = -\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 7\\0 & 0 & 4 & -4\\0 & 0 & -4 & -36\end{vmatrix}$$

$$\underset{(h_4+h_3)}{=} -\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 2 & 7\\0 & 0 & 4 & -4\\0 & 0 & 0 & -40\end{vmatrix} = 160.$$

b) $$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & x\\1 & 2 & 1 & y\\1 & 1 & 2 & z\\1 & 1 & 1 & t\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & y\\2 & 1 & 1 & x\\1 & 1 & 2 & z\\1 & 1 & 1 & t\end{vmatrix} = 4t - x - y - z.$$

c) $$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\-2 & 1 & -4 & 3\\3 & -4 & -1 & 2\\4 & 3 & -2 & -1\end{vmatrix} = 900.$$

d) $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\1 & 2-x^2 & 2 & 3\\2 & 3 & 1 & 5\\2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}\begin{matrix}(h_2-h_1)\\=\\(h_3-2h_1)\\(h_4-h_3)\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\0 & 1-x^2 & 0 & 0\\0 & 1 & -3 & -1\\0 & 0 & 0 & 4-x^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1-x^2 & 0 & 0\\1 & -3 & -1\\0 & 0 & 4-x^2\end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix}-3 & -1\\0 & 4-x^2\end{vmatrix} = -3(1-x^2)(4-x^2).$$

15. $$\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\1 & 2 & 4 & 8\\1 & 3 & 9 & 27\\1 & 4 & 16 & 64\end{vmatrix}\begin{matrix}(h_2-h_1)\\=\\(h_3-h_2)\\(h_4-h_2)\end{matrix}\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\0 & 2-x & 4-x^2 & 8-x^3\\0 & 1 & 5 & 19\\0 & 2 & 12 & 56\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & 4-x^2 & 8-x^3 \\ 1 & 5 & 19 \\ 2 & 12 & 56 \end{vmatrix} \underset{(h_3-2h_2)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 4-x^2 & 8-x^3 \\ 1 & 5 & 19 \\ 0 & 2 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 4-x^2 & 8-x^3 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 54(2-x) - [18(4-x^2) - 2(8-x^3)]$$

$$= -2x^3 + 18x^2 - 54x + 52.$$

16. Sử dụng các tính chất của định thức ta được :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 394$.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$

$$\underset{=}{(h_2-5h_1)} -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 19 & 30 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 19 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \underset{=}{(h_2-19h_1)} -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -65 & -114 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 65 & 114 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 65 & 114 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{h_2 - 65h_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -211 & -390 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 211 & 390 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 665.$$

17. a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1.2.3\dots n = n!.$

b) Lần lượt lấy các hàng sau cộng với hàng đầu :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

18. a) Lần lượt lấy các hàng sau trừ đi hàng đầu :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$= 1.1.2 \,..\, (n-1) = (n-1)!.$

b) Cộng tất cả các cột vào cột cuối cùng :

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)\begin{vmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1)a_1a_2\dots a_n.$$

19. a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$

b) $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix};$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^5 = A^3.A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E + J;$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy $A^n = (E+J)^n = E^n + nE^{n-1}J + \dfrac{n(n-1)}{2}E^{n-2}J^2 + \dots$

$$= E + nEJ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chú ý : Ở đây EJ = JE = J và sử dụng khai triển nhị thức Newton.

d) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \quad (*)$$

Chứng minh công thức (*) bằng phương pháp quy nạp toán học : Giả sử (*) đúng với n = k ; chứng minh (*) đúng với n = k + 1 (tự chứng minh).

20. a) $f(A) = A^2 - 5A + 3E$.

Hướng dẫn : Tính A^2, $-5A$, $3E$ (E là ma trận đơn vị) và cộng chúng lại, ta được :

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $f(A) = A^2 - A - E$. Thực hiện theo hướng dẫn câu a) ta được :

$$f(A) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

21. a) $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$$J^3 = J^2.J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vậy $\quad J^n = \begin{cases} E \text{ nếu } n = 3k \\ J \text{ nếu } n = 3k + 1\ , \quad k = 1, 2, ... \\ J^2 \text{ nếu } n = 3k + 2 \end{cases}$

b) $M = \begin{bmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = aE + bJ + cJ^2.$$

22. Thực hiện phép tính

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 - (a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

23. Do A.B = B.A, nên khai triển vế trái hoặc vế phải ta được điều phải chứng minh.

24. a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \Rightarrow$ A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

c) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, do đó ma trận A khả nghịch và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix},$$

trong đó : $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$. Cụ thể :

$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$;

$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$;

$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d) Hoàn toàn tương tự câu c) ta được :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

e) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ A khả nghịch và

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; ; \qquad c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad c_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \; ; \qquad c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; ;$$

$c_{23} = 0$; $c_{24} = 0$; $c_{31} = 11$; $c_{32} = -2$; $c_{33} = 1$;

$c_{34} = 0$; $c_{41} = -38$; $c_{42} = 7$; $c_{43} = -2$; $c_{44} = 1$.

Vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) Hoàn toàn tương tự ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

g) $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

25. a) Do A.X = B, nếu $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, do đó $X = A^{-1}B$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) A.X.B = C : Nếu det (A) ≠ 0, det (B) ≠ 0 thì

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}.$$

c) A.X = B : $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ A khả nghịch,

$$\Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -13 \\ -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

d) X.A = B : $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 15 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

e) Ta có phương trình A.B.X = A $\Rightarrow$ A(BX – E) = 0.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-6 - 24) - (5 - 9) = -26 \neq 0.$$

Vậy ta có phương trình tương đương : B.X = E.

Do $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1 + 1) - (-1 + 2) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ B khả nghịch

nên $X = B^{-1}E = B^{-1}$.

Ta tính $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Vậy $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

f) Ta có phương trình X.A.B = B $\Rightarrow$ (X.A – E)B = 0.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-12 + 36) - (10) = 14 \neq 0.$$

Ta có phương trình tương đương : X.A – E = 0 $\Rightarrow$ X.A = E.

Lại do $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 9) - (-4 - 6) = -1 \neq 0 \Rightarrow$ A khả

nghịch $\Rightarrow X = EA^{-1} = A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

g) Ta có phương trình $2A.X - B.X = C \Rightarrow (2A - B)X = C$.

Do $2A - B = 2\begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 1 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17 & -3 & 9 \\ 2 & 11 & -3 \\ -5 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

$\det(2A - B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 1) - (1 + 1) = -1 \neq 0 \Rightarrow (2A - B)$ khả nghịch. Vậy $X = (2A - B)^{-1}C$

hay $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

h) Ta có phương trình $2X.A + X.B = C$, hay

$$X(2A + B) = C.$$

Do $2A + B = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

$\det(2A + B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-4 + 10) - (-3 + 10) = -1 \neq 0 \Rightarrow (2A + B)$ khả nghịch và $(2A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -13 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Vậy $X = C(2A + B)^{-1}$,

hay $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & -2 & -13 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -4 & 23 \\ 14 & -1 & -12 \end{bmatrix}$.

26. a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(h_3 - h_1)]{(h_2 - 2h_1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[(h_3 - 2h_2)]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Do $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Vậy $r(A) = 2$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(h_3-5h_1)\\(h_4-7h_1)}]{(h_2-2h_1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{(h_3-2h_1)\\(h_4-h_3)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}. \text{ Do } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

Vậy $r(A) = 3$.

c) Thực hiện biến đổi tương tự câu a, b) ta được $r(A) = 2$.

d) $r(A) = 4$.

27. a) $A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Đưa tham số λ xuống góc cuối cùng bằng cách đưa hàng một xuống hàng bốn và đưa cột hai sang cột bốn.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & \lambda & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 17 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(h_3-4h_1)\\(h_4-3h_1)}]{(h_2-h_1)} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & -25 & -5 & -15 \\ 0 & -20 & -4 & \lambda-12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -20 & -4 & \lambda-12 \end{bmatrix}$$

(chia hàng hai cho 2, hàng ba cho -5)

$$\xrightarrow[\substack{(h_3-h_2)\\(h_4+4h_2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vậy $\lambda = 0$ thì $r(A) = 2$

$\lambda \neq 0$ thì $r(A) = 3$.

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Đổi hàng hai với hàng bốn :

$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Đưa cột một và cột hai sang bên phải

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[(h_4 - h_1)]{(h_2 - 2h_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(h_3 - h_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & \lambda+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(h_4 + h_3)]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $\lambda = 1$ thì $r(A) = 3$; $\lambda \neq 1$ thì $r(A) = 4$.

28. a) Viết lại hệ dưới dạng ma trận : A.X = B , trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} ;\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ;\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Do $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (32 + 6 + 6) - (-12 + 8 - 12)$

$= 60 \neq 0.$

Vậy hệ đã cho là hệ Cramer.

Ta có : $\Delta = \det(A) = 60$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180 \;;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60 \;;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

Vậy $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

b) Tương tự câu a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$;

$\Delta_1 = 6$; $\Delta_2 = 12$; $\Delta_3 = -12$.

Vậy $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$.

29. Viết lại hệ phương trình dưới dạng A.X = B.

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} ;\; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ;\; B = \begin{bmatrix} 31 \\ 29 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[(h_3 - 3h_1)]{(h_2 - 5h_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \xrightarrow[(h_3 \times (-1))]{(h_2 / 9)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 11 & 83 \end{array}\right] \xrightarrow[(h_3 - 7h_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3$$

$\Rightarrow$ hệ có nghiệm, hay : $\left.\begin{aligned} -3x_3 &= -15 \\ x_2 + 2x_3 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_3 &= 5 \\ x_2 &= 4 \\ x_1 &= 3 \end{aligned}\right\}$

hay $x_1 = 3$; $x_2 = 4$; $x_3 = 5$.

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Xét
$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(h_3 - 2h_1) \\ (h_4 - h_1)}]{(h_2 = 3h_1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{(h_3 - h_2) \\ (h_4 - 4h_2)}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(h_4 - 2h_3)]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right].$$

Vậy $r(A) = r(\overline{A}) = 4 \Rightarrow$ hệ có nghiệm

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} & x_4 = 1 \\ & x_3 + 9x_4 = 9 \\ & x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & x_4 = 1, x_3 = 0, \\ & x_2 = -1, x_1 = -1. \end{aligned}$$

Vậy $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Các câu còn lại giải hoàn toàn tương tự.

c) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$; $x_4 = 3$.

d) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$.

e) $x_1 = \alpha$; $x_2 = \beta$; $x_3 = 2\beta - \alpha$; $x_4 = 1$.

g) Hệ vô nghiệm.

h) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = x_5 = \alpha$.

i) Hệ vô nghiệm.

30. a) $\overline{A} = [A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & m+11 \\ 1 & 5 & -4 & 5 & m+9 \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[(h_3 - h_1)]{(h_2 - 2h_1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & m+7 \\ 0 & 2 & -8 & 6 & m+7 \end{array}\right] \xrightarrow[(h_3 - 2h_2)]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & m+7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m+7 \end{array}\right].$$

Để hệ có nghiệm thì $m = -7$.

Với $m = -7$ ta được hệ

$$\left.\begin{aligned} x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Cho x_3, x_4 tự do $\Rightarrow$ $x_1 = 2 - 16x_3 + 10x_4$

$x_2 = 4x_3 - 3x_4$

x_3 ; x_4 bất kì

b) $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & a-1 & a^2 & 2a \\ 1 & 2 & 0 & a & -1 \\ 2 & 5 & a & 2a & 2a-3 \\ 1 & 3 & a-2 & 3a^2 & 4a-2 \end{array}\right]$

Đưa hàng đầu xuống cuối cùng ta được :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & a & -1 \\ 2 & 5 & a & 2a & 2a-3 \\ 1 & 3 & a-2 & 3a^2 & 4a-2 \\ 0 & 1 & a-1 & a^2 & 2a \end{array}\right] \xrightarrow[(h_3-h_1)]{(h_2-2h_1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & a-2 & 3a^2-a & 4a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & a^2 & 2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{(h_3-h_2)\\(h_4-h_3)}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 2a-1 \\ 0 & 0 & -2 & 3a^2-a & 2a \\ 0 & 0 & 1 & a-2a^2 & 1-2a \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\text{(đổi hàng}\\ \text{3, 4 cho nhau)}}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1 & a-2a^2 & -2a+1 \\ 0 & 0 & -2 & 3a^2-a & 2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(h_4+2h_3)]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & a & 0 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 1 & a-2a^2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 0 & a-a^2 & 2-2a \end{array}\right].$$

Vậy : 1) Nếu $a - a^2 = a(1-a) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$; 1 hệ có nghiệm duy nhất.

2) Nếu $a = 0$, $r(A) = 3$; $r(\overline{A}) = 4$ hệ vô nghiệm.

3) Nếu $a = 1$, $r(A) = r(\overline{A}) = 3$ hệ vô định.

Chương V

KHÔNG GIAN VECTƠ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Không gian vectơ thực (gọi tắt là không gian vectơ)

Không gian vectơ thực là một tập không rỗng V, các phần tử gọi là vectơ, trên đó định nghĩa phép cộng vectơ, phép nhân vectơ với một số thực. Hai phép toán đó thỏa mãn 10 tiên đề sau :

(1) Nếu u và $v \in V$ thì $u + v \in V$;

(2) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$;

(3) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$;

(4) Tồn tại vectơ θ sao cho $\theta + u = u + \theta = u, \forall u \in V$;

(5) Với mỗi vectơ $u \in V$, tồn tại vectơ $-u \in V$ sao cho

$$u + (-u) = (-u) + u = \theta.$$

(6) Nếu $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda u \in V$;

(7) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

(8) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$;

(9) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$;

(10) $1u = u, \forall u \in V$;

Vectơ θ trong tiên đề (4) gọi là vectơ không. Vectơ $-u$ trong tiên đề (5) gọi là vectơ đối của u.

Từ các tiên đề trên suy ra :

1) $0.u = \theta, \forall u \in V$;

2) $\lambda.\theta = \theta, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

3) Từ $\lambda.u = \theta$ suy ra $\lambda = 0$ hoặc $u = \theta$.

2. Không gian con. Hệ sinh

V là một không gian vectơ. Tập $W \subset V$ gọi là không gian con của V nếu với hai phép toán đã định nghĩa trên V, W cũng là một không gian vectơ.

Điều kiện cần và đủ để tập $W \subset V$ là một không gian con của V là nó không rỗng và đóng kín đối với hai phép toán trên V.

$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một họ vectơ trong V. Biểu thức $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, với $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, là một vectơ của V, gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của họ S. Tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của họ S gọi là *bao tuyến tính* của họ S, ký hiệu là span(S).

Nếu S là một họ vectơ của V thì span(S) là một không gian con của V. Nếu span(S) = V, ta nói S là một hệ sinh của V.

Họ vectơ S gọi là độc lập tuyến tính nếu biểu thức

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \theta,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$$

chỉ xảy ra khi $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu nó không độc lập tuyến tính.

3. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

Cơ sở của một không gian vectơ là một họ vectơ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ độc lập tuyến tính trong V và là hệ sinh của V. Khi đó ta nói V là không gian vectơ n chiều và viết dim (V) = n.

Không gian vectơ V gọi là hữu hạn chiều nếu $V = \{0\}$ hay nếu dim(V) = n , là vô hạn chiều nếu nó không là hữu hạn chiều.

Nếu $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V thì mọi vectơ $x \in V$ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ne_n,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n.$$

Các số $(c_1, c_2, ..., c_n)$ gọi là các toạ độ của x theo cơ sở S, ma trận cột

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận toạ độ của x theo cơ sở S và được ký hiệu là $[x]_S$.

4. Hạng của một họ vectơ

$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một họ vectơ trong V. Số lớn nhất các vectơ độc lập tuyến tính lấy ra từ S gọi là hạng của S, ký hiệu là r(S).

Hạng của họ S bằng số chiều của không gian con sinh bởi họ S.

5. Bài toán đổi cơ sở

$B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ là hai cơ sở của không gian vectơ V ; v là một vectơ của V. Ma trận toạ độ của v đối với B và B' theo thứ tự là

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad [v]_{B'} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}.$$

Tồn tại ma trận không suy biến P sao cho $[v]_B = P[v]_{B'}$, ma trận P gọi là ma trận chuyển cơ sở, nó có dạng

$$P = [[e'_1]_B[e'_2]_B \dots [e'_n]_B].$$

6. Ánh xạ tuyến tính

• V, W là hai không gian vectơ. Ánh xạ $f : V \to W$ gọi là ánh xạ tuyến tính nếu :

1) $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V$;

2) $f(\lambda u) = \lambda f(u), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V$.

• Giả thử dim (V) = n, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, dim(W) = m, $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ là một cơ sở của W. Khi đó tồn tại ma trận A sao cho

$$[f(x)]_{B'} = A[x]_B.$$

Ma trận A gồm n cột, cột thứ i là $[f(e_i)]_{B'}$, tức là

$$A = [[f(e_1)]_{B'} [f(e_2)]_{B'} \dots [f(e_n)]_{B'}],$$

gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f.

Nếu W = V, ánh xạ tuyến tính $f : V \to V$ gọi là toán tử tuyến tính trên V.

7. Trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính

• V là không gian vectơ, $f : V \to V$ là một toán tử tuyến tính. Số λ gọi là trị riêng của f nếu tồn tại vectơ $x \in V$, $x \neq \theta$ sao cho

$$f(x) = \lambda x. \qquad (*)$$

Khi đó x gọi là vectơ riêng của f ứng với trị riêng λ. Tập hợp tất cả các vectơ riêng của f ứng với trị riêng λ gọi là không gian con riêng của f ứng với trị riêng λ, ký hiệu là V_f. Đó là một không gian con bất biến đối với f.

• Gọi A là ma trận của toán tử tuyến tính f. Phương trình

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad (**)$$

gọi là phương trình đặc trưng của f. Nghiệm của phương trình (**) là trị riêng của f. Sau khi đã tìm được trị riêng của f, thì nghiệm không tầm thường của hệ phương trình thuần nhất

$$(A - \lambda E)x = 0$$

là vectơ riêng của f ứng với trị riêng λ.

B – ĐỀ BÀI

1. Hãy kiểm tra lại 10 tiên đề của không gian vectơ : $\mathbb{R}^n$;

$\mathscr{P}_n = \{P(x) \mid$ các đa thức bậc $\leq n$, với hệ số thực$\}$ và

$\mathfrak{M}_{n \times n} = \{A = [a_{ij}]_{m \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall_{i,J}\}$.

2. Với các phép toán đã xét trong thí dụ 1, các tập hợp

a) $U = \{x = (x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

b) $W = \{x = (x_1, x_2, 1, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

có phải là không gian vectơ không ?

3. Tập hợp $X = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, 3, 4\}$ có phải là không gian vectơ không nếu đưa vào hai phép toán sau :

Với $x, y \in X$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ với $x_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,4}$; $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ với $y_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,4}$ thì $x + y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4)$.

Và với $\lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda x = (x_1^{\lambda}, x_2^{\lambda}, x_3^{\lambda}, x_4^{\lambda})$.

4. Các tập hợp những hàm số sau đây, trong đó phép cộng hai hàm số, phép nhân hàm số với một số thực được hiểu theo nghĩa thông thường có là không gian vectơ không ?

a) Tập hợp các hàm số f(x) liên tục trên [a, b].

b) Tập hợp các hàm số f(x) khả vi trên [a, b].

c) Tập hợp các hàm số sơ cấp.

5. Tập hợp các đa thức bậc n hệ số thực với phép cộng hai đa thức và phép nhân một đa thức với một số thực có phải là một không gian vectơ không ?

6. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4t = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4t = 0 \\ d_1x + d_2y + d_3z + d_4t = 0 \end{cases}$$

(a_i, b_i, c_i, $d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$) với phép cộng hai nghiệm, phép nhân nghiệm với số thực thông thường là một không gian vectơ.

