

CHIANG C. MEI

ĐỘNG LỰC HỌC ỨNG DỤNG VỀ SÓNG MẶT ĐẠI DƯƠNG

QUYỂN 1

Biên dịch: Phùng Đăng Hiếu
Phạm Văn Huấn

HÀ NỘI – 2003

Advanced Series on Ocean Engineering — Volume 1

THE APPLIED DYNAMICS OF OCEAN SURFACE WAVES

Second printing with corrections

Chiang C. Mei

Department of Civil Engineering
Massachusetts Institute of Technology

Published by

World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

P O Box 128, Farrer Road, Singapore 9128

USA office: Suite 1B, 1060 Main Street, River Edge, NJ 07661

UK office: 73 Lynton Mead, Totteridge, London N20 8DH

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Mei, Chiang C.

The applied dynamics of ocean surface waves.

(Advanced series on ocean engineering; v. 1)

Bibliography: p.

Includes indexes.

1. Ocean waves. I. Title. II. Series.

GC211.2.M44 1989 551.47'02 89-14774

ISBN 9971-50-773-0

ISBN 9971-50-789-7 (pbk.)

First published 1989

First reprint 1992 (pbk)

Second reprint 1994

Copyright © 1989 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

For photocopying of material in this volume, please pay a copying fee through the Copyright Clearance Center, Inc., 27 Congress Street, Salem, MA 01970, USA.

 **World Scientific**
Singapore • New Jersey • London • Hong Kong

Printed in Singapore.

MỤC LỤC

Lời mở đầu.....	2
Chương 1 – Giới thiệu	3
1.1 Tổng quan những kết luận cơ bản về chất lỏng không nén và mật độ không đổi.....	4
1.2 Phép xấp xỉ tuyến tính hóa đối với sóng biên độ nhỏ	6
1.3 Những nhận xét cơ bản về sóng lan truyền.....	8
1.4 Sóng tiến trên vùng nước độ sâu không đổi.....	9
1.5 Vận tốc nhóm sóng.....	11
Chương 2 - Sự truyền của các sóng ngắn trong biển mở độ sâu không đổi.....	14
2.1 Các bài toán xung hai chiều.....	15
2.2 Sự phản hồi ba chiều ngắn hạn đối với các xung từ đáy	24
2.3 Sự lan truyền của một chùm sóng phân tán	31
2.4 Chuỗi sóng biến đổi chậm. phép phân tích đa quy mô.....	33
Chương 3 - Khúc xạ do sự biến đổi chậm của độ sâu hoặc của dòng chảy	39
3.1 Phép xấp xỉ quang hình cho các sóng tiến trên nền đáy biến đổi đều	39
3.2 Lý thuyết tia cho các sóng dạng sin, nguyên lý Fermat	42
3.3 Các đường đẳng sâu thẳng và song song	43
3.4 Các đường đẳng sâu dạng cung tròn.....	49
3.5 Phương trình gần đúng kết hợp khúc xạ và tán xạ trên nền đáy biến đổi chậm – Phương trình độ nghiêng nhỏ.....	56
3.6 Xấp xỉ quang hình đối với khúc xạ do dòng chảy và độ sâu biến đổi chậm.....	58
3.7 Các hiệu ứng vật lý của dòng chảy đơn giản ổn định lên sóng.....	63
Chương 4 - Sóng dài biên độ nhỏ vô hạn trên nền đáy biến đổi đáng kể.....	70
4.1 Xây dựng lý thuyết sóng dài tuyến tính hoá	70
4.2 Độ sâu gián đoạn – sóng tới vuông góc.....	74
4.3 Độ sâu gián đoạn - sóng tới xiên	81
4.4 Sự Phân tán ở thềm hoặc máng độ rộng hữu hạn.....	83
4.5 Sự truyền qua và phản xạ ở vùng độ sâu biến đổi chậm	86

4.6 Sóng bị bẫy trên luống đất dốc	89
4.7 Một số đặc điểm chung của các bài toán một chiều – Các hài bẫy và ma trận tản mát	93
4.8 Các sóng rìa trên nền độ dốc không đổi	98
4.9 Các đường đẳng sâu dạng cung tròn	99
4.10 Đón sóng tới trên cấu trúc địa hình nhỏ – xấp xỉ Parabolic	103
4.11 Phương pháp số dựa trên các phân tử hữu hạn	106
Phụ lục 4.A: Khai triển không gian đối với sóng phẳng	114
Chương 5 - Dao động cưỡng do tác động sóng dài	115
5.1 Giới thiệu	115
5.2 Thiết lập các bài toán dao động cưỡng	116
5.3 Các hài tự nhiên trong vịnh kín hình dạng đơn giản và độ sâu không đổi	117
5.4 Khái niệm suy giảm phát xạ: một ví dụ về mô hình	119
5.5 Hiện tượng nhiễu xạ ở khe hẹp	121
5.6 Phân tán do một kênh hoặc vịnh hẹp dài	125
5.7 Cảng hình chữ nhật với cửa hẹp	130
5.8 Tác dụng của đê chắn sóng nhô ra biển	138
5.9 Cảng có hai thủy vực thông nhau	145
5.11 Phản ứng cảng đối với sóng tới ngắn	150
Phụ lục 5.A: Hàm nguồn đối với vịnh hình chữ nhật	155
Phụ lục 5.B: Tổng của chuỗi \tilde{G}	156
Phụ lục 5.C: Chứng minh nguyên lý biến thiên	157
Phụ lục 5.D: Ước lượng tích phân	157
Chương 6 - Các hiệu ứng tổn thất cột nước tại eo hẹp đối với sự phân tán sóng dài: Lý thuyết thủy lực	158
6.1 Sự phân tán một chiều bởi đê chắn sóng dạng sẻ rãnh hoặc dạng lưới lỗ	159
6.2 ảnh hưởng của tổn thất cửa lên các dao động của cảng	168
Phụ lục 6.A: Các phép xấp xỉ tích phân đối với $ka \ll 1$	174
Tài liệu tham khảo	176

Lời người dịch

Những năm gần đây công tác nghiên cứu biển phục vụ hoạt động xây dựng và khai thác các công trình biển ở nước ta bắt đầu hình thành và ngày càng phát triển. Việc quản lý, khai thác hiệu quả các công trình xây dựng và kỹ thuật trên biển thường đòi hỏi chuyên gia hiểu biết về các quá trình biển, trong đó chuyển động sóng và tương tác giữa sóng với công trình là một yếu tố quan trọng bậc nhất. Ở các trường đại học của nước ta dần dần đã xây dựng thêm những bộ môn và chuyên ngành đào tạo tương ứng nhằm mục tiêu cung cấp các chuyên gia phục vụ trong lĩnh vực kinh tế này.

Sách "Động lực học ứng dụng về sóng mặt đại dương" của Chiang Mei là một cuốn sách đầu tiên trong loạt sách chuyên khảo nâng cao về Kỹ thuật biển của Khoa Kỹ thuật xây dựng, Học viện Công nghệ Massachusetts (Mỹ). Tác giả cuốn sách là một chuyên gia lớn trong lĩnh vực nghiên cứu này.

Biên dịch cuốn sách, chúng tôi nhằm mục đích cung cấp cho các nhà khoa học nghiên cứu biển ở nước ta một tài liệu hệ thống, kỹ lưỡng về những kiến thức cơ bản và hiện đại nhất liên quan tới động lực học, sự diễn biến của sóng đại dương khi nó lan truyền vào đới ven bờ và tương tác với đới bờ, các công trình biển và cảng.

Sách được bố cục theo kiểu đúc kết các bài giảng của tác giả, việc thiết lập các bài toán và giải được diễn giải hệ thống với một dung lượng vật lý và toán học thích hợp cho cả những sinh viên và học viên sau đại học. Chúng tôi hy vọng rằng sách cũng sẽ có giá trị như một tài liệu giảng dạy, tham khảo cho giáo viên và tài liệu học tập cho người học.

Nguyên bản sách gồm 13 chương. Mỗi chương đề cập tới một nhóm vấn đề liên quan tới một khía cạnh sử dụng và khai thác các

công trình biển và có đặc điểm phương pháp luận và phương pháp nghiên cứu, phương pháp trình bày riêng. Do khuôn khổ lớn của sách, chúng tôi cấu tạo lại thành hai quyển: quyển 1 và quyển 2 để tiện xuất bản. Trong quyển 1 gồm 6 chương đầu của cuốn sách. Quyển 1 mở đầu bằng chương 1 và chương 2 tổng quan những kiến thức cơ bản về chuyển động của chất lỏng không nén mật độ không đổi làm cơ sở nghiên cứu chuyển động sóng mặt đại dương. Chương 3 giới thiệu các phương pháp của quang hình học để khảo sát sự khúc xạ các sóng khi chúng lan truyền vào đới ven bờ – một hiện tượng quan trọng quyết định đặc điểm, hành vi, diễn biến của các sóng và trường sóng, hình thành nên nhiều đặc điểm động học và phân bố năng lượng sóng ở đới ven bờ có những ứng dụng thiết thực. Chương 4 khái quát lý thuyết diễn biến của sóng biên độ nhỏ trên nền đáy biển thiên đáng kể, nét đặc trưng của đới ven bờ và bắt đầu khảo sát những hiệu ứng liên quan. Tiếp theo, các chương 5 và 6 lần lượt giới thiệu những kết quả nghiên cứu các hiệu ứng đối với các hình thái và cấu tạo cảng, đê chắn sóng khác nhau như là những thí dụ đầu tiên ứng dụng lý thuyết tuyến tính.

