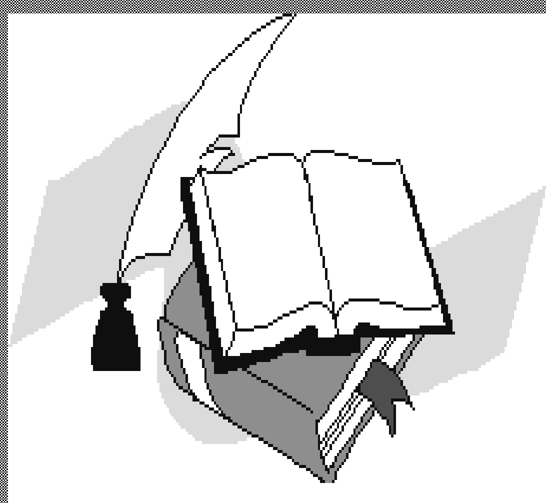
GIÁO TRÌNH LÝ THUYẾT CƠ HỌC



PHẦN MỞ ĐẦU

Cơ học nghiên cứu các quy luật cân bằng và chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực. Cân bằng hay chuyển động trong cơ học là trạng thái đứng yên hay dời chỗ của vật thể trong không gian theo thời gian so với vật thể khác được làm chuẩn gọi là hệ quy chiếu. Không gian và thời gian ở đây độc lập với nhau. Vật thể trong cơ học xây dựng dưới dạng các mô hình chất điểm, cơ hệ và vật rắn.

Cơ học được xây dựng trên cơ sở hệ tiên đề của Niu tơn đưa ra trong tác phẩm nổi tiếng " Cơ sở toán học của triết học tự nhiên" năm 1687 - chính vì thế cơ học còn được gọi là cơ học Niu tơn.

Cơ học khảo sát các vật thể có kích thước hữu hạn và chuyển động với vận tốc nhỏ hơn vận tốc ánh sáng. Các vật thể có kích thước vĩ mô, chuyển động có vận tốc gần với vận tốc ánh sáng được khảo sát trong giáo trình cơ học tương đối của Anhxtanh.

Trong các trường đại học kỹ thuật, cơ học làm nền tảng cho các môn học kỹ thuật cơ sở và kỹ thuật chuyên ngành như sức bền vật liệu, nguyên lý máy, động lực học máy, động lực học công trình, lý thuyết tính toán máy nông nghiệp, lý thuyết ô tô máy kéo v.v...

Cơ học đã có lịch sử lâu đời cùng với quá trình phát triển của khoa học tự nhiên, bắt đầu từ thời kỳ phục hưng sau đó được phát triển và hoàn thiện dần. Các khảo sát có tầm quan trọng đặc biệt làm nền tảng cho sự phát triển của cơ học là các công trình của nhà bác học người Ý Galilê (1564- 1642). Galilê đã đưa ra các định luật về chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực, đặc biệt là định luật quán tính. Đến thời kỳ Niutơn (1643- 1727) ông đã hoàn tất trên cơ sở thống nhất và mở rộng cơ học của Galilê, xây dựng hệ thống các định luật mang tên ông - định luật Niutơn. Tiếp theo Niutơn là Đalămbe (1717- 1783), Ơle (1707 - 1783) đã có nhiều đóng góp cho cơ học hiện đại ngày nay.

Ơle là người đặt nền móng cho việc hình thành môn cơ học giải tích mà sau này Lagơrăng, Hamintơn, Jaccobi, Gaoxơ đã hoàn thiện thêm.

Căn cứ vào nội dung và các đặc điểm của bài toán khảo sát, chương trình cơ học giảng cho các trường đại học kỹ thuật có thể chia ra thành các phần: Tĩnh học, động học, động lực học và các nguyên lý cơ học. Tĩnh học nghiên cứu các quy luật cân bằng của vật thể dưới tác dụng của lực. Động học chỉ nghiên cứu các quy luật chuyển động của vật thể đơn thuần về mặt hình học. Động lực học nghiên cứu các quy luật chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực. Các nguyên lý cơ học là nội dung cơ bản nhất của cơ học giải tích. Cơ học giải tích chính là phần động lực học của hệ được trình bày theo hướng giải tích hoá.

Cơ học là khoa học có tính hệ thống và được trình bày rất chặt chẽ . Khi nghiên cứu môn học này đòi hỏi phải nắm vững các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề, vận dụng thành thạo các công cụ toán học như hình giải tích, các phép tính vi phân, tích phân, phương trình vi phân... để thiết lập và chứng minh các định lý được trình bày trong môn học.

Ngoài ra người học cần phải thường xuyên giải các bài tập để củng cố kiến thức đồng thời rèn luyện kỹ năng áp dụng lý thuyết cơ học giải quyết các bài toán kỹ thuật.

Phần I

TĨNH HỌC

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ CỦA TĨNH HỌC LÝ THUYẾT VỀ MÔ MEN LỰC VÀ NGẪU LỰC

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Tĩnh học nghiên cứu các quy luật cân bằng của vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của lực. Trong tĩnh học có hai khái niệm cơ bản là vật rắn tuyệt đối và lực.

1.1.1. Vật rắn tuyệt đối

Vật rắn tuyệt đối là vật thể có hình dạng bất biến nghĩa là khoảng cách hai phần tử bất kỳ trên nó luôn luôn không đổi. Vật thể có hình dạng biến đổi gọi là vật biến dạng. Trong tĩnh học chỉ khảo sát những vật thể là rắn tuyệt đối thường gọi tắt là vật rắn. Thực tế cho thấy hầu hết các vật thể đều là vật biến dạng. Song nếu tính chất biến dạng của nó không ảnh hưởng đến độ chính xác cần có của bài toán có thể xem nó như vật rắn tuyệt đối trong mô hình tính toán.

1.1.2. Lực và các định nghĩa về lực

Lực là đại lượng đo tác dụng cơ học giữa các vật thể với nhau. Lực được biểu diễn bằng đại lượng véc tơ có ba yếu tố đặc trưng: độ lớn (còn gọi là cường độ), phương chiều và điểm đặt. Thiếu một trong ba yếu tố trên tác dụng của lực không được xác định. Ta thường dùng chữ cái có dấu véc tơ ở trên để ký hiệu các véc tơ lực. Thí dụ các lực $\vec{P}$, $\vec{F}_1$,.... $\vec{N}$. Với các ký hiệu này phải hiểu rằng các chữ cái không có dấu véc tơ ở trên chỉ là ký hiệu độ lớn của nó. Thí dụ độ lớn của các lực $\vec{P}$, $\vec{F}$... $\vec{N}$ là P, F, ...N. Độ lớn của các lực có thứ nguyên là Niu tơn hay bội số Kilô Niu tơn viết tắt là (N hay kN).

Sau đây giới thiệu một số định nghĩa:

Hệ lực: Hệ lực là một tập hợp nhiều lực cùng tác dụng lên vật rắn.

Lực tương đương: Hai lực tương đương hay hai hệ lực tương đương là hai lực hay hai hệ lực có tác động cơ học như nhau. Để biểu diễn hai lực tương đương hay hai hệ lực tương đương ta dùng dấu tương đương như trong toán học. Thí dụ hai lực $\vec{F}$ và $\vec{P}$ tương đương ta viết $\vec{F} \sim \vec{P}$. Hai hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,.. $\vec{F}_n$) và ($\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,.. $\vec{P}_m$) tương đương ta viết ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.. $\vec{F}_n$) ~ ($\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$,.. $\vec{P}_m$).

Hợp lực: Hợp lực của hệ lực là một lực tương đương với hệ lực đã cho. Thí dụ nếu có $\vec{R}$ ~ ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,.. $\vec{F}_n$) thì $\vec{R}$ được gọi là hợp lực của hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,.. $\vec{F}_n$).

Hệ lực cân bằng: Hệ lực cân bằng là hệ lực tương đương với không (hợp lực của nó bằng không). Thí dụ: hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.. $\vec{F}_n$) là cân bằng khi ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.. $\vec{F}_n$) ~ 0.

1.2. HỆ TIÊN ĐỀ CỦA TĨNH HỌC

Tĩnh học được xây dựng trên cơ sở sáu tiền đề sau đây:

Tiên đề 1: (Hệ hai lực cân bằng)

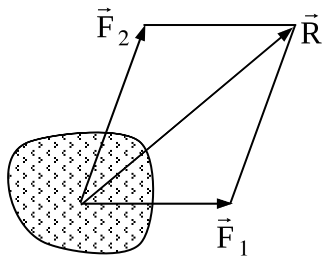
Điều kiện cần và đủ để hai lực cân bằng là hai lực đó có cùng độ lớn, cùng phương, ngược chiều và cùng đặt lên một vật rắn. Ta có ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$) ~ 0 khi $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Tiên đề 2 : (Thêm hoặc bớt một hệ lực cân bằng)

Tác dụng của hệ lực lên vật rắn sẽ không đổi nếu ta thêm vào hoặc bớt đi một hệ lực cân bằng.

Tiên đề 3: (Hợp lực theo nguyên tắc hình bình hành)

Hai lực cùng đặt vào một điểm trên vật rắn có hợp lực được biểu diễn bằng đường chéo của hình bình hành mà hai cạnh là hai lực đã cho.



Hình 1.1

Hình vẽ 1.1 Biểu diễn hợp lực của hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Về phương diện véc tơ có thể viết: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Tiên đề 4: (Lực tác dụng tương hỗ)

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai vật rắn có cùng độ lớn, cùng phương nhưng ngược chiều.

Tiên đề 5: (Tiên đề hoá rắn)

Một vật không tuyệt đối rắn đang ở trạng thái cân bằng khi hoá rắn nó vẫn giữ nguyên trạng thái cân bằng ban đầu.

Tiên đề 6: (Giải phóng liên kết)

Trước khi phát biểu tiên đề này cần đưa ra một số khái niệm về: Vật rắn tự do, vật rắn không tự do, liên kết và phản lực liên kết.

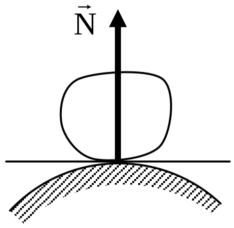
Vật rắn tự do là vật rắn có khả năng di chuyển theo mọi phía quanh vị trí đang xét. Nếu vật rắn bị ngăn cản một hay nhiều chiều di chuyển nào đó được gọi là vật rắn không tự do. Những điều kiện ràng buộc di chuyển của vật rắn khảo sát gọi là liên kết. Trong tĩnh học chỉ xét liên kết do sự tiếp xúc của các vật rắn với nhau (liên kết hình học). Theo tiên đề 4 giữa vật khảo sát và vật liên kết xuất hiện các lực tác dụng tương hỗ. Người ta gọi các lực tác dụng tương hỗ giữa vật liên kết lên vật khảo sát là phản lực liên kết.

Để khảo sát vật rắn không tự do ta phải dựa vào tiên đề giải phóng liên kết sau đây:

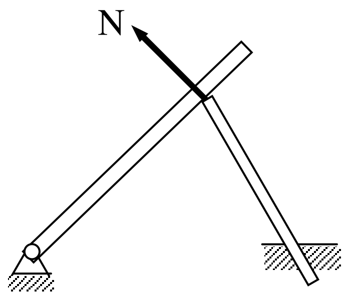
Tiên đề*:*Vật rắn không tự do có thể xem như vật rắn tự do khi giải phóng các liên kết và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng.

Xác định phản lực liên kết lên vật rắn là một trong những nội dung cơ bản của các bài toán tĩnh học. Sau đây giới thiệu một số liên kết phẳng thường gặp và tính chất các phản lực của nó.

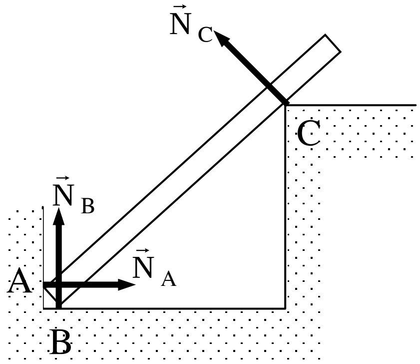
Liên kết tựa (vật khảo sát tựa lên vật liên kết): Trong dạng này các phản lực liên kết có phương theo pháp tuyến chung giữa hai mặt tiếp xúc. Trường hợp đặc biệt nếu tiếp xúc là một điểm nhọn tựa lên mặt hay ngược lại thì phản lực liên kết sẽ có phương pháp tuyến với mặt tại điểm tiếp xúc. (Hình vẽ 1.2, 1.3, 1.4).



Hình 1.2



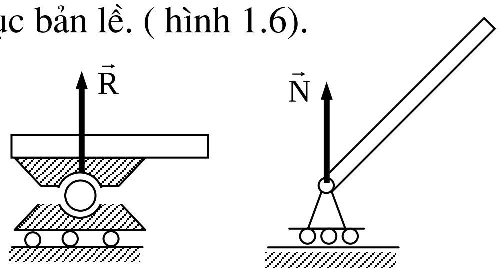
Hình 1.3



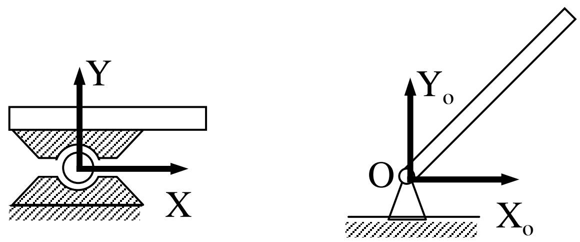
Hình 1.4

Liên kết là khớp bản lề:

Khớp bản lề di động (hình 1.5) chỉ hạn chế chuyển động của vật khảo sát theo chiều vuông góc với mặt phẳng trượt do đó phản lực liên kết có phương vuông góc với mặt trượt. Khớp bản lề cố định (hình 1.6) chỉ cho phép vật khảo sát quay quanh trục của bản lề và hạn chế các chuyển động vuông góc với trục quay của bản lề. Trong trường hợp này phản lực có hai thành phần vuông góc với trục bản lề. (hình 1.6).



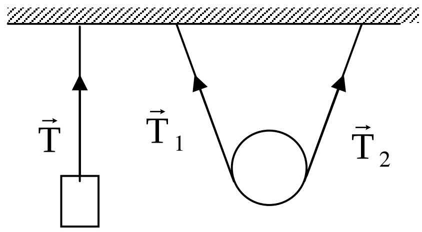
Hình 1.5



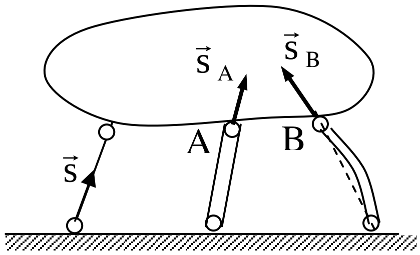
Hình 1.6

Liên kết là dây mềm hay thanh cứng: (hình 1.7 và hình 1.8)

Các liên kết dạng này chỉ hạn chế chuyển động của vật thể theo chiều dây hoặc thanh. Phương của phản lực liên kết là phương dọc theo dây và thanh.



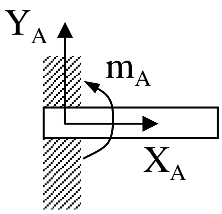
Hình 1.7

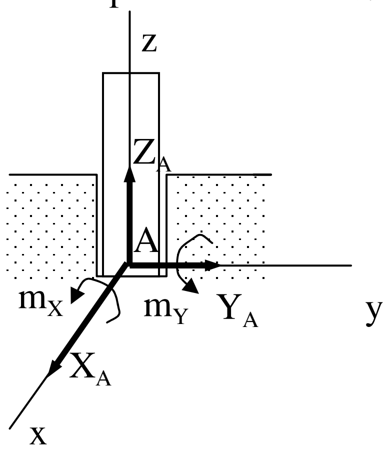


Hình 1.8

Liên kết ngàm (hình 1.9). Vật khảo sát bị hạn chế không những di chuyển theo các phương mà còn hạn chế cả chuyển động quay. Trong trường hợp này phản lực liên kết có cả lực và mô men phản lực. (Khái niệm mô men lực sẽ được nói tới ở phần sau).

Liên kết là gót trục: (hình 1.10) Vật khảo sát bị hạn chế các chiều chuyển động theo phương ngang, phương thẳng đứng và chuyển động quay quanh các trục X và Y do đó phản lực liên kết có các thành phần như hình vẽ.





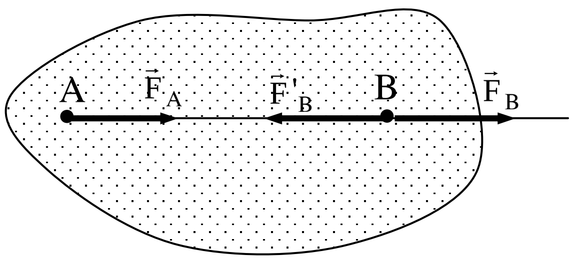
Hình 1.9

Hình 1.10

Các hệ quả suy ra từ hệ tiên đề tĩnh học.

Hệ quả 1: (Định lý trượt lực)

Tác dụng của một lực lên vật rắn sẽ không đổi nếu ta trượt lực đó dọc theo đường tác dụng đến đặt ở điểm khác.



Hình 1.11

Thật vậy: Cho lực $\vec{F}$ đặt tại A của vật rắn ($\vec{F}_A$). Ta đặt vào điểm B trên đường tác dụng của $\vec{F}$ một cặp lực cân bằng ($\vec{F}_B, \vec{F}_B'$) (hình 1.11). Theo tiên đề hai có thể viết:

$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_B{}')$. Ở đây các chỉ số A, B đi theo các lực để chỉ điểm đặt các lực đó, các lực này có độ lớn bằng nhau và cùng phương .

Mặt khác theo tiên đề 1 hai lực $(\vec{F}_A, \vec{F}_B{}')$ là cặp lực cân bằng vì thế theo tiên đề hai có thể bớt cặp lực đó trên vật, nghĩa là:

$\vec{F}_A \sim (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_B{}') \sim \vec{F}_B$

Như vậy ta đã trượt lực $\vec{F}$ ban đầu đặt tại A dọc theo đường tác dụng của nó về đặt tại B mà tác dụng cơ học lên vật rắn vẫn không đổi.

Hệ quả 2: Hệ lực cân bằng thì một lực bất kỳ trong hệ lấy theo chiều ngược lại sẽ là hợp lực của các lực kia.

Chứng minh: Cho hệ lực cân bằng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n)$. Giả sử ta lấy ở trong hệ một lực $\vec{F}_i$ và đổi chiều sau đó cho tác dụng lên vật rắn. Xét vật rắn chịu tác dung của lực $-\vec{F}_i$. Theo tiên đề 2 nếu thêm vào vật rắn hệ lực cân bằng đã cho, tác dụng lên vật rắn vẫn không đổi, nghĩa là:

$-\vec{F}_i \sim (-\vec{F}_i, \vec{F}_1, \vec{F}_2 ... \vec{F}_i ... \vec{F}_n)$

Trong hệ (n+1) lực ở vế phải có hai lực cân bằng là $(\vec{F}_i, -\vec{F}_i)$ theo tiên đề 2 ta có thể bớt $\vec{F}_i$, và $-\vec{F}_i$ đi nghĩa là:

$-\vec{F}_i \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_{i-1} ... \vec{F}_{i+1} ... \vec{F}_n)$

Biểu thức này chứng tỏ $-\vec{F}_i$ là hợp lực của hệ lực đã cho khi không có $\vec{F}_i$.

1.3. LÝ THUYẾT VỀ MÔ MEN LỰC VÀ NGẪU LỰC

1.3.1. Mô men lực đối với một tâm và đối với một trục

1.3.1.1. Mô men của lực đối với một tâm

Mô men của lực $\vec{F}$ đối với tâm O là đại lượng véc tơ, ký hiệu $\vec{m}_o(\vec{F})$ có:

- Độ lớn bằng tích số: F.d, với F là độ lớn lực $\vec{F}$ và d là khoảng cách từ tâm O tới đường tác dụng của $\vec{F}$ gọi là cánh tay đòn.

- Phương vuông góc với mặt phẳng chứa tâm O và lực F (mặt phẳng tác dụng).

- Chiều hướng về phía sao cho khi nhìn từ đỉnh của véc tơ $\vec{m}_o(\vec{F})$ xuống mặt phẳng tác dụng sẽ thấy véc tơ lực $\vec{F}$ chuyển động theo chiều mũi tên vòng quanh O theo ngược chiều kim đồng hồ (hình 1.12).

Dựa vào hình vẽ dễ dàng thấy rằng độ lớn của véc tơ $\vec{m}_o(\vec{F})$ bằng hai lần diện tích tam giác OAB (tam giác có đỉnh O và đáy bằng lực $\vec{F}$).

Với định nghĩa trên có thể biểu diễn véc tơ mô men lực $\vec{F}$ đối với tâm O bằng biểu thức sau:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \text{ x } \vec{F} = \vec{r} \text{ x } \vec{F}.$$

Trong đó $\vec{r}$ là véc tơ định vị của điểm đặt của lực $\vec{F}$ so với tâm O.

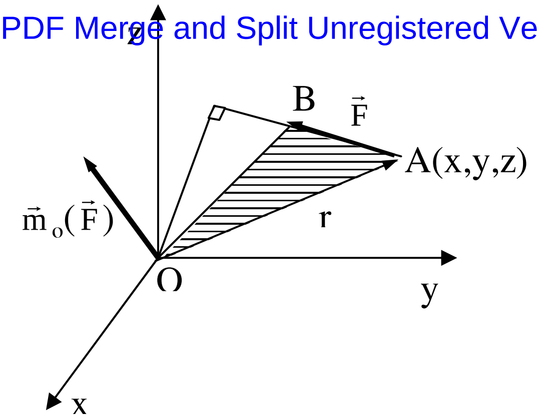
Trong trường hợp mặt phẳng tác dụng của mô men lực đã xác định, để đơn giản ta đưa ra khái niệm mô men đại số của lực $\vec{F}$ đối với tâm O như sau:

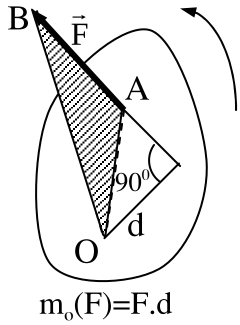
Mô men đại số của lực $\vec{F}$ đối với tâm O là đại lượng đại số ký hiệu:

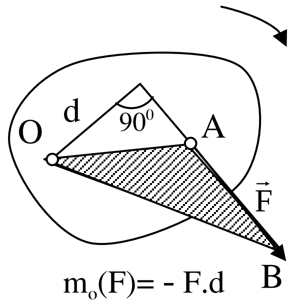
$$m_o = \pm F.d$$

Lấy dấu dương (+) khi nhìn vào mặt phẳng tác dụng thấy lực $\vec{F}$ quay theo chiều mũi tên vòng quanh O theo chiều ngược kim đồng hồ (hình 1.13), lấy dấu trừ (-) trong trường hợp quay ngược lại (hình 1.14).

Mô men đại số thường được biểu diễn bởi mũi tên vòng quanh tâm O theo chiều của mô men.







Hình 1.12 *Hình 1.13* *Hình 1.14*

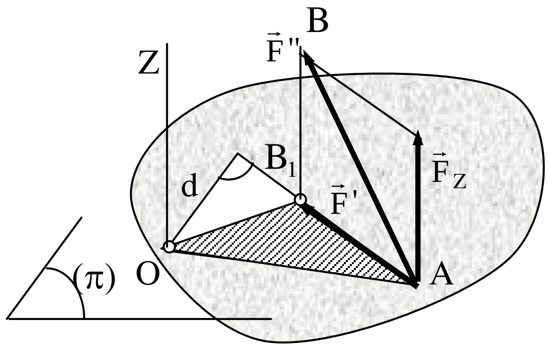
1.3.1.2. Mô men của lực đối với một trục

Mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục OZ là đại lượng đại số ký hiệu $m_Z(\vec{F})$ tính theo công thức: $m_Z(\vec{F}) = \pm F'.d'$. Trong đó F' là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng π vuông góc với trục Z. d' là khoảng cách tính từ giao điểm O của trục Z với mặt phẳng π đến đường tác dụng của $\vec{F}'$ (hình 1.15).

Lấy với dấu (+) khi nhìn từ hướng dương của trục OZ sẽ thấy hình chiếu F' quay quanh trục OZ ngược chiều kim đồng hồ.

Lấy dấu (-) trong trường hợp ngược lại.

Từ hình vẽ ta rút ra trị số mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục OZ bằng hai lần diện tích tam giác OAB_1.



Hình 1.15

1.3.1.3. Quan hệ giữa mô men lực $\vec{F}$ đối với tâm O và với trục đi qua O

Trên hình 1.16 ta thấy:

$m_o(\vec{F}) = 2$.diện tích (ΔOAB).

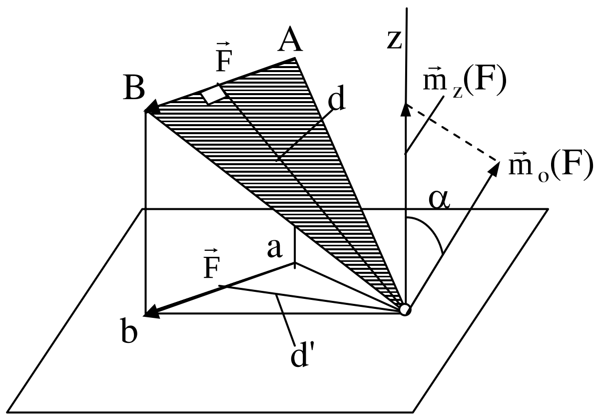
$m_Z(\vec{F}) = 2$ diện tích (Δoa_1b_1)

Vì oa_1b_1 là hình chiếu của tam giác OAB trên mặt phẳng vuông góc với trục Z tại O. Nếu gọi α là góc hợp bởi giữa hai mặt phẳng OAB và mặt phẳng oa_1b_1 thì góc này cũng chính là góc hợp giữa véc tơ mô men $\vec{m}_o(\vec{F})$ với trục OZ, ta có:

Diện tích Δoa_1b_1 = diện tích $\Delta OAB.\cos\alpha$.

hay $m_Z(\vec{F}) = \vec{m}_o(\vec{F}).\cos\alpha$.

Kết quả cho thấy mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục OZ là hình chiếu véc tơ mô men lực $\vec{F}$ lấy với điểm O nào đó trên trục OZ chiếu trên trục OZ đó.



Hình 1.16

1.3.2. LÝ THUYẾT VỀ NGẪU LỰC

1.3.2.1 Định nghĩa và các yếu tố đặc trưng của ngẫu lực

Định nghĩa: Ngẫu lực là hệ hai lực song song ngược chiều cùng cường độ.

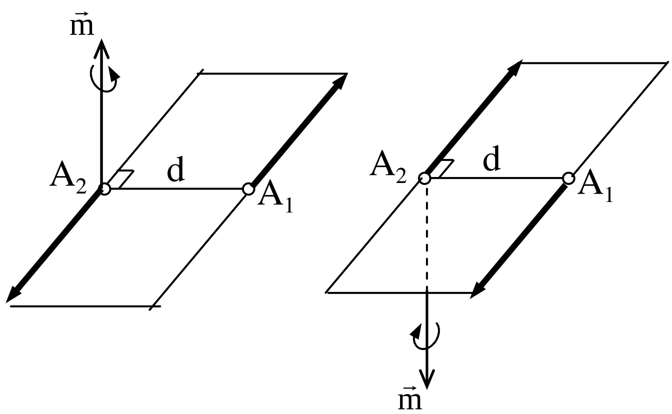
Hình 1.17 biểu diễn ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$

Mặt phẳng chứa hai lực gọi là mặt phẳng tác dụng. Khoảng cách d giữa đường tác dụng của hai lực gọi là cánh tay đòn. Chiều quay vòng của các lực theo đường khép kín trong mặt phẳng tác dụng gọi là chiều quay của ngẫu lực. Tích số m = d.F gọi là mô men của ngẫu lực.

Tác dụng của ngẫu lực được đặc trưng bởi ba yếu tố:

- Độ lớn mô men m

- Phương mặt phẳng tác dụng



Hình 1.17

- Chiều quay của ngẫu.

Thiếu một trong ba yếu tố trên tác dụng của ngẫu lực chưa được xác định.

Để biểu diễn đầy đủ ba yếu tố trên của ngẫu lực ta đưa ra khái niệm về véc tơ mô men ngẫu lực $\vec{m}$. Véc tơ mô men $\vec{m}$ có trị số bằng tích số d.F có phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng, có chiều sao cho nhìn từ mút của nó xuống mặt phẳng tác dụng thấy chiều quay của ngẫu lực theo chiều ngược kim đồng hồ.

Với định nghĩa trên ta thấy véc tơ mô men $\vec{m}$ của ngẫu lực chính là véc tơ mô men của một trong hai lực thành phần lấy đối với điểm đặt của lực kia. Theo hình 1.17 có thể viết:

$$\vec{m} = \vec{m}_{A1}(\vec{F}_2) = \vec{m}_{A2}(\vec{F}_1) = \overrightarrow{A_1A_2} \times \vec{F}_2 = \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{F}_2$$

1.3.2.2. Định lý về mô men của ngẫu lực

Trong một ngẫu lực, tổng mô men của hai lực thành phần đối với một điểm bất kỳ là một đại lượng không đổi và bằng véc tơ mô men ngẫu lực.

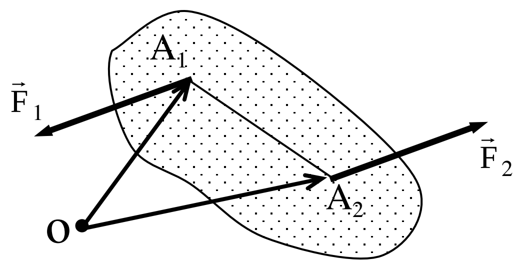
Chứng minh: Xét ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ biểu diễn trên hình 1.18. Chọn một điểm O bất kỳ trong không gian, tổng mô men của hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ lấy với O có thể viết: $\vec{m}_o(\vec{F}_1) + \vec{m}_o(\vec{F}_2) =$

$$= \overrightarrow{OA}_1 \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA}_2 \times \vec{F}_2;$$

$$= \overrightarrow{OA}_1 \times \vec{F}_1 - \overrightarrow{OA}_2 \times \vec{F}_2;$$

$$= (\overrightarrow{OA}_1 - \overrightarrow{OA}_2) \times \vec{F}_1;$$

$$= \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{F}_1 = \vec{m}.$$



Hình 1.18

Trong định lý trên vì điểm O là bất kỳ do đó có thể kết luận rằng tác dụng của ngẫu lực sẽ không thay đổi khi ta rời chỗ trong không gian nhưng vẫn giữ nguyên độ lớn, phương chiều của véc tơ mô men $\vec{m}$.

Cũng từ định lý trên rút ra hệ quả về các ngẫu lực tương đương sau đây.

Hệ quả 1: Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng có cùng trị số mô men m cùng chiều quay sẽ tương đương.

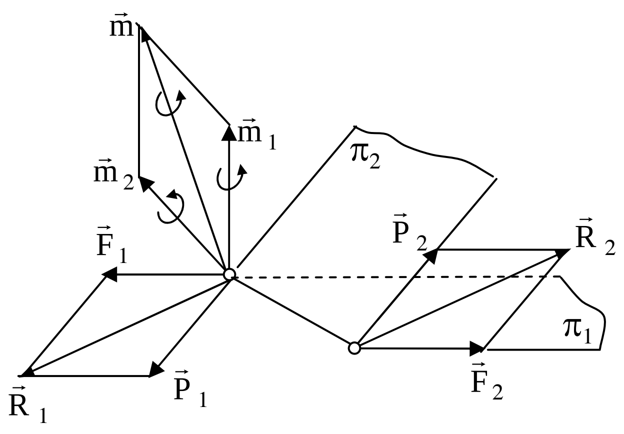
Hệ quả 2: Hai ngẫu lực nằm trong hai mặt phẳng song song cùng trị số mô men, cùng chiều quay sẽ tương đương với nhau.

Thật vậy trong hai trường hợp này các ngẫu lực đều đảm bảo có véc tơ mô men $\vec{m}$ như nhau.

1.3.2.3. Hợp hai ngẫu lực

Định lý: hợp hai ngẫu lực có mô men $\vec{m}_1$ và $\vec{m}_2$ cho ta một ngẫu lực có mô men $\overrightarrow{M}$ bằng tổng hình học các véc tơ mô men của hai ngẫu lực đã cho. Ta có $\overrightarrow{M} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$

Chứng minh: Xét hai ngẫu lực có mô men $\vec{m}_1$ và $\vec{m}_2$ nằm trong hai mặt phẳng π_1 và π_1. Trên giao tuyến của hai mặt phẳng π_1 và π_2 lấy một đoạn thẳng A_1A_2 ngẫu lực có mô men $\vec{m}$ thay bằng ngẫu lực ($\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$) nằm trong mặt phẳng π_1 và đặt vào A_1A_2. Ngẫu lực có mô men $\vec{m}_2$ thay bằng ngẫu lực ($\vec{p}_1$ $\vec{p}_2$) nằm trong mặt phẳng π_2 và cùng đặt vào A_1A_2 (hình 1.19).



Hình 1.19

Tại A_1 hợp hai lực $\vec{F}_1$, $\vec{P}_1$ được lực $\vec{R}_1$

Tại A_2 hợp hai lực $\vec{F}_2$ $\vec{P}_2$ được lực $\vec{R}_2$

Do tính chất đối xứng dễ dàng nhận thấy hai véc tơ $\vec{R}_1$ và $\vec{R}_2$ song song ngược chiều và có cùng cường độ. Nói khác đi hai lực $\vec{R}_1$ $\vec{R}_2$ tạo thành một ngẫu lực. Đó chính là ngẫu lực tổng hợp của hai ngẫu lực đã cho.

Gọi $\vec{M}$ là mô men của ngẫu lực ($\vec{R}_1$ $\vec{R}_2$) ta có:

$\vec{M} = A_1A_2 \text{ x } \vec{R}_2 = A_1A_2 \text{ x } \vec{R}_1$

Thay $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1$ và $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2$, suy ra:

$\vec{M} = A_1A_2 \text{ x } (\vec{F}_2 + \vec{P}_2) = A_1A_2 \text{ x } \vec{F}_2 + A_1A_2 \text{ x } \vec{P}_2$,

$\vec{M} = \vec{m}_{A1}(\vec{F}_2) + \vec{m}_{A1}(\vec{P}_2) = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$.

Trường hợp hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng. Khi đó các mô men của ngẫu lực được biểu diễn bởi các mô men đại số. Theo kết quả trên, ngẫu lực tổng hợp trong trường hợp này cũng nằm trong mặt phẳng tác dụng của hai ngẫu lực đã cho và có mô men bằng tổng đại số 2 mô men của ngẫu lực thành phần: $M = (m_1 \pm m_2)$

Chương 2

LÝ THUYẾT VỀ HỆ LỰC

Trong tĩnh học có hai bài toán cơ bản: thu gọn hệ lực và xác định điều kiện cân bằng của hệ lực. Chương này giới thiệu nội dung của hai bài toán cơ bản nói trên.

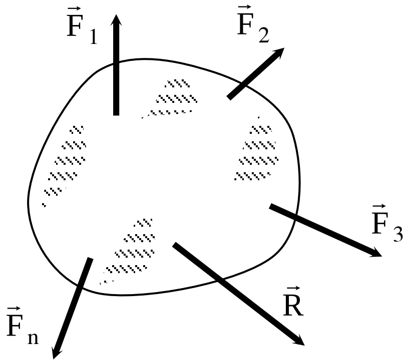
2.1 ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CƠ BẢN CỦA HỆ LỰC

Hệ lực có hai đặc trưng hình học cơ bản là véc tơ chính và mô men chính.

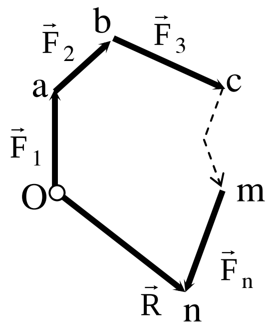
2.1.1. Véc tơ chính

Xét hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,.. $\vec{F}_n$) tác dụng lên vật rắn (hình 2.1a).

Véc tơ chính của hệ lực là véc tơ tổng hình học các véc tơ biểu diễn các lực trong hệ (hình 2.1b)



Hình 2.1



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2\text{-}1)$$

Hình chiếu véc tơ $\vec{R}$ lên các trục toạ độ oxyz được xác định qua hình chiếu các lực trong hệ:

$$\vec{R}_x = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} X_i;$$

$$\vec{R}_y = y_1 + y_2 + ... + y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i;$$

$$\vec{R}_z = z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Từ đó có thể xác định độ lớn, phương, chiều véc tơ chính theo các biểu thức sau:

$$\vec{R} = \sqrt{R^2_x + R^2_y + R^2_z};$$

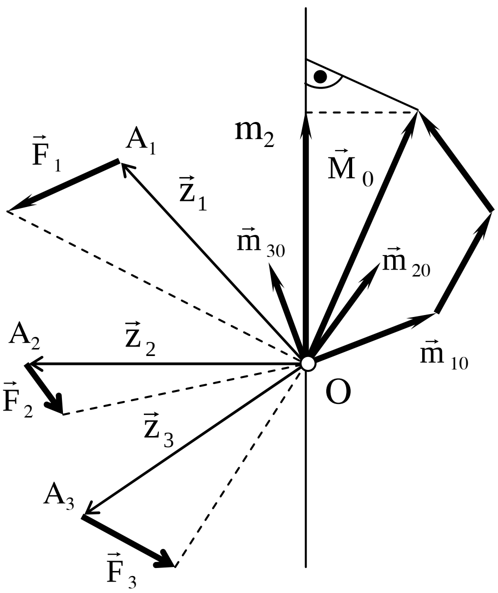
$$\cos(R,X) = \frac{R_x}{R}; \qquad \cos(R,Y) = \frac{R_y}{R}; \qquad \cos(R,Z) = \frac{R_z}{R}.$$

Véc tơ chính là một véc tơ tự do.

2.1.2. Mô men chính của hệ lực

Véc tơ mô men chính của hệ lực đối với tâm O là véc tơ tổng của các véc tơ mô men các lực trong hệ lấy đối với tâm O (hình 2.2). Nếu ký hiệu mô men chính là $\vec{M}_o$ ta có

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i) \qquad (2\text{-}2)$$



Hình 2.2

Hình chiếu của véc tơ mô men chính $\vec{M}_o$ trên các trục toạ độ oxyz được xác định qua mô men các lực trong hệ lấy đối với các trục đó:

$$M_x = m_x(\vec{F}_1) + m_x(\vec{F}_2) + ... + m_x(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i);$$

$$M_y = m_y(\vec{F}_1) + m_y(\vec{F}_2) + ... + m_y(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i);$$

$$M_z = m_z(\vec{F}_1) + m_z(\vec{F}_2) + ... + m_z(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i).$$

Giá trị và phương chiều véc tơ mô men chính được xác định theo các biểu thức sau:

$$M_o = \sqrt{M^2{}_x + M^2{}_y + M^2{}_z}$$

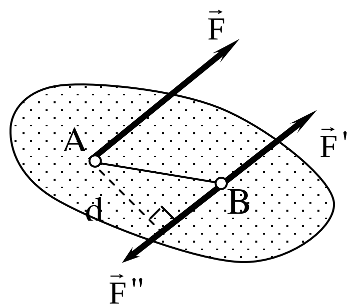
$$\cos(M_o,x) = \frac{M_x}{M_o}; \qquad \cos(M_o,y) = \frac{M_y}{M_o}; \qquad \cos(M_o,z) = \frac{M_z}{M_o}.$$

Khác với véc tơ chính $\vec{R}$ véc tơ mô men chính $\vec{M}_o$ là véc tơ buộc nó phụ thuộc vào tâm O. Nói cách khác véc tơ chính là một đại lượng bất biến còn véc tơ mô men chính là đại lượng biến đổi theo tâm thu gọn O.

2.2. THU GỌN HỆ LỰC

Thu gọn hệ lực là đưa hệ lực về dạng đơn giản hơn. Để thực hiện thu gọn hệ lực trước hết dựa vào định lý rời lực song song trình bày dưới đây.

2.2.1. Định lý 2.1 : Tác dụng của lực lên vật rắn sẽ không thay đổi nếu ta rời song song nó tới một điểm đặt khác trên vật và thêm vào đó một ngẫu lực phụ



Hình 2.3

có mô men bằng mô men của lực đã cho lấy đối với điểm cần rời đến.

Chứng minh: Xét vật rắn chịu tác dụng lực $\vec{F}$ đặt tại A. Tại điểm B trên vật đặt thêm một cặp lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'')$ trong đó $\vec{F}' = \vec{F}$ còn $\vec{F}'' = -\vec{F}$. (xem hình 2.3).

Theo tiên đề 2 có: $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$.

Hệ ba lực $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ có hai lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$ tạo thành một ngẫu lực có mô men $\vec{m} = \vec{m}_B(F)$ (theo định nghĩa mô men của ngẫu lực).

Ta đã chứng minh được $\vec{F} \sim \vec{F}'$ + ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$

2.2.2 Thu gọn hệ lực bất kỳ về một tâm

a. **Định lý 2.2**: Hệ lực bất kỳ luôn luôn tương đương với một lực bằng véc tơ chính đặt tại điểm O chọn tuỳ ý và một ngẫu lực có mô men bằng mô men chính của hệ lực đối với tâm O đó.

Chứng minh: Cho hệ lực bất kỳ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn. Chọn điểm O tuỳ ý trên vật, áp dụng định lý rời lực song song đưa các lực của hệ về đặt tại O. Kết quả cho ta hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)_o$ đặt tại O và một hệ các ngẫu lực phụ có mô men là $\vec{m}_1 = \vec{m}_o(\vec{F}_1)$, $\vec{m}_2 = \vec{m}_o(\vec{F}_2)$, ... $\vec{m}_n = \vec{m}_o(\vec{F}_n)$ (hình 2.4).

Hợp từng đôi lực nhờ tiên đề 3 có thể đưa hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n)_o$ về tương đương với một lực $\vec{R}$.

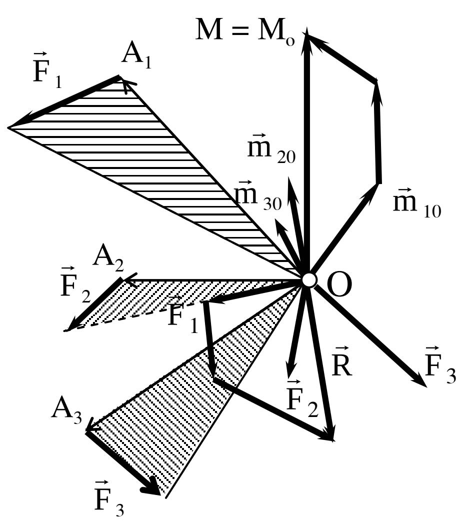
Cụ thể có:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}_1$ trong đó $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$(\vec{R}_1, \vec{F}_3) \sim \vec{R}_2$ trong đó $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

....

$(\vec{R}_{(n-1)}, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$



Hình 2.4

trong đó $\vec{R} = \vec{R}_{(n-2)} + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Hợp lực $\vec{R}$ của các lực đặt tại O là véc tơ chính $\vec{R}_0$ của hệ lực.

Các ngẫu lực phụ cũng có thể thay thế bằng một ngẫu lực tổng hợp theo cách lần lượt hợp từng đôi ngẫu lực như đã trình bày ở chương 1. Ngẫu lực tổng hợp của hệ ngẫu lực phụ có mô men $\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i)$. Đây là mô men chính của hệ lực đã cho đối với tâm O

Theo định lý 2.2, trong trường hợp tổng quát khi thu gọn hệ lực về tâm O bất kỳ ta được một véc tơ chính và một mô men chính. Véc tơ chính bằng tổng hình học các lực trong hệ và là một đại lượng không đổi còn mô men chính bằng tổng mô men các lực trong hệ lấy đối với tâm thu gọn và là đại lượng biến đổi theo tâm thu gọn.

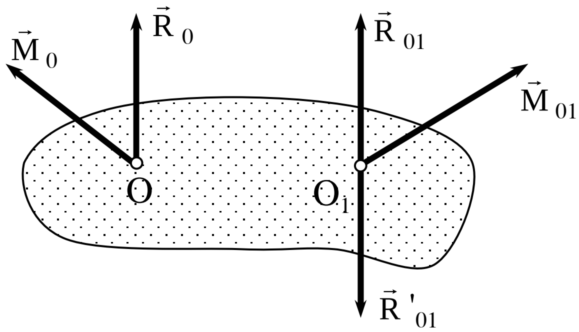
Để xác định quy luật biến đổi của mô men chính đối với các tâm thu gọn khác nhau ta thực hiện thu gọn hệ lực về hai tâm O và O_1 bất kỳ (hình 2.4a).

Thực hiện thu gọn hệ về tâm O ta được $\vec{R}_0$ và $\vec{M}_o$.

Trên vật ta lấy một tâm O_1 khác O sau đó rời lực $\vec{R}_o$ về O_1 ta được

$\vec{R}_o \sim \vec{R}_{o1}$ + ngẫu lực $(\vec{R}_o, \vec{R}'_{o1})$.

Suy ra $(\vec{R}_o, \vec{M}_o) \sim \vec{R}_{o1}$ + ngẫu lực $(\vec{R}_o, \vec{R}'_{o1}) + \vec{M}_o$



Hình 2.4a

Nếu thu gọn hệ về O_1 ta được $\vec{M}_{o1}$ và $\vec{R}_{o1}$.

Điều tất nhiên phải có là :

$(\vec{R}_o, \vec{M}_o) \sim (\vec{R}_{o1}, \vec{M}_{o1})$.

Thay kết quả chứng minh ở trên ta có:

$(\vec{R}_o, \vec{M}_o) \sim R_{o1} + (\vec{R}_o, \vec{R}'_{o1}) + M_o \sim (\vec{R}_o + M_{o1})$

hay $\vec{M}_{01} \sim \vec{M}_o + (\vec{R}_o, \vec{R}'_{01})$ (2.3)

Ngẫu lực $(\vec{R}_o, \vec{R}_{01})$ có mô men $\vec{M}' = m_{o1.}(R_o)$

<u>Kết luận</u>: Khi thay đổi tâm thu gọn véc tơ mô men chính thay đổi một đại lượng M' bằng mô men của véc tơ chính đặt ở tâm trước lấy đối với tâm sau.

2.2.3. Các dạng chuẩn của hệ lực

Kết quả thu gọn hệ lực về một tâm có thể xẩy ra 6 trường hợp sau

2.2.3.1. Véc tơ chính và mô men chính đều bằng không

$\vec{R} = 0$; $\vec{M}_o = 0$

Hệ lực khảo sát cân bằng.

2.2.3.2. Véc tơ chính bằng không còn mô men chính khác không

$\vec{R} = 0$; $\vec{M}_o \neq 0$

Hệ lực tương đương với một ngẫu lực có mô men bằng mô men chính.

2.2.3.3. Véc tơ chính khác không còn mô men chính bằng không

$\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_o = 0$

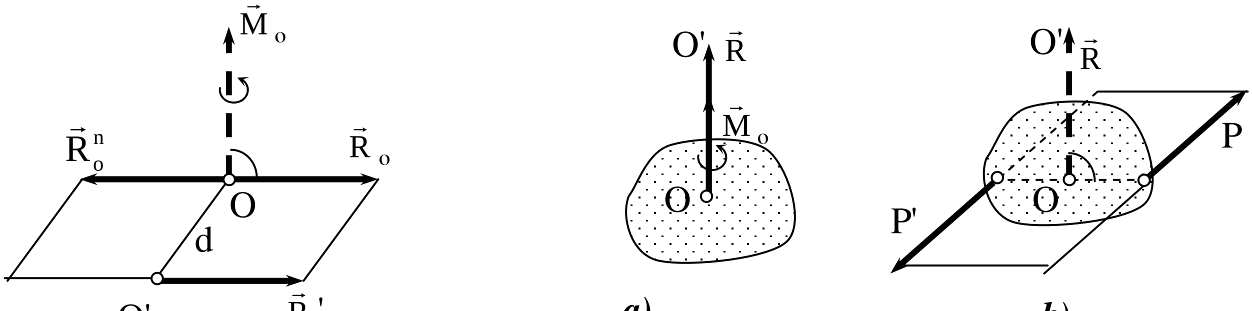
Hệ có một hợp lực bằng véc tơ chính.

2.2.3.4. Véc tơ chính và mô men chính đều khác không nhưng vuông góc với nhau (hình 2.5)

$\vec{R} \neq 0$; $\vec{M}_o \neq 0$ và $\vec{R} \perp \vec{M}_o$

Trong trường hợp này thay thế mô men chính $\vec{M}_o$ bằng ngẫu lực $(\vec{R}', \vec{R}'')$ với điều kiện:

$\vec{R}' = \vec{R}$; $\vec{R}'' = -\vec{R}$ và $\vec{M}_o = \vec{m}_o(\vec{R}')$



Ta có $(\vec{R}, \vec{M}_o) \sim (\vec{R}, \vec{R}', \vec{R}'')$.

Theo tiên đề 1 $\vec{R}_o$ và $\vec{R}''$ cân bằng do đó có thể bớt đi và cuối cùng hệ còn lại một lực bằng véc tơ chính nhưng đặt tại O_1. Nói khác đi hệ có một hợp lực đặt tại O_1.

2.2.3.5. Hai véc tơ chính và mô men chính khác không nhưng song song với nhau (hình 2.6).

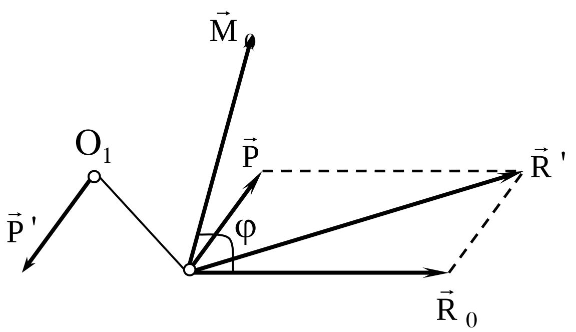
$\vec{R}_o \neq 0$; $\vec{M}_o \neq 0$ và $\vec{R}_o // \vec{M}_o$

Trong trường hợp này nếu thay $\vec{M}_o$ bằng một ngẫu lực $(\vec{P}\ \vec{P}')$ mặt phẳng của ngẫu này vuông góc với véc tơ chính $\vec{R}$.

Hệ được gọi là hệ vít động lực. Nếu véc tơ $\vec{R}$ song song cùng chiều với véc tơ $\vec{M}_o$ hệ gọi là hệ vít động lực thuận (phải) và ngược lại gọi là hệ vít động lực nghịch (trái). Hình 2.6 biểu diễn vít động lực thuận

2.2.3.6. Hai véc tơ chính và mô men chính khác không và hợp lực với nhau một góc φ bất kỳ (hình 2.7)

Trường hợp này nếu thay thế véc tơ $\vec{M}_o$ bằng một ngẫu lực $(\vec{P}\ \vec{P}')$ trong đó cólực $\vec{P}$ đặt tại O còn lực $\vec{P}'$ đặt tại O_1 sao cho $m_o(P) = \vec{M}_o$. Rõ ràng mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực $(\vec{P}\ \vec{P}')$ không vuông góc với $\vec{R}_o$. Mặt khác tại O có thể hợp hai lực $\vec{P}$ và $\vec{R}_o$ thành một lực $\vec{R}'$. Như



Hình 2.7

vậy đã đưa hệ về tương đương với hai lực $\vec{P}'$, $\vec{R}'$ hai lực này chéo nhau.

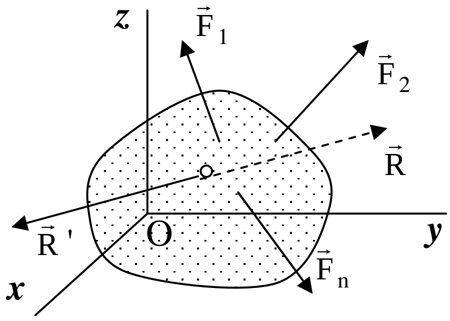
2.2.4. Định lý Va ri nhông

Định lý: Khi hệ lực có hợp lực $\vec{R}$ thì mô men của $\vec{R}$ đối với một tâm hay một trục nào đó bằng tổng mô men của các lực trong hệ lấy đối với tâm hay trục đó.

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i)$$

$$\vec{m}_z(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_z(\vec{F}_i) \qquad (2.4)$$

Chứng minh: Cho hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ (hình 2.8).



Hình 2.8

Tại điểm C trên đường tác dụng của hợp lực $\vec{R}$ đặt thêm lực $\vec{R}' = -\vec{R}$. Hệ lực đã cho cùng với $\vec{R}'$ tạo thành một hệ lực cân bằng:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n, +\vec{R}') \sim 0$$

Khi thu gọn hệ lực này về một tâm O bất kỳ ta được một véc tơ chính và một mô men chính. Các véc tơ này bằng không vì hệ cân bằng, ta có:

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i) + \vec{m}_o(\vec{R}') = 0$$

Thay $\vec{R}' = -\vec{R}$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i) - \vec{m}_o(\vec{R}) = 0$$

Hay $m_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i)$

Chiếu phương trình trên lên trục oz sẽ được:

$$m_z(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i)$$

Định lý đã được chứng minh

2.2.5. Kết quả thu gọn các hệ lực đặc biệt

2.2.5.1. Hệ lực đồng quy

Hệ lực đồng quy là hệ lực có đường tác dụng của các lực giao nhau tại một điểm. Trong trường hợp hệ lực đồng quy nếu chọn tâm thu gọn là điểm đồng quy kết quả thu gọn sẽ cho véc tơ chính đúng bằng hợp lực còn mô men chính sẽ bằng không.

$R_0 \neq 0, \quad M_o = 0$ với O là điểm đồng quy.

2.2.5.2. Hệ ngẫu lực

Nếu hệ chỉ bao gồm các ngẫu lực, khi thu gọn hệ sẽ được một ngẫu lực tổng hợp có mô men đúng bằng mô men chính của hệ.

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$; m_i là mô men của ngẫu lực thứ i và n là số ngẫu lực của hệ.

2.2.5.3. Hệ lực phẳng

Hệ lực phẳng là hệ có các lực cùng nằm trong một mặt phẳng.

Nếu chọn tâm thu gọn nằm trong mặt phẳng của hệ thì kết quả thu gọn vẫn cho ta một mô men chính $\vec{M}_o$ và véc tơ chính $\vec{R}_o$. Véc tơ chính $\vec{R}$ nằm trong mặt phẳng của hệ còn mô men chính $\vec{M}_o$ vuông góc với mặt phẳng của hệ. Theo kết quả thu gọn ở dạng chuẩn ta thấy: hệ lực phẳng khi có véc tơ chính $\vec{R}$ và mô men chính $\vec{M}_o$ khác không bao giờ cũng có một hợp lực nằm trong mặt phẳng của hệ.

2.2.5.4. Hệ lực song song

Hệ lực song song là hệ lực có đường tác dụng song song với nhau.

Kết quả thu gọn về một tâm bất kỳ cho ta một véc tơ chính $\vec{R}$ và một mô men chính $\vec{M}_o$. Véc tơ chính có đặc điểm song song với các lực của hệ.

2.3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

2.3.1. Điều kiện cân bằng và phương trình cân bằng của hệ lực bất kỳ trong không gian

2.3.1.1. Điều kiện cân bằng

Điều kiện cân bằng của hệ lực bất kỳ trong không gian là véc tơ chính và mô men chính của nó khi thu gọn về một tâm bất kỳ đều bằng không.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1 = 0$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_1) = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

2.3.1.2. Phương trình cân bằng

Nếu gọi R_x, R_y, R_z và M_x, M_y, M_z là hình chiếu của các véc tơ chính và mô men chính lên các trục toạ độ oxyz thì điều kiện (2-5) có thể biểu diễn bằng các phương trình đại số gọi là phương trình cân bằng của hệ lực bất kỳ trong không gian. Ta có:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = 0, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = 0, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = 0. \qquad (2\text{-}6)$$

Trong các phương trình trên X_i, Y_i, Z_i là thành phần hình chiếu của lực F_i; $m_x(\vec{F}_i)$, $m_y(\vec{F}_i)$, $m_z(\vec{F}_i)$ là mô men của các lực $\vec{F}_i$ đối với các trục của hệ tọa độ oxyz. Ba phương trình đầu gọi là ba phương trình hình chiếu còn 3 phương trình sau gọi là 3 phương trình mô men.

2.3.2. Phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt

2.3.2.1 Hệ lực đồng quy

Nếu chọn tâm thu gọn là điểm đồng quy O thì mô men chính $\vec{M}_o$ sẽ bằng không do đó 3 phương trình mô men luôn luôn tự nghiệm. Vậy phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy chỉ còn:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \qquad (2\text{-}7)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0$$

2.3.2.2. Hệ ngẫu lực

Khi thu gọn hệ ngẫu lực về một tâm ta thấy ngay véc tơ chính $\vec{R}_0 = 0$ điều đó có nghĩa các phương trình hình chiếu luôn luôn tự nghiệm. Phương trình cân bằng của hệ ngẫu lực chỉ còn lại ba phương trình mô men sau:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{ix} = 0,$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{iy} = 0, \qquad (2\text{-}8)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{iz} = 0.$$

Ở đây m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} là hình chiếu lên các trục hệ tọa độ oxyz của véc tơ mô men $\vec{m}_i$ của ngẫu lực thứ i.

2.3.2.3. Hệ lực song song

Chọn hệ toạ độ oxyz sao cho oz song song với các lực. Khi đó các hình chiếu R_x, R_y của véc tơ chính và M_z của mô men chính luôn luôn bằng không.

Vì vậy phương trình cân bằng của hệ lực song song chỉ còn lại ba phương trình sau:

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\vec{F}_i) = 0; \qquad (2\text{-}9)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\vec{F}_i) = 0$$

Trong đó phương trình đầu là phương trình hình chiếu còn hai phương trình cuối là phương trình mô men.

2.3.2.4. Hệ lực phẳng

Cần lưu ý rằng trong hệ lực phẳng véc tơ chính $\vec{R}$ và mô men chính $\vec{M}$ luôn luôn vuông góc với nhau, nghĩa là hệ lực phẳng luôn luôn có hợp lực $\vec{R}$ nằm trong mặt phẳng của hệ đã cho. Để đảm bảo điều kiện hợp lực của hệ bằng không tức là điều kiện cân bằng của hệ ta có thể viết phương trình cân bằng dưới 3 dạng khác nhau.

1. Dạng hai phương trình hình chiếu một phương trình mô men:

Để hệ lực cân bằng cũng như các trường hợp khác phải có R = 0 và M_o = 0. Nếu chọn hệ toạ độ oxy là mặt phẳng chứa các lực của hệ ta thấy ngay các phương trình $R_z = \sum_{i=1}^{n} z_i = 0$; $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(F_i) = 0$ và $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(F_i) = 0$ là luôn luôn tự nghiệm vì vậy phương trình cân bằng chỉ còn :

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \qquad (2\text{-}10)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(F_i).$$

Hai phương trình đầu là phương trình hình chiếu còn phương trình thứ ba là phương trình mô men. Cần chú ý vì các lực cùng nằm trong mặt phẳng oxy do đó $M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(F_i)$ chính là tổng mô men đại số của các lực đối với tâm O.

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} \pm m_z(F_i)$$

2. Dạng một phương trình hình chiếu và hai phương trình mô men

Điều kiện hợp lực $\vec{R}$ của hệ bằng không có thể biểu diễn bằng ba phương trình sau đây:

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0;$$

$$M_A = \sum_{i=1}^{n} \pm m_A(F_i) = 0; \qquad (2\text{-}11)$$

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} \pm m_B(F_i) = 0$$

Với điều kiện trục x không vuông góc với AB.

Thạt vậy từ phương trình (1) cho thấy hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực bằng không hoặc vuông góc với trục x.

Theo định lý Va ri nhông ,từ phương trình (2) ta thấy hợp lực $\vec{R}$ hoặc bằng không hoặc đị qua A.

Từ phương trình (3) ta cũng thấy hợp lực $\vec{R}$ của hệ bằng không hoặc đi qua B.

Kết hợp cả ba phương trình ta thấy hợp lực của hệ hoặc bằng không hoặc phải đi qua hai điểm A,B và vuông góc với trục x (không vuông góc với AB). Điều kiện hợp lực vừa qua A, B và vừa vuông góc với trục x là không thực hiện được vì trái với giả thiết.

Như vậy nếu hệ thoả mãn phương trình (2-11) thì hợp lực của nó sẽ bằng không nghĩa là hệ lực cân bằng.

3. Dạng ba phương trình mô men đối với 3 điểm

Ngoài hai dạng phương trình cân bằng trên hệ lực phẳng còn có phương trình cân bằng theo dạng sau:

$$M_A = \sum_{i=1}^{n} \pm m_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} \pm m_B(\vec{F}_i) = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

$$M_C = \sum_{i=1}^{n} \pm m_o(\vec{F}_i) = 0$$

Với điều kiện A, B, C không thẳng hàng.

Thật vậy, nếu hệ lực phẳng thoả mãn phương trình $M_A = \sum \pm m_A(\vec{F}) = 0$ thì theo định lý Va ri nhông hợp lực của hệ sẽ bằng không hoặc đi qua A. Cũng lý luận tương tự ta thấy để thoả mãn $M_B = 0$ và $M_c = 0$ thì hợp lực phải bằng không hoặc phải đi qua B, đi qua C.

Vì chọn 3 điểm A, B, C không thẳng hàng nên điều kiện để hợp lực qua 3 điểm là không thực hiện được. Chỉ có thể hợp lực bằng không, có nghĩa là nếu thoả mãn hệ ba phương trình (2-12) hệ lực phẳng cho sẽ cân bằng.

2.4. BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN

Vật rắn cân bằng khi hệ lực tác dụng lên nó bao gồm các lực đã cho và phản lực liên kết cân bằng.

Khi giải bài toán cân bằng của vật rắn có thể áp dụng phương pháp giải tích hoặc phương pháp hình học nhưng phổ biến và có hiệu quả nhất là phương pháp giải tích.

Giải bài toán cân bằng của vật thường tiến hành theo các bước sau:

1. Chọn vật khảo sát: vật khảo sát phải là vật rắn mà sự cân bằng của nó cần thiết cho yêu cầu xác định của bài toán. Nếu như bài toán tìm phản lực liên kết thì vật khảo sát phải là vật chịu tác dụng của phản lực liên kết cần tìm, nếu là bài toán tìm điều kiện cân bằng của vật thì vật khảo sát phải chính là vật đó.

2. Giải phóng vật khảo sát khỏi liên kết và xem đó là vật tự do dưới tác dụng của các lực đã cho và phản lực liên kết.

3. Thiết lập điều kiện cân bằng cuả vật bởi các phương trình cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật khảo sát bao gồm các lực cho và phản lực liên kết.

4. Giải hệ phương trình cân bằng để xác định trị số và phương chiều của các phản lực liên kết hoặc thiết lập mối quan hệ giữa các lực để đảm bảo điều kiện cân bằng cho vật khảo sát .

5. Nhận xét các kết quả thu được.

Cần chú ý rằng chiều của các phản lực thường chưa được xác định vì thế lúc đầu phải tự chọn chiều. Dựa vào kết quả giải hệ phương trình cân bằng ta có thể xác định chiều của các phản lực chọn đúng hay sai. Nếu các phản lực liên kết cho trị số dương thì chiều chọn là đúng và nếu trị số âm thì chiều phải đảo lại . Mặt khác cũng cần lưu ý rằng bài toán có trường hợp giải được (bài toán tĩnh định) khi số ẩn số cần xác định nhỏ hơn hoặc bằng số phương trình cân bằng. Có trường hợp không giải được (bài toán siêu tĩnh) khi ẩn số cần tìm lớn hơn số phương trình cân bằng.

Thí du 2.1. Cột điện OA chôn thẳng đứng trên mặt đất và được giữ bởi hai sợi dây AB và AD hợp với cột điện một góc $\alpha = 30^0$ (xem hình 2-8a) Góc giữa mặt phẳng AOD và mặt phẳng AOB là $\varphi = 60^0$. Tại đầu A của cột điện có hai nhánh dây điện mắc song song với trục ox và oy. Các nhánh dây này có lực kéo là P_1 và P_2 như hình vẽ. Cho biết $P_1 = P_2 = P = 100$kN.