7. Chứng minh rằng tập hợp $\mathcal{M}_{2\times 2}$ các ma trận vuông cỡ 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

với phép cộng hai ma trận và phép nhân ma trận với một số thực thông thường là một không gian vectơ.

8. Chứng minh rằng tập hợp $F = \{y = (0, y_2, y_3, y_4) \mid y_i \in R ; i = 2, 3, 4\}$ là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

9. Chứng minh rằng tập

$$F = \{B \in \mathcal{M}_{2\times 2} | B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

là một không gian con của $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

10. Chứng minh rằng tập hợp

$$F = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid y_2 + y_3 + y_4 = 0\}$$

là một không gian con của $\mathbb{R}^4$,

11. $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là một họ vectơ trong không gian vectơ V. Chứng minh rằng nếu S chứa vectơ θ thì họ S phụ thuộc tuyến tính.

12. Cho $\mathscr{P}_2$ là tập hợp các đa thức bậc ≤ 2 với hệ số thực.

a) Chứng minh rằng họ $S = \{p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, p_2(x) = 2 + 3x + 4x^2, p_3(x) = 3 + 5x + 7x^2\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

b) Họ vectơ $\{q_1(x) = 1, q_2(x) = 1 + x, q_3(x) = 1 + x + x^2\}$ là độc lập tuyến tính.

c) Họ vectơ $\{p(x), p'(x), p''(x)\}$, trong đó $p'(x)$, $p''(x)$ là đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của $p(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ là độc lập tuyến tính.

13. Trong $\mathbb{R}^2$ họ $S = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (0, 1), v_3 = (2, 3), v_4 = (-1, 0)\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

14. Tìm bao tuyến tính của họ vectơ trong câu a) bài tập 12.

15. Cho không gian vectơ $\mathbb{R}^2$.

a) Chứng minh rằng họ $\{e'_1 = (1, 2) ; e'_2 = (3, 4)\}$ là độc lập tuyến tính.

b) Chứng minh rằng họ ấy là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

c) Tìm toạ độ của vectơ $x = (7, 10)$ theo hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

d) Tìm toạ độ của vectơ $x = (7, 10)$ theo cơ sở e'_1, e'_2 trong câu a).

16. Chứng minh rằng họ

$$\left\{e'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, e'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\}$$

độc lập tuyến tính. Từ đó chứng minh rằng họ đó là một cơ sở của $\mathfrak{M}_{2\times 2}$.

17. $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ là một họ vectơ trong $\mathbb{R}^4$. Tìm hạng $r(S)$ nếu :

$x_1 = (1, 1, -1, -1)$ $\quad x_2 = (1, -1, 1, -1)$ $\quad x_3 = (3, 1, -1, 1)$

$x_4 = (3, -1, 1, -1)$ $\quad x_5 = (2, 0, 0, 0)$.

18. Chứng minh rằng tập hợp các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

là một không gian con của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con này.

19. Tìm số chiều và cơ sở của không gian con các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

20. Trong $\mathbb{R}^4$ cho cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ và một cơ sở khác $\{e'_1 = (0, 1, 1, 1), e'_2 = (1, 0, 1, 1), e'_3 = (1, 1, 0, 1), e'_4 = (1, 1, 1, 0)\}$. x là một vectơ có toạ độ (1, 1, 1, 1) theo cơ sở chính tắc. Tìm toạ độ của nó đối với cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$.

21. Với ký hiệu trong bài tập 20, hãy biểu diễn vectơ $x = 8e_1 + 6e_2 + 4e_3 - 18e_4$ theo cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ nếu

$$e'_1 = -3e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \qquad e'_2 = 2e_1 - 4e_2 + e_3 + e_4$$
$$e'_3 = e_1 + 3e_2 - 5e_3 + e_4 \qquad e'_4 = e_1 + e_2 + 4e_3 - 6e_4.$$

22. Các ánh xạ sau đây có phải là ánh xạ tuyến tính không ?

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi $f(x, y, z) = (x, y, -z)$.

b) $f : \mathcal{M}_{n \times n}$, xác định bởi $f(A) = A + A^t$.

c) $f : P_n \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f[p(x)] = p(0)$.

d) $f : V \to V$, xác định bởi $f(v) = v + u$, $u \neq \theta$ là một vectơ xác định.

e) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = x^2$.

g) $f : V \to R$, xác định bởi $f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1$, trong đó $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V.

h) $f : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ xác định bởi $f[p(x)] = p(x) + xp'(x)$.

23. f là một ánh xạ tuyến tính :

a) Nếu $f : V \to \mathbb{R}$, $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = -3$, tính $f(3v_1 + 2v_2)$.

b) Nếu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f[(1, -1)] = (0, 1)$, $f[(1, 1)] = (1, 0)$, tính $f[(1, -7)]$.

c) Nếu $f : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$, $f(x + 2) = 1$, $f(1) = 5$, $f(x^2 + c) = 0$, tính $f(2 - x + 3x^2)$.

24. a) Biết $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính, $f[(2, -1)] = (1, -1, 1)$, $f[(1, 1)] = (0, 1, 0)$, hãy tính $f[(x, y)]$.

b) Biết $f : \mathfrak{M}_{2 \times 2} \to R$ là một ánh xạ tuyến tính, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 = f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$, tính $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

25. a) Chứng minh rằng $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$$

là một toán tử tuyến tính. Tìm ma trận của f.

b) Chứng minh rằng $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2 - 8x_3)$$

là một toán tử tuyến tính. Tìm ma trận của f.

26. a) Cho hai toán tử tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z ; 4x + 5y + 6z ; 7x + 8y + 9z) ;$$

$$g(x, y, z) = (x + 3y + 4{,}5z ; 6x + 7y + 9z ; 10{,}5x + 12y + 13z).$$

Tìm ma trận của toán tử $3f - 2g$ và $f \circ g$.

b) Cho hai toán tử tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi :

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x) ;$$

$$g(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y).$$

Tìm ma trận của toán tử $f \circ g$ và $g \circ f$.

27. a) f là phép quay mỗi vectơ trên mặt phẳng xOy một góc $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Biểu diễn toán tử tuyến tính f + I dưới dạng tọa độ, I là toán tử đồng nhất.

b) f là phép quay mọi vectơ của mặt phẳng xOy một góc α. Tìm ma trận của toán tử tuyến tính $g = f + f^{-1}$.

28. a) Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính với ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính với ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Tìm trị riêng, vectơ riêng của các toán tử tuyến tính với ma trận :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

C – BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. a) Xét tập hợp $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \quad y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Phép cộng được định nghĩa : $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

và phép nhân với số thực λ : $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Ta kiểm ta lại 10 tiên đề của không gian vectơ :

1) Do $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ nên $x_i + y_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

2) $x_i + y_i = y_i + x_i, i = \overline{1, n}$ nên

$$x + y = y + x.$$

3) $x_i + (y_i + z_i) = (x_i + y_i) + z_i, i = \overline{1, n}, z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4) Phần tử trung hoà $\theta = (0, 0, .., 0) \in \mathbb{R}^n$; do $x_i + 0 = x_i$, nên

$$x + \theta = \theta + x = x.$$

5) Với $x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists -x_i \in \mathbb{R}$ để $x_i + (-x_i) = 0$ nên

$$(-x) + x = x + (-x) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), ..., x_n + (-x_n)) = \theta$$

6) Do $\lambda \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x_i \in \mathbb{R}$, vậy

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

7) $\lambda \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}, y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ nên $\lambda(x_i + y_i) = \lambda x_i + \lambda y_i$.

$$\Rightarrow \lambda(x + y) = (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), ..., \lambda(x_n + y_n)) =$$

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + l y_2, ... , \lambda x_n + l y_n) = \lambda x + \lambda y.$$

8) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ nên $(\lambda + \mu)x_i = \lambda x_i + \mu x_i \Rightarrow (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

g) $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda\mu)x_i = \lambda(\mu x_i), i = \overline{1, n} \Rightarrow \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

10) $1.x = (1.x_1, 1.x_2, ..., 1.x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = x$.

Vậy tập hợp $\mathbb{R}^n$ là không gian vectơ với hai phép toán cộng và nhân với số thực đã định nghĩa.

b) Xét tập hợp $\mathcal{P}_n = \{p(x) \mid$ đa thức bậc $\leq n$; hệ số thực$\}$.

$$p(x) = a_o + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathcal{P}_n \;;\; a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$$

$$q(x) = b_o + b_1x + ... + b_nx^n \in \mathcal{P}_n \;;\; b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$$

Phép cộng : $p(x) + q(x) = (a_o + b_o) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$.

Phép nhân với số thực λ : $\lambda p(x) = \lambda a_o + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n$.

Với hai phép toán trên dễ dàng kiểm tra lại 10 tiên đề của không gian vectơ (sinh viên tự kiểm ta), ở đây vectơ trung hoà θ là vectơ :

$$\theta = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n,$$

và vectơ đối của $p(x)$ là $-p(x) = -a_o - a_1x - a_2x^2 - ... - a_nx^n$.

c) Xét tập hợp $\mathcal{M}_{m \times n} = \{A = [a_{ij}]_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \;\; \forall i, j\}$.

Phép toán cộng là cộng các ma trận cùng cỡ ; và phép nhân ma trận với số thực $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathfrak{M}_{m \times n}\ ; \quad B = [b_{ij}]_{m \times n} \in \mathfrak{M}_{m \times n}\ ;$$

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}\ ;$$

$$\lambda A = \lambda[a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng với hai phép toán trên thỏa mãn 10 tiên đề của không gian vectơ.

Thực vậy

1) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$; $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. Do $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ nên $a_{ij} + b_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow A \in \mathfrak{M}_{m \times n},\ \ B \in \mathfrak{M}_{m \times n} \text{ thì } A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \in \mathfrak{M}_{m \times n}.$$

2) $C = [c_{ij}]_{m \times n} \in \mathfrak{M}_{m \times n}$. Do $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ $\forall i, j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

$$\Rightarrow (A + B) + C = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} = A + (B + C).$$

3) $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ $\forall i, j$

$$\Rightarrow A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = B + A.$$

4) Phần tử trung hoà θ là ma trận $0_{m \times n} = [0]_{m \times n}$ và do $a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = a_{ij}$ $\forall i, j$ nên

$$A + \theta = [a_{ij} + 0]_{m \times n} = [0 + a_{ij}]_{m \times n} = \theta + A = A.$$

5) $a_{ij} \in \mathbb{R}$ nên $\exists -a_{ij}$ để $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow A + (-A) = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = \theta.$$

6) $\lambda \in \mathbb{R}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i, j \Rightarrow \lambda a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall i, j$ nên

$$\lambda A = \lambda[a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n} \in \mathfrak{M}_{m \times n}.$$

7) $A \in \mathfrak{M}_{m \times n}$; $B \in \mathfrak{M}_{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Do $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ nên

$$\lambda(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} \quad \forall i, j \text{ nên}$$

$$\lambda(A + B) = [\lambda(a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}]_{m \times n} = \lambda A + \lambda B.$$

8) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, a_{ij} \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda + \mu)a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij}$ nên

$$(\lambda + \mu)A = [(\lambda + \mu)a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}]_{m \times n} = \lambda A + \mu A.$$

9) $\lambda(\mu A) = [\lambda(\mu a_{ij})]_{m \times n} = [(\lambda\mu)a_{ij}]_{m \times n} = (\lambda\mu)A.$

10) $1.A = [1.a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A.$

Vậy $\mathcal{M}_{m \times n}$ với hai phép toán cộng ma trận và nhân ma trận với số thực là không gian vectơ.

2. a) $U = \{x = (x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Với các phép toán đã xét trong bài tập 1. Ta thấy $U \in \mathbb{R}^4$.

Xét $x = (x_1, x_2, 0, 0) \in U, y = (y_1, y_2, 0, 0) \in U$ thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0 + 0, 0 + 0)$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0, 0) \in U.$$

$$\lambda x = (\lambda x_1 + \lambda x_2, 0, 0) \in U.$$

Vậy U là không gian vectơ và là không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^4$.

b) $W = \{x = (x_1, x_2, 1, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

với phép cộng $x = (x_1, x_2, 1, 1) \in W$;

$$y = (y_1, y_2, 1, 1) \in W$$

thì $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 2, 2) \notin W$.

Vậy W không phải là không gian vectơ.

3. Tập hợp $X = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}_+ ; i = \overline{1, 4}\}$.

Xét $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in X ; y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in X$

Phép cộng : $x + y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4)$.

Phép nhân với số thực λ : $\lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, x_3^\lambda, x_4^\lambda)$.

Ta kiểm tra 10 tiên đề của không gian vectơ đối với hai phép toán trên.

1) Do $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+, i = \overline{1, 4} \Rightarrow x_i y_i \in \mathbb{R}_+, i = \overline{1, 4} \Rightarrow x, y \in X$ thì

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4) \in X.$$

2) Do $x_iy_i = y_ix_i, i = \overline{1, 4}$ nên

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4) = y + x.$$

3) $x, y \in X$ và $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in X$.

Do $(x_iy_i)z_i = x_i(y_iz_i), i = \overline{1, 4}$ nên

$$(x + y) + z = ((x_1y_1)z_1, (x_2y_2)z_2, (x_3y_3)z_3, (x_4y_4)z_4)$$
$$= (x_1(y_1z_1), x_2(y_2z_2), x_3(y_3z_3), x_4(y_4z_4)) = x + (y + z).$$

4) Phần tử trung hoà θ chọn : $\theta = (1, 1, 1, 1) \in X$ vì $1 \in \mathbb{R}_+$.

Với $x \in X \Rightarrow x + \theta = \theta + x = (1.x_1, 1.x_2, 1.x_3, 1.x_4)$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) = x.$$

5) Với $x \in X$. Do $x_i \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \exists \frac{1}{x_i} = x_i^{-1} \in \mathbb{R}_+, i = \overline{1, 4}$; hay $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ thì $\exists y = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right) \in X$ để

$$x + y = y + x = \left(x_1\frac{1}{x_1}, x_2\frac{1}{x_2}, x_3\frac{1}{x_3}, x_4\frac{1}{x_4}\right)$$
$$= (1, 1, 1, 1) = \theta.$$

6) $x \in X$; $\lambda \in \mathbb{R}$ thì $x_i^\lambda \in \mathbb{R}_+, i = \overline{1, 4}$

$$\Rightarrow \lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, x_3^\lambda, x_4^\lambda) \in X.$$

7) $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$. Do $x_i, y_i \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}$ nên $(x_iy_i)^\lambda = x_i^\lambda . y_i^\lambda, i = \overline{1, 4}$

$$\Rightarrow \lambda(x + y) = ((x_1y_1)^\lambda, (x_2y_2)^\lambda, (x_3y_3)^\lambda, (x_4y_4)^\lambda)$$
$$= (x_1^\lambda y_1^\lambda, x_2^\lambda y_2^\lambda, x_3^\lambda y_3^\lambda, x_4^\lambda y_4^\lambda) = \lambda x + \lambda y.$$

8) $x \in X$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_i^{\lambda+\mu} = x_i^\lambda . x_i^\mu, i = \overline{1, 4}$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu)x = (x_1^{\lambda+\mu}, x_2^{\lambda+\mu}, x_3^{\lambda+\mu}, x_4^{\lambda+\mu}) = \lambda x + \mu x.$$

9) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in X, x_i^{\lambda\mu} = (x_i^{\lambda})^{\mu}, i = \overline{1, 4}$

$$\Rightarrow \qquad (\lambda\mu)x = (x_1^{\lambda\mu}, x_2^{\lambda\mu}, x_3^{\lambda\mu}, x_4^{\lambda\mu})$$

$$= ((x_1^{\lambda})^{\mu}, (x_2^{\lambda})^{\mu}, (x_3^{\lambda})^{\mu}, (x_4^{\lambda})^{\mu}) = \mu(\lambda x).$$

10) $1.x = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x.$

Vậy tập hợp X với hai phép toán trên là không gian vectơ.

4. a) $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b] \Rightarrow f(x) + g(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$.

$\lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a, b]$;

Phần tử trung hoà $\theta = 0$ liên tục trên $[a, b]$;

Phần tử đối của $f(x)$ là $-f(x)$ liên tục trên $[a, b]$;

(Sinh viên tự kiểm tra 10 tiên đề không gian vectơ).

Vậy $F = \{f(x) \mid$ hàm liên tục trên $[a, b]\}$ là không gian vectơ.

b) Tập hợp $G = \{f(x) \mid f(x)$ khả vi trên $[a, b]\}$.

Do $f(x)$, $g(x)$ khả vi trên $[a, b]$ nên $f(x) + g(x)$ cũng khả vi trên $[a, b]$ và $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$, $\lambda f(x)$ cũng khả vi trên $[a, b]$ và $[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$. Phần tử trung hoà là $\theta = 0$.

Do $f(x) \in G$ thì tồn tại $-f(x) \in G$ để $[f(x) + (-f(x))]' = f'(x) - f'(x) = 0$.

Vậy G là không gian vectơ (sinh viên tự kiểm tra).

c) (Sinh viên tự kiểm tra).

5. $\mathcal{P}_2 = \{p(x) \mid$ bậc bằng 2, hệ số thực$\}$.

Xét hai đa thức $\quad p(x) = 2x^2 - 3x + 4 \in \mathcal{P}_2$;

$$q(x) = -2x^2 + 5x + 3 \in \mathcal{P}_2.$$

Nhưng $p(x) + q(x) = 2x + 7 \notin \mathcal{P}_2$. Vậy $\mathcal{P}_2$ đang xét không phải là không gian vectơ.

6. Hệ phương trình đã cho được viết lại dưới dạng AX = 0 (1), trong đó

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \; ; \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} ; \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) Nếu $\det(A) \neq 0$ thì hệ (1) chỉ tồn tại nghiệm X = 0 nên tập hợp nghiệm F chỉ gồm một phần tử X = 0 vậy F = {0}. Tập hợp F đó là không gian vectơ.

b) Nếu $\det(A) = 0$, hệ (1) có nghiệm X = 0, ngoài ra còn có nghiệm $X \neq 0$. Gọi tập hợp nghiệm của hệ (1) là G.

$$\text{Giả sử } X^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{bmatrix} ; \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \; ; \; X^{(1)}, X^{(2)} \in G.$$

Ta chỉ cần chỉ ra $X^{(1)} + X^{(2)} \in G$ và $\lambda X^{(1)} \in G$ là đủ.

Thực vậy, $\quad X^{(1)}, X^{(2)} \in G \Rightarrow AX^{(1)} = 0 \; ; \; AX^{(2)} = 0 \; ;$

$$A(X^{(1)} + X^{(2)}) = AX^{(1)} + AX^{(2)} = 0.$$

Vậy $X^{(1)} + X^{(2)} \in G$. Với $\lambda \in \mathbb{R}$ nên $A(\lambda X^{(1)}) = \lambda(AX^{(1)}) = 0$, vậy $\lambda X^{(1)} \in G \Rightarrow G$ là không gian vectơ (sinh viên tự kiểm tra 8 tiên đề còn lại). Ở đây cũng có thể nói $G \subset \mathbb{R}^4$. Các phép toán cũng là các phép toán trong $\mathbb{R}^4$; nên G là không gian con của không gian vectơ $\mathbb{R}^4$.

7. Tập hợp $\mathcal{M}_{2 \times 2} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ là không gian vectơ (xem phần c bài tập 1, m = n = 2).

8. Tập hợp $F = \{y = (0, y_2, y_3, y_4) \mid y_i \in \mathbb{R} \; ; \; i = 2, 3, 4\}$. Tập hợp $F \subset \mathbb{R}^4$ (xem phần a bài tập 1).