Những chương còn lại của sách đề cập tới các nhóm vấn đề khác của động lực học sóng mặt đại dương liên quan tới hiện tượng tán xạ và nhiễu xạ, phân tán, mất mát năng lượng và lý thuyết sóng phi tuyến, chúng tôi sẽ bố cục vào quyển 2.

Do kiến thức có hạn của những người biên dịch và nội dung rộng lớn của sách, chắc chắn trong khi truyền đạt sang tiếng Việt có những sai sót và chưa chính xác về khái niệm, thuật ngữ, tên gọi hiện tượng... Chúng tôi mong được các chuyên gia góp ý cụ thể để hoàn thiện bản dịch trong những lần xuất bản sau.

Tập thể biên dịch

LỜI MỞ ĐẦU

Trong 20 năm qua nhân loại ngày càng tích lũy thêm các kiến thức về động lực các sóng mặt đại dương. Do nhu cầu thuần túy khoa học, ngành nghiên cứu địa vật lý đã thu được những thành tựu nhất định. Một loạt những tiến bộ đã đạt được do số lượng các dự án lớn về xây dựng cảng ngoài khơi và dọc bờ biển ngày càng tăng. Với một dự án lớn thì không những cần dự báo thận trọng về điều kiện sóng gần nơi thi công công trình, mà còn cần có những tin cậy về tác động của sóng lên công trình và của bản thân công trình lên môi trường xung quanh. Để có những hiểu biết khoa học, kỹ thuật tổng quát về sóng đại dương, các chương trình nghiên cứu và đào tạo đã hình thành ở nhiều trường đại học và trong các ngành khác nhau trên thế giới.

Cuốn sách này đúc kết những bài giảng của Chiang C. Mei tại các khoá học gồm hai học kỳ tại MIT cho sinh viên sau đại học về kỹ thuật xây dựng và hải dương học. Mục đích của sách là trình bày các chủ đề chọn lọc mang tính lý thuyết về động lực học các sóng mặt đại dương, bao gồm những nguyên lý cơ bản và việc áp dụng những nguyên lý đó vào kỹ thuật đò bờ và ngoài khơi. Sách chủ yếu đề cập đến lý thuyết tuyến tính, lý thuyết này đã được xây dựng phục vụ những nghiên cứu lý thuyết. Lý thuyết tuyến tính phi nhất được giới thiệu từ chương 1 đến chương 5 và tái đề cập ở chương 7. Hiệu ứng ma sát do nhớt gây ra trực tiếp hoặc gián tiếp được trình bày ở chương 6, 8 và 9. Hiệu ứng đặc biệt của sóng đổ trên bãi biển được xét trong chương 10. Chương 9 và chương 10 tập trung nghiên cứu các hiệu ứng phi tuyến thứ cấp. Hy vọng tài liệu này sẽ có ích và thúc đẩy sự hợp tác giữa các nhà nghiên cứu ở nhiều lĩnh vực khác nhau.

Vì trong lĩnh vực khoa học này có sự đóng góp rất lớn của các nhà toán học, nên việc sử dụng các phép phân tích toán học có thể còn xa lạ với một số độc giả là một điều không tránh khỏi. Vì vậy, trong sách giành nhiều phần để giải thích hoặc mô tả theo ngôn ngữ thông dụng về những phép phân tích thường không được trình bày trong các khoá học về tính toán nâng cao. Phép

khai triển các kết quả được trình bày chi tiết để giảm bớt khó khăn cho những người còn đang theo học các kiến thức cơ bản. Trong sách này cũng đưa ra một số bài tập bổ sung, bạn đọc nên coi như là phần tự nghiên cứu của mình.

Nghiên cứu sóng nói chung, sóng trên nước nói riêng, luôn đòi hỏi sự kết hợp chéo giữa các ngành khoa học và kỹ thuật khác nhau như vật lý, toán học, hải dương học, kỹ thuật điện và các chuyên ngành khác. Cuốn sách này là một nỗ lực đáng kể phản ánh sự kết hợp đó và hy vọng sẽ thúc đẩy các nhà khoa học và kỹ sư tập trung tài năng của mình vào nghiên cứu những tiềm ẩn thách thức của đại dương trong tương lai.

Một số lĩnh vực khác không thuộc kinh nghiệm của tác giả hoặc đã được đề cập trong các sách khác sẽ không trình bày trong sách này. Phillips (1977) và LeBlond và Mysak (1978) đã nghiên cứu những cơ chế phát sinh sóng gió và các tương tác cộng hưởng. Về mô tả thống kê đối với sóng biển ngẫu nhiên thì phần thảo luận chi tiết một cách căn bản nhất bạn đọc có thể tìm thấy trong các xuất bản phẩm của Price và Bishop (1974). Cơ học thống kê sóng biển có thể xem trong các cuốn sách của Phillips (1977) và West (1981). Những tiến bộ nhanh chóng trong việc khảo sát sóng độ dốc lớn, chủ yếu do M. S. Longuet-Higgins nghiên cứu, đã thu hút sự quan tâm của các kỹ sư và các nhà hải dương học; các bài viết của ông và các cộng sự theo chủ đề này có thể nói không ai sánh bằng về tính rõ ràng và tỉ mỉ. Những sóng phát sinh do các vật thể di chuyển thuộc loại thủy động lực học các sóng tàu, bạn đọc có thể thấy trong các chuyên luận của Stoker (1957), Wehausen và Laitone (1960), Newman (1977) và những ấn bản trước đây của Hội nghị thủy động lực hàng hải. Sự phân tách phát sinh do sóng xung quanh các vật thể nhỏ là cốt lõi của việc dự báo lực tác động lên công trình ngoài khơi; đây chính là một chủ đề mà thực nghiệm đóng vai trò quyết định và nó đã được trình bày rất tỉ mỉ trong cuốn sách xuất bản gần đây của Sarpkaya và Issacson (1981). Các sóng bão cũng không được trình bày trong cuốn sách này.

Trong sách chứa đựng nhiều diễn giải toán học, tuy được trình bày cẩn thận, nhưng không tránh khỏi một số sai sót. Rất mong các độc giả góp ý để hoàn thiện.

Trong sách chứa đựng nhiều diễn giải toán học, tuy được trình bày cẩn thận, nhưng không tránh khỏi một số sai sót. Rất mong các độc giả góp ý để hoàn thiện.

Chương 1 – GIỚI THIỆU

Trong đại dương có nhiều kiểu sóng gây bởi những nhân tố vật lý khác nhau. Giống như trong bài toán cơ bản về một hệ đàn hồi, tất cả các sóng phải liên quan tới một loại lực phục hồi nào đó. Vì vậy, để thuận tiện, nên sơ bộ phân loại các sóng đại dương tùy theo lực phục hồi như trong bảng 1.1.

Sóng gió và sóng lừng phát sinh bởi bão tại chỗ hoặc bão ở xa là loại sóng mà con người thường gặp nhiều nhất. Loại ít gặp hơn, nhưng với hậu quả đôi khi rất nặng nề, đó là sóng thần, sóng này được xếp vào loại các dao động chu kỳ dài, gây bởi động đất hoặc trượt đất mạnh dưới nước. Sóng cũng có thể sinh ra do hoạt động của con người (như chuyển động tàu, nổ mìn...) và những sóng này cũng có dải chu kỳ rộng. Vì các sóng này thường hiện diện trên mặt nước và lực phục hồi chủ yếu là trọng lực, nên chúng được gọi là sóng mặt trọng lực. Một thuật ngữ ngắn hơn - *sóng mặt*, thường được dùng trong trường hợp không kể tới các sóng mặt mao dẫn.

Trong hải dương học có một loại sóng quan trọng là sóng nội trọng lực, xảy ra tại các nêm nhiệt - đó là lớp nước phía dưới mặt biển với cường độ phân tầng mật độ mạnh. Chuyển động sóng của các sóng này thường không lộ ra trên mặt nước, ngoại trừ một số dấu hiệu biểu hiện gián tiếp của chúng. Những sóng này góp phần vào quá trình xáo trộn và ảnh hưởng đến độ nhớt

của hải lưu. Sóng nước dâng do bão là hậu quả tức thì của thời tiết địa phương và có thể làm tổn hại nặng nề tới sinh mạng cũng như của cải con người khi nó tràn ngập vùng ven biển.

Thực ra, một số lực phục hồi có thể cùng tồn tại, do đó việc phân ra các sóng khác nhau trong bảng 1.1 không phải là luôn chính xác.

Cuốn sách này chỉ đề cập tới những loại chuyển động sóng với qui mô thời gian sao cho sự nén, sức căng bề mặt và sự quay của Trái Đất ít quan trọng. Ngoài ra, cũng giả thiết rằng sự phân tầng thẳng đứng trong lớp nước nghiên cứu đủ nhỏ. Như vậy, ta chỉ quan tâm đến sóng mặt trọng lực, tức sóng gió, sóng lừng và sóng thần. Về các loại sóng khác liệt kê ở bảng 1.1 có thể tìm đọc trong những chuyên luận của Hill (1962), LeBlond và Mysak (1978).