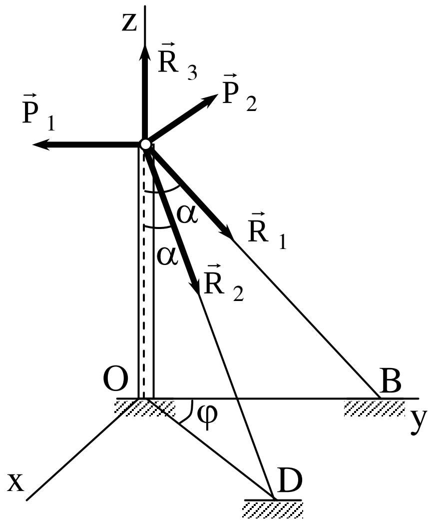
Xác định lực tác dụng dọc trong cột điện và trong các dây căng AD, AB.

Bài giải:

Chọn vật khảo sát là đầu A của cột điện.

Liên kết đặt lên đầu A là hai sợi dây AB, AD và phần cột điện còn lại.

Gọi phản lực liên kết trong dây AB là R_1, trong dây AD là $\vec{R}_2$ và lực dọc cột là $\vec{R}_3$ với chiều chọn như hình vẽ 2-8. Khi giải phóng điểm A khỏi liên kết điểm A sẽ chịu tác dụng của các lực P_1, P_2 và các phản lực R_1R_2



Hình 2.8a

$\vec{R}_3$. Điều kiện để đầu A cân bằng là hệ 5 lực tác dụng lên nó cân bằng. Ta có:

$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3) \sim 0$. Hệ lực này đồng quy tại A do đó phương trình cân bằng thiết lập theo phương trình (2.7)

Để tránh nhầm lẫn ta lập bảng (2-1) hình chiếu các lực lên 3 trục của hệ tọa độ oxyz như sau:

Bảng 2-1

F_1	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3
x_1	0	-P	0	$R_2\sin\alpha\sin\varphi$	0
y_1	-P	0	$R_1\sin\alpha$	$R_2\sin\alpha\cos\varphi$	0
z_1	0	0	$-R_1\cos\alpha$	$-R_2\cos\alpha$	R_3

Phương trình cân bằng viết được:

$\sum Xi = -P + R_2\sin\alpha\sin\varphi = 0;$ (a)

$\sum Yi = -P + R_1\sin\alpha + R_2\sin\alpha\cos\varphi = 0$ (b)

$\sum Zi = -R_1\cos\alpha - R_2\cos\alpha + R_3 = 0$ (c)

Hệ 3 phương trình trên chứa 3 ẩn số R_1, R_2, R_3 nên bài toán là tĩnh định.

Giải hệ phương trình trên được:

$$R_1 = P\frac{1-\cot g\varphi}{\sin\alpha};\ R_2 = \frac{P}{\sin\alpha\sin\varphi};\ R_3 = P\,\mathrm{cotg}\alpha(1-\mathrm{cotg}\varphi + \frac{1}{\sin\varphi});$$

Thay các trị số của α,φ và P ta nhận được:

$R_1 = 85$kN; $R_2 = 231$ kN; $R_3 = 273$kN.

Kết quả đều dương nên chiều các phản lực chọn là đúng.

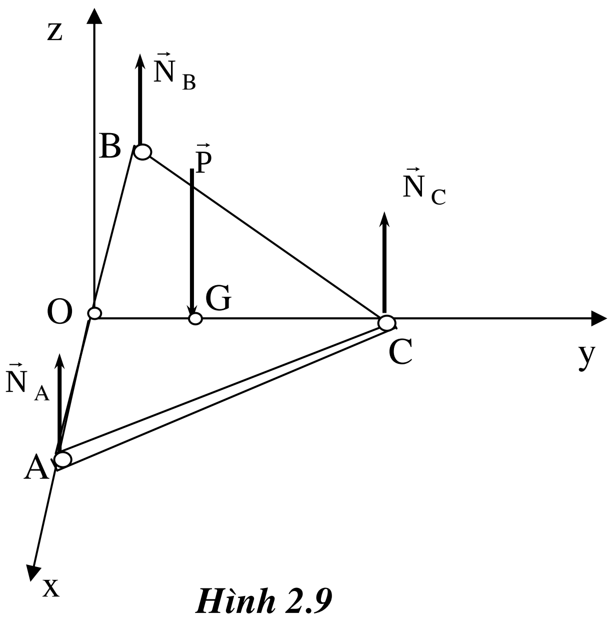
Thí du 2.2: Một xe 3 bánh ABC đặt trên một mặt đường nhẵn nằm ngang. Tam giác ABC cân có đáy AB = 1m, đường cao OC = 1,5m, trọng lượng của xe là P KN đặt tại trọng tâm G trên đoạn OC cách O là 0,5m. Tìm phản lực của mặt đường lên các bánh xe (xem hình 2-9)

Bài giải:

Khảo sát sự cân bằng của xe. Giải phóng xe khỏi mặt đường và thay bằng các phản lực của mặt đất lên các bánh xe là $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$.

Vì xe đặt trên mặt nhẵn nên các phản lực này có phương vuông góc với mặt đường.

Xe ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của 4 lực $\vec{P}$, $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$, $\vec{N}_C$. Hệ 4 lực này là hệ lực song song.



Hình 2.9

Nếu chọn hệ toạ độ oxyz như hình vẽ phương trình cân bằng của hệ lực trên theo (2-9) có dạng:

$\sum Z_i = N_A + N_B + N_C - P = 0$ (a)

$\sum m_x(F_i) = -P.0,5 + N_C.1,5 = 0$ (b)

$\sum m_y(F_i) = - N_A.0,5 + N_B.0,5 = 0$ (c)

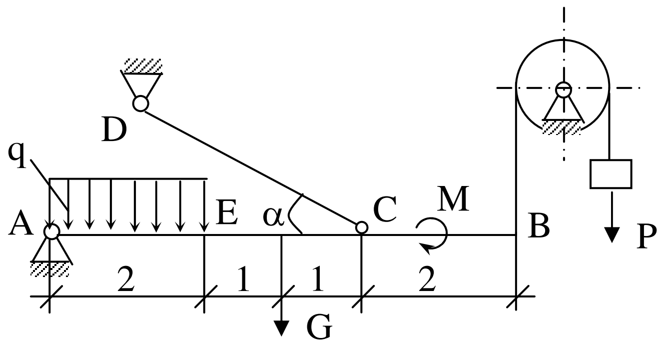
Hệ ba phương trình trên chứa 3 ẩn số N_A, N_B, N_C nên bài toán là tĩnh định.

Giải phương trình trên xác định được:

$N_A = N_B = N_C = P/3$ kN

Kết quả cho các giá trị dương nên chiều phản lực hướng lên là đúng.

Thí du 2.3: Xà AB được giữ nằm ngang nhờ liên kết như hình vẽ (2.10). Tại A có khớp bản lề cố định. Tại C được treo bởi dây CD đặt xiên một góc α so với xà. Tại B có dây kéo thẳng đứng nhờ trọng



Hình 2.10

vật P buộc ở đầu dây vắt qua ròng rọc.

Xà có trọng lượng G đặt tại giữa, chịu một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng hình vẽ và có mô men M. Đoạn dầm AE chịu lực phân bố đều có cường độ q.

Xác định phản lực tại A, trong sợi dây CD cho biết G = 10kN, P = 5kN, M = 8 kNm; q = 0,5 kN/m; $\alpha = 30^0$. Các kích thước cho trên hình vẽ.

<u>Bài giải</u>:

Chọn vật khảo sát là xà AB. Giải phóng liên kết đặt lên xà ta có:

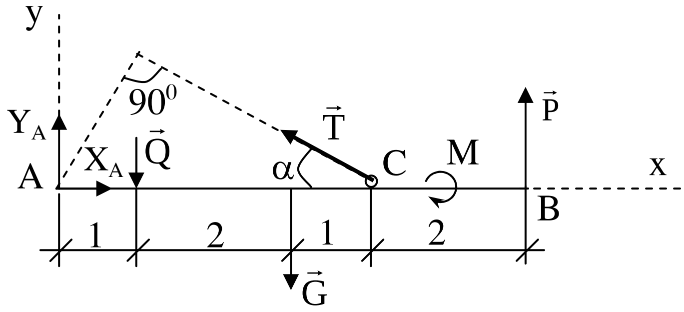
Liên kết tại A được thay thế bằng phản lực $\vec{R}_A$ nằm trong mặt phẳng hình vẽ. Liên kết tại C được thay thế bằng lực căng $\vec{T}$ hướng dọc theo dây. Liên kết tại B thay bằng lực căng đúng bằng $\vec{P}$ nhưng có chiều hướng lên trên. Chiều của $\vec{R}_A$ và $\vec{T}$ chọn như hình vẽ. Như vậy xà AB ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của các lực ($\vec{G}$, $\vec{M}$, $\vec{R}_A$, $\vec{T}$, $\vec{P}$), các lực này nằm trong mặt phẳng thẳng đứng tức là mặt phẳng hình vẽ (hệ lực phẳng). Chọn hệ toạ độ Axy như hình vẽ và lập phương trình cân bằng dạng (2-10) được:

$$\sum X_i = X_A - T\cos 30^0; \qquad \text{(a)}$$

$$\sum Y_i = Y_A - Q - G + T\cos 60^0 + P = 0; \qquad \text{(b)}$$

$$\sum m_A(\vec{F}_i) = - Q.1 - G.3 + T.4\sin 30^0 - M + 6P = 0. \qquad \text{(c)}$$

Trong các phương trình trên Q = 2q là tổng hợp lực phân bố đều đặt tại điểm giữa AE.



Hình 2.11

Ba phương trình trên chứa 3 ẩn số X_A, Y_A, và T do đó bài toán là tĩnh định.

Giải hệ phương trình trên ta được:

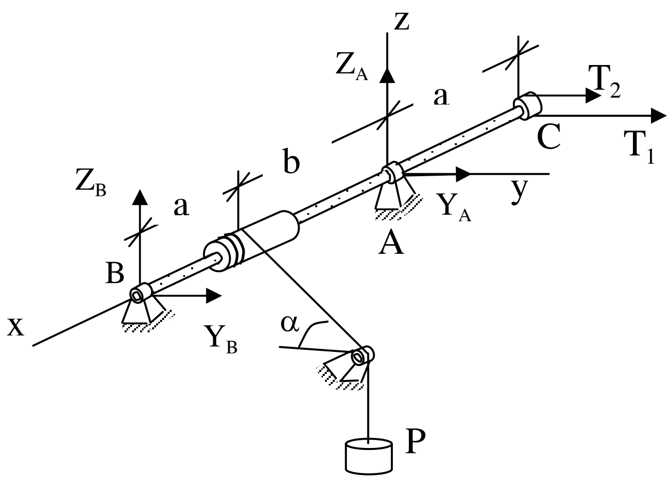
$$T = \frac{Q.1 + G.3 + M - p.6}{4.\sin 30^0} = \frac{1.1 + 10.3 + 8 - 5.6}{4.0,5} = 4,5 \text{ kN};$$

$X_A = T\cos 30^0 = 4{,}5.0{,}866 = 3{,}90kN;$

$Y_A = Q + G - T\cos 60^0 - P = 1 + 10 - 4{,}5.0{,}5 - 5 = 3{,}75, kN$

Kết quả cho các trị số của T, X_A, Y_A đều dương do đó chiều chọn ban đầu là đúng.

Thí du 2.4: Trục truyền nằm ngang đặt trên hai gối đỡ bản lề cố định A và B (xem hình vẽ 2-12). Trục nhận chuyển động quay từ dây đai dẫn đến bánh đai C có bán kính r_1 = 20 cm và để nâng trọng vật P buộc vào đầu dây cáp vắt qua ròng rọc K và cuốn trên trống tời có bán kính r_2 = 15cm. Cho biết hai nhánh dây đai có phương song song với trục oy và có lực căng T_1 và T_2 với $T_1 = 2T_2$; Trọng vật P= 180kN; a = 40cm; b = 60cm và $\alpha = 30^0$. Xác định phản lực tại hai gối đỡ A và B.



Hình 2.12

Bài giải:

Chọn vật khảo sát là trục BC.

Liên kết lên trục là các ổ đỡ A, B. Các lực tác dụng cho là $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ và $\vec{F}$. Lực $\vec{F}$ tác dụng dọc theo dây cáp có trị số bằng $\vec{P}$. Vì các ổ đỡ là khớp bản lề cố định nên phản lực liên kết tại A và B có hai thành phần theo trục oy và oz. Giải phóng liên kết đặt lên trục và thay bằng các phản lực liên kết khi đó trục AC chịu tác động của các lực: $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{F}$, $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$. Các lực này phân bố bất kỳ trong không gian. Phương trình cân bằng của hệ lực thiết lập theo (2- 6). Để tránh nhầm lẫn ta lập bảng hình chiếu và mô men của hệ lực đối với các trục toạ độ (bảng 2-2) .

Bảng 2-2

$\vec{F}_1$	$\vec{F}$	$\vec{T}_1$	$\vec{T}_2$	$\vec{R}_A$	$\vec{R}_B$
X_1	0	0	0	0	0
Y_1	Fcosα	Thép	T_2	Y_A	Y_B
Z_1	-Fsinα	45	0	Z_A	Z_B
$m_x(F)$	$-F.r_2$	0	$-T_2r_1$	0	0
$m_y(F)$	Fsinα.b	T_1r_1	0	0	$-Z_B(a+b)$
$m_z(F)$	Fcosα.b	0	$-T_2a$	0	$Y_A(a+b)$
		$-T_1.a$			

Các phương trình cân bằng thiết lập được:

$\sum Yi = P\cos\alpha + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0;$

$\sum Zi = F\sin\alpha + Z_A + Z_B = 0;$

$\sum Mx = F.r_2 + T_1r_1 - T_2r_1 = 0;$

$\sum My = F\sin\alpha.b - Z_B(a+b) = 0;$

$\sum Mz = F\cos\alpha.b - T_1a - T_2a + Y_B(a+b) = 0;$

Hệ 5 phương trình trên chứa 5 ẩn số là Y_A, Z_A, Y_B, Z_B và T_1 nên bài toán là tĩnh định.

Giải hệ phương trình trên tìm được:

$$T_2 = \frac{P.r_2}{r} = \frac{180.15}{20} = 135\text{kN} ;\ T_1 = 2T_2 = 270\text{ kN};$$

$$Z_B = \frac{b.P\sin\alpha}{a+b} = \frac{60.180.0,5}{40+60} = 54\text{ kN};$$

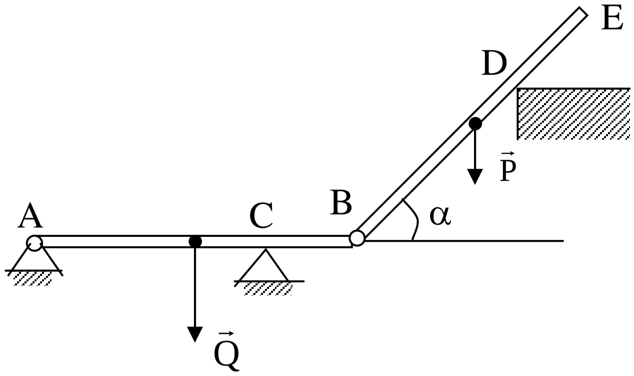
$$Y_B = \frac{a.3T_2 - Pb\cos\alpha}{a+b} = \frac{40.3.135 - 180.60.\frac{\sqrt{3}}{2}}{40+60} = 69\text{ kN}$$

$$Y_A = -P\cos\alpha - 3T_2 - Y_B = -180.\frac{\sqrt{3}}{2} - 3.135 - 69 \approx -630\text{KN}$$

$$Z_A = P\sin\alpha - Z_B = 180.\ 0,5 - 54 = 36\text{kN}.$$

Trong các kết quả tìm được chỉ có giá trị Y_A mang dấu âm do đó chiều của nó ngược với chiều đã chọn.

Thí du 2.5: Cho hệ hai dầm AB và BE nối bằng khớp bản lề tại B (xem hình vẽ 2-13). Trọng lượng của dầm AB là Q đặt ở giữa AB. Trọng lượng của dầm BE là P đặt ở giữa BE. Tại đầu A có khớp bản lề cố định, còn tại các điểm C, D là các điểm tựa nhọn.



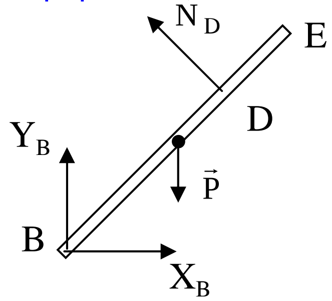
Hình 2.13

Xác định phản lực tại các gối đỡ A và các điểm tựa C,D. Cho P = 40kN, Q = 20kN; CB = $\frac{1}{3}$ AB; DE = $\frac{1}{3}$ BE; $\alpha = 45^0$.

Bài giải: Cần lưu ý rằng đây là bài toán cân bằng của hệ vật. Về nguyên tắc khi giải bài toán thuộc loại này phải tách riêng từng vật để xét. Trên hệ vật cần phân biệt hai loại vật chính và vật phụ. Vật chính là vật khi tách ra có thể đứng vững được. Vật phụ là vật khi tách ra không thể đứng vững được. Ta xét vật phụ trước sau đó xét vật chính sau. Cũng cần chú ý thêm khi tách vật tại các khớp nối sẽ được thay thế bằng các lực tác dụng tương hỗ, các lực này cùng phương cùng trị số nhưng ngược chiều.

Đối với bài toán trên, hệ gồm hai dầm trong đó AB là dầm chính còn BE là dầm phụ. Tách BE để xét. Tại khớp nối có phản lực liên kết R_B (lực tác dụng tương hỗ của dầm chính lên dầm BE). Phản lực R_B nằm trong mặt phẳng thẳng đứng (mặt phẳng hình vẽ) và có hai thành phần X_B và Y_B (xem hình 2-14). Giải phóng liên kết tại D thay vào đó bằng phản lực $\vec{N}_D$ ($\vec{N}_D$ vuông góc BE. Dầm BE chịu tác dụng của các lực $\vec{P}$, $\vec{N}_D$, $\vec{R}_B$. Hệ lực này cùng nằm trong mặt phẳng oxy do đó phương trình cân bằng viết được:

$\sum X_1 = X_B - N_D \sin\alpha = 0;$



Hình 2.14

$\sum Y_{10} = Y_B - P + N_D\cos\alpha = 0;$

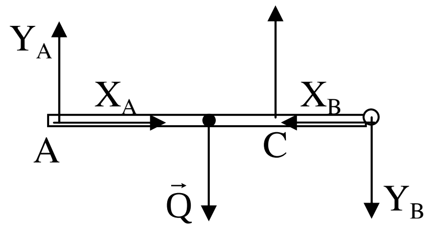
$\sum m_B(F_1) = N_D\frac{2}{3}.a - P.\ \frac{a}{2}\cos\alpha = 0.$

Gải hệ phương trình trên tìm được:

$N_D = \frac{3}{4}P\cos\alpha = \frac{3}{4}.40.\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 21{,}2\ kN;$

$X_B = \frac{3}{8}P\sin 2\alpha = \frac{3}{8}.40.1 = 15kN;$

$Y_B = P(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha) = 40(1 - \frac{3}{4}\frac{2}{4}) = 25kN.$



Hình 2.15

Giá trị các phản lực đều dương điều này chứng tỏ chiều của chúng như đã chọn là đúng.

Tiếp theo xét đến dầm chính AB. Giải phóng các liên kết dầm sẽ ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của hệ lực: $\vec{Q}$, - $\vec{R}_B$, $\vec{R}_A$, $\vec{N}_C$. Các lực này cùng nằm trong mặt phẳng oxy. (xem hình 2.15)

Phương trình cân bằng của hệ lực viết được:

$\sum X_1 = X_A - X'_B = 0;$

$\sum m_A(F) = -\ Y'_B.b + N_C\ \frac{2}{3}b - Q.\ \frac{b}{2} = 0;$

$\sum m_C(F) = -\ Y_A.\frac{2b}{3} + Q\ \frac{b}{6} - Y'_B.\ \frac{b}{3} = 0;$

Trong đó $X'_B = X_B$, $Y'_B = Y_B$ nhưng có chiều ngược lại.

Giải hệ 3 phương trình trên tìm được:

$X_A = X_B = 15kN;$

$Y_A = \frac{1}{4}Q - \frac{1}{2}Y_B = -7{,}5kN;$

$Y_C = \frac{3}{4}Q + \frac{3}{2}Y_B = 52{,}5kN.$

Kết quả cho giá trị của Y_A mang dấu âm có nghĩa chiều Y_A chọn là sai phải đảo lại.

Chương 3

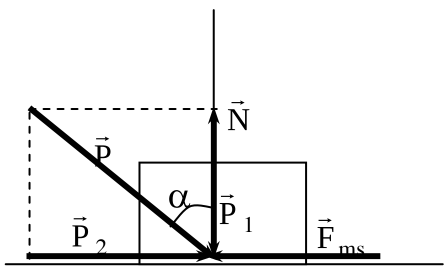
MA SÁT VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT KHI CÓ MA SÁT

3.1. MA SÁT TRƯỢT VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT KHI CÓ MA SÁT TRƯỢT

3.1.1. Ma sát trượt và các tính chất của ma sát trượt

Thực tiễn cho thấy bất kỳ vật nào chuyển động trượt trên bề mặt không nhẵn của vật khác đều xuất hiện một lực cản lại sự trượt của vật gọi là lực ma sát trượt ký hiệu $\vec{F}_{ms}$. Làm thí nghiệm biểu diễn trên hình 3.1. Vật A đặt trên mặt trượt nằm ngang và chịu tác dụng của lực $\vec{P}$ hợp với phương thẳng đứng một góc α. Phân tích $\vec{P}$ thành hai thành phần $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$ như hình vẽ. Nhận thấy rằng $\vec{P}_1$ luôn luôn cân bằng với phản lực pháp tuyến $\vec{N}$. Còn lực $\vec{P}_2$ là lực cần để đẩy vật A trượt trên mặt.

Khi $\vec{P}$ không đổi ta nhận thấy góc α tăng thì $\vec{P}_2$ tăng. Trong giai đoạn đầu vật A đứng yên trên mặt B. Từ điều kiện cân bằng của vật A cho thấy $\vec{P}_2$ bằng lực ma sát nhưng ngược chiều. Nếu tiếp tục tăng góc α đến một trị số φ thì vật A bắt đầu trượt. Lực ma sát lúc đó cũng tiến tới giới hạn $\vec{F}_n$.



Hình 3.1

Trị số $F_n = N\text{tg}\varphi$ (3.1)

Ở đây $N = P_1$ là phản lực pháp tuyến của mặt trượt. Góc φ gọi là góc ma sát; tgφ = f gọi là hệ số ma sát. Từ (3.1) có thể kết luận: lực ma sát trượt luôn luôn cùng phương nhưng ngược chiều với chuyển động trượt, có trị số tỷ lệ thuận với phản lực pháp tuyến (áp lực) của mặt trượt.

Hệ số ma sát f được xác định bằng thực nghiệm, nó phụ thuộc vào vật liệu và tính chất của bề mặt tiếp xúc. Bảng (3-1) cho ta trị số của hệ số ma sát trượt đối với một vài vật liệu thường gặp

Bảng 3-1

Tên vật liệu	Hệ số ma sát
Đá trượt trên gỗ	0,46 ÷ 0,6
Gỗ trượt trên gỗ	0,62
Kim loại trượt trên gỗ	0,62
Đồng trượt trên gang	0,16
Đồng trượt trên sắt	0,19
Thép trượt trên thép	0,15

Lực ma sát xuất hiện trong giai đoạn vật ở trạng thái tĩnh gọi là ma sát tĩnh. Lực ma sát tĩnh tăng từ không đến trị số giới hạn $F_n = f_0N$. Lực ma sát xuất hiện trong giai đoạn vật chuyển động trượt ta gọi là lực ma sát động. Trong trạng thái tĩnh lực kéo (đẩy) vật luôn cân bằng với lực ma sát tĩnh còn trong trạng thái chuyển động lực kéo (đẩy) P_2 vừa phải thắng ma sát động vừa phải dư một phần để tạo ra chuyển động của vật. Nếu gọi lực ma sát động của vật là F_{mssd} thì $F_{msd} = f_dN$, trong đó f_d gọi là hệ số ma sát động. Qua nhiều thực nghiệm thấy rằng lực ma sát động thường nhỏ hơn một chút so với ma sát tĩnh giới hạn. Hệ số ma sát động không những phụ thuộc vào vật liệu và tính chất bề mặt tiếp xúc của vật mà còn phụ thuộc vào vận tốc trượt của vật. Trong phần lớn các trường hợp cho thấy khi vận tốc tăng thì hệ số ma sát động giảm và ngược lại. Thí dụ hệ số ma sát động giữa bánh đai làm bằng gang với dây đai phanh bằng thép có thể xác định theo công thức:

$$f_d = \frac{1+0{,}0112v}{1+0{,}006v}f_t$$

Trong đó v là vận tốc trượt tính bằng km/h còn $f_t = 0{,}45$ khi mặt tiếp xúc khô và $f_t = 0{,}25$ khi mặt tiếp xúc ướt.

Trong tĩnh học vì chỉ xét bài toán cân bằng nên ma sát phải là ma sát tĩnh.

3.1.2. Bài toán cân bằng của vật khi chịu ma sát trượt

Xét vật rắn đặt trên mặt tựa (mặt trượt). Giả thiết vật chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$. Các lực liên kết bao gồm phản lực pháp tuyến $\vec{N}_j$ và lực ma sát $\vec{F}_{msj}$.

Khi vật cân bằng ta có hệ lực sau:

$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n, \vec{N}_j, \vec{F}_{msj}) \sim 0$ $\qquad$ $j = 1 \dots s$ là số bề mặt tiếp xúc

Để vật cân bằng phải có các phương trình cân bằng như đã xét ở chương 2. Ngoài các phương trình cân bằng ra để đảm bảo vật không trượt phải có các điều kiện:

$F_{nj} \le f_o N_j$. $\qquad$ F_{nj} là lực đẩy tổng hợp.

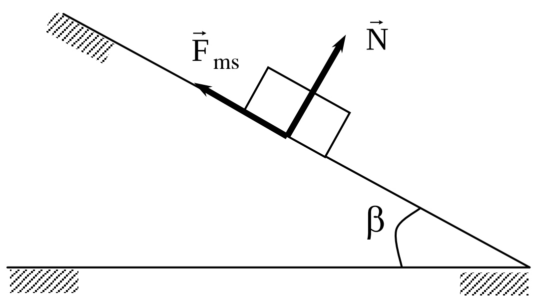
Trở lại sơ đồ (3.1) ta thấy khi không có trượt thì

$$tg\alpha = \frac{F_{ms}}{N} \le f_o = tg\varphi$$

Ta có thể phát biểu điều kiện không trượt như sau:

Điều kiện để vật không trượt là hợp lực $\vec{P}$ tác dụng lên vật nằm trong mặt nón có góc đỉnh 2φ (ta gọi nón này là nón ma sát).Khi P nằm trên nón ma sát là lúc sắp xảy ra sự trượt của vật A.

__Thí du 3.1__: Xác định điều kiện để cho vật A có trọng lượng P nằm cân bằng trên mặt nghiêng so với phương ngang một góc β. Hệ số ma sát tĩnh là f_o (hình 3.2)



Hình 3.2

__Bài giải__: Xét vật A nằm cân bằng trên mặt nghiêng dưới tác dụng của các lực $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms})$ Vì vật có xu hướng trượt xuống nên lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ luôn luôn hướng về phía trên như hình vẽ.

Để vật cân bằng phải có:

$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \sim 0$ và $F_N \leq f_oN$.

Giả thiết rằng vị trí đang xét là vị trí giới hạn giữa cân bằng và trượt thì lực ma sát $F_{ms} = F_n = f_oN$. Điều kiện để hệ lực tác dụng lên hệ vật cân bằng là:

$F_n = Ntg\beta$

Mặt khác vì $F_n \leq Nf_0$. Suy ra $tg\beta \leq f_o$.

Như vậy điều kiện để cho vật cân bằng phải là $tg\beta \leq f_o$.

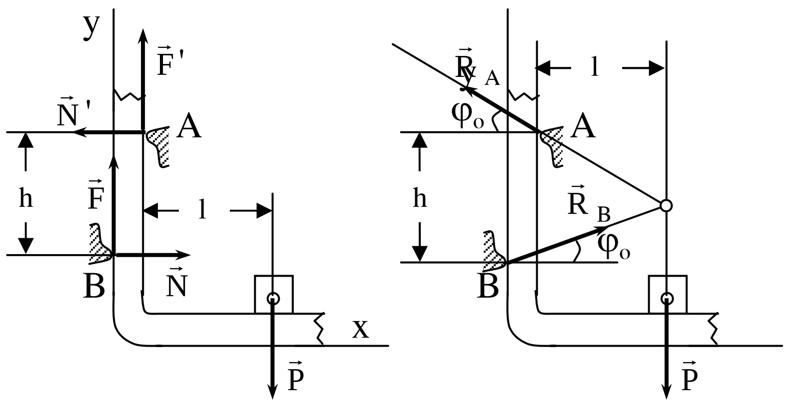
Trị số của góc $\beta = \beta_o$ với $tag\beta_o = f_o$ chính bằng góc ma sát φ.

<u>Thí du 3.2</u>: Giá treo vật nặng có sơ đồ như hình vẽ 3-3. Vật treo có trọng lượng P, hệ số ma sát trượt tại các điểm tựa A và B là f_o. Kích thước cho theo hình vẽ. Xác định điều kiện cân bằng cho giá.

<u>Bài giải</u>:

Khảo sát sự cân bằng của giá. Lực tác dụng lên giá ngoài trọng lượng $\vec{P}$ của vật A còn có phản lực pháp tuyến và lực ma sát ở điểm tựa A và B là: $\vec{N}, \vec{N}', \vec{F}, \vec{F}'$

Nếu khoảng cách l là không đổi, điều kiện cân bằng của giá là:



a) b)

Hình 3.3

$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{N}', \vec{F}, \vec{F}') \sim 0$

và $F \leq f_oN$; $F' \leq f_oN'$

Tại vị trí giới hạn nghĩa là lúc sắp xẩy ra sự trượt của giá trên các điểm tựa ta có phương trình cân bằng như sau:

$N - N' = 0;$ (1) $F = f_oN$ (4)

$F + F' - P = 0$ (2) $F' = f_oN'$ (5)

$N.h - F.d_{gh} - P = 0;$ (3)

Ở đây d_{gh} là khoảng cách giới hạn của hai điểm tựa A và B cho phép ứng với lúc bắt đầu trượt.

Giải hệ phương trình trên ta được:

$N = N'$ $F = F';$ $P = 2f_o N;$

$h = f_o d_{gh} + 2f_o l$ hay $d_{gh} = \frac{h}{f_o} - 2l$

Khoảng cách d càng lớn áp lực N càng lớn và ma sát càng lớn, điều kiện cân bằng của giá viết được:

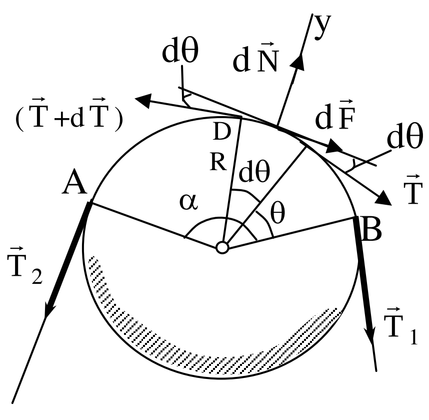
$$d_{gh} \geq \frac{h}{f_o} - 2l$$

Thí du 3.3: Tìm điều kiện không trượt của dây đai quấn trên bánh đai tròn có kể đến ma sát trượt với hệ số f_o (hình 3-4) , bỏ qua tính đàn hồi của dây đai.

Bài giải:

Tìm điều kiện không trượt của dây đai có nghĩa là tìm điều kiện cân bằng của đoạn đai AB của đai dưới tác dụng các lực $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ $(T_2 > T_1)$ các phản lực pháp tuyến N và các lực ma sát trượt F phân bố liên tục trên cung AB.

Khi dây đai sắp trượt ta xét một cung nhỏ ED trên dây đai. Bên nhánh chủ động có lực tác dụng là $\vec{T} + \Delta\vec{T}$ còn bên nhánh phụ động lực tác dụng là $\vec{T}$. Gọi phản lực pháp tuyến lên cung đai này là $\vec{N}$ và lực ma sát trượt lên cung này là F ta sẽ có phương trình cân bằng:



Hình 3.4

$$- T\cos\frac{d\theta}{2} + (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - F = 0$$

$$- N - T\sin\frac{d\theta}{2} - (T- dT) = 0$$

Trong đó F = fN. Bỏ qua các vô cùng bé

bậc hai trở lên ta được: $F = dT$ và $N = Td\theta$. Thay giá trị trên vào biểu thức $F = fN$ ta có $dT = f.T.d\theta$. Tích phân hai vế tương ứng với cận từ A đến B ta được

$$\ln T\Big|_B^A = f_o\theta\Big|_B^A \text{ hay } \ln\frac{T_2}{T_1} = f.\alpha$$

α là góc chắn cung AB gọi là góc bao của đai.

Suy ra: $T_2 = T_1.e^{f\alpha}$

Lực kéo bên nhánh chủ động T_2 càng lớn hơn bên nhánh bị động thì khả năng trượt càng nhiều do đó điều kiện để dây không trượt phải là:

$T_2 \le T_1.e^{f\alpha}$

Công thức này được gọi là công thức Ơle

3.2. MA SÁT LĂN VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHI CÓ MA SÁT LĂN

Ma sát lăn là mô men cản chuyển động lăn của vật thể này trên vật thể khác.

Xét một con lăn hình trụ bán kính R trọng lượng P lăn trên một mặt phẳng ngang, nhờ lực $\vec{Q}$ đặt vào trục con lăn (xem hình 3.5). Trong trường hợp này con lăn chịu tác dụng của các lực: $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{ms}$. Trong các lực đó hai lực $\vec{Q}$ và $\vec{F}_{ms}$ tạo thành một ngẫu lực có tác dụng làm cho con lăn chuyển động lăn. Còn lại hai lực $\vec{P}$ và $\vec{N}$ trong trường hợp con lăn và mặt lăn là rắn tuyệt đối thì chúng trùng phương.Trong thực tế con lăn và mặt lăn là những vật biến dạng hai lực P và N không trùng phương luôn song song và cách nhau một khoảng cách k. Hai lực này tạo thành một ngẫu lực có tác dụng cản lại sự lăn của con lăn. Mô men của ngẫu $(\vec{P}, \vec{N})$ được gọi là mô men ma sát lăn. Nếu ký hiệu mô men ma sát lăn là M_{ms} thì $M_{ms} = kN$.

Gọi k là hệ số ma sát lăn. Khác với hệ số ma sát trượt hệ số ma sát lăn k có thứ nguyên là độ dài.

Hệ số ma sát lăn được xác định bằng thực nghiệm, nó cũng phụ thuộc vào tính chất vật liệu và bề mặt lăn, không phụ thuộc vào lực N. Sau đây là hệ số ma sát lăn của một vài vật thường gặp.

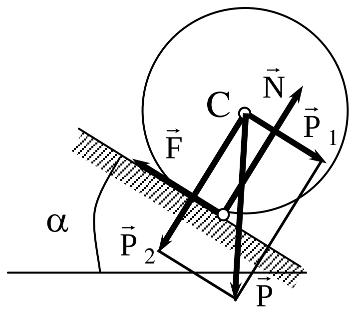
Vật liệu	Hệ số k (cm)
Gỗ lăn trên gỗ	$0,05 \div 0,08$
Thép lăn trên thép	0,005
Gỗ lăn trên thép	$0,03 \div 0,04$
Con lăn thép trên mặt thép	0,001

a) b)

Hình 3.5

Bài toán cân bằng của vật khi có ma sát lăn ngoài điều kiện hệ lực tác dụng lên hệ kể cả các phản lực và lực ma sát cân bằng còn phải thêm điều kiện không có lăn biểu diễn bởi phương trình:

$M_{ms} \geq Q.R$



Hình 3.6

<u>Thí du 3.4</u>: Tìm điều kiện cân bằng của con lăn trọng lượng P, bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc α. Cho hệ số ma sát lăn là k. (xem hình 3-6)

<u>Bài giải</u>:

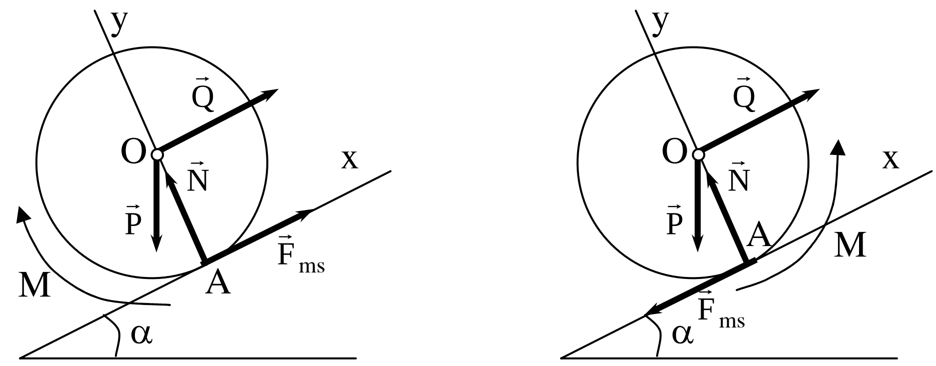
Xét con lăn ở vị trí cân bằng. Phân tích $\vec{P}$ thành hai lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ như hình vẽ (3-6).

Ta có điều kiện để con lăn không lăn là: $P_1.R = R.P.\sin\alpha \leq P_2.k = P\cos\alpha$

Hay $\quad R.P.\sin\alpha \leq P.\cos\alpha. \quad \mathrm{tg}\alpha \leq \dfrac{k}{R}$

Như vậy điều kiện để con lăn cân bằng là: $tg\alpha \le \frac{k}{R}$

<u>Thí dụ 3.5</u>: Vật hình trụ có trọng lượng P bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng một góc α. Khối trụ chịu tác dụng lực đẩy Q song song với mặt phẳng nghiêng. Tìm điều kiện khối trụ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng và điều kiện để nó lăn không trượt lên phía trên. Hệ số ma sát lăn là k và hệ số ma sát trượt là f.



a) *b)*

Hình 3.7

<u>Bài giải</u>:

Điêù kiện để khối trụ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng là :

$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_{ms}) \sim 0$

Mặt khác để khối trụ không lăn (hình3.7a) không trượt xuống phải có thêm điều kiện:

$M_{ms} \le k.N$; $F_{ms} \le f.N$

Như vậy phải thoả mãn các phương trình sau:

$\sum X_i = Q - P\sin\alpha + F_{ms} = 0$; (1)

$\sum Y_i = - P\cos\alpha + N = 0$; (2)

$\sum m_A = P.R.\sin\alpha - Q.R - M_{ms} = 0$ (3)

$F_{ms} \le f.N$ (4)

$M_{ms} \le k.N$ (5)

Từ ba phương trình đầu tìm được:

$N = P\cos\alpha$; $F_{ms} = P\sin\alpha - Q$; $M_{ms} = R(P\sin\alpha - Q)$

Thay các kết quả vào hai bất phương trình cuối được:

$P.\sin\alpha - Q \leq f.P\cos\alpha$; $R(P\sin\alpha - Q) \leq k.P\cos\alpha$

Hay: $Q \geq P(\sin\alpha - f.\cos\alpha)$

$$Q \geq P(\sin\alpha - \frac{k}{R}\cos\alpha)$$

Thường thì $\frac{k}{R} < f$ do đó điều kiện tổng quát là:

$$\frac{Q}{P} \geq \sin\alpha - \frac{k}{R}\cos\alpha \geq \sin\alpha - f.\cos\alpha$$

Để vật lăn không trượt lên (hình3.7b) phải có các điều kiện:

$\sum x_i = Q - P\sin\alpha + F_{ms} = 0;$ (1')

$\sum y_i = - P\cos\alpha + N = 0;$ (2')

$\sum m_A = P.\sin\alpha - Q.R + M_{ms} = 0;$ (3')

$F_{ms} \leq f.N$ (4')

$M_{ms} \geq k.N$ (5')

Bất phương trình (4') đảm bảo cho vật chuyển động có trượt lên. Còn bất phương trình (5') đảm bảo cho con lăn có khả năng lăn lên trên.

Từ 3 phương trình đầu ta được:

$N = P\cos\alpha;$ $F_{ms} = Q - P\sin\alpha$; $M_{ms} = R(Q - P\sin\alpha)$

Thay thế vào hai phương trình cuối ta được:

$Q - P\sin\alpha \leq f.P.\cos\alpha;$

$R(Q - P\sin\alpha) \geq kP\cos\alpha.$

Vậy điều kiện để khối trụ lăn không trượt lên trên là:

$$\sin\alpha + \frac{k}{R}\cos\alpha \leq \frac{Q}{P} < \sin\alpha + f\cos\alpha.$$

Điều này nói chung có thể được nghiệm vì $\frac{k}{R}$ thường nhỏ hơn f.s

Chương 4

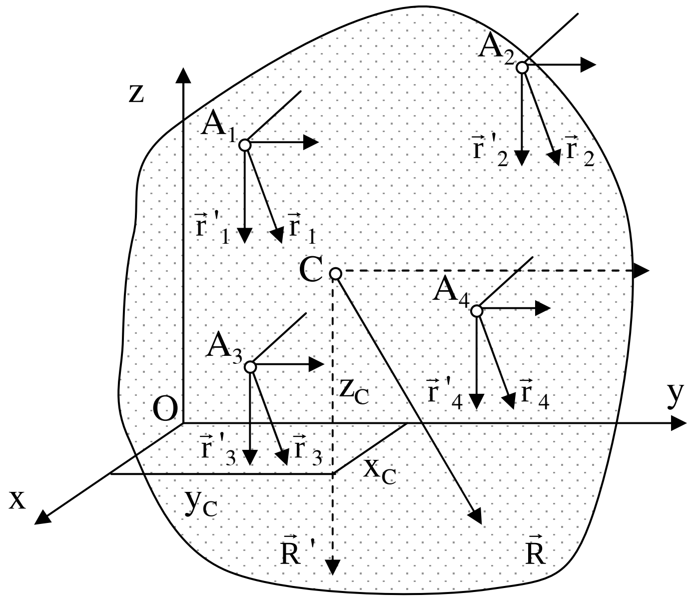
TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

4.1. TÂM CỦA HỆ LỰC SONG SONG

Hệ lực song song ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$) luôn có hợp lực $\vec{R}$ song song với các lực đã cho. Theo lý thuyết về hệ lực, hợp lực $\vec{R}$ được xác định bởi biểu thức:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (4\text{-}1)$$

Khi ta thay đổi phương của hệ lực phương của hợp lực cũng thay đổi theo. Chẳng hạn lúc đầu hệ lực có hợp lực là R song song với các lực đã cho , sau khi xoay hệ lực cho song song với trục oz ta sẽ được hợp lực R' có độ lớn bằng R nhưng có phương song song với trục oz. Mặc dù hợp lực thay đổi phương khi phương của hệ lực thay đổi nhưng đường tác dụng của chúng đều đi qua điểm C điểm này gọi là tâm của hệ lực song song đã cho.



Hình 4.1

Để xác định vị trí của tâm C ta vận dụng định lý Va-ri-nhông. Cho hợp lực $\vec{R}$' như hình vẽ ta có:

$$M_y(R') = \sum_{i=1}^{n} m_y(F^n{}_i);$$

$$R.X_c = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i;$$

$$\text{hay } X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{R} \quad ;$$

Trong đó X_c là toạ độ của điểm C trên trục ox, x_i là toạ độ của điểm A_i trên trục ox.

Bằng cách xoay phương của hệ lực cho song song với trục ox và oy ta sẽ nhận được các kết quả tương tự với toạ độ của C trên hai trục oy và oz. Ta xác định hệ toạ độ của tâm C theo các biểu thức sau:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{R};$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{R}; \qquad (4\text{-}2)$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{R}.$$

Như vậy có thể xác định hợp lực của hệ lực song song nhờ các biểu thức (4-1) và (4-2)

4.2. TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Coi vật rắn là tập hợp của n phần tử có trọng lượng $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ...$\vec{P}_n$. Các trọng lực P_i tạo thành một hệ lực song song. Tâm của hệ các trọng lượng phần tử này gọi là trọng tâm của vật.

Như vậy gọi C là trọng tâm của vật thì toạ độ của điểm C được xác định bằng các biểu thức sau:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{P};$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{P}; \qquad (4\text{-}3)$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{P}.$$

Trong đó $\vec{P}_i$ và $\vec{P}$ là trọng lượng của phần tử thứ i trong vật, và trọng lượng của cả vật, còn x_i, y_i, z_i là toạ độ của phần tử thứ i.

Như vậy trọng tâm của vật là một điểm C trên vật mà tổng hợp trọng lượng của cả vật đi qua khi ta xoay vật đó ở bất kỳ chiều nào trong không gian.

4.3. TRỌNG TÂM CỦA MỘT SỐ VẬT ĐỒNG CHẤT

4.3.1. Vật rắn là một khối đồng chất

Gọi trọng lượng riêng của vật là γ (trọng lượng của một đơn vị thể tích) thì $P_i = \gamma.v_i$ và $P = \gamma.v$. Trong đó v_i và v là thể tích của phần tử thứ i của vật và thể tích cả vật. Toạ độ trọng tâm của vật lúc này có thể xác định bởi các biểu thức:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{v}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i y_i}{v}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{v}.$$

4.3.2. Vật rắn là một tấm mỏng đồng chất

Gọi trọng lượng riêng của vật rắn là γ (trọng lượng của một đơn vị diện tích) ta sẽ có $P_i = \gamma.S_i$ và $P = \gamma.S$ ở đây S_i và S là diện tích của phần tử thứ i của vật và diện tích toàn vật. Toạ độ trọng tâm của vật trong hệ toạ độ oxy chứa vật xác định theo biểu thức sau:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{S}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{S};$$

4.3.3. Vật rắn là một dây hay thanh mảnh đồng chất

Gọi trọng lượng riêng của vật là γ (trọng lượng của một đơn vị chiều dài vật) ta có $P_i = \gamma.L_i$ và $P = \gamma.L$. Trong đó L_i và L là chiều dài của phần tử thứ i và chiều dài của cả vật. Toạ độ trọng tâm của vật lúc này có thể xác định bởi các biểu thức:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i x_i}{L}; \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i y_i}{L}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i z_i}{L}.$$

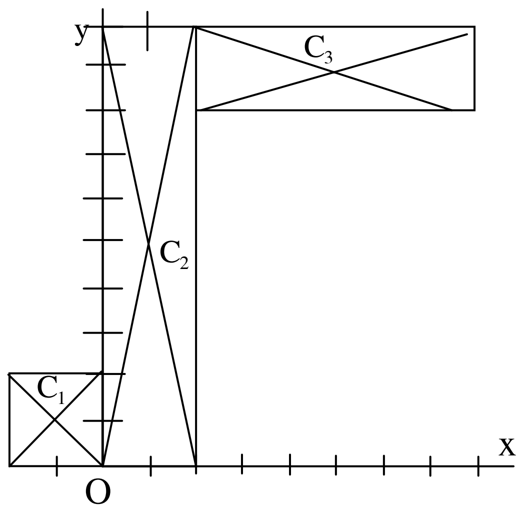
4.3.4. Vật rắn đồng chất có một tâm, một trục hay một mặt phẳng đối xứng

Ta có nhận xét rằng trên vật bao giờ cũng tìm được hai phần tử đối xứng có trọng lượng P_1, P_2 như nhau song song cùng chiều qua tâm đối xứng, trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng của vật và như vậy hợp lực của nó sẽ đi qua điểm đối xứng nằm trên trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng. Dễ dàng nhận thấy rằng hợp lực của các $\vec{P}_i$ (i = 1...n), nghĩa là trọng lượng của vật bao giờ cũng đi qua tâm đối xứng, trục đối xứng hay nằm trong mặt phẳng đối xứng nếu như xoay vật sao cho mặt phẳng đối xứng đó ở vị trí thẳng đứng. Nói cách khác trọng tâm của vật trong trường hợp có một tâm đối xứng, có một trục đối xứng hay có một mặt phẳng đối xứng bao giờ cũng nằm trên tâm đối xứng, trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng đó.

4.3.5. Trọng tâm của vật có thể phân chia thành những vật nhỏ đơn giản

Trong trường hợp này ta chia vật thành các phần có hình dạng đơn giản dễ xác định trọng tâm, sau đó coi mỗi vật đó như một phần tử nhỏ của cả vật, mỗi phần tử này có trọng lượng đặt tại trọng tâm. Xác định được trọng lượng và trọng tâm các phần nhỏ của vật ta sẽ xác định được trọng tâm của cả vật nhờ các biểu thức xác định toạ độ trọng tâm ở trên.

Sau đây ta vận dụng những kết quả trên để tìm trọng tâm của một số vật.



Hình 4.2

<u>Thí du 4.1</u>: Xác định trọng tâm của tấm tôn phẳng có hình dạng như hình vẽ (4-2).

Biết rằng tấm tôn là đồng chất và kích thước của các cạnh tính bằng cm đã cho trên

Bảng 4.1

	C_1	C_2	C_3
x_i	-1	1	5
y_i	1	5	9
S_i	4	20	12

hình.

<u>Bài giải</u>:

Trước hết chia vật thành 3 phần, mỗi phần là một hình chữ nhật như hình vẽ (4-2). Các hình này là các tấm phẳng và có tâm đối xứng là C_1, C_2 và C_3. Toạ độ trọng tâm và diện tích của nó có thể xác định như bảng 4.1.

Diện tích của cả vật là :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 36\ (cm^2)$$

Áp dụng công thức (4.5) ta có:

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{S} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2\frac{1}{9}cm$$

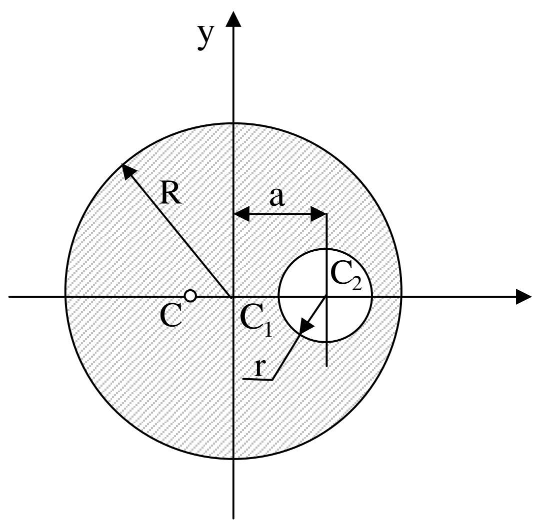
$$y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2 + y_3S_3}{S} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5\frac{8}{9}cm$$

Trọng tâm C của vật hoàn toàn được xác định.

<u>Thí du 4.2.</u> Tìm toạ độ trọng tâm của tấm phẳng giới hạn bởi hai đường tròn bán kính R và r (xem hình vẽ 4.3). Cho biết khoảng cách giữa hai tâm là $c_1c_2 = a$.

<u>Bài giải</u>:

Chọn hệ toạ độ như hình vẽ. Phân tích thành hai phần mỗi phần là một tấm tròn nhưng ở đây tầm tròn có bán kính r phải coi như vật có tiết diện âm. Cụ thể ta có: Phần 1 là một tấm tròn có bán kính R có toạ độ trọng tâm là $x_1 = 0$ và $y_1 = 0$. Diện tích là $S_1 = \pi R^2$. Phần 2 là tấm tròn có bán kính r, toạ độ trọng tâm là $x_2 = a$, $y_2 = 0$ và diện tích là $S_2 = -\pi r^2$.Diện tích cả vật là :



Hình 4.3

$$S = S_1 + S_2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Ta có thể tính được toạ độ trọng tâm của vật.

$$x_c = \frac{x_1S_1 + x_2S_2}{S} = -\frac{a.r^2}{R^2 - r^2};$$

$$y_c = \frac{y_1S_1 + y_2S_2}{S} = 0.$$

Thí du 4-3. Tìm trọng tâm của một cung tròn AB bán kính R, góc ở tâm là AÔB = 2 α (hình 4-4)

Nếu chọn hệ toạ độ như hình vẽ ta thấy trục ox là trục đối xứng do đó trọng tâm C của chúng nằm trên trục ox có nghĩa là y_c =0. Ở đây chỉ còn phải xác định x_c

Ta chia cung AB thành N phần nhỏ, mỗi phần có chiều dài Δl_k, có toạ độ $x_k = R\cos\varphi_k$.

Theo công thức (4.6) có:

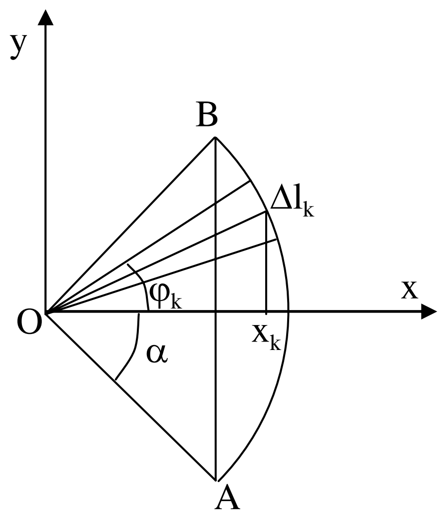
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta l_k x_k}{L} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_k R\cos\varphi_k$$

Thay $\Delta l_k\cos\varphi_k = \Delta Y_k$ ta có:

$$X_c = \frac{1}{L}R\sum_{i=1}^{n}\Delta Y_k = \frac{1}{L}R.AB$$

Thay L = R.2α và AB = 2R sinα ta được:

$$X_c = \frac{R.2\sin\alpha}{R.2\alpha} = R.\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (4\text{-}7)$$

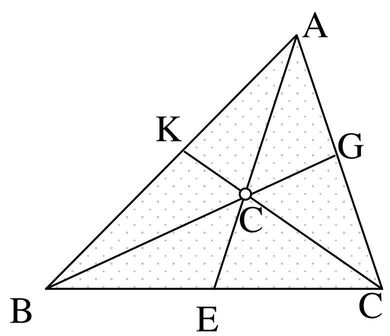


Hình 4.4

Thí du 4-4: Tìm trọng tâm của một tấm phẳng hình tam giác ABC đồng chất (hình 4-5).

Bài giải:

Chia tam giác thành các dải nhỏ song song với đáy BC. Mỗi dải nhỏ thứ i được coi như một



Hình 4.5

thanh mảnh và trọng tâm của nó đặt tại giữa dải. Như vậy trọng tâm của các dải sẽ nằm trên đường trung tuyến AE và trọng tâm của cả tam giác cũng nằm trên AE.

Chứng minh tương tự ta thấy trọng tâm của tam giác phải nằm trên trung tuyến BG và trung tuyến CK. Rõ ràng trọng tâm của tam giác chính là giao điểm của ba đường trung tuyến của tam giác đó.

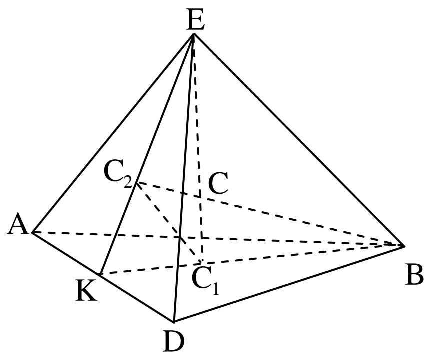
Trong hình học ta đã biết điểm đó được xác định theo biểu thức:

$$CE = \frac{1}{3}AE$$

<u>Thí du 4-5</u> Tìm trọng tâm của vật đồng nhất hình tứ diện ABDE như hình vẽ (4-6) .

<u>Bài giải</u>:

Ta chia hình thành các phần nhỏ nhờ các mặt phẳng song song với đáy ABD. Mỗi tấm được coi như một tấm phẳng đồng chất hình tam giác trọng tâm của mỗi phần được xác định như ở thí dụ 4-4. Lớp sát đáy sẽ có trọng tâm là C_1với $C_{1k} = \frac{1}{3}BK$ (BK là trung tuyến của đáy ABD). Như vậy tất cả các trọng tâm của các phần sẽ nằm trên đường EC_1 và trọng tâm của cả vật cũng sẽ nằm trên EC_1.



Hình 4.6

Tương tự ta tìm thấy trọng tâm của vật nằm trên đường BC_2 với C_2 là trọng tâm tam giác EAD. Kết quả là trọng tâm C của hình vẽ nằm trên điểm C là giao điểm của EC_1 và BC_2.

Theo hình vẽ ta có ΔCC_1C_2 đồng dạng với Δ ECB mặt khác $C_1C_2 = \frac{1}{3}BE$ và $KC_1 = \frac{1}{3}KB$ từ đó suy ra:

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{C_1C_2}{BE} = \frac{1}{3}$$

Suy ra $CC_1 = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{4}C_1E$

Phần 2

ĐỘNG HỌC

Động học nghiên cứu các qui luật chuyển động của vật thể đơn thuần về hình học, không đề cập đến khối lượng và lực. Những kết quả khảo sát trong động học sẽ làm cơ sở cho việc nghiên cứu toàn diện các qui luật chuyển động của vật thể trong phần động lực học.

Trong động học vật thể được đưa ra dưới hai mô hình: động điểm và vật rắn. Động điểm là điểm hình học chuyển động trong không gian, còn vật rắn là tập hợp nhiều động điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong nó luôn luôn không đổi. Khi khảo sát các vật thực có kích thước không đáng kể, có thể coi như mô hình động điểm.

Chuyển động là sự thay đổi vị trí của vật trong không gian theo thời gian. Đơn vị đo độ dài là mét và ký hiệu *m,* đơn vị đo thời gian là giây viết tắt là *s.*

Tính chất của chuyển động phụ thuộc vào vật chọn làm mốc để so sánh ta gọi là hệ qui chiếu. Trong động học hệ qui chiếu được lựa chọn tuỳ ý sao cho việc khảo sát chuyển động của vật được thuận tiện . Để có thể tính toán người ta còn phải chọn hệ toạ độ gắn với hệ qui chiếu. Thông thường muốn hình vẽ được đơn giản ta dùng ngay hệ toạ độ làm hệ quy chiếu.

Tính thời gian thông thường phải so sánh với mốc thòi điểm t_0 chọn trước.

Về nội dung, động học phải tìm cách xác định vị trí của vật và mô tả chuyển động của vật theo thời gian so với hệ quy chiếu đã chọn.

Thông số xác định vị trí của vật so với hệ quy chiếu đã chọn là thông số định vị. Thông số định vị có thể là véc tơ, là toạ độ, là góc...

Qui luật chuyển động được biểu diễn qua các biểu thức liên hệ giữa các thông số định vị với thời gian và được gọi là phương trình chuyển động. Trong phương trình chuyển động thì thời gian được coi là đối số độc lập. Khi khử đối số thời gian trong phương trình chuyển động ta được biểu thức liên hệ giữa các thông số định vị và gọi là phương trình qũi đạo.

Để biểu thị tính chất của chuyển động ta đưa ra các đại lượng vận tốc và gia tốc. Vận tốc là đại lượng biểu thị hướng và tốc độ chuyển động của điểm hay vật.Gia tốc là đại lượng biểu thị sự thay đổi của vận tốc theo thời gian. Gia tốc cho biết tính chất chuyển động đều hay biến đổi. Vận tốc và gia tốc là các đại lượng phụ thuộc vào thời gian.

Căn cứ nội dung người ta chia động học thành hai phần: động học điểm và động học vật rắn. Khi khảo sát động học của vật rắn bao giờ cũng gồm hai phần: Động học của cả vật và động học của một điểm thuộc vật.

Chương 5

CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

5.1. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG VÉC TƠ

5.1.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động

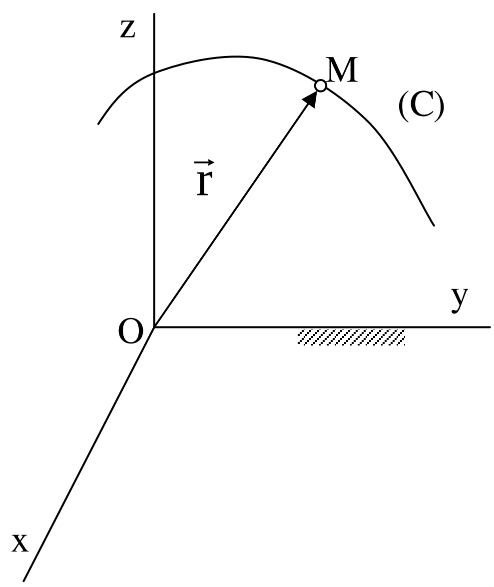
Xét động điểm M chuyển động trong hệ qui chiếu oxyz (hình 5-1).

Vị trí động điểm M được xác định nếu biết véc tơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Véc tơ $\vec{r}$ là thông số định vị của động điểm.

Khi động điểm chuyển động véc tơ $\vec{r}$ biến thiên liên tục theo thời gian *t* do đó ta viết được:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (5\text{-}1)$$

Nếu biết được qui luật biến thiên (5-1) ta hoàn toàn xác định được vị trí của động điểm ở bất kỳ thời điểm nào. Biểu thức (5-1) là phương trình chuyển động của động điểm M viết dưới dạng véc tơ.



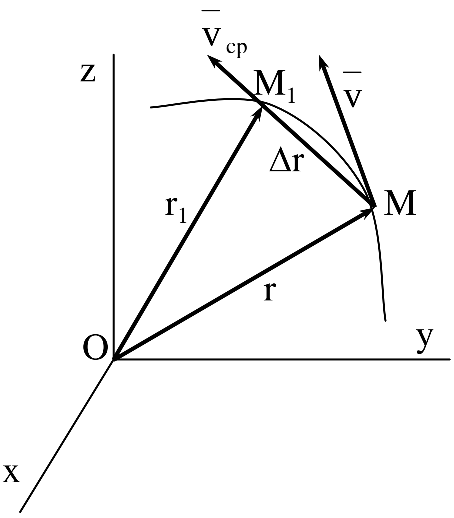
Hình 5.1

Trong quá trình chuyển động, động điểm vạch ra một đường gọi là quĩ đạo chuyển động của động điểm. Phương trình của đường quĩ đạo cũng chính là phương trình chuyển động (5-1) nhưng viết dưới dạng thông số.

Nếu đường quĩ đạo là thẳng ta nói động điểm chuyển động thẳng, nếu đường quĩ đạo là cong ta nói chuyển động của điểm là chuyển động cong.

5.1.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Giả thiết tại thời điểm *t* vị trí của động điểm xác định bởi véc tơ định vị $\vec{r}$. Tại thời điểm $t_1 = t + \Delta t$ động điểm đến vị trí M_1 xác định bởi $\vec{r}_1$, ta có $\overrightarrow{MM}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta\vec{r}$ (xem hình 5-2). Gọi tỷ số $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ là vận tốc trung bình của động điểm trong khoảng thời gian Δt và ký hiệu là $\vec{v}_{tb}$. Khi Δt càng nhỏ nghĩa là M_1 càng gần M thì $\vec{v}_{tb}$ càng gần đến một giới hạn, giới hạn đó gọi là vận tốc tức thời tại thời điểm t.



Hình 5.2

Nếu ký hiệu vận tốc tức thời của động điểm là $\vec{v}$ thì:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (5.3)$$

Vận tốc tức thời của động điểm bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc tơ định vị tại thời điểm đó.

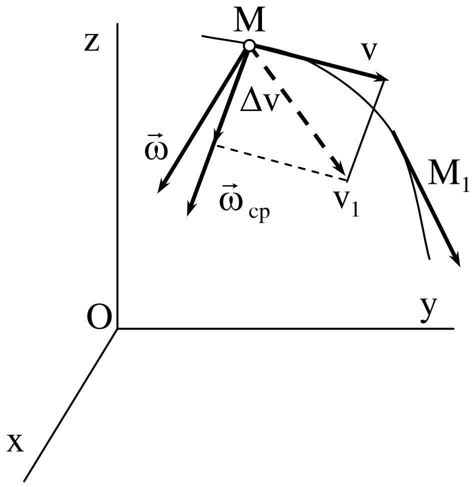
Về mặt hình học ta thấy véc tơ $\Delta\vec{r}$ nằm trên cát tuyến MM_1 và hướng từ M đến M_1 vì vậy khi tiến tới giới hạn véc tơ vận tốc $\vec{v}$ sẽ tiếp tuyến với quĩ đạo ở tại vị trí M đang xét và hướng theo chiều chuyển động của điểm.