Xét 2 vectơ $u = (0, u_2, u_3, u_4) \in F$, $v = (0, v_2, v_3, v_4) \in F$ thì $u + v = (0, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) \in F$ vì $u_i, v_i \in \mathbb{R}$; $i = 2, 3, 4$ nên $u_i + v_i \in \mathbb{R}$; $i = 2, 3, 4$.

Và $\lambda u = (0, \lambda u_2, \lambda u_3, \lambda u_4) \in F$ vì $u_i \in \mathbb{R}$; $i = 2, 3, 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Vậy F là không gian con của không gian $\mathbb{R}^4$.

9. Tập hợp $F = \left\{ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Ta thấy $F \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}$ (xem bài tập 7), vì ở đây tập hợp F có các phần tử trên đường chéo chính bằng nhau.

Xét $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_1 \end{bmatrix} \in F$; $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & a_2 \end{bmatrix} \in F$

Do các phần tử thực $\Rightarrow a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \in F$ vì các phần tử trên đường chéo chính bằng nhau.

Với $\lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1 \in \mathbb{R}$ nên

$\lambda M_1 = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda a_1 \end{bmatrix} \in F$ vì các phần tử trên đường chéo chính bằng nhau.

Vậy $F \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}$, F là không gian con của $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.

10. Tập hợp $F = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid y_2 + y_3 + y_4 = 0\}$. Trước hết $F \subset \mathbb{R}^4$ với đặc điểm tổng các thành phần thứ hai, ba, bốn của vectơ y bằng 0.

Xét $\quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$; $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in F$

với $\quad y_2 + y_3 + y_4 = 0$; $v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

$\Rightarrow \quad y + v = (y_1 + v_1, y_2 + v_2, y_3 + v_3, y_4 + v_4) \in F$ vì

$$(y_2 + v_2) + (y_3 + v_3) + (y_4 + v_4) = (y_2 + y_3 + y_4) + (v_2 + v_3 + v_4) = 0$$

và $\quad \lambda y = (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3, \lambda y_4) \in F$ vì

$$\lambda y_2 + \lambda y_3 + \lambda y_4 = \lambda(y_2 + y_3 + y_4) = 0.$$

Vậy F là không gian con của không gian $\mathbb{R}^4$.

11. Giả sử họ vectơ $S = \{x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_k\} \subset V$, có vectơ $x_j = \theta$ (vectơ "0").

Do $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_kx_k = 0$ có thể thỏa mãn khi $c_j \neq 0$, còn $c_1, c_2, ..., c_{j-1}, c_{j+1}, ..., c_k = 0$ nên họ vectơ S phụ thuộc tuyến tính.

12. $\mathcal{P}_2 = \{p(x) \mid$ đa thức bậc ≤ 2, hệ số thực$\}$.

a) Xét họ vectơ $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} \subset \mathcal{P}_2$.

$$p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 \ ;\ p_2(x) = 2 + 3x + 4x^2 \ ;\ p_3(x) = 3 + 5x + 7x^2$$

Trong trường hợp này dễ dàng thấy rằng $p_3 = 1.p_1 + 1.p_2$.

Vậy họ S phụ thuộc tuyến tính.

b) Họ vectơ $V = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\} \subset \mathcal{P}_2$;

$$q_1(x) = 1,\ q_2(x) = 1 + x,\ q_3(x) = 1 + x + x^2.$$

Xét $c_1q_1(x) + c_2q_2(x) + c_3q_3(x) = c_1.1 + c_2(1 + x) + c_3(1 + x + x^2)$

$$= (c_1 + c_2 + c_3) + (c_2 + c_3)x + c_3x^2 = 0 \ \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ \phantom{c_1 + {}} c_2 + c_3 = 0 \\ \phantom{c_1 + c_2 + {}} c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Vậy họ vectơ V độc lập tuyến tính.

c) Họ vectơ $U = \{p(x), p'(x), p''(x)\} \subset \mathcal{P}_2$; trong đó :

$$p(x) = ax^2 + bx + c \ ; \quad a, b, c \in \mathbb{R} \ ;$$

$$p'(x) = 2ax + b \ ;$$

$$p''(x) = 2a.$$

Xét $\quad c_1p_1(x) + c_2p'(x) + c_3p''(x)$

$$= c_1(ax^2 + bx + c) + c_2(2ax + b) + c_3.2a$$

$$= ac_1x^2 + (bc_1 + 2ac_2)x + (cc_1 + bc_2 + 2ac_3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac_1 = 0 \\ bc_1 + 2ac_2 = 0 \\ cc_1 + bc_2 + 2ac_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Vậy họ vectơ V độc lập tuyến tính.

13. Họ vectơ $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^2$;

$$v_1 = (1, 1) ; \quad v_2 = (0, 1) ; \quad v_3 = (2, 3) ; \quad v_4 = (-1, 0).$$

Xét $\quad c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 =$

$$= c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1 + 2c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \end{matrix}\right\}$ là hệ hai phương trình bốn ẩn : cho c_1, c_3 tự do

$\Rightarrow c_4 = c_1 + 2c_3 ; c_2 = -c_1 - 3c_3.$

Vậy c_1, c_2, c_3, c_4 không thể đồng thời bằng "không". Họ S phụ thuộc tuyến tính.

14. Họ vectơ $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\} \subset \mathcal{P}_2$.

$$p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 ; p_2(x) = 2 + 3x + 4x^2 ; p_3(x) = 3 + 5x + 7x^2.$$

Xét $\quad q(x) = a + bx + cx^2 ; a, b, c \in \mathbb{R}.$

$$\text{span}(S) = \{q(x) \mid q(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Ta đi tìm liên hệ giữa a, b, c sao cho

$a + bx + cx^2 = \alpha(1 + 2x + 3x^2) + \beta(2 + 3x + 4x^2) + \gamma(3 + 5x + 7x^2)$ $\forall x$, α, β, γ không đồng thời bằng "0" :

$$a + bx + cx^2 = (\alpha + 2\beta + 3\gamma) + (2\gamma + 3\beta + 5\gamma)x + (3\alpha + 4\beta + 7\gamma)x^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + 2\beta + 3\gamma = a \\ 2\alpha + 3\beta + 5\gamma = b \\ 3\alpha + 4\beta + 7\gamma = c \end{matrix}\right\}$$

Tìm liên hệ a, b, c sao cho α, β, γ không đồng thời bằng "0".

Xét $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 3 & 4 & 7 & c \end{array}\right] \xrightarrow{(h_2 - 2h_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -1 & -1 & b - 2a \\ 0 & -2 & -2 & c - 3a \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[(h_3 - 2h_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & 2a - b \\ 0 & 0 & 0 & c - 3a - 2b + 4a \end{array}\right]$$

Điều kiện $r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow c - 3a - 2b + 4a = 0 \Rightarrow c = 2b - a$. Vậy tập hợp đa thức q(x) có dạng : $q(x) = a + bx + (2b - a)x^2$.

$$\text{span}(S) = \{q(x) \mid q(x) = a + bx + (2b - a)x^2\}.$$

15. a) $S = \{e'_1 = (1, 2) ; e'_2 = (3, 4)\}$; $e'_1, e'_2 \in \mathbb{R}^2$.

Hệ S độc lập tuyến tính. Thực vậy

$$\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \text{ Có } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Vậy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Vậy hệ S độc lập tuyến tính.

b) Để chứng minh họ S là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, ta còn phải chứng minh họ S là hệ sinh.

Thực vậy, xét $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$; $a, b \in \mathbb{R}$ thì $x = \alpha e'_1 + \beta e'_2$ (*)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ luôn luôn tồn tại } \alpha, \beta \neq 0.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + 4\beta &= b \end{aligned}\right\}. \text{ Có } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Vậy $x \in \mathbb{R}^2$ luôn luôn biểu diễn được dưới dạng (*).

Vậy họ vectơ $S = \{e'_1, e'_2\}$ là một cơ sở trong $\mathbb{R}^2$.

c) $F = \{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ là hệ cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^2$. Vậy $x = (7, 10) \in \mathbb{R}^2$ ta có $x = \alpha e_1 + \beta e_2$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha = 7 \\ \beta = 10 \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow \quad x = 7e_1 + 10e_2$;

(7, 10) là toạ độ của vectơ x theo hệ cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^2$.

d) Xét hệ cơ sở $\{e'_1, e'_2\}$ trong câu b).

$$x = \alpha e'_1 + \beta e'_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 3\beta = 7 \\ 2\alpha + 4\beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$$

Vậy $x = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ hay

$x = e'_1 + 2e'_2$. Vậy (1, 2) là toạ độ của vectơ x theo hệ cơ sở e'_1, e'_2.

16. *Hướng dẫn*. Cần chứng minh họ $v = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ độc lập tuyến tính. $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ và chứng minh luôn luôn tồn tại $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ không đồng thời bằng "0" để

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4$$

hay nói khác đi, hệ V là hệ sinh trong $\mathfrak{M}_{2\times 2}$.

17. Tìm r(s), $s = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$.

$x_1 = (1, 1, -1, 1)$; $x_2 = (1, -1, 1, -1)$; $x_3 = (3, 1, -1, 1)$;

$x_4 = (3, -1, 1, -1)$; $x_5 = (2, 0, 0, 0)$.

$$\text{Xét} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (h_2 - h_1) \\ \longrightarrow \\ (h_3 - 3h_1) \\ (h_4 - h_3) \\ (h_5 - 2h_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{(h_3-h_2)\\(h_4-h_2)\\(h_5-h_2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ r(A) = 2. Hạng của ma trận A cũng là hạng của họ S. Vậy r(S) = 2.

18. Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng ma trận AX = 0 (1), trong đó :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ (1) là hệ thuần nhất. Tìm r(A).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 1.$$

Như vậy hệ phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0.$$

Cho x_2, x_3, x_4 là ẩn tự do thì $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$. Gọi F là tập hợp các nghiệm của hệ phương trình (1) :

$$F = \{X^* = (-2x_2 - 3x_3 - 4x_4, x_2, x_3, x_4)\ ;\ x_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, 4\}.$$

Dễ dàng chỉ ra $F \subset \mathbb{R}^4$, F là không gian con của $\mathbb{R}^4$. Lại do $\dim\mathbb{R}^4 = 4$; r(A) = 1 nên dimF = k = 4 − 1 = 3. Để tìm một cơ sở của F, ta lần lượt cho $x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$; $x_3 = 1, x_2 = x_4 = 0$; $x_4 = 1, x_2 = x_3 = 0$ ta được hệ

$$y_1 = (-2, 1, 0, 0)\ ;\ y_2 = (-3, 0, 1, 0)\ ;\ y_3 = (-4, 0, 0, 1).$$

Dễ dàng chỉ ra hệ $\{y_1, y_2, y_3\}$ độc lập tuyến tính và là hệ sinh ra không gian F.

19. *Hướng dẫn* : Tìm tập hợp nghiệm $F \subset \mathbb{R}^3$ như trong bài tập 18 ta được kết quả.

20. Hệ cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset \mathbb{R}^4$.

và hệ cơ sở khác $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\} \subset \mathbb{R}^4$.

Vectơ x = (1, 1, 1, 1) theo hệ cơ sở chính tắc. Để tìm toạ độ của x theo hệ cơ sở $\{e'_i\}_{i=\overline{1,4}}$ ta tiến hành như sau :

Do

$$\left.\begin{array}{l} e'_1 = (0, 1, 1, 1) \Rightarrow e'_1 = 0e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ e'_2 = (1, 0, 1, 1) \Rightarrow e'_2 = e_1 + 0e_2 + e_3 + e_4 \\ e'_3 = (1, 1, 0, 1) \Rightarrow e'_3 = e_1 + e_2 + 0e_3 + e_4 \\ e'_4 = (1, 1, 1, 0) \Rightarrow e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + 0e_4 \end{array}\right\}$$

ta có ma trận chuyển cơ sở

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đặt $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}$ là toạ độ của vectơ x theo hệ cơ sở $\{e'_i\}_{i=\overline{1,4}}$ thì theo công thức biến đổi toạ độ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \\ \xi_1 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 1 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \end{array}\right\}.$$

Giải ra ta được $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $x = (1, 1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ theo hệ chính tắc thì $x = \frac{1}{3}(e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4)$ và $\xi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ là toạ độ của vectơ x theo hệ cơ sở $\{e_i\}_{i=\overline{1,4}}$.

21. Viết lại dạng bài toán 20 :

Cho $x = 8e_1 + 6e_2 + 4e_3 - 18e_4 \Rightarrow x = (8, 6, 4, -18)$ theo hệ cơ sở chính tắc $\{e_i\}_{i=\overline{1,4}}$; hệ cơ sở mới sẽ là

$$e'_1 = (-3, 1, 1, 1) \qquad e'_2 = (2, -4, 1, 1)$$

$$e'_3 = (1, 3, -5, 1) \qquad e'_4 = (1, 1, 4, -6).$$

Thực hiện như trong bài tập 20 ta được kết quả.

22. a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x, y, -z)$.

Xét $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in \mathbb{R}^3.$$

$$f(u + v) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -z_1 - z_2)$$

$$= (x_1, y_1, -z_1) + (x_2, y_2, -z_2) = f(u) + f(v).$$

$$f(\lambda u) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, -\lambda x_3)$$

$$= \lambda(x_1, x_2, -x_3) = \lambda f(u)$$

Vậy ánh xạ f là ánh xạ tuyến tính.

b) Xét $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathfrak{M}_{n \times n}$; $B = [b_{ij}]_{n \times n} \in \mathfrak{M}_{n \times n}$ thì

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times n} \in \mathfrak{M}_{n \times n}.$$

$$f(A + B) = (A + B) + (A + B)^t = (A + B) + (A^t + B^t)$$

$$= (A + A^t) + (B + B^t) = f(A) + f(B).$$

$$f(\lambda A) = (\lambda A) + (\lambda A)^t = \lambda A + \lambda A^t = \lambda(A + A^t) = \lambda f(A)$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

c) Xét như trong câu a, b.

d) Xét $u_1, u_2 \in V \Rightarrow u_1 + u_2 \in V$.

$f(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) + u$;

$f(u_1) + f(u_2) = (u_1 + u) + (u_2 + u) = u_1 + u_2 + 2u$. Do $u \neq \theta$ nên

$f(u_1 + u_2) \neq f(u_1) + f(u_2)$.

Vậy f không phải là ánh xạ tuyến tính.

e) Xét như trong câu a, b.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$.

$f(x + y) = (x + y)^2 \neq f(x) + f(y)$.

Vậy f không phải là ánh xạ tuyến tính.

g) Xét như trong câu a, b.

h) $f : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n : f[p(x)] = p(x) + xp'(x)$

$$f[p(x) + q(x)] = [p(x) + q(x)] + x[p(x) + q(x)]'$$

$$= [p(x) + xp'(x)] + [q(x) + xq'(x)] = f[p(x)] + f[q(x)].$$

$$f[\lambda p(x)] = \lambda p(x) + x(\lambda p(x))' = \lambda(p(x) + xp'(x)) = \lambda f[p(x)].$$

Vậy f là ánh xạ tuyến tính.

23. a) $f : V \to \mathbb{R}$; $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = -3$.

$\Rightarrow \quad f(3v_1 + 2v_2) = 3f(v_1) + 2f(v_2) = 3.2 + 2(-3) = 0$

b) Do $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ta phân tích $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ theo $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = -7 \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = 4, \beta = -3$. Vậy $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$f[(1, -7)] = f[4(1, -1) -3(1, 1)] = 4f(1, -1) -3f(1, 1)$$

$$= 4(0, 1) - 3(1, 0) = (-3, 4).$$

c) $f : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$, phân tích như trong câu b) được kết quả.

24. a) Phân tích u = (x, y) theo $e'_1 = (2, -1)$; $e'_2 = (1, 1)$.

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha e'_1 + \beta e'_2 = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} 2\alpha + \beta = x \\ -\alpha + \beta = y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}(x - y) \ ; \ \beta = \frac{1}{3}(x + 2y).$$

Do f là ánh xạ tuyến tính nên

$f[(u)] = f[(x, y)] = \alpha f(e'_1) + \beta f(e'_2)$

$$= \frac{1}{3}(x - y)(1, -1, 1) + \frac{1}{3}(x + 2y)(0, 1, 0) = \frac{1}{3}(x - y, 3y, x - y).$$

b) Phân tích $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ theo $e'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $e'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

$e'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $e'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$A = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= a \\ \lambda_2 &= b \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= c \\ \lambda_4 &= d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = a + b - c \ ; \ \lambda_2 = b \ ; \ \lambda_3 = c - b \ ; \ \lambda_4 = d.$$

Do f là ánh xạ tuyến tính nên

$$\begin{aligned} f(A) &= f(\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 + \lambda_4 e'_4) \\ &= \lambda_1 f(e'_1) + \lambda_2 f(e'_2) + \lambda_3 f(e'_3) + \lambda_4 f(e'_4) \\ &= (a + b - c).3 + b(-1) + (c - b).0 + d.0 = 3a + 2b - 3c. \end{aligned}$$

25. a) Xét $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$; $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$; $\lambda x \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2), (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) \\ &= ((x_1 + 2x_2) + (y_1 + 2y_2), (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)) \\ &= (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2) + (y_1 + 2y_2, y_1 - y_2) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

$$f(\lambda x) = (\lambda(x_1 + 2x_2), \lambda(x_1 - x_2)) = \lambda(x_1 + 2x_2, x_1 - x_2) = \lambda f(x).$$

Vậy f là toán tử tuyến tính.

Để tìm ma trận của f ta tính :

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (1,1) = e_1 + e_2 \\ f(e_2) &= f(0,1) = (2,-1) = 2e_1 - e_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ là ma trận của toán tử f.}$$

b) Thực hiện biến đổi như câu a) được kết quả (sinh viên tự giải).

26. a) Do $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z\ ;\ 4x + 5y + 6z\ ;\ 7x + 8y + 9z)$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,4,7) = e_1 + 4e_2 + 7e_3 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (2,5,8) = 2e_1 + 5e_2 + 8e_3 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (3,6,9) = 3e_1 + 6e_2 + 9e_3 \end{aligned}\right\}$$

Ma trận của toán tử f :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$g(x, y, z) = (x + 3y + 4{,}5z\ ;\ 6x + 7y + 9z\ ;\ 10{,}5x + 12y + 13z)$.

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} g(e_1) &= g(1,0,0) = (1\ ;\ 6\ ;\ 10{,}5) = e_1 + 6e_2 + 10{,}5e_3 \\ g(e_2) &= g(0,1,0) = (3\ ;\ 7\ ;\ 12) = 3e_1 + 7e_2 + 12e_3 \\ g(e_3) &= g(0,0,1) = (4{,}5\ ;\ 9\ ;\ 13) = 4{,}5e_1 + 9e_2 + 13e_3 \end{aligned}\right\}$$

Ma trận của toán tử g :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4{,}5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 10{,}5 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Ma trận của toán tử 3f – 2g sẽ là :

$$3A - 2B = E \quad \text{(E là ma trận của toán tử đồng nhất)}$$

và ma trận của $f \circ g$:

$$D = A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4{,}5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 10{,}5 & 12 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44{,}5 & 53 & 61{,}5 \\ 94{,}5 & 119 & 141 \\ 149{,}5 & 185 & 211{,}5 \end{bmatrix}.$$

b) Thực hiện như trong câu a) ta được kết quả.

27. a) Gọi i, j là hai vectơ đơn vị trên hệ trục toạ độ xOy.