Bảng 1.1 Loại sóng, cơ chế vật lý và vùng hoạt động

Loại sóng	Cơ chế vật lý	Chu kỳ đặc trưng	Vùng hoạt động
Sóng âm	Tính nén	$10^{-2} - 10^{-5}$ giây	Trong lòng đại dương
Sóng mao dẫn	Sức căng bề mặt	$<10^{-1}$ giây	Mặt phân cách nước - không khí
Sóng gió và sóng lừng	Trọng lực	1 - 25 giây	
Sóng thần	Trọng lực	10 phút - 2 giờ	
Sóng nội	Trọng lực và phân tầng mật độ	2 phút - 10 giờ	Lớp đột biến mật độ
Sóng nước dâng do bão	Trọng lực và lực quay Trái Đất	1 - 10 giờ	Gần đường bờ
Thủy triều	Trọng lực và lực quay Trái Đất	12 - 24 giờ	
Sóng hành tinh	Trọng lực, lực quay Trái Đất và biến thiên vĩ độ địa lý hoặc độ sâu đại dương	O(100 ngày)	Toàn bộ lớp nước đại dương

Trong chương này, trước hết sẽ tổng quan các phương trình cơ bản của chuyển động chất lỏng và một số lý luận chung về chất lỏng không nhớt và chuyển động không xoáy. Sau đó rút ra các phương trình tuyến tính hoá đối với sóng biên độ nhỏ vô hạn. Sau khi đưa ra những nhận xét khái quát về các sóng lan truyền, ta sẽ khảo sát những tính chất của sóng tiến điều hoà đơn trên nền độ sâu không đổi. Ở đây sẽ bước đầu phân tích về tốc độ nhóm sóng theo hai góc độ động học và động lực học.

1.1 TỔNG QUAN NHỮNG KẾT LUẬN CƠ BẢN VỀ CHẤT LỎNG KHÔNG NÉN VÀ MẬT ĐỘ KHÔNG ĐỔI

1.1.1 Các phương trình mô tả

Trong nhiều bài toán về sóng trọng lực, trong quy mô thời gian và không gian ta quan tâm, thì sự biến thiên mật độ nước là không đáng kể. Các định luật bảo toàn cơ bản được mô tả đúng đắn bằng các phương trình Navier-Stokes:

đối với khối lượng:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

đối với động lượng:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

trong đó $\mathbf{u}(x, t)$ là vectơ vận tốc (u, v, w) , $P(\mathbf{x}, y)$ là áp suất, ρ là mật độ, g là gia tốc trọng trường, ν là độ nhớt động học không đổi và $\mathbf{x} = (x, y, z)$ với trục z hướng thẳng đứng lên trên.

Một trong những suy diễn quan trọng từ các phương trình này là vectơ xoáy $\boldsymbol{\Omega}(x, t)$ xác định bằng

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

nó bằng hai lần tốc độ xoáy địa phương. Tác dụng toán tử xoáy

lên phương trình (1.2) và sử dụng phương trình (1.1), ta có

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}. \quad (1.4)$$

Về mặt vật lý, phương trình trên có nghĩa: theo sau chất lỏng chuyển động, tốc độ biến thiên của xoáy là do sự dẫn ra và xoắn của các đường xoáy và khuếch tán nhớt (xem Batchelor, 1967). Trong nước, ν nhỏ ($\cong 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$), thành phần cuối cùng của phương trình (1.4) có thể bỏ qua, ngoại trừ trong các vùng có gradient vận tốc lớn và xoáy mạnh. Phép xấp xỉ sau đây đúng với gần như mọi chất lỏng:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (1.5)$$

Một lớp bài toán rất quan trọng là những bài toán trong đó $\boldsymbol{\Omega} \equiv 0$ và được gọi là *dòng không xoáy*. Lấy tích vô hướng của phương trình (1.5) và $\boldsymbol{\Omega}$, ta được

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{\boldsymbol{\Omega}^2}{2} = \Omega^2 [\mathbf{e}_\Omega \cdot (\mathbf{e}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{u})],$$

ở đây, \mathbf{e}_Ω là vectơ đơn vị dọc theo $\boldsymbol{\Omega}$. Vì gradient vận tốc hữu hạn trong mọi tình huống vật lý thực, nên trị số cực đại của $\mathbf{e}_\Omega \cdot (\mathbf{e}_\Omega \cdot \nabla \mathbf{u})$ phải có giá trị hữu hạn, thí dụ bằng $M/2$. Độ lớn $\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x}, t)$ theo sau một phần tử chất lỏng không thể lớn hơn $\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x}, 0)e^{Mt}$. Do đó, nếu không có một xoáy nào tại thời điểm $t = 0$, thì dòng sẽ mãi giữ nguyên là dòng không xoáy.

Đối với chuyển động không xoáy, không nhớt, vận tốc \mathbf{u} có thể biểu diễn qua gradient của hàm thế vận tốc vô hướng Φ

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi. \quad (1.6)$$

Sự bảo toàn khối lượng đòi hỏi thế vận tốc phải thoả mãn phương trình Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.7)$$

Nếu thế vận tốc được biết, thì có thể tìm được trường áp suất từ phương trình động lượng (1.2). Sử dụng đồng nhất thức vectơ

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

và tính không xoáy, ta có thể viết lại phương trình (1.2) với $\mathbf{v} = 0$ như sau

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right] = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right).$$

áp dụng tích phân theo các biến không gian, ta được

$$-\frac{P}{\rho} = gz + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + C(t), \quad (1.8)$$

trong đó $C(t)$ là một hàm tùy ý phụ thuộc vào t và thường bị loại bỏ nhờ việc định nghĩa lại Φ mà không ảnh hưởng gì đến trường vận tốc. Phương trình (1.8) được gọi là phương trình Bernoulli. Số hạng thứ nhất, gz ở vế phải của phương trình (1.8) chính là phần áp suất thủy tĩnh, các số hạng khác là phần áp suất thủy động lực trong áp suất toàn phần P .

1.1.2 Các điều kiện biên cho dòng không xoáy và không nhớt

Có hai kiểu biên đáng quan tâm: mặt phân cách nước – không khí, còn được gọi là *mặt tự do*, và mặt tiếp xúc rắn không xuyên. Dọc theo hai biên này, chất lỏng được xem như chỉ chuyển động theo phương tiếp tuyến với mặt. Giả sử phương trình tức thời của biên là

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0, \quad (1.9)$$

trong đó ζ là độ cao tính từ $z = 0$ và giả sử vận tốc của một điểm hình học \mathbf{x} trên mặt tự do đang di chuyển là \mathbf{q} . Sau một

khoảng thời gian ngắn dt , mặt tự do được mô tả như sau

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{q} dt, t + dt) = 0 = F(\mathbf{x}, t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F \right) dt + O(dt)^2.$$

Kết hợp với phương trình (1.9), suy ra

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla F = 0$$

với mọi dt nhỏ. Giả thiết chất lỏng chỉ chuyển động dọc theo mặt biên đòi hỏi phải có $\mathbf{u} \cdot \nabla F = \mathbf{q} \cdot \nabla F$, điều này có nghĩa rằng

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad \text{tại} \quad z = \zeta, \quad (1.10)$$

hay, một cách tương đương:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{tại} \quad z = \zeta. \quad (1.11)$$

Người ta gọi phương trình (1.10) hay (1.11) là *điều kiện biên động học*. Trong trường hợp đặc biệt, khi biên là mặt tường cứng bất động S_B thì $\partial \zeta / \partial t = 0$ và phương trình (1.10) trở thành

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{tại} \quad S_B. \quad (1.12)$$

Tại đáy biển B_0 ở độ sâu $h(x, y)$, phương trình (1.9) trở thành $z + h(x, y) = 0$ và phương trình (1.12) có thể viết lại thành

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{tại} \quad B_0. \quad (1.13)$$

Trên mặt phân cách nước – không khí, cả hai đại lượng ζ và Φ đều chưa biết, do đó cần phải có thêm một *điều kiện biên động lực học* liên quan đến các lực tác động.

Đối với hầu hết các vấn đề trong cuốn sách này thì bước sóng là đủ lớn để sức căng bề mặt không đáng kể; áp suất ngay dưới mặt tự do phải bằng áp suất khí quyển P_a ở phía trên. Áp

dụng phương trình (1.8) cho mặt tự do, ta có

$$-\frac{P_a}{\rho} = g\zeta + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 \quad \text{tại} \quad z = \zeta. \quad (1.14)$$

Hai điều kiện (1.11) và (1.14) có thể kết hợp thành một điều kiện đối với hàm Φ bằng cách lấy đạo hàm toàn phần của phương trình (1.14):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \frac{P_a}{\rho} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + g\zeta\right) = 0, \quad z = \zeta. \quad (1.15)$$

Sử dụng phương trình (1.11) và đẳng thức

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$$

từ phương trình (1.15) ta có

$$\frac{D}{Dt} \frac{P_a}{\rho} + \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 \right] = 0, \quad z = \zeta. \quad (1.16)$$

Ngoài ra, nếu $P_a = \text{const}$, điều kiện trên sẽ trở thành

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^2) + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^2 = 0, \quad z = \zeta, \quad (1.17)$$

đây thực sự là một điều kiện đối với Φ . Thấy rằng chẳng những các thành phần phi tuyến đã xuất hiện trong các điều kiện biên này, mà vị trí của mặt tự do cũng là một đại lượng chưa biết. Do đó, khó có thể có một lý thuyết giải tích chính xác đối với các bài toán về sóng trên nước.