Đơn vị để tính vận tốc là mét/giây viết tắt là m/s

5.1.3. Gia tốc chuyển động của điểm

Giả thiết tại thời điểm t điểm có vận tốc $\vec{v}$ và tại thời điểm t_1 điểm có vận tốc là $\vec{v}_1$. Tỷ số $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$ gọi là gia tốc trung bình của điểm trong thời gian Δt. Giới hạn tỷ số đó khi Δt tiến tới không gọi là gia tốc tức thời $\vec{w}$ của điểm. Ta có:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (5\text{-}3)$$



Hình 5.3

Như vậy gia tốc tức thời của điểm là véc tơ đạo hàm bậc nhất theo thời gian cuả véc tơ vận tốc hay đạo hàm bậc hai theo thời gian của véc tơ định vị. Về mặt hình học véc tơ $\Delta\vec{v}$ bào giờ cũng hướng về phía lõm của đường cong (xem hình 5-3), do đó véc tơ gia tốc $\vec{w}$ bao giờ cũng hướng về phía lõm của đường cong. Đơn vị để đo gia tốc là mét/giây^2 viết tắt là m/s^2

5.1.4. Tính chất của chuyển động

Để xem xét chuyển động của điểm là thẳng hay cong ta căn cứ vào tích $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{c}$

Nếu $\vec{c} = 0$ thì $\vec{v}$ và $\vec{w}$ cùng phương, nghĩa là vận tốc $\vec{v}$ có phương không đổi. Chuyển động lúc đó là chuyển động thẳng.

Nếu $\vec{c} \neq 0$ thì $\vec{v}$ và $\vec{w}$ hợp với nhau một góc điều đó chứng tỏ véc tơ $\vec{v}$ thay đổi phương và chuyển động sẽ là chuyển động cong. Để xét chuyển động của điểm là đều hay biến đổi ta căn cứ vào tích vô hướng $\vec{v}.\vec{w} = B$.

$$\text{Vì } v^2 = (\vec{v})^2 \text{ nên } \frac{d(\vec{v})^2}{dt} = \frac{d(v^2)}{dt} = 2\vec{v}.\vec{w}$$

Cho nên nếu B = 0 thì chứng tỏ $\vec{v}$ là hằng số nghĩa là động điểm chuyển động đều.

Nếu B ≠ 0 thì $\vec{v}$ là đại lượng biến đổi, chuyển động là biển đổi. Nếu B > 0 chuyển động nhanh dần và B < 0 chuyển động chậm dần.

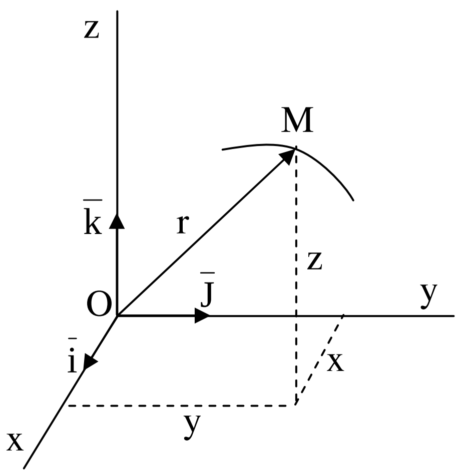
5.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG TOẠ ĐỘ ĐỀ CÁC

5.2.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động

Xét động điểm M chuyển động theo đường cong trong hệ trục toạ độ đề các oxyz (hình 5-4).

Ở đây các toạ độ x,y,z là các thông số định vị của điểm M.

Khi M chuyển động các toạ độ này thay đổi liên tục theo thời gian do đó ta có:



Hình 5.4

$$x = x(t);$$
$$y = y(t); \qquad (5\text{-}4)$$
$$z = z(t).$$

Các phương trình (5-4) là phương trình chuyển động của điểm và cũng là phương trình quĩ đạo của điểm viết dưới dạng thông số trong toạ độ Đề các.

5.2.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Nếu gọi các véc tơ đơn vị trên ba trục toạ độ là $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ thì véc tơ định vị và véc tơ vận tốc có thể viết:

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Suy ra

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

(5.5)

Biểu thức trên chứng tỏ:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \qquad v_x = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (5.6)$$

Hình chiếu véc tơ vận tốc lên các trục toạ độ bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian các toạ độ tương ứng.

Dựa vào các biểu thức (5.6) dễ dàng xác định được véc tơ vận tốc cả về độ lớn và phương chiều.

$$v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\cos(ox,v) = \frac{v_x}{v}; \qquad \cos(oy,v) = \frac{v_y}{v}; \qquad \cos(oz,v) = \frac{v_z}{v}.$$

5.2.3. Gia tốc của điểm

Tương tự như đối với vận tốc, dựa vào biểu thức (5.3) ta có thể tìm thấy:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \qquad (5.7)$$

$$w_x = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Gia tốc chuyển động của điểm sẽ được xác định về độ lớn và phương chiều theo các biểu thức sau:

$$w = \sqrt{w^2{}_x + w^2{}_y + w^2{}_z} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\cos(ox,w) = \frac{w_x}{w}; \qquad \cos(oy,w) = \frac{w_y}{w}; \qquad \cos(oz,w) = \frac{w_z}{w}.$$

Khi biết $\vec{v}$ và $\vec{w}$ ta có thể xem xét được tính chất chuyển động của điểm M.

5.3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG TOẠ ĐỘ TỰ NHIÊN

5.3.1. Thông số định vị và phương trình chuyển động

Giả thiết động điểm M chuyển động theo một đường cong AB trong hệ toạ độ oxyz. (xem hình vẽ 5.5). Trên quĩ đạo AB lấy điểm O làm gốc và chọn chiều dương cho đường cong. Thông thường ta chọn chiều dương của đường cong là chiều mà động điểm chuyển động. Rõ ràng nếu biết cung $\overline{OM}$ = s ta có thể biết vị trí của điểm M trên quĩ đạo. Nói khác đi cung $\overline{OM}$ = s là thông số định vị của động điểm, còn gọi là toạ độ cong. Khi điểm M chuyển động s sẽ biến đổi liên tục theo thời gian nghĩa là:

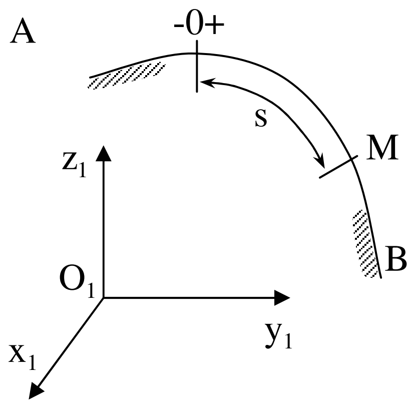
$$s = s(t) \tag{5.8}$$

Biết được quy luật biến thiên (5.8) ta có thể xác định vị trí của điểm M ở bất kỳ thời điểm nào. Biểu thức (5.8) được gọi là phương trình chuyển động của điểm. Theo phương pháp này để xác định chuyển động của điểm phải biết:

- Quĩ đạo chuyển động $\overline{AB}$
- Chiều chuyển động trên quĩ đạo
- Quy luật chuyển động (5.8).

5.3.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Giả thiết động điểm chuyển động trên đường cong AB. Tại thời điểm t động điểm ở vị trí M xác định bằng toạ độ cong s. Tại thời điểm $t_1 = t + \Delta t$ điểm ở vị trí M_1 xác định bằng toạ độ cong $s_1 = s + \Delta s$.

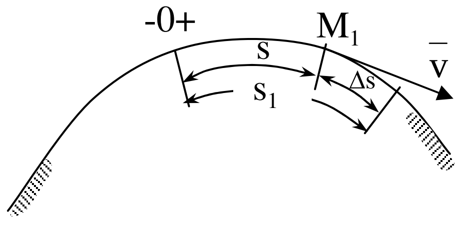


Hình 5.5

Tỷ số $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s}{\Delta t} = v_{tb}$ gọi là tốc độ trung bình.

Giới hạn của tỷ số này khi Δt tiến tới không gọi là tốc độ tức thời của điểm tại thời điểm t và ký hiệu là v.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{5.8}$$



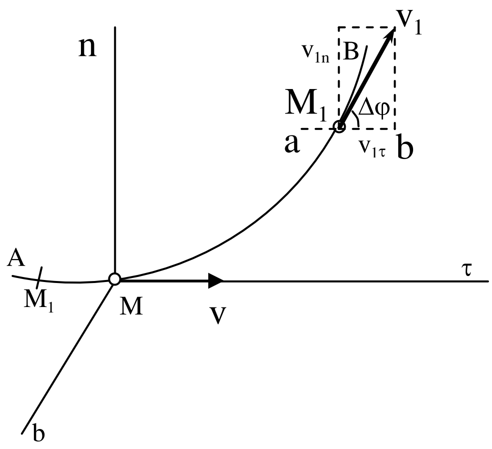
Hình 5.6

Vận tốc có giá trị bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của quãng đường s, có phương tiếp tuyến với quĩ đạo, hướng theo chiều của chuyển động. (xem hình 5.6).

5.3.3. Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm.

5.3.3.1. Hệ toạ độ tự nhiên

Giả thiết chất điểm chuyển động theo đường cong AB như hình (5.7).



Hình 5.7

Trên đường cong lấy hai điểm M_1M_1' lân cận hai bên điểm M. Vẽ mặt phẳng đi qua ba điểm đó. Khi hai điểm M_1M_1' tiến gần đến M thì mặt phẳng trên tiến gần đến giới hạn của nó là mặt phẳng (π) gọi là mặt phẳng mật tiếp. Trong mặt phẳng mật tiếp vẽ đường Mτ tiếp tuyến với quĩ đạo (trùng với véc tơ vận tốc ($\vec{v}$). Một trục khác vẫn nằm trong mặt phẳng mật tiếp và vuông góc với Mτ tại M ký hiệu là Mn gọi là pháp tuyến chính. Trục Mb vuông góc với hai trục kia gọi là trùng pháp tuyến. Ta chọn chiều của ba trục Mτnb tạo thành một tam diện thuận và gọi là hệ toạ độ tự nhiên.

5.3.2. Gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến của điểm

Như trên đã biết:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \;= \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$$

Chiếu biểu thức này lên các trục toạ độ tự nhiên ta có:

$$w^t = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{v^t{}_1 - v^t}{\Delta t};$$

$$w^n = \lim_{\Delta ;t \to 0} = \frac{v^{n_1} - v^n}{\Delta t}\;;$$

$$w^b = 0;$$

Trên hình (5.7) gọi cung $MM_1 = \Delta s$; góc hợp bởi $\vec{v}$ và Mτ là $\Delta\varphi$ ta có:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}$$

Tỷ số k gọi là độ cong còn ρ là bán kính cong của quỹ đạo tại M.

Mặt khác khi chiếu véc tơ $\vec{v}$ và $\vec{v}_1$ lên các trục ta được:

$v^t = v$ $\quad\quad v^t_1 = v_1\cos\Delta\varphi;$

$v^n = 0$ $\quad\quad v^n_1 = v_1\sin\Delta\varphi;$

Thay thế kết quả tìm được vào biểu thức của w^t và w^n sẽ được:

$$w^t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t};$$

$$w^n = \lim_{\Delta t \to 0} (v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t});$$

Khi Δt tiến tới 0, điểm M_1 dần tới M và Δφ tiến tới 0, Δs tiến tới 0, v_1 tiến tới v; cosφ tiến tới 1. Thay các giá trị này vào biểu thức trên ta nhận được:

$$w^t = \lim \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s};$$

$$w^n = \lim (v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t} . \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} . \frac{\Delta s}{\Delta t}) = \frac{v^2}{\rho}.$$

Trong biểu thức (5.9) w^t và w^n là gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm tại thời điểm t.

Gia tốc tiếp tuyến $\vec{w}^t$ có trị số bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc hay bằng đạo hàm bậc hai theo thời gian của quãng đường đi s, có phương tiếp tuyến với quĩ đạo, cùng chiều với $\vec{v}$ khi $w^t > 0$ và ngược chiều với $\vec{v}$ khi $w^t < 0$. (hình 5.8).

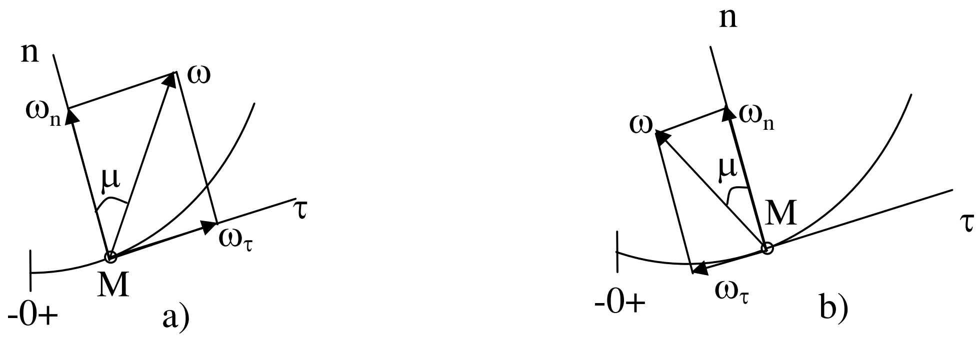
Gia tốc pháp tuyến $\vec{w}^n$ có giá trị bằng bình phương của vận tốc chia cho bán kính cong, luôn luôn hướng theo pháp tuyến Mn về phía lõm của đường cong.

Gia tốc toàn phần của điểm M có thể xác định theo biểu thức :

$$w = \sqrt{w^{\tau 2} + w^{n2}} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \qquad (5.10)$$

Phương của $\vec{w}$ luôn luôn hướng về phía lõm của đường cong và hợp với pháp tuyến một góc μ.

$$tg\mu = \frac{|w^t|}{w^n}; \qquad (5.11)$$



Khi $w^t > 0$ Khi $w^t < 0$

Hình 5.8

5.3.4. Một số trường hợp chuyển động đặc biệt

5.3.4.1. Chuyển động thẳng

Trong trường hợp này $\rho = \infty$ và $w^n = \frac{v^2}{\rho} = 0$.

Khi đó chỉ còn: $\vec{w} = \vec{w}^t = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Gia tốc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc, cùng chiều với $\vec{v}$ khi $\vec{w} > 0$ và ngược chiều với $\vec{v}$ khi $\vec{w} < 0$. Cần chú ý khi chuyển động của điểm là thẳng ta mới có kết quả trên.

5.3.4.2. Chuyển động cong đều

Ta gọi chuyển động cong đều là chuyển động có trị số vận tốc không đổi v = const.

Khi đó $w^t = \frac{dv}{dt} = 0$ và $w = w^n = \frac{v^2}{\rho}$

Gia tốc toàn phần bằng gia tốc pháp tuyến cả về độ lớn và phương chiều. Trong chuyển động cong đều phương trình chuyển động có thể thiết lập như sau:

Ta có: $\frac{ds}{dt} = v,$ $\qquad$ $ds = vdt.$

Tích phân hai vế ta có: $\int_{S0}^{S} ds = \int_{t}^{t} vdt,$

Hay $s = s_0 + v.t$

5.3.4.3. Chuyển động thẳng biến đổi đều

Trong trường hợp này $w^t = w^n = 0$ do đó $w = 0$. Suy ra phương trình chuyển động $x = x_o + v.t$

5.3.4.4. Chuyển động cong biến đổi đều

Chuyển động cong biến đổi đều là chuyển động có w^t = const.

Ta có: $\frac{dv}{dt} = w^t;$ $\quad dv = w^t dt$

Lấy tích phân hai vế sẽ được: $\int_{v_o}^{v} dv = \int_{t}^{t} w^t.dt,$ hay $v = v_o + w^t.t$

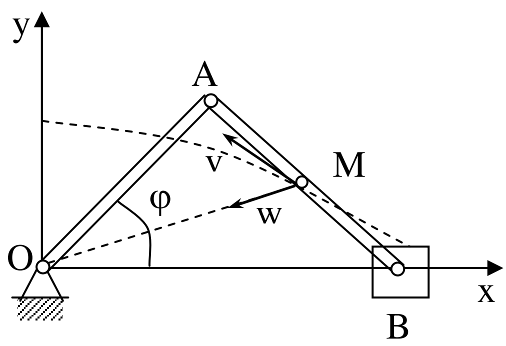
Phương trình chuyển động viết được:

$$\frac{ds}{dt} = v_o + w^t.t \quad \text{suy ra :} \quad ds = v_o dt + w^t.t.dt;$$

Hay: $s = s_o + v_o t + \frac{w^t t^2}{2}.$

Sau đây là một số bài toán thí dụ.

<u>**Thí du 5.1**</u>: Xác định quỹ đạo, vận tốc và gia tốc của điểm M nằm giữa tay biên AB của cơ cấu biên tay quay OAB, (xem hình 5.9) cho biết OA = AB = 2a và thời điểm khảo sát tương ứng với góc φ của cơ cấu, với $\varphi = \omega t$.



Hình 5.9

Bài giải:

Chọn hệ toạ độ oxy nằm trong mặt phẳng cơ cấu.

Gọi toạ độ của điểm M là x,y ta có:

$x = 2a\cos\varphi + a\cos\varphi = 3a\cos\varphi$;

$y = a\sin\varphi$.

Đây chính là phương trình chuyển động của điểm trong toạ độ Đề các.

Để xác định quỹ đạo của điểm, từ phương trình trên rút ra:

$\cos\omega t = \frac{x}{3a}$; $\sin\omega t = \frac{y}{a}$;

suy ra $$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Đây chính là phương trình Enlip nhận các trục đối xứng là ox và oy (xem hình vẽ 5.9).

Để tìm vận tốc ta áp dụng biểu thức (5.6) có:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -3a\sin\omega t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega t.$$

Cuối cùng xác định được vận tốc của điểm M như sau:

$$v_M = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y} = \sqrt{9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}.a.$$

Phương chiều của $\vec{v}_M$ như hình vẽ. Từ kết quả trên ta thấy $v_{min} = a\omega$ và $v_{max} = 3a\omega$.

Theo biểu thức (5.7) xác định được gia tốc của điểm M:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -3a\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x;$$

$$w_y = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y;$$

Gia tốc toàn phần w = $\sqrt{\omega^4(x^2+y^2)} = \omega^2 r$.

Phương chiều của w được xác định nhờ các góc chỉ phương như sau:

$$\cos(w,ox) = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r}; \quad \cos(w,oy) = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}.$$

Từ kết quả trên cho thấy phương chiều $\vec{w}$ luôn luôn hướng từ M về O.

<u>Thí du 5.2</u>. Điểm M chuyển động theo phương trình:

$x = a \sin\omega t$; $\quad$ $y = a \cos\omega t$; $\quad$ $z = ut$.

Trong đó a, ω và u là không đổi.

Xác định quỹ đạo, vận tốc và gia tốc của điểm M.

<u>Bài giải</u>:

Từ hai phương trình đầu suy ra:

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = a^2 \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2 = a^2 \qquad (a)$$

Kết hợp phương trình (a) với phương trình z = ut ta thấy điểm chuyển động trên mặt trụ bán kính a và trục là oz.

Từ z = ut suy ra t = z/u và thay vào biểu thức của x ta được:

$$x = a \sin\frac{\omega}{u}.z; \qquad y = \cos\frac{\omega}{u}.z;$$

Quỹ đạo của điểm M là một đường vít, có trục oz.

Gọi T_1 là chu kỳ của đường vít. T_1 xác định từ biểu thức:

$$\omega T = 2\pi \text{ hay } T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Trong thời gian T_1 động điểm quay quanh trục oz được một vòng đồng thời cũng tiến theo dọc trục oz một đoạn h $= uT_1 = \dfrac{2u\pi}{\omega}$; h gọi là bước của vít.

Để xác định vận tốc và gia tốc ta áp dụng phương pháp toạ độ Đề các.

$v_x = a\omega \cos\omega t;$

$v_y = a\omega \sin\omega t;$

$v_z = u.$

Từ đó xác định vận tốc v của điểm.

$$v = \sqrt{v^2{}_x + v^2{}_y + v^2{}_z} = \sqrt{a^2\omega^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + u^2}; = \sqrt{a^2\omega^2 + u^2}$$

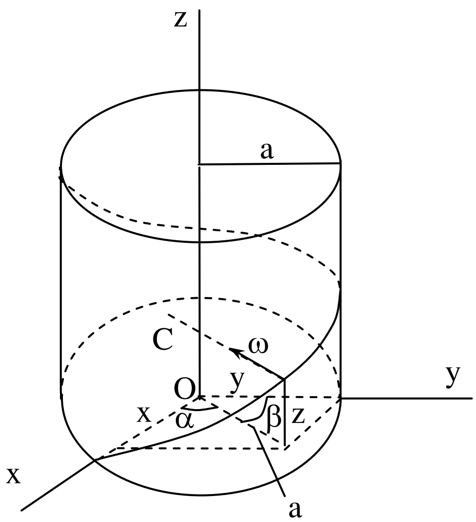
Như vậy vận tốc v của điểm có trị số không đổi và phương tiếp tuyến với quỹ đạo (xem hình 5.10). Tương tự ta xác định được:

$w_x = -a\omega^2\sin\omega t$

$w_x = -a\omega^2\cos\omega t;$

$w_z = 0.$

và $w = \sqrt{w^2{}_x + w^2{}_y} = a\omega^2.$



Hình 5.10

Gia tốc của điểm có độ lớn không đổi còn phương chiều được xác định bằng các cosin chỉ phương.

$$\cos(w,x) = \frac{w_x}{w} = -\sin\omega t = \frac{x}{a};$$

$$\cos(w,y) = \frac{w_y}{w} = -\sin\omega t = \frac{y}{a};$$

$$\cos(w,x)\frac{w_z}{w} = 0.$$

Mặt khác ta thấy:

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha; \ \frac{y}{a} = \cos\beta.$$

α và β biểu diễn trên hình vẽ.

Như vậy gia tốc $\vec{w}$ luôn luôn hướng theo bán kính từ động điểm vào trục oz.

<u>Thí du 5.3</u>: Một bánh xe bán kính R lăn không trượt trên đường thẳng. Vận tốc tâm bánh xe v = v(t).

Lập phương trình chuyển động của điểm M nằm trên vành bánh xe.

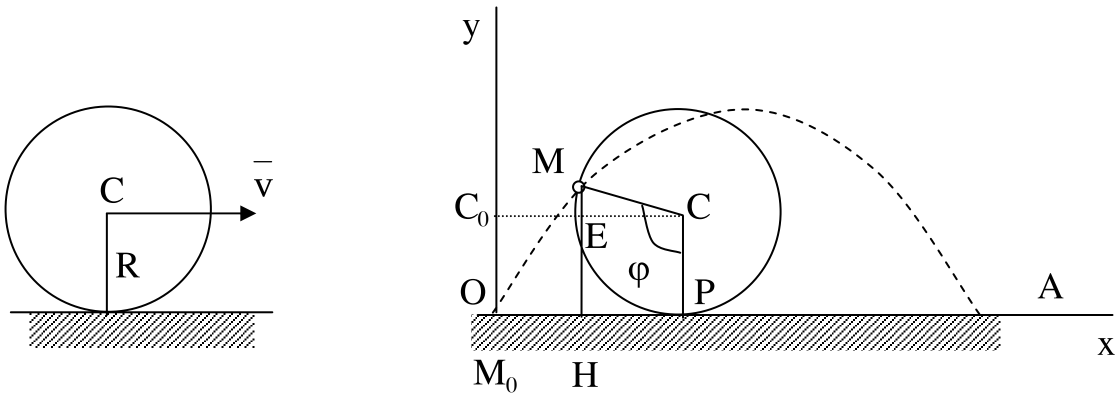
Khảo sát vận tốc và gia tốc của điểm M đó.

Khảo sát tính biến đổi chuyển động của điểm M trên quỹ đạo ứng với một vòng lăn của bánh xe khi $V=V_o$ = cosnt.

<u>Bài giải</u>:

Chọn gốc toạ độ là điểm tiếp xúc O giữa M và mặt đường (xem hình 5.11).

Đặt góc PCM = φ. Để xác định phương trình chuyển động ta tìm quan hệ giữa các toạ độ x.y của điểm với góc φ.



Hình 5.11

Trên hình có x = OH = OP - PH = Rφ - R sinφ;

$$y = HM = R + R\sin(\varphi - 90^0) = R - R\cos\varphi = R(1 - \cos\varphi);$$

Vì bánh xe lăn không trượt nên: $\overline{OP} = \int_0^t v_{(t)} dt$.

Suy ra $\varphi = \varphi(t) = \frac{1}{R}\int_o^t v_{(t)} dt$

Phương trình chuyển động của điểm M có thể viết được:

$x = R(\varphi - \sin\varphi)$;

$y = R(1 - \cos\varphi)$;

$\varphi = \varphi(t)$.

Đây là phương trình của đường Xycloit viết dưới dạng thông số.

Khảo sát chuyển động của điểm M trên cung OA.

Vận tốc và gia tốc của điểm xác định như sau:

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = \dot{x} = R\dot{\varphi}(1 - \cos\varphi); \\ v_y = \dot{y} = R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{array}\right.$$

$$\vec{w}\left|\begin{array}{l} w_x = \dot{v}_x = R\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + R\ddot{\varphi}(1 - \cos\varphi); \\ w_y = \dot{v}_y = R\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + R\ddot{\varphi}\sin\varphi. \end{array}\right.$$

Tại vị trí chạm đất O và A thì φ =0 và φ = 2π. Khi đó sinφ = 0, cosφ =1.

và: $v_x = 0$; $v_y = 0$ suy ra $v = 0$;

$w_x = 0$; $w_y = R\varphi^2 > 0$.

$\vec{w}$ lúc này khác không, do đó điểm chỉ dựng lại tức thời ở mặt đất.

Trong trường hợp đặc biệt $v = v_0$ = hằng số thì:

$$\varphi = \frac{1}{R}\int_o^t v_{(o)} dt = \frac{v_o t}{R};$$

$$\varphi = \frac{v_o t}{R}; \quad \varphi_o = 0; \quad \dot{\varphi} = \frac{v_o}{R}; \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Lúc này: $v_x = v_o(1\text{-}\cos\varphi)$; $v_y = v_o\sin\varphi$;

$$w_x = \frac{v^2{}_o}{R}\sin\varphi; \qquad w_y = \frac{v^2{}_o}{R}\cos\varphi.$$

Để xét tính chất chuyển động của điểm trên cung $\overline{OA}$ ta có:

$$\vec{v}.\vec{w} = v_x.w_x + v_y.w_y = \frac{v^3{}_o}{R}\left[\sin\varphi(1-\cos\varphi)+\sin\varphi\cos\varphi\right]; = \frac{v^3{}_o}{R}\sin\varphi.$$

Như vậy $\vec{v}.\vec{w} > 0$ trong khoảng $0 < \varphi < \pi$ và $\vec{v}.\vec{w} < 0$ trong khoảng $\pi < \varphi < 2\pi$.

Trên nửa cung đầu điểm chuyển động nhanh dần còn nửa cung sau điểm chuyển động chậm dần.

<u>Ví du 5.4</u>. Một vật rắn bắn ra theo phương ngang với vận tốc ban đầu $\vec{v}_o$ sau đó rơi xuống theo quy luật : $x = v_o t$; $y = \frac{1}{2}gt^2$

Tìm quỹ đạo, vận tốc, gia tốc toàn phần, gia tốc tiếp tuyến, gia tốc pháp tuyến, bán kính cong của quỹ đạo tại một thời điểm t bất kỳ.

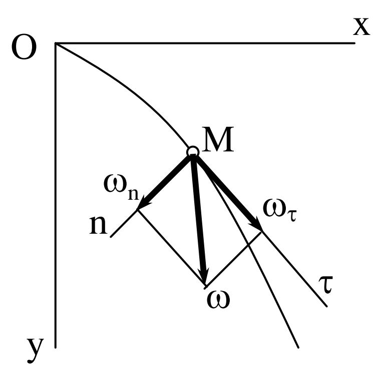
<u>Bài giải</u>:

Khử thời gian t trong phương trình chuyển động ta được phương trình quỹ đạo: $y = \frac{g}{v^2{}_o}x^2$.

Đây là phương trình parabol. (xem hình 5.12).

Vận tốc của vật xác định được

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o;$$



Hình 5.12

$$v_y = \frac{dy}{dt} = gt;$$

$$v = \sqrt{v^2{}_o + g^2t^2}.$$

Gia tốc của điểm được xác định như sau:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \qquad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Suy ra w = g . Gia tốc của vật bằng gia tốc trọng trường.

Để xác định gia tốc tiếp tuyến ta có:

$$w^t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_o^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v}.$$

Theo kết quả ở trên $v^2 = v_o{}^2 + g^2t^2$ nên suy ra:

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{v^2 + v_o^2}.$$

Thay vào biểu thức của w^t ta được:

$$w^t = g\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Từ kết quả này ta thấy tại thời điểm ban đầu $v = v_o$ thì $w^t = 0$

Khi $v \to \infty$ thì $w^t \to g$.

Tiếp theo ta xác định gia tốc pháp tuyến căn cứ vào biểu thức:

$$w^2 = w^2{}_\tau + w^2{}_n$$

Ta có: $\qquad w^2{}_n = w^2 - w^2{}_\tau = g^2 + g^2\left(1 - \frac{v_o^2}{v^2}\right) = g^2\frac{v_o^2}{v^2};$

suy ra : $\qquad w_n = g\frac{v_o}{v}.$

Tại thời điểm đầu $v = v_o$ do đó $w_n = g$.

Từ biểu thức tìm được của w_n ta có thể xác định được bán kính cong của quỹ đạo.

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ suy ra } \rho = \frac{v^2}{w_n} \text{ hay } \rho = \frac{v^3}{v_0 g}.$$

Tại thời điểm đầu $v = v_o$ ta có $\rho = \dfrac{v_o^2}{g}$.

Khi $v \to \infty$ thì $\rho \to \infty$.

Chương 6

CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN VÀ CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH CỦA VẬT RẮN

Chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định là hai chuyển động cơ bản của vật rắn. Sau này sẽ rõ, các chuyển động khác của vật rắn đều là kết quả tổng hợp của hai chuyển động nói trên.

6.1. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN.

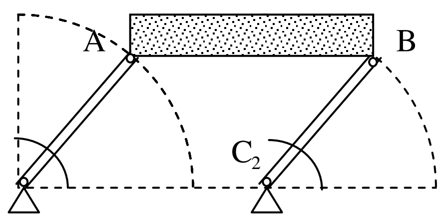
6.1.1. Định nghĩa

Chuyển động của vật rắn gọi là tịnh tiến khi một đường thẳng bất kỳ gắn với vật có phương không đổi trong quá trình chuyển động .

Cần phân biệt giữa chuyển động tịnh tiến với chuyển động thẳng. Trong chuyển động tịnh tiến quỹ đạo của một điểm cũng có thể là thẳng cũng có thể là cong.

Thí du : Pít tông trong động cơ ô tô, máy kéo là vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi điểm trên nó có quỹ đạo là thẳng.

Khâu Ab trong cơ cấu hình bình hành $OABO_1$ (hình 6.1) chuyển động tịnh tiến, mọi điểm trên nó có quỹ đạo là một đường tròn.



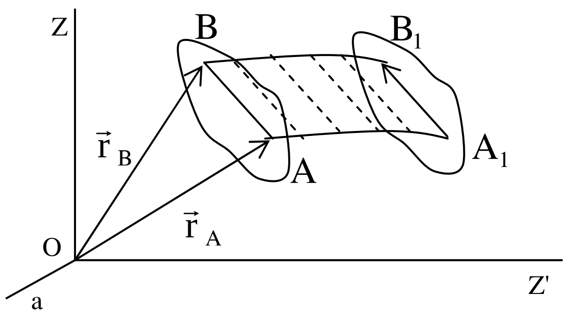
Hình 6.1

6.1.2. Tính chất của chuyển động tịnh tiến.

Định lý 6.1: Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến mọi điểm trên vật có chuyển động như nhau nghĩa là quỹ đạo, vận tốc và gia tốc như nhau.

Chứng minh định lý :

Giả tiết vật rắn chuyển động tịnh tiến



Hình 6.2

trong hệ tọa độ oxyz (hình 6.2). Lấy hai điểm A và B bất kỳ trên vật. Tại thời điểm t hai điểm A và B có véc tơ định vị $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$.

Theo hình vẽ ta có :

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \tag{6.1}$$

Trong quá trình chuyển động, theo định nghĩa AB là véc tơ không đổi. Suy ra quỹ đạo điểm B là tập hợp của các điểm nằm trên quỹ đạo điểm A đã rời đi một đoạn thẳng bằng về độ lớn và phương chiều của véc tơ $\overrightarrow{AB}$. Nói khác đi nếu ta dời quỹ đạo AA_1 của điểm A theo véc tơ $\overrightarrow{AB}$ thì AA_1 sẽ trồng khít lên quỹ đạo BB_1. Ta đã chứng minh được quỹ đạo của điểm A và B như nhau.

Từ biểu thức (6.1) dễ dàng suy ra :

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \vec{v}_A \ , \text{vì } \frac{\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$$

$$\text{và } \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \text{ hay } \vec{\mathbf{w}}_A = \vec{\mathbf{w}}_B$$

Vì điểm A và B lấy bất kỳ do đó định lý đã được chứng minh.

Do tính chất trên của chuyển động tịnh tiến nên khi nói vận tốc và gia tốc một điểm nào đó trên vật chuyển động tịnh tiến cũng có thể hiểu đó là vận tốc và gia tốc của vật.

6.2. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH.

6.2.1. Khảo sát chuyển động của cả vật.

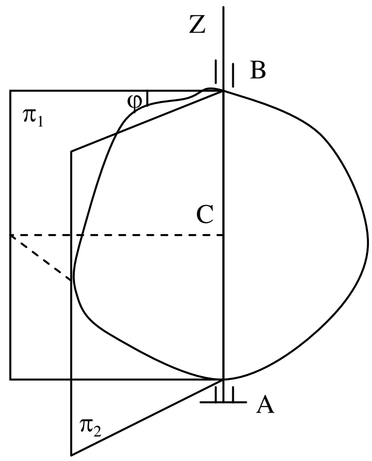
6.2.1.1. Định nghĩa và phương trình chuyển động.

Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động quay quanh một trục cố định khi trên vật tìm được hai điểm cố định trong suốt thời gian chuyển động. Đường thẳng đi qua hai điểm cố định đó gọi là trục quay.

Thí dụ : Cánh cửa quay quanh trục bản lề ; Phần quay của động cơ điện ; Ròng rọc cố định....là các vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định .

Mô hình vật rắn quay quanh một trục cố định biểu diễn trên hình vẽ (6.3).

Để xác định vị trí của một vật ta dựng hai mặt phẳng : mặt phẳng π_1 chứa trục quay cố định trong không gian , mặt phẳng π_2 cũng chứa trục quay nhưng gắn với vật. Khi vật chuyển động mặt phẳng π_2 chuyển động theo, nếu xác định được góc φ hợp bởi giữa π_1 và π_2 thì vị trí của vật được xác định. Vì vậy góc φ là thông số định vị của vật.



Hình 6.3

Khi vật quay góc φ biến đổi liên tục theo thời gian nghĩa là :

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (6.2)$$

Phương trình (6.2) chính là phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.

6.2.1.2. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật .

Giả tiết trong khoảng thời gian $\Delta t = t_1 - t_0$ vật rắn quay được một góc :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$$

Ta gọi tỷ số $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ là vận tốc góc trung bình của vật trong khoảng thời gian Δt ký hiệu là ω_{tb} . Lấy giới hạn của vận tốc góc trung bình khi Δt dần tới không được :

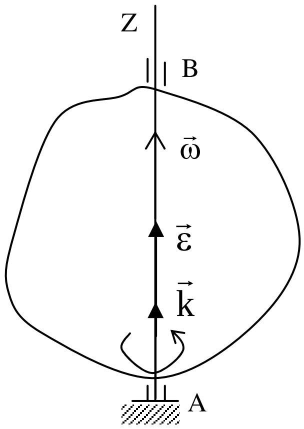
$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

ω gọi là vận tốc góc tức thời của vật.

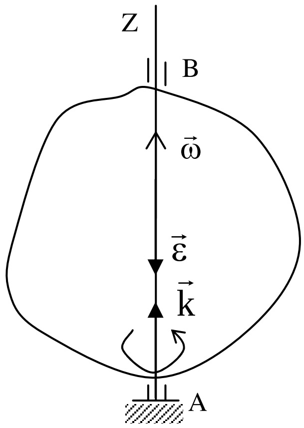
Như vậy vận tốc góc tức thời của vật rắn bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của góc quay φ. Dấu của ω cho biết chiều quay của vật. Nếu ω > 0 có nghĩa là vật quay theo chiều dương đã chọn và nếu ω < 0 thì vật quay ngược theo chiều dương đã chọn. Trị số ω được tính bằng rad/giây viết tắt là 1/s.

Để biểu diễn cả về tốc độ quay và phương chiều quay của vật ta đưa ra khái niệm véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$. Véc tơ $\vec{\omega}$ được xác định như sau : độ lớn của nó tốc độ góc ω, hướng dọc theo trục quay về phía sao khi nhìn từ mút của ω sẽ thấy vật quay quanh trục theo ngược chiều kim đồng hồ.

$\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$ với $\vec{k}$ là véc tơ đơn vị trên trục quay. (hình 6.4).



Hình 6.4a



Hình 6.4b

Vì vậy vận tốc góc cho biết tốc độ quay và chiều quay của vật do đó sự biến thiên của nó theo thời gian phản ánh tính biến đổi của chuyển động đó. Ta có định nghĩa gia tốc góc như sau :

Gia tốc góc của vật ký hiệu là ε bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc góc hay đạo hàm bậc hai theo thời gian của góc quay.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (6.4).$$

Đơn vị tính gia tốc là rad/(giây)^2 viết tắt là 1/s^2. Cũng như vận tốc, gia tốc có thể biểu diễn bằng một véc tơ $\vec{\varepsilon}$ xác định bằng đạo hàm theo thời gian của véc tơ $\vec{\omega}$. Ta có :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.\vec{k} = \varepsilon.\vec{k}$$

Như vậy véc tơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ cũng nằm trên trục quay, khi ε > 0 thì $\vec{\varepsilon}$ cùng chiều với $\vec{\omega}$ (hình 6.4a) và khi ε < 0 thì $\vec{\varepsilon}$ ngược chiều với $\vec{\omega}$ (hình 6.4b).

6.1.1.3. Chuyển động quay đều và biến đổi đều.

Nếu chuyển động quay có vận tốc góc ω không đổi ta nói chuyển động quay là đều. Khi đó biểu thức (6.3) rút ra : $d\varphi = \omega dt$.

Nếu tích phân hai vế theo các cận tương ứng ta có :

$$\int_{\varphi 0}^{\varphi} d\varphi = \int_{t0}^{t} \omega dt \quad \text{hay} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)\ .$$

Với $t_0 = 0$ thì phương trình chuyển động có thể viết :

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t\ .$$

Ở đây φ_0 là góc quay ban đầu ứng với $t = t_0 = 0$.

Nếu chọn $\varphi_0 = 0$ thì phương trình còn lại là :

$$\varphi = \omega t\ .$$

Ở đây có thể tính đến vận tốc ω bằng biểu thức

$$\omega = \frac{\varphi}{t}(rad/s)\ .$$

Từ công thức này nếu tính vận tốc góc cho bằng n vòng/phút thì dễ dàng suy ra vận tốc góc tính theo radian/giây theo biểu thức :

$$\omega = \frac{\pi.n}{30} \approx 0{,}1(rad/s)\ .$$

Nếu gia tốc ε là không đổi, chuyển động quay của vật gọi là chuyển động quay biến đổi đều.Từ biểu thức (6.4) suy ra :

$$\int_{\varphi 0}^{\varphi} d\omega = \int_{t0}^{t} \varepsilon dt \quad \text{hay} \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

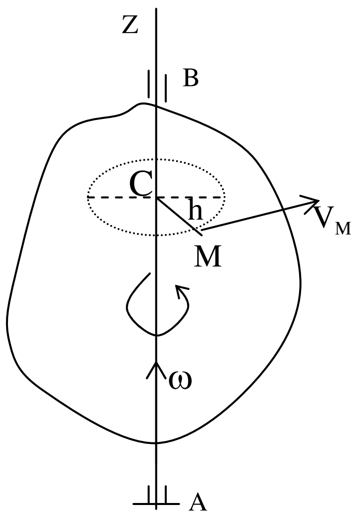
Mặt khác ta có : $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ nên có thể viết : $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$.

Lấy phân tích hai vế ta được : $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$

Nếu chọn $\varphi_0 = 0$ thì $\qquad \varphi = \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$

6.2.2. Khảo sát chuyển động của một điểm trên vật rắn chuyển động quay quanh một trục.

Khảo sát điểm M nằm trên vật rắn quay quanh một trục cố định, cách trục quay một đoạn h. Khi vật rắn quay điểm M vạch ra một đường tròn bán kính h nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay có tâm c nằm trên trục quayAZ. *(Hình 6.5).*



Hình 6.5

Bằng phương pháp toạ độ tự nhiên ta có thể viết phương trình chuyển động của điểm M :

$$S = h \,.\, \varphi(t).$$

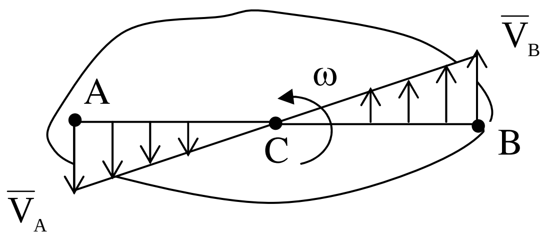
S là cung mà điểm M đi được, tương ứng với góc quay φ(t) mà vật quay được. Vì φ là hàm của thời gian nên S cũng là hàm của thời gian. Biểu thức (6.5) là phương trình chuyển động của điểm M.

Vận tốc của điểm M dễ dàng xác định nhờ biểu thức (5.8) ta có :

$$v = \frac{ds}{dt} = h.\frac{d\varphi}{dt} = h.\omega \qquad (6.6).$$

Vận tốc điểm M có trị số bằng h.ω và có phương tiếp tuyến với quỹ đạo ($\vec{v}_M \perp MC$) có chiều hướng theo chiều quay của vật (hình 6.5) và nằm trong mặt phẳng của quỹ đạo.

Từ biểu thức (6.6) ta thấy vận tốc $\vec{v}$ của điểm tỷ lệ với khoảng cách từ điểm tới trục quay và có thể biểu diễn theo hình vẽ (6.6).



Hình 6.6

Cũng theo phương pháp toạ độ tự

nhiên ta có thể xác định được gia tốc của điểm M.

$$\vec{w}_M = \vec{w}^t{}_M + \vec{w}^n{}_M .$$

$$w_M^t = \frac{dv}{dt} = h\frac{d\omega}{dt} = h.\varepsilon$$

$$w_M^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{h^2\omega^2}{h} = h.\omega^2$$

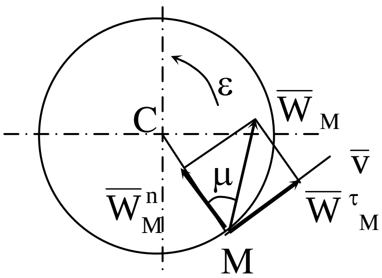
Ở đây nếu $\varepsilon > 0$ chiều của $\vec{w}^t{}_M$ cùng chiều với $\vec{v}$, nếu $\varepsilon < 0$ thì $\vec{w}^t{}_M$ ngược chiều với $\vec{v}$. Còn chiều của w_M^n luôn hướng từ M về tâm c.

Gia tốc điểm M xác định được cả về độ lớn lẫn phương chiều.

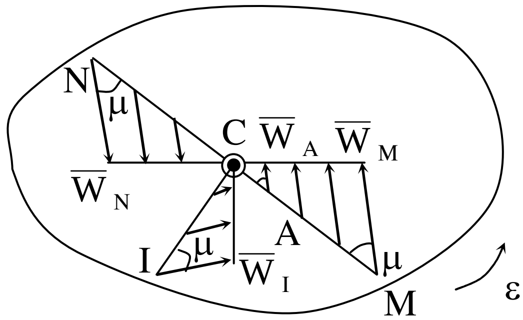
$$w_M = \sqrt{w^{t2}{}_M + w^{n2}{}_M} = \sqrt{h^2.\varepsilon^2 + \omega^2.h^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$\vec{w}_M$ hợp với bán kính MC một góc μ xác định bởi biểu thức :

$$tg\mu = \frac{|wr|}{w^n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad \text{(xem hình 6.7).}$$



Hình 6.7



Hình 6.8

Từ biểu thức xác định w_M ta thấy gia tốc của điểm M tỷ lệ bậc nhất với khoảng cách từ điểm tới trục quay. Có thể biểu diễn quy luật phân bố gia tốc các điểm như ở hình (6.8.)

<u>Thí du 6.1</u> : Một bánh đà đang quay với vận tốc n = 90 vòng/phút người ta hãm cho nó quay chậm dần đều cho đến khi dừng hẳn hết 40 giây. Xác định số vòng quay bánh đà quay được trong thời gian hãm đó.

Bài giải:

Phương trình chuyển động của bánh đà là :

$$\varphi = \omega t - \varepsilon\frac{t^2}{2} \qquad ; \qquad \omega_0 = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Ở đây ta chọn góc quay ban đầu $\varphi_0 = 0$.

Tại thời điểm $t_0 = 0$ $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$ tại thời điểm $t = t_1$ khi bánh đà dừng hẳn $\omega = \omega_1 = 0$. Suy ra :

$$\omega = 0 = \omega_0 - \varepsilon t \text{ hay } \varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{\pi n}{30t}$$

Thay vào trên ta tìm được :

$$\varphi = 2\pi N = \frac{\pi n t_1}{30} - \frac{\pi n}{60}t_1 = \frac{\pi n}{60}t_1 ,$$

$$\text{hay } N = \frac{n t_1}{120} = 30 \text{ (vòng)}$$

Từ khi bắt đầu phanh cho đến khi dừng hẳn bánh đà còn quay được 30 vòng nữa.

Thí du 6.2 : Trọng vật B rơi xuống truyền chuyển động quay cho trống có bán kính r trên đó lắp bánh răng 1 bán kính R_1 ăn khớp với bánh răng 2, bán kính R_2 như hình vẽ (6.9). Cho biết trọng vật được thả xuống không vận tốc ban đầu và có gia tốc a không đổi. Xác định quy luật chuyển động của bánh răng 2, vận tốc và gia tốc của điểm M trên vành bánh răng 2 tại thời điểm t = 2 giây.

Bài giải:

Vì vật B chuyển động xuống theo quy luật nhanh dần với gia tốc a nên :

$$V_B = at.$$

Điểm A có vận tốc bằng vận tốc điểm B

$$V_A = \omega_1 r = at.$$

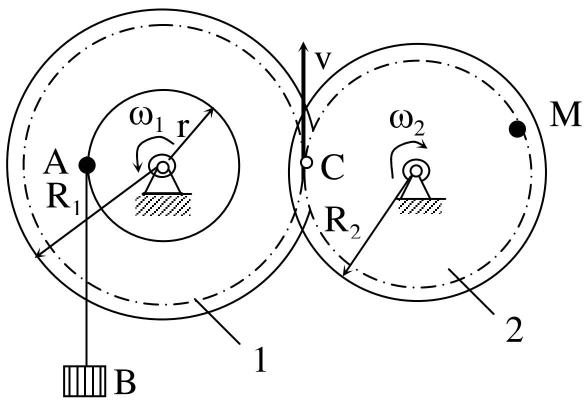
Trong đó ω_1 là vận tốc góc của trục bánh răng 1. Suy ra :

$$\omega_1 = \frac{at}{r}$$

Để xác định vận tốc góc ω_2 của bánh răng 2 căn cứ vào vận tốc điểm ăn khớp C của hai bánh răng, ta có :

$$V_C = \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

Hay $\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}.\omega_1 = \frac{R_1}{R_2}.\frac{at}{r}$.



Hình 6.9

Vận tốc góc bánh răng 2 là hàm của thời gian. Dễ dàng tìm được góc quay của bánh răng 2. Ta có :

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}.\frac{at}{r} = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

hay $d\varphi_2 = \frac{R_1}{rR_2}.atdt$.

Chọn $\varphi_0 = 0$ ứng với $t_0 = 0$ và φ_1 ứng với $t = t_1$. Sau đó tích phân hai vế ta được : $\varphi_2 = \frac{R_1}{2R_2 r}.at^2$.

Đây chính là phương trình chuyển động của bánh răng 2.

Vận tốc của điểm M trên vành bánh răng 2 bằng vận tốc của điểm C. Ta có :

$$V_M = V_c = \omega_1 R_1 = \frac{R_1}{r}.at \ \ (m/s)$$

Khi t= 2 giây gia tốc của điểm M cũng như gia tốc điểm C. Ta có :

$$W_c^t = R_2.\varepsilon = R_2.\frac{d\omega}{dt}2 \qquad \text{với} \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_1}{R_2 r}.a$$

Thay vào biểu thức gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến của điểm C ta có :

$$w_C^t = \frac{R_1}{r}.a$$

$$w_C^n = R_2\omega_2^2 = R_{2.}\frac{R_1^2}{R_2^2}.\frac{a^2t^2}{r^2} = \frac{R_1^2a^2}{R_2r^2}t^2$$

Với t = 2 sẽ được :

$$w_C^n = \frac{4R_1^2a^2}{R_2r^2}$$

Gia tốc toàn phần của điểm C là ;

$$w_c = R_2\sqrt{\frac{R_1^2a^2}{R_2^2.r^2} + \frac{8R_1^4a^4}{R_2^2r^2}} = \frac{R_1a}{r}\sqrt{1 + \frac{16R_1^2a^2}{R_2^2r^2}}$$

6.2.3.Truyền chuyển động quay của vật rắn quanh các trục song song

Khảo sát trường hợp rất phổ biến trong kỹ thuật cơ khí là sự truyền chuyển động quay của các bánh răng trụ .

6.2.3.1. Truyền chuyển động quay của các bánh răng trụ có trục quay cố định

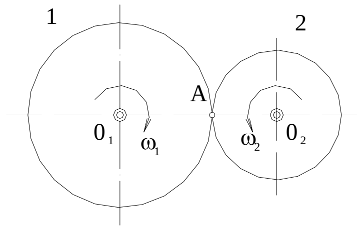
Trước hết ta xét hai bánh răng 1 và 2 quay quanh hai trục O_1 và O_2 cố định biểu diễn trên hình 6.10. Hình 6.10a là hai bánh răng ăn khớp ngoài còn hình 6.10.b là hai bánh răng ăn khớp trong. Nếu gọi A là điểm ăn khớp của hai bánh răng ta có nhận xét rằng vận tốc của điểm A trên hai bánh răng bằng nhau nghĩa là:

$$|\omega_1|.r_1 = |\omega_2|.r_2$$

Trong đó r_1 và r_2 là bán kính của hai bánh răng 1 và 2. Từ kết quả trên suy ra biểu thức sau:

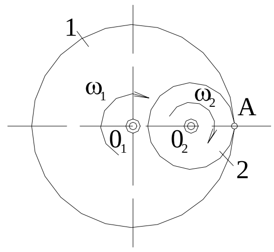
$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{ăn khớp ngoài}} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1} \qquad (6.11)$$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{ăn khớp trong}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \qquad (6.12)$$



Hình 6-10a

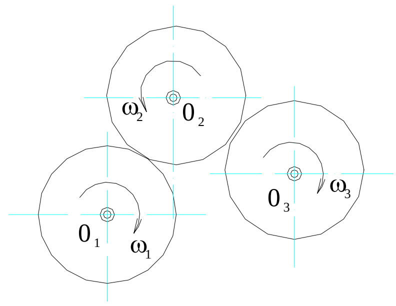
z_1 và z_2 là số răng của bánh răng 1 và 2.



Hình 6-10b

Tiếp theo ta xét trường hợp hệ có nhiều bánh răng trụ ăn khớp với nhau và có trục quay cố định (Hình 6.11).

Trước hết khảo sát các bánh răng ăn khớp ngoài. Theo biểu thức (6.1) áp dụng cho các cặp bánh răng tiếp theo ta có:



Hình 6 - 11

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}; \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{r_3}{r_2};$$

$$\ldots;\ \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = (-1)^{n-1}\frac{r_n}{r_{n-1}}$$

Hay $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = -\dfrac{r_2}{r_1}$; $\dfrac{\omega_1}{\omega_3} = \dfrac{r_3}{r_1}$; .....; $\dfrac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^{n-1}\dfrac{r_n}{r_1}$

Một cách tổng quát ta có:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} \qquad (6.13)$$

Ở đây k là số cặp bánh răng ăn khớp ngoài. Nếu số cặp bánh răng ăn khớp ngoài là chẵn thì ωn cùng chiều với ω_1 và số cặp bánh răng ăn khớp ngoài là lẻ thì ωn ngược chiều với ω_1. Nói cách khác đi nếu n chẵn thì ωn ngược chiều với ω_1 và n lẻ thì ω_n cùng chều với ω_1.

Trong trường hợp các bánh răng ăn khớp trong. Theo biểu thức (6.2) áp dụng cho các cặp bánh răng tiếp theo dễ dàng nhận được kết quả:

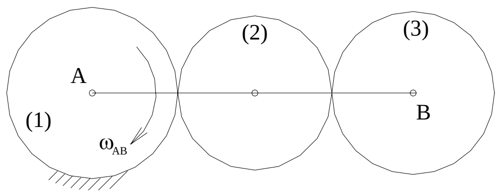
$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{r_n}{r_1} \qquad (6.14)$$

Điều này chứng tỏ vận tốc góc của các bánh răng tiếp theo không đổi chiều và chỉ phụ thuộc vào tỷ số giữa hai bán kính r_1 và r_n.

6.2.3.2. Truyền chuyển động quay của các bánh răng trụ có trục quay nằm trên giá di động

Khảo sát sự truyền chuyển động của các bánh răng cho trên hình (6.12)

Ở đây bánh răng 1 cố định còn bánh răng 2 và 3 có trục C và B nằm trên giá AB giá này quay quanh A với vận tốc góc ω_{AB}.



Hình 6-12

Bài toán đặt ra là phải xác định vận tốc góc của 2 bánh răng 2 và 3.

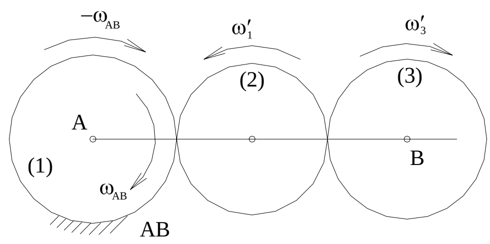
Để đưa bài toán về trường hợp đã xét ở 6.2.3. ta phải tìm cách cố định giá AB. Muốn vậy ta cho toàn bộ hệ quay ngược lại với vận tốc góc ω_{AB} quanh A. Phương pháp này gọi là phương pháp Vilít. Khi đó các vận tốc góc tương đối ω_K' của các khâu sẽ là $\omega_K' = \omega_k - \omega_{AB}$. Trong đó ω_K là vận tốc góc tuyệt đối. Rõ ràng lúc này giá AB sẽ có vận tốc là $\omega_{AB}' = \omega_{AB} - \omega_{AB} = 0$. Còn các bánh răng 1 và 2 có các vận tốc tương đối là:

$$\omega_1' = \omega_1 - \omega_{AB} \text{ và } \omega_2' = \omega_2 - \omega_{AB}$$

Với kết quả này ta có thể tính được ω_1' và ω_2' theo kết quả đã khảo sát ở mục 6.2.3 và từ đó xác định được ω_2 và ω_3.

Thí du6-3 : Khảo sát các bánh răng trên hình (6.12) cho biết bánh răng 1 có bán kính R_1. Giá AB quay với vận tốc góc ω_{AB}. Bánh răng 3 có bán kính R_3. Xác định vận tốc của bánh răng 3.

Bài giải:



Hình 6-13

Gọi vận tốc góc tuyệt đối của các bánh răng là ω_1, ω_2, ω_3. Vì bánh răng 1 cố định nên $\omega_1 = 0$.

Áp dụng phương pháp Vilít vào hệ ta có:

$\omega_1' = 0 - \omega_{AB}$; $\omega_2' = \omega_2 - \omega_{AB}$;

$\omega_3' = \omega_3 - \omega_{AB}$

còn $\omega_{AB}' = 0$ nghĩa là giá AB đứng yên.

Áp dụng công thức (6. 13) cho trường hợp này với k = 2 ta có:

$$\frac{\omega_1'}{\omega_3'} = \frac{r_3}{r_1} \text{ hay } \frac{-\omega_{AB}}{\omega_3 - \omega_{AB}} = \frac{r_3}{r_1}$$

Suy ra: $$\omega_3 = \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right).\omega_{AB}$$

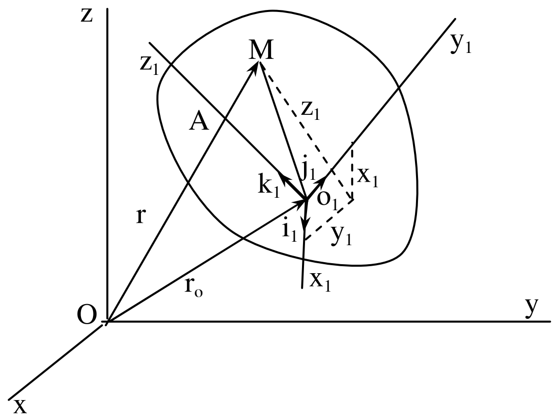
Nếu $r_1 < r_3$ thì ω_3 cùng chiều với ω_{AB} còn $r_1 > r_3$ thì ω_3 ngược chiìu với ω_{AB} và đặc biệt $r_1 = r_3$ thì $\omega_3 = 0$ bánh răng 3 sẽ chuyển động tĩnh tiến.

Chương 7

CHUYỂN ĐỘNG TỔNG HỢP CỦA ĐIỂM

7.1. CHUYỂN ĐỘNG TUYỆT ĐỐI, CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI VÀ CHUYỂN ĐỘNG KÉO THEO.

Chuyển động tổng hợp của điểm là chuyển động được tạo thành khi điểm tham gia hai hay nhiều chuyển động đồng thời. Ta xét bài toán trong mô hình sau đây : Khảo sát chuyển động của điểm M trên hệ toạ độ động $o_1x_1y_1z_1$ gắn trên vật A. Vật A lại chuyển động trong hệ toạ độ cố định oxyz (xem hình 7.1).



Hình 7.1

Chuyển động của điểm M so với hệ cố định oxyz gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc và gia tốc của chuyển động tuyệt đối ký hiệu là : $\vec{v}_a$ và $\vec{w}_a$.

Chuyển động của điểm M so với hệ động $o_1x_1y_1z_1$ gọi là chuyển động tương đối ký hiệu là $\vec{v}_r$ và $\vec{w}_r$.

Chuyển động của hệ động (vật A) so với hệ cố định oxyz gọi là chuyển động kéo theo. Vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật A (hệ động) bị điểm M chiếm chỗ (trùng điểm) trong chuyển động kéo theo là vận tốc và gia tốc kéo theo của điểm M và ký hiệu là : $\vec{v}_e$ và $\vec{w}_e$.

Như vậy chuyển động tuyệt đối của điểm M là chuyển động tổng hợp của hai chuyển động tương đối và kéo theo của nó.

Thí dụ : Con thuyền chuyển động với vận tốc $\vec{u}$ so với nước. Dòng nước chảy với vận tốc $\vec{v}$ so với bờ sông. Ở đây chuyển động của con thuyền so với bờ sông là chuyển động tuyệt đối . Chuyển động của con thuyền so với mặt nước là chuyển động tương đối với vận tốc $\vec{v}_r = \vec{u}$. Chuyển động của dòng nước so với bờ là chuyển động kéo theo, vận tốc của chuyển động kéo theo $\vec{v}_e = \vec{v}$.

Theo định nghĩa trên ta thấy, để xét chuyển động tương đối ta xem hệ động như cố định. Khi đó phương trình chuyển động viết dưới dạng véc tơ như sau : $\vec{r}_1 = \vec{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$. (7-1)

Ở đây $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ là các véc tơ đơn vị trên các hệ động. Khi xét chuyển động tương đối như ở trên đã nói các véc tơ $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ được xem như không đổi. Còn các toạ độ x_1 , y_1 , z_1 là các hàm của thời gian.

$$x_1 = x_1(t) \quad ; \qquad y_1 = y_1(t) \quad ; \qquad z_1 = z_1(t).$$

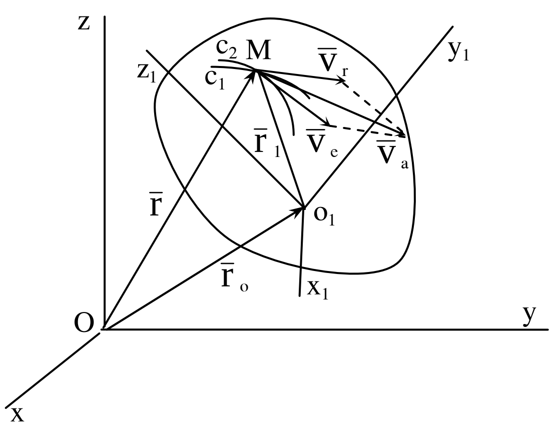
Muốn xét chuyển động kéo theo của điểm ta chỉ cần cố định nó trong hệ động khi đó phương trình chuyển động của M so với hệ cố định oxyz là phương trình chuyển động kéo theo. Ta có :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \qquad (7\text{-}2).$$

Trong phương trình (7.2) vì ta cố định điểm trong hệ động nên các toạ độ x_1 , y_1 , z_1 là không đổi, còn $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ là các véc tơ biến đổi theo thời gian. $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$; $\vec{i} = \vec{i}(t)$; $\vec{j} = \vec{j}(t)$; $\vec{k} = \vec{k}(t)$.

7.2. ĐỊNH LÝ HỢP VẬN TỐC.

Xét điểm M chuyển động tương đối trong hệ động $o_1x_1y_1z_1$ với vận tốc $\vec{v}_r$; Hệ động chuyển động trong hệ cố định oxyz kéo theo điểm M chuyển động với vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$ (xem hình 7-2). Để xác định vận tốc tuyệt đối ta thiết lập phương trình chuyển động tuyệt đối của điểm M. Ta có :



Hình 7.2

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \qquad (7\text{-}3)$$

Phương trình này giống phương trình (7-2) nhưng cần lưu ý là mọi tham số của phương trình đều là các hàm của thời gian.

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian phương trình (7-3) ta được :

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}}{dt} \right) + \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 \right)$$

Trong kết quả tìm được, nhóm số hạng thứ nhất

$$\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + x_1\frac{d\vec{i}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}}{dt} \right)$$

chính là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của phương trình (7-2) (phương trình chuyển động kéo theo) là vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$.

Nhóm các số hạng còn lại :

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 \right)$$

là đạo hàm bậc nhất theo thời gian của phương trình (7.1) (phương trình chuyển động tương đối) do đó được thay thế bằng vận tốc tương đối $\vec{v}_r$.

Thay các kết quả vừa tìm được vào vận tốc tuyệt đối ta được :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r .$$

Định lý 7.1 : Trong chuyển động tổng hợp của điểm vận tốc tuyệt đối bằng tổng hình học vận tốc kéo theo và vận tốc tương đối :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r . \tag{7-4}$$

7.3. Định lý hợp gia tốc

Để thiết lập biểu thức của gia tốc tuyệt đối ta đạo hàm bậc hai theo thời gian phương trình chuyển động tuyệt đối của điểm (phương trình 7.3). Ta có :

$$\vec{w}_a = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \right) + \left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 \right)$$

$$+2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

Trong kết quả tìm được nhóm các số hạng thứ nhất :

$$\left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}+x_1\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}+y_1\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}+z_1\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)$$

là đạo hàm bậc hai theo thời gian của phương trình (7.2) (phương trình chuyển động kéo theo) có thể thay bằng gia tốc kéo theo $\vec{w}_e$.

Nhóm các số hạng thứ hai :

$$\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1+\frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1\right)$$

là đạo hàm bậc hai theo thời gian của phương trình (7.1) (phương trình chuyển động tương đối) có thể thay bằng gia tốc tương đối $\vec{w}_r$.