Ta có $f(i) = i\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$;

$$f(j) = i\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

Ma trận toán tử f :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ma trận của toán tử đồng nhất I là

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận của toán tử f + I là :

$$A + E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{bmatrix}.$$

Phép đổi f + I có thể viết dưới dạng tọa độ :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = (A + E)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ hay}$$

$$(f + I)(x, y) = (x', y') = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)y\right).$$

b) Tương tự câu a) ta có ma trận của toán tử f :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ma trận của toán tử f^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Ma trận của toán tử $g = f + f^{-1} = 2I\cos\alpha$ là

$$B = A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix}$$

28. a) Xét $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

Vectơ riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 4x - 4y = 0 \Rightarrow x = y = c.$$

Vậy vectơ riêng $u = (c, c) = c(e_1 + e_2)$, với $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ.

b) Xét $A - \lambda E = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0\ ;\ \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 3.$$

Với $\lambda_{1,2} = 1$ có vectơ riêng :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y - z, \text{ cho } y = c_1, z = c_2$$

thì $x = c_1 - c_2$, ta được vectơ riêng

$$u = (c_1 - c_2)e_1 + c_1e_2 + c_2e_3, \text{ với } c_1, c_2 \text{ bất kỳ.}$$

Với $\lambda_3 = 3$ ta có vectơ riêng xác định :

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow z = 0\ ;\ y = -x$, cho $x = c$ ta được vectơ riêng ứng với $\lambda = 3$

$v = (c, -c, 0) = c(e_1 - e_2)$.

c) Tương tự câu a, b ta thu được kết quả.

Chương VI

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tính phân bất định

• Hàm số F(x) gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trong khoảng (a, b) nếu $\forall x \in (a, b)$ ta có $F'(x) = f(x)$ hay $dF(x) = f(x)dx$.

Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên (a, b) thì mọi nguyên hàm của f(x) đều có dạng F(x) + c, c là một hằng số tùy ý. Biểu thức đó gọi là tích phân bất định của hàm số f(x), ký hiệu là $\int f(x)dx$.

Mọi hàm số liên tục trên khoảng (a, b) đều có nguyên hàm trên khoảng đó.

• Bảng các tích phân cơ bản :

$$\int 0dx = c \ ;$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ \ (\alpha \neq -1) \ ;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \ \ (x \neq 0) \ ;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \ \ (a > 0 \text{ và } a \neq 1) \ ;$$

$$\int e^x dx = e^x + c \ ;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \ ;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \ ;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c \ ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg}x + c \ ;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + c \ ;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + c \ ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \ ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c \, .$$

• Các phương pháp tính tích phân bất định :

1) *Phương pháp đổi biến số*

Để tính $\int f(x)dx$ có thể đổi biến số $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ là một hàm số khả vi liên tục và có hàm số ngược. Khi đó ta có công thức

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \, .$$

Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ thì để tính tích phân $\int f(x)dx$, ta đổi biến số $\varphi(x) = t$ và được

$$\int f(x)dx = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int g(t)dt \, .$$

2) *Phương pháp tích phân từng phần*

Nếu $u(x)$, $v(x)$ là hai hàm số khả vi liên tục, ta có công thức

$$\int udv = uv - \int vdu \, .$$

Công thức này được sử dụng khi tính $\int vdu$ đơn giản hơn tính $\int udv$.

Để tính các tích phân $\int P_n(x)\sin axdx$, $\int P_n(x)\cos axdx$, $\int P_n(x)e^{ax}dx$, trong đó : a là hằng số, $P_n(x)$ là đa thức bậc n, ta đặt

$$u = P_n(x), \ dv = \sin axdx \quad (\cos axdx, \ e^{ax}dx).$$

Để tính các tích phân $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x)\text{arctg}x dx$, $\int P_n(x)\text{arccotg}x dx$, ta đặt

$$u = \ln x \quad (\arcsin x, \arccos x, \text{arctg}x, \text{arccotg}x),\ dv = P_n(x)dx.$$

3) *Tích phân các phân thức hữu tỷ*

Phân thức hữu tỷ là phân thức có dạng $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, trong đó $P_m(x)$, $Q_n(x)$ là những đa thức bậc m và n. Phân thức đó gọi là thực sự nếu $m < n$, không thực sự nếu $m \geq n$. Nếu phân thức là không thực sự, ta được một đa thức cộng với một phân thức thực sự.

Các phân thức đơn giản là những phân thức có dạng sau :

(1) $\frac{A}{x-b}$ (A, b là hằng số) ;

(2) $\frac{A}{(x-b)^k}$ (A, b là hằng số, k là số nguyên dương ≥ 2) ;

(3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (M, N, p, q là hằng số, $\Delta = p^2 - 4q < 0$) ;

(4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ (M, N, p, q là hằng số, $\Delta = p^2 - 4q < 0$, k nguyên dương ≥ 2).

Giả thử $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỷ thực sự. Nếu Q(x) có dạng

$$Q(x) = a_o(x-b_1)^{k_1}\dots(x-b_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

trong đó $a_o, b_1, \dots, b_r, p_1, q_1, \dots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$, $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N}^*$, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, \dots, s$, thì phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ có thể phân tích thành tổng của các phân thức đơn giản như sau :

Ứng với thừa số $(x - b)^k$ của Q(x), tổng các phân thức đơn giản thành phần là

$$\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-b)^k}\ ;$$

Ứng với thừa số $(x^2+px+q)^l$ của $Q(x)$, tổng các phân thức đơn giản thành phần là

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}\ ,$$

trong đó : $A_1, \ldots, A_k, \ldots, B_1, C_1, \ldots, B_l, C_l, \ldots$ là những hằng số. Các hệ số ấy được xác định bằng phương pháp trị số riêng hay phương pháp hệ số bất định.

Để tính tích phân của phân thức hữu tỷ đơn giản loại (1) và (2), chỉ cần dùng bảng tích phân cơ bản. Để tính tích phân của phân thức đơn giản loại (3), (4), ta biến đổi $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ và đổi biến số $x+\frac{p}{2}=t$.

4) *Tích phân của một số hàm số lượng giác*

Để tính $\int R(\sin x, \cos x)dx$, ta đổi biến số $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Khi đó $dx=2\frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Đặc biệt nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đổi biến số $\cos x = t$.

Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đổi biến số $\sin x = t$.

Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đổi biến số $\operatorname{tg}x = t$.

Đối với tích phân $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m và n đều chẵn, có thể dùng các công thức $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ để giảm bậc của sin và cos.

5) *Tích phân của một số hàm số vô tỷ*

Để tính $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, trong đó a, b, c, d là những hằng số thỏa mãn điều kiện $ad - bc \neq 0$; m, n, ..., r, s là những số nguyên, ta đổi biến số $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, k là mẫu số chung của $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

Để tính $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, ta viết

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Tùy theo dấu của Δ, ta đặt $\pm\frac{\Delta}{4a^2} = k^2$, $k > 0$ và đổi biến số $x + \frac{b}{2a} = ku$.
Ta sẽ được một trong ba dạng sau :

(1) $\int R_1(u, \sqrt{1 + u^2})du$, ta đổi biến số $u = \text{tg}t$.

(2) $\int R_1(u, \sqrt{1 - u^2})du$, ta đổi biến số $u = \sin t$.

(3) $\int R_1(u, \sqrt{u^2 - 1})du$, ta đổi biến số $u = \frac{1}{\cos t}$.

2. Tích phân xác định

• Cho hàm số f(x) xác định trên [a, b]. Chia [a, b] một cách tùy ý bởi các điểm :

$$a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ lấy một điểm bất kỳ ξ_i và lập tổng $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, với $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\Delta x_i \to 0$, I_n dần tới một giới hạn xác định I không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b] và cách chọn điểm ξ_i trong $[x_i, x_{i+1}]$, thì giới hạn đó gọi là tích phân xác định của hàm số f(x) trên [a, b], ký hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Khi đó ta nói hàm số f(x) khả tích trên [a, b].

Ta có :

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \ ;$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

• Các tính chất

Giả sử các tích phân xác định sau đây đều tồn tại, khi đó :

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số) ;

2) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Giả sử các tích phân xác định sau đều tồn tại và a < b, khi đó :

4) Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

5) Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;

6) Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, m, M là các hằng số thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \ ;$$

7) Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì tồn tại $\xi \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

• Liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm :

1) Nếu f(x) liên tục trên [a, b] thì

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

2) Nếu f(x) liên tục trên [a, b], F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Công thức này gọi là công thức Newton - Leibniz.

• Các phương pháp tính tích phân xác định :

1) *Phương pháp đổi biến số*

a) Để tính $\int_a^b f(x)dx$, trong đó hàm số f(x) liên tục trên [a, b], ta đổi biến số $x = \varphi(t)$. Nếu :

(i) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,

(ii) $\varphi(t)$ và $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$,

(iii) hàm số $f[\varphi(t)]$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$,

thì ta có công thức

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

b) Nếu hàm số dưới dấu tích phân có dạng $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ thì để tính $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, ta đổi biến số $\varphi(x) = t$. Nếu $\varphi(t)$ biến thiên đơn điệu và có đạo hàm $\varphi'(x)$ liên tục trên [a, b], còn g(t) liên tục trên $[\varphi(a), \varphi(b)]$, ta có công thức

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt.$$

2) *Phương pháp tích phân từng phần*

Nếu u(x), v(x) là những hàm số khả vi liên tục trên [a, b] thì

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

• Vài công thức đáng nhớ :

$$1)\quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số lẻ trên [a, b],} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là hàm số chẵn trên [a, b].} \end{cases}$$

$$2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)(2m-3)\ldots3.1}{2m(2m-2)\ldots4.2}.\dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } n = 2m, \\ \dfrac{2m(2m-2)\ldots4.2}{(2m+1)(2m-1)\ldots5.3} & \text{nếu } n = 2m+1. \end{cases}$$

3. Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định

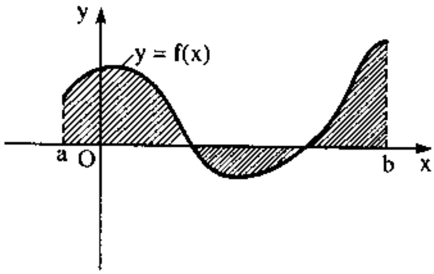
• *Diện tích hình phẳng*

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường y = f(x), trục Ox và các đường thẳng x = a, x = b, trong đó hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] (hình 6.1) được cho bởi công thức

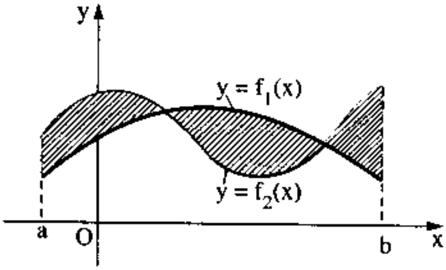
$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ và các đường thẳng x = a, x = b, trong đó $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] (hình 6.2) được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx.$$



Hình 6.1



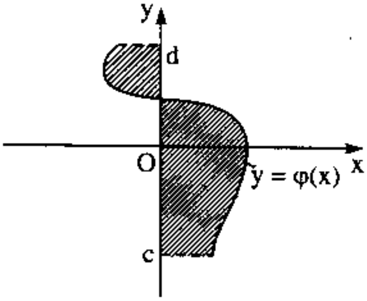
Hình 6.2

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $x = \varphi(y)$, trục Oy và các đường thẳng $y = c$, $y = d$, trong đó hàm số $\varphi(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$ (hình 6.3) được cho bởi

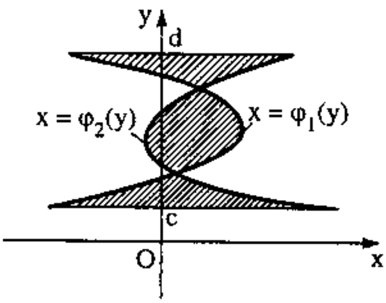
$$S = \int_c^d |\varphi(y)|\,dy.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ và các đường thẳng $y = c$, $y = d$, trong đó hàm số $\varphi_1(y)$ và $\varphi_2(y)$ liên tục trên đoạn $[c, d]$ (hình 6.4) được cho bởi

$$S = \int_c^d |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|\,dy.$$



Hình 6.3



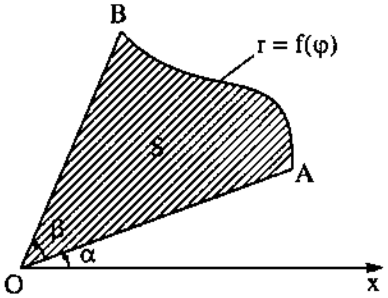
Hình 6.4

Nếu đường cong được cho bởi dạng tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong đó, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$, trong đó các hàm số $\varphi'(t)$ và $\psi(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$ được cho bởi

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)\varphi'(t)|\,dt.$$

Diện tích của hình quạt cong OAB giới hạn bởi đường cong có phương trình cho trong hệ toạ độ cực là $r = f(\varphi)$ và hai tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, trong đó $f(\varphi)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$ (hình 6.5) được cho bởi công thức

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$



Hình 6.5

• *Độ dài cung đường cong phẳng*

Độ dài cung đường cong phẳng $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$, trong đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ được tính theo công thức

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Nếu cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, trong đó các hàm số $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$, thì độ dài của nó được tính bởi

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$$

Nếu cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực $r = f(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, trong đó hàm số $f(\varphi)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ thì độ dài của nó được tính bởi

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

• *Thể tích của vật thể*

Nếu S(x) là diện tích thiết diện của một vật thể giới hạn bởi một mặt cong kín với mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x trên trục hoành, $a \le x \le b$, trong đó S(x) liên tục trên [a, b], thì thể tích của vật thể ấy được cho bởi công thức

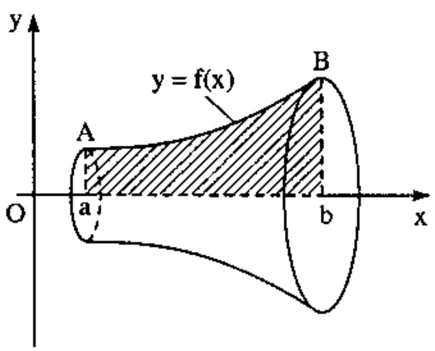
$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay xung quanh trục Ox hình thang cong aABb giới hạn bởi đường y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a, x = b, trong đó f(x) liên tục trên [a, b] (hình 6.6) là

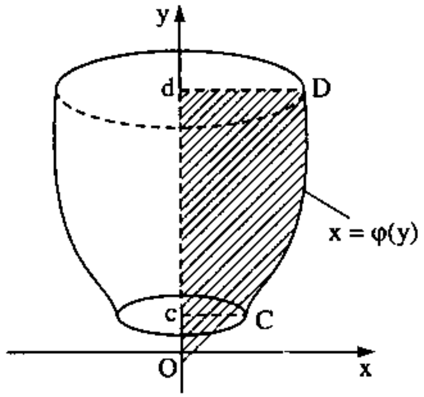
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Thể tích vật thể tròn xoay tạo ra khi quay xung quanh trục Oy hình thang cong cCDd giới hạn bởi đường cong $x = \varphi(y)$, trục Oy và hai đường thẳng y = c, y = d, trong đó hàm số $\varphi(y)$ liên tục trên [c, d] (hình 6.7) được tính bởi

$$V = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$



Hình 6.6



Hình 6.7

• *Diện tích mặt tròn xoay*

Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay xung quanh trục Ox cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$, trong đó $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ (hình 6.8) được tính bởi

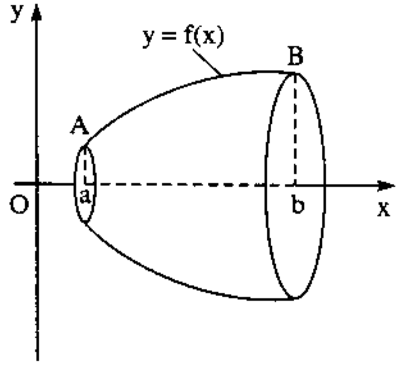
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx .$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, trong đó các hàm số $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$, thì

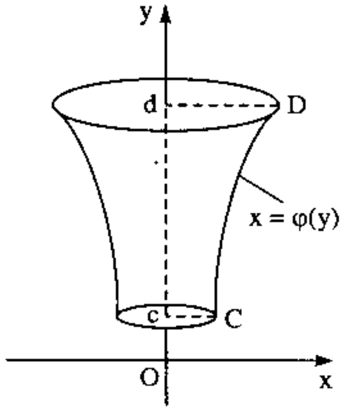
$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt .$$

Diện tích mặt tròn xoay tạo ra khi quay xung quanh trục Oy cung đường cong $\overset{\frown}{CD}$ có phương trình $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, trong đó $\varphi(y)$ có đạo hàm liên tục trên $[c, d]$ (hình 6.9) được cho bởi

$$S = 2\pi \int_c^d |\varphi(y)| \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\, dy .$$



Hình 6.8



Hình 6.9

4. Tích phân suy rộng

1) Trường hợp khoảng lấy tích phân vô hạn

• Giả thử $f(x)$ xác định trong khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trong mọi khoảng $[a, b]$ với $b > a$. Khi đó nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$, giới hạn đó gọi là tích phân suy rộng của hàm số f(x) trong khoảng [a, +∞] và được ký hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Khi đó ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Nếu nó không hội tụ, ta nói nó phân kỳ.

Tương tự

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)dx.$$

• $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

• *Định lý so sánh.* Giả thử các hàm số f(x), g(x) liên tục trên [a, +∞) và $0 \le f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a, +\infty)$.

(i) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

(ii) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

2) *Trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn*

• Giả thử f(x) liên tục trong khoảng [a, b) nhưng $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Khi đó nếu tồn tại giới hạn $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$, ta định nghĩa

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^b f(x)dx,$$

và nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. Tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ gọi là phân kỳ nếu nó không hội tụ.

• $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha < 1$, phân kỳ nếu $\alpha \ge 1$.

• *Định lý so sánh.* Giả sử các hàm số f(x), g(x) liên tục trên [a, b), dần tới ∞ khi x dần tới b và thỏa mãn điều kiện

$$0 \le f(x) \le g(x), \qquad \forall x \in [a, b)$$

(i) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.

(ii) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ.

B – ĐỀ BÀI

Dùng các tính chất của tích phân bất định, tính những tích phân sau :

1. $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$ **2.** $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$

3. $\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$ **4.** $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

5. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ **6.** $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$

7. $\int \frac{(2^{3x}-3^{2x})^2}{2^{3x}3^{2x}}dx$ **8.** $\int 3^{2x}(e^{3x}+2^x.5^{3x})dx$

9. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$ **10.** $\int \frac{1-5\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

11. $\int (3\text{tg}x-2\text{cotg}x)^2dx$ **12.** $\int \frac{dx}{\text{sh}^2x\,\text{ch}^2x}$.

Dùng phương pháp đổi biến số tính những tích phân sau :

13. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$ **14.** $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

15. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ **16.** $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$

17. $\int \frac{\sin x dx}{1 + 3\cos x}$

18. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$

19. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$

20. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} . \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

23. $\int e^{e^x + x} dx$

24. $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 2}$

25. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$

26. $\int \frac{7 - 8x}{2x^2 - 3x + 1} dx$

27. $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 6x + 9} dx$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}$

29. $\int \frac{(3x - 5)dx}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}}$.

Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính các tích phân sau :

30. $\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2x dx$

31. $\int x^2 e^{3x} dx$

32. $\int \arccos x dx$

33. $\int \frac{\mathrm{arctg} x dx}{x^2}$

34. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

35. $\int \cos(\ln x) dx$

36. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

37. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

38. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ và $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$.

Sau đó, dùng kết quả nhận được, tính các tích phân sau :

a) $\int x \arcsin x dx$; b) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 6} dx$; c) $\int \sqrt{3 + 4x - x^2} dx$.

39. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Dùng phối hợp các phương pháp tính tích phân, tính những tích phân sau :

40. $\int e^{-x^2} x^5 dx$

41. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

42. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

43. $\int \frac{\mathrm{arctg} x dx}{x^2(1 + x^2)}$.

Tính tích phân các hàm số hữu tỷ sau :

44. $\int \frac{x - 1}{x^2 + x - 6} dx$

45. $\int \frac{2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 4} dx$

46. $\int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^3 - 8} dx$

47. $\int \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$

48. $\int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2}$

49. $\int \frac{(x^4 - 1)dx}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}$

50. $\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 3x^2 + 4} dx$.