Khi chuyển động của không khí bên trên là đáng kể, thì áp suất khí quyển không thể luôn luôn được mô tả trước; chuyển động của không khí và nước thường gắn liền với nhau. Thật vậy, sự trao đổi động năng và năng lượng giữa không khí và biển chính là điểm trọng tâm của lý thuyết phát sinh sóng mặt do gió. Tuy nhiên, ta sẽ chỉ giới hạn nghiên cứu những vùng tương đối cục bộ, nơi không có tác động trực tiếp của gió. Khi đó

có thể không tính đến lớp không khí do mật độ tương đối của nó khá nhỏ, nhưng vẫn đáp ứng được nhiều mục đích của chúng ta.

1.2 PHÉP XẤP XỈ TUYẾN TÍNH HÓA ĐỐI VỚI SÓNG BIÊN ĐỘ NHỎ

Giả thiết rằng những qui mô vật lý cụ thể của chuyển động có thể được biết trước. Thí dụ, giả sử

$$\begin{pmatrix} \lambda/2\pi \\ \omega^{-1} \\ A \\ A\omega\lambda/2\pi \end{pmatrix} \quad \text{đặc trưng cho} \quad \begin{pmatrix} x, y, z, h \\ t \\ \zeta \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

trong đó λ , ω , và A tuần tự là các giá trị tiêu biểu của bước sóng, tần số và biên độ dao động của mặt tự do. Ta đã gán quy mô của Φ bằng $A\omega\lambda/2\pi$, do đó tốc độ có quy mô là $A\omega$ ở gần mặt tự do. Bây giờ ta đưa ra các biến phi thứ nguyên và ký hiệu chúng như sau:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ x, y, z, h \\ t \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega\lambda\Phi'/2\pi \\ \lambda(x', y', z', h')/2\pi \\ t'/\omega \\ A\zeta' \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Nếu thế các biến phi thứ nguyên này vào các phương trình (1.7), (1.11), (1.12) và (1.14), ta nhận được các phương trình phi thứ nguyên sau đây:

$$\nabla'^2 \Phi' = \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Phi' = 0, \quad -h' < z' < \varepsilon\zeta' \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial n'} = 0, \quad z' = -h' \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \frac{\partial \zeta'}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \right) = \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \quad \text{tại } z' = \varepsilon \zeta' \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \left(\frac{2\pi g}{\omega^2 \lambda} \zeta' \right) + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla' \Phi')^2 = -P'_a = -\frac{2\pi P_a}{\rho A \omega^2 \lambda} \quad (2.6)$$

trong đó $\varepsilon = 2\pi A/\lambda = 2\pi \times$ biên độ / bước sóng = độ dốc sóng. Vì đã giả thiết rằng các quy mô phản ánh đúng vật lý của quá trình, nên tất cả các biến phi thứ nguyên phải có bậc là đơn vị; sự quan trọng của mỗi số hạng ở trên chỉ cần xét theo hệ số đứng trước số hạng đó.

Bây giờ ta xét các sóng có biên độ nhỏ với nghĩa độ dốc sóng nhỏ: $\varepsilon \ll 1$. Các điều kiện biên tại mặt tự do có thể đơn giản hoá nếu để ý rằng mặt tự do chưa biết chỉ cách biệt với mặt phẳng nằm ngang $z' = 0$ một lượng có bậc $O(\varepsilon)$. Vì vậy, ta có thể khai triển Φ' và các đạo hàm của nó thành chuỗi Taylor:

$$f'(x', y', \varepsilon \zeta', t') = f'|_0 + \varepsilon \zeta' \frac{\partial f'}{\partial z'}|_0 + \frac{(\varepsilon \zeta')^2}{2!} \frac{\partial^2 f'}{\partial z'^2}|_0 + O(\varepsilon^3)$$

với $f'|_0$ có nghĩa là $f(x, y, 0, t) \dots$ Nếu lấy đến số hạng bậc một, các điều kiện trên mặt tự do xấp xỉ bằng

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} &= \Phi'_{z'} \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial t'} + \frac{2\pi g}{\omega^2 \lambda} \zeta' &= -P'_a \end{aligned} \quad z' = 0.$$

Chỉ còn các thành phần tuyến tính được giữ lại trong các điều kiện biên này và các điều kiện đó ứng với mặt phẳng đã biết $z' = 0$. Cùng với các phương trình (2.3) và (2.4) bài toán xấp xỉ đã được tuyến tính hoá hoàn toàn. Trở lại các biến vật lý, ta có

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad -h < z < 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad z = -h \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \zeta = -\frac{P_a}{\rho} \quad (2.10)$$

Ngoài ra các phương trình (2.9) và (2.10) có thể kết hợp lại để có

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_a}{\partial t}, \quad z = 0 \quad (2.11)$$

Phương trình này cũng có thể nhận được bằng cách tuyến tính hoá phương trình (1.16).

Có thể liên hệ áp suất toàn phần trong lòng chất lỏng với Φ bằng cách tuyến tính hoá phương trình Bernoulli

$$P = -\rho g z + p \quad \text{trong đó } p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{áp suất động lực.} \quad (2.12)$$

Những điều kiện này phải được bổ sung bởi các điều kiện ban đầu và các điều kiện biên bên trong chất lỏng và ở vô cùng nếu có.

Phải lưu ý một lần nữa về giả thiết không nhớt trong khi thực hiện phép xấp xỉ tuyến tính. Gần biên cứng, lý thuyết thế cho phép dòng trượt trên hướng tiếp tuyến, nhưng trên thực tế thì tất cả các thành phần vận tốc phải triệt tiêu. Ở đây phải có một lớp biên mỏng để là trơn sự chuyển đổi từ không đến một giá trị hữu hạn. Như vậy

$$\frac{\partial}{\partial x_N} \gg \frac{\partial}{\partial x'_T}, \quad \frac{\partial}{\partial x''_T},$$

ở đây x_N , x'_T và x''_T làm thành một hệ trục tọa độ trực giao cục bộ, với x_N vuông góc với bề mặt rắn, còn x'_T và x''_T thì song song

với nó. Từ phương trình động lượng đã tuyến tính hoá suy ra rằng vận tốc tiếp tuyến \mathbf{u}_T ở trong lớp biên thoả mãn biểu thức

$$\frac{\partial \mathbf{u}_T}{\partial t} \equiv \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial x_N^2} - \frac{1}{\rho} \nabla_T p$$

Với chu kỳ sóng có trị số bằng quy mô thời gian, độ dày của lớp biên δ phải có bậc là

$$\delta \sim \left(\frac{2\nu}{\omega} \right)^{1/2}$$

Đối với nước, $\nu \approx 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$; khi thử nghiệm mô hình chu kỳ đặc trưng là 1 giây nên $\delta \sim 0,056 \text{ cm}$, độ dày này khá nhỏ so với bước sóng thông thường. Trong đại dương, thường thì sóng lừng chu kỳ cỡ 10 giây; $\delta \sim 0,17 \text{ cm}$. Nhưng lớp biên gần đáy biển thực thường là lớp biên rối đối với hầu hết các chu kỳ sóng. Như sẽ phân tích sau đây, giá trị thực nghiệm tiêu biểu của độ nhớt rối bằng khoảng 100ν ; vậy độ dày của lớp biên rối đối với chu kỳ sóng 10 giây có bậc $\leq O(10) \text{ cm}$, nó vẫn hoàn toàn là nhỏ. Như vậy, vùng lớp biên chỉ là một phần nhỏ bé của cả khối chất lỏng với kích thước tương đương bước sóng, và ảnh hưởng tổng thể lên chuyển động sóng là rất nhỏ khi qua khoảng cách một vài lần bước sóng hay qua một thời khoảng bằng một vài chu kỳ sóng.

1.3 NHỮNG NHẬN XÉT CƠ BẢN VỀ SÓNG LAN TRUYỀN

Xét một dạng đặc biệt của mặt tự do

$$\zeta(x, y, t) = \text{Re} A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad (3.1)$$

trong đó i là đơn vị ảo $(-1)^{1/2}$ và

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2), \quad \mathbf{x} \equiv (x, y). \quad (3.2)$$

Để tiện biến đổi toán học, người ta thường sử dụng dạng hàm mũ, và để ngắn gọn dấu Re (phần thực) sẽ được bỏ đi, tức

là

$$\zeta(x, y, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (3.3)$$

được dùng để thay cho phương trình (3.1). Biểu thức này mô tả những loại bề mặt tự do nào?

Đối với người quan sát đứng yên, ζ sẽ dao động theo thời gian với chu kỳ $T = 2\pi/\omega$ giữa hai cực trị A và $-A$. Nếu ta chụp ảnh ba chiều tại thời điểm xác định t với ζ là tọa độ thẳng đứng và (x, y) là các tọa độ ngang, sự biến thiên của ζ trên mặt phẳng (x, y) sẽ mô tả một địa hình tuần hoàn. Trong mặt phẳng $y = \text{const}$, ta thấy ζ biến thiên tuần hoàn theo hướng x giữa A và $-A$ với chu kỳ không gian $2\pi/k_1$. Tương tự, trong mặt phẳng $x = \text{const}$, ζ biến thiên tuần hoàn theo hướng y giữa A và $-A$ với chu kỳ không gian $2\pi/k_2$. Vậy dọc hướng x số đỉnh sóng trên một đơn vị độ dài là $k_1/2\pi$, còn dọc hướng y , số đỉnh sóng là $k_2/2\pi$.