Nhóm các số hạng còn lại :

$$2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

được gọi là gia tốc quay hay gia tốc Koriolit ký hiệu là $\vec{w}_k$.

Thay các kết quả tìm được vào biểu thức của gia tốc tuyệt đối ta được :

$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k$.

Ta đi đến định lý sau đây gọi là định lý hợp gia tốc.

Định lý 7.2 : Trong chuyển động tổng hợp của điểm gia tốc tuyệt đối bằng tổng hình học của gia tốc kéo theo, gia tốc tương đối và gia tốc Koriolit.

$$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k. \qquad (7.5)$$

7.4. GIA TỐC KORIOLIT.

Gia tốc Koriolit $\vec{w}_k$ được xác định theo biểu thức :

$$\vec{w}_k = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt}\frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

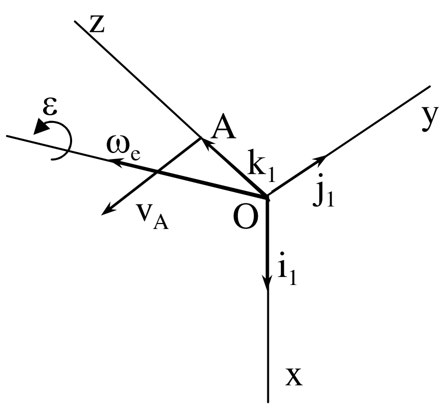
Khi hệ động có chuyển động quay thì các véc tơ đơn vị $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ sẽ quay theo khi đó đạo hàm của nó theo thời gian khác không. Trong trường hợp hệ động không tham gia chuyển động quay thì các đạo hàm của nó sẽ bằng không và do đó gia tốc Koriolit sẽ không có vì vậy gia tốc này còn được gọi là gia tốc quay. Gia tốc Koriolit biểu diễn ảnh hưởng chuyển động quay của hệ động đến gia tốc của điểm.

Nếu vận tốc góc của hệ động (vận tốc góc kéo theo) là ϖ_e thì khi hệ động quay quanh trục $o_1\varepsilon$ với vận tốc góc ω_e thì đạo hàm bậc nhất theo thời gian của các véc tơ đơn vị $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$ chính là vận tốc đầu mút của chúng trong chuyển động quay quanh trục $o_1\varepsilon$. (xem hình 7.3).

Ta có :

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{i}_1 \qquad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{j}_1$$

$$\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{k}_1$$



Hình 7.3

Thay các kết quả biểu thức trên vào biểu thức của $\vec{w}_k$ ta được :

$$\vec{w}_k = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)$$

$$= 2\left(\frac{dx_1}{dt}\left(\vec{\omega}_C x\ \vec{i}\right) + \frac{dy_1}{dt}\left(\vec{\omega}_C x\ \vec{j}\right) + \frac{dz_1}{dt}\left(\vec{\omega}_C x\ \vec{k}\right)\right)$$

$$= 2\vec{\omega}_e x\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1\right) = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

Như vậy gia tốc Koriolit bằng hai lần tích hữu hướng giữa vận tốc góc kéo theo và véc tơ vận tốc tương đối.

$$\vec{w}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r . \qquad (7.6)$$

Từ (7.6) ta có thể xác định độ lớn của gia tốc Koriolit theo biểu thức :

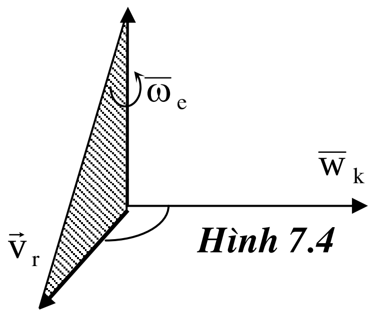
$$w_k = 2\omega_e . v_r \sin(\omega_e . v_r).$$

Ta thấy ngay gia tốc Koriolit bằng không trong trường hợp sau :

- Khi hệ động chuyển động tịnh tiến nghĩa là khi $\omega_e = 0$;

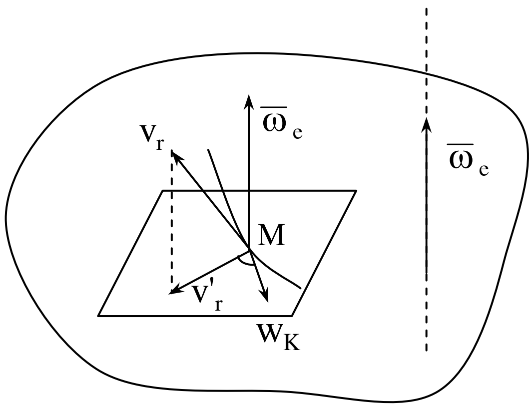
- Khi động điểm đứng yên trong hệ động, nghĩa là khi $\vec{v}_r = 0$;

- Khi chuyển động tương đối theo phương dọc theo trục quay của chuyển động kéo theo nghĩa là khi góc hợp giữa $\vec{\omega}_e$ và $\vec{v}_r$ bằng không hoặc bằng 180^0 .



Hình 7.4

Theo (7.6) gia tốc Koriolit có phương vuông góc với mặt phẳng chứa hai véc tơ $\vec{\omega}_e$ và $\vec{v}_r$ có chiều sao cho khi nhìn từ mút của nó xuống mặt phẳng đó sẽ thấy $\vec{\omega}_e$ quay ngược chiều kim đồng hồ đi một góc nhỏ hơn 180^0 sẽ đến trùng với $\vec{v}_r$ (xem hình 7.4).



Hình 7.5

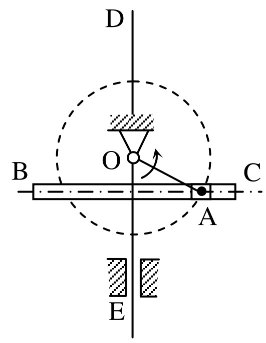
Trong thực hành ta có thể xác định phương chiều của $\vec{w}_k$ như sau :

Chiếu véc tơ vận tốc tương đối $\vec{v}_r$ lên mặt phẳng vuông góc với trục quay của chuyển động kéo theo. Sau đó quay hình chiếu $\vec{v}_r$ đó đi một góc 90^0 theo chiều quay của ω_e trong mặt phẳng trên (xem hình 7.5) ta sẽ xác định được phương chiều của gia tốc Koriolit.

Sau đây sẽ giới thiệu một số ví dụ vận dụng các định lý hợp vận tốc và hợp gia tốc trong chuyển động tổng hợp của điểm.

<u>Thí du 7.1</u><u>: </u>Tay quay OA của cơ cấu tay quay cu lit quay quanh trục O vuông góc với mặt phẳng của cơ cấu. Đầu A của tay quay nối bằng khớp bản lề với con trượt B. Con trượt B có thể trượt trong máng BC của cu lit. Máng BC có thể chuyển động tịnh tiến lên xuống nhờ rãnh hướng dẫn E. Xác định vận tốc, gia tốc của máng BC cũng như vận tốc gia tốc của con trượt so với cu lit BC.

Cho biết tay quay có chuyển động quay đều với vận tốc góc n = 120 vòng/phút. Độ dài OA = 1 = 30cm (xem hình 7.6).



Hình 7.6

<u>Bài giải:</u>

Nếu chọn hệ động gắn với cu lit (máng BC) và hệ cố định gắn với trục quay O thì chuyển động của con trượt A trong máng là chuyển động tương đối. Chuyển động của máng tịnh tiến lên xuống là chuyển động kéo theo còn chuyển động của A quay quanh O là chuyển động tuyệt đối.

Trước hết ta có thể xác định được vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm A.

Vận tốc của tay quay OA.

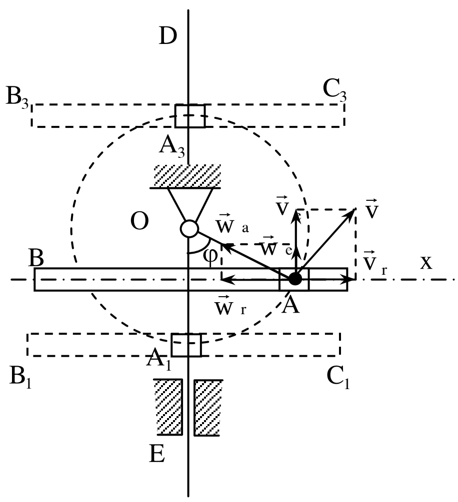
$$\omega = \frac{\pi.n}{30} = \frac{\pi.120}{30} = 4\pi(rad/s)\ .$$

Vị trí của cơ cấu được xác định bằng góc quay của tay quay OA :

$\varphi = \omega t = 4\pi t\ \ (rad)$.

Đầu A của tay quay thực hiện chuyển động tròn tâm O bán kính OA = 1.

Vận tốc của điểm A : $V_a = \omega.1 = 4\pi.30 = 120\pi \approx 3{,}77$ m/s.



Hình 7.7

$\vec{v}_a$ có phương vuông góc với OA hướng theo chiều quay ω (xem hình 7.7). $\vec{v}_a$ chính là vận tốc tuyệt đối của điểm A : $v_a = v_A$.

Vì tay quay quay đều nên gia tốc điểm A chỉ có một thành phần pháp tuyến.

$\vec{w}_A = \vec{w}_A^n$ về độ lớn

$w_A = \omega^2.1 = 16\pi^2.1$

$= 16\pi^2.30 \approx 4733$ cm/s^2 ;

$= 47,33$ m/s^2

Gia tốc $\vec{w}_A$ có chiều hướng từ A vào O. Gia tốc tuyệt đối của điểm A là $\vec{w}_A$.

Để tìm vận tốc của máng (vận tốc kéo theo) và vận tốc của con trượt A trong máng (vận tốc tương đối) ta áp dụng định lý hợp vận tốc. Ta có :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Ở đây $\vec{v}_a = \vec{v}_A$ đã biết cả độ lớn và phương chiều. $\vec{v}_e$ là vận tốc của máng chuyển động tịnh tiến lên xuống do đó có phương thẳng đứng. Còn $\vec{v}_r$ là vận tốc của con trượt dọc theo máng BC nên có phương nằm ngang. Từ định lý hợp vận tốc ta có thể nhận được một hình bình hành mà đường chéo là $\vec{v}_a$ còn hai cạnh là $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$. Dễ dàng tìm được các véc tơ vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ như trên hình (7.7). Ta có :

$$v_e = v_A.\sin\varphi = 3,77.\sin 4\pi.t(m/s)$$

$$v_r = v_A.\cos\varphi = 3,77.\cos 4\pi.t(m/s)$$

Phương chiều của các vận tốc $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ như hình vẽ.

Để xác định gia tốc kéo theo và tương đối (gia tốc của máng và gia tốc của con trượt trong máng) ta áp dụng dịnh lý hợp gia tốc.

$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k$.

Trong bài toán này hệ động chuyển động tịnh tiến nên $\vec{w}_k = 0$ ta chỉ còn biểu thức :

$\vec{w}_a = \vec{w}_e + \vec{w}_r$.

Ở đây gia tốc tuyệt đối đã được xác định. Gia tốc kéo theo $\vec{w}_e$ có phương thẳng đứng còn gia tốc tương đối $\vec{w}_r$ có phương năm ngang. Cũng dễ dàng nhận thấy các véc tơ gia tốc kéo theo $\vec{w}_e$ và gia tốc tương đối $\vec{w}_r$ là hai cạnh của hình bình hành nhận gia tốc $\vec{w}_a$ làm đường chéo (xem hình 7.7). Ta có :

$$w_e = w_A.\cos\varphi = 47{,}33.\cos 4\pi.t$$

$$w_r = w_A.\sin\varphi = 47{,}33.\sin 4\pi.t$$

Phương chiều của gia tốc $\vec{w}_e$ và $\vec{w}_r$ như trên hình vẽ 7.7 .

Kết quả trên cho thấy vận tốc, gia tốc của máng BC ($v_{e,}$ w_{ed}) và vận tốc, gia tốc con trượt trong máng (v_r , w_r) là hàm của thời gian. Ta có thể xác định chúng tại các vị trí đặc biệt sau :

Khi $\varphi_1 = 4\pi t = 0$ ta có $v_e = 0$; $v_r = 3{,}77$ m/s

$W_e = 47{,}33$ m/s ; $w_r = 0$

Khi $\varphi_2 = 4\pi t = \pi / 2$ ta có $v_e = 3{,}7$ m / s ; $v_r = 0$

$w_e = 0$ m / s ; $w_r = 3{,}77$ m / s

<u>Thí du 7.2</u> : Động điểm M chuyển động bắt đầu từ đỉnh O của nón dọc theo đường sinh OC với vận tốc không đổi $v_r = 24$ cm / s . Nón cũng đồng thời quay bắt đầu cùng thời điểm xuất phát của điểm M theo quy luật $\varphi = 0{,}125t^2$. Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của động điểm M tại thời điểm t = 4 giây. (xem hình 7.8). Cho biết góc đỉnh nón là 60^0.

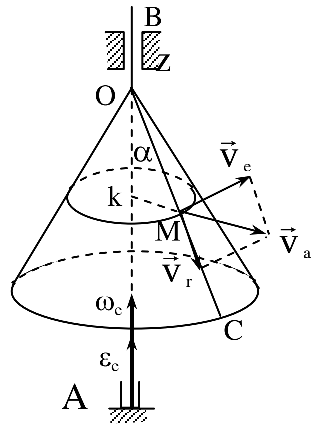
Bài giải

Trong bài toán này chuyển động của điểm M dọc theo đường sinh OC là chuyển động tương đối. Như vậy vận tốc tương đối của điểm đã biết.

V_r = 24 cm / s = 0,24 m / s có phương chiều từ O đến C.

Chuyển động quay của nón quanh trục AB với quy luật $\varphi = 0,125t^2$ là chuyển động kéo theo.

Để xác định được vận tốc kéo theo của điểm ta phải xác định vị trí của nó tại thời điểm t_1 trên nón.



Hình 7.8

Ta có OM = v_r.t = 24.4 = 96 cm

Khoảng cách từ động điểm tại vị trí đang xét tới trục quay AB là :

MK = OM.sin30^0 = 96.0,5 = 48 cm.

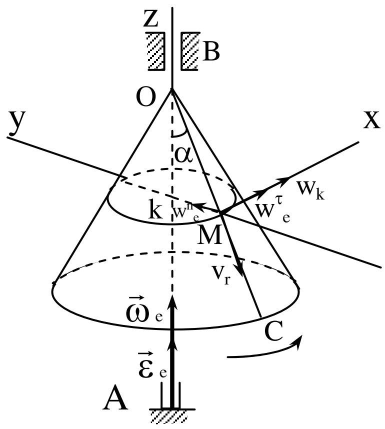
Vận tốc kéo theo tại thời điểm t_1 là :

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 0,25t \qquad \text{với } t = t_1 = 4 \text{ giây}$$

ω_{et1} = 0,25.4 = 1 rad / s ;

Gia tốc góc trong chuyển động kéo theo là :

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,25(\text{rad}/s^2)$$



Hình 7.9

Các véc tơ ω_e và ε_e biểu diễn trên hình vẽ (7.9).

Các véc tơ vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$ và vận tốc tương đối là $\vec{v}_r$ tại thời điểm t_1 = 4s được biểu diễn trên hình 7.8.

Về độ lớn vận tốc kéo theo xác định được :

v_e = MK . ω_e = 48,1 cm / s ≈ 0,48 m / s .

Áp dụng định lý hợp vận tốc ta có : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

Về độ lớn vận tốc tuyệt đối của M tại thời điểm t_1 là :

$$V_a = V_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{48^2 + 24^2} = 53,64(cm/s) = 0,5364(m/s).$$

Để xác định gia tốc tuyệt đối của M, từ định lý hợp gia tốc ta có :

$$\vec{w}_a = \vec{w}_M = \vec{w}_e + \vec{w}_r + \vec{w}_k$$

Chuyển động kéo theo là chuyển động tròn nên $\vec{w}_e = \vec{w}_e^n + \vec{w}_e^r$.

Trong đó : $\vec{w}_e^n$ có phương chiều hướng từ M về K (xem hình 7.9), có độ lớn : $w_e^n = MK.\omega_e^2 = 48.1 = 48(cm/s^2)$.

$\vec{w}_e^r$ có phương chiều trùng với phương chiều $\vec{v}_e$ có độ lớn :

$$w_e^r = MK.\varepsilon_e^2 = 48.0,25 = 12(cm/s^2).$$

Gia tốc tương đối $\vec{w}_r$ trong trường hợp này bằng không còn gia tốc Koriolit $\vec{w}_k$ có phương chiều như trên hình vẽ. Có độ lớn :

$$w_k = 2\omega_e \,.\, v_r\,.\sin 30^0 = 2.1.24.0,5 = 24\ (cm/s^2)\ .$$

Chiếu biểu thức trên lên hai trục Mxy như trên hình ta có :

$$w_x = w_e^r + w_k = 12 + 24 = 36\ cm/s^2 = 0,36\ m/s^2.$$

$$w_y = w_e^n = 48\ cm/s^2 = 0,48\ m/s^2.$$

Gia tốc tuyệt đối của điểm

$$w_M = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60c(cm/s^2).$$

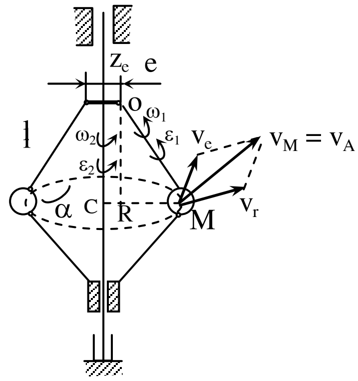
Phương và chiều của w_M có thể xác định bằng các góc chỉ phương xác định như sau :

$$\cos(w_M x) = \frac{w_x}{w_M} = 0,6 \quad ; \qquad \cos(w_M y) = \frac{w_y}{w_M} = 0,8$$

Thí du 7.3. : Cơ cấu điều chỉnh ly tâm biểu diễn như hình vẽ 7.10. Tại thời điểm đang xét quả cầu quay quanh điểm treo O cùng với thanh OM với vận tốc góc và gia tốc góc $\omega_1 = 2$ rad / s và $\varepsilon_1 = 0{,}2$ rad / s^2. Cơ cấu quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc và gia tốc góc $\omega_2 = 4$ rad / s và $\varepsilon_2 = o{,}8$ rad / s^2. Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của quả cầu M tại thời điểm đó. Cho biết kích thước của cơ cấu tại vị trí đang xét là :

$$l = 40 \text{ cm} \quad ; \quad e = 5 \text{ cm} \quad ; \quad \alpha = 30^0.$$

Bài giải



Hình 7.10

Trong bài toán này, chuyển động của cơ cấu quay quanh trục thẳng đứng là chuyển động kéo theo. Vận tốc góc kéo theo $\omega_e = \omega_2 = 4$ rad / s và gia tốc góc trong chuyển động kéo theo là $\varepsilon_e = \varepsilon_2 = 0{,}8$ rad / s^2.

Chuyển động của quả cầu M quay quanh O là chuyển động tương đối.Vận tốc góc trong chuyển động tương đối là $\omega_r = \omega_1 = 2$ rad / s và gia tốc góc trong chuyển động tương đối là $\varepsilon_r = \varepsilon_1 = 0{,}2$ rad / s^2.

Quỹ đạo chuyển động tương đối của M là đường tròn bán kính 1 và tâm 0

Quỹ đạo chuyển động kéo theo của M là đường tròn nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay AB và có bán kính :

$CM = R = e + 1\sin 30^0 = 5 + 40.0{,}5 = 25$ cm.

Vận tốc tuyệt đối của điểm M được xác định như sau :

$\vec{v}_a = \vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r$;

$v_e = R.\omega_e = 25.4 = 100$ cm / s

v_e có phương tiếp tuyến với quỹ đạo của chuyển động kéo theo , hướ theo chiều quay của cơ cấu ; V_r tiếp tuyến với quỹ đạo của chuyển động tương đối có nghĩa là vuông góc với thanh OM hướng theo chiều quay của ω_r , có trị số $V_r = l.\omega r = 40.2 = 80$ cm/s

Như vậy hai véc tơ $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ vuông góc với nhau vì vậy độ lớn vận tốc tuyệt đối xác định được :

$$v_M = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 128(cm/s).$$

Phương chiều của V_M xác định như trên hình vẽ 7.10.

Vì chuyển động tương đối và chuyển động kéo theo đều là chuyển động tròn nên biểu thức gia tốc tuyệt đối của điểm M ta có thể viết :

$$\vec{w}_M = \vec{w}^r{}_e + \vec{w}^n{}_e + \vec{w}_k + \vec{w}_r^r + \vec{w}_r^n. \qquad \text{(a)}$$

Sau đây xác định độ lớn và phương chiều của các thành phần gia tốc ở vế phải .

$W_e^t = R \,.\, \varepsilon_e = 25 \,.\, 0{,}8 = 20$ cm / s^2 . W_e^t cùng phương chiều với vận tốc kéo theo .

$\vec{w}_e^n = R.\,\omega^2{}_2 = 25.16 = 400$cm/s^2. Hướng từ M vào C

$w^r{}_r = 1 \,.\, \varepsilon_r = 40 \,.\, 0{,}2 = 8$ cm / s^2. $\vec{w}_r^r$ hướng theo chiều của v_r .

$w_r{}^n = 1 \,.\, \omega^2{}_r = 40 \,.\, 4 = 160$ cm / s^2. $\vec{w}_r^n$ hướng từ M vào O

$w_k = 2\omega_e \,.\, v_r \sin(\omega_{et} v_r) = 2 \,.\, 4.\, 80 \,.0{,}866 = 554$ cm / s^2

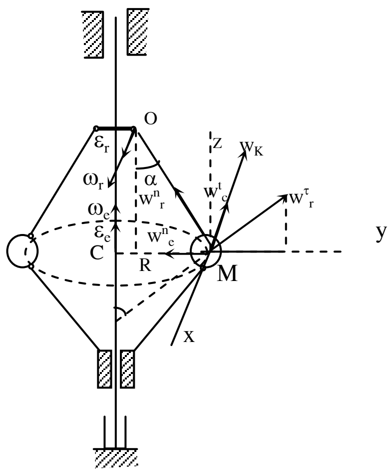
Ở đây góc $< (\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 60^0$

nên $\sin(\omega_e, v_r) = 0{,}866$.

Phương chiều của $\vec{w}_k$ xác định theo phương pháp thực o hành sẽ tìm thấy như ở hình vẽ (7.11) .

Để xác định gia tốc tuyệt đối $\vec{w}_M$ ta chiếu phương trình (a) lên 3 trục xyz chọn như hình vẽ.

Với cách chọn hệ trục trên ta thấy gia tốc $\vec{w}_k$ và $\vec{w}_e^r$ nằm trên trục x các gia tốc $\vec{w}_e^n$, $\vec{w}_r^r$, $\vec{w}_r^n$ năm trong mặt phẳng yMz.



Hình 7.11

Kết quả chiếu lên các trục thu được :$w_x = - w_k - w_e{}^n = -$

554 - 20 = -574 cm / s^2.

$w_y = w_e^{\tau} . \cos 30^0 - w_r^n . \sin 30^0 - w_e^n$;

$= 8 . 0,866 - 160 . 0,5 - 400 = -473$ cm / s^2 ;

Cuối cùng ta có :

$$w_M = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{(-574)^2 + (-473)^2 + (142)^2} =$$

$$= 869 \text{ cm / s}^2 = 8,69 \text{ m / s}^2$$

Để xác định phương chiều của M ta phải xác định các góc chỉ phương của chúng đối với các trục :

$$\cos(w_M x) = \frac{w_x}{w_M} = \frac{-574}{869} \quad ; \quad \cos(w_M y) = \frac{w_y}{w_M} = \frac{-473}{869}$$

$$\cos(w_M z) = \frac{w_z}{w_M} = \frac{142}{869}.$$

Chương 8

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

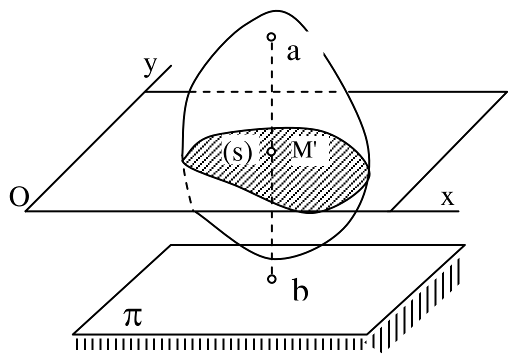
8.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC CỦA CẢ VẬT.

8.1.8.Định nghĩa và phân tích chuyển động song phẳng.

Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động khi mỗi điểm thuộc vật luôn luôn chuyển động trong một mặt phẳng cố định song song với mặt phẳng quy chiếu đã chọn trước (mặt phẳng cơ sở). Nói cách khác chuyển động song phẳng là chuyển động của vật khi mỗi điểm của nó trong quá trình chuyển động có khoảng cách đến mặt phẳng cơ sở là không đổi .

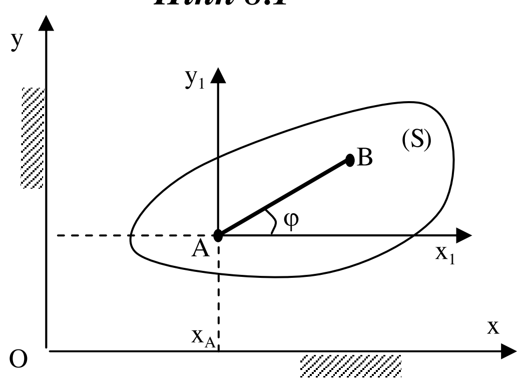
Trong kỹ thuật có nhiều chi tiết máy chuyển động song phẳng như bánh xe lăn trên một đường thẳng, thanh biên trong cơ cấu biên tay quay, ròng rọc động ..v..v...

.Xét vật rắn A chuyển động song phẳng có mặt phẳng cơ sở π (hình 8.1)



Hình 8.1

Đường thẳng ab thuộc vật vuông góc với mặt phẳng cơ sở, sẽ thực hiện chuyển động tịnh tiến. Mọi điểm nằm trên đường thẳng này có chuyển động như nhau và được đặc trưng bởi chuyển động của điểm M năm trên ab. Nếu xem vật là tập hợp vô số các đường ab như vậy suy ra chuyển động của vật được đặc trưng bởi tiết diện S trên mặt phẳng oxy. Mô hình bài toán chuyển động song phẳng của vật rắn được đưa về nghiên cứu chuyển động của một tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy của nó (hình 8.2) gọi tắt là

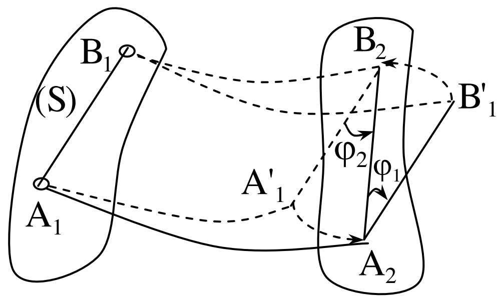


Hình 8-2

chuyển động phẳng của tiết diện S.

Vị trí của tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy được xác định khi ta biết được vị trí của một đoạn thẳng AB thuộc tiết diện (S).

Xét chuyển động của tiết diện (S) từ vị trí (1) xác định bởi vị trí đoạn thẳng A_1B_1 đến vị trí (2) xác định bởi vị trí của đoạn thẳng A_2B_2 (hình 8.3).



Hình 8-3

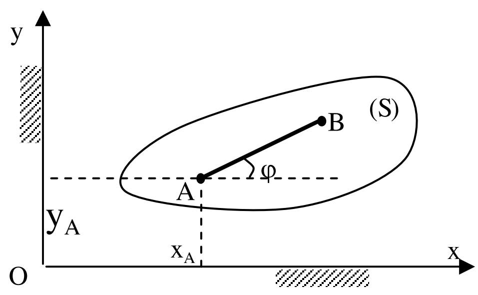
Dễ dàng thấy rằng ta có thể thay thế chuyển động của tiết diện (S) bằng hai chuyển động cơ bản sau :

Cho tiết diện (S) chuyển động tịnh tiến theo cực A hay cực B từ vị trí A_1B_1 đến vị trí A'_1B_2 hay $A_2B'_1$. Tiếp theo ta quay tiết diện S quanh A_2 hay B_2 một góc φ_1 hay φ_2. Vì $A_2B'_1 // A'_1B_2$ nên ở đây $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

Có thể đi đến kết luận ; chuyển động của tiết diện (S) trong mặt phẳng của nó (chuyển động song phẳng) luôn luôn có thể phân tích thành hai chuyển động: tịnh tiến theo một tâm cực và chuyển động quay quanh tâm cực đó. Chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào tâm cực nhưng chuyển động quay không phụ thuộc vào tâm cực. Như vậy chuyển động song phẳng chính là chuyển động tổng hợp của vật rắn khi nó đồng thời tham gia hai chuyển động quay quanh một trục có phương không đổi và tịnh tiến theo phương vuông góc với trục quay.

8.1.2. Phương trình chuyển động, vận tốc và gia tốc của vật .

Xét tiết diện (S) chuyển động trong mặt phẳng oxy chứa nó. Nếu chọn A là tâm cực và dựng đoạn thẳng AB trên tiết diện ta sẽ thấy vị trí của tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy sẽ được xác định nếu ta biết vị trí của cực A và phương của AB so với trục ox. Nói khác đi, thông số định vị của tiết diện (S) trong mặt phẳng oxy là x_A, y_A, và φ (hình 8.4).



Hình 8-4

Trong thời gian chuyển động các thông số này biến đổi theo thời gian ta có :

$$x_A = x_A(t)$$

$$y_A = y_A(t) \qquad (8.1)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

Biết quy luật biến đổi (8.1) ta có thể xác định vị trí của tiết diện (S) ở bất kỳ thời điểm nào. Các phương trình (8.1) là phương trình chuyển động của tiết diện phẳng (S) trong mặt phẳng của nó (phương trình chuyển động song phẳng).

Từ phương trình chuyển động (8.1) ta thấy vận tốc và gia tốc của vật được biểu diễn bởi hai thành phần : vận tốc và gia tốc trong chuyển động tịnh tiến theo tâm cực A là : $\vec{v}_A, \vec{w}_A$. Vận tốc góc và gia tốc góc của tiết diện trong chuyển động quay quanh tâm cực A là ω, ε.

Vì chuyển động tịnh tiến phu thuộc tâm cực A nên vận tốc và gia tốc trong chuyển động tịnh tiến phụ thuộc vào tâm cực A. Ta có :

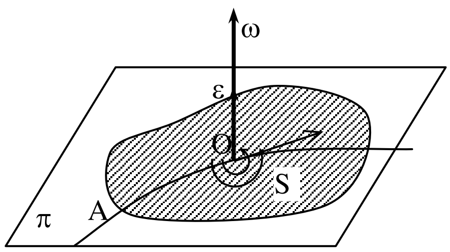
$$\vec{v}_{A1} \neq \vec{v}_{A2} \neq \vec{v}_{Ai}$$

$$\vec{w}_{A1} \neq \vec{w}_{A2} \neq \vec{w}_{Ai}$$

Chuyển động quay không phụ thuộc vào tâm A nên có :

$$\omega_{A1} = \omega_{A2} = \omega_{Ai} = \omega$$

$$\varepsilon_{A1} = \varepsilon_{A2} = \varepsilon_{Ai} = \varepsilon$$



Hình 8.5

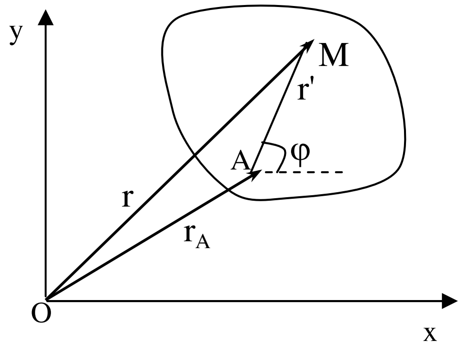
Vận tốc góc ω và gia tốc góc ε có thể biển diễn bằng véc tơ vuông góc với tiết diện (S) như hình(8.5) . Khi hai véc tơ này cùng chiều ta có chuyển động quay nhanh dần và nếu chúng ngược chiều có chuyển động quay chậm dần.

8.2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC CỦA ĐIỂM TRÊN VẬT CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG

8.2.1. Phương trình chuyển động

Xét điểm M bất kỳ trên tiết diện. Giả thiết chọn tâm cực A có toạ độ $x_A y_A$ (hình 8-6).

Ký hiệu góc hợp giữa AM với phương ox là φ và khoảng cách AM = b.Toạ độ của điểm M trong chuyển động tuyệt đối so với hệ quy chiếu oxy có thể xác định :



Hình 8.6

$x_M = x_A + b.\cos\varphi$;

$y_M = y_A + b.\sin\varphi$;

Các thông số x_A, y_A và φ là các hàm của tthời gian, nghĩa là :

$x_A = x_A(t)$ $y_A = y_A(t)$ $\varphi = \varphi(t)$

Do đó x_M, y_M cũng là hàm của thời gian . Ta có :

$x_M = x_M(t) = x_A(t) + b.\cos\varphi(t)$;

$y_M = y_M(t) = y_A(t) + b.\sin\varphi(t)$; (8.2)

(8.2) là phương trình chuyển động của điểm M.

Cũng có thể thiết lập phương trình chuyển động của điểm M dưới dạng véc tơ. Trên hình 8-6 có : $r = r(t) = r_A + r'$ (8.2a)

Ở đây r' =AM có độ lớn không đổi bằng b, và quay quanh trục A với vận tốc góc là ω.

8.2.2. Các định lý vận tốc của điểm

8.2.2.1. Các định lý vận tốc của điểm trên vật chuyển động song phẳng

Định lý 8-1: Vận tốc của một điểm bất kỳ trên tiết diện chuyển động song phẳng bằng tổng hình học của vận tốc tâm cực A và vận tốc góc của điểm đó trong chuyển động của tiết diện quay quanh trục A với vận tốc góc ω. Ta có :

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$.

Chứng minh định lý : Từ phương trình chuyển động (8-2a) ta có :

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}.$$

Thay $\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A ; \dfrac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$

Ta sẽ có $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$, định lý được chứng minh. Cần chú ý véc tơ vận tốc của điểm M quay quanh A ký hiệu là $\vec{v}_{AM}$ có phương vuông góc với AM, có chiều hướng theo chiều quay của vận tốc ω (hình 8-6).

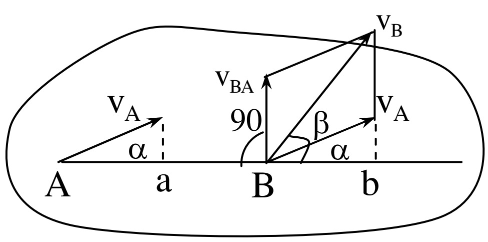
<u>Đinh lý 8-2</u> : Định lý về hình chiếu vận tốc hai điểm

Trong chuyển động song phẳng của tiết diện S (chuyển động song phẳng) hình chiếu vận tốc của hai điểm bất kỳ trên tiết diện lên phương nối hai điểm đó luôn luôn bằng nhau.

$$(\vec{v}_A)_{AB} = (\vec{v}_B)_{AB}$$

<u>Chứng minh định lý</u> : Theo định lý 8-1, nếu chọn A làm tâm cực thì vận tốc điểm B xác định theo biểu thức :

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ với $\vec{v}_{BA}$ vuông góc AB. Chiếu biểu thức trên lên phương AB ta có : $(\vec{v}_B)_{AB} = (\vec{v}_A)_{AB} + (\vec{v}_{BA})_{AB}$. Trong đó : $(\vec{v}_{BA})_{AB} = 0$ vì $\vec{v}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}$.



Hình 8.7

Định lý đã được chứng minh.

Ta có thể minh họa định lý trên bằng hình vẽ(8-7). Trên hình vẽ ta có :

Aa = Bb hay $v_A\cos\alpha = v_B\cos\beta$.

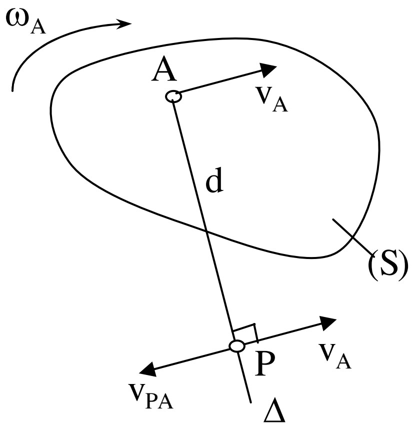
8.2.2.2. Tâm vận tốc tức thời - Xác định vận tốc của điểm trên tiết diện chuyển động phẳng theo tâm vận tốc tức thời

- Tâm vận tốc tức thời là điểm thuộc tiết diện có vận tốc tức thời bằng không. Nếu gọi P là tâm vận tốc tức thời thì : $v_P = 0$.

Định lý 8-3 : Trong chuyển động song phẳng của vật rắn tại mỗi thời điểm luôn luôn tồn tại một và chỉ một tâm vận tốc tức thời.

Chứng minh định lý :

Xét tiết diện (S) chuyển động phẳng với vận tốc của tâm cực A là $\vec{v}_A$ và vận tốc góc trong chuyển động quay là ω . Quay véc tơ V đi một góc bằng 90 theo chiều quay của ω ta sẽ dựng được tia Δ. Trên tia Δ lấy một điểm P cách A một đoạn $AP = \dfrac{v_A}{\omega}$ (hình 8.8)



Hình 8.8

Theo biểu thức (8-2) ta có : $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$. Ở đây $v_{PA} = \omega.PA = \omega\dfrac{v_A}{\omega}$ $= v_A$.

Phương của $\vec{v}_{PA}$ vuông góc với AP hướng theo chiều quay vòng của ω nghĩa là $\vec{v}_{PA}$ có độ lớn bằng với độ lớn của v_A, cùng phương nhưng ngược chiều với $\vec{v}_A$.

Thay vào biểu thức tính $\vec{v}_P$ ta được $v_P = v_A - v_A = 0$ chính là tâm vận tốc tức thời.

Chứng minh tính duy nhất của tâm vận tốc tức thời :

Giả thiết tại thời điểm trên vật có hai tâm vận tốc tức thời P_1 và P_2 với $v_{P1} = 0$ và $v_{P2} = 0$.

Theo định lý 8-1 ta có : $\vec{v}_{P2} = \vec{v}_{P1} + \vec{v}_{P2P1}$ hay $0 = 0 + \vec{v}_{P2P1}$.

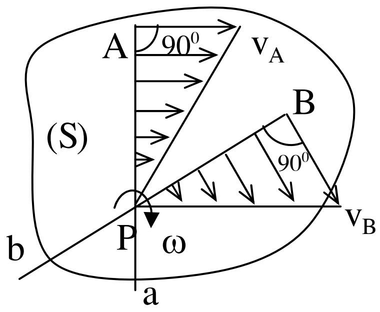
Thay $v_{P2P1} = \omega \cdot P_2P_1$ ta thấy $v_{P2P1} = 0$ khi $\omega = 0$ hoặc $P_2P_1 = 0$. Vì vật chuyển động song phẳng nên $\omega \neq 0$ vậy chỉ có thể $P_2P_1 = 0$. Điều này có nghĩa P_1 trùng với P_2. Không thể có hai tâm vận tốc tức thời khác nhau cùng tồn tại ở một thời điểm.

- Xác định vận tốc trên vật chuyển động song phẳng theo tâm vận tốc tức thời P.

Xét vật chuyển động song phẳng có vận tốc góc ω và tâm vận tốc tức thời P. Theo biểu thức (8-2) nếu lấy P làm tâm cực ta viết biểu thức vận tốc của điểm M như sau :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP}$$

Thay $v_P = 0$ ta có : $\vec{v}_M = \vec{v}_{MP}$



Hình 8.9

Như vậy vận tốc tức thời của điểm M được tính như vận tốc của điểm M trong chuyển động của vật quay tức thời quanh tâm vận tốc tức thời P.

$\vec{v}_M$ có phương vuông góc với PM, hướng theo chiều quay vòng của ω quanh P, có độ lớn $v_M = PM \cdot \omega$

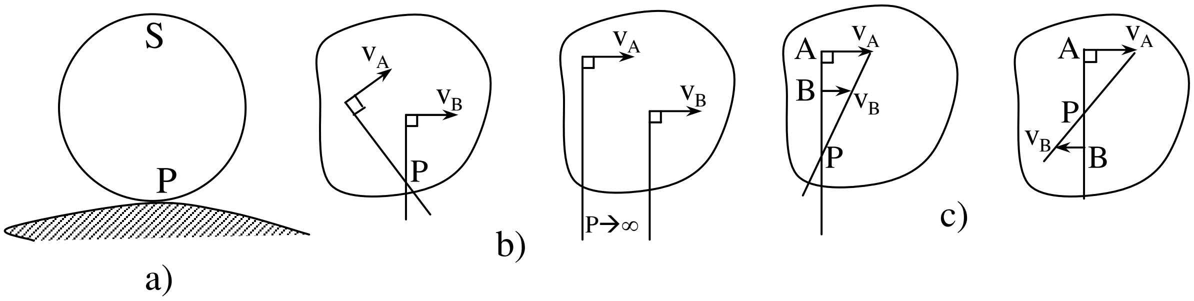
Ta có kết luận : vận tốc của điểm bất kỳ trên vật chuyển động song phẳng luôn luôn hướng vuông góc và tỷ lệ thuận với khoảng cách từ tâm vận tốc tức thời đến điểm. Quy luật phân bố vận tốc các điểm biểu diễn trên hình (8-9.). Trong thực hành có thể xác định tâm vận tốc tức thời P theo một số trường hợp sau :

<u>Trường hợp 1</u> : Vật chuyển động lăn không trượt trên một đường thẳng hay đường cong phẳng cố đ ịnh (hình 8-10a) có thể xác định ngay điểm tiếp xúc chính là tâm vận tốc tức thời vì rằng điểm đó có vận tốc bằng không.

<u>Trường hợp 2</u>: Khi biết phương vận tốc hai điểm hay quỹ đạo chuyển động của hai điểm trên vật chuyển động song phẳng thì tâm vận tốc tức thời là giao điểm của hai đường thẳng kẻ vuông góc với hai phương vận tốc hay hai phương tiếp tuyến của quỹ đạo tại hai điểm đó (hình 8-10b). Trong trường hợp này nếu hai đường đó song song với nhau có nghĩa tâm P ở xa vô cùng, ta nói vật tức thời chuyển động tịnh tiến (hình 8-10b).

<u>Trường hợp 3</u>: Khi biết độ lớn và phương chiều vận tốc hai điểm nằm trên cùng một đường thẳng vuông góc với vận tốc hai điểm đó (hình 8-10c), tâm P là

giao điểm của đường thẳng đi qua hai mút véc tơ vận tốc và đường thẳng đi qua hai điểm đó.

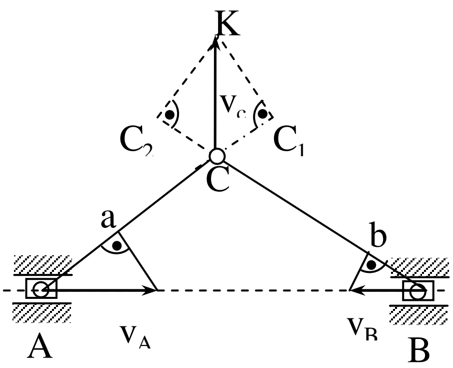


Hình 8.10

<u>Thí du 8.1</u>: Cơ cấu phẳng biểu diễn trên hình (8-11) có vận tốc $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ của hai con trượt A và B đã biết. Xác định vận tốc của khớp C.

<u>Bài giải:</u>

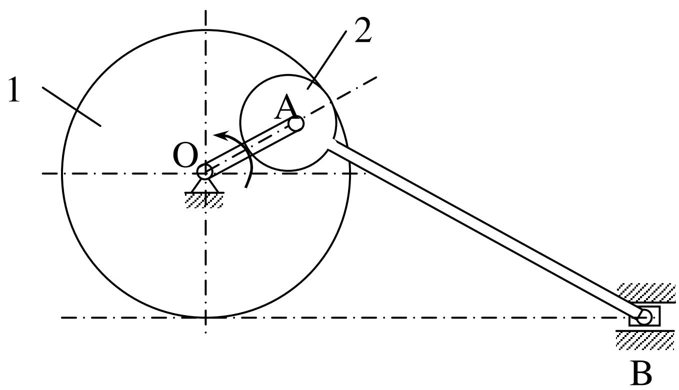
Khi cơ cấu hoạt động thì các thanh biên AC và BC chuyển động song phẳng. Để xác định vận tốc của điểm C ta áp dụng định lý hình chiếu vận tốc cho thanh AC và BC. Vì v_A và v_B đã biết nên dễ dàng xác định được hình chiếu của chúng lên phương AC và BC là $\overrightarrow{Aa}$ và $\overrightarrow{Bb}$.



Hình 8.11

Tại C kéo dài các đoạn thẳng AC và BC, Trên đó lấy các điểm C_1, C_2 với CC_1 = Aa, CC_2 = Bb. Các đoạn này là hình chiéu của V_C lên hai phương AC và BC. Ta vẽ tứ giác vuông góc tại C_1 và C_2 (hình 8-11) đường chéo CC' của tứ giác đó chính là vận tốc V_C.

<u>Thí du 8-2</u> : Tay quay OA quay quanh trục O với vận tốc góc không đổi n =60 vòng / phút và dẫn động cho thanh biên AB gắn với bánh xe 2 (hình 8-12). Bánh xe 2 truyền chuyển động cho bánh xe



Hình 8.12

1 không gắn với tay quay OA nhưng quay quanh trục O.

Xác định vận tốc con trượt B; Vận tốc góc của bánh xe 1 tại thời điểm khi tay quay OA song song và vuông góc với phương ngang.

Cho biết cơ cấu cùng nằm trong một mặt phẳng và $r_1 = 50$ cm ; $r_2 = 20$ cm; AB = 130 cm.

Bài giải :

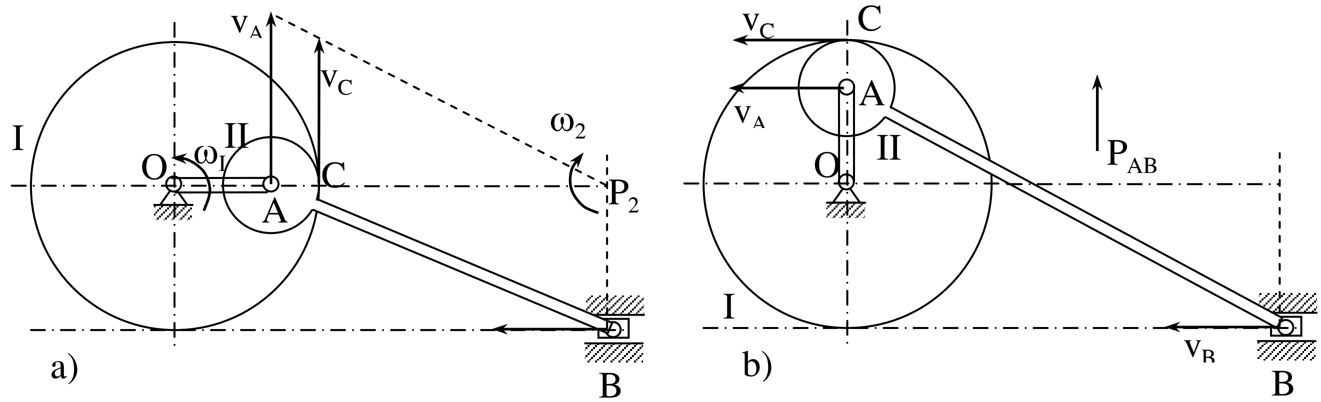
Cơ cấu có 5 khâu : bánh xe 1 chuyển động quay quanh trục O; con trượt B chuyển động tịnh tiến theo phương ngang; Thanh AB chuyển động song song phẳng; Bánh xe 2 chuyển động song phẳng; tay quay OA chuyển động quay quanh O.

1) Xét trường hợp tay quay OA ở vị trí song song với phương ngang (hình 8-12a).

Vận tốc góc thanh OA là : $\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{60\pi}{30} = 2\pi 1/s$.

Vận tốc điểm A : v_A =OA . ω = 2π . (r_1 - r_2) = 60π = 188,5 cm / s.

Trên thanh AB có phương vận tốc hai điểm A và B đã biết nên xác định được tâm vận tốc tức thời P_1 (hình 8-12a).



Hình 8.12

Từ hình vẽ xác định được :

$P_2B = r_1 = 50cm$

$$P_2A = \sqrt{AB^2 - P_{AB}B^2} = \sqrt{130^2 + 50^2} = 120cm$$

$P_2C = P_{AB} - r_2 = 120 - 20 = 100cm$

Xác định vận tốc của các điểm A, B, C theo tâm vận tốc tức thời P_2 và vận tốc ω_1 của thanh AB ta có ;

$V_A = \omega_2 \cdot P_2A;$

$V_B = \omega_2 \cdot P_2B;$

$V_c = \omega_2 \cdot P_2C;$

Trong đó : $\omega_2 = \dfrac{V_A}{P_2A} = \dfrac{60\pi}{120} = \dfrac{\pi}{2}(1/s)$

Thay vào các biểu thức của V_B và V_C ta có :

$$V_B = \frac{\pi}{2}.50 = 25\pi(cm/s)$$

$$V_C = \frac{\pi}{2}.100 = 50\pi(cm/s)$$

Vì bánh xe 2 ăn khớp với bánh xe 1 nên vận tốc điểm C còn có thể xác định theo công thức :

$V_C = \omega_1 \cdot r_1$ suy ra : $\omega_1 = \dfrac{V_C}{r_1} = \pi$ (1/s)

2) Tay quay OA ở vị trí thẳng đứng (hình 8-12b).

Tại vị trí này vận tốc hai điểm A và B song song với nhau vì thế theo định lý hình chiếu ta có : $V_A\cos\alpha = V_B\cos\alpha$ suy ra $\vec{V}_A = \vec{V}_B$. Thanh AB tức thời chuyển động tịnh tiến. Mọi điểm trên nó và bánh xe 2 gắn với nó có chuyển động như nhau. Ta có :

$$V_B = V_C = V_A = \frac{60\pi}{50} = 188{,}5(cm/s).$$

Phương chiều của các vận tốc biểu diễn trên hình vẽ .

Vận tốc góc của bánh xe 1 dễ dàng tìm được :

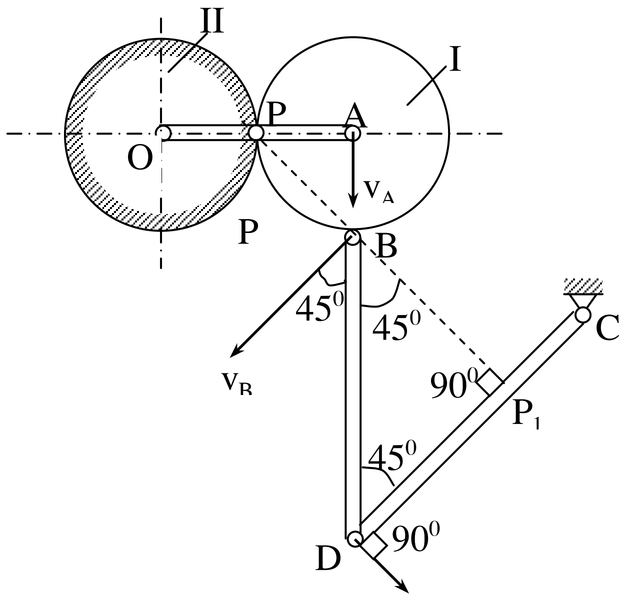
$$\omega_r = \frac{v_c}{r_1} = \frac{60\pi}{50} = \frac{6}{5}\pi \qquad \text{(rad/s)}$$

<u>Thí du 8-3</u>: tay quay OA quay quanh O với vận tốc góc ω_{oA}, truyền chuyển động cho bánh răng I ăn khớp với bánh răng II cố định. Hai bánh răng có bán kính như nhau và bằng R. Thanh truyền BD có đầu B liên kết với bánh xe I bằng khớp bản lề còn đầu D nối bằng khớp bản lề với tay quay CD (hình 8-13).

Xác định vận tốc góc của thanh truyền BD tại thời điểm có góc BDC = 45^0. Cho BD = 1 (cm).

<u>Bài giải</u> :

Trong cơ cấu bánh răng I và thanh truyền BD chuyển động song phẳng. Bánh răng 1 có tâm vận tốc tức thời P. Vận tốc điểm A được tính như sau :



Hình 8.13

$$V_A = \omega_{OA} . 2R.$$

$\vec{V}_A$ hướng vuông góc với OA theo chiều quay vòng của ω_{OA}. Suy ra vận tốc góc của bánh răng 1 :

$$\omega_1 = \frac{V_A}{R} = \frac{2R.\omega_{OA}}{R} = 2\omega_{OA}.$$

Vận tốc điểm B có độ lớn :

$$V_B = PB.\omega 1 = \sqrt{2}R.\omega_1 = 2\sqrt{2}R\omega_{OA}.$$

V_B Có phương vuông góc với với PB có chiều theo chiều quay của bánh răng 1 quanh P (hình vẽ 8-13).

Thanh BD chuyển động song phẳng, Đầu B có vận tốc đã xác định, đầu D có phương vận tốc vuông góc với CD do đó nhận được tâm vận tốc thức thời P_1 như trên hình vẽ .

Trên hình ta có $P_1B = \dfrac{1\sqrt{2}}{2}$. Vận tốc điểm B được xác định theo P_1:

$$V_B = P_1.B.\omega_{BD} \qquad \text{suy ra}: \omega_{BD} = \frac{V_B}{P_1B} = 4.\frac{R}{1}\omega_{OA}$$

Chiều quay của ω_{BD} như hình vẽ.

8.2.3. Gia tốc của điểm

8.2.3.1. Định lý 8-3 : Gia tốc của điểm M bất kỳ thuộc tiết diện (S) chuyển động song phẳng, bằng tổng hình học gia tốc của tâm cực A và gia tốc của điểm M trong chuyển động của tiết diện quay quanh A (hình 8-14).

$$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}_{MA} \qquad (8\text{-}4)$$

Trong đó : $\vec{w}_{MA} = \vec{w}^{\tau}_{MA} + \vec{w}^{n}_{MA}$

Với : $W^{\tau}_{MA} = \varepsilon.AM$ và $W^{n}_{MA} = \omega^2.AM$

Chứng minh định lý :

Đạo hàm bậc hai theo thời gian phương trình chuyển động (8-2) ta có :

$$\vec{w}_M = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2}$$

Thay $\dfrac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \vec{w}_A$ còn $\dfrac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}\right) = \vec{w}_{MA}$

$$w_{MA} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\overrightarrow{AM} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \vec{V}_{MA}$$

Với chú ý $\overrightarrow{AM}$ có độ lớn không đổi nên $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} = \vec{V}_{MA}$

Ta có : $\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}$

$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AM}$ là gia tốc pháp tuyến của M trong chuyển động của (S) quay quanh A.

$\vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}$ là gia tốc pháp tuyến của M trong chuyển động của (S) quay quanh A. Ta đã chứng minh được :

$\vec{w}_M = \vec{w}_A + \vec{w}^{\tau}_{MA} + \vec{w}^{n}_{MA}$

Vì các véc tơ ω có phương vuông góc với mặt phẳng của tiết diện nghĩa là vuông góc với AM và $\vec{V}_{MA}$ nên dễ dàng tìm được :

$$W_{MA}{}^{\tau} = AM\,.\,\varepsilon \quad \text{còn} \quad W_{MA}{}^{n} = AM\,.\,\omega^2$$

Suy ra : $w_{MA} = AM.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Véc tơ $\vec{w}_{MA}$ có phương hợp với AM một góc μ với $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ (hình 8.14).

8.2.3.2. Tâm gia tốc tức thời

Điểm trên tiết diện có gia tốc tức thời bằng không gọi là tâm gia tốc tức thời. Ký hiệu tâm gia tốc tức thời là **J** . Ta có : $W_j = 0$.

<u>Định lý 8-4 :</u>

Tại mỗi thời điểm trên tiết diện chuyển động song phẳng luôn tồn tại một và chỉ một tâm gia tốc tức thời J.

Chứng minh tính tồn tại của tâm gia tốc tức thời : giả thiết tiết diện chuyển động song phẳng với vận tốc góc và gia tốc góc là ω và ε. Trên tiết diện có điểm A biết gia tốc W_A (hình 8-15). Xoay W_A theo chiều quay của ε quanh A đi một góc μ với $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$. Dựng nửa đường thẳng Ax theo phương đó.và lấy trên Ax một điểm J cách A một đoạn $AJ = \dfrac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$.

Điểm J đó có gia tốc :

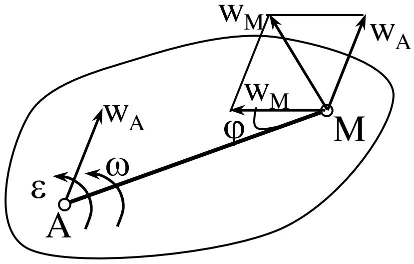
$$\vec{w}_J = \vec{w}_A + \vec{w}_{JA}$$

Trong đó W_{JA} có độ lớn bằng $w_{JA} = AJ.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.'

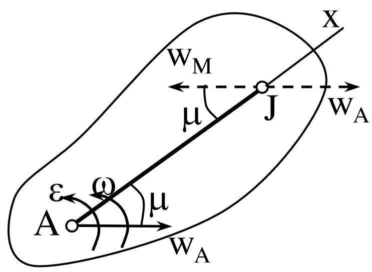
Thay $AJ = \dfrac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$. Ta được : $w_{JA} = \dfrac{w_A\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = w_A$.

$\vec{w}_{JA}$ hợp với AJ một góc μ với $tg\mu = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ hướng theo chiều quay của ε quanh A. Như trên hình vẽ (8-15) ta thấy hai véc tơ gia tốc $\vec{w}_A$ và $\vec{w}_{JA}$ có độ lớn bằng nhau song song và ngược chiều do đó :

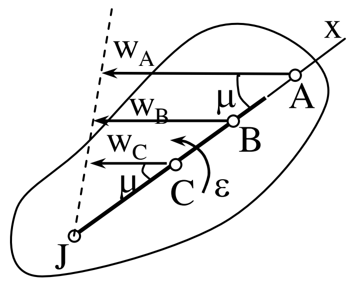
$$\vec{w}_J = \vec{w}_A + \vec{w}_{JA} = 0$$



Hình 8.14



Hình 8.15



Hình 8.16

Điểm J chính là tâm gia tốc tức thời của tiết diện .

Tiếp theo ta chứng minh tính duy nhất của tâm gia tốc tức thời J : giả thiết tại thời điểm trên tiết diện có hai tâm gia tốc tức thời J_1 và J_2.

Khi đó $W_{J1} = 0$ và $W_{J2} = 0$.

Theo biểu thức (4-8) ta có thể viết :

$$\vec{w}_{J2} = \vec{w}_{J1} + \vec{w}_{J2J1}.$$

Thay $W_{J1} = 0$ và $W_{J2} = 0$ vào biểu thức trên ta được $W_{J2J1} = 0$.

Vì $w_{J2J1} = J_2J_1\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ trong đó $\varepsilon \neq 0$ $\omega \neq 0$

nên W_{J2J1} chỉ có thể bằng không khi $J_2J_1 = 0$ nghĩa là J_2 trùng với J_1. Không thể có hai tâm gia tốc cùng một thời điểm trên tiết diện chuyển động phẳng.

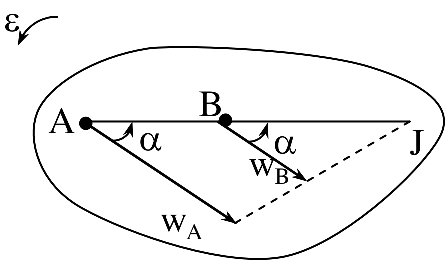
Nếu trên tiết diện có một tâm gia tốc tức thời J và chọn J là tâm cực thì gia tốc của điểm M trên tiết diện có thể xác định theo biểu thức :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_J + \vec{w}_{MJ}.$$

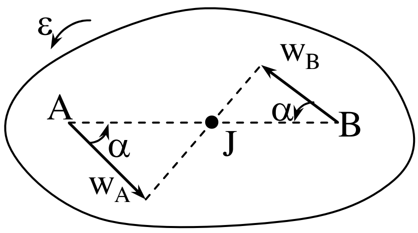
Vì $w_J = 0$ nên có thể viết :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_{MJ} = \vec{w}^{\tau}_{MJ} + \vec{w}^{n}_{MJ}.$$

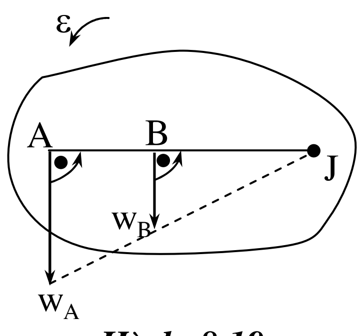
Về trị số $w_M = MJ.\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$ có phương hợp với MJ một góc μ với $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ theo chiều quay của ε quanh J (hình 8-16). Như vậy ta nhận thấy gia tốc của các điểm trên tiết diện chuyển động song phẳng luôn luôn hợp với phương nối từ điểm đến tâm gia tốc tức thời một góc μ có độ lớn tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đến tâm gia tốc tức thời J. Vì các tính chất đó quy luật phân bố gia tốc các điểm trên tiết diện biểu diễn như trên hình (8-16). Cũng từ các tính chất trên có thể xác định tâm gia tốc tức thời trong một số trường hợp biểu diễn trên các hình (8-17), (8-18) , (8-19), (8-20), (8-21), (8-22).



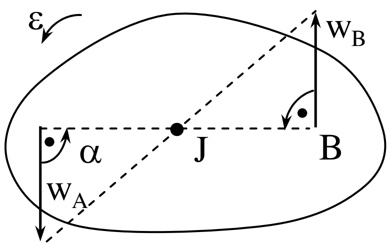
Hình 8.17



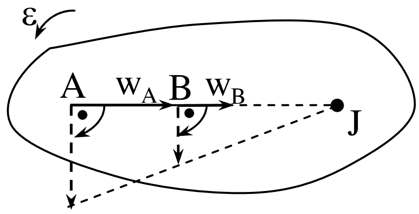
Hình 8.18



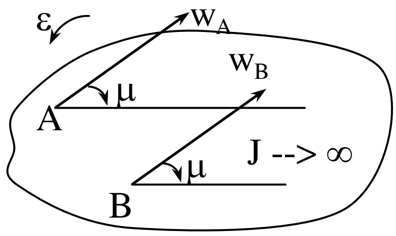
Hình 8.19



Hình 8.20



Hình 8.21



Hình 8.22

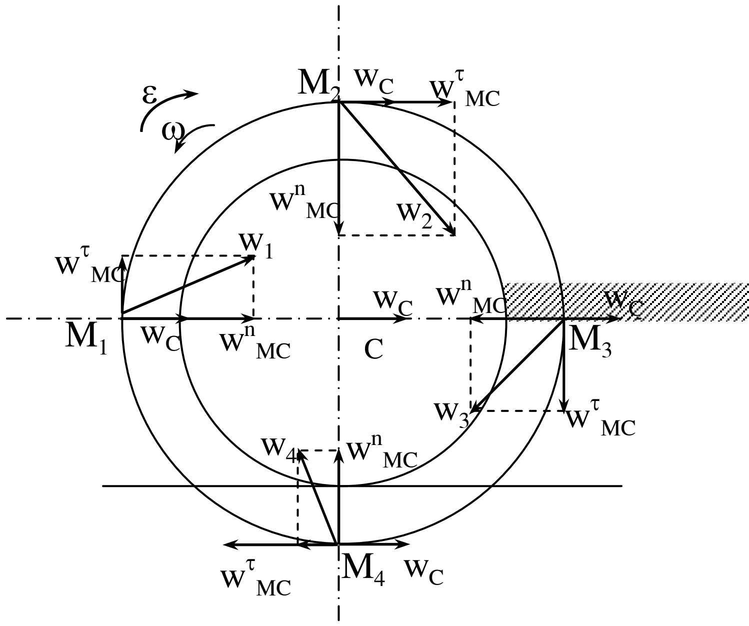
Trên hình (8-17) và (8-18) khi $0<\mu<90^0; \omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$

Trên hình (8-19) và (8-20) khi $\mu=90^0; \omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$

Trên hình (8-21) và (8-22) khi $\mu = 0; \omega \neq 0, \varepsilon = 0$

Trên hình (8-23) $\vec{w}_A = \vec{w}_B$.