Tính tích phân các hàm số lượng giác sau :

51. $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}$

52. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos x}$

53. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x - \cos^2 x}$

54. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$

55. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin^4 x}$

56. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

57. $\int \frac{1 + \mathrm{tg} x}{1 - \mathrm{tg} x} dx$

58. $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$

59. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$

60. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$

61. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ **62.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$

63. $\int \cos x \cos^2 3x dx$.

Tính tích phân các hàm số vô tỷ sau :

64. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$ **65.** $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$

66. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$ **67.** $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$

68. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$ **69.** $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$.

70. Dùng định nghĩa tích phân xác định, tính $\int_0^b x^2 dx$.

71. Chỉ rõ (không cần tính) tích phân nào lớn hơn :

a) $\int_0^1 \sqrt{e^{2x}+1}\, dx$ hay $\int_0^1 e^x dx$.

b) $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ hay $\int_0^1 x \sin^2 x dx$.

72. Chứng minh rằng : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ nằm giữa $\frac{2}{3} \approx 0,67$ và $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,70$.
Tính giá trị đúng của tích phân đã cho.

73. Dùng tính chất 6 của tích phân xác định, ước lượng giá trị của tích phân : $I = \int_0^2 e^{x^2-x} dx$.

74. Chứng minh rằng : $\int_1^4 \sqrt{1+x^2}\, dx > 7,5$.

75. Tính cường độ trung bình I_m của dòng điện $I = I_o \sin\omega t$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$, trong đó $\omega = \frac{2\pi}{T}$, I_o là giá trị lớn nhất của cường độ dòng điện.

76. Tính đạo hàm của những hàm số sau :

a) $F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0)$.

b) $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1 + t^4}\, dt$.

c) $F(x) = \int_2^{e^x} \frac{\ln z}{z} dz$.

d) $F(x) = \int_{x^2}^1 \ln x dx$.

77. Tính đạo hàm của hàm số : $y = \int_x^5 \sqrt{1 + t^2}\, dt$ tại $x = 0$ và $x = \frac{3}{4}$.

Dùng công thức Newton - Leibniz, tính những tích phân xác định sau :

78. $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$

79. $\int_4^9 \frac{y - 1}{\sqrt{y} + 1} dy$

80. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

81. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

82. Xét tích phân xác định : $\int_0^2 \frac{dx}{(x - 1)^2}$. Ta có :

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{x - 1}\Big|_0^2 = -2,$$

nhưng hàm số dưới dấu tích phân trên đoạn [0, 2] chỉ lấy những giá trị dương, do đó tích phân xác định đã cho không thể bằng một số âm là –2. Hãy chỉ rõ sai lầm ở đâu ?

Dùng phương pháp đổi biến số, tính những tích phân xác định sau :

83. $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6 + 4}}$

84. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$

85. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$

86. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}$

87. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$

88. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$

89. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1 + x}{1 + x}\,dx$

90. $\int_{-2}^{2} \frac{x^5 + 7x^4 + x^3 - 5x^2 - 2}{x^3 + x}\,dx$

91. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$

92. $\int_3^{29} \frac{(x - 2)^{\frac{2}{3}}}{(x - 2)^{\frac{2}{3}} + 3}\,dx$

93. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$

94. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\,dx$

95. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx$

96. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}}$.

97. Chứng minh rằng : Nếu f(x) là hàm số tuần hoàn chu kỳ T thì $\int_a^{a+T} f(x)dx$ không phụ thuộc a, nghĩa là

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Áp dụng tính $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$.

Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính các tích phân xác định sau :

98. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$

99. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

100. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$

101. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,dx$

102. $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}x\,dx$. **103.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau :

104. $y^2 = 9x$ và $y = 3x$.

105. $y = x^3$, $y = 8$ và trục Oy.

106. $y = x^2$, $y = 2 - x$ và trục Ox.

107. $y^2 = 2x + 4$, $y = -2$ và $y = \frac{3x}{2} - 5$ (phần diện tích nằm ở phía trên đường $y = -2$).

108. $y = 6x - 3x^2$, $x = 3$ và trục Ox.

109. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

110. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

111. $r = a\cos 2\varphi$.

112. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

113. Tính độ dài cung đường cong :

a) $y = \ln x$ từ $x = \sqrt{3}$ đến $x = \sqrt{8}$.

b) $y = \frac{x^2}{2} - 1$ giới hạn bởi trục Ox.

114. Tính chu vi hình phẳng giới hạn bởi các đường cong : $y^3 = x^2$ và $y = \sqrt{2 - x^2}$.

115. Tính độ dài một cung xyclôit :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ với } 0 \le t \le 2\pi.$$

116. Tính độ dài đường tròn trong hai trường hợp :

a) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$.

b) $r = R$ (phương trình đường tròn tâm O, bán kính R trong hệ toạ độ cực).

117. Tính thể tích phần hình trụ tròn thẳng đứng, được cắt bởi mặt phẳng đi qua đường kính 2R của đáy và tạo với mặt phẳng đáy một góc α.

118. Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo bởi sự quay xung quanh trục Ox hình giới hạn bởi các đường cong :

a) $y^2 = 4x$ và $x = 4$.

b) $2y = x^2$ và $2x + 2y - 3 = 0$.

119. Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo bởi sự quay xung quanh trục Oy hình giới hạn bởi đường elip :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

120. Tính diện tích mặt tròn xoay, tạo bởi sự quay :

a) Xung quanh trục Ox cung parabol $y^2 = 2px$ với $0 \le x \le a$.

b) Xung quanh trục Oy đường elip : $4x^2 + y^2 = 4$.

c) Xung quanh trục Ox một cung xyclôit :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \text{ với } 0 \le t \le 2\pi.$$

121. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau và tính nếu chúng hội tụ :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$;　　b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$;

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos x dx$;　　d) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x dx$.

122. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)dx}{1 + x^2}$;　　b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2}$;

c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 1)^2(x + 2)}}$.

C – BÀI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN

1. $$\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx = \int\frac{4x+4\sqrt{x}+1}{x^2}dx = \int\left(\frac{4}{x}+4x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\right)dx$$

$$= 4\ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + c.$$

2. $$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx = \int\left(x^{-2}-\frac{2}{x}+1\right)dx$$

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + c.$$

3. $$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \text{arctg}x + c.$$

4. $$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(x^{-2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \text{arctg}x + c.$$

5. $$\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx \quad \int\frac{x^4-x^2-2}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int\left(x^{\frac{10}{3}}-x^{\frac{4}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx$$

$$= \frac{3}{13}x^4.\sqrt[3]{x} - \frac{3}{7}x^2.\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x} + c.$$

6. $$\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$$

$$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + c.$$

7. $$\int\frac{(2^{3x}-3^{2x})^2}{2^{3x}.3^{2x}}dx = \int\frac{2^{6x}-2.2^{3x}.3^{2x}+3^{4x}}{2^{3x}.3^{2x}}dx$$

$$= \int\left[\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^x - 2 + \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^x\right]dx = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln\frac{8}{9}} - 2x + \frac{\left(\frac{9}{8}\right)^x}{\ln\frac{9}{8}} + c.$$

8. $\int 3^{2x}(e^{3x} + 2^x.5^{3x})dx = \int[(3^2.e^3)^x + (3^2.2.5^3)^x]dx$

$$= \frac{(9e^3)^x}{\ln(9e^3)} + \frac{(2250)^x}{\ln(2250)} + c.$$

9. $\int\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int(1 - \sin x)dx = x + \cos x + c.$

10. $\int\frac{1 - 5\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 5(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$$= \int\left(\frac{6}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x}\right)dx = 6\text{tg}x + 4\text{cotg}x + c.$$

11. $\int(3\text{tg}x - 2\text{cotg}x)^2 dx = \int(9\text{tg}^2x - 12 + 4\text{cotg}^2x)dx$

$$= \int\left(9\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 12 + 4\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\right)dx$$

$$= \int\left(\frac{9}{\cos^2 x} - 25 + \frac{4}{\sin^2 x}\right)dx = 9\text{tg}x - 25x - 4\text{cotg}x + c.$$

12. Dùng công thức $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$, ta có thể viết :

$$\int\frac{dx}{\text{sh}^2x\text{ch}^2x} = \int\frac{\text{ch}^2x - \text{sh}^2x}{\text{sh}^2x\text{ch}^2x}dx = \int\frac{dx}{\text{sh}^2x} - \int\frac{dx}{\text{ch}^2x}$$

$$= -\text{coth}x - \text{th}x + c.$$

13. *Cách 1* : Đổi biến số $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ $(t \neq 0)$, ta có :

$$\int\frac{dx}{x^6(1 + x^2)} = -\int\frac{t^6dt}{t^2 + 1} = -\int\left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{t}{t^2 + 1}\right)dt$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \text{arctg}t + c = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \text{arctg}\frac{1}{x} + c.$$

Cách 2 :

$$\int\frac{dx}{x^6(1 + x^2)} = \int\frac{1 + x^2 - x^2}{x^6(1 + x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4(1+x^2)}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{5x^5} - \int\frac{1 + x^2 - x^2}{x^4(1 + x^2)}dx = -\frac{1}{5x^5} - \int\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2(1 + x^2)}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int\frac{1 + x^2 - x^2}{x^2(1 + x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \text{arctg}x + c.$$

Hai kết quả trên thực ra không khác nhau, vì dễ chứng minh rằng : $\forall x \neq 0$, $\text{arctg}x + \text{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\text{sgn}\,x$, trong đó hàm dấu ký hiệu là sgn, được xác định như sau :

$$\text{sgn}\,x = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

Thật vậy, với $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ và :

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x\right) = \text{cotg}(\text{arctg}x) = \frac{1}{\text{tg}(\text{arctg}x)} = \frac{1}{x},$$

do đó $\frac{\pi}{2} - \text{arctg}x = \text{arctg}\frac{1}{x}$.

Với $x < 0$, ta cũng chứng minh tương tự.

14. Đổi biến số $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, ta có :

$$\int\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}dx = -\int\sqrt{\frac{a^2t^2 - 1}{t^2}}.t^2dt.$$

Chú ý rằng miền xác định của hàm số dưới dấu tích phân $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}$ là : $x \neq 0$ và $a^2 - x^2 \geq 0$, nghĩa là $x \neq 0$ và $-a \leq x \leq a$.

Từ đó, suy ra : $t \geq \frac{1}{a}$ hoặc $t \leq -\frac{1}{a}$. Vậy $\sqrt{t^2} = |t|$ và :

$$\int\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}dx = -\int(a^2t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{|t|}dt.$$

Nếu $t > 0$, ta có : $|t| = t$ và

$$\int\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}dx = -\frac{1}{2a^2}\int(a^2t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}d(a^2t^2 - 1)$$

$$= -\frac{1}{3a^2}(a^2t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{-(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3} + c;$$

Nếu $t < 0$, ta có : $|t| = -t$ và

$$\int\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}dx = \frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3} + c$$

(vì $|x| = -x$ nếu $x < 0$).

15. $\displaystyle\int\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int\frac{d(e^x + e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \ln(e^x + e^{-x}) + c.$

16. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x(3 + e^{-x})} = -\int\frac{-e^{-x}dx}{3 + e^{-x}} = -\int\frac{d(3 + e^{-x})}{3 + e^{-x}} = -\ln(3 + e^{-x}) + c.$

17. $\displaystyle\int\frac{\sin x dx}{1 + 3\cos x} = -\frac{1}{3}\int\frac{-3\sin x dx}{1 + 3\cos x} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(1 + 3\cos x)}{1 + 3\cos x}$

$$= -\frac{1}{3}\ln|1 + 3\cos x| + c.$$

18. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3 + 1}} = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{\sqrt{x^3 + 1}} = \frac{1}{3}\int(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}}d(x^3 + 1) =$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 1} + c.$$

19. $\displaystyle\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}d(1+\sin^2 x) = 2\sqrt{1+\sin^2 x} + c$.

20. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \int(\arcsin x)^{\frac{1}{2}}d(\arcsin x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3} + c$.

21. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 2\int(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}d(1+\sqrt{x}) = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + c$.

22. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2\int\frac{dx}{2\sqrt{x}.\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + c$.

23. $\displaystyle\int e^{e^x+x}dx = \int e^{e^x}.e^x dx = \int e^{e^x}d(e^x) = e^{e^x} + c$.

24. Đặt $x^2 = t$, $2xdx = dt$, ta có :

$$\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2t+1+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(t+1)}{1+(t+1)^2} = \frac{1}{2}\text{arctg}(t+1) + c$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg}(x^2+1) + c.$$

25. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+8} = \int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+2}{2} + c$.

26. Ta có : $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{9}{16}\right]$

$$= 2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right].$$

Đặt $x - \frac{3}{4} = t$, $dx = dt$, nhận được :

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}} - 2\int\frac{2tdt}{t^2-\frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right| - 2\ln\left|t^2 - \frac{1}{16}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x-0,5}\right| - 2\ln|x^2 - 1,5x + 0,5| + c.$$

27. Vì $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, nên đổi biến số $x + 3 = t$, $dx = dt$, ta có :

$$\int\frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+9} = \int\frac{3t-11}{t^2}dt = \int\left(\frac{3}{t} - \frac{11}{t^2}\right)dt = 3\ln|t| + \frac{11}{t} + c$$

$$= 3\ln|x+3| + \frac{11}{x+3} + c.$$

28. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}} = \int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}} = \ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}\right| + c.$$

29. Tam thức bậc hai ở mẫu số có thể viết dưới dạng :

$$9 + 6x - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3[(x-1)^2 - 4] = 3[4 - (x-1)^2].$$

Đổi biến số $x - 1 = t$, $dx = dt$, ta có :

$$\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = -\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{-2tdt}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\int(4-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(4-t^2) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2}$$

$$= -\sqrt{3(4-t^2)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{t}{2} + c$$

$$= -\sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-1}{2} + c.$$

30. Đặt $u = x^2 + 7x - 5$, $dv = \cos 2x dx$, ta có :

$$du = (2x+7)dx,\ v = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int(x^2+7x-5)\cos 2x dx = (x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} - \int(2x+7)\frac{\sin 2x}{2}dx.$$

Lại dùng phương pháp tích phân từng phần cho tích phân ở vế phải bằng cách đặt :

$$u = 2x + 7,\ dv = \sin 2x dx.$$

Khi đó : $du = 2dx,\ v = -\dfrac{\cos 2x}{2}$ và

$$\frac{1}{2}\int(2x+7)\sin 2x dx = \frac{1}{2}\left[(2x+7)\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right).2dx\right]$$

$$= -\frac{1}{4}(2x+7)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\,.$$

Vậy : $\displaystyle\int(x^2 + 7x - 5)\cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5)\frac{\sin 2x}{2} +$

$$+ (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + c\,.$$

31. Đặt $u = x^2$, $dv = e^{3x}dx$, ta có :

$$du = 2xdx,\ \ v = \frac{1}{3}e^{3x}.$$

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx\,.$$

Lại dùng phương pháp tích phân từng phần cho tích phân ở vế phải bằng cách đặt :

$$u = x,\ dv = e^{3x}dx.$$

Khi đó : $du = dx,\ v = \dfrac{1}{3}e^{3x}$ và

$$\int xe^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c\,.$$

Vậy : $$\int x^2e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + c$$

$$= \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + c\,.$$

32. Đặt u = arccosx, dv = dx, ta có :

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x \text{ và :}$$

$$\int \arccos x dx = x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c.$$

33. Đặt u = arctgx, dv = $\frac{dx}{x^2}$, ta có :

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = -\frac{1}{x}, \text{ và :}$$

$$\int \frac{\text{arctg}x dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\text{arctg}x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= -\frac{1}{x}\text{arctg}x + \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx$$

$$= -\frac{1}{x}\text{arctg}x + \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{1}{x}\text{arctg}x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$= \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\text{arctg}x + c.$$

34. Đặt u = x, dv = $\frac{dx}{\cos^2 x}$, ta có :

du = dx, v = tgx và :

$$\int \frac{xdx}{\cos^2 x} = x\text{tg}x - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = x\text{tg}x + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$= x\text{tg}x + \ln|\cos x| + c.$$

35. *Cách 1*. Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt : cos(lnx) = u, dx = dv, ta có :

$$du = -\sin(\ln x).\frac{dx}{x},\ v = x \text{ và :}$$

$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \frac{x\sin(\ln x)}{x}dx$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

Lại dùng phương pháp tích phân từng phần cho tích phân ở vế phải bằng cách đặt :

$$u = \sin(\ln x),\ dv = dx.$$

Khi đó : $du = \cos(\ln x).\dfrac{dx}{x},\ v = x$ và :

$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \frac{x\cos(\ln x)}{x}dx$$

$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx.$$

Vậy : $\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx,$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c.$$

Cách 2. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt lnx = t. Suy ra : $x = e^t$, $dx = e^t dt$ và :

$$\int \cos(\ln x)dx = \int e^t \cos t dt.$$

Áp dụng kết quả đã biết :

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2 + b^2} + c$$

với a = b = 1 (xem lại chương 6, giáo trình lý thuyết), ta có :

$$\int \cos(\ln x)dx = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + c.$$

36. *Cách 1.* Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt : $u = x^2$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, ta có :

$$du = 2xdx,\ v = \sqrt{1+x^2} \text{ và :}$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}.2xdx$$

$$= x^2\sqrt{1+x^2} - \int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2)$$

$$= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2) + c.$$

Cách 2. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt $1 + x^2 = t$, ta có $2xdx = dt$ và :

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{(t-1)dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})dt$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2) + c.$$

37. Đặt $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $dv = dx$, ta có :

$$du = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\ v = x \text{ và :}$$

$$\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1+x^2)$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c.$$

38. Tính $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Ta có : $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$$= a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Để tính tích phân ở vế phải, ta dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt :

$$u = x, \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ ta có :}$$

$$du = dx, \; v = -\sqrt{a^2 - x^2} \text{ và :}$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Vậy : $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Chuyển vế, ta có :

$$2\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

Tích phân đã cho cũng có thể tính bằng cách đổi biến số :

$$x = a\sin t, \; t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; dx = a\cos t dt,$$

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,.a\cos t dt = \int a^2\sqrt{1 - \sin^2 t}\,.\cos t dt$$

$$= a^2\int\cos^2 t dt = a^2\int\frac{1 + \cos 2t}{2}dt$$

$$= a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + c = \frac{a^2t}{2} + \frac{a^2\sin t\cos t}{2} + c.$$

Thay trở lại : $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$,

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

ta cũng nhận được :

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c.$$

• Tính $\int\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$.

Với chú ý rằng : $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$ và bằng cách giải tương tự như đối với $\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, ta có :

$$\int\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c.$$

(Sinh viên nên tự giải bài này).

a) Đặt u = arcsinx, dv = xdx, ta có :

$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \frac{x^2}{2}$ và :

$$\int x\arcsin x dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int\frac{x^2dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\arcsin x$$

$$= \frac{1}{4}\left[(2x^2 - 1)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right] + c.$$

b) $\int\sqrt{x^2 + 2x + 6}dx = \int\sqrt{(x+1)^2 + 5}\,d(x+1)$

$$= \frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2 + 5} + \frac{5}{2}\ln\left|x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 5}\right| + c.$$

c) $\int\sqrt{3 + 4x - x^2}dx = \int\sqrt{7 - (x-2)^2}\,d(x-2)$

$$= \frac{x-2}{2}\sqrt{7 - (x-2)^2} + \frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}} + c.$$

39. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int\frac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$= -\int\sqrt{1-x^2}\,dx + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right) + \arcsin x + c.$$

(ở đây, ta đã dùng kết quả của bài tập 38).