Ta định nghĩa *hàm pha* S như sau

$$S(x, y, t) = k_1 x + k_2 y - \omega t = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t. \quad (3.4)$$

Đối với một thời điểm xác định, phương trình $S(x, y, t) = \text{const} = S_0$ mô tả một đường thẳng với vectơ pháp tuyến là

$$\mathbf{e}_k = \left(\frac{k_1}{k}, \frac{k_2}{k} \right), \quad \text{trong đó } k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = |\mathbf{k}|. \quad (3.5)$$

Dọc theo đường thẳng này, độ cao mặt nước bằng nhau ở mọi nơi. Thí dụ, các mực nước sẽ cao nhất (các đỉnh sóng) khi $S_0 = 2n\pi$ và thấp nhất (các chân sóng) khi $S_0 = (2n+1)\pi$. Khi S_0 tăng một lượng 2π , thì độ cao mặt nước được lặp lại. Các đường có S_0 khác nhau song song với nhau nếu k_1 và k_2 là các hằng số. Chúng ta gọi các đường này là các *đường pha*. Nếu chụp ảnh và cắt một mặt cắt ngang dọc theo hướng của \mathbf{e}_k , trắc diện của

ζ sẽ là đường hình sin với bước sóng $\lambda = 2\pi/k$. Hoặc ta có thể nói rằng số sóng trên một đơn vị độ dài dọc hướng \mathbf{k} là $k/2\pi$. Do đó k được gọi là *số sóng* và \mathbf{k} được gọi là *vectơ số sóng* với các thành phần k_1 và k_2 . Li độ cực đại A so với giá trị trung bình $z = 0$ được gọi là *biên độ*.

Giả sử ta đi theo một đường pha cụ thể $S = S_0$. Khi thời gian t tiến triển, vị trí của đường pha này cũng thay đổi. Vậy thì tốc độ dịch chuyển của đường pha này bằng bao nhiêu? Rõ ràng, nếu người quan sát di chuyển với cùng vận tốc $d\mathbf{x}/dt$, thì sẽ thấy đường pha bất động, có nghĩa là

$$dS = \nabla S \cdot d\mathbf{x} + \frac{\partial S}{\partial t} dt = 0.$$

Từ phương trình (3.4) suy ra

$$\mathbf{k} = \nabla S = \mathbf{e}_k |\nabla S|, \quad (3.6a)$$

$$-\omega = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (3.6b)$$

và

$$\mathbf{e}_k \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{-\partial S/\partial t}{|\nabla S|} = \frac{\omega}{k} \equiv C. \quad (3.7)$$

Như vậy, tốc độ mà đường pha tiến đi trong hướng vuông góc với nó bằng ω/k được gọi là *tốc độ pha* C . Các phương trình (3.6a) và (3.6b) có thể coi là các định nghĩa của ω và \mathbf{k} : tần số là tốc độ biến thiên pha theo thời gian và số sóng là tốc độ biến thiên pha theo không gian.

1.4 SÓNG TIẾN TRÊN VÙNG NƯỚC ĐỘ SÂU KHÔNG ĐỔI

Đối với chuyển động điều hoà đơn tần số ω , sự tuyến tính của bài toán cho phép chúng ta tách nhân tử phụ thuộc thời gian $e^{-i\omega t}$ ra như sau:

$$\left. \begin{aligned} \zeta(x, y, t) &= \eta(x, y) \\ \Phi(x, y, z, t) &= \phi(x, y, z) \\ \mathbf{u}(x, y, z, t) &\rightarrow \mathbf{u}(x, y, z) \\ P(x, y, z, t) + \rho g z &= p(x, y, z) \end{aligned} \right\} e^{-i\omega t}. \quad (4.1)$$

Chú ý rằng cùng một ký hiệu u được sử dụng để biểu diễn vận tốc chất lỏng và biểu diễn nhân tử phụ thuộc không gian của nó. Các phương trình tuyến tính hoá từ (2.7) đến (2.10) có thể dẫn tới

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad -h < z < 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad z = -h, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + i\omega \eta = 0 \quad z = 0, \quad (4.4)$$

$$g\eta - i\omega \phi = \frac{-p_a}{\rho} \quad (4.5)$$

trong đó phương trình (4.4) và (4.5) có thể kết hợp lại thành

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \omega^2 \phi = \frac{i\omega}{\rho} p_a, \quad z = 0. \quad (4.6)$$

Chọn nghiệm hai chiều biểu diễn một sóng tiến không chịu tác động trực tiếp của khí quyển, tức $p_a = 0$ và

$$\eta = A e^{ikx}. \quad (4.7)$$

Để dàng nhận thấy rằng hàm thế thoả mãn các phương trình (4.2) và (4.3) sẽ bằng

$$\phi = B \operatorname{ch} k(z+h) e^{ikx}.$$

Để thoả mãn các điều kiện biên tại mặt với $p_a = 0$, ta cần có

$$B = -\frac{igA}{\omega \operatorname{ch} kh} \frac{1}{kh}$$

và

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh, \quad (4.8)$$

do đó

$$\phi = -\frac{igA}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ikx}. \quad (4.9)$$

Như vậy, với một tần số cho trước ω sóng tiến phải có một số sóng riêng xác định theo phương trình (4.8). Trong dạng phi thứ nguyên là

$$\omega \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{kh \operatorname{th} kh}.$$

Sự biến thiên của tần số phi thứ nguyên $\omega(h/g)^{1/2}$ và số sóng phi thứ nguyên kh được biểu diễn trên hình 4.1. Đặc biệt các biểu thức xấp xỉ tới hạn bằng

$$\begin{aligned} \omega &\approx k\sqrt{gh} & kh &\ll 1, \\ \omega &\approx \sqrt{gh} & kh &\gg 1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vì $kh = 2\pi h/\lambda$ có thể xem như là tỉ số giữa độ sâu và bước sóng, nên người ta dùng các thuật ngữ *sóng dài* và *sóng nước nông* khi $kh \ll 1$ và các thuật ngữ *sóng ngắn* và *sóng nước sâu* khi $kh \gg 1$. Với một độ sâu h cố định, các sóng ngắn hơn sẽ có các tần số cao hơn. Trong vùng nước nông, các sóng với một tần số cố định sẽ có bước sóng ngắn hơn ở độ sâu nhỏ hơn vì $k \cong \omega/(gh)^{1/2}$.

Tốc độ pha C cho theo công thức

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th} kh} \quad (4.11)$$

được vẽ dưới dạng phi thứ nguyên trên hình 4.1. Đối với các sóng dài và ngắn các biểu thức tới hạn là

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{gh} & kh &\ll 1, \\ C &= \sqrt{g/k} & kh &\gg 1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nhìn chung, với cùng độ sâu, các sóng dài hơn có tốc độ nhanh hơn. Trong chương 2 sẽ cho thấy rằng một nhiễu động xuất phát có thể xem như tổng Fourier của các nhiễu động tuần hoàn với các bước sóng biến thiên trong một dải phổ liên tục. Dần dần với thời gian, các sóng dài hơn sẽ vượt lên trên so với các sóng ngắn hơn. Trong khi các nhiễu động cùng truyền đi, thì các sóng dài nhất và các sóng ngắn nhất ngày càng cách xa nhau hơn, còn các sóng loại trung gian thì ở giữa khoảng đó. Hiện tượng các sóng tần số khác nhau di chuyển với các vận tốc khác nhau gọi là *sự tán mạn* (dispersion). Rõ ràng rằng, nếu tỷ số giữa ω và k đối với một sóng hình sin là một biểu thức tương quan phi tuyến thì môi trường truyền sóng là môi trường tán mạn. Do đó, phương trình (4.8) hay dạng tương đương của nó – phương trình (4.11), được gọi là quan hệ tán mạn (dispersion relation).