<u>Thí du 8-4</u> : Bánh xe tầu hoả, bán kính vành ngoài R bán kính vành lăn là r lăn không trượt trên ray thẳng. Cho biết vận tốc và gia tốc của tầu là Vc = 0,4 m/s và W_C = 0,2 m/s^2. Xác định gia tốc của các điểm M_1, M_2, M_3, M_4 trên vành ngoài của bánh xe tại thời điểm đang xét như hình (8-23). Biết r = 40cm, R = 50cm.



Hình 8.23

<u>Bài giải</u> :

Bánh xe chuyển động song phẳng đã biết vận tốc và gia tốc tâm C.

Trước hết xác định vận tốc góc và gia tốc góc của bánh xe.

Có thể xác định vận tốc góc theo v_C. Vì tâm vận tốc tức thời là điểm tiếp xúc giữa bánh xe với đường ray nên có :

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{r} = \frac{0,4}{0,4} = 1(rad/s).$$

Gia tốc góc :

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_C}{r}\right) = \frac{1}{r}.\frac{dv_C}{dt} = \frac{w_C}{r} = \frac{0,2}{0,4} = 0,59(rad/s^2)$$

Xác định gia tốc các điểm M theo biểu thức :

$$\vec{w}_M = \vec{w}_C + \vec{w}^r_{MC} + \vec{w}^n_{MC} \text{ ở đây nhận tâm C là tâm cực.}$$

Các véc tơ $\vec{w}^r_{MC}, \vec{w}^n_{MC}$ của các điểm có trị số như nhau, chỉ khác nhau về phương chiều.

Về độ lớn ta có : $W_{MC}{}^{\tau}$ = CM.ε = R.ε =0,5.0,5 = 0,25 m/s^2;

$W_{MC}{}^{n}$ = CM.ω^2 = R.ω^2 = 0,5.1^2 = 0,5 m/s^2;

Phương chiều các véc tơ này ở các điểm biểu diễn trên hình vẽ. Căn cứ vào hình vẽ và trị số đã thu được ta có thể tính gia tốc các điểm M_1, M_2, M_3, M_4 như sau :

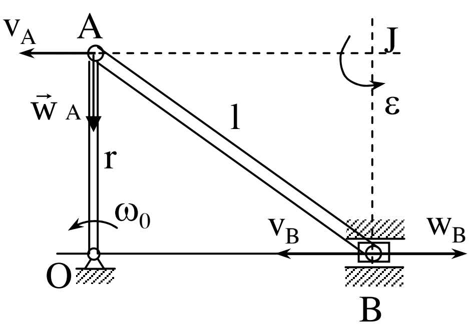
$$w_1 = \sqrt{\left(w_C + w^n_{MC}\right)^2 + w^{\tau\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,2+0,5)^2 + 0,25^2} = 0,74m/s^2$$

$$w_2 = \sqrt{\left(w_C + w^{\tau}_{MC}\right)^2 + w^{n\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,2+0,25)^2 + 0,5^2} = 0,67m/s^2$$

$$w_3 = \sqrt{\left(w^n_{CM} + w_C\right)^2 + w^{\tau\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,5+0,2)^2 + 0,25^2} = 0,39m/s^2$$

$$w_4 = \sqrt{\left(w^{\tau}_{CM} + w_C\right)^2 + w^{n\ 2}_{MC}} = \sqrt{(0,25+0,2)^2 + 0,5^2} = 0,50m/s^2$$

Thí du 8-5 : Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_{OA}. Tìm gia tốc của con trượt B và gia tốc góc của thanh AB trên cơ cấu hình vẽ (8-24). Cho biết tại thời điểm khảo sát góc BOA = 90^0 ; độ dài OA = r ; AB = 1.



Hình 8.24

Bài giải :

Tại vị trí khảo sát có :$v_A = v_B$

Thanh AB tức thời chuyển động tịnh tiến: $\omega_{AB} = 0$

Gia tốc điểm A bằng : $W_A = W_A{}^n = r\omega_0{}^2$ có phương chiều hướng từ A vào O.

Gia tốc điểm B luôn có phương nằm ngang.

Để xác định tâm gia tốc tức thời ta xác định góc μ:

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} = \infty \qquad \text{do đó } \mu = 90^0$$

Dễ dàng tìm được tâm gia tốc tức thời của thanh AB là giao điểm của hai đường thẳng hạ vuông góc với phương W_A và W_B tại A và B.

Vì $\omega_{AB} = 0$ nên có thể viết : $W_A = JA.\varepsilon_{AB}$; $W_B = JB.\varepsilon_{AB}$

Suy ra : $\frac{w_A}{JA} = \frac{w_B}{JB}$,

Ở đây JB = r còn $JA = \sqrt{l^2 - r^2}$ nên $w_B = \frac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}}.\omega^2 rad/s^2$

Phương của $\vec{w}_B$ theo phương ngang, chiều hướng theo chiều quay vòng của ε_{AB} quanh J như hình vẽ.

Từ biểu thức : $W_A = JA.\varepsilon_{AB}$ suy ra $\varepsilon_{AB} = \frac{w_A}{JA} = \frac{w_A}{\sqrt{l^2 - r^2}}.\omega^2 rad/s^2$

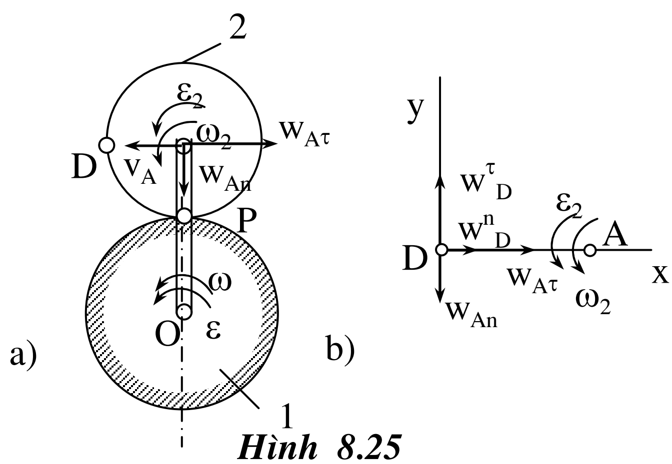
Thay $W_A = r.\omega_0^2$ ta được : $\varepsilon_{AB} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}.\omega^2 rad/s^2$

Thí du 8-6 : Cho cơ cấu gồm hai bánh răng ăn khớp với nhau. Bánh răng 1 bán kính r_1 = 0,3 m cố định; Bánh răng 2 bán kính r_2 = 0,2 m lăn trên vành bánh răng 1 và nhận chuyển động từ tay quay OA quay với vận tốc góc là ω_{OA} và gia tốc góc ε_{OA} (hình 8-25a).

Xác định gia tốc điểm D trên vành bánh răng 2 tại thời điểm có ;

ω_{OA} =1 rad/s^2

và ε_{OA} = =4 rad/s^2.



Hình 8.25

Bài giải : Bánh răng 2 chuyển động song phẳng. Vận tốc và gia tốc của tâm A được xác định :

$v_A = OA.\omega_{OA} = 0,5$ m/s ;

$W_A^{\tau} = OA.\varepsilon_{OA} = -2$ m/s^2; $W_A^{n} = OA.\omega^2 = 0,5$ m/s^2.

Ta có thể xác định được vận tốc góc ω_2 của bánh răng 2 :

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5 rad/s$$

Chiều quay của ω_2 như hình vẽ (8-25).

Gia tốc góc ε_2 của bánh răng 2 được xác định theo biểu thức :

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r^2}.\frac{dv_A}{dt} = \frac{w_a^{\tau}}{r_2} = \frac{-2}{0,2} = -10 rad/s^2$$

Điều này chứng tỏ bánh răng 2 chuyển động chậm dần, chiều của ε_2 ngược chiều với ω_2.

Gia tốc điểm D có thể viết :

$$\vec{w}_D = \vec{w}_A^{\tau} + \vec{w}_A^{n} + \vec{w}_{DA}^{\tau} + \vec{w}_{DA}^{n} \quad \text{(a)}$$

Tại thời điểm khảo sát có :

$W_{DA}^{\tau} = DA.\varepsilon_2 = r_2\varepsilon_2 = 0,2.(10) = 2$ m/s^2;

$W_{DA}^{n} = DA.\omega_2 = r_2\omega_2^2 = 0,2.(2,5)^2 = 1,25$ m/s^2.

Chiếu hai vế đẳng thức (a) lên hai trục Dx và Dy (hình 8-25b) ta được :

$W_{Dx} = W_A^{\tau} + W_{DA}^{n} = 2 + 1,25 = 3,25$ m/s^2;

$W_{Dy} = W_{DA}^{\tau} - W_A^{n} = 2 - 0,5 = 1,5$ m/s^2.

Suy ra : $$w_D = \sqrt{w_{Dx}^2 + w_{Dy}^2} = \sqrt{3,25^2 + 1,5^2} \approx 3,58 m/s^2$$

Chương 9

CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH - CHUYỂN ĐỘNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN

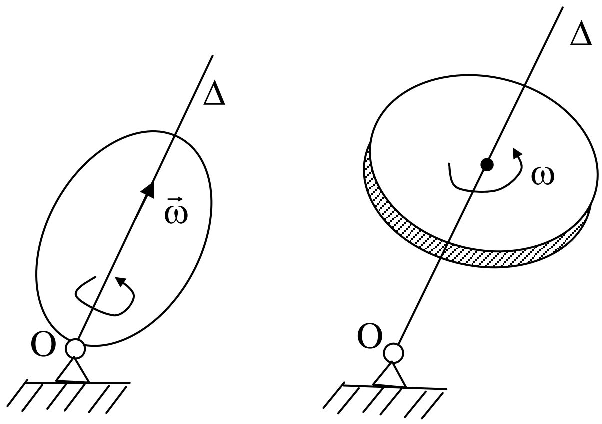
9.1. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

9.1.1 Định nghĩa

Chuyển động của vật rắn có một điểm luôn luôn cố định được gọi là chuyển động quay quanh một điểm cố định

<u>Thí du</u>: Con quay tại chỗ, bánh xe ôtô chuyển động khi ôtô lái trên đường vòng; cánh quạt của máy bay khi máy bay lượn vòng .v

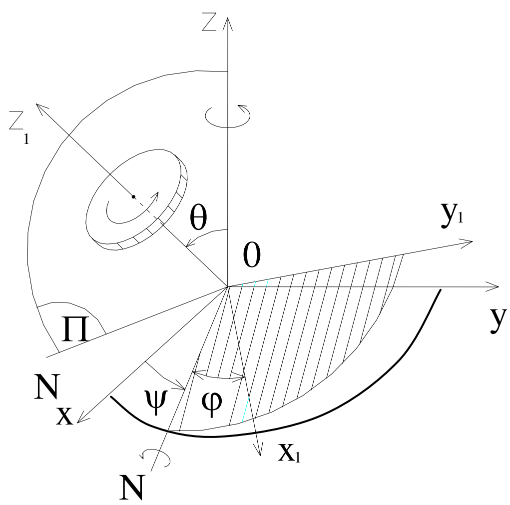
Mô hình nghiên cứu vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định biểu diễn trên hình 9.1.



Hình 9 - 1

9.1.2 Thông số định vị.

Vật rắn quay quanh một điểm cố định có thể biểu diễn bằng tiết diện(S) của vật quay quanh điểm O (hình 9.2). Tiết diện này không đi qua điểm cố định O và chuyển động trong hệ toạ độ cố định Oxyz. Để xác định thông số định vị của vật ta dựng trục oz, vuông góc với tiết diện (S). Dựng mặt phẳng π chứa hai trục oz và oz_1 . Mặt phẳng này cắt mặt phẳng oxy theo đường OD. Vẽ đường thẳng ON vuông góc với mặt



Hình 9-2

phẳng π khi đó có góc DON = $\frac{\pi}{2}$. Đường ON nằm trong mặt phẳng Oxy và gọi là đường mút.

Để xác định vị trí của vật trong hệ toạ độ oxyz trước hết phải xác định được vị trí của trục oz_1, nghĩa là phải xác định được các góc θ và α. Tiếp theo phải xác định được vị trí của vật so với trục oz_1 nghĩa là phải xác định được vị trí của nó so với mặt phẳng ONz_1, nhờ góc φ= NIA. Như vậy ta có thể chọn ba góc φ, α và θ là ba thông số định vị của vật., ở đây góc α còn có thể thay thế bằng góc $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Ba góc φ, ψ, θ gọi là 3 góc Ơle.

Góc φ gọi là góc quay riêng; góc ψ gọi là góc tiến động và góc θ gọi là góc chương động.

9.1.2.2. Phương trình chuyển động

Trong qúa trình chuyển động của vật các góc ơle thay đổi theo thời gian vì thế phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định có dạng:

$$\varphi = \varphi(t).$$

$$\psi = \psi(t). \qquad (9.1)$$

$$\theta = \theta(t).$$

Căn cứ vào kết quả trên có thể phát biểu các hệ quả về sự tổng hợp và phân tích chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định như sau:

<u>Hệ quả 9. 1</u>: Chuyển động của vật rắn quay quanh 1 điểm cố định bao giờ cũng có thể phân tích thành ba chuyển động quay thành phần quanh ba trục giao nhau tại điểm cố định O. Các chuyển động đó là: chuyển động quau riêng quanh trục Oz_1 với phương trình $\varphi = \varphi(t)$; Chuyển động quay chương động quanh trục ON với phương trình $\theta = \theta(t)$ và chuyển động quay tiến động quanh trục Oz với phương trình $\psi = \psi(t)$.

Hệ quả 9.2: Tổng hợp hai hay nhiều chuyển động quay quanh các trục giao nhau tại một điểm là một chuyển động quay quanh một điểm cố định đó.

9.1.2.3. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật.

- Vận tốc góc.

Gọi vận tốc góc của các chuyển động quay riêng, quay tiến động và quay chương động lần lượt là ϖ_1, ϖ_2 và ϖ_3 ta có:

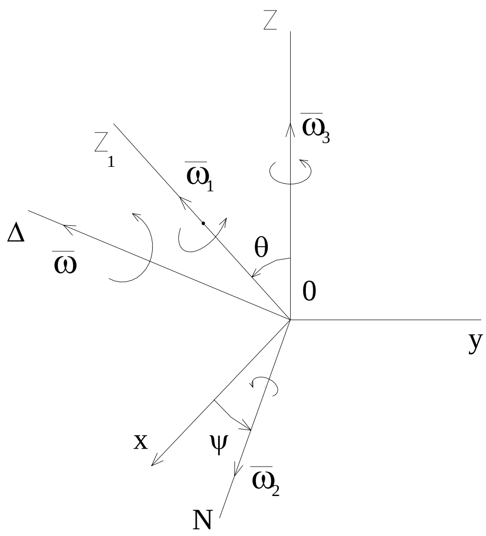
$\varpi_1 = \dot{\varphi}$; $\varpi_2 = \dot{\psi}$; $\varpi_3 = \dot{\theta}$

Theo hệ quả 9.2 dễ dàng suy ra vận tốc góc tổng hợp ϖ của vật

$$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 \qquad (9.2).$$

Vì các vectơ ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 thay đổi theo thời gian nên ϖ cũng là vectơ thay đổi theo thời gian cả về độ lớn lẫn phương chiều.

Như vậy vectơ ϖ là vectơ vận tốc góc tức thời Tại một thời điểm có thể xem chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định như là một chuyển động quay tức thời với vận tốc góc ϖ quanh trục quay tức thời Δ đi qua một điểm cố định O.(hình 9.3).

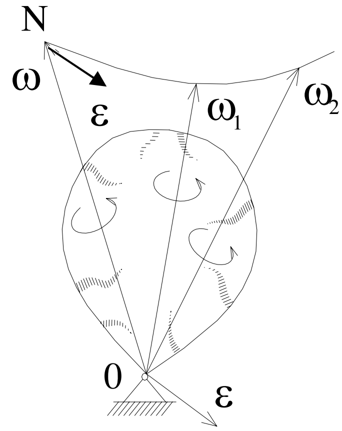


Hình 9-3

- Gia tốc góc:

Gọi gia tốc góc tuyệt đối $\bar{\varepsilon}$ của vật được xác định bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của véc tơ $\vec{\omega}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\vec{\omega} = \dot{\overline{\omega}} \qquad (9.3)$$



Hình 9-4

Về phương diện hình học có thể xác định véc tơ $\vec{\varepsilon}$ như là véc tơ vận tốc của điểm đầu N véc tơ vận tốc góc $\overline{\omega}$ (hình 9.4).

Xét trường hợp đặc biệt chuyển động quay tiến động đều.

Chuyển động của vật rắn quay quanh 1 điểm cố định có chuyển động quay riêng và chuyển động quay tiến động là đều còn chuyển động quay chương động không có , nghĩa là ϖ_1 = const ; ϖ_2 = const; $\varpi_3 = 0$

Trường hợp đặc biệt này gọi là chuyển động quay tiến động đều.

Trong trường hợp chuyển động quay tiến động đều vận tốc góc được xác định:

$$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2 = \varpi_r + \varpi_e \qquad (9.4)$$

Và gia tốc góc:

$\varepsilon = V_N$ với N là điểm mút của ϖ.

Nhưng ở đây theo hình vẽ 9.4 hình bình hành vận tốc góc được gắn với mặt phẳng π (Oz và Oz_1) và quay quanh Oz với vận tốc ϖ_2(ϖ_e).

Do đó :

$$V_N = \varpi_e \times ON = \varpi_e \times \varpi = \varpi_e \times (\varpi_e \times \varpi_r) = \varpi_e \times \varpi_r$$

nghĩa là trong trường hợp chuyển động quay tiến động đều thì:

$$\varepsilon = \varpi_e \times \varpi_r = \varpi_2 \times \varpi \qquad (9.5).$$

9.1.3. Khảo sát chuyển động của một điểm trên vật

9.1.3.1. Quỹ đạo chuyển động của điểm

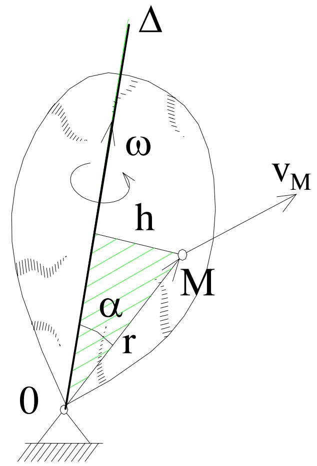
Khi vật chuyển động, vì mọi điểm có khoảng cách tới điểm O cố định là không đổi vì thế quỹ đạo của chúng luôn nằm trên một mặt cầu có tâm là O và bán kính bằng khoảng cách từ điểm khảo sát tới điểm cố định O. Chính vì thế người ta còn gọi chuyển động quay của một vật quanh một điểm cố định là chuyển động cầu.

9.1.3.2. Vận tốc của điểm

Xét điểm M trên vật. Tại một thời điểm vật có chuyển động quay tức thời với vận tốc góc $\vec{\omega}$ quanh trục quay thức thời Δ đi qua O vì thế vận tốc của điểm M có thể xác định theo biểu thức:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad (9.6)$$

Véc tơ $\vec{V}_M$ hướng vuông góc với mặt phẳng chứa trục Δ và điểm M và có độ lớn $V_M = \omega.h$. Trong đó h là khoảng cách từ điểm khảo sát M đến trục quay tức thời Δ (hình 9.5).



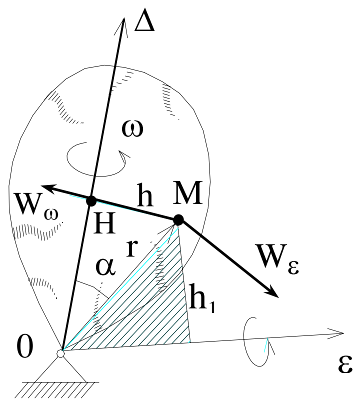
Hình 9-5

9.1.3.3. Gia tốc của điểm

Gia tốc của điểm M trên vật rắn quay quanh một điểm cố định được xác định như sau:

$$\overline{W}_M = \frac{d}{dt}\overline{V}_M = \frac{d}{dt}.\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}\right)$$

$$= \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{OM}$$



Hình 9-6

$= \vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{\varepsilon}_M \times \overrightarrow{OM}$

Đặt $\vec{\omega} \times \overline{V}_M = \overrightarrow{W_{\omega M}}$ và $\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{W_{\varepsilon M}}$

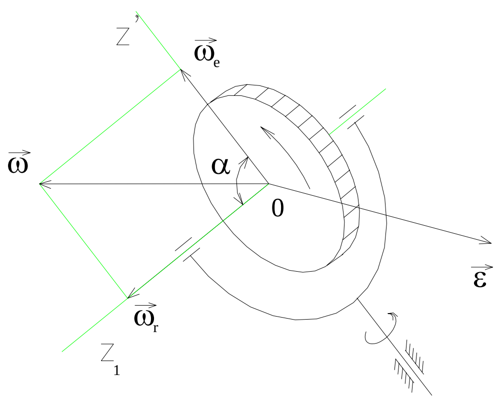
Cuối cùng ta được :

$$\overline{W}_M = \overline{W}_{\omega M} + \overline{W}_{\varepsilon M} \qquad (9.7)$$

Trong đó: $\overline{W}_{\omega M}$ hướng từ M về H và có độ lớn $W_{\omega M} = h.\omega^2$; $\overline{W}_{\varepsilon M}$ hướng vuông góc với mặt phẳng chứa véc tơ $\vec{\varepsilon}$ và điểm M có độ lớn $W_{\varepsilon M} = h_1.\ \varepsilon$. Với h1 là khoảng cách từ điểm M tới véctơ $\overline{\varepsilon}$.

Chú ý: Về hình thức các véc tơ $W_{\omega M}$ và $W_{\varepsilon M}$ giống như gia tốc pháp tuyến $\overline{W}_{nM}$ và gia tốc tiếp tuyến $\overline{W}_{\tau M}$ của điểm M khi nó quay quanh trục Δ cố định nhưng thực chất là chúng khác nhau vì ở đây hai véc tơ $\overline{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ không trùng phương như trong chuyển động quay quanh một trục cố định.

<u>Thí du 9.1</u>: Khảo sát chuyển động quay tiến động đều của con quay có hai bậc tự do cho trên hình vẽ (hình 9 -7). Cho biết chuyển động quay tương đối của con quay quanh trục Oz, có vận tốc góc $\overline{\omega}_r = 200\pi.\frac{1}{s}$ và chuyển động quay kéo theo của trục Oz_1 quanh trục Oz có vận tốc góc $\omega_C = 2\ \pi\frac{1}{S}$. Hai trục Oz và Oz_1 hợp với nhau một góc $\alpha = 30^0$. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của con quay.



Hình 9-7

<u>*Bài giải:*</u>

Chuyển động của con quay là tổng hợp của 2 chuyển đổng tương đối và kéo theo . Hai chuyển động này là các chuyển động quay quanh hai trục cắt nhau tại một điểm O cố định. Như vậy chuyển động của con quay là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Ở đây chuyển động tương đối với vận tốc góc ω_r là chuyển động quay riêng $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_r$; còn chuyển động kéo theo với vận tốc ϖ là chuyển động quay tiến động còn $\overline{\omega}_3 = 0$. Con quay thực hiện chuyển động quay tiến động đều .

Theo (9.4) ta có vận tốc góc tuyệt đối $\overline{\omega} = \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_e$

Véc tơ $\vec{\omega}$ được biểu diễn bằng đường chéo hình bình hành mà hai cạnh là $\overline{\omega}_r$ và $\overline{\omega}_e$.

Vì $\overline{\omega}_r$ hợp với $\overline{\omega}_e$ một góc 30 độ do đó dễ dàng tìm được:

$$\omega^2 = \omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e.\omega_r.\cos 30^0$$

hay: $\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e.\omega_r.\cos 30^0}$

- Thay số ta được $\omega = 202\ \pi\ \dfrac{1}{S}$.

Gia tốc góc tuyệt đối $\overline{\varepsilon}$ được xác định theo (9.5).

$$\vec{\varepsilon} = \vec{V}_N = \overline{\omega}_e \times \overline{ON} = \overline{\omega}_e \times \omega_r$$

$$= \overline{\omega}_e \times (\overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r) = \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r$$

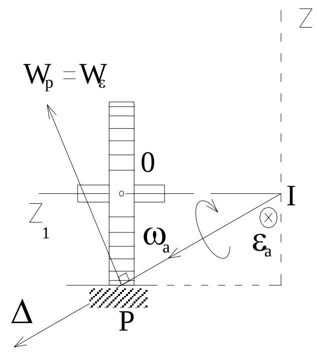
Véc tơ $\overline{\varepsilon}$ hướng vuông góc với mặt phẳng Ozz_1 như hình vẽ và có giá trị:

$$\varepsilon = \omega_e.\omega_r \sin 30^0 = 200\ \pi^2.\frac{1}{S^2}$$

Thí du 9.2: Khảo sát chuyển động của bánh xe ôtô khi nó chuyển động đều trên đường tròn bán kính R =10m.

Cho biết bán kính bánh xe r = 0,5m; vận tốc tâm bánh xe (vận tốc ôtô) là V_0 = 36 km/h.

Xác định vận tốc góc, gia tốc góc



Hình 9-8

tuyệt đối của bánh xe và vận tốc, gia tốc của điểm P trên vành bánh xe (hình 9.8).

<u>Bài giải</u>**:**

Chuyển động của bánh xe được hợp thành từ hai chuyển động thành phần: Chuyển động quay của bánh xe quanh trục Oz của nó với vận tốc góc $\overline{\omega}_1$ và chuyển động của trục bánh xe Oz_1 quay quanh trục Oz thẳng đứng với vận tốc góc $\overline{\omega}_2$. Hai trục z và z_1 giao nhau tại điểm cố định I vì thế có thể nói chuyển đông tổng hợp của bánh xe là chuyển động quay quanh một điểm I cố định. Trong trường hợp này $\overline{\omega}_1$ là vận tốc góc của chuyển động quay riêng, $\overline{\omega}_2$ là vận tốc góc của chuyển động quay tiến động. Chuyển động quay chương động có vận tốc bằng không.

- Xác định vận tốc góc tuyệt đối $\vec{\omega}$ của bánh xe. Theo công thức (9.2) ta có:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

Vì hai trục quay Iz và Iz_1 luôn luôn vuông góc do đó: $\vec{\omega}_1$ vuông góc $\vec{\omega}_2$.

Mặt khác vì bánh xe lăn không trượt trên đường nên vận tốc điểm P là $V_P=0$.

Suy ra đường IP chính là trục quay tức thời của bánh xe. Căn cứ vào hình vẽ xác định được $\omega_1 = \omega_2.\text{cotg}\alpha$.

Trong đó: $\omega_2 = \dfrac{V_0}{R}$ và $\text{tg}\alpha = \dfrac{r}{R}$.

Và $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$

Thay số tìm được: $\omega_1 = 20$ (1/s), $\omega_2 = 1$ (1/s) và $\omega = 20$ (1/s).

Chuyển động của bánh xe là chuyển động tiến động đều do đó xác định gia tốc góc tuyệt đối.như sau:

$$\vec{\varepsilon} = \overline{V}_N = \vec{\omega}_2 \times \overline{IN} = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1$$

Về trị số: $\varepsilon = \omega_2\ \omega_1 \sin\frac{\overline{u}}{2} = 20\ \ 1/s^2$ hướng vào trong và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ.

- Xác định vận tốc điểm P

Do P nằm trên trục quay tức thời nên vận tốc của nó $V_p = 0$.

- Xác định gia tốc điểm P

Theo (9.7) $\overline{W}_P = \overline{W}_{\omega P} + \overline{W}_{\varepsilon P}$

Vì P nằm trên trục quay tức thời nên $\overline{W}_{\omega P} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = 0$

Còn $\overline{\omega}_{\varepsilon P}$ hướng vuông góc với mặt phẳng chứa véc tơ $\vec{\varepsilon}$ vào điểm P như hình vẽ với trị số:

$W_{\varepsilon P} = IP.\ \varepsilon = 10.20 = 200\ m/s^2$.

9.2. CHUYỂN ĐỘNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN (CHUYỂN ĐỘNG TỰ DO CỦA VẬT RẮN)

9.2.1. Phương trình chuyển động

Khảo sát vật rắn chuyển động tự do trong hệ trục toạ độ cố định Oxyz. Để thiết lập phương trình chuyển động của vật ta chọn một điểm A bất kỳ trên vật làm tâm cực và gắn vào vật hệ trục $Ox_1y_1z_1$ có các trục song song với Ox, Oy, Oz. Khi đó vị trí của vật sẽ được xác định bởi vị trí của hệ $Ax_1y_1z_1$ so với hệ Oxyzvà vi trí của vạt so với hệ di động o x y z. Từ đó suy ra thông số định vị của vật so với hệ Oxyz sẽ là toạ độ x_A, y_A, z_A của điểm A và 3 góc Ơle φ, ψ và θ của vật. Suy ra phương trình chuyển động của vật sẽ là:

$$x_A = x_A(t) \qquad y_A = y_A(t) \qquad z_A = z_A(t)$$
$$\varphi = \varphi(t) \qquad \psi = \psi(t) \qquad \theta = \theta(t) \qquad (9.7)$$

Chuyển động tự do của vật luôn luôn có thể phân tích thành 2 chuyển động:

- Tĩnh tiến theo một tâm cực A

- Chuyển động quay quanh tâm cực A

9.2.2. Vận tốc và gia tốc của cả vật

Vận tốc của cả vật được biểu diễn qua vận tốc của tâm cực A là $\vec{V}_A$ và vận tốc góc tức thời $\overline{\omega}$ của vật quay quanh trục quay tức thời Δ đi qua cực A.

Tương tự gia tốc của vật cũng được biểu diễn bởi gia tốc của tâm cực A là $\vec{w}_A$ và gia tốc góc tức thời ε trong chuyển động quay tức thời quanh trục quay tức thời đi qua A.

9.2.3. Vận tốc và gia tốc của một điểm trên vật

Xét điểm M bất kỳ trên vật rắn chuyển động tự do. Vận tốc của điểm M sẽ được xác định theo biểu thức: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$. (9.8)

Với $\vec{V}_A$ là vận tốc tâm cực A còn $\vec{V}_{MA}$ là vận tốc của điểm M trong chuyển động quay quanh điểm A. Ta có:

$\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}$; $\overline{\omega}$ là vận tốc góc tức thời của vật trong chuyển động quay quanh A.

Tương tự gia tốc của điểm M cũng được xác định theo biể thức:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA} \qquad (9.9)$$

Trong đó: $\overline{W}_{MA} = \overline{W}^{\omega}_{MA} + \overline{W}^{\varepsilon}_{MA}$

Với: $\overline{W}^{\omega}_{MA} = \vec{\omega} \times \vec{V}_{MA}$

$\overline{W}^{\varepsilon}_{MA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{V}_{MA}$

Cuối cùng ta có:

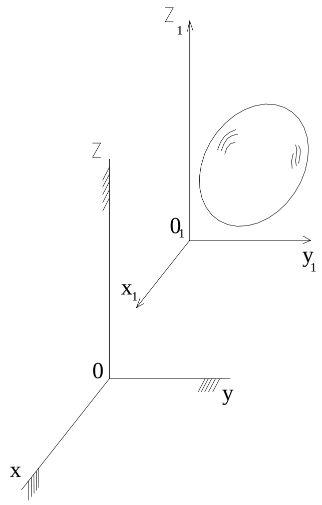
$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}^{\omega}_{MA} + \vec{W}^{\varepsilon}_{MA}. \qquad (9.10)$$

Chương 10

HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

Trong chương này mô hình khảo sát là vật rắn đồng thời tham gia hai chuyển động tương đối so với hệ động $o_1x_1y_1z_1$ và chuyển động kéo theo của hệ động $o_1x_1y_1z_1$ chuyển động so với hệ cố định oxyz (Hình 10.1).

Sau đây sẽ khảo sát chuyển động tổng hợp của các trường hợp thường gặp.



Hình 10-1

10.1. HỢP HAI CHUYỂN ĐỘNG TĨNH TIẾN

Khảo sát vật rắn tham gia hai chuyển động tương đối và kéo theo đều là chuyển động tĩnh tiến.

Do tính chất của chuyển động tĩnh tiến mọi điểm trên vật rắn sẽ có chuyển động tương đối và kéo theo như nhau vì thế chuyển động tuyệt đối của chúng cũng như nhau.

Từ đó đi đến kết luận: Hộp hai chuyển động tĩnh tiến của một vật rắn là một chuyển động tịnh tiến. Vận tốc và gia tốc mọi điểm trong chuyển động tổng hợp được tính bằng tổng hình học các véctơ vận tốc hoặc các vectơ gia tốc của hai chuyển động thành phần.

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \qquad (10.1)$$

$$\overline{W} = \overline{W}_1 + \overline{W}_2 \qquad (10.2)$$

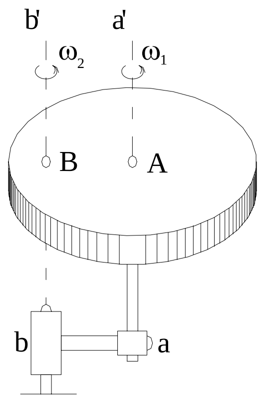
Trong đó: $\vec{V}$ và $\overline{W}$ là vận tốc và gia tốc của chuyển động tĩnh tiến tổng hợp; $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ và $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$ là vận tốc và gia tốc của hai chuyển động tĩnh tiến thành phần.

10.2. HỢP HAI CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH HAI TRỤC

Khảo sát vật rắn đồng thời tham gia hai chuyển động: chuyển động quay tương đối với vận tốc góc là $\vec{\omega}_1$ quanh trục quay Aa và chuyển động quay kéo theo là chuyển động của trục Aa quay quanh trục Bb với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$ .Ta sẽ khảo sát chuyển động tổng hợp của vật rắn trong các trường hợp sau.

10.2.1. Khi hai véc tơ $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_2$ song song cùng chiều.

Xét vật rắn là một đĩa phẳng chuyển động tương đối quay quanh trục Aa với vận tốc góc $\overline{\omega}_1$ vuông góc với mặt đĩa. Trục Aa lại quay quanh trục Bb song song với vận tốc góc $\overline{\omega}_2$ cùng chiều với $\overline{\omega}_1$ (hình 10.2).

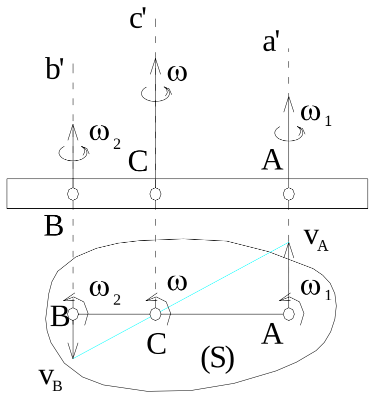


Hình 10-2

Ta có nhận xét rằng trong quá trình chuyển động mặt phẳng của đĩa có phương không đổi nghĩa là chuyển động tổng hợp của nó là chuyển động song phẳng. Vận tốc của điểm A và B trên đĩa có thể xác định:

$$V_A = \omega_2.AB \quad ; \quad V_B = \omega_1.AB$$

Phương chiều biểu diễn trên hình (10.3).



Hình 10-3

Dễ dàng xác định được tâm vận tốc tức thời cuả đĩa là điểm C và trục Cc đi qua C song song với Aa và Bb là trục quay tức thời của đĩa. Từ vận tốc của điểm A và B ta có thể xác định được vận tốc góc tuyệt đối $\vec{\omega}$ của đĩa.

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC}$$

hay: $$\omega = \frac{V_A + V_B}{AC + BC} = \frac{V_A + V_B}{AB}$$

Thay $V_A = \omega_2.AB$ và $V_B = \omega_1.AB$ vào biểu thức trên ta được:

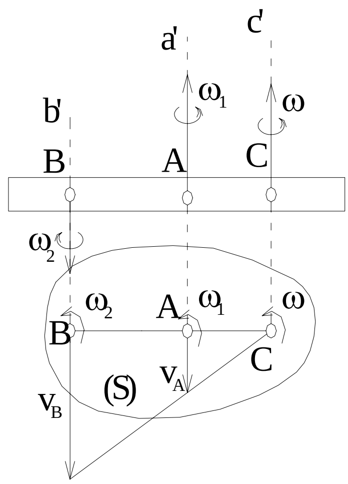
$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{10.3}$$

Kết luận: Hợp hai chuyển động quay cùng chiều quanh hai trục song song là một chuyển động quay tức thời với vận tốc góc bằng tổng vận tốc góc hai chuyển động thành phần quanh trục quay tức thời song song với hai trục quay đã cho và đi qua điểm C chia trong đoạn AB theo tỷ lệ:

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}$$

10.2.2. Khi hai véc tơ $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_2$ song song ngược chiều

Khi hai véc tơ $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_2$ song song ngược chiều ,với cách biểu diễn như ở trên chuyển động của đĩa vẫn là chuyển động song phẳng biểu diễn trên (hình 10.4). Giả thiết rằng $\omega_1 > \omega_2$ khi đó vận tốc hai điểm $V_A = \omega_2.AB$ và $V_B = \omega_1.AB$ nhưng hai véc tơ $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$ song song cùng chiều.



Hình 10-4

Trên đĩa lúc này có thể xác định được tâm vận tốc tức thời C là điểm chia ngoài đoạn AB theo tỷ lệ $\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}$ và vận tốc góc của đĩa được xác định:

$$\omega = \frac{V_B}{BC} = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B - V_A}{BC - AC} = \frac{V_B - V_A}{AB}$$

Thay giá trị của V_A và V_B vào biểu thức trên ta được:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (10.4)$$

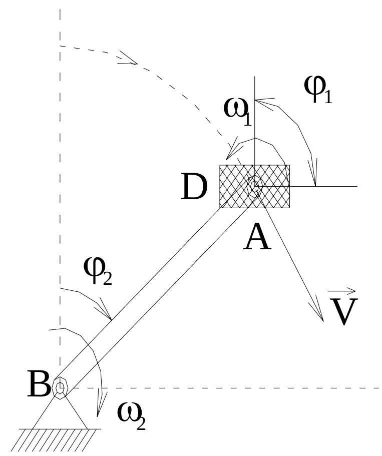
Kết luận: Hợp hai chuyển động quay ngược chiều quanh hai trục song song là một chuyển động quay tức thời với vận tốc góc bằng hiệu số vận tốc góc hai chuyển động thành phần quanh trục quay tức thời song song với hai trục quay đã cho và đi qua điểm C chia ngoài đoạn AB theo tỷ lệ:

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}$$

Trường hợp đặc biệt nếu $\omega_1 = \omega_2$ nghĩa là 2 véc tơ $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_2$ tạo thành một ngẫu véc tơ, khi đó theo (10.4) ta có $\omega = 0$. Điều này chứng tỏ vật sẽ có chuyển động tổng hợp là tĩnh tiến.

Thí dụ bàn đạp của xe đạp (hình 10.5).

Bàn đạp quay quanh trục của nó với vận tốc ω_1 trục bàn đạp lại quay quanh trục giữa của xe với vận tốc $\omega_2 = \omega_1$, hai véc tơ này song song ngược chiều do đó chuyển động tổng hợp của bàn đạp sẽ là chuyển động tịnh tiến.



Hình 10- 5

10.2.3. Khi hai véc tơ $\overline{\omega}_1$ và $\overline{\omega}_2$ giao nhau tại một điểm

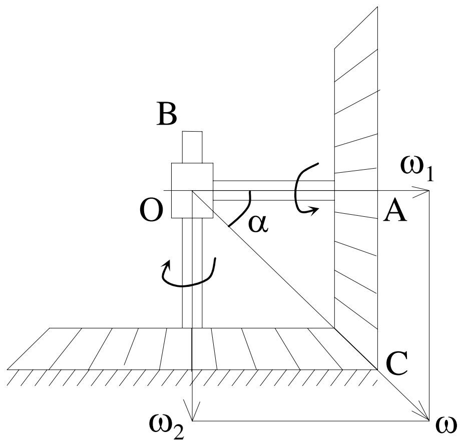
Khảo sát vật rắn tham gia đồng thời hai chuyển động quay quanh hai trục Oa và Ob cắt nhau tại O và có vận tốc góc là $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$.

Như đã biết trong chương 9 chuyển động tổng hợp của vật trong trường hợp này là chuyển động quay quanh một điểm cố định chính là giao điểm O của 2 véc tơ vận tốc góc $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$. Nói cách khác chuyển động tổng hợp của vật rắn khi nó đồng thời tham gia hai chuyển động quay quanh hai trục cắt nhau sẽ là một chuểyn động quay tức thời quanh trục quay tức thời Δ đi qua giao điểm O của hai trục quay trong chuyển động thành phần với vận tốc góc tuyệt đối $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2$.

Theo (9.6) và (9.7) thì vận tốc và gia tốc của một điểm bất kỳ trên vật sẽ được xác định như sau: $\overline{V}_M = \vec{\omega} + \overline{OM}$; $\overline{W}_M = \overline{W}_{M\omega} + \overline{W}_{M\varepsilon}$

<u>Thí du</u>: Xác định vận tốc góc tuyệt đối của bánh răng nón 1 biểu diễn trên (hình 10.6) cho biết tâm A của bánh xe chuyển động với vận tốc V_A và kích thước AC = R; OA = l.

<u>Bài giải</u>: Chuyển động của bánh xe được hình thành từ hai chuyển động quay: tương đối quanh trục OA của bánh xe và chuyển động kéo theo do trục OA quay quanh trục OB. Nếu góc ϖ_1 là vận tốc góc của chuyển động tương đối , ϖ_2 là vận tốc góc của chuyển động kéo theo thì hai vectơ ϖ_1 và ϖ_2 giao nhau tại O là điểm cố định trên trục OB. Chuyển động tổng hợp của bánh xe sẽ là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Vì bánh xe (1) ăn khớp với bánh xe 2 cố định nên điểm C có vận tốc $V_C = 0$. Dễ dàng nhận thấy OC là trục quay tức thời của bánh xe. Nếu gọi vận tốc góc tuyệt đối của bánh xe là ϖ theo (9.7) ta có:



Hình 10-6

$\varpi = \varpi_1 + \varpi_2$. Trong đó ϖ_2 có phương OB hướng xuống dưới và có trị số $\omega_2 = \dfrac{V_A}{l}$.

Dễ dàng tính được: $\omega = \dfrac{\omega_2}{\sin\alpha}$ với $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}$.

Cuối cùng nhận được: $\omega = \dfrac{V_A}{R}\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{l^2}}$.

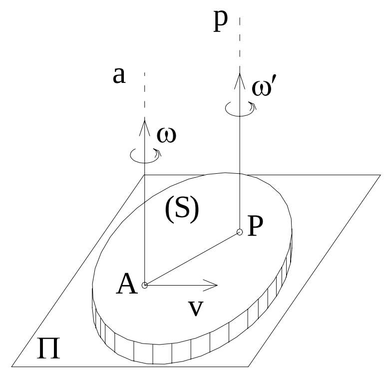
10.3. HỢP HAI CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN VÀ CHUYỂN ĐỘNG QUAY.

Khảo sát vật rắn tham gia đồng thời hai chuyển động tịnh tiến với vận tốc v và quay quanh một trục Aa với vận tốc góc ϖ .

Bài toán có thể gặp phải các trường hợp sau:

10.3.1 Khi vận tốc chuyển động tịnh tiến vuông góc với vận tốc góc của chuyển động quay.

Khi vận tốc chuyển động tịnh tiến vuông góc với vận tốc góc của chuyển động quay. (hình $\perp$ 10.7) dễ dàng nhận thấy rằng chuyển động tổng hợp của vật là chuyển động song phẳng. Có thể xác định được trục quay tức thời Pp của vật bằng cách quay V_A đi một góc 90^0 theo chiều quay vòng của ω trong mặt phẳng vuông góc với vectơ ϖ và lấy trên đó điểm P cách A một đoạn AP= $\dfrac{V_A}{\omega}$.



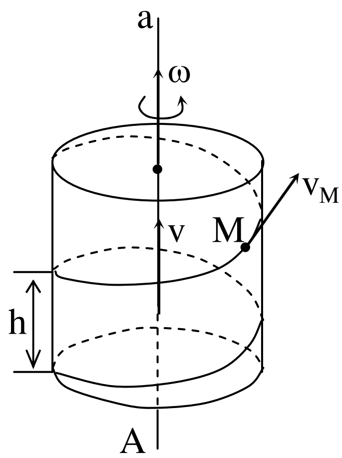
Hình 10-7

10.3.2. Khi vận tốc chuyển động tịnh tiến và vận tốc góc ϖ song song với nhau .

Xét vật rắn tham gia 2 chuyển động, quay quanh trục Aa với vận tốc góc ϖ và tịnh tiến với vận tốc v theo chiều Aa (hình 10.8).

Chuyển động tổng hợp của vật lúc này gọi là chuyển động vít. Nếu v và ϖ Cùng chiều ta được chuyển động vít thuận và v, ϖ ngược chiều ra được chuyển động vít nghịch.

Khảo sát 1 điểm trên vật trong quá trình chuyển động quỹ đạo của nó nằm trên mặt trụ có trục Aa bán kính bằng khoảng cách giữa điểm đến trục. Dạng của đường quỹ đạo là đường xoắn vít. Sau khi quay được một vòng thì điểm đồng thời cũng dời theo trục Aa một



Hình 10-8

đoạn $h = 2\pi.\dfrac{v}{\omega}$ gọi là bước vít.

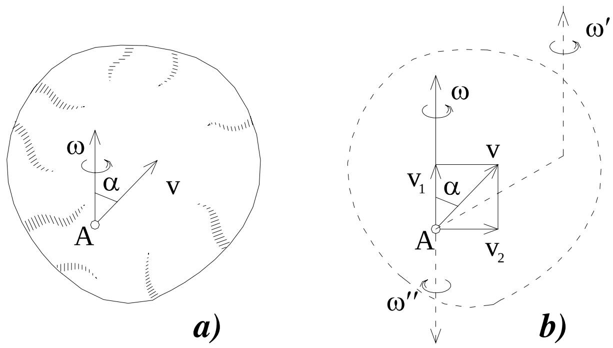
Khi vật chuyển động vít vận tốc của một điểm M bất kỳ được xác định theo công thức:

$$V_M = \sqrt{v^2 + r^2.\omega}$$

Trong đó r là khoảng cách từ M tới trục quay. Phương tiếp tuyến với quỹ đạo (đường vít), nghĩa là hợp với đường sinh một góc α ($tg\alpha = \dfrac{h}{2.\pi.r}$).

10.3.3 Khi v và ϖ hợp với nhau 1 góc bất kỳ.

Xét chuyển động của vật quay quanh trục Aa với vận tốc góc ω và đồng thời chuyển động tịnh tiến với vận tốc v theo phương hợp với Aa 1 góc α .(Hình 10.9). Trong trường hợp này nếu phân tích vectơ $\vec{v}$ thành hai thành phần $\vec{v}_1$ theo phương ω và $\vec{v}_2$ vuông goc với ω nghĩa là $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Theo kết quả ở mục 10.3.2 chuyển động của vật có ω và $\vec{v}_2$ được thay thế bằng chuyển động quay tức thời quanh trục C (trục quay tức thời) với cùng vận tốc ω. Kết quả chuyển động của vật sẽ thực hiện hai chuyển động: tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_1$ và quay quanh trục C với vận tốc góc ω song song với v_1 và cách A một đoạn AP = v_2/ω = v.sinα/ω. Ta gọi chuyển động này là chuyển động vít tức thời.



Hình 10 - 9

Phần 3

ĐỘNG LỰC HỌC

Chương 11

CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA NIU-TƠN VÀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

11.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Động lực là phần tổng quát của cơ học. Động lực học nghiên cứu chuyển động của vật thể dưới tác dụng của lực. Động lực học thiết lập các định luật liên hệ giữa lực tác dụng với những đặc trưng động học và áp dụng các định luật đó có thể giải các bài toán kỹ thuật.

Vật thể trong động lực học được xét dưới dạng mô hình : chất điểm, cơ hệ, vật rắn.

Chất điểm là một điểm hình học có mang khối lượng. Chất điểm là mô hình đơn giản nhất và cơ bản nhất của vật thể trong động lực học.

Cơ hệ là tập hợp nhiều chất điểm chuyển động phụ thuộc lẫn nhau.

Vật rắn là cơ hệ đặc biệt khi khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ trong đó luôn luôn không đổi.

Khác với tĩnh học, lực trong động lực học có thể là không đổi, có thể biến đổi cả về độ lớn và phương chiều.

Lực phụ thuộc vào thời gian như lực kéo đầu máy, phụ thuộc vào vị trí của vật như lực hấp dẫn, lực đàn hồi của lò xo, phụ thuộc vào vận tốc như lực cản của không khí. Một cách tổng quát trong động lực học lực là một hàm của thời gian, vị trí và vận tốc. Ta có : $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$.

Trong động lực học các lực được phân chia thành nội lực, ngoài lực hay hoạt lực và phản lực liên kết. Nội lực ký hiệu là $\vec{F}_i$. $\vec{F}_i$ là lực tác động tương hỗ giữa các chất điểm trong một cơ hệ.

Ngoại lực ký hiệu $\vec{F}_e$ là các lực do chất điểm hay vật thể ngoài hệ tác dụng vào hệ. Phản lực liên kết ký hiệu $\vec{N}$ là lực tác dụng do các vật gây liên kết lên cơ hệ khảo sát. Hoạt lực là các lực tác dụng lên cơ hệ không kể phản lực liên kết, thường ký hiệu là $\vec{F}_a$

Để khảo sát chuyển động của vật bao giờ cũng chọn trước một hệ quy chiếu. Hệ quy chiếu không phụ thuộc vào thời gian gọi là hệ quy chiếu quán tính, ngược lại hệ quy chiếu phụ thuộc vào thời gian gọi là hệ quy chiếu không quán tính .

11.2. CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA NIU -TƠN

Cơ sở lý luận của động lực học chủ yếu là các định luật của NIU - TON.

I-sác Niu Tơn (1643-1727) là nhà bác học lỗi lạc đã đặt nền móng cho cơ học cổ điển và đã xây dựng lý thuyết cơ học hoàn thiện cân đối. Vì thế cơ học cổ điển còn gọi là cơ học Niu - Tơn.

Sau đây giới thiệu các định luật của Niu - Tơn và xem như là hệ tiền đề của cơ học.

Định luật 1(Định luật quán tính)

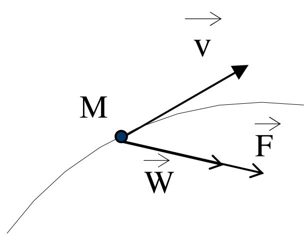
Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào sẽ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều là trạng thái chuyển động theo quán tính. Khi chuyển động theo quán tính chất điểm sẽ có : $\vec{v} = \text{const}$ và $\vec{w} = 0$.

Định luật 2 (định luật cơ bản của động lực học)

Dưới tác dụng của lực chất điểm sẽ chuyển động với gia tốc cùng phương chiều với lực (hình 9-1)

$$\vec{F} = m.\vec{W}$$



Hình 11.1

m là hệ số tỷ lệ, phụ thuộc vào lượng vật chất có trong chất điểm.

Theo định luật này lực là nguyên nhân làm cho chất điểm chuyển động có gia tốc.

Biểu thức (11-1) cho thấy : Nếu lực $\vec{F}$ không đổi m càng lớn $\vec{W}$ càng nhỏ và ngược lại, điều đó chứng tỏ kkối lượng m là số do quán tính của vật (tính ỳ của vật)

Từ hệ thức (11-1) nếu lực là trọng lượng của vật sẽ có :P = mg. Ở đây g được gọi là gia tốc trọng trường.

Hệ thức (11-1) gọi là phương trình cơ bản của động lực học.

Định luật 3 (định luật về tính độc lập tác dụng của lực)

Dưới tác dụng đồng thời của một hệ lực chất điểm sẽ chuyển động với gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm thu được khi nó chịu tác dụng độc lập từng lực một .

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + ... + \vec{w}_n . \qquad (11\text{-}2)$$

$\vec{w}$ là gia tốc của chất điểm khi hệ lực cùng tác dụng đồng thời ; $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_n$ là gia tốc của chất điểm khi nó chịu tác dụng từng lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ độc lập .

Từ hệ (11-2) nếu nhân hai vế với khối lượng m sẽ được :

$$m\vec{w} = m\vec{w}_1 + m\vec{w}_2 + ... + m\vec{w}_n$$

Theo định luật hai thì :

Do đó ta có : $m\vec{w} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}$ (11-3)

Hệ thức (11-3) là phương trình cơ bản của động lực học khi chất điểm chịu một hệ lực tác dụng.

Định luật 4 (định luật tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm là những lực cùng phương, cùng độ lớn và ngược chiều.

Định luật này mô tả tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm và là cơ sở nghiên cứu cho động lực học của hệ.

Cần chú ý rằng hai lực tương hỗ không phải là một cặp lực cân bằng vì chúng đặt lên hai chất điểm khác nhau.

11-3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM VÀ CƠ HỆ.

Xét chất điểm chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính oxyz, dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ... \vec{F}_n$. Đối với chất điểm tự do các lực này là các hoạt lực đặt lên chất điểm. Đối với chất điểm không tự do các lực này bao gồm cả hoạt lực và phản lực liên kết. Căn cứ vào phương trình cơ bản của động lực học ta có thể thành lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới các dạng khác nhau.

11.3.1.Dạng véc tơ

Gọi véc tơ định vị của chất điểm là $\vec{r}$ ta có :

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Khi đó phương trình cơ bản viết cho chất điểm như sau :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_1 \qquad (11\text{-}4)$$

Phương trình vi phân (11-4) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng véc tơ.

11.3.2. Dạng toạ độ Đề các

Chiếu phương trình (9-4) lên các trục toạ độ oxyz sẽ được :

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} X_i \;;$$

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \;; \qquad (11\text{-}5)$$

$$m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} Z_i \;.$$

Ở đây x, y, z là toạ độ của chất điểm trong hệ oxyz, còn X_i, Y_i, Z_i là hình chiếu của lực $\vec{F}_i$ lên các trục ox, oy, oz.

Hệ phương trình (11-5) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng toạ độ Đề các.

11.3.3. Dạng toạ độ tự nhiên

Gọi W^τ, W^η, W^β là hình chiếu của gia tốc điểm và F_i^τ, F_i^η, F_i^β là hình chiếu của F_i lên các trục của hệ toạ độ tự nhiên. Sau khi chiếu phương trình (11-4) lên các trục của hệ toạ độ tự nhiên ta được :

$$mw^\tau = m\ddot{s} = \sum_{i=1}^{n} F_i^\tau \;;$$

$$mw^\eta = m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_i^\eta \;; \qquad (11\text{-}6)$$

$$mw^\beta = 0 = \sum_{i=1}^{n} F_i^\beta \;.$$

Đối với cơ hệ chúng ta có thể tách một chất điểm trong hệ ra để xét. Gọi hợp các ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ k được tách ra là $\vec{F}_{ke}$ và hợp các nội lực tác dụng lên nó là $\vec{F}_{ki}$.

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm viết dưới dạng véc tơ :

$$m_k \vec{w}_k = \vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ke}$$

Trong đó m_k và $\vec{w}_k$ là khối lượng và gia tốc của chất điểm thứ k .

Khi xét tất cả các chất điểm ta sẽ thu được N phương trình sau :

$$m_1\vec{w}_1 = \vec{F}_{1i} + \vec{F}_{1e};$$

$$m_2\vec{w}_2 = \vec{F}_{21i} + \vec{F}_{2e}; \qquad (11\text{-}7)$$

....

$$m_n\vec{w}_n = \vec{F}_{ni} + \vec{F}_{ne}.$$

Hệ phương trình (11-7) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ dưới dạng véc tơ. Nếu chiếu hệ phương trình (11.7) lên các trục của hệ toạ độ Đề các hoặc hệ toạ độ tự nhiên ta sẽ được hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ dưới dạng toạ độ Đề các và hệ toạ độ tự nhiên.

11-4. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Từ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ta thấy trong động lực học có hai bài toán cơ bản sau đây :

- Bài toán cơ bản thứ nhất: Cho biết chuyển động của chất điểm xác định lực đã gây ra chuyển động đó. Bài toán này gọi là bài toán thuận.

- Bài toán cơ bản thứ hai: Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và điều kiện ban đầu của chuyển động xác định quy luật chuyển động của chất điểm. Bài toán này gọi là bài toán nghịch.

Sau đây giới thiệu cách giải hai bài toán cơ bản nói trên.

Đối với bài toán thứ nhất ta thiết lập phương trình vi phân của chuyển động chất điểm. Từ phương trình vi phân ta xác định được lực tác dụng lên từng chất điểm. Điều cơ bản của bài toán là xác định gia tốc của chất điểm điều này đã được giải quyết trong động học.

Đối với bài toán thứ hai, ta thay lực vào vế phải của phương trình vi phân sau đó tích phân phương trình vi phân tìm được. Để tìm dạng chuyển động cụ thể ta xác định hằng số tích phân căn cứ vào các điều kiện ban đầu của chuyển động. Nếu phương trình vi phân viết dưới dạng toạ độ Đề các sau khi lấy tích phân hai lần sẽ xuất hiện 6 hằng số tích phân, nghĩa là các nghiêm x, y, z thu được là các hàm của thời gian và 6 hằng số tích phân đó :

$x=f_1(t,C_1,C_2....C_6)$

$y= f_2(t,C_1,C_2....C_6)$

$z= f_3(t,C_1,C_2....C_6)$

Các hằng số tích phân trên được xác định từ các điều kiện ban đầu ;

Khi t=0 $x=x_0$; $y=y_0$; $z=z_0$;

$\dot{x} = \dot{x}_0 ; \dot{y} = \dot{y}_0 ; \dot{z} = \dot{z}_0$

Thí du 11-1:

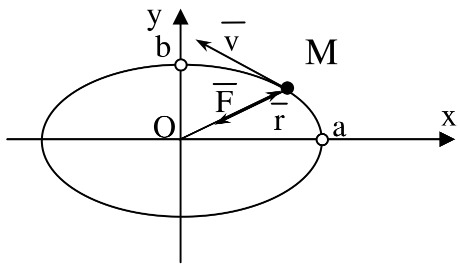
Chất điểm có khối lượng m chuyển động theo đường enlip x=acoskt và y=bsinkt hãy tìm lực tác dụng lên chất điểm (hình 11-2).

Bài giải :

Bài toán này thuộc bài toán cơ bản thứ nhất. Căn cứ vào phương trình chuyển động

x=acoskt

y=bsinkt



Hình 11.2

Xác định được :

$$\ddot{x} = ak^2 \cos kt = -k^2 x ;$$

$$\ddot{y} = bk^2 \sin kt = -k^2 y ;$$

Ta có phương trình vi phân chuyển động như sau :

$$\ddot{x}m = F_x = -mk^2 x$$

$$\ddot{y}m = F_y = -mk^2 y$$

Lực tác dụng lên chất điểm sẽ là F với :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r$$

Các góc chỉ phương của $\vec{F}$ là :

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F} = \frac{-x}{r}$$

$$\cos(F, y) = \frac{F_y}{F} = \frac{-y}{r}$$

Mặt khác ta cũng có :

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}$$

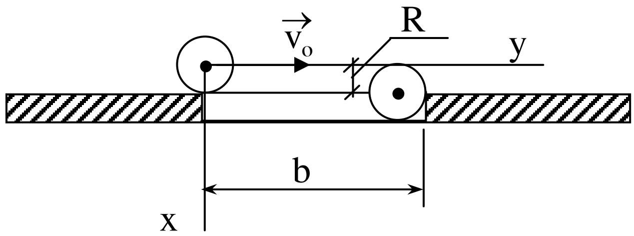
$$\cos(r, y) = \frac{y}{r}$$

Dễ dàng nhận thấy $\vec{F}$ cùng phương nhưng ngược chiều với véc tơ định vị $\vec{r}$ của chất điểm.

Ta có : $\vec{F} = -mk\vec{r}$.

Thí du 11-2 : Để phân loại hạt người ta cho hạt đi qua một sàng dao động ngang có nhiều lỗ. Biết rằng vận tốc của hạt khi bắt đầu chuyển động qua lỗ $\vec{v}_0$ (hình 11-3). Hạt có hình dạng cầu, bán kính R. Bỏ qua lực cản của không khí xác định độ dài bé nhất b của lỗ để hạt có thể rơi qua lỗ được.

Bài giải:



Hình

Để hạt rơi qua lỗ sàng trọng tâm của hạt tại vị trí bất đầu chạm mép bên kia của lỗ phải nằm dưới mặt phẳng ngang của sàng. Để giải quyết được điều kiện đó ta xác định quãng đường hạt đi được theo phương ngang (phương ox) khi tâm hạt rơi xuống được một đoạn x=R. Lực tác dụng lên hạt coi như đã biết đó là trọng lượng bản thân của nó. Bài toán ở đây thuộc loại bài toán cơ bản thứ hai.

Chọn hệ toạ độ oxy gắn với sàng (hình 11-3) coi sàng đứng yên còn hạt chuyển động so với sàng. Lực tác dụng lên hạt có :

$$F_y = 0 \quad F_x = +mg.$$

Phương trình vi phân chuyển động của hạt viết được :

$$m\ddot{x} = mg \;; \qquad \text{hay} \qquad \ddot{x} = g \;;$$

$$m\ddot{y} = 0 \;; \qquad \text{hay} \qquad \ddot{y} = 0 \;;$$

Tích phân hai vế phương trình trên ta được :

$$\dot{x} = gt + C \qquad x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$\dot{y} = C_3 \qquad y = C_3 t + C_4$$

Để xác định hằng số tích phân ta dựa vào điều kiện đầu đã cho của chuyển động.

Khi $t = 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0$ suy ra C_1=0

x=x_0 suy ra C_4=0.

Thay vào nghiệm đã tìm được ta có :

$$x = \frac{gt^2}{2} \qquad y = v_0 t$$

Phương trình quỹ đạo thu được :

$$y = v_0\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Khi x=R thì $y = b - R = v_0\sqrt{\frac{2R}{g}}$

Suy ra $b = R + v_0\sqrt{\frac{2R}{g}}$

Để hạt chắc chắn rơi qua lỗ ta phải có :

$$b \geq R + v_0\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

<u>Thí du 11.3</u> :

Một chất điểm có khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng ngang dưới tác dụng của lực hút về tâm O là $\vec{F} = -k^2 m\vec{r}$. Ở đây $\vec{r}$ là véc tơ định vị còn k là hệ số tỷ lệ. Hãy tìm phương trình chuyển động và quỹ đạo của chất điểm. Cho biết tại thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v_0$ (hình 11-4)

<u>Bài giải</u>:

Bài toán này thuộc bài toán cơ bản thứ hai. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm viết dưới dạng véc tơ :

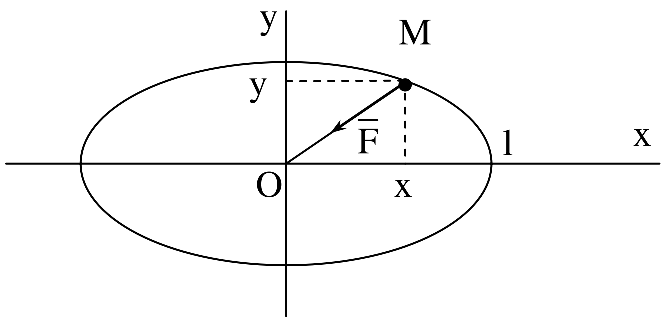
$$m\vec{W} = -k^2 m\vec{r}$$

chọ hệ toạ độ oxy như hình vẽ ta có thể thiết lập phương trình vi phân dưới dạng toạ độ Đề các như sau :

$$m\ddot{x} = -k^2 mx$$

$$m\ddot{y} = -k^2 my$$

Khử khối lượng m ở hai vế phương trình trên ta được :



Hình 11.4

$$\ddot{x} = -k^2 x = 0$$

$$\ddot{y} = -k^2 y = 0$$

Nghiệm tổng quát của hai phương trình có dạng:

$x = c_1\cos kt + c_2\sin kt$

$y = c_3\cos kt + c_4\sin kt$

Các hằng số tích phân c_1, c_2, c_3, c_4 được xác định từ các điều kiện đầu của chuyển động.