Vậy : $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$

Sinh viên nên tự giải bài tập này bằng cách dùng trực tiếp phương pháp tích phân từng phần, đặt : $u = x$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

40. Đổi biến số $-x^2 = t$, $-2xdx = dt$, ta có :

$$\int e^{-x^2}x^5dx = -\frac{1}{2}\int e^t.t^2dt$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = t^2$, $e^tdt = dv$, ta có :

$du = 2tdt$, $v = e^t$ và :

$$\int e^{-x^2}x^5dx = -\frac{1}{2}\left[t^2e^t - 2\int te^tdt\right].$$

Lại dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = t$, $e^tdt = dv$, $du = dt$, $v = e^t$, nhận được :

$$\int e^{-x^2}x^5dx = -\frac{1}{2}e^t(t^2 - 2t + 2) + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2) + c\,.$$

41. Đổi biến số $\sqrt{x} = t$, $dx = 2tdt$, ta có :

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t tdt$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = t$, $dv = e^t dt$, $du = dt$, $v = e^t$, nhận được :

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2te^t - 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c\,.$$

42. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}dx = \int \frac{\arcsin x dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$.

Đổi biến số : $\arcsin x = t$, $x = \sin t$, $1 - x^2 = \cos^2 t$, $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = dt$, ta có :

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}dx = \int \frac{tdt}{\cos^2 t}.$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt :

$t = u$, $\dfrac{dt}{\cos^2 t} = dv$, ta có :

$dt = du$, $v = \text{tg}t$ và :

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = t\text{tg}t - \int \text{tg}t dt = t\text{tg}t + \int \frac{d(\cos t)}{\cos t}$$

$$= t\text{tg}t + \ln|\cos t| + c.$$

Thay $t = \arcsin x$, $\text{tg}t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\ln|\cos t| = \ln\sqrt{1 - x^2}$ ta nhận được :

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + c\,.$$

43. Đổi biến số : arctgx = t, x = tgt, $\dfrac{dx}{1 + x^2} = dt$, ta có :

$$\int \frac{\text{arctg}x dx}{x^2(1 + x^2)} = \int \frac{tdt}{\text{tg}^2 t}.$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt :

$$t = u, \ \frac{dt}{\text{tg}^2 t} = dv \text{ , ta có :}$$

$$dt = du, \ v = \int \frac{dt}{\text{tg}^2 t} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt$$

$$= \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -(\text{cotg}t + t) \text{ và :}$$

$$\int \frac{\text{arctg}x dx}{x^2(1 + x^2)} = -(\text{cotg}t + t)t + \int (\text{cotg}t + t) dt$$

$$= -t\text{cotg}t - t^2 + \int \frac{\cos t dt}{\sin t} + \int t dt$$

$$= -t\text{cotg}t - t^2 + \ln|\sin t| + \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$= -t\text{cotg}t - \frac{t^2}{2} + \ln|\sin t| + c.$$

Thay $t = \text{arctg}x$, $\text{cotg}t = \dfrac{1}{\text{tg}t} = \dfrac{1}{x}$, $|\sin t| = \dfrac{|\text{tg}t|}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 t}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}}$

nhận được :

$$\int \frac{\text{arctg}x dx}{x^2(1 + x^2)} = -\frac{1}{x}\text{arctg}x - \frac{1}{2}(\text{arctg}x)^2 + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right| + c.$$

44. Mẫu số $x^2 + x - 6$ có thể phân tích thành :

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Do đó :

$$\frac{x - 1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}.$$

Quy đồng mẫu số vế bên phải và khử mẫu số ở hai vế, ta có :

$$x - 1 = A(x + 3) + B(x - 2).$$

Dùng phương pháp trị số riêng, cho :

$x = 2$ ở cả hai vế, có $5A = 1$, rút ra : $A = \frac{1}{5}$,

$x = -3$ ở cả hai vế, có $-5B = -4$, rút ra : $B = \frac{4}{5}$.

Vậy : $$\int \frac{x - 1}{x^2 + x - 6}dx = \int \left(\frac{1}{5}.\frac{1}{x - 2} + \frac{4}{5}.\frac{1}{x + 3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x - 2| + \frac{4}{5}\ln|x + 3| + c.$$

45. Mẫu số $x^3 - 3x^2 + 4$ có thể phân tích thành :

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1).$$

Do đó :

$$\frac{2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{A}{(x - 2)^2} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Quy đồng mẫu số vế bên phải và khử mẫu số ở hai vế, ta có :

$$2x - 5 = A(x + 1) + B(x - 2)(x + 1) + C(x - 2)^2.$$

Dùng phương pháp trị số riêng, cho :

$x = 2$ ở cả hai vế, có : $-1 = 3A$, rút ra : $A = -\frac{1}{3}$,

$x = -1$ ở cả hai vế, có : $-7 = 9C$, rút ra : $C = -\frac{7}{9}$,

$x = 0$ ở cả hai vế, có : $-5 = A - 2B + 4C$, rút ra : $B = \frac{7}{9}$.

Vậy : $$\int \frac{2x - 5}{x^3 - 3x^2 + 4}dx = \int \left(\frac{-1}{3(x - 2)^2} + \frac{7}{9(x - 2)} - \frac{7}{9(x + 1)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3(x - 2)} + \frac{7}{9}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 1}\right| + c.$$

46. Chia tử số cho mẫu số, ta có :

$$\frac{x^3 + x^2 - 5}{x^3 - 8} = 1 + \frac{x^2 + 3}{x^3 - 8} = 1 + \frac{x^2 + 3}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}.$$

Phân tích $\frac{x^2 + 3}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$ thành tổng các phân thức đơn giản :

$$\frac{x^2 + 3}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

Quy đồng mẫu số vế bên phải và khử mẫu số ở hai vế, nhận được :

$$x^2 + 3 = (A + B)x^2 + (2A - 2B + C)x + 4A - 2C.$$

Dùng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - 2B + C = 0 \\ 4A - 2C = 3 \end{cases}$$

Giải hệ thống phương trình trên, tìm được :

$$A = \frac{7}{12}, \quad B = \frac{5}{12} \quad \text{và} \quad C = -\frac{1}{3}.$$

Vậy : $$\int \frac{x^3 + x^2 - 5}{x^3 - 8} dx = \int \left(1 + \frac{7}{12(x - 2)} + \frac{\frac{5}{12}x - \frac{1}{3}}{x^2 + 2x + 4} \right) dx$$

$$= x + \frac{7}{12}\ln|x - 2| + \int \frac{5x - 4}{12[(x + 1)^2 + 3]} dx.$$

Đối với tích phân ở vế phải, đổi biến số $x + 1 = t$, $dx = dt$:

$$\frac{1}{12}\int \frac{5x - 4}{(x + 1)^2 + 3} dx = \frac{1}{12}\int \frac{5(t - 1) - 4}{t^2 + 3} dt$$

$$= \frac{5}{24}\int \frac{2tdt}{t^2 + 3} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{5}{24}\ln(t^2 + 3) - \frac{\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + c.$$

Cuối cùng :

$$\int\frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx = x+\frac{7}{12}\ln|x-2| +$$

$$+\frac{5}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{\sqrt{3}}{4}\text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

47. Ta có :

$$\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Suy ra : $x^2+x-1 = A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)(x^2+1)x$

$$= (A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Dùng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có :

$$\begin{cases} A+D=0 \\ E=0 \\ 2A+B+D=1 \\ C+E=1 \\ A=-1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, nhận được :

$A=-1$, $B=2$, $C=1$, $D=1$ và $E=0$.

Vậy :

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= -\ln|x|-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Dùng công thức tính $I_{n+1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ với $n=1$, $a=1$, ta có :

$$\int\frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2}dx=\frac{x-2}{2(x^2+1)}+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+\frac{1}{2}\text{arctg}x+c.$$

48. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^6(x^3+1)^2}.$

Đổi biến số : $x^3 = t$, $3x^2dx = dt$, ta có :

$$\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2(t+1)^2}.$$

Phân tích $\dfrac{1}{t^2(t+1)^2}$ thành tổng các phân thức đơn giản :

$$\frac{1}{t^2(t+1)^2}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{t+1}.$$

Quy đồng mẫu số vế bên phải và khử mẫu số ở hai vế, nhận được :

$$1 = A(t+1)^2 + Bt(t+1)^2 + Ct^2 + Dt^2(t+1).$$

Dùng phương pháp trị số riêng, cho :

$t = 0$ ở cả hai vế, có : $A = 1$,

$t = -1$ ở cả hai vế, có : $C = 1$,

$t = 1$ ở cả hai vế, có : $2B + D = -2$,

$t = 2$ ở cả hai vế, có : $3B + 2D = -2$.

Giải hệ thống hai phương trình trên, tìm được :

$$B = -2,\ \ D = 2.$$

Vậy : $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{2}{t+1}\right)dt$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{t}-2\ln|t|-\frac{1}{t+1}+2\ln|t+1|\right)+c$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^3}+2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3+1}\right)+c.$$

49. $\displaystyle\int\frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}=\frac{1}{5}\int\frac{(5x^4-5)dx}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$

Đổi biến số : $x^5 - 5x = t$, $(5x^4 - 5)dx = dt$, ta có :

$$\int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{5}\int \frac{t+1-t}{t(t+1)}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{5}\ln|t| - \frac{1}{5}\ln|t+1| + c$$

$$= \frac{1}{5}(\ln|x^5 - 5x| - \ln|x^5 - 5x + 1|) + c\,.$$

50. $$\int \frac{x^2+2}{x^4+3x^2+4}dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+3+\frac{4}{x^2}\right)}dx = \int \frac{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+7}$$

(với $x \neq 0$).

Đổi biến số : $x - \frac{2}{x} = t$, $\left(1+\frac{2}{x^2}\right)dx = dt$, ta có :

$$\int \frac{x^2+2}{x^4+3x^2+4}dx = \int \frac{dt}{t^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-2}{x\sqrt{7}} + c\,.$$

51. Đổi biến số : $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $x = 2\operatorname{arctg}t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta có :

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{4t}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2-4t+3)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t-3)(t-1)}.$$

Phân tích $\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}$ thành tổng các phân thức đơn giản, nhận được :

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{1}{3t} + \frac{5}{3(t-3)} - \frac{1}{t-1} \text{ và :}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} + \frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3} - \int\frac{dt}{t-1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{5}{3}\ln|t-3| - \ln|t-1| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right| + c.$$

52. $$\int\frac{dx}{2+3\cos x} = \int\frac{dx}{2+3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{s}\right)}$$

$$= \int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3 - 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)}$$

$$= \int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left[3 - 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= 2\int\frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{5-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{5-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + c = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + c.$$

53. $$\int\frac{\cos x dx}{\sin x - \cos^2 x} = \int\frac{\cos x dx}{\sin x - (1-\sin^2 x)}.$$

Đổi biến số : sinx = t, cosxdx = dt, ta có :

$$\int\frac{\cos x dx}{\sin x - \cos^2 x} = \int\frac{dt}{t^2+t-1} = \int\frac{dt}{(t-t_1)(t-t_2)},$$

trong đó : $t_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Phân tích $\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}$ thành tổng các phân thức đơn giản, nhận được :

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x - \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln|t - t_1| - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln|t-t_2| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sin x + 1 - \sqrt{5}}{2\sin x + 1 + \sqrt{5}}\right| + c.$$

54. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\sin x dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}(-\sin x)dx$.

Đổi biến số : cosx = t, –sinxdx = dt, ta có :

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x} = -\int \frac{1-t^2}{t^4}dt = -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + c = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c.$$

55. Đổi biến số : sinx = t, cosxdx = dt, ta có :

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin^4 x} = \int \frac{tdt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{1+(t^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg}(t^2) + c = \frac{1}{2}\text{arctg}(\sin^2 x) + c.$$

Bài này có thể làm cách khác như sau : với cosx ≠ 0, ta có :

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin^4 x} = \int \frac{\frac{\sin x \cos x dx}{\cos^4 x}}{\frac{1+\sin^4 x}{\cos^4 x}} = \int \frac{\text{tg}x}{\text{tg}^4 x + \frac{1}{\cos^4 x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{tgx}{tg^4x + (1 + tg^2x)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{tgx}{2tg^4x + 2tg^2x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Đổi biến số : $tgx = t$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, nhận được :

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin^4 x} = \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{t^4 + t^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{2tdt}{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)}{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2t^2 + 1) + c$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2tg^2x + 1) + c.$$

56. $$\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{2 \sin x \cos x dx}{\cos^4 x(1 + tg^4x)} = 2 \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}}{1 + tg^4x}$$

$$= 2 \int \frac{tgx}{1 + tg^4x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{1 + (tg^2x)^2} \cdot 2tgx \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{1}{1 + (tg^2x)^2} d(tg^2x) = \operatorname{arctg}(tg^2x) + c.$$

57. Đặt $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$, ta có :

$$\int \frac{1 + tgx}{1 - tgx} dx = \int \frac{(t + 1)dt}{(1 - t)(t^2 + 1)}.$$

Phân tích $\frac{t + 1}{(1-t)(t^2+1)}$ thành tổng các phân thức đơn giản ta nhận được

$$\int \frac{1 + tgx}{1 - tgx} dx = \int \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt =$$

$$= -\int\frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+1} = -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t^2+1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2+1}}{t-1}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{tg^2x+1}}{tgx-1}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x(tgx-1)}\right| + c = -\ln|\sin x - \cos x| + c.$$

58. Đặt $tgx = t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2}$, ta có :

$$\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \int\frac{dt}{1+9t^2} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3t)}{1+(3t)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\text{arctg}(3t) + c = \frac{1}{3}\text{arctg}(3tgx) + c.$$

59. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \int\frac{1}{tg^2x-5tgx}.\frac{dx}{\cos^2 x} = \int\frac{d(tgx)}{tg^2x-5tgx}$$

Đặt $tgx = t$, ta có :

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \int\frac{dt}{t^2-5t} = \int\frac{dt}{t(t-5)}.$$

Phân tích $\frac{1}{t(t-5)}$ thành tổng các phân thức đơn giản, nhận được :

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x\cos x} = \int\frac{1}{5}\left(\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}\ln|t-5| - \frac{1}{5}\ln|t| + c = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{tgx-5}{tgx}\right| + c.$$

60. $$\int\sin^4 x\cos^4 xdx = \frac{1}{16}\int\sin^4 2xdx$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{1}{4}(1-\cos 4x)^2dx = \frac{1}{64}\int(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)dx$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x - 2\cos 4x\right)dx$$

$$= \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8}\right) + c.$$

61. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int\frac{dx}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^6 x} = \int\frac{1}{tg^2x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int\frac{1}{tg^2x}.(1 + tg^2x)^2.d(tgx).$$

Đặt tgx = t, ta có :

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x} = \int\frac{(1 + t^2)^2}{t^2}dt = \int\frac{1 + 2t^2 + t^4}{t^2}dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^2} + 2 + t^2\right)dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{t^3}{3} + c$$

$$= -\frac{1}{tgx} + 2tgx + \frac{1}{3}tg^3x + c.$$

62. $$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int\frac{dx}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}.\cos^8 x} = \int\frac{1}{tg^3x}.\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3.\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int\frac{1}{tg^3x}(1 + tg^2x)^3 d(tgx).$$

Đặt tgx = t, ta có :

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int\frac{(1 + t^2)^3 dt}{t^3} = \int\frac{1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6}{t^3}dt$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^3} + \frac{3}{t} + 3t + t^3\right)dt = -\frac{1}{2t^2} + 3\ln|t| + \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^4}{4} + c$$

$$= -\frac{1}{2tg^2x} + 3\ln|tgx| + \frac{3}{2}tg^2x + \frac{1}{4}tg^4x + c.$$

63. $\int \cos x \cos^2 3x dx = \int \cos x . \frac{1}{2}(1 + \cos 6x) dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x dx + \frac{1}{2}\int \cos x \cos 6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos 7x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{20}\sin 5x + \frac{1}{28}\sin 7x + c\,.$$

64. Đổi biến số : $x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$, ta có :

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3}.12t^{11}dt = 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1}$$

$$= 12\int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = 12\int t^9 dt + 12\int t^4 dt + \frac{12}{5}\int \frac{d(t^5 - 1)}{t^5 - 1}$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln|t^5 - 1| \right) + c$$

$$= \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right| \right) + c\,.$$

65. Đổi biến số : $x + 1 = t^6$, $dx = 6t^5dt$, ta có :

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{1 + x}}{\sqrt[3]{1 + x}}dx = \int \frac{(t^6 - 1)^2 + t^3}{t^2}6t^5dt$$

$$= \int 6t^3(t^{12} - 2t^6 + 1 + t^3)dt$$

$$= 6\left[\frac{t^{16}}{16} - 2\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^7}{7} \right] + c$$

$$= 6\sqrt[3]{(1 + x)^2}\left(\frac{1}{16}(1 + x)^2 - \frac{1}{5}(1 + x) + \frac{1}{7}\sqrt{1 + x} + \frac{1}{4} \right) + c\,.$$

66. Đổi biến số : $\sqrt{\frac{1 + x}{x}} = t$, $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, $dx = \frac{-2tdt}{(t^2 - 1)^2}$, ta có :

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx = \int (t^2-1)^2 . t . \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} = -\int 2t^2 dt$$

$$= -\frac{2}{3}t^3 + c = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} + c.$$

67. Ta có : $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$. Đổi biến số $x + 1 = \text{tg}t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, trừ $t = 0)$, nhận được :

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dt}{\text{tg}^2 t . \frac{1}{\cos t}\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t}$$

$$= -\frac{1}{\sin t} + c = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + c$$

Ngoài ra, có thể giải bằng đổi biến số $x + 1 = \frac{1}{t}$ $(t \in (-\infty, +\infty)$ trừ $t = 0)$.

68. Vì miền xác định của hàm số dưới dấu tích phân là hai khoảng $(-\infty, -1]$ và $[1, +\infty)$, nên đổi biến số $x = \frac{1}{\cos t}$ với $0 \le t \le \pi$, trừ $t = \frac{\pi}{2}$. Ta có :

$$dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \quad \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\text{tg}^2 t} = |\text{tg}t|.$$

• Nếu $x \in [1, +\infty)$ thì $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, do đó $\text{tg}t > 0$ và $\sqrt{x^2-1} = \text{tg}t$.

Ta có :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx = \int \frac{\text{tg}t}{\frac{1}{\cos^4 t}} . \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = \int \sin^2 t \cos t dt = \int \sin^2 t d(\sin t)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 t + c = \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + c.$$

• Nếu $x \in (-\infty, -1]$ thì $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, do đó $\operatorname{tg}t < 0$ và $\sqrt{x^2 - 1} = -\operatorname{tg}t$. Cách giải tương tự như trên.

Cũng có thể giải bằng đổi biến số $x = \frac{1}{t}$ ($t \in [-1, 1]$, trừ $t = 0$).

69. Chú ý rằng hàm số dưới dấu tích phân $\frac{\sqrt{(4 - x^2)^3}}{x^6}$ xác định với mọi x thuộc khoảng $[-2, 2]$, trừ $x = 0$. Do đó, đổi biến số $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$ ($t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, trừ $t = 0$), nhận được :

$$\int\frac{\sqrt{(4 - x^2)^3}}{x^6}dx = \int\frac{\sqrt{(4 - 4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}2\cos tdt = \frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int\operatorname{cotg}^4 t\frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\int\operatorname{cotg}^4 td(\operatorname{cotg}t) = -\frac{1}{20}\operatorname{cotg}^5 t + c$$

$$= -\frac{\sqrt{(4 - x^2)^5}}{20x^5} + c.$$

Bài này cũng có thể giải bằng đổi biến số $x = \frac{1}{t}$ ($t \le -\frac{1}{2}$ và $t \ge \frac{1}{2}$).