Từ phương trình Bernoulli tuyến tính hoá, áp suất động (không có $-\rho gz$) bằng

$$\frac{p}{\rho} = i\omega\phi = gA \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ikx} = g\eta \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh}. \quad (4.13)$$

Trường vận tốc sẽ là

$$u = \frac{gkA}{\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ikx}, \quad (4.14)$$

$$v = 0 \quad (4.15)$$

$$w = -\frac{igkA}{\omega} \frac{\operatorname{sh} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{ikx}. \quad (4.16)$$

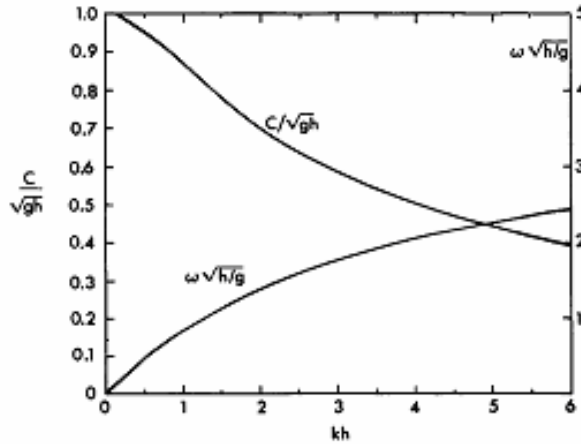
Đối với vùng nước rất sâu, $kh \gg 1$:

$$(\phi, u, v, w, p) = \left(-\frac{ig}{\omega}, \frac{gk}{\omega}, 0, -\frac{igk}{\omega}, \rho g \right) A e^{kz} e^{ikx}. \quad (4.17)$$

và đối với vùng nước rất nông, $kh \ll 1$:

$$(\phi, u, v, w, p) = \left(-\frac{ig}{\omega}, \frac{gk}{\omega}, 0, 0, \rho g \right) A e^{ikx}. \quad (4.18)$$

Một số đặc điểm nổi bật của vùng nước nông đáng được ghi nhớ là: (1) không còn sự phụ thuộc vào z ; (2) tốc độ thẳng đứng có thể bỏ qua; (3) áp suất động bằng $\rho g \zeta$ và áp suất toàn phần $P = \rho g(\zeta - z)$ là áp suất thủy tĩnh theo độ sâu dưới mặt tự do.



Hình 4.1 Đường cong tán mạn của sóng tiến

Cuối cùng, từ mục 1.2 ta đã biết rằng khi quy mô không gian bằng $1/k$ thì điều kiện để tuyến tính hoá là $kA \ll 1$. Ta hãy kiểm tra giả thiết tuyến tính hoá một lần nữa bằng cách so sánh thành phần phi tuyến với thành phần tuyến tính, cả hai thành phần này đều được ước lượng tại mặt tự do $z = 0$. Với kh bất kỳ, từ (4.11) và (4.14) ta có

$$\left(\frac{u \partial u / \partial x}{\partial u / \partial t} \right)_{z=0} \sim \left(\frac{uk}{\omega} \right)_{z=0} \sim \left(\frac{u}{C} \right)_{z=0} = \frac{kA}{th kh} \quad \text{với mọi } kh.$$

Chú ý là $kh \ll 1$, tỉ số trên trở thành A/h . Vì vậy, trong vùng

nước nông thì lý thuyết tuyến tính thực sự là một phép xấp xỉ rất hạn chế.

1.5 VẬN TỐC NHÓM SÓNG

Một trong số các khái niệm quan trọng nhất về các sóng tán mạn là vận tốc nhóm sóng. Có hai quan điểm để hiểu rõ về ý nghĩa của khái niệm đó.

1.5.1 Quan điểm động học

Giả sử có một nhóm các sóng dạng hình sin với các bước sóng biến đổi liên tục trong một khoảng hẹp gần $k = k_0$. Li độ của mặt tự do có thể biểu diễn bằng

$$\zeta = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk, \quad \frac{\Delta k}{k_0} \ll 1, \quad (5.1)$$

trong đó $A(k)$ là phổ số sóng với ω và k thoả mãn quan hệ tán mạn

$$\omega = \omega(k). \quad (5.2)$$

Bằng cách khai triển Taylor, ta viết

$$\omega = \omega[k_0 + (k - k_0)] = \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} + O(k - k_0)^2.$$

Nếu ký hiệu:

$$\frac{k - k_0}{k_0} = \xi, \quad \omega_0 = \omega(k_0), \quad \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \equiv C_g, \quad (5.3)$$

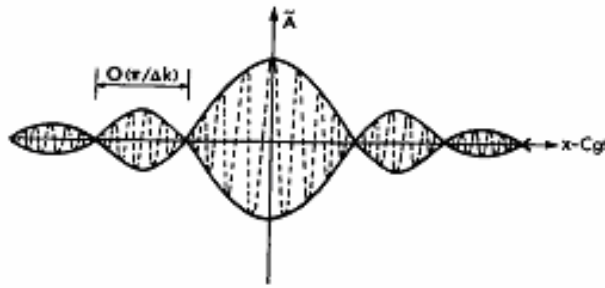
đối với $A(k)$ đủ trơn và cho phép xấp xỉ thô, ta có:

$$\begin{aligned} \zeta &\approx A(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k/k_0}^{\Delta k/k_0} \left\{ \exp[ik_0 \xi (x - C_g t)] \right\} k_0 d\xi \\ &= 2 A(k_0) \frac{\sin \Delta k (x - C_g t)}{(x - C_g t)} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} = \tilde{A} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

trong đó

$$\tilde{A} = 2 A(k_0) \frac{\sin \Delta k (x - C_g t)}{(x - C_g t)}. \quad (5.5)$$

Do nhân tử $\exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$ trong phương trình (5.4), ζ có thể xem như một chuỗi sóng dạng sin xác định với biên độ \tilde{A} biến thiên chậm. Đường bao xác định bằng \tilde{A} có dạng của nhóm sóng được biểu diễn trên hình 5.1, nó di chuyển với tốc độ C_g . Do đó, C_g được gọi là vận tốc nhóm. Vì có biến thiên biên độ, khoảng cách giữa hai nút kế cận của đường bao xấp xỉ bằng $\pi/\Delta k$ và lớn hơn nhiều so với bước sóng của các sóng hợp phần $2\pi/k_0$.



Hình 5.1 Nhóm của các sóng có dải tần số hẹp

Với các sóng trên nền độ sâu không đổi, lấy vi phân quan hệ tán mạn (4.8), ta có

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right). \quad (5.6)$$

Với vùng nước sâu $kh \gg 1$:

$$C_g \approx \frac{1}{2} C \approx \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \quad (5.7)$$

và với vùng nước nông $kh \ll 1$:

$$C_g \approx C \approx (gh)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Do vận tốc pha lớn hơn vận tốc nhóm đối với các độ sâu thông thường, các đỉnh sóng cá thể sẽ di chuyển từ sau cùng lên hàng đầu của nhóm.

Trong mục 2.4 sẽ chứng tỏ bằng một cách tổng quát hơn rằng C_g là tốc độ truyền của một đường bao bất kỳ biến thiên chậm và phương trình (5.5) chỉ là một trường hợp riêng.

1.5.2 Quan điểm động lực: Dòng năng lượng

Trước hết ta tính năng lượng trung bình của một chuỗi sóng tiến đồng nhất cho một đơn vị diện tích mặt tự do. Nếu ký hiệu giá trị trung bình trong toàn chu kỳ bằng dấu gạch ngang trên đầu các đại lượng, ta có động năng cho toàn cột chất lỏng bằng

$$K.E. = \frac{\rho}{2} \int_{-h}^{\zeta} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]^2 dz \cong \frac{\rho}{2} \int_{-h}^0 \left\{ [\text{Re } u(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]^2 + [\text{Re } w(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]^2 \right\} dz, \quad (5.9)$$

ở đây với độ chính xác bậc hai $O(kA)^2$ cận trên của tích phân được thay bằng $z = 0$, còn \mathbf{u} có thể thay bằng xấp xỉ bởi bậc nhất – các phương trình (4.14) và (4.16). Chú ý rằng đối với hai hàm dạng sin bất kỳ

$$a = \text{Re } A e^{-i\omega t} \quad \text{và} \quad b = \text{Re } B e^{-i\omega t},$$

thì công thức sau đây là đúng:

$$\overline{ab} = \frac{1}{T} \int_0^T dt ab = \frac{1}{2} \text{Re} (AB^*) = \frac{1}{2} \text{Re} (A^* B), \quad (5.10)$$

trong đó $()^*$ chỉ liên hợp phức. Việc chứng minh công thức này giành cho bạn đọc như là một bài tập. Với các phương trình (4.14), (4.16) và (5.10), phương trình (5.9) trở thành

$$\begin{aligned}
K.E. &= \frac{\rho}{4} \left(\frac{gk|A|}{\omega} \right)^2 \frac{1}{\text{ch}^2 kh} \int_{-h}^0 [\text{ch}^2 k(z+h) + \text{sh}^2 k(z+h)] dz = \\
&= \frac{\rho}{4} \left(\frac{gk|A|}{\omega} \right)^2 \frac{\text{sh} 2kh}{2k \text{ch}^2 kh} = \frac{1}{4} \rho g |A|^2, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

ở đây khi biến đổi đã sử dụng công thức

$$\int_0^{kh} \text{ch}^2 \xi \, d\xi = \frac{1}{4} (\text{sh} 2kh + 2kh) \quad (5.12)$$

và quan hệ tản mạn. Mặt khác, thế năng trong cột chất lỏng do chuyển động sóng bằng

$$P.E. = \int_0^{\zeta} \rho g z \, dz = \frac{1}{2} \rho g \overline{\zeta^2} = \frac{1}{4} \rho g |A|^2 \quad (5.13)$$

vì $\rho g \, dz$ là trọng lượng của một lớp mỏng nằm ngang có độ cao trên mực trung bình là z . Năng lượng toàn phần bằng

$$E = K.E. + P.E. = \frac{1}{2} \rho g |A|^2. \quad (5.14)$$

Lưu ý rằng động năng và thế năng bằng nhau; tính chất này được gọi là *sự phân đều năng lượng*. Bây giờ xét một mặt cắt đứng độ rộng đơn vị dọc theo đỉnh sóng. Tốc độ dòng năng lượng (*rate of energy flux*) qua mặt cắt này bằng tốc độ trung bình của công do áp suất động thực hiện (*rate of work*), tức:

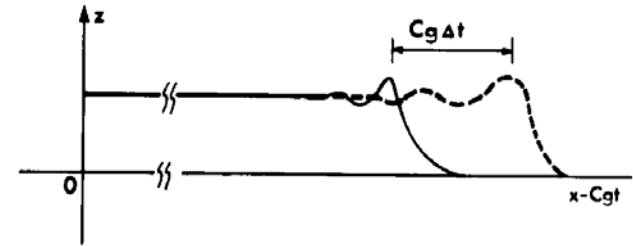
$$\begin{aligned}
\text{Tốc độ dòng năng lượng} &= \text{Tốc độ công của áp suất} = \\
&= \int_{-h}^{\zeta} p(x,t) u(x,t) \, dz \cong -\rho \int_{-h}^0 \overline{\Phi_t \Phi_x}, \quad (5.15)
\end{aligned}$$

biểu thức này có thể tính được và ta có kết quả là:

$$\begin{aligned}
\text{Tốc độ dòng năng lượng} &= \frac{1}{2} \rho g A^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh} 2kh} \right) \right] EC_g. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Như vậy vận tốc nhóm có ý nghĩa động lực, đó là tốc độ vận chuyển năng lượng sóng. Ngược lại, vận tốc pha chỉ thuần túy là một đại lượng động học và không phải lúc nào cũng liên quan tới sự vận chuyển một thực thể động lực.

Với tư cách một ứng dụng trực tiếp điều vừa trình bày, ta xét một máng nước độ rộng đơn vị với các sóng dạng sin tạo ra ở một đầu. Khi máy tạo sóng bắt đầu hoạt động, sẽ có nhiều chu kỳ sóng được tạo ra, đường bao sẽ đồng nhất ở mọi nơi ngoại trừ vùng gần front sóng, giống như trên hình 5.2. Vì dòng năng lượng từ máy tạo sóng đi vào từ bên trái (tại $x=0$) là EC_g , nên tốc độ kéo dài của vùng sóng phải là C_g . Như vậy front sóng truyền đi với vận tốc nhóm. Chi tiết về sự tiến triển front sóng sẽ xét trong mục 2.4.



Hình 5.2 Front đường bao của một chuỗi sóng dạng sin

Bài tập 5.1

Xét một hệ chất lỏng gồm hai lớp phía trên một nền đáy ngang. Phần chất lỏng nhẹ hơn ở phía trên có mật độ ρ , chất lỏng nặng hơn ở phía dưới có mật độ ρ' . Lấy mặt tự do tại $z=0$, mặt phân cách tại $z=-h$, đáy tại $z=-h'$. Chứng minh rằng sóng tiến dạng sin phải thoả mãn tương quan tản mạn:

$$\left(\frac{\omega^2}{gk}\right)\{\rho' \operatorname{cth} kh \operatorname{cth} k(h' - h) + \rho\} - \frac{\omega^2}{gk} \rho' \{\operatorname{cth} kh \operatorname{cth} k(h' - h)\} + \rho' - \rho = 0.$$

Hãy khảo sát hai hài tương ứng với hai nghiệm ω_1^2 và ω_2^2 đối với cùng một giá trị k .

Chẳng hạn, khi $h' \sim \infty$ hãy chứng minh rằng

$$\omega_1^2 = gk \quad \text{và} \quad \omega_2^2 = gk \frac{\rho' - \rho}{\rho' \operatorname{cth} kh + \rho} < \omega_1^2$$

và tỉ số biên độ tại mặt phân cách so với mặt tự do là

$$e^{-kh} \quad \text{và} \quad -\frac{\rho}{\rho' - \rho} e^{kh}$$

tần tự đối với hài thứ nhất và hài thứ hai. Vẽ tốc độ nhóm như là hàm của k cho mỗi hài.

Bài tập 5.2: *Các sóng mao dẫn*

Sức căng bề mặt tại mặt tự do sinh ra một hiệu áp suất giữa áp suất khí quyển P_a ở phía trên và áp suất nước P ở dưới. Hiệu này được xác định theo công thức Laplace (xem Landau và Lifshitz, 1959, tr. 237):

$$P - P_a \cong -T(\zeta_{xx} + \zeta_{yy}) \quad \text{tại} \quad z \cong 0,$$

ở đây vế phải tỉ lệ với độ cong bề mặt và T là hệ số sức căng bề mặt. Đối với mặt phân cách nước – không khí ở 20°C, $T = 74$ dyn/cm trong hệ CGS. Hãy thiết lập các điều kiện biên tại mặt tự do và nghiên cứu một sóng tiến phẳng trên nền nước sâu: $\Phi \propto e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}$.

Chứng minh rằng

$$\omega^2 = gk + \frac{Tk^3}{\rho}$$

và chứng tỏ rằng tốc độ pha có một cực trị C_m thoả mãn biểu thức

$$\frac{C^2}{C_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_m}{k} + \frac{k}{k_m} \right),$$

trong đó

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 2\pi \left(\frac{T}{g\rho} \right)^{1/2}.$$

Các giá trị số của λ_m và C_m đối với nước và không khí bằng bao nhiêu?

Nhận xét về sự biến thiên ω, C và C_g theo k hoặc λ .

Chương 2 - SỰ TRUYỀN CỦA CÁC SÓNG NGẮN TRONG BIỂN MỎ ĐỘ SÂU KHÔNG ĐỔI

Những nhiễu động gây bởi các xung động hữu hạn về thời gian như động đất, trượt đất, các vụ nổ..., sinh ra các sóng xung. Do quá trình phân tán, các sóng này truyền trong nước phức tạp hơn nhiều so với các loại sóng khác trong tự nhiên. Để dễ hiểu về các hệ quả vật lý của quá trình phân tán sóng, trong chương này, ta sẽ xem xét các mô hình đơn giản về cơ chế nguồn phát sinh, độ sâu đại dương sao cho có thể phân tích được chi tiết. Trong các mục 2.1 và 2.2, ta sẽ nghiên cứu bài toán gọi là bài toán Cauchy – Poisson về các sóng do một số loại nguồn có tính chất xung gây ra và đặc biệt tập trung phân tích diễn biến sóng ở miền xa nguồn. Trong các mục 2.3 và 2.4 sẽ xem xét về vai trò của sự phân tán đối với quá trình điều biến yếu các nhóm sóng.

Chương 2 - SỰ TRUYỀN CỦA CÁC SÓNG NGẮN TRONG BIỂN MỞ ĐỘ SÂU KHÔNG ĐỔI

Những nhiễu động gây bởi các xung động hữu hạn về thời gian như động đất, trượt đất, các vụ nổ..., sinh ra các sóng xung. Do quá trình phân tán, các sóng này truyền trong nước phức tạp hơn nhiều so với các loại sóng khác trong tự nhiên. Để dễ hiểu về các hệ quả vật lý của quá trình phân tán sóng, trong chương này, ta sẽ xem xét các mô hình đơn giản về cơ chế nguồn phát sinh, độ sâu đại dương sao cho có thể phân tích được chi tiết. Trong các mục 2.1 và 2.2, ta sẽ nghiên cứu bài toán gọi là bài toán Cauchy – Poisson về các sóng do một số loại nguồn có tính chất xung gây ra và đặc biệt tập trung phân tích diễn biến sóng ở miền xa nguồn. Trong các mục 2.3 và 2.4 sẽ xem xét về vai trò của sự phân tán đối với quá trình điều biến yếu các nhóm sóng.

2.1 CÁC BÀI TOÁN XUNG HAI CHIỀU

Xét đại dương độ sâu không đổi, không có các biên cứng. Giả sử các xung động trên mặt tự do và tại đáy không phụ thuộc y . Bài toán được thành lập trong mặt phẳng $x-z$. Vậy, thế vận tốc $\Phi(x, z, t)$ phải thoả mãn phương trình:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$

Trên mặt tự do sẽ có các điều kiện sau:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta = -\frac{P_a(x, t)}{\rho}, \quad z = 0, \quad (1.2b)$$

ở đây $P_a(x, t)$ là hàm được cho trước. Giả sử nên đáy được xác định theo phương trình $z = -h + H(x, t)$. Nếu chuyển động của nền đáy được xác định, từ tính liên tục của thành phần vận tốc vuông góc, ta có:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad z = -h + H(x, t). \quad (1.3)$$

Trong khuôn khổ bài toán tuyến tính, ta giả thiết rằng các biên độ của H , $\partial H / \partial t$ và $\partial H / \partial x$ là nhỏ để có thể bỏ qua các thành phần bậc hai, do đó:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t} \equiv W(x, t), \quad z \cong -h. \quad (1.4)$$

Tiếp sau phải đưa ra các điều kiện ban đầu. Để xem những dữ liệu ban đầu gì là cần thiết ở đây, ta vận dụng phương pháp biến đổi Laplace:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.5a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{f}(s) ds, \quad (1.5b)$$

ở đây Γ là một đường thẳng đứng nằm phía phải của các kỳ dị của $\bar{f}(s)$ trong mặt phẳng phức s . Các biến đổi của phương trình (1.1) và (1.4) cho:

$$\nabla^2 \bar{\Phi}(x, z, s) = 0, \quad -h < z < 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = \bar{W}(x, s), \quad z = -h. \quad (1.7)$$

Từ các biến đổi Laplace của các điều kiện (1.2a, b), ta có

$$-\zeta(x, 0) + s\bar{\zeta}(x, s) = \frac{\partial \bar{\Phi}(x, 0, s)}{\partial z}, \quad (1.8)$$

$$-\Phi(x, 0, 0) + s\bar{\Phi}(x, 0, s) + g\bar{\zeta}(x, s) = -\frac{\bar{P}_a(x, s)}{\rho}, \quad (1.9)$$

và có thể kết hợp thành

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} + \frac{s^2}{g} \bar{\Phi} = -\frac{s\bar{P}_a}{\rho g} - \zeta(x, 0) + \frac{s}{g} \Phi(x, 0, 0), \quad z = 0. \quad (1.10)$$

Từ phương trình trên, rõ ràng chúng ta chỉ cần biết trước các dữ liệu ban đầu $\Phi(x, 0, 0)$ và $\zeta(x, 0)$ tại mặt tự do mà không cần ở bất kỳ chỗ nào khác, bởi vì các đạo hàm thời gian chỉ xuất hiện trong các điều kiện mặt tự do. Finkelstein (1953) đã xét kỹ hơn về mặt toán học đối với vấn đề duy nhất giá trị ban đầu của bài toán loại này.