Ki $t = t_0 = 0$ có :

$x = x_0 = l = C_1$; $\qquad\qquad \dot{x} = 0 = kC_2$

$y = y_0 = 0 = C_3$; $\qquad\qquad \dot{y} = v_0 = kC_4$

Suy ra :

$C_1 = 1$; $C_2 = 0$; $C_3 = 0$; và $C_4 = v_0/k$

Phương trình chuyển động chất điểm được viết :

$x = l\cos kt$; $\qquad\qquad y = (v_0 \sin kt)/k$

Khử t trong phương trình trên sẽ tìm được phương trình quỹ đạo dạng

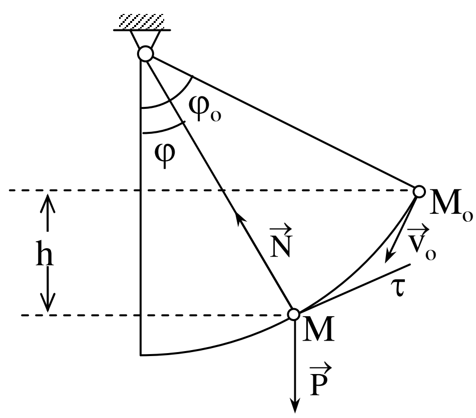
$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{v_0^2/k^2} = 1$$

Đây là phương trình đường enlip nhận các trục ox, oy là trục

<u>Thí dụ 11-4</u>: Con lắc toán học gồm chất điểm M có khối lượng m treo vào đầu sợi dây không dãn và không trọng lượng, chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Xác định phản lực N của dây (hình vẽ 11-5). Cho biết lúc đầu con lắc ở vị trí M_0 và có vận tốc v_0

<u>Bài giải</u> :

Xét chuyển động của chất điểm M. Các



Hình 11.5

lực tác dụng lên nó gồm P và N. Có thể thiết lập phương trình vi phân viết dưới dạng tọa độ tư nhiên như său :

$$m\ddot{s} = -P\sin\varphi = -mg\sin\varphi \qquad (a)$$

$$m\frac{V^2}{\rho} = -P\cos\varphi + N = -mg\cos\varphi + N \quad (b)$$

Thay lφ = s vào phương trình (a)

Ta được : $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$ hay : $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

Xét dao động là nhỏ lấy sinφ ≈ φ, ta có

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0 \qquad (c) \qquad \text{Trong đó : } k^2 = \frac{g}{l}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là : φ = Asin(kt + ∝)

A, ∝ là hằng số được xác định bằng điều kiện đầu của chuyển động .

Để tìm N căn cứ vào phương trình (b).

Ta có :

$$N = \frac{mv^2}{l} + mg\cos\varphi$$

Để tính v^2 ta chú ý : $\frac{d^2\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$

Thay kết quả trên vào phương trình (c) ta có :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \text{ ta có :}$$

$$\omega\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l}\cos\varphi + c$$

Hằng c được xác định từ điều kiện ban đầu. Gọi góc ban đầu và vận tốc góc ban đầu kà φ_0 và ω_0 ta sẽ có :

$$c = \frac{\omega_0^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0 = \frac{v_0^2}{2l^2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0$$

Thay c vào biểu thức (c) ta được :

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}\cos\varphi + \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{g}{l}\cos\varphi_0 \,;$$

$$v^2 = l^2\omega^2 = v_0^2 + 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0$$

Cuối cùng nhận được :

$$N = P(\frac{v_0^2}{gl} + 3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0)$$

Như vậy phản lực N phụ thuộc vào điều kiện ban đầu và vị trí của điểm M. Kết quả này cũng đúng cho cả khi dao động là không nhỏ.

Chương 12

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học là hệ quả của định luật cơ bản của Niu-Tơn. Nó thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng do chuyển động của chất điểm hay cơ hệ với các đại lượng đo tác dụng của lực.lên chất điểm hay cơ hệ đó. Các định lý tổng quát của động lực học cho phép ta nghiên cứu tính chất quan trọng của chuyển động mà không cần biết chi tiết chuyển động đó. Vì thế nó cho phép ta giải thuận lợi một số bài toán của động lực học đặc biệt là bài toán về động lực học của cơ hệ mà nếu áp dụng phương trình vi phân để giải thì sẽ gặp rất nhiều khó khăn.

12.1. CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN.

Khi khảo sát động lực học của cơ hệ người ta phải để ý đến khối lượng của chúng và sự phân bố khối lượng ấy trong không gian. Các đặc trưng liên quan đến phân bố khối lượng của cơ hệ hay vật rắn là khối tâm và mô men quán tính.

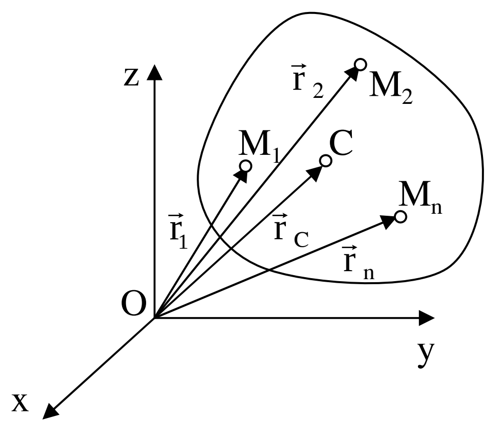
12.1.1. Khối tâm của hệ

Xét hệ N chất điểm $M_1, M_2, ... M_n$ có khối lượng $m_1, m_2, ... m_N$. Véc tơ định vị chúng là: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ... \vec{r}_N$.(Hình 12.1)   .Ta có định nghĩa sau:

Khối tâm của hệ là điểm C xác định bằng biểu thức:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}{M} \quad ; \qquad (12\text{-}1)$$

Với $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$.



Hình 12.1

Chiếu biểu thức (12-1) lên các trục

toạ độ oxyz (hình 10-1) ta được:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{M}$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k y_k}{M} \qquad (12\text{-}2)$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k z_k}{M}$$

Trong đó x_C, y_C, z_C là toạ độ khối tâm C; x_k, y_k, z_k là toạ độ của chất điểm thứ k trong cơ hệ. Trường hợp đặc biệt trong trường trọng lực hệ là vật rắn khối tâm sẽ trùng với trọng tâm của vật.

12.1.2. Mô men quán tính của vật

12.1.2.1. Mô men quán tính của vật đối với một tâm

Mô men quán tính của vật đối với một tâm ký hiệu là J_o bằng tổng các tích số giữa các khối lượng của mỗi chất điểm với bình phương khoảng cách giữa chất điểm đó với điểm O (hình 10-1)

$$J_o = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \qquad (12\text{-}3)$$

12.1.2.2. Mô men quán tính của vật đối với một trục

Mô men quán tính của vật đối với một trục z ký hiệu là J_z bằng tổng các tích khối lượng m_k của mỗi chất điểm trong vật với bình phương khoảng cách d_k từ chất điểm đến trục (hình 12-1).

$$J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2 \qquad (12\text{-}4)$$

Gọi toạ độ các chất điểm M_k trong hệ toạ độ oxyz là x_k,y_k, z_k thì mô men quán tính của hệ đối với các trục toạ độ là ox, oy, oz và đối với gốc toạ độ O viết được:

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2);$$

$$J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2);$$

$$J_z = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2); \qquad (12\text{-}5)$$

$$J_o = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).$$

Từ đó suy ra:

$$J_x + J_y + J_z = J_o. \qquad (12\text{-}6)$$

Trong kỹ thuật ta tính mô men quán tính của vật đối với một trục theo biểu thức:

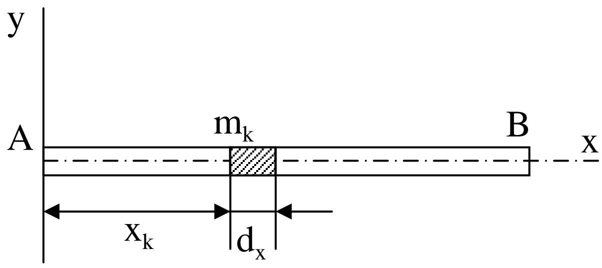
$$J_z = M.\rho^2$$

M là khối lượng của vật, ρ gọi là bán kính quán tính của vật với trục z.

12.1.2.3. Mô men quán tính của một số vật đồng chất

- Vật là một thanh mỏng đồng chất

Gọi chiều dài của thanh là l, khối lượng của nó là M. Chọn trục Ax dọc theo thanh (hình 12-2).



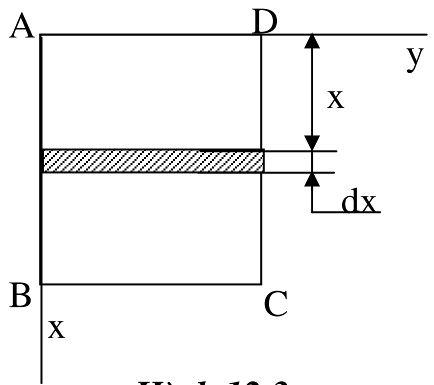
Hình 12-2

Xét một phần tử của thanh có chiều dài dx ở vị trí cách A một đoạn x_R, có khối lượng dm = ρ_1.dx ở đây ρ_1 là khối lượng riêng trên một đơn vị chiều dài của thanh $\rho = M/l$

Biểu thức mô men quán tính của thanh lấy đối với trục Az vuông góc với thanh tại A là:

$$J_{Az} = \int_0^l x^2 dm = \rho_i \int_0^l x^2 dx = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} Ml^2$$

(127)



Hình 12.3

- Vật là một tấm phẳng hình chữ nhật (hình 12-3)

Gọi các cạnh của hình là a, b, khối lượng của tấm phẳng là M. Chia hình thành nhiều giải nhỏ song song với trục o mỗi giải có bề rộng là dx, có mô men quán tính đối với trục Ax là $J_k = \frac{1}{3} m_k a^2$(theo hình 12-3)

Trong đó m_k là khối lượng của giải đang xét.

Mô men quán tính của cả hình đối với trục A_x là :

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} J_{kx} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} m_k a^2 = \frac{1}{3} a^2 \sum_{k=1}^{n} m_k;$$

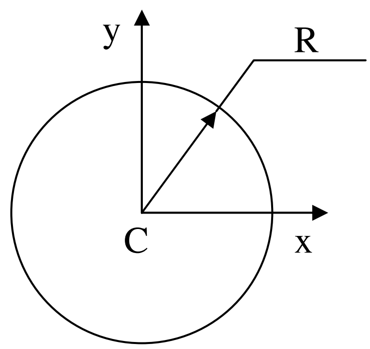
$$J_x = \frac{1}{3} a^2 M \qquad (12\text{-}8)$$

Tương tự suy ra:

$$J_y = \frac{1}{3} b^2 M \qquad (12\text{- }9)$$

- Vật là một vành tròn đồng chất

Gọi bán kính và khối lượng của vành là R và M. Tính mô men quán tính của vành đối với trục Cz vuông góc với mặt phẳng của vành và đi qua tâm C. (hình 12-4).



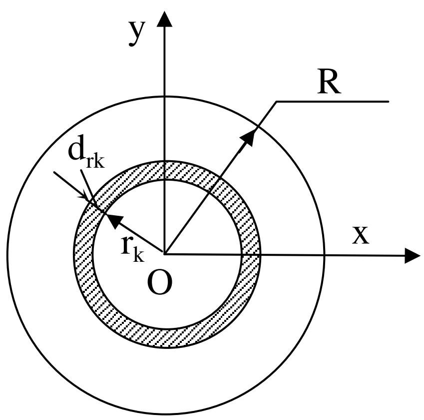
Hình 12.4

Ta có:

$$J_{cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k R^2;$$

$$J_{cz} = R^2 \sum_{k=1}^{n} m_k = MR^2. \qquad (12\text{-}10)$$

Công thức (12-10) cũng dùng để tính mô men quán tính của một ống trục tròn đồng chất đối với trục của nó.



Hình 12.5

- Vật là một tấm phẳng tròn đồng chất

Gọi bán kính và khối lượng của tấm là R và M. Ta có thể tính mô men quán tính đối với trục Cz ký hiệu là J_{cz} và mô men quán tính đối với trục Cx hay Cy trùng với đường kính của nó ký hiệu là J_x, J_y.

Chia tấm thành nhiều vành nhỏ cùng tâm C bán kính mỗi vành thứ k là r_k. Bề rộng của mỗi vành thứ k là dr_k. Khối lượng của lớp vành thứ k là :

$$m_k = \rho.2\pi.r_k.dr_k$$

Trong đó ρ là khối lượng riêng của tấm trên một đơn vị diện tích $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Theo công thức (12-10) mô men quán tính của lớp vành thứ k này đối với trục Cz viết được.

$$J^k_{cz} = m_k r_k^{\,2} = 2\pi\rho.r_k^{\,3}dr_k$$

Mô men quán tính của cả tấm đối với tục Cz viết được:

$$J_{cz} = \sum_{k=1}^{n} J_{cz}^{k} = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\rho r_k^3 dr_k$$

hay: $J_{cz} = \int_o^R 2\pi\rho r_k^3 dr_k = \dfrac{1}{2}\pi\rho R^4$.

Cuối cùng ta có:

$$J_{cz} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (12\text{-}11)$$

Để tính J_{cz} và J_{cy} ta có nhận xét mọi điểm của tấm có $z_x = 0$, vì thế theo (12-5) viết được:

$$J_{cx} = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2;$$

$$J_{cy} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2;$$

$$J_{cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Từ các biểu thức trên suy ra trong trường hợp này:

$$J_{cz} = J_{cx} + J_{cy}.$$

Do đối xứng nên sự phân bố khối lượng của tấm đối với trục cx và cy hoàn toàn như nhau. Ta có:

$$J_{cx} = J_{cy} = J_{cz}/2 = MR^2/4. \qquad (12\text{-}11)$$

Công thức (10-11) cũng có thể tính mô men quán tính cho vật là một trục tròn đồng chất đối với trục của nó.

12.1.2.4. Mô men quán tính đối với các trục song song.

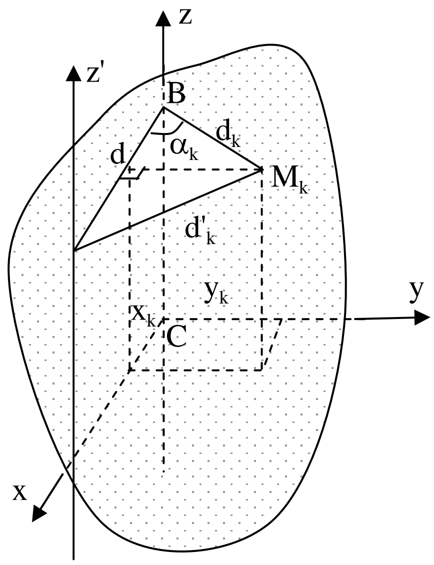
-***Định lý Huy-Ghen***: Mô men quán tính của một vật đối với một trục z_1 nào đó bằng mô men quán tính của nó đối với trục z song song với trục z_1 đi qua khối tâm của vật cộng với tích khối lượng của vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

$$J_{z1} = J_{cz} + Md^2 \qquad (12\text{-}12)$$

<u>Chứng minh</u>:

Theo định nghĩa $J_{z1} = \sum m_k d'^2_k$ (a)

Kẻ trục cz song song với z_1 và đi qua khối tâm c (hình 12-6)



Hình 12.6

Ta có:

$$d'^2_k = d_k^2 + d^2 - 2d_k d\cos\alpha_k.$$

Gọi toạ độ của điểm M_k là x_k, y_k, z_k.

$x_k = d_k\cos\alpha_k$ suy ra:

$$d'^2_k = d_k^2 + d^2 - 2dx_k$$

Thay kết quả vào biểu thức (a) sẽ được:

$$J_{z1} = \sum m_k(d_k^2 + d^2 - 2x_k d) = \sum m_k d_k^2 + \sum m_k d^2 - 2\sum m_k dx_k),$$

trong đó: $\sum m_k d_k^2 = J_{cz}$;

$\sum m_k d^2 = Md^2$ còn $\sum m_k dx_k = d\sum m_k x_k = dMx_C$

Do gốc toạ độ trùng với khối tâm c nên $x_C = 0$.

Do đó: $\sum m_k dx_k = 0$ Cuối cùng được: $J_{z1} = J_{cz} + Md^2$.

Định lý đã được chứng minh.

12.2. ĐỊNH LÝ ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG CỦA KHỐI TÂM

12.2.1. Định lý động lượng

12.2.1.1. Động lượng của chất điểm và của hệ

Động lượng của chất điểm là một đại lượng véc tơ ký hiệu là $\vec{k}$ bằng tích giữa khối lượng và véc tơ vận tốc của chất điểm.

$$\vec{k} = m\,\vec{v}. \tag{12-14}$$

Động lượng của hệ là đại lượng véc tơ ký hiệu $\vec{K}$ bằng tổng hình học động lượng các chất điểm trong hệ.

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} \vec{k}_k = \sum_{k=1}^{n} m_v \vec{v}_k. \tag{12-15}$$

Đơn vị đo động lượng là kgm/s

Ta cũng có thể biểu diễn động lượng của hệ qua khối lượng và vận tốc khối tâm của hệ.

Từ (12-1) suy ra:

$\sum m_k \vec{r}_k = M\,\vec{r}_c$.

Đạo hàm hai vế theo thời gian nhận được:

$\sum m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_o$.

Động lượng của hệ bằng tích giữa khối lượng và véc tơ vận tốc khối tâm của hệ.

12.2.1.2. Xung lượng của lực (xung lực)

Lực tác dụng trong một khoảng thời gian nhỏ bé dt thì đại lượng véc tơ đo bằng tích giữa lực với khoảng thời gian vô cùng bé đó là xung lượng phần tử của lực $\vec{F}$ ký hiệu là $d\vec{s} = \vec{F}.dt$. (12-17)

Nếu lực $\vec{F}$ tác dụng trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_o đến t thì đại lượng véc tơ tính bằng tích phân các xung lực phần tử trong khoảng thời gian đó gọi là xung lượng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian từ t_o đến t và ký hiệu là $\vec{s}$.

$$\vec{s} = \int_{to}^{t} d\vec{s} = \int_{to}^{t} \vec{F}dt \qquad (12\text{-}18)$$

Theo (10-18) nếu lực $\vec{F}$ = const thì:

$$\vec{s} = \vec{F}.\tau$$

ở đây $\tau = t - t_o$

12.2.1.3. Định lỹ động lượng

<u>Đinh lý 12.1</u>: Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng hợp lực các lực tác dụng lên chất điểm.

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (12\text{-}19)$$

Chứng minh: Xét chất điểm có khối lượng m chuyển động với vận tốc v dưới tác dụng của hệ lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,... $\vec{F}_n$). Phương trình cơ bản viết cho chất điểm:

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Thay $\vec{W} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ vào biểu thức trên sẽ được:

$$m\vec{W} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Định lý được chứng minh.

Biểu thức (12-19) thực chất là phương trình cơ bản viết dưới dạng động lượng cho chất điểm.

Định lý 12.2: Biến thiên động lượng của chất điểm trong khoảng thời gian từ t_o đến t_1 bằng tổng hình học xung lượng của các lực tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian đó.

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_o = \sum_{k=1}^{n}\int_{to}^{t1}\vec{F}_k dt = \sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k \qquad (12\text{-}20)$$

Chứng minh: Từ phương trình (10-19) suy ra:

$$d(m\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n}\int_{to}^{t1}\vec{F}_k dt$$

Tích phân hai vế phương trình này tương ứng với các cận tại t_o và t_1 sẽ có:

$$\int_{mvo}^{mv1} d(m\vec{v}) = \int_{to}^{t1}\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{to}^{t1}\vec{F}dt;$$

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_o = \sum_{k=1}^{n}\vec{S}_k$$

Định lý đã được chứng minh.

Định lý 12.3: Đạo hàm theo thời gian động lượng của hệ bằng véc tơ chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ke} \qquad (12\text{-}21)$$

Chứng minh: Xét hệ gồm N chất điểm. Ký hiệu hợp ngoại lực và hợp nội lực đặt lên chất điểm thứ k là $\vec{F}_{ke}$ và $\vec{F}_{ki}$.

Phương trình cơ bản của động lực học viết cho chất điểm đó là:

$$m_k(\vec{W}_k) = \vec{F}_{ke} + \vec{F}_{ki} \qquad (a)$$

Viết cho N chất điểm của hệ ta sẽ có N phương trình (a) nghĩa là k = 1...N

Cộng vế với vế của N phương trình trên với nhau ta sẽ được:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ke} + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ki}$$

Theo định luật Niu Tơn các lực tác dụng tương hỗ bằng nhau về độ lớn, cùng phương nhưng ngược chiều vì vậy tổng hình học các nội lực (các lực tác dụng tương hỗ cuả các chất điểm trong hệ) luôn luôn bằng không.

Ta có: $\sum \vec{F}_{ki} = 0$

Còn lại:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ke}$$

Thay $\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \frac{d}{dt}\vec{K},$

Ta có: $\frac{d}{dt}\vec{K} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ke}$.

Định lý đã được chứng minh.

<u>Đinh lý 12.4</u>: Biến thiên động lượng của hệ trong khoảng thời gian từ t_o đến t_1 bằng tổng hình học xung lượng các ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian đó.

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_{ke} \qquad (12\text{-}22)$$

Chứng minh:

Từ phương trình (12-10) suy ra:

$$d\vec{k} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ke} dt$$

Tích phân hai vế biểu thức này tương ứng với các cận tại thời điểm đầu và cuối sẽ được:

$$\int_{ko}^{k1} dk = \int_{to}^{t1} \sum \vec{F}_{ke} dt = \sum \int_{to}^{t1} \vec{F}_{ke} dt\,;$$

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_o = \sum \vec{s}_{ke}\,.$$

Định lý đã được chứng minh.

Chý ý rằng các biểu thức (10-19); (10-20), (10-21) và (10-22) là các biểu thức véc tơ, nếu chiếu các biểu thức này lên ba trục toạ độ oxyz ta sẽ được các biểu thức hình chiếu tương ứng phản ánh sự biến thiên động lượng của chất điểm và hệ theo hướng các trục toạ độ.

Định luật bảo toàn động lượng của hệ

Từ biểu thức (12-21) suy ra:

Khi $\sum \vec{F}_{ke} = 0$ thì K = const.

Khi $\sum X_k = 0$ thì K_x = const.

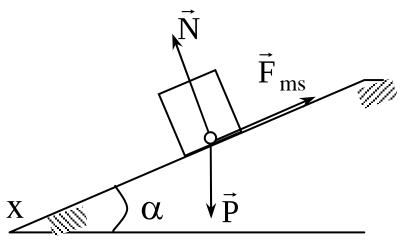
Nghĩa là khi véc tơ chính của ngoại lực hoặc tổng hình chiếu của các ngoại lực lên một trục nào đó bằng không thì động lượng của hệ hoặc hình chiếu động lượng của hệ lên trục đó bảo toàn.

Cuối cùng chú ý rằng trong các biểu thức không có nội lực điều này chứng tỏ nội lực không có tác dụng làm thay đổi động lượng của một hệ.

Thí du 12-1: Một hạt ngũ cốc có trọng lượng P trượt trong rãnh nằm nghiêng một góc α so với phương ngang. Biết hệ số ma sát giữa các hạt và rãnh là f, vận tốc ban đầu của hạt là v_o. Tính xem sau bao lâu thì vận tốc hạt tăng lên gấp đôi. (hình 12-7)

Bài giải

Xem hạt như một chất điểm. Lực tác dụng lên hạt gồm trọng lượng P, lực ma sát F_{ms} và phản lực pháp tuyến N.



Hình 12.7

Viết biểu thức hình chiếu lên trục ox của định lý động lượng ta có:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_o = \sum x_i = \int_0^t (P\sin\alpha - F_{ms})dt$$

$\dot{x}_1 = v$; $\dot{x}_0 = v_o$; $F_{ms} = P.\cos\alpha.f$ ta có:

$mv - mv_o = (P\sin\alpha - fP\cos\alpha)t.$

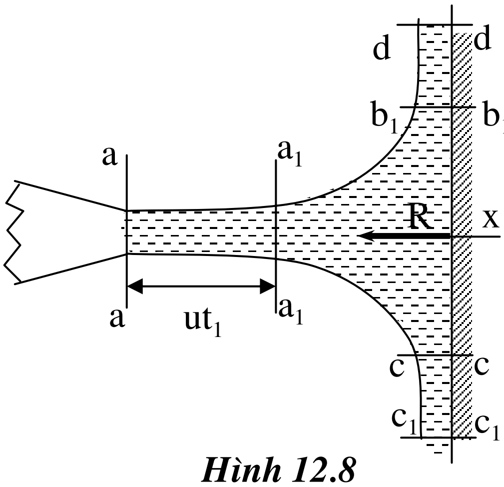
Khi $v = 2v_o$ thì thời gian cần thiết là:

$$t = \frac{mv_o}{mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha} = \frac{v_o}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Thí du 12-2: Nước chảy ra từ một vòi với vận tốc u = 10m/s và đập thẳng góc vào một tường chắn (hình 10-8). Đường kính miệng vòi d = 4cm. Xác định áp lực của nước lên tường. Lấy khối lượng riêng của nước là $\rho = 1000kg/m^3$

Bài giải:

Xét chuyển động của khối nước aabc (xem hình vẽ 12.8). Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm:



Hình 12.8

Trọng lượng P, hợp lực của áp lực tại mặt cắt của khối nước và áp lực do phản lực của tường lên nước.

Theo biểu thức (12-22) ta có:

$k_{1x} - k_{ox} = \sum S_{kk}$ (a)

Giả thiết sau thời gian t_1 khối nước chuyển đến vị trí $a_1a_1b_1c_1$. Từ hình vẽ ta thấy phần nước có ảnh hưởng đến sự biến đổi động lượng của khối nước lên phương x là phần nằm trong đoạn aa_1. Vì vậy có thể thấy:

$k_{1x} - k_{ox} = -mu$

ở đây m là khối lượng của phần nước nằm trong đoạn aa_1

$$m = \frac{\gamma}{g}\frac{\pi d^2}{4}ut_1$$

Còn $\sum S_x$ là xung lực của các lực tác dụng lên khối nước theo phương x.

Nếu gọi các hợp lực theo phương x này là R_x ta sẽ có:

$\sum S_{kx} = R_x t_1 = Rt_1$.

Thay vào biểu thức (a) các kết quả tìm được sẽ có:

$mu = Rt_1$

R =

Như vậy ta tìm được áp lực của nước lên tường cũng bằng R = 12,8kN có phương vuông góc với tường theo chiều hướng vào mặt tường.

12.2.2. Định lý chuyển động của khối tâm

- <u>Định lý 12.5</u>: Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng của cả hệ dưới tác dụng của lực bằng véc tơ chính của hệ các ngoại lực tác dụng lên hệ.

$$M\vec{W}_C = \sum_{i=1}^{n} F_{ke} \qquad (12\text{-}23)$$

Chứng minh: Xét cơ hệ N chất điểm có khối lượng là m_1, m_2, ...m_N chuyển động dưới tác dụng của hệ ngoại lực $\vec{F}_{1e}$, $\vec{F}_{2e}$, ... $\vec{F}_{Ne}$ và hệ các nội lực $\vec{F}_{1i}$, $\vec{F}_{2i}$, ... $\vec{F}_{Ni}$. Ở đây $\vec{F}_{ke}$ và $\vec{F}_{ki}$là hợp lực của ngoại lực và nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k.

Phương trình chuyển động viết cho hệ là:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{W} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ke} + \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ki} \qquad (a)$$

Mặt khác từ công thức xác định khối tâm của hệ ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k = M\vec{r}_C$$

Lấy đạo hàm theo thời gian hai vế được:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\frac{d^2\vec{r}}{dt} = M\frac{d^2 r_C}{dt} \quad \text{hay} \quad \sum_{k=1}^{n} m_k\vec{W}_k = M\vec{W}_C$$

Thay vào biểu thức (a) ở trên và lưu ý rằng $\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ki} = 0$ ta có:

$$M\vec{W}_C = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_{ke}.$$

Định lý được chứng minh.

Từ phương trình véc tơ (12-21) khi chiếu lên các trục toạ độ oxyz ta được phương trình vi phân chuyển động của khối tâm viêt dưới dạng sau:

$$M\frac{d^2X_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} X_k\ ;\ M\frac{d^2Y_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k\ ;\ M\frac{d^2Z_C}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} Z_k\ . \qquad (12\text{-}22)$$

- Định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm:

Từ biểu thức (12-21) suy ra:

Nếu $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0$ thì $W_c = 0$ và $v_c = \text{const}$.

Nghĩa là: nếu véc tơ chính của các ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không thì chuyển động khối tâm của hệ được bảo toàn. Đây là định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm.

Tương tự từ biểu thức (12-20) suy ra:

Nếu $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0$ thì $W_x = 0$ và $v_x = \text{const}$.

Nghĩa là nếu tổng hình chiếu các ngoại lực tác dụng lên hệ lên một trục x nào đó bằng không thì chuyển động của khối tâm theo trục x đó được bảo toàn. Đây là định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm theo một trục.

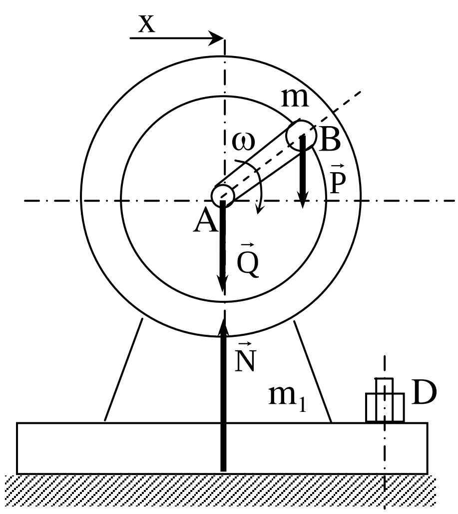
Chú ý trong các định lý về chuyển động của khối tâm không đề cập đến nội lực vì vậy có thể kết luận nội lực không làm thay đổi chuyển động của khối tâm.

Sau đây là một vài ví dụ vận dụng định lý chuyển độngcủa khối tâm và định luật bảo toàn chuyển động của khối lượng.

Thí du 12-3:

Trọng tâm phần quay của động cơ điện đặt lệch tâm so với trục quay A một đoạn AB =a. Trọng lượng của phần quay là P, trọng lượng của vỏ động cơ (phần không quay) là Q. (hình 12-9)

Tìm quy luật chuyển động của phần vỏ động cơ trên sàn nằm ngang. Cho biết vận tốc góc ϖ của phần quay không đổi. Nếu ta cố định vỏ động cơ trên sàn bằng bu lông D thì lực cắt lên bu lông được xác định như thế nào. Coi ma sát giữa nền và động cơ không đáng kế.



Hình 12.9

<u>Bài giải</u>:

1. Khi động cơ để tự do trên sàn. Ngoại lực tác dụng gồm trọng lượng P và Q của động cơ, phản lực pháp tuyến N của sàn lên động cơ. Các lực này đều vuông góc với sàn nên có:

$\sum X_k$ = 0. Theo định luật bảo toàn chuyển động của khối tâm ta có $v_{ox} =$ const. Lúc đầu động cơ đứng yên nên suy ra x_o = const.

Chọn hệ toạ độ sao cho khi ở thời điểm t nào đó góc quay φ = ωt còn các điểm A và B có các toạ độ tương ứng sau:

$x_A = x$; $x_B = x + a\sin\varphi$.

ta có: $x_C = \dfrac{Qx + P(x + a\sin\varphi)}{Q + P} = 0$

Hay: $Qx + Px + Pa\sin\varphi = 0$

Suy ra $x = \dfrac{P.a.s\sin\varphi}{P + Q}$

Đây chính là phương trình chuyển động dao động ngang của vỏ động cơ trên sàn quanh vị trí ban đầu.

2. Khi cố định động cơ trên sàn bằng bu lông D.

Gọi R_x là lực cắt bu lông theo phương ngang ta có phương trình vi phân chuyển động của khối tâm:

$$m\frac{d^2x_c}{dt^2} = R_x;$$

ở đây : $x_c = \dfrac{Qx_A + Px_B}{P+Q}$.

Vì vỏ động cơ cố định nên x_A = const = 0 còn x_B = asinφ.

Ta có:

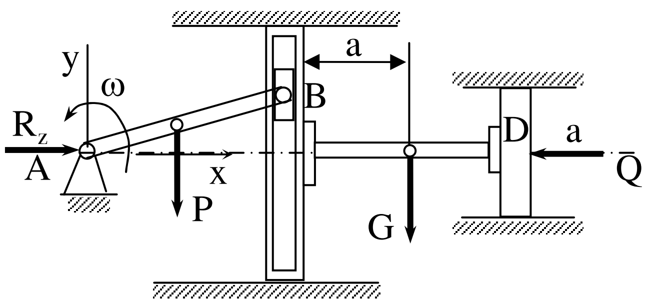
$$R_x = M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \frac{P+Q}{g}\frac{P}{P+Q}a\omega^2 \sin\omega t;$$

$$R_x = -\frac{P}{g}a\omega^2 \sin\omega t;$$

Đây là lực do bu lông tác dụng lên động cơ, ngược lại động cơ cũng tác dụng một lực cắt bu lông bằng trị số nhưng ngược chiều với R_x.

Lực cắt này sẽ lớn nhất khi sinωt = 1 và bằng $Pa\omega^2/g$, tương ứng với góc quay $\varphi = 90^0$.

<u>Thí du 12-4</u>: Tay quay AB có chiều dài r có trọng lượng P quay đều với vận tốc góc ω và truyền chuyển động cho cu lít gắn liền với pít tông D có trọng lượng chung là G. Pít tông D chịu tác động lực Q theo phương ngang (hình 12-10). Xác định phản lực R_x lên gối đỡ A theo phương ngang. Cho biết khoảng cách từ trọng tâm chung của culít và pít tông đặt cách cu lít một đoạn a.



Hình 12.10

<u>Bài giải:</u>

Xét cơ hệ gồm tay quay AB và cụm cu lít pít tông. Bỏ qua ma sát ở các mặt trượt, ngoại lực tác dụng lên hệ gồm : trọng lượng $\vec{P}$ và $\vec{G}$, phản lực tại gối đỡ $\vec{R}_A$. Các phản lực pháp tuyến ở mặt trượt $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ và lực $\vec{Q}$. Các lực $\vec{P}$, $\vec{G}$,

$\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ vuông góc với mặt ngang nên phương trình vi phân chuyển động khối tâm của hệ theo phương ngang viết được:

$$M\frac{d^2X_c}{dt^2} = R_x - Q, \qquad \text{ở đây: } Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2,$$

$$m_1 = \frac{P}{g}, \quad x_1 = \frac{r}{2}\cos\omega t \quad ; \quad m_2 = \frac{G}{g}; \qquad x_2 = a\ r\cos\omega t$$

Suy ra: $$Mx_c = \frac{P}{g}\frac{r}{2}\cos\omega t + \frac{G}{g}(a + r\cos\omega t)$$

Thay vào biểu thức ta được: $$R_x = Q + M\frac{d^2X_o}{dt^2};$$

Hay : $$R_x = Q - \frac{r\omega^2}{g}(\frac{P}{2} + G)\cos\omega t.$$

Đây chính là phản lực theo phương ngang tại gối đỡ A. Phản lực này có trị số cực đại bằng:

$$R_x = Q + \frac{r\omega^2}{g}(\frac{P}{2} + G) \qquad \text{khi } \varphi = \omega t = 180^0$$

12.3. ĐỊNH LÝ MÔ MEN ĐỘNG LƯỢNG

Trong phần này sẽ khảo sát mối quan hệ giữa đại lượng đo chuyển động quay là mômen động lượng với đại lượng đo mô men lực.

12.3.1. Mô men động lượng

Mô men động lượng của một chất điểm lấy đối với tâm O hay đối với trục z là đại lượng ký hiệu l_o hay l_z bằng mô men của véc tơ động lượng chất điểm ấy lấy đối với tâm O hay trục z đó. Ta có:

$$\vec{l}_o = \vec{m}_o(m.\vec{v}) = \vec{r}xm.\vec{v}; \qquad (12\text{-}23)$$

$$l_z = m_z(m.\vec{v}) = \pm m.v'.h \qquad (12\text{-}24)$$

Trong các biểu thức (12-23), (12-24) thì m là khối lượng, $\vec{v}$ là vận tốc chất điểm, v' là hình chiếu của $\vec{v}$ trên mặt phẳng vuông góc với trục z. Biểu thức (12-24) lấy dấu + khi nhìn từ chiều dương của trục z sẽ thấy v' có chiều quay vòng quanh z theo chiều ngược chiều kìm đồng hồ và lấy dấu - trong trường hợp ngược lại.

Tương tự như mô men lực dễ dàng suy ra rằng:

$$\left[\vec{l}_o\right]_z = \left[\vec{m}_o(m.\vec{v})\right]_z = m_z.(m.\vec{v}) = l_z.$$

Nghĩa là: hình chiếu trên trục z véc tơ mô men động lượng của chất điểm lấy đối với một điểm trên trục bằng mô men động lượng của chất điểm đối với trục đó.

Nếu biểu diễn mô men động lượng của chất điểm đối với 3 trục toạ độ oxyz là hàm theo toạ độ và hình chiếu của các tọa độ lên các trục ta có:

$$\vec{l} = \vec{m}_o(m.\vec{v}) = \vec{r}xm.\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mx & my & mz \end{vmatrix} = m(yz\text{-}zy)\,\vec{i} + m(zx\text{-}xz)\,\vec{j} + m(xyx)\,\vec{k};$$

$l_o = l_x\vec{i} + l_y\vec{j} + l_z\vec{k}$.   Suy ra :

$$l_x = m(yz\text{-}zy);$$

$$l_y = m(zx\text{-}xz); \qquad (12\text{-}25)$$

$$l_z = m(xy\text{-}\ yx).$$

Đối với một hệ ta có các định nghĩa sau:

Mô men động lượng của hệ đối với một tâm hay một trục là tổng mô men động lượng của các chất điểm trong hệ lấy đối với tâm hay trục đó. Ký hiệu mô men động lượng của hệ đối với tâm O và đối trục z là l_o và l_z ta có:

$$\vec{l}_o = \sum_{k=1}^{n}\vec{m}_o(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k x m_k\vec{v}_k; \qquad (12\text{-}26)$$

$$l_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} l_{kz} = \sum_{k=1}^{n} \pm m_k k_k v'_k \qquad (12\text{-}27)$$

Khi hệ là vật rắn quay quanh một trục z với vận tốc góc ω (hình 12-11) ta có:

$l_{kz} = \pm r^2_k m_k \omega.$

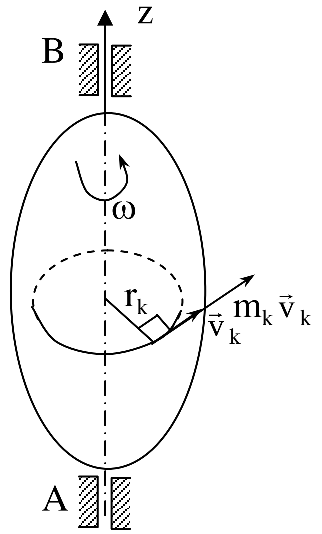
Gọi $\pm\omega = \omega_z$ ta có :

$l_{kz} = r^2_k m_k \omega_z.$

Thay vào biểu thức (12-27) ta có:

$$l_z = \sum_{k=1}^{n} l_{zk} = \sum_{k=1}^{n} r^2_k m_k \omega_z = \omega_z . \sum_{k=1}^{n} m_k r^2_k.$$

Thay $\sum_{k=1}^{n} m_k r^2_k = J_z$ ta được:



Hình 12.11

$J_z = J_z . \omega_z$

Thường người ta chọn hướng dương của trục quay để $\omega_z = \omega$ khi đó ta có:

$l_z = J_z . \omega$ (12-28)

12.3.2. Định lý mô men động lượng

<u>**Định lý 12-6**</u>: đạo hàm bậc nhất theo thời gian mô men động lượng của chất điểm lấy đối với một tâm hay đối với một trục bằng tổng hình học hay tổng đại số mô men của các lực tác dụng lên chất điểm lấy đối với tâm (hay trục đó).

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_o(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_i); \qquad (12\text{-}29)$$

$$\frac{d}{dt} m_z(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\vec{F}_i); \qquad (12\text{-}29)$$

Chứng minh: Giả thiết chất điểm chịu tác dụng của các lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, .. \vec{F}_n$. Phương trình cơ bản của động lực học viết được:

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \ .$$

Ta có thể biến đổi thành: $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_i$.

Nhân hữu hướng hai vế biểu thức trên với véc tơ định vị $\vec{r}$ nối từ tâm o tới chất điểm và lưu ý rằng:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} xm.\vec{v} = \vec{v}xm\vec{v} = 0 \text{ và } \vec{r}\,xm\ \vec{v} = \vec{m}_o(m\ \vec{v}) \text{ ta có :}$$

$$\vec{r}\,x\,\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r}\,\frac{d(m\vec{v})}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} xm\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r}xm\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}\vec{F}_i \,.$$

Biểu thức (12-29) đã được chứng minh.

Chiếu biểu thức (12-29) lên trục z ta sẽ được biểu thức (12-30).

<u>Định lý 12-7</u>: đạo hàm theo thời gian mô men động lượng của hệ đối với một tâm hay một trục bằng tổng mô men của các ngoại lực tác dụng lên hệ đối với tâm (hay trục đó).

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_o = \sum_{k=1}^{n} m_o(\vec{F}_{ke}); \qquad (12\text{-}31)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_z = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_z(\vec{F}_{ke}); \qquad (12\text{-}32)$$

Chứng minh: Xét cơ hệ có N chất điểm. Tách một chất điểm thứ k để xét. Gọi m_k, $\vec{v}_k$ là khối lượng và vận tốc của nó; gọi $\vec{F}_{ki}$, $\vec{F}_{ke}$ là nội lực và ngoại lực tác dụng lên chất điểm. Áp dụng biểu thức (12-29) cho chất điểm này ta có:

$$\frac{d}{dt}\vec{l}_{ok} = \vec{m}_o(\vec{F}_{ki}) + \vec{m}_o(\vec{F}_{ke}).$$

Cho k từ 1 đến N ta được hệ phương trình dạng trên. Nếu cộng vế với vế hệ phương trình trình trên ta được:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{l}_{ok} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(\vec{F}_{ki}) + \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(\vec{F}_{ke}).$$

trong đó:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} \vec{l}_{ok} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_{ok} = \frac{d}{dt} \vec{l}_o .$$

Còn $\sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o \left(\vec{F}_{ki}\right) = 0$ (theo tính chất của nội lực)

cuối cùng $\frac{d}{dt} \vec{l}_o = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o \left(\vec{F}_{ke}\right)$

Ta dã chứng minh được biểu thức (12-31)

Chiếu biểu thức (12-31) lên trục z sẽ được biểu thức (12-23).

Định lý 12-7 đã được chứng minh.

Chú ý: Nội lực không có trong định lý 12-7 nên có thể nói rằng nội lực không làm thay đổi mô men động lượng của hệ.

12.3.3. Định luật bảo toàn mô men động lượng

Từ biểu thức (12-31) và (12-32) ta thấy

khi $\sum \vec{m}_o(\vec{F}_{ke}) = 0$ thì $\vec{l}_o = \text{const}$

khi $\sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_{ke}) = 0$ thì $l_z = \text{const}$

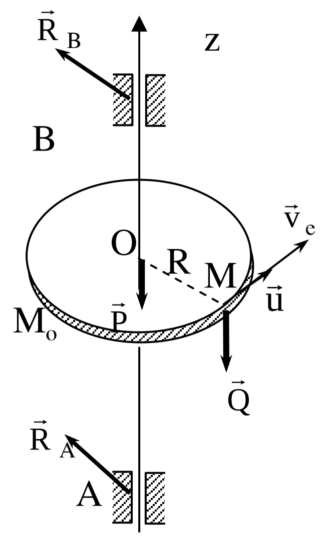
Điều này có thể phát biểu thành định luật gọi là định luật bảo toàn mô men động lượng của hệ như sau:

Nếu tổng mô men các ngoại lực tác dụng lên hệ lấy đối với một tâm o hay với trục z bằng không thì mô men động lượng của hệ với tâm o hay đối với trục z đó được bảo toàn.

Thí du 12-5: Một đĩa tròn đồng chất trọng lượng P bán kính R quay quanh trục cz thẳng đứng đặt vuông góc với đĩa. Trên vành đĩa có một viên bi trọng lượng Q. Tại thời điểm đầu $t_o = 0$ viên bi đứng yên trên đĩa quay với vận tốc ω_o. Tính vận tốc ω của đĩa tại thời điểm viên bi chuyển động tương đối so với đĩa với vận tốc u. (xem hình 12-12)

Bài giải: Xét hệ gồm đĩa và viên bi.

Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm: trọng lượng $\vec{P}$, phản lực tại các ổ trục $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$.



Hình 12.12

Đặc điểm của các lực này có $\sum m_z(\vec{F}_{ke}) = 0$

Do đó mô men động lượng của hệ được bảo toàn. Ta có: $l_z^{(o)} = l_z^{(1)}$.

ở đây:

$$L_z^{(0)} = J_z\omega_o + \frac{Q}{g}R^2\omega_o = (\frac{P}{2g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)\omega_o$$

Còn:

$$L_z^{(1)} = J_z\omega_1 + \frac{Q}{g}(Ru + R^2\omega_1) = \frac{P}{2g}R^2\omega_1 + \frac{Q}{g}(uR + R^2\omega_1)$$

Suy ra:

$$(\frac{P}{2g}R^2 + \frac{Q}{g}R^2)\omega_o = \frac{P}{2g}R^2\omega_1 + \frac{Q}{g}(uR + R^2\omega_1)$$

Hay: $\omega_1 = \omega_o - \frac{Q}{(0,5P + Q)}\frac{u}{R}$

Vận tốc góc của đĩa tại thời điểm t_1 nhỏ hơn vận tốc ban đầu. Vận tốc này càng nhỏ khi vận tốc u của bi càng lớn.

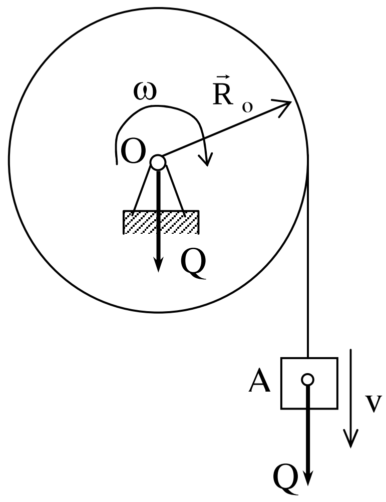
<u>Ví du 12-6</u>: Tời nâng hàng gồm trống tời bán kính r, trọng lượng P, trên nó có cuốn lớp dây cáp. Đầu của dây cáp móc vào vật có trọng lượng Q. Bỏ qua khối lượng của dây, bỏ qua ma sát. Xác định gia tôc trống tời khi vật nặng rơi xuống thẳng đứng. Biết bán kính quán tính của trống tời là ρ. (Hình 12-13).

<u>Bài giải</u>:

Xét cơ hệ gồm trống tời và vật nặng.

Các ngoại lực tác dụng lên hệ gồm trọng lực $\vec{P}$, $\vec{Q}$ và phản lực $\vec{R}_o$.

Chọn chiều dương của trục quay oz hướng vào mặt sau hình vẽ.



Hình 12.13

Áp dụng định lý mô men động lượng ta có:

$$\frac{d\vec{l}_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_{ke}) = m_z(\vec{P}) + m_z(\vec{Q}) + m_z(\vec{R}_o)$$

Ở đây ta có:

$$l_z = l(\text{trống}) + l\ (\text{vật}) = J_z\omega + \frac{Q}{g}r(r\omega).$$

$$l_z = (\frac{P}{g}\rho^2 + \frac{Q}{g}r^2)\omega$$

$m_z(P) = 0$; $\quad m_z(Q) = rQ$; $\quad m_z(R_o) = 0$.

Thay vào biểu thức ở trên ta có:

$$\frac{d}{dt}l_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{g}\rho^2 + \frac{Q}{g}r^2\right)\omega = rQ.$$

Suy ra: $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{Qrg}{P\rho^2 + Qr^2}$

12.4. ĐỊNH LÝ ĐỘNG NĂNG

12.4.1. Động năng

Động năng của chất điểm là một đại lượng vô hướng ký hiệu t bằng nửa tích số giữa khối lượng và bình phương vận tốc của chất điểm đó:

$$t = \frac{1}{2}mv^2 \tag{12-33}$$

Động năng của hệ là một đại lượng vô hướng ký hiệu T bằng tổng động năng của tất cả các chất điểm trong hệ đó:

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k v_k^2 \qquad (12\text{-}34)$$

Khi hệ là một vật rắn có thể xác định động năng trong một số trường hợp sau đây:

12.4.1.1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Vì mọi điểm trên vật đều có vận tốc như nhau và bằng vận tốc khối tâm nghĩa là $v_k = v_o$. Do đó:

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m_k\, v^2{}_c = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{k=1}^{N} m_k = \frac{1}{2} M v_c^2 \qquad (12\text{-}35)$$

Động năng của một vật rắn chuyển động tịnh tiến bằng nửa tích khối lượng của vật với bình phương vận tốc khối tâm.

12.4.1.2. Vật rắn quay quanh một trục cố định

Như đã biết trong động học, vận tốc một điểm trên vật bằng $v_k = r_k.\omega$ trong đó r_k là khoảng cách từ chất điểm thứ k đến trục quay còn ω là vận tốc góc của vật. Ta có:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$$

Thay $\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 = J_z$ là mô men quán tính của vật đối với trục quay z ta được:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \qquad (12\text{-}36)$$

Động năng của vật rắn quay quanh một trục bằng nửa tích giữa mô men quán tính của vật đối với trục quay và bình phương vận tốc góc.

12.4.1.3. Chuyển động song phẳng

Như đã thấy trong động học vật rắn chuyển động song phẳng luôn luôn có thể thay thế bằng chuyển động tính tiến của vật theo khối tâm C và chuyển động quay quanh khối tâm C. Nếu gọi vận tốc khối tâm là v_c và vận tốc góc của vật là ω dễ dàng tìm được:

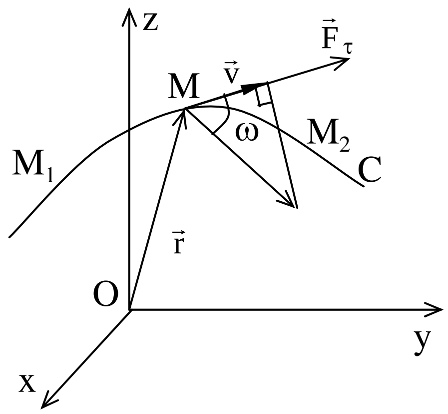
$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 \qquad (12\text{-}37)$$

trong đó M là khối lượng của cả vật, J_c là mô men quán tính của vật đối với trục quay qua khối tâm C.

Động năng của vật rắn chuyển động song phẳng bằng động năng của nó trong chuyển động tịnh tiến theo khối tâm cộng với động năng của nó trong chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng cơ sở.

12.4.2.1. Công nguyên tố của lực F (vi phân công)

Công nguyên tố của lực F khi điểm đặt di chuyển một đoạn vô cùng nhỏ ds là đại lượng vô hướng ký hiệu dA bằng tích giữa hình chiếu F_τ của $\vec{F}$ lên phương tiếp tuyến với vi phân độ dời ds.



Hình 12-14

$dA = \vec{F}_\tau d\vec{s}$

Thay $\vec{F}_\tau = F\cos\alpha$

$d\vec{s} = \vec{v}dt$

ta có: $dA = F.v.\cos\alpha dt$

Vì $F.v.\cos\alpha = \vec{F}.\vec{v}$ nên

$$dA = F.V.dt = \vec{F}.d\vec{r}. \qquad (12\text{-}39)$$

Nếu gọi X,Y,Z là hình chiếu của $\vec{F}$ và dx, dy, dz là hình chiếu của $d\vec{r}$ lên các trục ta có thể viết:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz \qquad (12\text{-}40)$$

12.4.2.2. Công của lực trên quãng đường hữu hạn

Khi điểm đặt của lực $\vec{F}$ di chuyển trên một quãng đường hữu hạn thì công của lực $\vec{F}$ là một đại lượng vô hướng ký hiệu A bằng tích phân công nguyên tố của lực trên đoạn đường M_oM_1 đó

$$A_{MoM1} = \int_{MoM1} dA \qquad (12\text{-}41)$$

Đơn vị để tính công là jun ký hiệu là J.

J = Niu tơn x mét

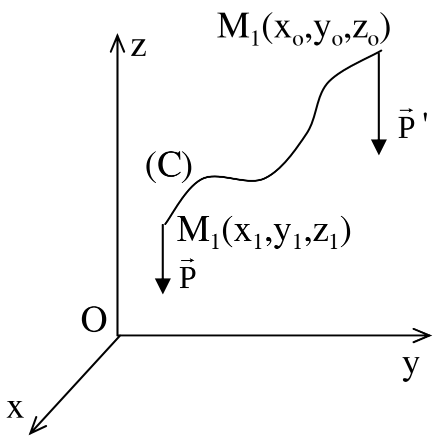
Sau đây tính công của một số lực thường gặp

- Công của trọng lực

xét một chất điểm M có trọng lượng P dời chỗ theo đường cong C trong không gian. Nếu chọn hệ toạ độ có trục oz thẳng đứng thì trọng lượng P sẽ có các hình chiếu là:

X= 0, Y = 0, Z= -P (hình 12-15)

Áp dụng công thức tính công ta có:



Hình12-15

$$A_{MoM1} = \int_{M0M1} dA = \int_{M0M1} (Xdx + Ydy + Zdz) =$$

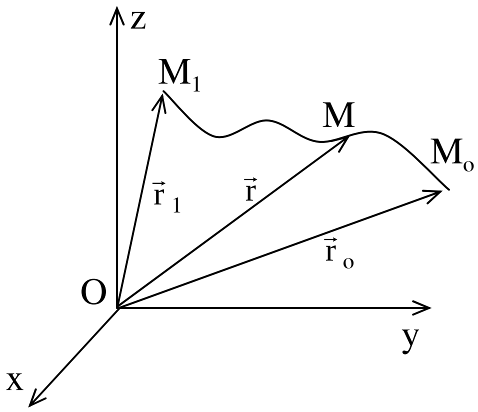
$$= \int_{z2}^{z1} -Pdz = P(z_0 - z_1) = \pm P.h \qquad (12\text{-}42)$$

Ở đây h là hiệu độ cao điểm đầu và điểm cuối của quãng đường đó, lấy dấu + khi vật chuyển động từ cao xuống thấp và lấy dấu (-) khi vật chuyển động từ thấp lên cao.

Từ biểu thức (12-42) ta thấy công của trọng lực không phụ thuộc vào quỹ đạo mà chỉ phụ thuộc vào độ cao của điểm đầu và điểm cuối.

- Công của lực đàn hồi tuyến tính

Các lực đàn hồi tuyến tính (lực đàn hồi lò xo, lực đàn hồi của các thanh chịu uốn, xoắn) được tính theo biểu thức :



Hình 12-16

$\vec{F} = -c\vec{r}$

Trong đó c là hệ số tỷ lệ được gọi là hệ số cứng, còn $\vec{r}$ là véc tơ định vị của chất điểm so với tâm của lực đàn hồi (hình 12-16).

Công của $\vec{F}_r$ trên đoạn đường M_0M_1 có thể viết :

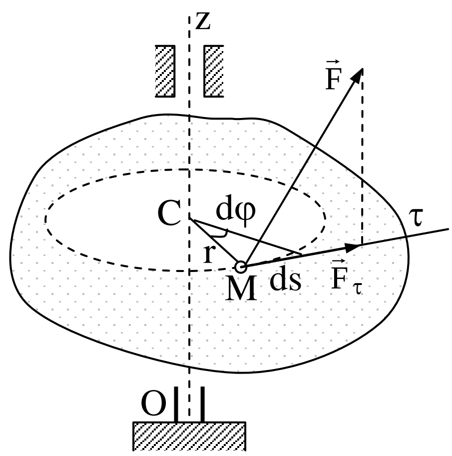
$$A_{M0M1} = \int_{M0M1} dA = \int_{r0}^{r1} F.dr = \int_{r0}^{r1} -crdr\ \frac{c}{2}\int_{r0}^{r1} d(r)^2 .$$

$$A_{M0M1} = -\frac{c}{2}\int_{r0}^{r1} d(r)^2 = \frac{c}{2}(r_1^2 - r_0^2) = \frac{c}{2}(r_0^2 - r_1^2) \qquad (12\text{-}43)$$

Nếu gọi λ là độ biến dạng của lò xo và chs ý rằng lực đàn hồi có chiều ngược với chiều chuyển động công của lực đàn hồi lò xo từ vị trí chưa biến dạng đến khi đã biến dạng là:

$$A = -\frac{c}{2}\lambda^2 .$$

Như vậy công của lực đàn hồi tuyến tính không phụ thuộc vào dạng quĩ đạo mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối cuả chuyển độngvà luôn có dấu âm .



Hình 12-17

- Công của lực đặt lên vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định (hình12-17).

$dA = F_2.dr = F.dr.cos\alpha = Fcos\alpha.r.d\varphi$

$dA = m_z(F)d\varphi \qquad (12\text{-}44)$

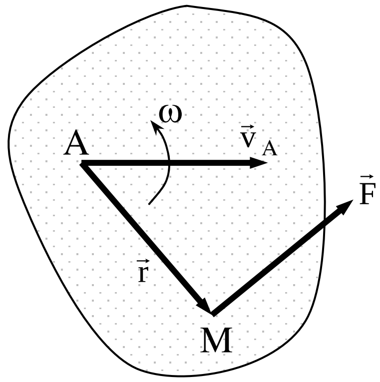
trong đó $m_z(F) = F.cos\alpha.r = F_\tau r$ là mô men của lực $\vec{F}$ đối với trục quay z.

- Công của lực $\vec{F}$ tác dụng lên điểm M thuộc vật rắn chuyển động song phẳng (hình 10-18)

Theo động học ta có: $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$ nếu vật có vận tốc góc là ω thì :

$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}.x.\vec{r}$ với $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$.

Thay vào biểu thức tính vi phân công ta được:



Hình12-18

$dA = F.V.dt = Fv_A dt + \vec{F}(\vec{\omega} x \vec{r})dt.$

$dA = \vec{F}.d\vec{r} + \vec{\omega}(\vec{r}xF)\,dt$;

$= \vec{F}.d\vec{r} + \vec{m}_A(F).\,\vec{\omega}\,dt$

Nếu gọi góc hợp bởi giữa $m_A(F)$ với trục quay là α thì

$\vec{m}_A(F)\vec{\omega} = \vec{m}_A(\vec{F})\,.\,\omega.\cos\alpha.$

Hay $m_A(F)\cos\alpha = m_z(F)$ ta được:

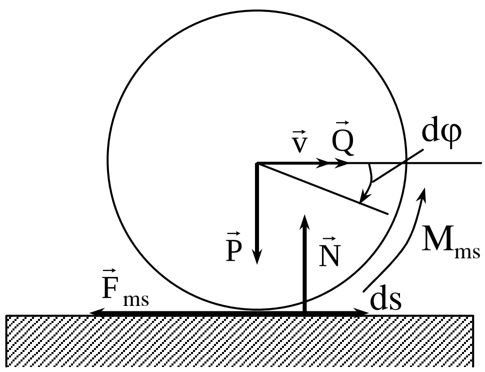
$dA = \vec{F}d\vec{r}_A + m_z(\vec{F}).d\varphi.$

Với $d\varphi = \omega dt$.

Trong trường hợp chọn cựa A trùng với khối tâm C ta được:

$dA = \vec{F}.d\vec{r}_C + m_c(\vec{F})d\varphi.$ (12-45)

Công của lực tác dụng lên vật rắn chuyển động song phẳng bằng tổng công nguyên tố của lực đó trong chuyển động tính tiến theo khối tâm và công nguyên tố của lực đó trong chuyển động quay quanh trục đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng cơ sở.



Hình 12-19

- Công của lực ma sát:

Đối với ma sát trượt do tính chất của lực ma sát là cản lại sự trượt, dễ dàng tính:

$dA = -\,F_{ms}.ds$ (12-46)

Đối với ma sát lăn, mô men ma sát M_{ms} chống lại sự chuyển động lăn của vật nên cũng tính được :

$$dA = -M_{ms}d\varphi \qquad (12\text{-}47)$$

Như vậy công của lực ma sát là những công âm.

- Công của các nội lực trong vật rắn

Xét hai chất điểm M_1 M_2 có các lực tác dụng tương hỗ là F_{12} và F_{21}. Các lực này hướng theo đường M_1M_2 và ngược chiều nhau F_{12} = - F_{21}. Tổng công nguyên tố của hai lực này là:

$$dA_1^1 + dA_2^1 = \vec{F}_{12}\,d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}d\vec{r} - \vec{F}_{12}d\vec{r}_2$$

$$= \vec{F}_{12}(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)dt.$$

Theo động học có:

$$\vec{V}_{M1} = \vec{V}_{M2} + \vec{V}_{M1M2} \text{ hay } \vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{V}_{M1M2}$$

suy ra $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_{M1M2}$. Véc tơ này luôn luôn vuông góc với M_1M_2

Vì thế ta có $F_{12}.V_{M1M2} = 0$.

Nghĩa là : $dA_1^1 + dA_2^1 = 0$.

Suy ra tổng công của tất cả các nội lực trong vật rắn với bất kỳ chuyển động nào cũng bằng không.

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^i = 0$$

Cần chú ý rằng nếu hệ không phải là vật rắn thì V_{M1M2} sẽ không vuông góc với M_1M_2 do đó $F_{12}.V_{M1M2} \neq 0$ và suy ra:

$$\sum dA_k^i \neq 0.$$

12.4.3. Định lý động năng

<u>Đinh lý 12-7</u>. Vi phân động năng của chất điểm bằng tổng công nguyên tốc của các lực tác dụng lên chất điểm đó.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} dA_i \qquad (12\text{-}48)$$

Chứng minh: Xét chất điểm khối lượng m chịu tác động của các lực ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$,... $\vec{F}_n$). Phương trình cơ bản của động lực học viết được:

$$m\vec{W} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \qquad \text{hay}$$

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ Nhân vô hướng hai vế với $d\vec{r}$ ta được :

$$md\vec{r}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\, d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} dA_1.$$

Thay $m.v.dv = d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$ ta được biểu thức: $\quad d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} dA_1.$

Định lý đã được chứng minh.

<u>Đinh lý 12-8</u>: Biến thiên động năng của một chất điểm trên một đoạn đường bằng tổng công của các lực tác dụng lên chất điểm trên đoạn đường đó.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} dA_i \qquad (12\text{-}49)$$

Chứng minh: Giả thiết chất điểm chuyển động trên đoạn đường M_0M_1. Tại vị trí ban đầu M_o chất điểm có vận tốc $\vec{V}_o$.và tại vị trí M_1 có vân tốc $\vec{V}_1$. Theo định lý 12-7 ta có:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} dA_i$$

Nếu lấy tích phân hai vế phương trình này theo các cận tương ứng tại vị trí đầu và vị trí cuối của quãng đường ta có:

$$\int_{vo}^{v1} \left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M0M1} \sum_{i-1}^{N} dA_i$$

Hay: $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} dA_i$

Đây chính là biểu thức (12-49)

Định lý 12-9: Vi phân động năng của hệ bằng tổng vi phân công của ngoại lực và nội lực tác dụng lên hệ.

$$dT = \sum_{k=1}^{N} dA_k^{\,i} + \sum_{k=1}^{N} dA_k^{\,e}$$

Chứng minh: Xét hệ N chất điểm. Gọi nội lực và ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ k là $\vec{F}_{ki}$ và $\vec{F}_{ke}$.

Theo định lý 12-7 viết được:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^{\,i} + dA^e_k.$$

Viết phương trình trên cho N chất điểm của hệ, nghĩa là cho k = 1...N ta được hệ N phương trình. Cộng vế với vế của các phương trình đó sẽ được:

$$\sum_{k=1}^{N} d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{N} dA^i_k + \sum_{k=1}^{N} dA_k^e$$

Hay: $d\sum_{k=1}^{N} \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{N} dA^i_k + \sum_{k=1}^{N} dA_k^e$

$$dT = \sum_{k=1}^{N} dA^i_k + \sum_{k=1}^{N} dA_k^e$$

Đây là kết quả cần chứng minh.