70. Chia $[0, b]$ thành n đoạn bằng nhau bởi các điểm chia : $x_o = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$, ..., $x_n = n\Delta x = b$, $\Delta x = \frac{b}{n}$. Lấy điểm ξ_i trùng với mút phải của mỗi đoạn nhỏ $[x_i, x_{i+1}]$. Lập tổng tích phân :

$$I_n = x_1^2\Delta x + x_2^2\Delta x + \ldots + x_n^2\Delta x$$

$$= [(\Delta x)^2.\Delta x + (2\Delta x)^2.\Delta x + \ldots + (n\Delta x)^2.\Delta x]$$

$$= (\Delta x)^3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = \frac{b^3}{n^3}.\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Vậy $$\int_0^b x^2dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}$$

71. a) Trên [0, 1] ta có :

$$e^{2x} + 1 > e^{2x}\text{, do đó : } \sqrt{e^{2x} + 1} > e^x \text{ và :}$$

$$\int_0^1 \sqrt{e^{2x} + 1}\,dx > \int_0^1 e^x dx.$$

b) Trên [0, 1), ta có : $x^2\sin^2 x < x\sin^2 x$ do đó :

$$\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx < \int_0^1 x \sin^2 x dx.$$

72. Dễ dàng tìm được : $m = \frac{2}{3} \le \frac{1}{\sqrt{2 + x - x^2}} \le M = \frac{1}{\sqrt{2}}$, do đó :

$$m(1 - 0) = \frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} \le M(1 - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giá trị đúng của tích phân đã cho là :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{2x - 1}{3}\bigg|_0^1 = 2\arcsin \frac{1}{3}.$$

73. $f'(x) = e^{x^2 - x}(2x - 1) = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$. So sánh : $f(0) = e^o = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{4}}$, $f(2) = e^2$, tìm được : $m = e^{-\frac{1}{4}}$ và $M = e^2$. Do đó, theo tính chất 6 của tích phân xác định, ta có :

$$e^{-\frac{1}{4}}(2 - 0) \le \int_0^2 e^{x^2 - x} dx \le e^2(2 - 0),$$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2 - x}\, dx \le 2e^2.$$

74. Trên [1, 4], ta có : $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = x$, do đó :

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^2}\,dx > \int_1^4 x\,dx = 7{,}5.$$

75. Ta có :

$$I_m = \frac{1}{\frac{\pi}{\omega} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_o \sin\omega t\,dt = \frac{\omega I_o}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{I_o}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\omega t\,d(\omega t) = -\frac{I_o}{\pi}\cos\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$= -\frac{I_o}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}I_o.$$

76. a và b) sinh viên tự giải.

c) $F'(x) = \left(\int_2^{e^x} \frac{\ln z}{z}dz\right)'_x = \frac{\ln e^x}{e^x}.(e^x)' = x.$

d) $F'(x) = \left(\int_{x^2}^{1} \ln x\,dx\right)'_x = -\ln(x^2).(x^2)' = -4x\ln x.$

77. Sinh viên tự giải.

78. Sinh viên tự giải.

79. $\displaystyle\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 (y^{\frac{1}{2}} - 1)\,dy$

$$= \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - y\right)\Big|_4^9 = 7\frac{2}{3}.$$

80. Trước hết, tính : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$. Phân tích $\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ thành tổng các phân thức đơn giản, nhận được :

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \text{ và :}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c.$$

Vậy : $$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \Bigg|_3^4 = \ln \frac{4}{3}.$$

81. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} x \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

82. Hai điều kiện cơ bản để có thể áp dụng công thức Newton - Leibniz là :

- $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$,
- $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$.

Đối với tích phân xác định $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$, hàm số dưới dấu tích phân $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ nằm trong đoạn lấy tích phân $[0, 2]$, do đó không áp dụng được công thức Newton-Leibniz.

83. $$\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6 + 4}} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3y^2 dy}{\sqrt{(y^3)^2 + 4}}.$$

Đổi biến số : $y^3 = t$, $3y^2 dy = dt$, khi $y = 0$ thì $t = 0$, khi $y = 1$ thì $t = 1$, do đó :

$$\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6 + 4}} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{1}{3} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 4} \right| \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

84. Đổi biến số : $\ln x = t$, $\frac{dx}{x} = dt$, khi $x = 1$ thì $t = 0$, khi $x = e$ thì $t = 1$, do đó :

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

85. Đổi biến số : $\sqrt{e^x - 1} = t$, $e^x - 1 = t^2$, $e^x dx = 2tdt$, $dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$, khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = \ln 2$ thì $t = 1$, do đó :

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \int_0^1 t.\frac{2tdt}{t^2+1} = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$$

$$= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2(t - \text{arctgt})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(4-\pi).$$

86. $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x + 3 + \frac{7x-6}{x^2-3x+2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (x+3)dx + \frac{7}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx + \frac{9}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{7}{2}\ln\left|x^2 - 3x + 2\right| + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{13}{8} + 8\ln 3 - 15\ln 2$$ (xem lại bài tập 80).

87. Đổi biến số : $\text{tg}\frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 1$, do đó :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

88. Vì $f(x) = \sqrt{\cos x - \cos^3 x}$ là hàm số chẵn, nên :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\,dx.$$

Đổi biến số : $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$, khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$, do đó :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = -2\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}dt = 2\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

89. Vì $f(x) = \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}$ là hàm số lẻ, nên có ngay :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}dx = 0.$$

90. $$\int_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx = \int_{-2}^{2}\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}dx + \int_{-2}^{2}\frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx.$$

Đối với tích phân thứ nhất ở vế phải, $\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}$ là hàm số lẻ, do đó :

$$\int_{-2}^{2}\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}dx = 0.$$

Đối với tích phân thứ hai ở vế phải, $\frac{x^5+x^3}{x^3+x} = x^2$ là hàm số chẵn, do đó :

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx = \int_{-2}^{2}x^2dx = 2\int_0^2 x^2dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Vậy : $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx=\frac{16}{3}$.

Chú ý : Nếu ta không để ý đến tính chẵn, lẻ của hàm số dưới dấu tích phân như trên, mà xem như tích phân xác định của một phân thức hữu tỷ không thực sự, thì việc tính toán sẽ phức tạp hơn rất nhiều.

91. Đổi biến số : $\sqrt{x}=t$, $dx = 2tdt$, khi $x = 4$ thì $t = 2$, khi $x = 9$ thì $t = 3$, do đó :

$$\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}-1}=\int_2^3\frac{2tdt}{t-1}=2\int_2^3\frac{t-1+1}{t-1}dt=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$=2(t+\ln|t-1|)\Big|_2^3=2+2\ln2.$$

92. Đổi biến số : $x - 2 = t^3$, $dx = 3t^2dt$, khi $x = 3$ thì $t = 1$, khi $x = 29$ thì $t = 3$, do đó :

$$\int_3^{29}\frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}dx=\int_1^3\frac{t^2}{t^2+3}.3t^2dt$$

$$=\int_1^3\left(3t^2-9+\frac{27}{t^2+3}\right)dt=\left(t^3-9t+\frac{27}{\sqrt3}\text{arctg}\frac{t}{\sqrt3}\right)\Bigg|_1^3 = 8+\frac{9\pi}{2\sqrt3}.$$

93. Chú ý rằng hàm số dưới dấu tích phân $x^2\sqrt{a^2-x^2}$ xác định với mọi x thuộc khoảng [–a, a]. Do đó, đổi biến số $x = a\sin t$, $dx = a\cos tdt$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$, khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = a$ thì $t = \frac{\pi}{2}$, nhận được :

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^2t\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}\,a\cos tdt$$

$$=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2tdt=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt =$$

$$=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)dt=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac14\sin4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

94. *Cách 1*. Đổi biến số : $x = \mathrm{tg}t$, $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$ $(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, trừ $t = 0)$, khi $x = 1$ thì $t = \dfrac{\pi}{4}$, khi $x = \sqrt{3}$ thì $t = \dfrac{\pi}{3}$, do đó :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}{\mathrm{tg}^2 t}.\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t \sin^2 t}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t dt}{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}.$$

Đổi biến số : $\sin t = u$, $\cos t dt = du$, khi $t = \dfrac{\pi}{4}$ thì $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, khi $t = \dfrac{\pi}{3}$ thì $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta có :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u^2(1-u^2)} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-u^2+u^2}{u^2(1-u^2)}du$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2}\right)du = \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})}.$$

Cách 2. Đổi biến số $x = \mathrm{sh}t$, $dx = \mathrm{ch}t dt$ $(t \in (-\infty, +\infty)$, trừ $t = 0)$, ta có :

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}{\mathrm{sh}^2 t}.\mathrm{ch}t dt = \int \frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t}}{\mathrm{sh}^2 t}.\mathrm{ch}t dt$$

$$= \int \frac{\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}dt = \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{sh}^2 t}dt = t - \mathrm{coth}t + c.$$

Chú ý rằng với mọi $(x, t) \in R^2$:

$$t = \operatorname{argsh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \text{ suy ra :}$$

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0.$$

Phương trình bậc hai trên (xem ẩn số là $e^t \in R$) có hai nghiệm thực $x - \sqrt{1+x^2}$ (< 0) và $x + \sqrt{1+x^2}$ (> 0). Vì $e^t > 0$, nên :

$$t = \operatorname{argsh} x \Leftrightarrow e^t = x + \sqrt{1+x^2}.$$

Vậy : $\forall x \in R$, $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ và :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx = \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right]\Bigg|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

Sinh viên nên tự chứng minh :

$$\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{2})}$$

95. *Cách 1.* Đổi biến số : $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $dx = \dfrac{\sin t dt}{\cos^2 t}$ $(t \in [0, \pi]$, trừ $t = \dfrac{\pi}{2})$, khi $x = 1$ thì $t = 0$, khi $x = 2$ thì $t = \dfrac{\pi}{3}$, do đó :

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\dfrac{1}{\cos t}} \cdot \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} t \sin t dt}{\cos t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt$$

$$= (\operatorname{tg} t - t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Cách 2. Đổi biến số : $x = \text{ch}t$, $dx = \text{sh}t\,dt$ $(t \geq 0)$, ta có :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\text{ch}^2t-1}}{\text{ch}t}\text{sh}t\,dt = \int \frac{\text{sh}^2t\,dt}{\text{ch}t} = \int \frac{\text{ch}^2t-1}{\text{ch}t}dt$$

$$= \int \text{ch}t\,dt - \int \frac{dt}{\text{ch}t} = \text{sh}t - \int \frac{\text{ch}t\,dt}{\text{ch}^2t}$$

Theo công thức : $\text{ch}^2t - \text{sh}^2t = 1$, ta có :

$$1 - \text{th}^2t = \frac{1}{\text{ch}^2t}, \quad \sqrt{1-\text{th}^2t} = \frac{1}{\text{ch}t}.$$

Do đó : $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \text{sh}t - \int \frac{dt}{\text{ch}^2t\sqrt{1-\text{th}^2t}} = \text{sh}t - \int \frac{d(\text{th}t)}{\sqrt{1-(\text{th}t)^2}}$

$$= \text{sh}t - \arcsin(\text{th}t) + c \text{ và :}$$

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left(\sqrt{x^2-1} - \arcsin\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

96. Đổi biến số : $x = \frac{1}{t}$, $dx = \frac{-dt}{t^2}$ $(t > 0)$, khi $x = 1$ thì $t = 1$, khi $x = 3$ thì $t = \frac{1}{3}$, ta có :

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{1+5t+t^2}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+5t+t^2}}$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{d\left(t+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}}$$

$$= \ln\left(t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^1$$

$$= \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

97. Chia đoạn lấy tích phân [a, a + T] thành ba đoạn [a, 0], [0, T] và [T, a + T], ta có :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx .$$

Vì f(x) là hàm số tuần hoàn chu kỳ T, nghĩa là : f(x) = f(x + T), do đó :

$$\int_a^0 f(x)dx = \int_a^0 f(x + T)dx .$$

Đổi biến số : x + T = t, dx = dt, khi x = a thì t = a + T, khi x = 0 thì t = T, ta có :

$$\int_a^0 f(x + T)dx = \int_{a+T}^T f(t)dt = \int_{a+T}^T f(x)dx = -\int_T^{a+T} f(x)dx$$

(tích phân xác định không phụ thuộc vào biến số lấy tích phân).

Vậy : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = -\int_T^{a+T} f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx$ và :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx .$$

Áp dụng : tính $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$.

Vì hàm số dưới dấu tích phân có chu kỳ là π và tích phân đã cho lấy trên đoạn dài 100π, nên ta có :

$$\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 100\int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x} dx = 100\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= 100\sqrt{2}\ (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = 200\sqrt{2} .$$

98. Vì $|\ln x| = \begin{cases} \ln x \text{ nếu } 1 \le x \le e \\ -\ln x \text{ nếu } \frac{1}{e} \le x \le 1 \end{cases}$, nên ta có :

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x)dx + \int_{1}^{e} \ln x dx.$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần, đặt u = lnx, dv = dx ta có : $du = \frac{dx}{x}$, v = x và :

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx = -\left(x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx \right) + x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e} dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right) + e\ln e - (e - 1)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

99. Đặt u = x, $e^{-x}dx = dv$, ta có : du = dx, $v = -e^{-x}$ và :

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

100. Đặt $u = x^3$, sinxdx = dv, ta có : $du = 3x^2dx$, v = –cosx và :

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = -x^3\cos x\Big|_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$$

Đối với tích phân ở vế phải, đặt $u = x^2$, cosxdx = dv, ta có : du = 2xdx, v = sinx và :

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} x\sin x dx.$$

Đặt u = x, sinxdx = dv, ta có : du = dx, v = –cosx và :

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx.$$

Do đó : $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx = (-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x)\Big|_0^{\pi}$

$$= \pi^3 - 6\pi.$$

101. Đặt $u = e^{2x}$, cosxdx = dv, ta có : du = $2e^{2x}$dx, v = sinx và :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx.$$

Đối với tích phân ở vế phải, đặt $u = e^{2x}$, sinxdx = dv, ta có : du = $2e^{2x}$dx, v = –cosx và :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx = -e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx.$$

Do đó :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\pi} - 2}{5}.$$

102. Đặt u = arctgx, dv = xdx, ta có : $du = \dfrac{dx}{1 + x^2}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$ và :

$$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}x dx = 2\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}x dx \text{ (vì xarctgx là hàm số chẵn)}$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2}dx = \frac{\pi}{4} - (x - \mathrm{arctg}x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

103. Đặt $u = x$, $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}dx = dv$, ta có :

$$du = dx, \quad v = \int\frac{\sin x dx}{\cos^3 x} = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} \text{ và :}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x dx}{\cos^3 x} = \frac{x}{2\cos^2 x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$$

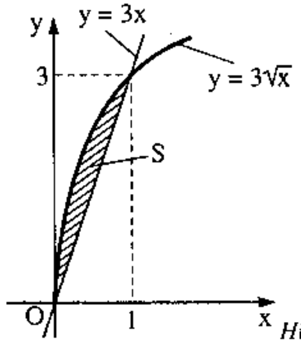
$$= \left(\frac{x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\text{tg}x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

104. Hoành độ các giao điểm của hai đường cong $y^2 = 9x$ và $y = 3x$ xác định bởi (hình 6.12) : $9x = 9x^2$.

Vậy $x = 0$ và $x = 1$. Ta có :

$$S = \int_0^1(\sqrt{9x} - 3x)dx.$$

$$= \left(2x\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$



Hình 6.12

Có thể tính :

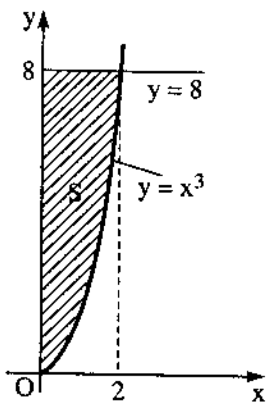
$$S = \int_0^3\left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{9}\right)dy = \left(\frac{y^2}{6} - \frac{y^3}{27}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{2}.$$

105. Ta có (hình 6.13) :

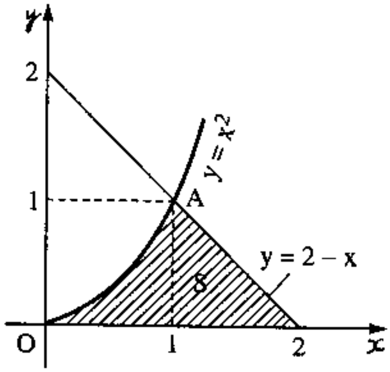
$$S = \int_0^8 y^{\frac{1}{3}}dy = \frac{3}{4}y\sqrt[3]{y}\Big|_0^8 = 12.$$

Có thể tính :

$$S = \int_0^2(8 - x^3)dx = 8x - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 12.$$



Hình 6.13



Hình 6.14

106. Hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = x^2$ và $y = 2 - x$ xác định bởi (hình 6.14) :

$$x^2 = 2 - x \quad \text{hay} \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

Suy ra :

$x_A = 1$ và :

$$S = \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y})dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Có thể tính :

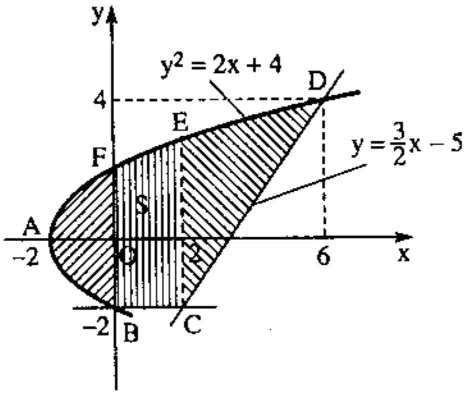
$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2 - x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{6}.$$

107. Tìm hoành độ giao điểm của hai đường cong $y^2 = 2x + 4$ và $y = \frac{3}{2}x - 5$, ta có :

$$\left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 = 2x + 4$$

hay $\frac{9}{4}x^2 - 17x + 21 = 0$.

Suy ra : điểm D có hoành độ $x = 6$ và tung độ $y = 4$ (hình 6.15).



Hình 6.15

Dễ thấy rằng điểm C có hoành độ $x = 2$ và tung độ $y = -2$.