Định lý 12-10: Biến thiên động năng của hệ trên một đoạn đường hữu hạn M_oM_1 nào đó bằng tổng công của nội lực và ngoại lực tác dụng lên hệ trên đoạn đường đó.

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A^i_k + \sum_{k=1}^{N} A_k^e \qquad (12\text{-}51)$$

Chứng minh: Lấy tích phân hai vế biểu thức (12-50) theo các cận ứng với vị trí ban đầu và cuối đoạn đường M_oM_1 ta được:

$$\int_{To}^{T1} dT = \sum_{k=1}^{N} \int_{MoM1} dA^{i}{}_{k} + \sum_{k=1}^{N} \int_{MoM1} dA^{e}{}_{k}$$

$$\text{Hay } T_1 - T_o = \sum_{k=1}^{N} A^{i}_{k} + \sum_{k=1}^{N} A^{e}_{k}$$

Chú ý: khác với các định lý khác đã trình bày định lý động năng đối với hệ có kể đến nội lực. Trừ trường hợp cơ hệ là vật rắn tuyệt đối mới có thể bỏ qua ảnh hưởng của nội lực đến biến đổi của động năng.

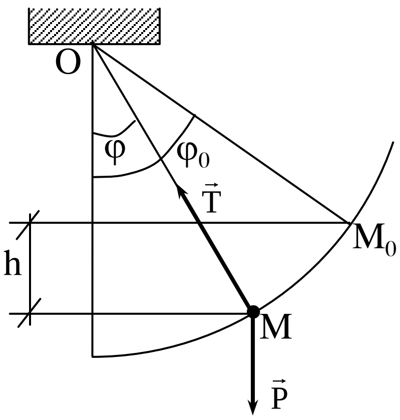
Thí du 12-7: Vật nặng treo vào đầu sợi dây có chiều dài l (hình 12-20) được thả từ vị trí M_o tương ứng có góc hợp giữa dây với đường thẳng đứng φ_o và không có vận tốc ban đầu. Tìm vận tốc của vật tại thời điểm khi sợi dây hợp với đường thẳng một góc φ.

Bài giải:

Xét chuyển động của vật nặng M. Các lực tác dụng lên vật gồm trọng lực P, lực căng T của dây.

Áp dụng định lý biến thiên động năng của vật rắn trên đoạn đường từ M_0 đến M ta có:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} A_{M0M1}$$



Hình 12-20

Ở đây $v_o = 0$; công của lực căng T bằng không vì lực này luôn vuông góc với phương tiếp tuyến. Công của trọng lực P theo biểu thức (10-42) viết được A(P) = + hP trong đó h là độ cao của điểm đầu so với điểm cuối của quãng đường.

Từ hình vẽ ta có:

$h = l(\cos\varphi - \cos\varphi_o)$

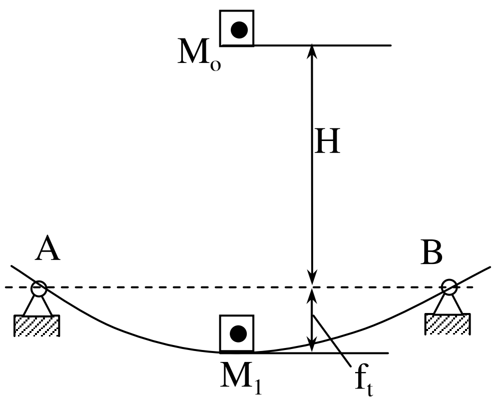
Do đó $A(P) = Pl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$. Biểu thức biến thiên động năng trong trường hợp này viết được:

$$\frac{mv^2}{2} = lP(\cos\varphi - \cos\varphi_o)$$

Suy ra:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}$$

<u>Thí du 12-8</u>: Một vật nặng được thả từ độ cao H so với mặt ngang của xà đàn hồi với vận tốc ban đầu bằng không và điểm rơi là gữa xà (hình 12-21). Khi để vật nằm tĩnh trên xà thì xà võng xuống một đoạn f_t. Hỏi độ võng f_d của xà khi vật rơi xuống xà nếu như bỏ qua trọng lượng của xà và giả thiết rằng khi vật nặng rơi xuống không bị bắn lên và không bị mất nhiệt.



Hình 12-21

<u>Bài giải</u>:

Khảo sát chuyển động của một vật nặng (coi như một chất điểm chuyển động). Trên đoạn đường rơi tự do H nó chịu tác dụng chỉ có trọng lực P. Khi chạm xà nó chuyển động cùng với xà trên đoạn đường này lác tác dụng lên vật ngoài trọng lực còn có phản lực đàn hồi F.

Áp dụng định lý biến thiên động năng trên cả đoạn đường từ lức bắt đầu rơi cho đến khi xà võng xuống ta được:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(P) + A(F) \qquad \text{(a)}$$

trogn đó $v_o = 0$; $v_1 = 0$.

$A(P) = P(H+f_d)$ ở đây f_d là độ võng của xà cần phải xác định.

$A(F) = -\frac{1}{2}cf^2{}_d$ với c là độ cứng của xà.

Để xác định c ta chú ý rằng khi vật đặt tĩnh lên xà độ võng của xà như đã cho là f_t. Từ điều kiện cân bằng ở trạng thái tĩnh ta có:

$P = c.f_t$ suy ra $c = P/f_t$

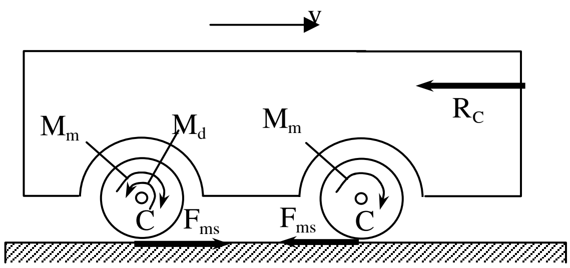
Thay kết quả tìm được vào biểu thức (a) ta được:

$$P(H+f_d) - \frac{P}{2f_t} f_d^2 = 0.$$

Hay $f_d^2 - 2f_t f_d - 2Hf_t = 0$;

$$f_d = f_t + \sqrt{f_t^2 + 2Hf_t}$$

f_d được gọi là độ võng động, nó lớn gấp nhiều lần so với độ võng tĩnh f_t. Từ biểu thức xác định f_d ta thấy ngay ở độ cao H =0 đã có $f_d = 2f_t$. H càng lớn f_d càng lớn , thí dụ khi động võng tĩnh f_t = 1mm, độ cao H = 20m thì f_d = 21mm = $21.f_t$ nghĩa là gấp 21 lần f_t.



Hình 12-22

<u>Thí du 12-9</u>: Một ô tô có trọng lượng kể cả bánh là Q. Mỗi bánh xe có trọng lượng là P bán kính r và bán kính quán tính là ρ. Trên bánh xe chủ động nhận một mô men chủ động từ động cơ là M_d làm cho ô tô chuyển động từ trạng thái đứng yên. Cho biết trong mỗi trục của bánh xe chịu một mô men ma sát là M_{ms}; Lực cản của không khí tỷ lệ bậc hai với vận tốc của ô tô $R_c = -\mu v^2$. Xác định vận tốc tới hạn của ô tô (hình 12-22).

<u>Bài giải</u>:

Để xác định vận tốc tới hạn của ô tô ta áp dụng định lý vi phân động năng.

Động năng T của ô tô xác định được theo biểu thức:

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_0^2 + 4(\frac{1}{2}J_o\omega^2) = \frac{1}{2g}(Q + 4P\frac{\rho^2}{r^2})v_0^2$$

v_o là vận tốc của tâm bánh xe và cũng là vận tốc ô tô.

Ngoại lực tác dụng lên ô tô gồm: trọng lực $\vec{P}$, phản lực pháp tuyến của mặt đường $\vec{N}$, lực ma sát $\vec{F}_{ms}$, lực cản $\vec{R}_C$. Trong các lực trên chỉ có lực cản $\vec{R}_C$ sinh công do đó:

$$\sum dA = - R_C ds_o = -\mu v^2 . ds_o$$

Nội lực trong hệ gồm có mô men chủ động M_d và mô men ma sát M_{ms}. Công của các lực này tính được:

$$\sum dA^i = (M_d - M_{ms})\, d\varphi = (M_d - M_{ms})\frac{ds}{r}$$

Thay các kết quả tìm được vào biểu thức (12-50) sẽ được:

$$\frac{1}{g}(Q + 4P\frac{\rho^2}{r^2})v_0\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{r}(M_d - M_{ms} - \mu v^2 r)\frac{ds}{dt}$$

Thay $v_o = \dfrac{ds}{dt}$ và rút gọn ta được:

$$(Q + 4P\frac{\rho^2}{r^2})w_0 = \frac{g}{r}(M_d - M_{ms} - \mu v^2 r)$$

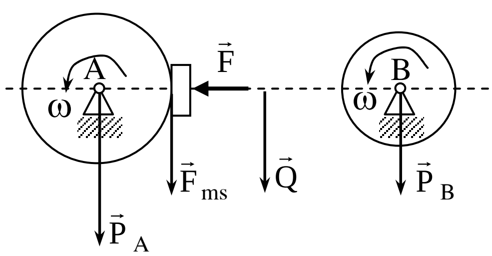
Khi v_o đạt tới giá trị tới hạn thì có nghãi là gia tố w_o =0 do đó suy ra:

$$M_d = M_{ms} - \mu r v^2_{gh} = 0$$

Hay $$v_{gh} = \sqrt{\frac{Md - 4M_{ms}}{\mu r}}$$

Đây chính là vận tốc tới hạn của ô tô.

Thí du 12-10: Bộ truyền đai có sơ đồ như hình vẽ (12-23). Bánh đai A quay với vận tốc góc ω_o. Trọng lượng chung của hai bánh đai A và B là P. Trọng lượng của dây đai là Q. Để hãm hệ thống dừng lại ta dùng một lực phanh F tác dụng vào má phanh, cho biết hệ số ma sát giữa má phanh và bánh đai A là f. Xác định số



Hình 12-23

vòng quay của bánh đai A từ lúc bắt đầu phanh cho tới khi nó dừng hẳn.

Bài giải:

Xét chuyển động của hệ bao gồm hệ hai bánh đai A,B và dây đai. áp dụng định lý biến thiên động năng cho hệ trong khoảng thời gian từ khi bắt đầu phanh cho đến khi cơ cấu dừng hẳn ta có:

$$T - T_o = \sum A^e_k + \sum A_k^1 \qquad (a)$$

ứng với thời điểm cuối là T = 0. Tại thời điểm đầu.

$$T_o = T_A + T_B + T_d$$

Giả thiết đai không có trượt ta có vận tốc đai là $V = R\omega_0$ vận tốc góc ω_B của bánh đai B là:

$$\omega_B = \frac{R\omega_o}{r}$$

Trong đó r là bán kính bánh đai B

Ta có: $T_A = \frac{1}{2}(\frac{P}{2g}R^2)\omega_0^2$;

$$T_B = \frac{1}{2}(\frac{P_B}{2g}r^2)\omega_B = \frac{1}{2}(\frac{P_B}{2g}r^2)\frac{R^2\omega_o^2}{r^2} = \frac{1}{4}\frac{P_B}{g}R^2\omega_o^2.$$

Động năng dây đai:

$$T_d = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}v^2 = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}R^2\omega_o^2.$$

Thay kết quả tìm được vào biểu thức động năng của cả hệ và chú ý rằng $P_A + P_B = P$ ta được:

$$T_o = \frac{1}{4}\frac{P + 2Q}{g}R^2\omega_o^2$$

Các lực tác dụng lên hệ gồm trọng lực, lực ma sát F_{ms} ở phanh. Trong đó chỉ có lực ma sát F_{ms} là sinh công, ta có:

$\sum A_i = 0$ và

$\sum A^e = A(F_{ms}) = -(f.F.R).\varphi = -\ f.F.R.2\pi N$ (vòng)

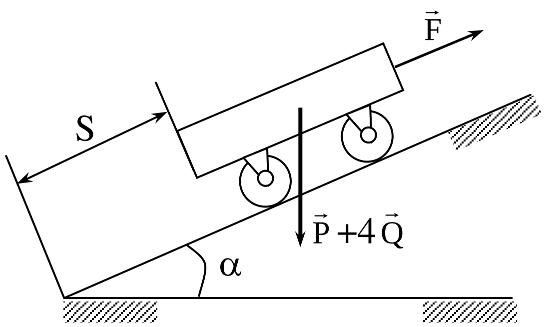
Thay vào (a) ta được:

$$T_o = \frac{1}{4}\frac{P + 2Q}{g}R^2\omega_o^2 = f.F.R.2\omega.N$$

Suy ra: $N = \frac{1}{4}\frac{P + 2Q}{2\pi gfF}R^2\omega_o^2$ (vòng).

<u>**Thí du 12-11**</u>: Một xe goòng được kéo lên dốc bởi lực F = 16KN. Trọng lượng chưa kể 4 bánh là P = 18KN. Trọng lượng mỗi bánh xe goòng là Q = 2KN (hình 12-24).

Xác định vận tốc của goòng tại thời điểm khi xe goòng đã đi được một đoạn s = 4m. Cho biết lúc đầu xe goòng đứng yên tức $v_o = 0$. Xác định gia tốc của xe goòng. Giả thiết các bánh xe chuyển động lăn không trượt và ma sát trong các trục là không đáng kể, góc nghiêng $\alpha = 30^0$.



Hình 12-24

<u>Bài giải</u>:

Để xác định vận tốc v_1 của xe goòng ta áp dụng định lý biến thiên động năng cho xe trên đoạn đường s. Ta có:

$$T_1 - T_o = \sum A^0{}_k \qquad \text{với } T_o = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1{}^2 + 4\left(\frac{3}{4}\frac{Q}{g}v_1^2\right) = \frac{1}{2g}(P + 6Q)v_1^2.$$

Ngoại lực tác dụng lên xe goòng gồm : lực kéo F, trọng lượng P và 4Q, lực ma sát F_{ms} của mặt đường lên bánh xe. Trong các lực trên lực ma sát không sinh công vì bánh xe lăn không trượt.

Ta có: $\sum A^{o} = A(F) + A(P) + 4A(Q)$

$$= QS - (P+4Q)h = FS + (P+4Q)\sin\alpha$$

Thay vào biểu thức ban đầu được:

$$\frac{1}{2g}(P + 4Q)v_1^2 = [F + (P+4Q)\sin\alpha]S \qquad \text{(b)}$$

Suy ra:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g[F + (P + 4Q)]S}{P + 6Q}} = 9{,}445 \text{ m/s}$$

Để xác định gia tốc ta đạo hàm bậc nhất theo thời gian hai vế phương trình (b) sẽ được:

$$\frac{1}{g}(P + 4Q)v\frac{dv}{dt} = [F + (P + 4Q)\sin\alpha]\frac{ds}{dt}$$

Thay $\frac{dv}{dt} = W$ và $\frac{ds}{dt} = v$ ta suy ra

$$W = \frac{F - (P + 4Q)\sin\alpha}{P + 6Q}g = 0{,}98 \text{ m/s}^2$$

12.4.4. Định luật bảo toàn cơ năng

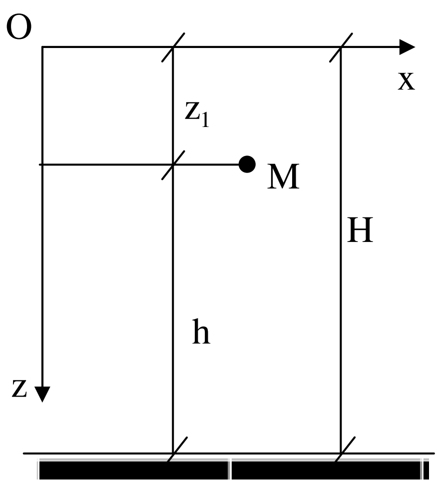
12.4.4.1. Trường lực và trường lực có thế

Trường lực là khoảng không gian vật lý mà chất điểm đặt trong đó sẽ chịu tác dụng một lực chỉ phụ thuộc vào vị trí cuả chất điểm. Trường lực thế là trường lực mà công của các lực đặt lên chất điểm không phục thuộc vào dạng quĩ đạo của chuyển động mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối quãng đường di chuyển của chất điểm. Lực trong trường lực thế gọi là lực có thế. Trường trọng lực, trường lực đàn hồi là những ví dụ về trường lực có thế; Trọng lực và lực đàn hồi là các lực có thế.

12.4.4.2 Thế năng

Xét chất điểm M đặt trong trường lực có thế. Nếu gọi vị trí M^0 là " vị trí không" hay còn gọi là mốc, và vị trí đang xét là $M^{(1)}$ (Hình 12.25) ta có định nghĩa sau:

Thế năng của chất điểm tại vị trí $M^{(1)}$ bằng công của lực có thể tác dụng lên chất điểm khi nó dời chỗ từ vị trí $M^{(1)}$ về vị trí M^0. Ký hiệu thế năng ở vị trí $M^{(1)}$ là $\pi^{(1)}$.



Hình 12-25

Ta có: $\pi^{(1)} = A_{1\text{-}0}$.

Theo định nghĩa về trường lực thế thì công của lực có thế phụ thuộc vào toạ độ của điểm đang xét do đó suy ra $\pi^{(1)} = \pi\,(x_1,y_1,z_1)$. Hàm π được gọi là hàm thế.

Chú ý rằng vì điểm M^0 là vị trí chọn tuỳ ý do đó khi chọn vị trí M^o khác nhau thế năng của chất điểm tại một vị trí nào đó sẽ sai khác nhau một hằng số.

Từ kết quả trên ta có thể viết biểu thức tính thế năng của lực trọng trường và lực đàn hồi.

Đối với lực trọng trường T ta có: $\pi^{(1)} = A_{M1M0}(P) = \pm Ph$

Trong đó h là độ cao của điểm cuối so với điểm đầu vì thế ta chọn hệ toạ độ có gốc O trùng với vị trí không còn trục oz là trục hướng thẳng đứng xuống dưới và ký hiệu H là độ cao của điểm o, z_1 là toạ độ cuả điểm đang xét ta có:

$\pm h = H - z_1$

Suy ra biểu thức tính thế năng:

$$\pi^{(1)} = P(H-z_1) \qquad (12\text{-}52)$$

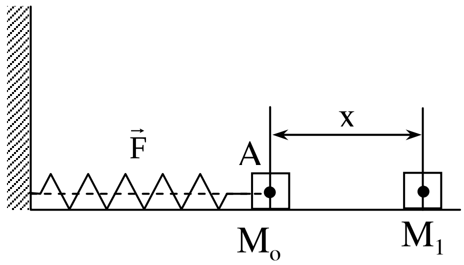
Theo biểu thức (12-52) nếu chọn điểm M^0 nằm trên mặt đất thì thế năng của vật ở độ cao z_1 sẽ tính bằng:

$\pi^{(1)} = Pz_1$.

Đối với lò xo: lực có thế $F = - cx$. với c là hệ số cứng của lò xo.

Chọn vị trí $M^{(0)}$ là vị trí mà lò xo ở trạng thái tự nhiên (không bị nén hay giãn). Khi vật ở vị trí $M^{(1)}$ ta có :

$$A_{M1M0} = \frac{1}{2}cx^2$$



Hình 12-26

Do đó suy ra:

$$\pi^{(1)}\ \frac{1}{2}cx^2 \qquad (12\text{-}53)$$

Trên đây chúng ta đã tính thế năng qua các biểu thức tính công, ngược lại chúng ta cũng có thể biểu diễn công qua thế năng như sau:

Xét chất điểm đặt trong trường lực thế và dời chỗ từ vị trí $M^{(1)}$ đến vị trí $M^{(2)}$. Khi đó ta có:

$$A_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}0} + A_{0\text{-}2} = A_{1\text{-}0} - A_{2\text{-}0}$$

Thay $A_{1\text{-}0} = \pi_1$, $A_{2\text{-}0} = \pi_2$ thì $A_{1\text{-}2} = \pi_1 - \pi_2$.

Như vậy công của lực có thế đặt vào chất điểm chuyển dời trên một đoạn đường nào đó bằng hiệu thế năng của chất điểm ở vị trí cuối của đoạn đường đó.

Mặt khác thấy rằng nếu hai điểm $M^{(1)}$ và $M^{(0)}$ gần nhau nghĩa là: $M^{(1)}(x_1,y_1,z_1)$ và điểm $M^{(2)}(x_1 + dx, y_1 + dy, z_1 + dz)$ thì có thể viết:

$dA = \pi^{(1)} - \pi^{(2)} = -\,d\pi$. Thay $dA = Xdx + Ydy + Zdz$ trong đó X,Y,Z là các thành phần của lực có thế hướng theo các trục toạ độ oy.

Mặt khác vì $\pi = \pi(x,y,z)$ nên ta có:

$$d\pi = \frac{\partial\pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\pi}{\partial z}dz$$

Đối chiếu giữa các biểu thức dA và $d\pi$ ta rút ra:

$$X = \frac{\partial\pi}{\partial x};\ Y = \frac{\partial\pi}{\partial y};\ Z = \frac{\partial\pi}{\partial z} \qquad (12\text{-}55)$$

12.4.4.3 Định luật bảo toàn cơ năng

Xét hệ đặt trong trường lực thế. Định lý động năng viết được:

$$T_1 - T_o = \sum_{k=1}^{n} A^e_k + \sum_{k=1}^{n} A_k^i = \sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Khi hệ chuyển động từ vị trí không đến vị trí 1 ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \pi_o - \pi_1.$$

Trong đó π là thế năng của hệ nội và ngoài lực. Ta có:

$$T_1 - T_o = \pi_0 - \pi_1.$$

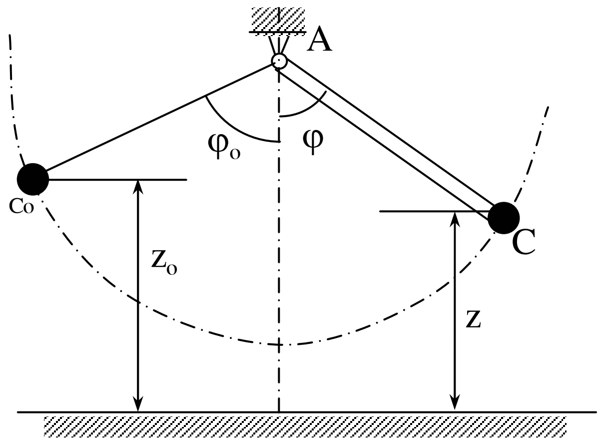
Hay $T_o + \pi_0 = T_1 + \pi_1$

Khi hệ chuyển động trong trường lực thế tổng động năng và thế năng của hệ ở mỗi vị trí là không đổi và ký hiệu là E.

$$E = T + \pi$$

Hệ các chất điểm nghiệm đúng định luật bảo toàn cơ năng được gọi là hệ bảo toan, lực có thế tác động lên hệ đó gọi là lực bảo toàn.

<u>Thí du 12-12</u>: Khảo sát con lắc (hình vẽ 12-27), chuyển động từ vị trí ban đầu xác định bởi góc φ_0 với vận tốc bằng không và có thế năng $\pi_o = Pz_0$. Trong đó P là trọng lượng của con lắc, z_o là toạ độ trọng tâm của con lắc tại thời điểm ban đầu. Bỏ qua lực cản, biết mô men quán tính của con lắc đối với điểm treo A là J_A.



Hình 12-27

Xác định vận tốc góc của con lắc tại vị trí khối tâm C có độ cao z.

Bài giải:

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho con lắc ta có:

$T_o + \pi_o = T_1 + \pi_1$ (a)

T_o và π_o là động năng và thế năng của con lắc tại thời điểm đầu tương ứng với vị trí tâm c có độ cao z_o. T_1 và π_1 là động năng và thế năng của con lắc tại vị trí khảo sát.

Theo đề bài $T_o = 0$; $\pi_0 = Pz_0$;$\pi_1 = Pz$; $T_1 = J_A\omega^2/2$

Thay vào (a) ta được:

$Pz_o = J_A\omega^2/2 + Pz$

Suy ra:

$$\omega = \sqrt{\frac{2P}{J_A}(z_o - z)}$$

Kết quả cho thấy giá trị ω phụ thuộc vào vị trí của con lắc.

Chương 13

LÝ THUYẾT VA CHẠM

13.1. CÁC ĐẶC ĐIỂM VÀ GIẢ THIẾT VỀ VA CHẠM

13.1.1. Định nghĩa

Va chạm là một quá trình động lực học đặc biệt trong đó vận tốc của vật biến đổi rõ rệt về cả độ lớn và phương chiều trong một thời gian vô cùng bé.

Thí dụ: Quả bóng đập vào tường lập tức bắn trở lại, búa đập vào đe sẽ dừng lại hẳn hay nẩy lên.v.v.

13.1.1.2. Các đặc điểm và các giả thiết đơn giản hoá

- Thời gian va chạm: Theo định nghĩa thời gian va chạm là rất nhỏ, thực tế thời gian va chạm thường bằng 10^{-2} giây, 10^{-3} giây hoặc 10^{-4} giây tuỳ thuộc vào cơ lý tính của vật va chạm. Vì thời gian va chạm rất nhỏ nên được xem là một đại lượng vô cùng bé.

Vận tốc và gia tốc: cũng theo định nghĩa thì vận tốc của vật thay đổi đột ngột và do đó lượng biến đổi vận tốc Δv của vật trong thời gian va chạm là giới nội. Mặt khác theo giả thiết thời gian va chạm là vô cùng bé nên gia tốc trung bình trong quá trình va chạm $w_{tb} = \Delta v/\tau$ là đại lượng rất lớn. Trong đó τ là thời gian va chạm.

Nếu gọi l là đoạn đường dịch chuyển trong thời gian va chạm của vật thì:

$$l = \int_0^\tau \vec{v}dt = \vec{v}_{tb}.\tau$$

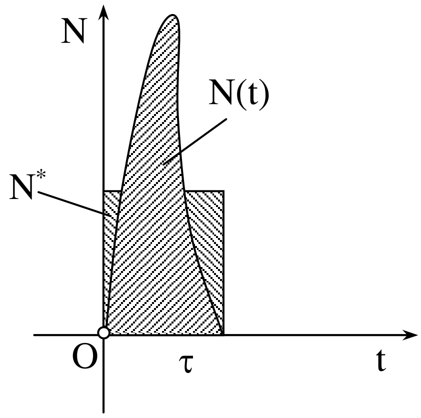
Vì τ là đại lượng vô cùng bé nên l cũng là đại lượng vô cùng bé. Để đơn giản người ta đưa ra giả thiết trong quá trình va chạm cơ hệ không di chuyển vị trí.

- Lực và xung lực va chạm

Khi va chạm ngoài các lực thường như trọng lực, lực cản.v.v. vật còn chịu tác dụng của phản lực nơi tiếp xúc (Lực tác dụng tương hỗ). Chính lực này là nguyên nhân tạo nên gia tốc chuyển động của vật trong quá trình va chạm. Lực đó gọi là lực va chạm ký hiệu $\vec{N}$.

Lực va chạm $\vec{N}$ khác với lực thường $\vec{F}$ nó chỉ xuất hiện trong quá trình va chạm, không tồn tại trước và sau va chạm.

Thường khó xác định trước được lực va chạm nhưng quy luật biến đổi của nó có thể biểu diễn trên hình (13. 1).



Hình 13-1

Vì gia tốc trong va chạm là rất lớn nên lực va chạm $\vec{N}$ cũng rất lớn. Thông thường lực va chạm lớn hơn rất nhiều so với lực thường $\vec{F}$. Mặt khác lực va chạm lại biến đổi rất rõ trong thời gian va chạm τ vô cùng nhỏ nên người ta đánh giá tác dụng của nó qua xung lực.

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho hệ trong thời gian va chạm có thể viết:

$$m_k \Delta v_k = \int_0^\tau \vec{F}_k dt + \int_0^\tau \vec{N} dt \qquad (k = 1...n).$$

Trong đó xung lực của lực thường $\int_0^\tau \vec{F}_k dt$ là rất nhỏ so với xung lực va chạm và ảnh hưởng của nó đến lượng biến đổi động lượng của hệ không đáng kể. Người ta đưa ra giả thiết là bỏ qua tác dụng của lực thường. Ta có thể viết biểu thức biến thiên động lượng của hệ trong va chạm như sau:

$$m_k \Delta v_k = \int_0^\tau \vec{N} dt = \vec{s} \qquad (13\text{-}1)$$

Biểu thức (13-1) là phương trình cơ bản trong quá trình va chạm.

- Biến dạng và hệ số hồi phục

Quan sát quá trình va chạm người ta chia ra hai giai đoạn: giai đoạn biến dạng và giai đoạn hồi phục.

Giai đoạn biến dạng trong thời gian τ_1 từ lúc bắt đầu va chạm cho đến khi vật thôi biến dạng. Giai đoạn hồi phục kéo dài trong thời gian τ_2 từ khi kết thúc giai đoạn biến dạng đến khi lấy lại hình dạng ban đầu đến mức độ nhất định tuỳ thuộc vào tính chất đàn hồi của vật. Căn cứ vào mức độ hồi phục của vật ta có thể chia va chạm thành ba loại: va chạm mềm là va chạm mà sau giai đoạn biến dạng vật không có khả năng hồi phục tức là không có giai đọan hồi phục.

Va chạm hoàn toàn đàn hồi là va chạm mà sau khi kết thúc va chạm vật lấy lại nguyên hình dạng ban đầu.

Va chạm không hoàn toàn đàn hồi là va chạm mà sau khi kết thúc va chạm vật lấy lại một phần hình dạng ban đầu.

Để phản ánh tính chất hồi phục của vật ở giai đoạn hai (gia đoạn hồi phục) ta đưa ra khái niệm hệ số hồi phục k. k bằng tỷ số giữa xung lực giai đoạn 2 và xung lực giai đoạn 1 ta có:

$$k = \frac{S_2}{S_1}$$

Với khái niệm trên ta thấy ứng với va chạm mềm k = 0; với va chạm hoàn toàn đàn hồi k =1 và va chạm không hoàn toàn đàn hồi 0 < k < 1.

13.2. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC ÁP DỤNG VÀO VA CHẠM

Căn cứ vào các giả thiết và phương trình cơ bản có thể thiết lập các định lý tổng quát trong quá trình va chạm như sau:

13.2.1. Định lý biến thiên động lượng

Xét va chạm của một cơ hệ gồm các chất điểm M_1, M_2, ... M_n có khối tâm c và vận tốc $\vec{v}_c$. Gọi khối lượng của hệ là $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$, với m_k là khối lượng của chất điểm thứ k. Ta có biểu thức động lượng của cả hệ là:

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_C$$

Gọi tổng xung lượng va chạm ngoài tác dụng lên chất điểm m_k là $\vec{S}_k^e$ và tổng xung lượng va chạm trong $\vec{S}_k^i$ ta có $\sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^i = 0$.

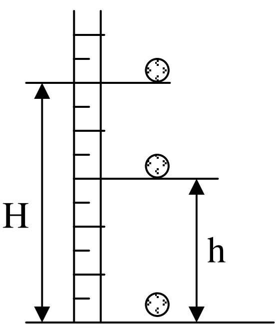
Nếu bỏ qua xung lượng của lực thường thì định lý biến thiên động lượng cho hệ viết được:

$$M\vec{V}_{C(2)} - M\vec{V}_{C(1)} = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \qquad (11\text{-}2)$$

Trong đó $\vec{V}_{C(2)}$ và $\vec{V}_{C(1)}$ là vận tốc khối tâm của hệ sau và trước lúc va chạm.

<u>Thí du 13.1</u>. Qủa cầu có trọng lượng P = 1KN rơi ở độ cao H = 3m xuống mặt phẳng nhẵn. Cho biết hệ số hồi phục k = 5/9.

Xác định xung lực va chạm s trong thời gian va chạm và vận tốc của quả cầu sau va chạm (hình 13.2).



Hình 13.2

<u>Bài giải</u>: áp dụng định lý biến thiên động lượng ta có:

$$M(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{s}$$

$\vec{u}, \vec{v}$ là vận tốc của quả cầu lúc va chạm vào mặt phẳng. Các véc tơ này có phương thẳng đứng. Chiếu biểu thức lên phương thẳng đứng ta được:

$$M\,(u + v) = S \qquad (a)$$

Vận tốc của quả cầu trước lúc va chạm là:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2.9,81.3} \approx 7,7\,m/s$$

Để xác định vận tốc u sau va chạm ta áp dụng định lý biến thiên động lượng cho từng giai đoạn biến dạng và phục hồi. Gọi v' là vận tốc của quả cầu ứng với cuối giai đoạn biến dạng ta có:

$$M(u+v') = S_1$$

S_1 là xung lượng va chạm trong giai đoạn biến dạng, ở đây v' bằng vận tốc mặt sàn nên bằng không, v' = 0 ta có:

$$Mv = S_1$$

Đối với giai đoạn hồi phục ta cũng có:

$$M(u+v') = S_2 \qquad\qquad Mu = S_2$$

Theo định nghĩa về hệ số hồi phục ta có:

$$k = \frac{s_2}{s_1} = \frac{M_u}{M_v} = \frac{u}{v} = \frac{5}{9}$$

Suy ra $u = kv = \frac{5}{9}.7,7 = 4,3$ m/s

Thay vào biểu thức (a) ta được:

$$s = \frac{P}{g}.v.(1+k) \approx 1,2\,KNS$$

Nếu lấy thời gian va chạm τ = 0,0005 giây thì lực va chạm trung bình là $N_{tb} = \frac{S}{\tau} = 2400\,KN$.

13.2.2. Định lý biến thiên mômen động lượng

Tách một chất điểm thứ k trong hệ là M_k để xét. Ta có thể viết biểu thức biến thiên mômen động lượng của chất điểm như sau:

$$\vec{m}_0.(m_k.\vec{u}_k - m_k\vec{v}_k) = \vec{m}_0(\vec{s}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{s}_k^i)$$

Thiết lập cho cả hệ ta sẽ có:

$$\sum \vec{m}_0(m_k.\vec{u}_k) - \sum \vec{m}_0(m_k\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^{N} \vec{m}_0(\vec{s}_k^e) + \sum_{i=1}^{N} \vec{m}_0(\vec{s}_k^i)$$

Ở đây $\sum_{k=1}^{N}\vec{m}_0\left(\vec{s}_k^{\,i}\right)=0$. Nếu bỏ qua lực thường thì $\sum_{k=1}^{N}\vec{m}_0\left(\vec{s}_k^{\,e}\right)$ là mômen có xung lực va chạm ngoài đối với tâm O.

Ta có:

$$\vec{L}_{0(2)}-\vec{L}_{0(1)}=\sum_{k=1}^{N}\vec{m}_0\left(\vec{S}_k^{\,e}\right) \qquad (13\text{-}13)$$

Trong đó $\vec{L}_{0(2)}$; $\vec{L}_{0(1)}$ là mômen động lượng của hệ đối với tâm O tại thời điểm sau và trước lúc va chạm.

Chiếu biểu thức (13-3) lên một trục Ox nào đó ta được:

$$L_x(2) - L_x(1) = \sum_{k=1}^{N} m_x\left(\vec{s}_k^{\,e}\right) \qquad (13\text{-}3)'$$

Trong biểu thức (13-3), $L_x(2)$ và $L_x(1)$ là mômen động lượng của hệ đối với trục Ox, còn $\sum_{k=1}^{N} m_x\left(\vec{s}_k^{\,e}\right)$ là tổng mô men lấy đối với trục Ox cả xung lực va chạm ngoài S_k^e.

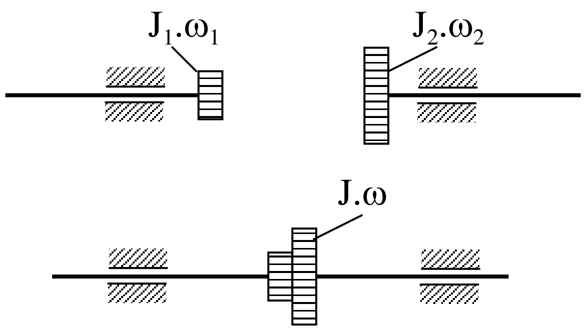
Biểu thức (13-3)' được áp dụng cho va chạm của các vật chuyển động quay.

<u>Thí du 13-2</u>: Hai bánh răng độc lập với nhau quanh cùng một trục với vận tốc góc là ω_1 và ω_2. Cho biết mômen quán tính của chúng đối với trục quay là ω_1 và ω_2. Cho biết mômen quán tính của chúng đối với trục quay là J_1 và J_2. Cho hai bánh răng đột ngột ăn khớp với nhau. Xác định vận tốc góc ω sau va chạm của hai bánh răng.

<u>Bài giải</u>:

Bỏ qua tác dụng của trọng lượng và lực ma sát. Xét hệ gồm cả hai bánh răng, khi đó xung lực va chạm tại răng ăn khớp là xung lực trong (nội xung lực).

Như vậy xung lực va chạm ngoài $\sum S_k^e = 0$. Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng ta có:



Hình 13.3

$$L_x(2) - L_x(1) = 0 \tag{a}$$

Mômen động lượng của hệ trước lúc va chạm là:

$$L_x(1) = J_1\omega_1 + J_2\omega_2$$

Mômen động lượng của hệ sau va chạm là:

$$L_x(2) = (J_1 + J_2)\omega$$

Thay vào biểu thức (a) ta được:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\,\omega$$

Suy ra:
$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$$

13.2.3. Định lý động năng

Định lý biến đổi động năng đối với các bài toán va chạm không thể áp dụng được. Nguyên nhân trong quá trình va chạm ta đã giả thiết di chuyển là không đáng kể. Mặt khác thực tế cho thấy khi va chạm động năng của vật thường bị mất mát để chuyển hoá thành nhiệt năng và gây ra biến dạng dư (đối với va chạm không hoàn toàn đàn hồi). Nếu gọi lượng động năng là ΔT thì rõ ràng $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$.

Trong đó T_1 và T_2 là động năng của hệ ngay trước và sau va chạm. Lượng mất động năng ΔT phụ thuộc vào nhiều yếu tố: Trạng thái chuyển động, tính chất cơ lý của vật. Trong kỹ thuật tuỳ thuộc vào yêu cầu của bài toán đặt ra mà ta cần tăng hay giảm lượng mất động năng.

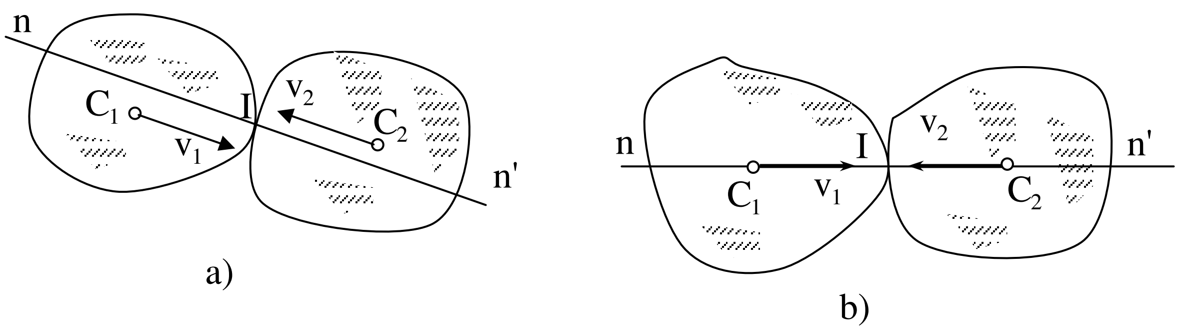
Thí dụ khi sử dụng va chạm vào việc gây biến dạng như rèn, dập vật liệu ta phải tìm cách tăng lượng mất động năng ΔT. Trái lại khi cần sử dụng va chạm vào việc gây chuyển của vật thể như đóng cọc, đóng đinh thì phải tìm cách giảm lượng mất động năng ΔT.

13.3. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ VA CHẠM

13.3.1. Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến

13.3.1.1. Định nghĩa

Xét hai vật có khối lượng máy biến áp và m_2 chuyển động tịnh tiến với vận tốc v_1 và v_2 va chạm vào nhau (hình 13-4).



Hình 13.4

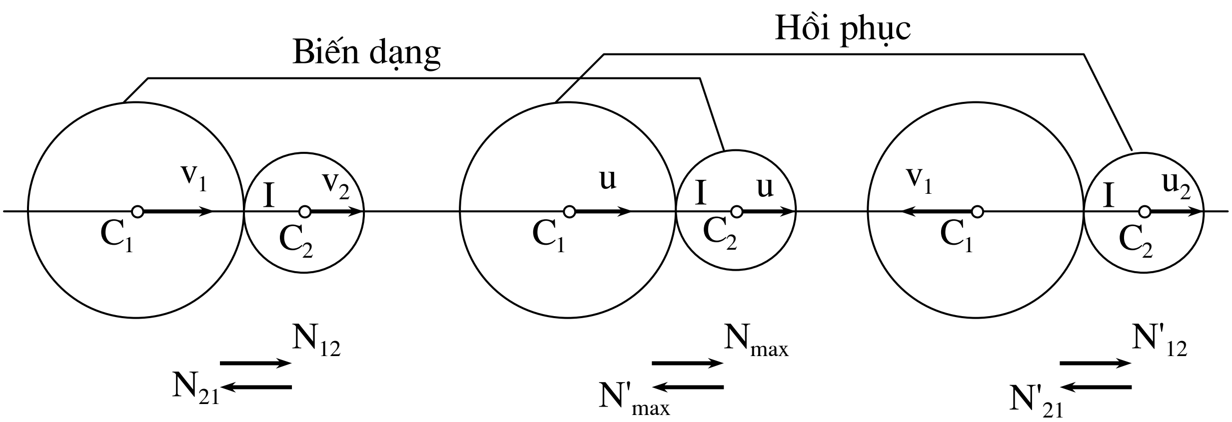
- Va chạm thẳng: Là va chạm trong đó các vận tốc v_1 và v_2 đều song song với pháp tuyến chung nn'. Đường nIn' gọi là đường va chạm.

- Va chạm xuyên tâm: là va chạm trong đó đường va chạm nIn' trùng với đường xuyên tâm c_1Ic_2 của vật (hình 13-4b).

13.3.1.2. Bài toán va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến

Cho hai quả cầu có khối lượng M_1 và M_2 chuyển động tịnh tiến theo đường xuyên tâm c_1c_2 với các vận tốc $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ va chạm nhau. Cho biết M_1, M_2, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ và hệ số hồi phục k, tìm vận tốc $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ của hai quả cầu sau va chạm, đồng thời thiết lập biểu thức mất động năng ΔT của hệ.

Mô hình cơ học được mô tả trên hình (13-5).



Hình 13.5

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho mỗi quả cầu ở giai đoạn biến dạng và giai đoạn hồi phục ta có:

$$M_1 (u - v_1) = S_{21} = - S \qquad (a)$$

$$M_2 (u - v_2) = S_1 = S \qquad (b)$$

Giai đoạn hồi phục:

$$M_1 (u_1 - u) = S'_{21} = - S' \qquad (c)$$

$$M_2 (u_2 - u) = S'_{12} = S \qquad (d)$$

Theo định nghĩa về hệ số hồi phục ta có thêm phương trình:

$$S' = k.S \qquad (e)$$

Trong 5 phương trình trên có 5 ẩn số là u, u_1, u_2, S, S' ta có thể giải và tìm ra kết quả sau:

$$u = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 u_1 + M_2 u_2}{M_1 + M_2}$$

$$u_1 = V_1 - (1+k).\frac{M_2}{M_1 + M_2}.(V_1 - V_2)$$

$$u_2 = V_2 - (1+k).\frac{M_2}{M_1 + M_2}.(V_1 - V_2) \qquad (13\text{-}4)$$

$$S = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\left|V_1 - V_2\right|$$

$$S = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\left|u_1 - u_2\right|$$

Trong trường hợp này lượng mất động năng ΔT được xác định như sau:

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

Với $T_1 = \frac{M_1 u_1}{2} + \frac{M_2 v_2}{2}$ là động năng của hệ sau va chạm.

Ta có:

$$\Delta T = \frac{M_1}{2}.(V_1^2 - u_1^2) + \frac{M_2}{2}(V_2^2 - u_2^2)$$

Thay giá trị của u_1 và u_2 từ biểu thức (11-4) ta được:

$$\Delta T = \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)}.(1-k^2)(v_1 - v_2)^2 \qquad (13\text{-}5)$$

So với động năng ban đầu của búa $T_0 = \dfrac{M_1 v_1^2}{2}$

Ta có:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = (1-k^2)\frac{M_2}{M_1 + M_2} = \frac{1-k^2}{1+\dfrac{M_1}{M_2}} = \eta$$

η gọi là hiệu suất của búa. Rõ ràng muốn tăng hiệu suất của búa ta phải tăng khối lượng của đe.

Nếu áp dụng biểu thức (13-5) vào búa đóng cọc ta sẽ thấy kết quả ngược lại. Vì phải giảm lượng mất động năng nên hiệu suất của búa được tính theo biểu thức:

$$\eta = \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0}$$

Suy ra:

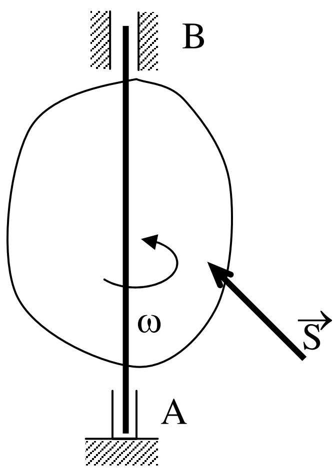
$$\eta = 1 - \frac{1-k^2}{1+\dfrac{M_1}{M_2}}$$

Muốn tăng hiệu suất của búa ta phải tăng tỷ số $\dfrac{M_1}{M_2}$ nghĩa là phải tăng khối lượng của búa để đảm bảo khối lượng búa lớn hơn nhiều lần so với khối lượng cọc.

__13.3.2.2. Va chạm của vật rắn chuyển động quay quanh một trục__

Khảo sát vật rắn quay quanh trục (hình 13-6). Tại thời điểm nào đó vật chịu tác dụng xung lực va chạm $\vec{S}$. Khi áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng có:

$$L_z(1) - L_z(2) = m_z(S)$$



Hình 13.6

Nếu gọi vận tốc góc của vật trước và sau va chạm là

ω_0 và ω_1 ta sẽ có:

$$J_z(\omega_1 - \omega_0) = m_z(S) \tag{13-6}$$

Từ (13-6) có thể tính vận tốc cả vật sau va chạm:

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_z(S)}{J_z} \tag{13-7}$$

Ở đây J_z là mômen quán tính của vật đối với trục quay z.

Trong va chạm của vật quay các xung lực, phản lực ở ổ đỡ là $\vec{s}_A$ và $\vec{s}_B$ rất có hại vì nó làm tiêu hao năng lượng và gây hư hỏng ở ổ đỡ trục. Nhiệm vụ của bài toán là tìm cách hạn chế các xung lực $\vec{s}_A$ và $\vec{s}_B$.

Giải quyết vấn đề trên ta áp dụng định lý động lượng đối với vật. Để đơn giản ta giả thiết lúc đầu vật đứng yên tức là ω=0, ta có:

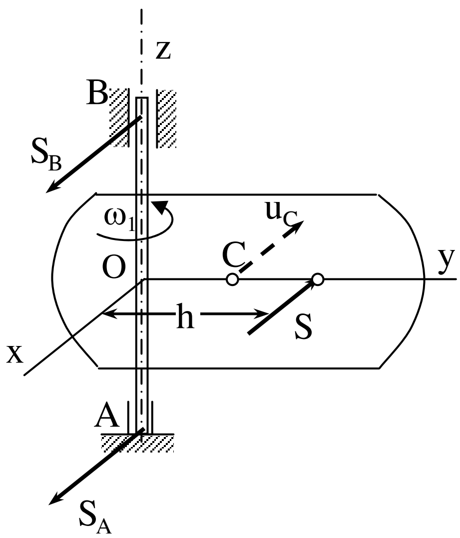
$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B$$

Vì $\omega_0 = 0$ nên $\vec{K}_0 = 0$ phương trình còn lại:

$$\vec{K}_1 = M\vec{u}_c = \vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B \tag{a}$$

M là khối lượng của vật, $\vec{u}_0$ là vận tốc khối tâm của vật sau va chạm. Để cho $\vec{s}_A = \vec{s}_B = 0$ từ (a) ta phải có điều kiện $\vec{S} = M\vec{u}_c$.

Vì vật quay quanh trục z nên u_0 có phương vuông góc với OC và nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay đi qua C. (Xem hình 13-7). Mặt phẳng đó là mặt phẳng oxy.



Hình 13.7

Ta suy ra điều kiện thứ nhất để $\vec{s}_A$ và $\vec{s}_B$ triệt tiêu là xung lực S phải nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay và song song với vận tốc $\vec{u}$ nghĩa là cũng vuông góc với OC.

Về trị số $S = Mu_c = M.a.\omega_1$.

Thay $\omega_1 = \dfrac{m_Z(S)}{J_Z}$ ta có: $S = M.a.\dfrac{S.h}{J_Z}$

Suy ra: $\frac{M.a.h}{J_Z} = 1$ hay $h = \frac{J_Z}{M.a}$

Kết luận: Để xung lượng va chạm ở các ổ đỡ bằng không cần phải thoả mãn các điều kiện sau:

1. Xung lực va chạm S phải đặt trong mặt phẳng oxy qua khối tâm c của vật và vuông góc với trục quay z.

2. Xung lực S phải đặt vuông góc với đường OC nối từ trục quay qua c tại điểm k đặt cách trục quay một đoạn h.

$$h = \frac{J_Z}{M.a}$$

Điểm K được xác định như trên gọi là tâm va chạm.

Từ biểu thức (13-8) ta nhận thấy rằng khi khối tâm C nằm trên trục quay thì điểm K ở xa vô cùng vì khi đó h = ω. Trong trường hợp này ổ đỡ luôn luôn nhận xung lực va chạm khác không.

<u>Thí du 13-3</u>: Thanh AB có khối lượng M, mômen quán tính đối vơi trục quay A là J_k. Chuyển động với vận tốc ω_0 va đập vào vật C có khối lượng m đang đặt đứng yên trên rãnh k (hình 13-8). Xác định vận tốc sau va chạm của thanh AB và vật C cũng như xung lực tại ổ trục A. Kích thước cho trên hình vẽ.

Bài giải:

Gọi xung lực va chạm tác dụng lên vật C là $\vec{S}_2$ và xung lực tác dụng lên vật AB là $\vec{S}_1$ ta có:

$S_1 = S_2 = S$

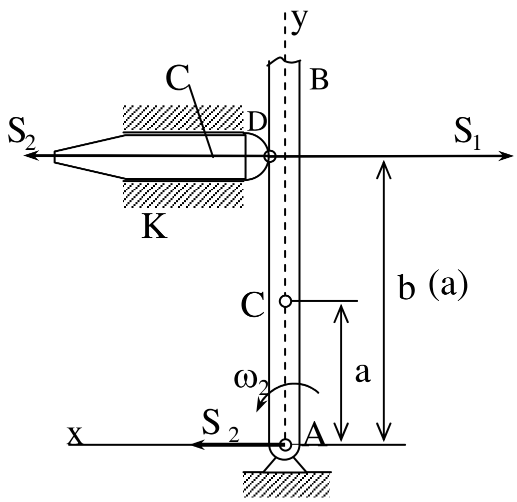
Phương trình biểu diễn định lý biến thiên mômen động lượng cho thanh AB viết được:

$J_A(\omega_1 - \omega_0) = -S.b$

Phương trình biểu diễn định lý biến thiên động lượng cho vật C viết được:

$mu_c - mv_c = S$ ở đây $v_0 = 0$

do đó chỉ còn:



Hình 13.8

$mu_c = S$ (b)

Xét cả hệ số:

$L_A^{(1)} - L_A^{(0)} = \sum m_A\left(\vec{S}_c\right) = 0$

suy ra: $L_A^{(1)} = L_A^{(0)}$ hay

$J_A\,\omega_0 = J_A.\omega_1 + m.u.b = J_A\,\omega_1 + m.\omega_1.b^2$

$\omega_1\,(J_A + mb^2) = J_A.\omega_0$ suy ra:

$$\omega_1 = \frac{J_A.\omega_0}{J_A + mb^2} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{mb^2}{J_A}}$$

$$u = \omega_1 b = \frac{\omega_0 b}{1 + \frac{mb^2}{J_A}} \qquad S = M.u = \frac{\omega_0 b}{\frac{1}{m} + \frac{b^2}{J_A}}$$

Phần 4

CÁC NGUYÊN LÝ CƠ HỌC

Cùng với hai vấn đề đã nghiên cứu là phương trình vi phân của chuyển động và các định lý tổng quát của động lực học; các nguyên lý cơ học trình bày dưới đây sẽ cho ta một phương pháp tổng quát khác giải quyết có hiệu quả và nhanh gọn nhiều bài toán động lực học của cơ hệ không tự do.

Các nguyên lý cơ học là phần cơ sở của cơ học giải tích. Căn cứ vào nguồn năng lượng và đặc điểm kết cấu của cơ hệ, cơ học giải tích sử dụng công cụ giải tích toán học để thiết lập phương trình vi phân chuyển động và tìm cách tích phân các phương trình đó. Trong phần này chỉ giới thiệu một số vấn đề cơ bản nhất của cơ học giải tích cụ thể là chỉ thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ không tự do và nêu lên một số tính chất của nó mà ta không đi sâu vào phương pháp tích phân các phương trình đó.

Chương 14

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

14.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ HỆ

Để làm cơ sở cho việc thiết lập các nguyên lý cơ học trước hết nêu một số khái niệm cơ bản về cơ hệ không tự do.

14.1.1. Liên kết và phân loại liên kết

14.1.1.1. Cơ hệ không tự do

Cơ hệ không tự do là một tập hợp nhiều chất điểm mà trong chuyển động của chúng ngoài lực tác dụng ra vị trí và vận tốc của chúng còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.

14.1.1.2. Liên kết và phân loại liên kết

Liên kết là điều kiện ràng buộc chuyển động lên các chất điểm của cơ hệ không tự do. Các biếu thức toán học mô tả các điều kiện ràng buộc đó gọi là phương trình liên kết. Dạng tổng quát của phương trình liên kết có thể viết :

$f_i(r_k, v_k, t) \geq 0$ $\qquad$ j = 1...m ; k = 1...n

j là số thứ tự các phương trình liên kết.

k là số thứ tự các chất điểm trong hệ.

Phân loại liên kết

Căn cứ vào phương trình liên kết ta có thể phân loại liên kết thành : liên kết dừng hay không dừng ,liên kết giữ hay không giữ , liên kết hình học hay động học

Nếu liên kết mà phương trình không chứa thời gian t gọi là liên kết dừng. Ngược lại phương trình liên kết chứa thời gian t gọi là liên kết không dừng hay hữu thời

Nếu liên kết mà phương trình mô tả bằng đẳng thức ta gọi là liên kết giữ hay liên kết hai phía. Nếu liên kết có phương trình mô tả bằng bất đẳng thức gọi là liên kết không giữ hay liên kết một phía.

Nếu liên kết có phương trình không chứa vận tốc v gọi là liên kết hình học hay liên kết hô nô nôm. Ngược lại nếu liên kết có phương trình chứa yếu tố vận tốc v gọi là liên kết động học hay không hô nô nôm.

Sau đây nêu một vài thí dụ về các loại liên kết.

Cơ cấu biên tay quay OAB biểu diễn trên hình (14-1) có phương trình liên kết :

$x_A^2 + y_A^2 = r^2$;

$(x_B + x_A)^2 + y_A^2 = l^2$;

$y_B = 0$.

Các phương trình liên kết trên thể hiện liên kết dừng, giữ và hô nô nôm.

Bánh xe bánh kính R lăn không trượt trên đường thẳng (hình 14-2) có phương trình liên kết :

$y_0 \geq R$;

$V_P = 0$;

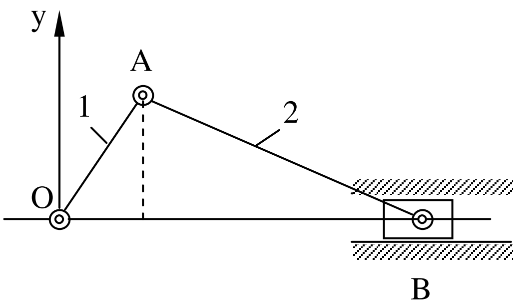
Liên kết này là liên kết dừng, không giữ và không hô nô nôm.

Vật A treo vào đầu sợi dây vắt qua ròng dọc cố định B. Đầu kia của dây được cuốn lại liên tục theo thời gian. Giữ cho vật dao động trong mặt phẳng oxy thẳng đứng (hình 14-3). Phương trình liên kết được viết :

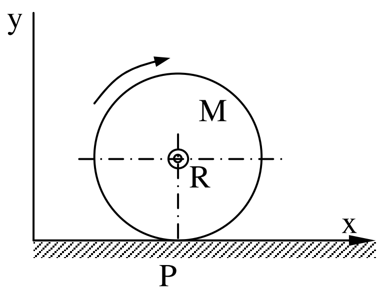
$x_A^2 + y_A^2 = \leq l^2(t)$;

$z_A \quad = 0$.

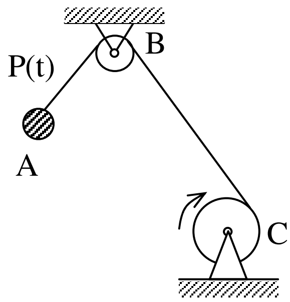
Liên kết này không dừng, không giữ và hô nô nôm.



Hình 14.1



Hình 14.2



Hình 14.3

14.1.2. Toạ độ suy rộng.

Toạ độ suy rộng là các thông số định vị của cơ hệ. Ký hiệu toạ độ suy rộng là q_j ; q_j có thể đo bằng đơn vị độ dài, đơn vị góc quay, điện lượng...

Nếu số các toạ độ suy rộng đủ để xác định vị trí của hệ ta gọi là toạ độ suy rộng đủ. Nếu số toạ độ dư thừa nghĩa là vượt quá số toạ độ cần thiết để xác định vị trí của hệ gọi là toạ độ dư. Số các toạ độ dư được liên hệ với nhau bằng biểu thức dạng :

$f_i(q_k, q_k, t) \geq 0$ gọi là phương trình liên kết.

Cơ cấu tay quay thanh truyền biểu diễn trên hình 14-1 nếu chọn $q_1 = \varphi$ và $q_2 = \Psi$ thì giữa q_1 và q_2 có phương trình :

$r\sin q_1 - l\sin q_2 = 0.$

Nếu chọn $q_1 = x_A$ và $q_2 = y_A$ thì giữa q_1 và q_2 có phương trình :

$q_1^2 + q_2^2 = r^2$;

$q_1 = R\cos q_3$.

14.1.3. Di chuyển khả dĩ của cơ hệ

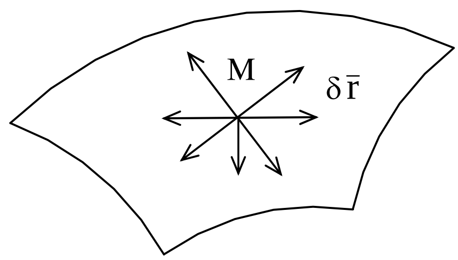
Di chuyển khả dĩ là di chuyển vô cùng nhỏ của cơ hệ tại vị trí đang xét sang vị trí lân cận mà cơ hệ có thể thực hiện phù hợp với liên kết đặt liên hệ. Để phân biệt với di chuyển thực dr ta ký hiệu di chuyển khả dĩ là ∂r .

Nếu gọi $\vec{r}_k$ và $\vec{r}_k^{\,'}$ là véc tơ định vị của chất điểm thứ k trong hệ tại vị trí đang xét và tại vị trí lân cân thì $\partial\vec{r}_k = \vec{r}_k - \vec{r}_k^{\,'}$ ta có :

$f_j(r_k^{'}, v_k^{'}, t) - f_j(r_k, v_k, t) = 0 \quad (j = 1...m).$

Với định nghĩa trên ta thấy di chuyển thực khác với di chuyển khả dĩ ở chỗ :

Di chuyển thực $d\vec{r}$ phụ thuộc vào lực tác dụng và điều kiện đầu và liên kết đặt lên hệ còn di chuyển khả dĩ chỉ phụ thuộc vào liên kết đặt lên hệ mà thôi. Chính vì thế di chuyển thực chỉ có một còn di chuyển khả dĩ có thể có một hoặc nhiều. Đối với hệ chịu liên kết dừng di chuyển thực sẽ trùng với một trong số các di chuyển khả dĩ. Trong cơ cấu tay quay thanh truyền (hình 14-1) di chuyển khả dĩ của hệ là một tập hợp các véc tơ ∂r_A và ∂r_B thoả mãn điều kiện liên kết như sau : Hình chiếu lên AB của ∂r_A bằng hình chiếu lên Ab của ∂r_B. Chất điểm đặt lên mặt cong (hình 14-4) có di chuyển khả dĩ là tập hợp các véc tơ $\partial\vec{r}$ tiếp tuyến với mặt cong tại vị trí đang xét.



Hình 14.4

14.1.4. Bậc tự do của cơ hệ

Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là có nhiều tuy nhiên mức đọ nhiều có hạn chế. Trong số các di chuyển khả dĩ của cơ hệ có thể có một hay một số m di chuyển cơ sở. Các di chuyển còn lại được biểu diễn qua các di chuyển cơ sở nói trên. Các di chuyển cơ sở độc lập tuyến tính với nhau và đúng bằng thông số định vị của cơ hệ tức là bằng số toạ độ suy rộng đủ. Ta goi các số di chuyển khả dĩ cơ sở của hệ là số bậc tự do m của hệ.

Trong cơ cấu tay quay thanh truyền rõ ràng số bậc tự do m = 1, và có thể chọn một trong φ hay μ làm di chuyển cơ sở.

Số bậc tự do của hệ càng cao thì mức độ tuỳ ý của các di chuyển khả dĩ càng lớn có thể xác định số bậc tự do của cơ hệ bằng biểu thức : m = r - s.

Trong đó r là số toạ độ dư và s là số phương trình liên kết.

14.1.5. Liên kết lý tưởng - Lực suy rộng

14.1.5.1. Liên kết lý tưởng

Nếu tổng cộng nguyên tố của phản lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều triệt tiêu thì liên kết đặt lên cơ hệ được gọi là liên kết lý tưởng.

Gọi $\vec{N}_k$ là phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k; ∂r_k là véc tơ di chuyển khả dĩ của chất điểm đó thì theo định nghĩa trên ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{N}_k . \partial\vec{r}_k = 0 \qquad (14\text{-}1)$$

Trong thực tế nếu cần bỏ qua lực ma sát và tính đàn hồi của vật thể tạo thành cơ hệ thì đa số các cơ hệ thoả mãn biểu thức trên vsf như vậy chúng chịu các liên kết lý tưởng. Khi phải kể đến các lực ma sát và tính đàn hồi của vạt thể ta vẫn dùng dược khái niệm liên kết lý tưởng trên đây nhưng phải xem các lực do ma sát hoặc do tính đàn hồi của vật thể tác dụng lên cơ hệ như là các hoạt lực.

Vật rắn tuyệt đối tự do là một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Quả vậy nếu ta xét một cặp chất điểm M, N bất kỳ trong vật thì lực tác dụng tương hỗ giữa chúng là F, F' với F = -F'. Gọi ∂r và ∂r' là các véc tơ di chuyển khả dĩ của chất điểm M, N, ta có :

$$\sum_{k=1}^{2}\vec{N}_k\partial\vec{r}_k = \vec{F}.\partial\vec{r} + \vec{F}'\partial\vec{r}\,' = \vec{F}\left(\partial\vec{r} + \partial\vec{r}\,'\right).$$

Theo động học vật rắn ta có :

$\partial\vec{r} = \partial\vec{r}\,' + \partial\overrightarrow{MN}$ nghĩa là : $\partial\vec{r} - \partial\vec{r}\,' = \partial\overrightarrow{MN}$. Véc tơ MN có độ lớn không đổi nên $\partial\overrightarrow{MN} = \left(\partial\vec{r} - \partial\vec{r}\,'\right)$ vuông góc với $\vec{F}$. Cuối cùng suy ra $\vec{F}.\left(\partial\vec{r} - \partial\vec{r}\,'\right) = 0$, hay $\sum_{k=1}^{n}\vec{N}_k\partial\vec{r}_k = 0$, điều này chứng tỏ vật rắn tự do là cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Hai vật rắn có bề mặt trơn nhẵn tiếp xúc với nhau tạo thành một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Cũng dễ dàng nhận thấy hai vật rắn có bề mặt trơn nhẵn tiếp xúc với nhau tạo thành một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

Dây mềm không dãn vắt qua ròng rọc khi bỏ qua sự trượt của dây và bỏ qua ma sát ổ trục cũng là một cơ hệ chịu liên kết lý tưởng.

14.1.5.2. Lực suy rộng

Xét cơ hệ N chất điểm, có m toạ độ suy rộng đủ $q_1q_2...q_m$. Biểu thức tổng công của các hoạt lực trong một di chuyển khả dĩ nào đó của cơ hệ có thể viết:

$$\sum_{k=1}^{n}\partial A_k^a = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k . \qquad \text{(a)}$$

Trong đó $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{a}}$ là tổng các hoạt lực tác dụng lên chất điểm M_k ; ∂r_k là di chuyển khả dĩ của chất điểm M_k tại vị trí đang xét.

Biểu diễn véc tơ định vị $\vec{r}_k$ và di chuyển khả dĩ $\partial\vec{r}_k$ qua các toạ độ suy rộng ta có :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k\left(q_1 q_2,.........q_m\right);$$

$$\partial\vec{r}_k = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_1 + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_2 + \dots\dots\dots \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_m \ .$$

Thay kết quả vào biểu thức (a) ở trên ta được

$$\sum_{k=1}^{N}\partial A_k^a = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_1 + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_2 + \dots\dots\dots \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_m\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_1 + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_2 + \dots\dots\dots\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_m$$

$$Q_1\partial q_1 + Q_2\partial q_2 + \dots\dots\dots\dots\dots Q_n\partial q_n = \sum_{j=1}^{n}Q_j\partial q_j$$

Đại lượng $Q_j = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}$ được gọi là lực suy rộng tương ứng với toạ độ suy rộng q_j.

Ta có định nghĩa : Lực suy rộng Q_j ứng với toạ độ suy rộng q_j là đại lượng vô hướng biểu thị bằng hệ số của biến phân tương ứng trong biểu thức tổng công của các hoạt lực tác dụng lên cơ hệ trong di chuyển khả dĩ bất kỳ của cơ hệ đó.

Bản chất vật lý của lực suy rộng phụ thuộc vào bản chất vật lý của toạ độ suy rộng tương ứng. Chẳng hạn ta thường gặp :

Toạ độ suy rộng q_j là độ dài thì Q_j là lực; là góc quay thì Q_j là mô men lực ; q_j là điện lượng thì Q_j là điện thế. q_j là điện thế thì Q_j là điện lượng.

Trong thực hành để xác định lực suy rộng Q_j ta có phương pháp sau đây. Cho hệ một di chuyển khả dĩ với $\partial q_j \neq$ còn các biến phân khác của toạ độ suy rộng cho bằng không, sau đó tính công của các lực trong di chuyển đố của hệ. Theo định nghĩa trên ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}\partial A_k^a = \sum_{j=1}^{n}Q_j\partial q_j$$

Vì các biến phân $\partial q \neq \partial q_j$ đều triệt tiêu nên biểu thức trên viết được :

$$\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a = \sum_{j=1}^{n} Q_j \partial q_j$$

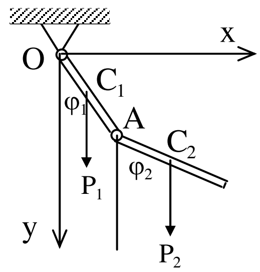
Từ đây suy ra biểu thức xác định lực suy rộng Q_j ;

$$Q_j = \frac{\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a}{\partial q_j}$$

Thí du 14.1 : Xác định lực suy rộng tương ứng với toạ độ suy rộng của hệ con lắc vật lý kép biểu diễn trên hình (14-5). Cho biết trọng lượng của mỗi con lắc đều bằng P và đặt tại điểm giữa C1, Chứng từ của các con lắc ; Độ dài của mỗi con lắc là 1.

Bài giải :

Chọn toạ độ suy rộng đủ của hệ là các góc φ_1 φ_2 như trên hình vẽ. Gọi các lực tươnh ứnh là Q_1, Q_2. Trước hết xác định Q_1, ta cho hệ một di chuyển khả dĩ sao cho $\partial\varphi_1 \neq 0$ còn $\partial\varphi_2 = 0$. Công của các hoạt lực P_1, P_2 trong di chuyển đó tính được :



Hình 14.5

$$\sum_{k=} \partial A_k^a = -P.\frac{1}{2}\sin\varphi_1, \partial\varphi_1 - P_2 l \sin\varphi_1 \partial\varphi_1 \;\; ;$$

$$= \frac{3Pl}{2} l \sin\varphi_1 \partial\varphi_1 = Q_1 \partial\varphi_1 \;\; .$$

Suy ra :

$$Q_1 = -\frac{3Pl}{2} l \sin\varphi_1 \;\; .$$

Để tính Q_2 cho hệ một di chuyển khả dĩ với $\partial\varphi_1 = 0$ còn $\partial\varphi_2 \neq 0$. Khi đó chỉ có con lắc AB di chuyển và công của hoạt lực trong di chuyển này là :

$$\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a = -P_2.\frac{1}{2}\sin\varphi_2 \partial\varphi_2 = -P.\frac{1}{2}\sin\varphi_2 \partial\varphi_2 = Q_2 \partial\varphi_2 \;\; .$$

Suy ra : $Q_2 = -P.\frac{1}{2}\sin\varphi$.

14.2.1. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Khi cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng thì điều kiện cần và đủ để nó cân bằng tại vị trí đang xét là tổng công của các hoạt lực trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ tại vị trí đạng xét bằng không.

$$\sum_{k=1}^{N} \partial A_k^a = \sum \vec{F}_{ka}.\partial \vec{r}_k = 0 \ .$$

Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Xét cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng. Giả sử ở vị trí đang xét hệ can bằng. Ta phải chứng minh điều kiện cần có là $\sum F_{ka}.\partial \vec{r}_k = 0$. Thật vậy, vì hệ cân bằng nên chất điểm M_k trong hệ cũng cân bằng. Nếu gọi $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{a}}$ và $\vec{\mathbf{N}}_{\mathbf{k}}$ là hoạt lực và phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm khảo sát ta sẽ có :

$$\vec{F}_k^a + \vec{N}_k = 0 \ .$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ tại vị trí đang xét và gọi $\partial \vec{r}_k$ là di chuyển của chất điểm M_k ta cũng có thể viết :

$$\vec{F}_k^a.\partial \vec{r}_k + \vec{N}_k.\partial \vec{r}_k = 0 \ .$$

Viết cho cả hệ, nghĩa là cho k tiến từ 1 đến N sau đó cộng vế với vế của các biểu thức sẽ được :

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial \vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial \vec{r}_k = 0 \ .$$

Vì liên kết là lý tưởng nên $\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial \vec{r}_k = 0$ do đó cần phải có

$$\vec{F}_k^a.\partial \vec{r}_k = 0 \ .$$

Sau đây chứng minh điều kiện đủ.

Giả thiết cơ hệ thoả mãn điều kiện $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial \vec{r}_k = 0$ ta phải chứng minh rằng điều kiện này đủ để cho hệ tự cân bằng ở vị trí đang xét. Thật vậy nếu cơ hệ thoả mãn điều kiện trên mà không cân bằng thì chứng tỏ nó phải khởi động tại vị trí đang xét đó. Như vậy biến thiên của hệ phải dương. dT > 0. Theo định lý động năng ta có :

$$dT = \sum dA_k^a = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k + \sum \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k .$$

Với hệ chịu liên kết dừng thì di chuyển thực dr sẽ trùng với một trong các di chuyển khả dĩ. Ta có $dr = \partial\vec{r}_k$.

Thay vào biểu thức trên ta được :

$$dT = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k.}^a\partial\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k > 0$$

Vì hệ chịu lực liên kết lý tưởng nên :

$$+\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0 \ .$$

Chỉ còn lại : $dT = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k.}^a\partial\vec{r}_k > 0$.

Điều này trái với giả thiết đã nêu, chứng tỏ cơ hệ không thể khởi động tại vị trí đang xét nghĩa là khi thoả mãn điều kiện $\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0$ thì chác chắn cơ hệ sẽ cân bằng.

14.2.2. Phương trình cân bằng tổng quát của cơ hệ không tự do

Từ điều kiện cân bằng $\sum_{k=1}^{N} \vec{N}_k.\partial\vec{r}_k = 0$ có thể thiết lập phương trình tổng quát cho cơ hệ dưới hai dạng toạ độ Đề các và toạ độ suy rộng.

- Dạng toạ độ Đề các .

Gọi X_k^a, Y_k^a, Z_k^a là hình chiếu của hoạt lực $\vec{F}_k^a$ và ∂x_k, $\partial y_{k,}$ ∂z_k, là hình chiếu của di chuyển $\partial\vec{r}_k$ lên các trục toạ độ oxyz. Ta có thể viết phương trình cân bằng của hệ dưới dạng phương trình sau đây:

$$\sum \partial A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\partial\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \left(X_k^a\partial x_k + Y_k^a\partial y_k + Z_k^a\partial z_k\right). \qquad (14\text{-}3)$$

Phương trình này gọi là phương trình cân bằng tổng quát của hệ dưới dạng toạ độ Đè các.

- Dạng toạ độ suy rộng.

Xét hệ có m toạ độ suy rộng đủ $q_1q_2....q_m$. Điều kiện cân bằng của hệ có thể viết :

$$\sum \partial A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^s.\partial\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} Q_j \partial q_j = 0 \ .$$

Nếu hệ chịu liên kết hình học (hô nô nôm) thì các ∂q_j là độc lập với nhau và dễ dàng suy ra các điều kiện cân bằng sau đây :

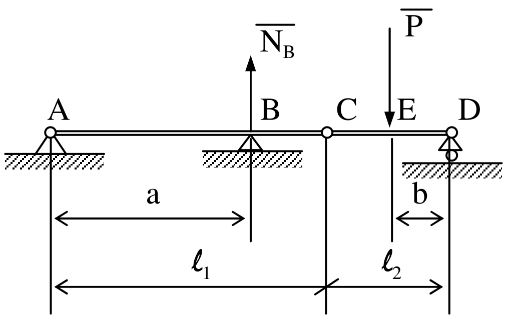
$$Q1 = 0 \ ; \ Q2 = 0 \ ; \ ......Qm = 0. \qquad (14\text{-}4)$$

Các phương trình (12-3) và (12-4) chính là điều kiện cân bằng tổng quát của cơ hệ chịu liên kết dừng, hô nô nôm là lý tưởng.

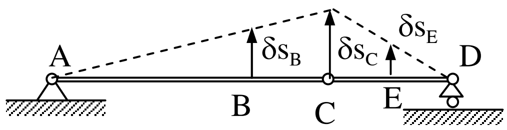
Sau đây là các bài toán thí dụ.

Thí du 14 .1

Xà kép gồm hai đoạn AC và chuyển động nối với nhau bằng khớp bản lề ở C. Trên đoạn chuyển động có lực tập trung P tác dụng theo phương vuông góc với xà tại E. Xác định phản lực tại gối đỡ di động B. Kích thước két cấu xà cho trên hình (14-6a).



Hình 14.6a



Hình 14.6b

Bài giải :

Để xác định phản lực N_B ta giải phóng liên kết (gối tựa di động) tại B và thay vào đó phản lực N_B.

Cho hệ di chuyển khả dĩ với ∂S_B, ∂S_c, ∂S_{cE} như hình vẽ.

Phương trình cân bằng tổng quát cho hệ viết được :

$\sum \partial A_k^a = N_B \partial S_B - P.\delta S_E = 0$. Trong đó :

$\partial S_E = \frac{b}{a}\frac{l_1}{l_2}\partial S_B$ .Phương trình cân bằng còn viết được :

$$N_B \partial S_B - P.\frac{b}{a}.\frac{l_1}{l_2}\partial S_B = 0 \text{ hay } N_B - P.\frac{b}{a}\frac{l_1}{l_2} = 0$$

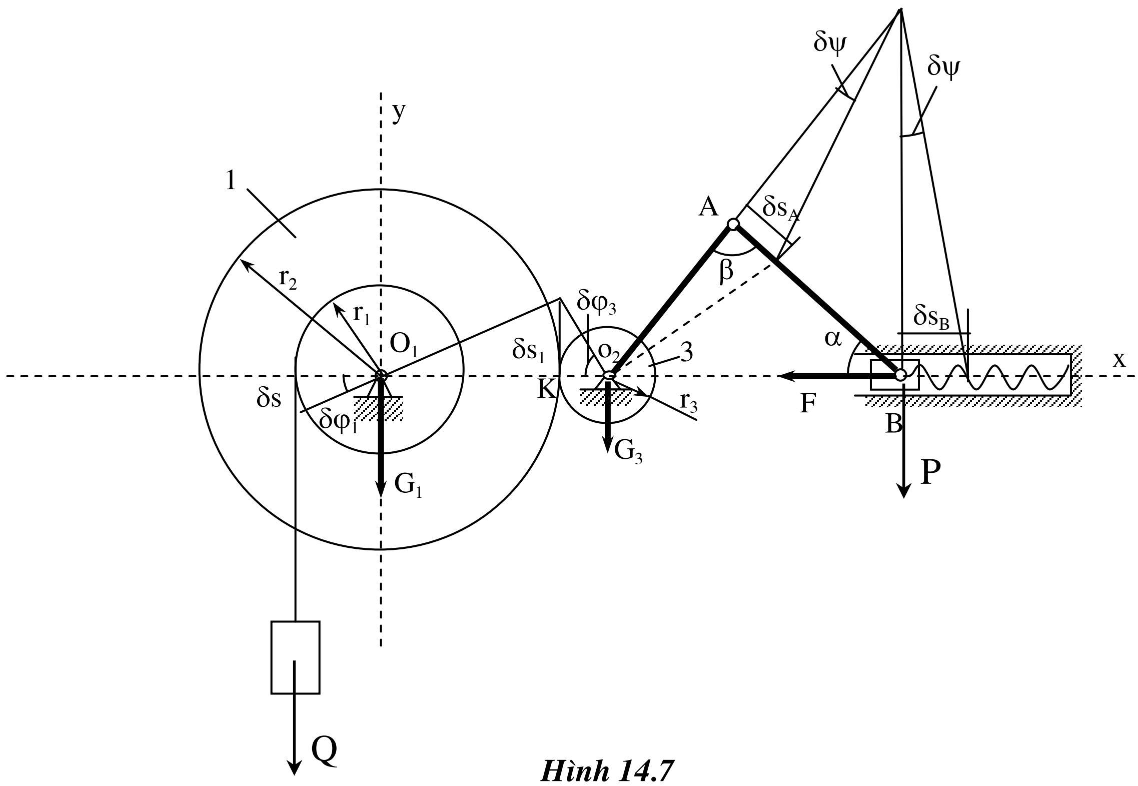
Suy ra :

$$N_B = P.\frac{b}{a}\frac{l_1}{l_2}.$$

Kết quả cho ta giá trị dương chứng tỏ chiều của phản lực N_B chọn như hình vẽ là đúng.

Thí dụ 142: Cho cơ cấu chịu tác dụng các lực cân bằng biểu diễn trên hình (14-7).

Xác định độ biến dạng h của lò xo nếu cho Q = 100N; độ cứng lò xo c = 5N/cm; r_1 = 20cm; r_2 = 40cm; r_3 = 10cm; OA = 50cm; $\alpha = 30^0$; $\beta = 90^0$.



Hình 14.7

Bài giải:

Xét hệ bao gồm vật D đến con trượt B. bỏ qua ma sát ở trục và mặt trượt liên kết đặt lên hệ là dừng, một phía, hô nô nôm và lý tưởng.

Hoạt lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng $\vec{Q}, \vec{G}_1, \vec{G}_3, \vec{P}$ và các lực đàn hồi $\vec{F}$ của lò xo. Trong các lực trên chỉ có lực $\vec{Q}$ và $\vec{F}$ là sinh công.

Cho hệ một di chuyển khả dĩ với ∂s là di chuyển của vật D làm cơ sở. Ta có thể tìm được ci chuyển của điểm B như sau :

Ta có : $\partial\varphi_1 = \dfrac{\partial s}{r_1}$

Điểm tiếp xúc K giữa hai bánh răng 2 và 3 có di chuyển ∂s_1 với :

$\partial s_1 = r_1\partial\varphi_1 = \dfrac{r_2}{r_1}\partial s$. di chuyển góc quay của bánh răng 3 sẽ là

$\partial\varphi_3 = \dfrac{\partial s_1}{} \dfrac{r_2}{r_1 r_3}$.

Vì thanh O_3A gắn với bánh răng A nên điểm A có di chuyển :

$\partial s_A = O_3A.\partial\varphi_3 = l\dfrac{r_2}{r_1 r_3}\partial s$.

Ta có thể xác định di chuyển của B thông qua ∂s_A. Vì thanh AB chuyển động song phẳng với P là tâm vận tốc tức thời nên suy ra :

$\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{\partial s_B}{\partial s_A}$, hay : $\partial a_B = \dfrac{PA}{PB}\partial s_A$.

Trong tam giác APB ta có : $\dfrac{PB}{PA} = \dfrac{1}{\cos 30^0}$.

Nên : $\partial s_B = \dfrac{r_2}{r_1 r_3 \cos 30^0}\partial s$.

Thiết lập điều kiện cân bằng cho hệ nhờ nguyên lý di chuyển khả dĩ. Ta có:

$$\sum \vec{F}_k \partial\vec{r}_k = Q\partial s - F\partial s_B = 0 \quad \text{Thay } F = c \,.\, h$$

ta được : $Q\partial s - c.h\dfrac{r_2}{r_1 r_3 \cos 30^0}\partial s = 0$.

Suy ra : $h = \dfrac{Q}{c}\dfrac{r_1 r_3 \cos 30^0}{r_2}\partial s = \dfrac{100.20.10.0{,}87}{5.40.50} = 1{,}74\text{cm}$.

Như vậy hệ cân bằng khi lò xo bị nén một đoạn h = 1,74cm.

Chương 15

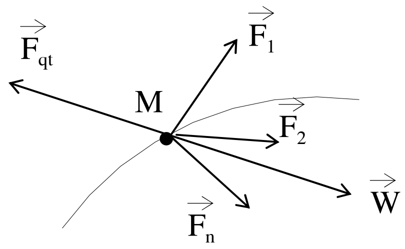
NGUYÊN LÝ DA LAM BE

15.1. LỰC QUÁN TÍNH VÀ NGUYÊN LÝ DA LAM BE ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

Xét chất điểm có khối lượng m chuyển động với gia tốc $\vec{W}$ dưới tác dụng các của lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2 ..... \vec{F}_n$ (hình 15-1).

Phương trình cơ bản của động lực học viết cho chất điểm :

$$m\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\vec{F}_n = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ .$$



Hình 15.1

Chuyển các số hạng của phương trình trên sang một vế được :

$$\sum \vec{F}_i + \left(- m\vec{W}\right) = 0 . \qquad (1)$$

Số hạng $\left(- m\vec{W}\right)$ có thứ nguyên của lực bằng tích số giữa khối lượng m với gia tốc w, cùng phương nhưng ngược chiều với gia tốc được gọi là lực quán tính của chất điểm và ký hiệu là $\vec{F}_{qt}$.

Ta có $\vec{F}_{qt} = -m\vec{W}$.

Thay vào phương trình (1) ta được :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{F}_{qt} = 0 .$$

Các lực $\sum \vec{F}_i$ và lực $\vec{F}_{qt}$ đồng quy tại chất điểm vì vậy có thể viết :

$$\left(\vec{F}_1 \vec{F}_2 ......\vec{F}_n, \vec{F}_{qt}\right) = 0 \ . \qquad (15\text{-}1)$$

Biểu thức (15-1) biểu diễn nguyên lý Đa Lam Be cho chất điểm và được phát biểu như sau :

Khi chất điểm chuyển động, các lực thực sự tác dụng lên chất điểm (bao gồm các hoạt lực và phản lực liên kết) cùng với lực quán tính của nó tạo thành một hệ klực cân bằng.

Điều kiện cân bằng của hệ lực biểu diễn nguyên lý Đa Lam Be cho chất điểm viết được :

$\Sigma X_i = X_1 + X_2 + ... + X_n + X_{qt} = 0.$

$\Sigma Y_i = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n + Y_{qt} = 0.$

$\Sigma Z_i = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n + Z_{qt} = 0.$

Trong đó :

X_i , Y_i , Z_i và X_{qt} , Y_{qt} , Z_{qt} là các hình chiếu của lực F_i thực sự rác động len chất điểm của lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ lên các trục oxyz.

Chú ý :

1. Lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ không đặt lên chất điểm, đó là lực tưởng tượng thêm vào để có nguyên lý Đa Lăm Be. Thực tế lực quán tính đặt vào liên kết của chất điểm. Thí dụ khi buộc một vật nặng vào đầu một sợi dây và quay thì lực thực sự tác dụng lên vật trong trường hợp này chỉ có trọng lực, lực căng của dây, lực cản không khí, còn lực quán tính của vật lại đặt lên sợi dây và có xu hướng đứt dây.

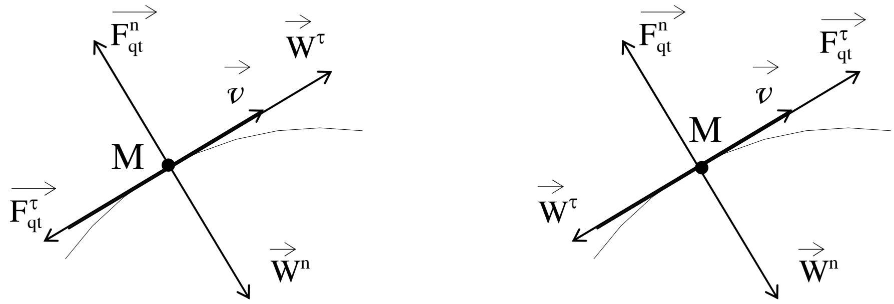
2. Khi chất điểm chuyển động cong, gia tốc của chất điểm có hai thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến do đó lực quán tính cũng có hai thành phần tương ứng. Ta có :

$\vec{W} = \vec{W}^{\tau} + \vec{W}^{n}$.

$\vec{F}_{qt} = -m\vec{W} = -m\vec{W}^{\tau} - m\vec{W}^{n} = \vec{F}^{\tau}_{qt} + \vec{F}^{n}_{qt}$.

Trong đó lực quán tính tiếp tuyến $\vec{F}^{\tau}_{qt}$ có phương tiếp tuyến với quỹ đạo có chiều phụ thuộc vào tính chất chuyển động của chất điểm. Nếu $W = \dfrac{dv}{dt} > 0$ thì lực quán tính tiếp tuyến ngược chiều với vận tốc của chất điểm.

$W^{\tau} = \dfrac{dv}{dt} < 0$ thì lực quán tính tiếp tuyến cùng chiều với vận tốc của chất điểm. Vì vậy gia tốc pháp tuyến W^n luôn luôn cùng hướng vào tâm của đường conh tại vị trí đang xét nen $\vec{F}^{n}_{qt}$ luôn luôn có chiều hướng từ tâm đường cong ra ngoài vì thế $\vec{F}^{n}_{qt}$ được gọi là lực quán tính ly tâm (hình 15-2)

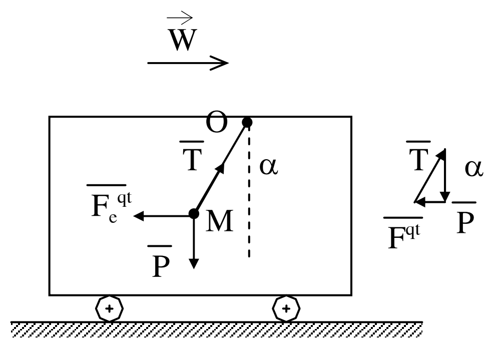


Hình 15.2

Nhờ nguyên lý Đa Lăm Be ta có thể giải thích các bài động lực học của chất điểm bằng phương pháp giải bài toán cân bằng của hệ lực đồng quy đã biết trong tĩnh học.

<u>Thí dụ 15-1</u>

Một bóng đèn có trọng lượng P treo trên trần của toa tầu đang chạy. Tại một thời điểm nào đó người ta thấy dây treo đèn lệch đi so với phương đứng một góc α. Tình gia tốc của tầu tại thời điểm đó. Tính lực căng của dây (hình 15-3).



Hình 15.3

<u>Bài giải</u> :

Xét chuyển động của bóng đèn. Gọi gia tốc của bóng đèn là $\vec{W}$ ta có : các lực thực sự tác dụng lên bóng đèn là trọng lực $\vec{P}$, lực căng $\vec{T}$ của dây. Lực quán tính của bóng đèn là :

$$\vec{F}_{qt} = -\frac{P}{g}\vec{W} \ .$$

Theo nguyen lý Đa Lăm Be có :

$$\left(\vec{P},\vec{T},\vec{F}_{qt}\right) \quad 0$$

Hệ lực này gồm 3 lực đồng quy ta có thể thiết lập điều kiện cân bằng của chúng bằng tam giác khép kín như trên hình (15-3b).

Từ tam giác lực này suy ra : $F_{qt} = P\text{tg}\alpha$.

Hay $\qquad mw = pt\text{g}\alpha = mg\text{tg}\alpha;$

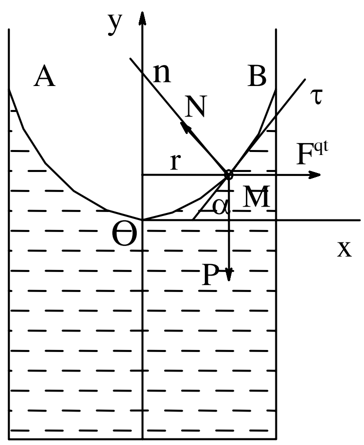
$w = gtg\alpha.$

Tại thời điểm xét coi bóng đèn là cân bằng tương đối trong toa tầu do đó gia tốc của bóng đàn cũng chính là gia tốc của toa xe.

Cuối cùng lực căng T tính được ; $T = \dfrac{P}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}P.$

Ta có phương chièu biểu diễn như hình vẽ.

<u>Thí du 15-2</u> : Một bình hình trụ chứa chất lỏng quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc không đổi ω_0. Tìm dạnh mặt thoáng chất lỏng ở vị trí cân bằng tương đối (hình 15-4).



Hình 15.4

<u>Bài giải</u>:

Xét mọt phần tử chất lỏng M nằm trên mặt thoáng.

Giả thiết mặt phẳng oxy cắt mặt thoáng theo giao tuyến AOB di qua điểm M (hình 15-4). Các lực thực sự tác đọng lên chất điểm M gồm : Trọng lực $\vec{P}$ phản lực $\vec{N}$ của phần chất lỏng còn lại tác dụng lên chất điểm có hướng theo pháp tuyến Mn.

Lực quán tính của chát điểm là $\vec{F}_{qt} = m\vec{W}$ vì khối lỏng quay đều quanh trục quay nên gia tốc $\vec{W}$ chỉ gồm thành phần pháp tuyến $\vec{W}^n$ và lực quán tính $\vec{F}_{qt}$ có phương chiều như hình vẽ :

$F_{qt} = F_{qt}^{\,n} = m\omega^2.x$,

ở đây x là toạ độ của điểm M.

Áp dụng nguyên lý Đa Lăm Be cho chất điểm M ta có :

$\left(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{qt}\right) \sim 0.$

Phương trình cân bằng của hệ lực này trên trực tuyến Mτ viết được :

$m\ x\ \omega^2\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$;

α là góc nghiêng của đường tiếp tuyến với trục x.

Suy ra $tg\alpha = \dfrac{\omega^2}{g}.x$

Thay $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx}$ ta được : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\omega^2}{g}.x$

Hay $dy = \dfrac{\omega^2}{g}.x.dx$.

Lấy tích phân hai vế theo các cận tương ứng có :

$$\int_0^y dy = \int_0^y \frac{\omega^2}{g}.x.dx \quad ,$$

Hay $y = \dfrac{\omega^2}{2g}.x^2$.

Như vậy đường AOB là đường parabol và mặt thoáng của chất lỏng là một mặt paraboloit tròn xoay nhận trục oy là trục đối xứng.

15.2. NGUYÊN LÝ ĐA LĂM BE ĐỐI VỚI HỆ

15.2.1. Nguyên lý

Xét hệ gồm n chất điểm : $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$.

Tách một chất điểm M_k ra xét. Gọi $\vec{F}_k^i$ và $\vec{F}_k^e$ là tổng các nội lực và tổng các ngoại lực tác dụng lên chất điểm. Nếu chất điểm chuyển động với gia tốc $\vec{W}_k$ thì lực quán tính của chất điểm sẽ là $\vec{F}_{qtk} = -m_k\vec{W}_k$.

Áp dụng nguyên lý Đa Lăm Be cho chát điểm ta có :

$\left(\vec{F}_k^i, \vec{F}_k^e, \vec{F}_{qtk}\right)$ 0.

Cho k tiến từ 1 ... n ta được n hệ lực cân bằng viết theo dạng trên. Tất cả các hệ lực đó hợp lại thành một hệ lực cân bằng :

$\left(\vec{F}_k^i, \vec{F}_k^e, \vec{F}_{qtk}\right)$ 0. (k = 1.... n) (15-3)

Biểu thức (15-3) biểu diễn nguyên lý Đa Lăm Be đối với hệ và được phát biểu như sau :

Khi hệ chuyển động các lực thực sự tác dụng lên hệ (kể cả nội lực và ngoại lực) cùng với lực quán tính của hệ tạo thành một hệ lực cân bằng.

Hệ lực biểu diễn bởi biểu thức (15-3) là hệ lực bất kỳ trong không gian và vậy điều kiện cân bằng của hệ có thể viết như sau :

$$\sum_{ki=1}^{N}\left(\vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e + \vec{F}_{qtk}\right) = 0\ ;$$

$$\sum_{ki=1}^{N}\left[\vec{m}_0(\vec{F}_k^i) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_{qtk})\right] = 0\ .$$

Vì $\sum_{ki=1}^{N}\vec{F}_k^i = 0$ nên phương trình còn lại :

$$\sum_{ki=1}^{N}\left(\vec{F}_k^e + \vec{R}^{qt}\right) = 0\ ;$$

$$\sum_{ki=1}^{N}\left[\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{M}_0^{qt}\right] = 0 \qquad (15\text{-}4)$$

Trong đó $\vec{R}^{qt}$ và $\vec{M}_0^{qt}$ là véc tơ chính và mô men chính lực quán tính của hệ.

Nếu viết dưới dạng hình chiếu ta có 6 phương trình sau :

$$\sum X_k^e + X^{qt} = 0;$$

$$\sum Y_k^e + Y^{qt} = 0;$$

$$\sum Z_k^e + Z^{qt} = 0;$$

$$\sum m_x(F_k^e) + M_x^{qt} = 0\ ;$$

$$\sum m_y(F_k^e) + M_y^{qt} = 0\ ;$$

$$\sum m_z(F_k^e) + M_z^{qt} = 0.$$

Trong đó : X_k^e, Y_k^e , Z_k^e , X^{qt} , Y^{qt} , Z^{qt} là các thành phần hình chiếu lên các trục oxyz của ngoại lực $\vec{F}_k^0$ và véc tơ chính của lực quán tính $\vec{R}^{qt}$ còn $m_x(\vec{F}_k^e), m_y(\vec{F}_k^e), m_z(\vec{F}_k^e)$ và M_x^{qt} , M_y^{qt} , M_z^{qt} là mô men đối với ba trục oxyz của ngoại lực $\vec{F}_k^0$ và mô men chính của lực quán tính đối với ba trục.

Cũng như đối với chất điểm nguyên lý Đa Lăm Be đối với hệ cho ta phương pháp giải các bài toán động lực học cho hệ theo phương pháp tĩnh học và được gọi là phương pháp tĩnh động....Phương pháp tĩnh động được áp dụng rộng rãi để giải các bài toán động lực học đặc biệt là những bài toán xác định các phản lực liên kết. Khi sử dụng phương pháp khó khăn chính là việc xác định véc tơ chính $\vec{R}^{qt}$ và mô men chính, M_c^{qt}. Sau đây sẽ trình bày kết quả thu gọn hệ lực quán tính trong một số trường hợp đặc biệt.

15.2.2. Thu gọn hệ lực quán tính

15.2.2.1. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tịnh tiến

Các chất điểm trong vật có gia tốc như nhau và bằng gia tốc khối tâm : $\vec{W}_k = \vec{W}_c (k = 1....n)$.

Khi thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C ta được :

$$\vec{R}_c^{qt} = \sum - m_k \vec{W}_c = -M\vec{W}_c \ ;$$

$$M_c^{qt} = -\sum \vec{m}_c \left(m_k \vec{W}_k \right) = -\sum \vec{r}_k x m_k \vec{W}_c = M\vec{r}_{cc} x \vec{W}_c = 0.$$

Vì $\vec{r}_{cc} = 0$ do ta chọn C làm tâm thu gọn.

Như vậy trong trường hợp vật chuyển động tịnh tiến hợp lực của các lực quán tính bằng véc tơ chính $\vec{R}_c^{qt} = -M\vec{W}_c$ và đi qua khối tâm C.

15.2.2.2. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định đi qua khối tâm C

Gọi vận tốc và gia tốc của vật là ω và ε ta có :

$$\vec{R}_c^{qt} = \sum - m_k \vec{W}_k = -M\vec{W}_c = 0 \text{ vì } \vec{W}_c = 0.$$

$$M_k^{qt} = \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}^{qt}\right) = \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}_\tau^{\ qt}\right) + \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}_n^{\ qt}\right).$$

Các lực quán tính pháp tuyến luôn luôn đi qua trục quay do đó :

$\sum_k m_{cz}\left(\vec{F}_n^{qt}\right) = 0$. Ta có :

$$M_{cz}^{qt} = \sum_{k=1}^{N} m_{cz}\left(\vec{F}_\tau^{qt}\right) = -\sum d_k m_k d_k \varepsilon = -J_{oz}\varepsilon.$$

$$M_{cz}^{qt} = - J_{oz}\varepsilon.$$

Với J_{oz} là mô men quán tính của vật đối với trục quay.

Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của hệ chuyển động quay quanh một trục đi qua khối tâm là :

$\vec{R}_c^{qt} = 0$ và $M_{cz}^{qt} = - J_{oz}\varepsilon$.

15.2.2.3. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động song phẳng

Theo động học chuyển động song phẳng của vật có thể phân tích thành hai chuyển động cơ bản là tĩnh tiến theo khối tâm và chuyển động quay quanh trục z đi qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng cơ sở. Thu gọn hệ lực quán tính với từng chuyển động cơ bản đó đã được trình bày trong hai trường hợp trên. Dễ dàng nhận thấy khi thu gọn các lực quán tính của hệ chuyển động song phẳng có kết quả sau :

$\vec{R}_C^{qt} = -M\vec{W}_c$ và M_{cz}^{qt} = - $J_{oz}\varepsilon$.

trong đó M và J_{oz} là khối lượng và mô men quán tính của hệ đối với trục quay cz. W_c và ε là gia tốc khối tâm và gia tốc góc của hệ.

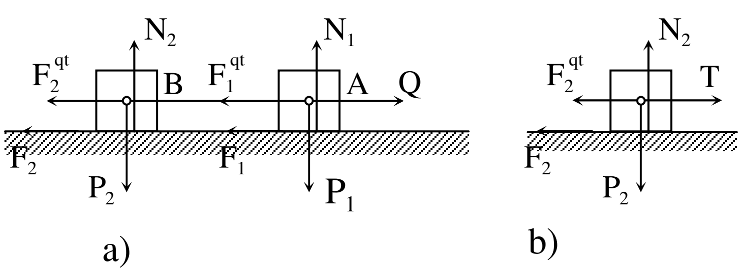
Sau đây giải một số bài toán có vận dụng nguyên lý Đa Lăm Be cho hệ.

<u>Thí du 15-3</u>:

Hai vật A và B có trọng lượng P_1 và P_2 liên kết với nhau bằng một sợi dây không dãn trọng lượng không đáng kể. Hai vật chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang có hệ số ma sát f nhờ tác dụng lực Q vào vật B theo phương ngang (hình 15-5). Xác định gia tốc của hai vật và lực căng của sợi dây.

<u>Bài giải</u> :

Xét hệ gồm cả hai vật. Các lực ngoài tác dụng lên hệ gồm trọng lượng $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, lực ma sát trượt $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và lực kéo Q.



Hình 15.5

Gọi lực quán tính đặt lên vật A và B là $\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}$ ta có :

$$\vec{F}_1^{qt} = -\frac{P_1}{g}\vec{W}_1 ; \vec{F}_2^{qt} = -\frac{P_2}{g}\vec{W}_2$$

với $\vec{W}_1 = \vec{W}_2 = \vec{W}$.

Theo nguyên lý Đa Lăm Be ta có :

$$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}\right) = 0$$

Các lực này được biểu diễn trên hình (15-5a). Phương trình cân bằng theo phương trục ox nằm ngang viết được:

$$Q - \vec{F}_1^{qt} - \vec{F}_2^{qt} - \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = 0,$$

hay $Q = -\dfrac{P_2 + P_1}{g}\vec{W} - (P_2 + P_1)f = 0$.

Suy ra gia tốc hai vật :

$$W = \left(\frac{Q}{P_2 + P_1} - f\right).g$$

Từ kết quả tìm được nhận thấy vật chuyển động khi :

$$f < \left(\frac{Q}{P_2 + P_1}\right).$$

Để tính lực căng T của dây ta phải tách một trong hai vật ra để xét chẳng hạn xét vật B. Các lực thực sự tác dụng lên vật B là : $\left(\vec{P}_2, \vec{N}_2, \vec{F}_2, Q, \vec{T}\right)$. lực quán tính là $\vec{F}_2^{qt}$. Các lực này được biểu diễn trên hình (15-5b).

Áp dụng nguyên lý Đa Lăm Be ta có :

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_2, \vec{Q}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}{}_2) \sim 0.$$

Viết phương trình của hệ cân bằng này lên phương ngang ta có:

$$Q - T - F_2 - F_2^{qt} = 0$$

$$Q - T - p_2.f - p_2\frac{w}{g} = 0$$

Thay giá trị tìm được của w vào phương trình trên tính được :

$$T = \frac{QP_1}{P_1 + P_2}.$$

Kết quả cho thấy lực căng của dây không phụ thuộc lực ma sát.

Thí dụ 15-4:

Thanh đồng chất có chiều dài l, trọng lượng $\vec{P}$. Đầu A được giữ bằng khớp bản lề và đầu B được giữ bằng sợi dây (hình 15.6). Xác định lực căng $\vec{T}$ của dây BD khi trục quay đều với vận tốc ω_o.

Cho biết góc hợp bởi giữa thanh AB và trục quay AD là α.

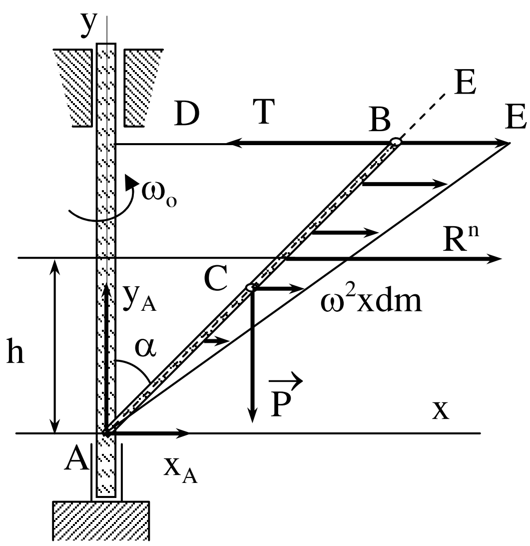
Bài giải:

Xét chuyển động của thanh AB. Các lực ngoài tác dụng lên thanh là: Trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{R}_A$ và lực căng $\vec{T}$ của dây. Gọi hợp lực của các lực quán tính là $\vec{R}^{qt}$. Theo nguyên lý Đa lam be ta có:

$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{R}_A, \vec{R}^{qt}) \sim 0.$

Ta có nhận xét: Lực quán tính $\vec{F}^{qt}_k$ của các phần tử trên thanh có cùng phương chiều và tỷ lệ với toạ độ x_k của nó.

Điều này cho phép vẽ biểu đồ phân bố các lực quán tính theo hình (15-6). Ta nhận thấy rằng hợp lực của hệ lực này $\vec{R}^{qt}$ = M. $\vec{W}_c$ và đi qua trọng tâm của tam giác ABE, nghĩa là đi qua điểm F cách A một đoạn bằng 21/3. Dễ dàng tìm thấy phương trình cân bằng cho hệ lực:



Hình 15.8

$$\sum X = -T + X_A + R^{qt} = 0;$$

$$\sum Y = Y_A - P = 0;$$

$$\sum m_A(F_i) = T.l.\cos\alpha - R^{qt}.\frac{2}{3}\cos\alpha - P\frac{1}{2}\sin\alpha = 0$$

.Thay $R^{qt} = M.W_c = \frac{P}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega^2$ và giải hệ phương trình trên ta được :

$$T = P\left(\frac{l\omega_0^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\alpha\right);$$

$$Y_A = P \text{ và } X_A = P\left(\frac{l\omega_0^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}tg\alpha\right) - \frac{P}{g}\frac{l}{2}\sin\alpha\omega_0^2.$$

Chương 16

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC - PHƯƠNG TRÌNH LAGRANG LOẠI 2

16.1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Như đã biết ở chương 12 và chương 13, nguyên lý Đa Lăm Be cho ta phương pháp tĩnh để giải quyết các bài toán động lực học, còn nguyên lý di chuyển khả dĩ cho ta phương pháp tổng quát giải các bài toán cân bằng của cơ hệ tự do. Kết hợp hai nguyên lý trên cho chúng ta thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ tự do gọi là phương trình tổng quát của động lực học.

Xét cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng chuyển động dưới tác dụng của các hoạt lực và phản lực liên kết. Gọi $\vec{F}_k^a, \vec{N}_k$ là hoạt lực và phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm M_k. Nguyên lý Đa Lăm Be cho chất điểm M_k có thể viết ;

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k - m_k\vec{W}_k = 0. \qquad \text{(a)}$$

Cho hệ di chuyển khả dĩ, gọi $\partial\vec{r}_k$ là di chuyển của chất điểm M_k. Nhân hai vế của phương trình (a) với $\partial\vec{r}_k$ ta được

$$\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k + \vec{N}_k\partial\vec{r}_k - m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0. \qquad \text{(b)}$$

Viết phương trình (b) cho tất cả các chất điểm trong hệ nghĩa là cho k = 1 ... N ta sẽ được hệ N phương trình :

$$\vec{F}^a\partial\vec{r}_1 + \vec{N}_1\partial\vec{r}_1 - m_1\vec{W}_1\partial\vec{r}_1 = 0 \ ;$$

$$\vec{F}^a\partial\vec{r}_2 + \vec{N}_2\partial\vec{r}_2 - m_2\vec{W}_2\partial\vec{r}_2 = 0 \ ;$$

....

$$\vec{F}_n^a\partial\vec{r}_n + \vec{N}_n\partial\vec{r}_n - m_n\vec{W}_n\partial\vec{r}_n = 0 \ .$$

Tiến hành cộng vế với vế của hệ N phương trình trên ta được :

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N}\vec{N}_k\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0 \ . \qquad \text{(c)}$$

Vì liên kết đặt lên hệ là liên kết lý tưởng nên số hàng thứ hai trong phương trình (c) triệt tiêu : $\sum_{k=1}^{N}\vec{N}_k\partial\vec{r}_k = 0$.

Cuối cùng ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0$$

Hay : $\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k^a - m_k\vec{W}_k)\partial\vec{r}_k = 0$ (16-1)

Phương trình (16-1) là phương trình vi phân chuyển động của hệ được gọi là phương trình tổng quát của động lực học dưới dạng véc tơ.

Cũng có thể viết phương trình này dưới dạng toạ độ Đề các sau đây.

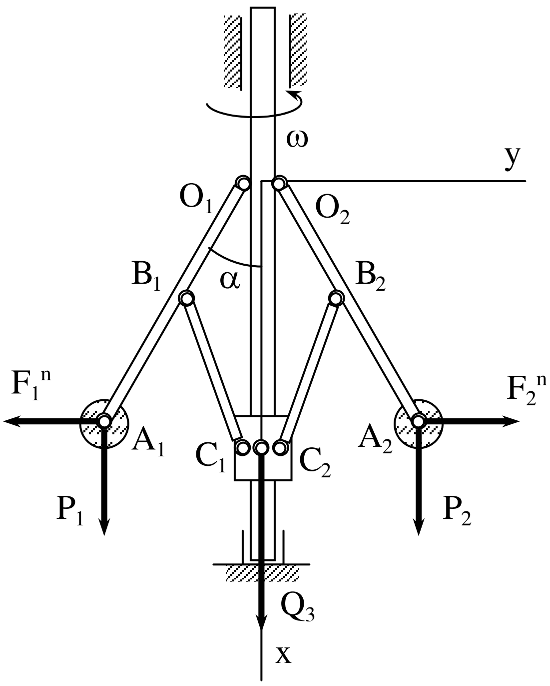
$$\sum_{k=1}^{N}.(X_k^a - m_k\vec{x}_k)\partial x_k + \sum_{k=1}^{N}.(Y_k^a - m_k\vec{y}_k)\partial y_k + \sum_{k=1}^{N}.(Z_k^a - m_k\vec{z}_k)\partial z_k = 0 \quad (16\text{-}2)$$

Từ các phương trình tổng quát của động lực học ta thấy khi cơ hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng tổng vi phân công của các hoạt lực và các lực quán tính luôn luôn bằng không. Ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}.\partial A_k^a + \sum_{k=1}^{N}.\partial A_k^{qa} = 0 \quad (16\text{-}3).$$

<u>Thí du 16-1</u>

Trục của bộ điều chỉnh ly tâm đặt thẳng đứng và quay với vận tốc góc ω (hình 16-1). Trọng lượng của mỗi quả văng là $P_1 = P_2 = P$. Trọng lượng của con trượt CC_1là Q. Xác địng góc α của thanh A_1O_1 và A_2O_2 hợp với trục quay là hàm theo vận tốc góc ω. Cho $A_1O_1 = A_2O_2 = 1$; $O_1B_1 = O_2B_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = a$



Hình 16.1

<u>Bài giải</u> :

Xem bộ điều chỉnh bao gồm quả văng A_1A_2 và con trượt là một cơ hệ. Nếu bỏ qua lực ma sát ở các ổ trục và các khớp nối ta có thể xem cơ hệ này chịu liên kết dừng và lý tưởng. Các hoạt lực tác dụng lên hệ bao gồm trọng lượng của các quả văng và con trượt là $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ và Q. Khi hệ quay ổn định với vận tốc góc ω thì lực quán tính của hệ chỉ bao gồm các lực quán tính ly tâm $\vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}$ của hai quả văng. Do đối xứng các lực quán tính này có trị số bằng nhau và bằng :

$$\vec{F}_1^{qt} = \vec{F}_2^{qt} = \frac{P}{g}\omega^2 l \sin\alpha \ .$$

Phương trình tổng quát của động lực học viết dưới dạng toạ độ Đề các đã chọn như hình vẽ là :

$$P_1\partial x_1 + P_2\partial x_2 - F_1^{qt}\partial y_1 + F_2^{qt}\partial y_2 + Q\partial x_0 = 0.$$

Để xác định các biến phân của toạ độ từ hình vẽ ta có :

$x_1 = x_2 = l\cos\alpha$;

$y_1 = -y_2 = -l\sin\alpha$;

$x_c = 2a\cos\alpha$.

Suy ra: $\partial x_1 = \partial x_2 = -l\sin\alpha.\partial\alpha$;

$\partial y_1 = -\partial y_2 = -l\cos\alpha.\partial\alpha$;

$\partial x_c = -2a.\sin\alpha.\partial\alpha$;

Thay các kết quả vừa tìm được vào phương trình thiết lập ở trên :

$$-2P.2a\sin\alpha\partial\alpha + \frac{2P}{g}\omega^2 l\sin\alpha.l\cos\alpha\partial\alpha - 2Q.\sin\alpha\partial\alpha = 0 \ .$$

Suy ra :

$$\cos\alpha = \frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g \ ,$$

$$\text{Hay : } \alpha = \arccos\frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g \ .$$

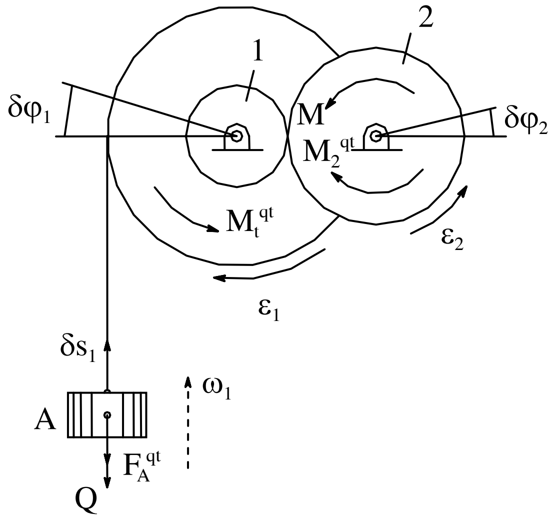
Vì $\cos\alpha \le 1$ nên cũng từ kết quả này suy ra :

$$\omega^2 \ge \frac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g \ .$$

Để có góc tách α cho trước vận tốc góc của trục bao giờ cũng lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{\dfrac{Pl + Qa}{Pl^2\omega^2}g}$.

Thí du 16-2

Cơ cấu nâng hạ có kết cấu biểu diễn trên hình (16-2). Bánh xe 1 có trọng P_1, bán kính quán tính ρ_1. Bánh xe 2 có trọng P_2, bán kính quán tính ρ_2. Xác định gia tốc của vật nặng A có trọng lượng Q khi ta tác động lên bánh xe một mô men quay M.



Hình 16.2

Bài giải :

Xét hệ gồm bánh xe 1, bánh xe 2 và vật nặng A. Coi ma sát trong trục bánh xe là không đáng kể thì liên kết đặt lên hệ là liên kết dừng và lý tưởng. Phương trình vi phân chuyển động của hệ được viết dưới dạng phương trình tổng quát của động lực học.

$$\sum_{k=1}^{n}.F_k^a\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0$$

Hoạt lực tác dụng lên hệ bao gồm mô men M và các trọng lực $\vec{P}_1, \vec{P}_2, Q$.

Khi hệ chuyển động, các lực quán tính tác dụng lên hệ bao gồm $\vec{F}_A^{qt}, M_1^{qt}, M_2^{qt}$.

Lực quán tính của vật A có thể xác định : $\vec{F}_A^{qt} = -\dfrac{Q}{g}\vec{W}_A$

Các mô men lực quán tính của bánh xe $M_1^{qt} = \dfrac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1 ; M_2^{qt} = \dfrac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2$.

Ở đây $\vec{W}_A$ là gia tốc của vật A ; ε_1 và ε_2 là gia tốc của góc của bánh xe 1 và 2. Theo kết cấu của hệ ta có: $\varepsilon_1 = \dfrac{W_A}{r} ; \varepsilon_2 = \dfrac{r_1}{rr_2}W_A$.

Cho hệ một di chuyển khả dĩ với di chuyển ∂s_A của vật A làm cơ sở. Theo kết cấu ta cũng suy ra di chuyển của các bánh xe là :

$$\partial\varphi_1 = \frac{\partial s_A}{r} \quad ; \quad \partial\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\partial\varphi = \frac{r_1}{r_2}\frac{\partial s_A}{r}$$

Phương trình tổng quát của hệ động lực học viết cụ thể sẽ là :

$$- Q\partial s_A - \frac{Q}{g}W_A\partial s_A - \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1\frac{\partial s_A}{r} - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{rr_2}\partial s_A + M\frac{r_1}{r_2}\frac{\partial s_A}{r} = 0 .$$

Hay : $-Q(1-\frac{W_A}{g}) - \frac{P_1}{g}\rho_1^2\frac{W_A}{r^2} - \frac{P_2}{g}\rho_2^2\frac{r_1^2}{r^2r_2^2}W_A + M\frac{r_1}{rr_2} = 0$.

Suy ra :

$$W_A = \frac{\frac{r_1}{r_2}M - rQ}{rQ + \frac{\rho_1^2}{r}P + \frac{\rho_2^2}{r}\frac{r_1^2}{r_2^2}P_1} .$$

16.2. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANG LOẠI II

Phương trình trình tổng quát của động lực học viết dưới dạng toạ độ suy rộng dược gọi là phương trình Lagrang loại 2.

Xét hệ chịu liên kết dừng và lý tưởng. Phương trình tổng quát của hệ là :

$$\sum_{k=1}^{N}.(\vec{F}_k^a = m_k\vec{W}_k)\partial\vec{r}_k = 0 \quad , \quad \text{hay : } \sum_{k=1}^{N}.\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k - \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = 0 .$$

Như đã biết ở chương 14 ta có thể thay : $\sum_{k=1}^{N}.\vec{F}_k^a\partial\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m}.Q_j\partial q_j$

Ở đây Q_j là lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng q_j .

Để có phương trình Lagrang loại 2 ta còn phải biến đổi trực tiếp số hạng $\sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k$ sang toạ độ suy rộng. ta có :

$$\sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k(\sum_{j=1}^{m}.\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j}\partial q_j) = \sum_{j=1}^{m}.(\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j})\partial q_j .$$

ở trên đã thay : $\partial r_k = (\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\partial q_j + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_2}\partial q_j + ...\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_m}\partial q_j + \frac{\partial r_k}{\partial t})$

Đặt $\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{W}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_j} = Z_j$ ta sẽ đưa phương trình về dạng:

$$\sum_{k=1}^{N}.m_k\vec{W}_k\partial\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m}.Z_j\partial q_j$$

Sau đây tìm biểu thức của Z_j :

$$Z_j = \sum_{k=1}^{N} .m_k \vec{W}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{N} .m_k\, \vec{v}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} - \sum_{k=1}^{N} .m_k \vec{v}_k \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}) \; .$$

Thay $\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_2 + ...\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_m + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$;

$$\vec{v}_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \; .$$

Từ kết quả này suy ra hai biểu thức sau :

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j} \qquad \text{(e)}$$

Thay :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}) = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_2}\dot{q}_2 + ... + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t \partial q_1}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} . \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum_{j=1}^{m} . \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}) = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j}$$

Suy ra : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}) = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j}$. (g)

Thay kết quả tìm được từ biểu thức (e) và (g) vào biểu thức của Z_j ta được :

$$Z_j = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{N} .m_k\, \vec{v}_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j}) - \sum_{k=1}^{N} .m_k\, \vec{v}_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j} \; ;$$

$$= \frac{d}{dt} . \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\sum_{k=1}^{N} .m_k\, \vec{v}_k \frac{v_k^2}{2} . \frac{\partial}{\partial q_j}(\sum .m_k \frac{v_k^2}{2}) \; .$$

Hay : $Z_j = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$

Thay kết quả tìm được vào phương trình (d) ta có :

$$\sum_{k=1}^{N} .\vec{F}_k^a \partial \vec{r}_2 - \sum_{k=1}^{N} .m_k \vec{W}_k \partial \vec{r}_k = \sum_{j=1}^{m} .Q_j \partial q_j - \sum_{j=1}^{m} .Z_j . \partial q_j = 0 \, .$$

Hay : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \; (j = 1....m)$ (16-4).

Hệ phương trình dạng (16-4) được gọi là phương trình Lagrang loại 2. Trong đó T là động năng của hệ. Q_j là lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng q_j.

Trong trường hợp lực hoạt động là lực có thế $Q_j = -\dfrac{\partial \pi}{\partial q_j}$ thì phương trình (16-4) trở thành :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \pi}{\partial q_j} \qquad (j = 1....m) . \qquad (16\text{-}5)$$

Cần chú ý rằng $\dfrac{\partial \pi}{\partial q_j} = 0$, do đó :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \pi}{\partial q_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial \pi}{\partial q_j}\right) = 0$$

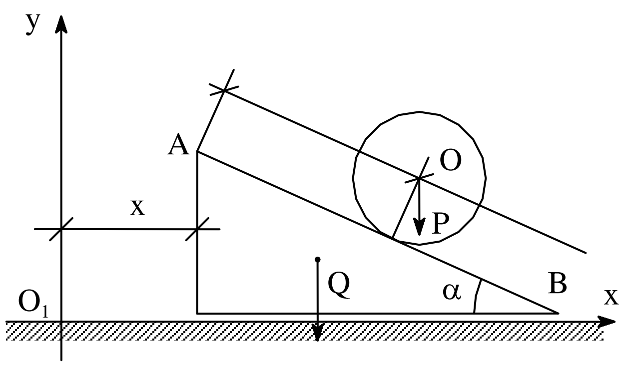
Nếu đặt T - π = L (q_j , $\dot{q}_j$,t) thì phương trình Lagrang loại 2 có dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1...m) . \qquad (16\text{-}6)$$

<u>Thí du 16-1</u>

Một trụ tròn đồng chất có khối lượng M chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ hình tam giác có khối lượng m và có góc nghiêng với mặt ngang là α. Lăng trụ có thể trượt trên mặt ngang nhẵn (hình 16-3). Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Xét hệ lăng trụ và trụ tròn. Cơ hệ chịu liên kết dừng, giữ, hô nô nôm và lý tưởng. Hoạt lực tác dụng lên hệ gồm có : Trọng lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ của trụ tròn và lăng trụ tam giác. Các lực này là lực có thế. Nếu chọn hệ toạ độ suy rộng đủ của hệ là q_1 = x và q_2 = s (hình 16-3) ta thấy hệ có hai bậc tự do và phương trình Lagrang loại 2 có thể viết dưới dạng :



Hình 16.3

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_j}=-\frac{\partial \pi}{\partial x_j} \qquad (a)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial s_j}=-\frac{\partial \pi}{\partial s_j} \qquad (b)$$

Thế năng của hệ ứng với lực $\vec{P}$ tính như sau :

$\pi(P)$ = -Mg.sinα.s + C_1 với C_1 là hằng số.

Thế năng của hệ ứng với lực Q là một hằng số

$\pi(Q)$ = const = C_2

Thế năng của cả hệ π = - Mg.S.sinα + C ; C là hằng số

Suy ra : $\frac{\partial \pi}{\partial x}=0$ và $\frac{\partial \pi}{\partial s}=-Mg\sin\alpha$

Động năng của hệ bao gồm động năng của trụ tròn và động năng của lăng trụ.

Lăng trụ chuyển động tịnh tiến nên động năng của nó có thể viết :

$$T_1=\frac{mV^2}{2}=\frac{m\dot{x}^2}{2}.$$

Trụ tròn chuyển động song phẳng nên động năng tính được :

$$T_{tr}=\frac{MV^2}{2}=J_0\frac{\omega^2}{2}$$

V_0 là vận tốc tuyệt đối của trục trụ tròn.

$$\vec{V}_0=\vec{V}_c+\vec{V}_r$$

Suy ra :

$$V_{0x}=V_{cx}+V_{rx}=\dot{x}+\dot{S}\cos\alpha$$

$$V_{0y}=V_{cy}+V_{ry}=\dot{y}+\dot{S}\sin\alpha$$

$$V_0^2=V_{ox}^2+V_{oy}^2=(\dot{x}+\dot{S}\cos\alpha)^2+(\dot{y}+\dot{S}\sin\alpha)^2$$

$$=\dot{x}^2+\dot{S}^2+2\dot{x}^2\dot{S}^2\cos\alpha$$

$$\omega=\frac{V_{or}}{R}=\frac{V_r}{R}=\frac{|\dot{S}|}{R} \text{ và } \omega^2=\frac{\dot{s}^2}{R^2} \text{ còn } J_0=\frac{MR^2}{4}$$

Thay các kết quả trên vào biểu thức của động năng hệ ta được :

$$T_{hệ} = \frac{m\dot{x}^2}{w} + \frac{M}{2}\left[(\dot{x} + \dot{S}\cos\alpha)^2 + (\dot{y} + \dot{S}\sin\alpha)^2\right] + \frac{MR^2}{4}\frac{\dot{s}}{R^2}$$

$$= (M+m)\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{3M}{2}\frac{\dot{s}^2}{2} + M\dot{x}\dot{S}\cos\alpha \ .$$

Suy ra : $\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \ ; \ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + M\dot{S}\cos\alpha$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + M\ddot{S}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{3M}{2}\dot{S} + M\dot{x}\cos\alpha \ ; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{3M}{2}\ddot{S} + M\ddot{x}\cos\alpha$$

Phương trình vi phân chuyển động của hệ phương trình Lagrang loại 2 nhận được :

$$(M+m)\ddot{x} + M\ddot{S}\cos\alpha = 0 \ ;$$

$$\frac{3M}{2}\ddot{S} + M\ddot{x}\cos\alpha = Mg\sin\alpha.$$

Từ hệ phương trình trên ta tìm được :

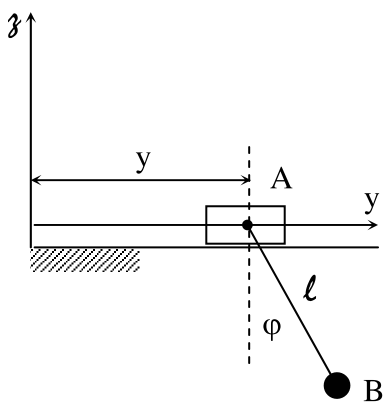
$$\ddot{x} = \frac{Mg\sin 2\alpha}{3(M+m) - 2M\cos^2\alpha} < 0$$

$$\ddot{S} = \frac{2(M+m)g\sin\alpha}{3(M+m) - 2M\cos^2\alpha} > 0$$

Nếu ban đầu hệ đứng yên thì sau đó trụ tròn lăn xuống còn lăng trụ trượt qua phải. Các chuyển động đều là chuyển động biến đổi đều.

Thí du 16-2

Con lắc eliptic gồm con trượt A và quả cầu B nối với A bằng một thanh treo AB. Cho biết khối lượng của con trượt m_1, khối lượng của quả cầu là m_2, khối lượng thanh treo không đáng kể. Con trượt A có thể trượt theo phương AY trên mặt phẳng ngang nhẵn. Con lắc AB có thể quay tròn quanh trục A trong mặt phẳng thẳng đứng oxy (hình 16-4). Thiết lập phương trình vi phân của hệ.



Hình 16.4

Bài giải

Xét hệ gồm con trượt A và con lắc AB.

Có thể chọn hai toạ độ suy rộng đủ của hệ là :

$q_1 = y$ và $q_2 = \varphi$.

Phương trình vi phân của hệ có thể viết dưới dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \, .$$

Với T là động năng của hệ, Q_y và Q_φ là các lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng là y và φ.

Các hoạt lực tác dụng lên hệ gồm $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$ đều là các lực có thế nên có thể viết :

$$Q_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y} \, ; \, Q_\varphi = -\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \, .$$

Thế năng của hệ có thể tính như sau :

$\pi = -m_2 g.x + const = -m_2 gl\cos\varphi + const.$

Suy ra : $-\dfrac{\partial \pi}{\partial y} = Q_y = 0$ và $-\dfrac{\partial \pi}{\partial \varphi} = Q_\varphi = m_2 gl\sin\varphi$

Động năng của hệ $\quad T = T_A + T_B$.

Động năng của con trượt : $T_A = \dfrac{m_1 V_A^2}{2} = \dfrac{m_1 \dot{y}^2}{2}$.

Động năng của quả cầu : $T_B = \dfrac{m_1 V_B^2}{2} = \dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)$.

Với $x_B = l\cos\varphi$ và $\dot{x}_B = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$; $y_B = y + l\sin\varphi$ và $\dot{y}_B = \dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi$

Ta có :

$$T_B = \frac{m_2}{2}\left[(-l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2\right] = \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Biểu thức động năng của hệ thu được :

$$T = T_A + T_B = \frac{m_1\dot{y}^2}{2} + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Từ đó suy ra : $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{y}\cos\varphi$;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{y}\cos\varphi - m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi \ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_2 + m_1)\dot{y} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi \ ;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l_o\dot{\varphi}\dot{y}\sin\varphi \ .$$

Thay các giá trị tìm được vào phương trình vi phân của hệ ta được :

$$m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{y}\cos\varphi - m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi = -m_2 gl\sin\varphi \ ;$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \ .$$

Sau khi rút gọn được phương trình vi phân chuyển động của hệ :

$$\begin{cases} l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y} + g\sin\varphi = 0 \ ; \\ (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}$$