Vậy :

$$S = \int_{-2}^{4}\left(\frac{2}{3}(y + 5) - \frac{1}{2}(y^2 - 4)\right)dy$$

$$= \int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{2y}{3} + \frac{16}{3}\right)dy$$

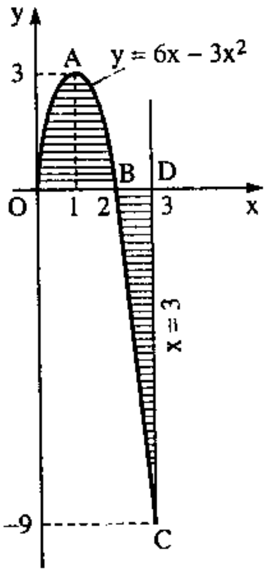
$$= \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{y^2}{3} + \frac{16}{3}y\right)\Big|_{-2}^{4} = 24.$$

Nếu tính tích phân theo x, ta phải chia diện tích S làm ba phần : S_{ABF}, S_{BCEF} và S_{CDE}, và :

$$S = \int_{-2}^{0}\left(\sqrt{2x + 4} - (-\sqrt{2x + 4})\right)dx + \int_{0}^{2}(\sqrt{2x + 4} - (-2))dx +$$

$$+ \int_{-2}^{6}\left(\sqrt{2x + 4} - \left(\frac{3}{2}x - 5\right)\right)dx = 24.$$

108. Theo hình vẽ 6.16, ta có :



Hình 6.16

$$S = S_{OBA} + S_{BDC}$$

$$= \int_{0}^{2}(6x - 3x^2)dx - \int_{2}^{3}(6x - 3x^2)dx$$

$$= (3x^2 - x^3)\Big|_{0}^{2} - (3x^2 - x^3)\Big|_{2}^{3} = 4 - (-4)$$

$$= 8.$$

Nếu tính tích phân theo y, cần biểu diễn phương trình đường parabol $y = 6x - 3x^2$ dưới dạng $x = \varphi(y)$. Ta có :

$$y = 6x - 3x^2,\ x^2 - 2x + \frac{y}{3} = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{y}{3} = 0,$$

$$(x-1)^2 = 1 - \frac{y}{3},\ x - 1 = \pm\sqrt{\frac{3-y}{3}}.$$

Vậy phương trình của cung $\overset{\frown}{AO}$ là $x = 1 - \sqrt{\frac{3-y}{3}}$ và của cung $\overset{\frown}{ABC}$ là $x = 1 + \sqrt{\frac{3-y}{3}}$, và :

$$S = S_{OBA} + S_{BDC} = \int_0^3 \left(1 + \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{3}}\right)dy + \int_{-9}^0 \left(3 - 1 - \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{3}}\right)dy$$

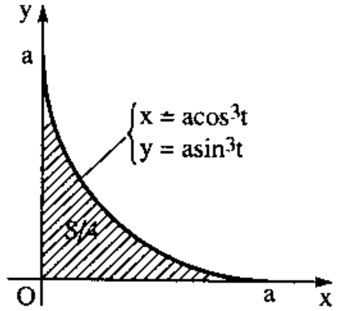
$$= 2\int_0^3 \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{3}}dy + \int_{-9}^0 \left(2 - \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{3}}\right)dy$$

$$= \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^3 + \left(2y + \frac{2}{3\sqrt{3}}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-9}^0 = 4 + 4 = 8.$$

109. Vì tính đối xứng, chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ diện tích S phải tìm, nằm trong góc phần tư I (hình 6.17) :

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |-a\sin^3 t . 3a\cos^2 t \sin t\,|\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |-3a^2 \sin^4 t(1 - \sin^2 t)\,|\,dt.$$



Hình 6.17

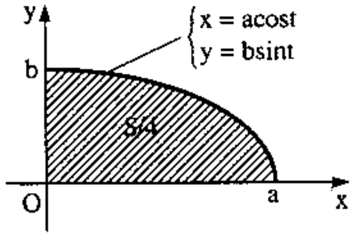
Áp dụng công thức :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

nếu n nguyên, dương và chẵn, ta nhận được :

$$S = 12a^2\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

110. Vì tính đối xứng, chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ diện tích S phải tìm, nằm trong góc phần tư I (hình 6.18) :



Hình 6.18

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |b\sin t(-a\sin t)|dt,$$

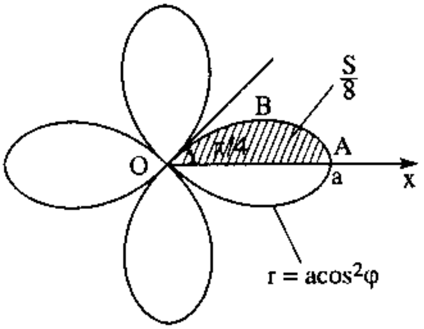
$$S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4ab.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

111. Vì tính đối xứng, chỉ cần tính $\frac{1}{8}$ diện tích S phải tìm : đó là diện tích của hình quạt cong OAB, giới hạn bởi đường cong $r = a\cos 2\varphi$ và hai tia $\varphi = 0$ và $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (hình 6.19).

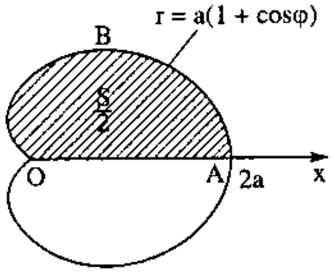
Ta lấy $\varphi = \frac{\pi}{4}$ vì $r = a\cos 2\varphi$, $r' = -2a\sin 2\varphi$, $\operatorname{tg}V = \frac{r}{r'} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}2\varphi$, $\operatorname{tg}V\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = 0$, suy ra $V = 0$ và tiếp tuyến với đường cong $\overset{\frown}{OAB}$ tại O trùng với tia $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ta có :

$$S_{OAB} = \frac{S}{8} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi,$$

$$S = \frac{8}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi = 2a^2\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$



Hình 6.19



Hình 6.20

112. Vì tính đối xứng, chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ diện tích S phải tìm : đó là diện tích của hình quạt cong OAB, giới hạn bởi đường cong $r = a(1 + \cos\varphi)$ và tia $\varphi = 0$ (hình 6.20).

$$S_{OAB} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\right)d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi a^2 .$$

Vậy : $\quad S = \frac{3}{2}\pi a^2 .$

113. a) Ta có : $\quad s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx .$

Đổi biến số : $x = \operatorname{tg}t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, nhận được :

$$\int\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int\sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}\,dx = \int\frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}{\operatorname{tg}t}.\frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$= \int\frac{dt}{\sin t\cos^2 t} = \int\frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t\cos^2 t} = \int\frac{\sin t\,dt}{(1 - \cos^2 t)\cos^2 t} .$$

Đổi biến số : $u = \cos t$, $du = -\sin t\,dt$, ta có :

$$\int\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = -\int\frac{du}{u^2(1 - u^2)} = -\int\frac{1 - u^2 + u^2}{u^2(1 - u^2)}du$$

$$= -\int\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1 - u^2}\right)du = \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + c .$$

Vì : $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 +,\mathrm{tg}^2 t$ nên : $\dfrac{1}{u^2} = 1 + x^2$, $\dfrac{1}{u} = \sqrt{1 + x^2}$. Thay vào kết quả trên, ta nhận được :

$$\int\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{\sqrt{1 + x^2} - 1} + c.$$

Vậy : $$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \left(\sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{\sqrt{1 + x^2} - 1}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$s = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(Trong bài này, ta đã tính nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$, mà không dùng trực tiếp phương pháp đổi biến số của tích phân xác định, nhằm tránh phải đổi cận lấy tích phân nhiều lần).

b) Hoành độ các giao điểm của đường cong $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ với trục hoành là $x = \pm\sqrt{2}$. Do đó, độ dài cung đường cong phải tìm là :

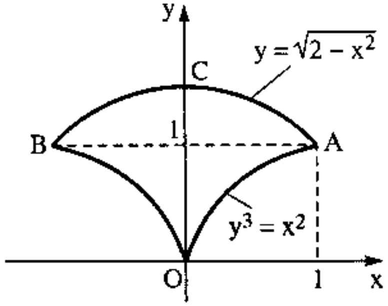
$$s = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1 + x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}}\sqrt{1 + x^2}\,dx.$$

Dùng kết quả đã biết ở bài tập 38, ta có :

$$s = 2.\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1 + x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right|\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

114. Hai đường cong $y^3 = x^2$ và $y = \sqrt{2 - x^2}$ cắt nhau tại A(1, 1) và B(-1, 1). Vì tính đối xứng của chu vi hình phẳng đối với trục Oy (hình 6.21), ta có :

$$s = 2(s_{\overset{\frown}{OA}} + s_{\overset{\frown}{CA}})$$



Hình 6.21

$$s_{\overset{\frown}{OA}} = \int_{y_o}^{y_A} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}\, dy = \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4}y\right)$$

$$= \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

$$s_{\overset{\frown}{CA}} = \int_{x_c}^{x_A} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2}}\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}}$$

$$= \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

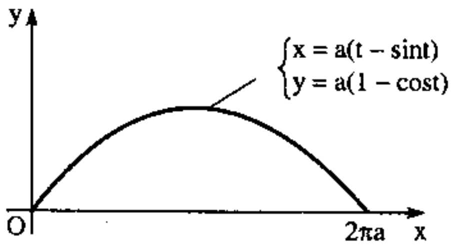
Vậy : $s = 2\left(\frac{13\sqrt{13} - 8}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) \approx 5,102$.

115. Ta có (hình 6.22) :

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt$$

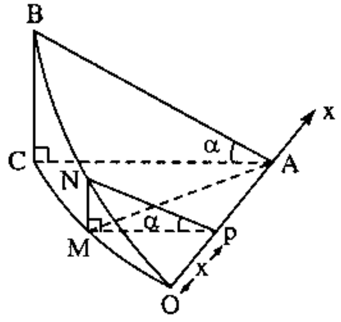
$$= 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$



Hình 6.22

116. Sinh viên tự giải.

117. Hình vẽ 6.23 biểu diễn $\frac{1}{2}$ vật thể cần tính thể tích (AO = AC = AM = R). Tam giác vuông PMN là thiết diện của vật thể với một mặt phẳng thẳng góc với trục Ox tại điểm x. Từ những tam giác vuông APM và PMN, ta có :



Hình 6.23

$$(MP)^2 = (AM)^2 - (AP)^2 = R^2 - (R - x)^2,$$

$$MN = MP\text{tg}\alpha,\ S(x) = S_{PMN} =$$

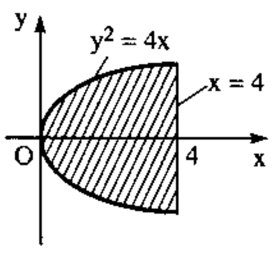
$$= \frac{1}{2}MP.MN = \frac{1}{2}(MP)^2\text{tg}\alpha$$

$$= \frac{1}{2}[R^2 - (R - x)^2]\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}(2Rx - x^2)\text{tg}\alpha \text{ và :}$$

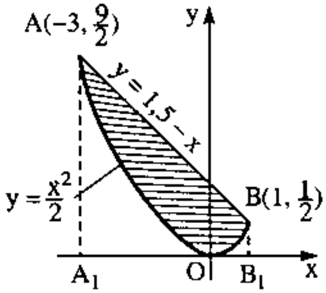
$$V = \frac{1}{2}\text{tg}\alpha\int_0^{2R}(2Rx - x^2)dx = \frac{1}{2}\text{tg}\alpha\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2R} = \frac{2}{3}R^3\text{tg}\alpha .$$

118. a) Ta có (hình 6.24) :

$$V = \pi\int_0^4 y^2dx = \pi\int_0^4 4xdx = 4\pi\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = 32\pi.$$



Hình 6.24



Hình 6.25

b) Thể tích V phải tìm bằng hiệu số thể tích $V_1 - V_2$ của hai vật thể tạo nên bởi sự quay xung quanh trục Ox các hình thang A_1ABB_1 và A_1AOBB_1 (hình 6.25) :

$$V = V_1 - V_2 =$$

$$= \pi \int_{-3}^{1} (1,5 - x)^2 dx - \frac{\pi}{4} \int_{-3}^{1} x^4 dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{1} (x - 1,5)^2 d(x - 1,5) - \frac{\pi}{20} x^5 \Big|_{-3}^{1}$$

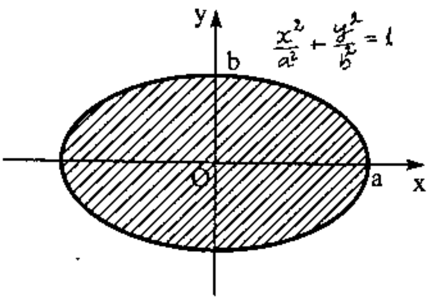
$$= \frac{\pi}{3}(x - 1,5)^3 \Big|_{-3}^{1} - \frac{\pi}{20} x^5 \Big|_{-3}^{1} = 18\frac{2}{15}\pi .$$

119. Vì tính đối xứng, chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ thể tích V phải tìm (hình 6.26) :

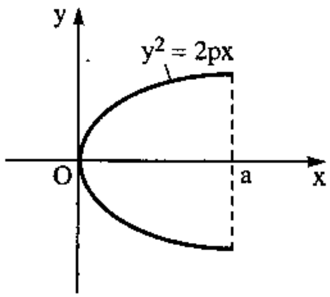
$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^b x^2 dy = \pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy$$

$$= \pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b = \frac{2}{3}\pi a^2 b .$$

Vậy : $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$.



Hình 6.26



Hình 6.27

120. a) Ta có :

$$f(x) = \sqrt{2px}\ , \quad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}},$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}} \text{, và :}$$

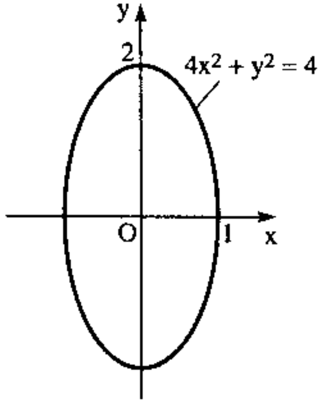
$$S = 2\pi\int_0^a \sqrt{2px}\sqrt{\frac{2x+p}{2x}}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\int_0^a \sqrt{2x+p}\,dx$$

$$= 2\pi\sqrt{p}\int_0^a (2x+p)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}d(2x+p) = 2\pi\sqrt{p}\,\frac{2}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{2}\Big|_0^a$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right] \text{ (hình 6.27).}$$

b) Vì tính đối xứng, chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ diện tích S phải tìm (hình 6.28) :

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^2 |\varphi(y)|\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,dy.$$



Hình 6.28

Ở đây, ta có :

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\ ,\ \varphi'(y) = \frac{-y}{2\sqrt{4-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\varphi'^2(y)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16-3y^2}{4-y^2}} \text{ và :}$$

$$S = 4\pi\int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\,.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{16-3y^2}{4-y^2}}\,dy = \pi\int_0^2 \sqrt{16-3y^2}\,dy.$$

Đổi biến số : $y = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin t$, $dy = \frac{4}{\sqrt{3}}\cos t dt$ $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$, khi $y = 0$ thì $t = 0$, khi $y = 2$ thì $t = \frac{\pi}{3}$, do đó :

$$S = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 16\cos^2 t dt = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{16}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2\pi\left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right).$$

c) Ta có (xem lại hình 6.22 của bài tập 115) :

$\varphi'(t) = a(1-\cos t)$, $\psi'(t) = a\sin t$,

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}=2a\sin\frac{t}{2}$$

(nhớ rằng $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$) và :

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi}|\psi(t)|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt\,.$$

Đổi biến số : $u = \frac{t}{2}$, $du = \frac{dt}{2}$, khi $t = 0$ thì $u = 0$, khi $t = 2\pi$ thì $u = \pi$, ta có :

$$S = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du = -16\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)d(\cos u)$$

$$= -16\pi a^2\left[\cos u-\frac{1}{3}\cos^3 u\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2\,.$$

121. a) Ta có :

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}e^{-x}\Big|_b^0 = \lim_{b\to+\infty}(1-e^{-b}) = 1.$$

Vậy $\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ hội tụ và bằng 1.

b) $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}xe^{-x}dx\,.$

Tính $\int_0^{b}xe^{-x}dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần. Đặt $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, ta được $du = dx$, $v = -e^{-x}$, do đó

$$\int_0^{b}xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^{b}+\int_0^{b}e^{-x}dx = -be^{-b}-e^{-x}\Big|_0^{b} = -be^{-b}-e^{-b}+1$$

Vậy :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}(-be^{-b} - e^{-b} + 1) = \lim_{b\to+\infty}(-be^{-b}) - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} + 1.$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital, ta được :

$$\lim_{b\to+\infty} be^{-b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} = 0.$$

Còn $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-b} = 0$, vậy tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ hội tụ và bằng 1.

c) $\int\limits_0^{+\infty} x\cos x dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b xcoxdx$.

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần, ta được :

$$\int_0^b x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^b - \int_0^b \sin x dx = b\sin b + \cos b - 1.$$

Vậy $\int\limits_0^{+\infty} xcoxdx = \lim\limits_{b\to+\infty}(b\sin b + \cos b - 1)$.

Vì không tồn tại $\lim\limits_{b\to+\infty}(b\sin b + \cos b)$ nên tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} x\cos x dx$ phân kỳ.

d) Xét tích phân $\int\limits_0^1 \ln x dx$. Hàm số lnx xác định trong khoảng (0, 1] và dần tới $-\infty$ khi $x \to 0^+$. Vì vậy

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx.$$

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần bằng cách đặt u = lnx, dv = dx, ta có

$$\int_{\varepsilon}^{1}\ln x dx = x\ln x - x\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon - 1.$$

Vậy : $$\int_{0}^{1}\ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon - 1) = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\varepsilon - 1.$$

Do quy tắc L'Hospital, ta có :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon = 0.$$

Vậy tích phân suy rộng $\int_{0}^{1}\ln x dx$ hội tụ và bằng -1.

122. a) Vì $\frac{|\cos(x^2)|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, mà $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ (xem thí dụ 1, mục 4.1, chương VI, sách *Toán học cao cấp* ứng với sách bài tập này), nên theo định lý so sánh 6.4 sách đã dẫn, tích phân $\int_{0}^{+\infty}\frac{|\cos(x^2)|}{1+x^2}dx$ hội tụ.

Lại theo định lý 6.5 sách đã dẫn, $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(x^2)}{1+x^2}dx$ hội tụ.

b) Vì $x + \sqrt{1+x^2} > 2x$ $\forall x \in [1, +\infty)$ nên $\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} < \frac{1}{4x^2}$ $\forall x \in [1, +\infty)$.

Theo công thức (6.29) sách đã dẫn, $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ hội tụ, nên theo định lý so sánh 6.4 sách đã dẫn, tích phân suy rộng $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$ hội tụ.

Chú thích. Các bạn sinh viên hãy khảo sát sự hội tụ của $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$.

c) Xét tích phân

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}} = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}}.$$

Hàm số dưới dấu tích phân xác định trong khoảng (–2, 1), nhưng dần tới ∞ khi x dần tới –2 hay khi x dần tới 1.

Vậy I là tích phân suy rộng. Ta viết :

$$I = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= I_1 + I_2.$$

Khi $-2 \le x \le 0$, ta có $-3 \le (x-1) \le -1$, do đó

$$\frac{1}{(-3)^{\frac{2}{3}}} \le \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} \le \frac{1}{(-1)^{\frac{2}{3}}}, \text{ vì vậy}$$

$$0 < \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}}} \le \frac{1}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}, \ \forall x \in [-2, 0]$$

Theo công thức (6.30) sách đã dẫn, tích phân suy rộng $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^{\frac{1}{3}}}$ hội tụ, vậy theo định lý so sánh 6.6, tích phân suy rộng $I_1 = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}}$ hội tụ.

Hoàn toàn tương tự, khi $0 \le x \le 1$, ta có

$$0 < \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}} \le \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Nhưng $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ hội tụ nên $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+2)^{\frac{1}{3}}}$ hội tụ. Vì I_1, I_2 hội tụ, mà $I = I_1 + I_2$ nên I cũng hội tụ.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập nội dung và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :
LAN ANH

BÀI TẬP TOÁN HỌC CAO CẤP - TẬP 1

Mã số : 7K615T7 - DAI

In 3.000 bản, khổ 16 x 24 cm tại Công ty cổ phần In Diên Hồng 187B Giảng Võ - Hà Nội. Số in : 199/P. Số XB : 11 - 2007/CXB/339 - 2119/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
Địa chỉ : 25 HànThuyên, Hà Nội

TÌM ĐỌC SÁCH GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. Giáo trình toán học cao cấp T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
2. Giáo trình toán học cao cấp T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
3. Bài tập toán học cao cấp T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
4. Bài tập toán học cao cấp T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
5. Giáo trình vật lý đại cương T1	Lương Duyên Bình
6. Giáo trình vật lý đại cương T2	Lương Duyên Bình
7. Bài tập vật lý đại cương T1	Lương Duyên Bình
8. Bài tập vật lý đại cương T2	Lương Duyên Bình
9. Hoá học đại cương	Lê Mậu Quyền
10. Bài tập hóa học đại cương	Lê Mậu Quyền
11. Vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn
12. Bài tập vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187 Giảng Võ ; 23 Tràng Tiền ;

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh ;

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

8934980760376

Giá : 22.000đ