ý nghĩa vật lý của $\Phi(x, 0, 0)$ là gì? Giả thiết rằng, trước thời điểm $t = 0$, tất cả là yên tĩnh, nhưng tại $t = 0$ một xung áp suất $P_a(x, t) = I \delta(t)$ tác động lên mặt tự do. Tích phân phương trình Bernoulli từ $t = 0^-$ đến $t = 0^+$, ta được

$$\Phi(x, 0, 0^+) - \Phi(x, 0, 0^-) + \int_{0^-}^{0^+} g\zeta dt = -\frac{1}{\rho} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = -\frac{1}{\rho}.$$

Vì $\Phi(x, 0, 0^-) = 0$ và ζ phải hữu hạn, ta có $\Phi(x, 0, 0^+) = I/\rho$. Vậy, giá trị ban đầu của Φ diễn tả về mặt vật lý một áp suất xung tác động lên mặt tự do ở thời điểm hơi sớm hơn $t = 0^+$.

Các phương trình (1.6), (1.7), và (1.10) bây giờ xác một bài toán giá trị biên, về hình thức tương tự như là bài toán trường hợp sóng đơn điều hoà. Với t hữu hạn bất kỳ, ta chắc rằng sẽ không có chuyển động tại khoảng cách rất xa kể từ nguồn nhiễu động ban đầu, tức $\Phi(x, t) \rightarrow 0$ khi $|x| \rightarrow \infty$, điều này có nghĩa $\bar{\Phi} \rightarrow 0$ khi $|x| \rightarrow \infty$. Do vùng xét không liên quan đến một vật thể hữu hạn nào, nên bài toán có thể được giải bằng cách áp dụng phép biến đổi Fourier hàm mũ theo x như sau:

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk. \quad (1.11)$$

Phép biến đổi Fourier – Laplace đối với Φ thoả mãn:

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dz^2} - k^2 \tilde{\Phi} = 0, \quad -h < z < 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz} + \frac{s^2}{g} \tilde{\Phi} = F(k, s), \quad z = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz} = \tilde{W}, \quad z = -h, \quad (1.14)$$

trong đó

$$F(k, s) \equiv -\frac{s\tilde{P}_a(k, s)}{\rho g} - \tilde{\zeta}(k, 0) + \frac{s}{g} \tilde{\Phi}(k, 0, 0). \quad (1.15)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.12) là

$$\tilde{\Phi} = A \operatorname{ch} k(z+h) + B \operatorname{sh} k(z+h).$$

Các hệ số A và B được xác định từ các điều kiện biên (1.13) và (1.14) với kết quả như sau:

$$\tilde{\Phi} = \frac{1/\operatorname{ch} kh}{s^2 + gk \operatorname{th} kh} \left[gF \operatorname{ch} k(z+h) + \frac{\tilde{W}}{k} (s^2 \operatorname{sh} kz - gk \operatorname{ch} kz) \right]. \quad (1.16)$$

Rõ ràng các phân thêm thứ nhất và thứ hai trong dấu ngoặc vuông tuân tự biểu diễn các nhiễu động trên mặt và trên đáy. Nếu thực hiện các phép biến đổi ngược Fourier và Laplace, ta có

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} ds e^{st} \tilde{\Phi}(k, z, s) \quad (1.17)$$

Để thu được độ cao mặt tự do, ta sử dụng phương trình (1.2b)

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \frac{-P_a}{\rho g} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, 0, t) = \\ &= \frac{-P_a}{\rho g} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{\Gamma} \frac{ds}{2i\pi} e^{st} \frac{-s}{g} \tilde{\Phi}(k, 0, s), \end{aligned} \quad (1.18)$$

trong đó $\tilde{\Phi}$ được cho bằng phương trình (1.16). Nhiệm vụ bây giờ là tách lấy thông tin từ các phương trình (1.17) và (1.18). Hai trường hợp đặc biệt sẽ được xét trong các mục dưới đây.

2.1.1 Nhiễu động ngắn do một li độ ban đầu ở mặt tự do

Giả sử

$$P_a(x, t) = W(x, t) = \Phi(x, 0, 0) = 0 \quad \text{và} \quad \zeta(x, 0) \equiv \zeta_0(x) \neq 0, \quad (1.19)$$

do đó

$$\tilde{W} = 0, \quad F = -\tilde{\zeta}_0(k). \quad (1.20)$$

Phương trình (1.18) cho độ cao của mặt tự do

$$\zeta = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\zeta}_0(k) \int_{\Gamma} \frac{se^{st} ds}{s^2 + gk \operatorname{th} kh}. \quad (1.21)$$

Tích phân s có thể được xác định dễ dàng. Biểu thức dưới

dấu tích phân có hai cận thực tại

$$s = \pm i\omega \quad \text{với} \quad \omega = (gk \text{ th } kh)^{1/2}. \quad (1.22)$$

Đối với $t < 0$ ta đưa ra một đường viền bán nguyệt khép kín nằm ở nửa phía phải của mặt phẳng s như trên hình 1.1. Vì nhân tố nhân e^{st} trong hàm dưới dấu tích phân đồng nhất triệt tiêu khi $s \rightarrow \infty$, tích phân đường dọc theo nửa đường bán nguyệt lớn bằng không theo bổ đề Jordan. Theo lý thuyết thặng dư của Cauchy, tích phân s bằng 0, tức không có những điểm kì dị trong nửa đường tròn đó. Vậy, hiển nhiên

$$\zeta = 0, \quad t < 0. \quad (1.23)$$

Đối với $t > 0$, ta chọn nửa đường tròn phía trái. Cũng theo bổ đề Jordan, tích phân đường dọc theo nửa đường tròn triệt tiêu, chỉ để lại phần dư cho hai cực tại $\pm i\omega$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{se^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{se^{st}}{(s+i\omega)(s-i\omega)} ds = \cos \omega t, \quad t > 0.$$

Thế vào phương trình (1.21), ta được

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \cos \omega t \zeta_0(k). \quad (1.24)$$

Rõ ràng rằng, $\cos \omega t$ là hàm chẵn theo k . Nói chung, ta có thể tách $\zeta_0(x)$ thành phần chẵn và phần lẻ theo x : ζ_0^e và ζ_0^o . Theo định nghĩa của phép biến đổi Fourier thì

$$\zeta_0(k) = 2 \int_0^{\infty} dx \cos kx \zeta_0^e(x) - 2i \int_0^{\infty} dx \sin kx \zeta_0^o(x) \equiv \zeta_0^e(k) + \zeta_0^o(k)$$

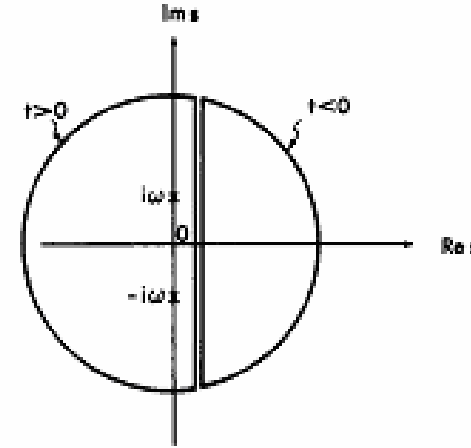
trong đó ζ_0^e là thực và chẵn theo k , ζ_0^o là ảo và lẻ theo k .

Để đơn giản, đặt ζ_0 là chẵn theo x . Phương trình (1.24) có thể được viết lại

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \zeta_0^e \cos kx \cos \omega t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_0^{\infty} dk \zeta_0^e [e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(kx+\omega t)}]. \quad (1.25)$$

Số hạng thứ nhất và thứ hai trong dấu ngoặc vuông tuân tự biểu diễn các sóng truyền về phía phải và phía trái.



Hình 1.1 Các đường lấy tích phân dùng cho phép biến đổi đảo Laplace

Để hiểu rõ hơn về bản chất vật lý, ta cần thực hiện những phép xấp xỉ. Tại thời gian t lớn, ta có thể sử dụng phương pháp pha ổn định (*method of stationary phase*) của Kelvin. ý tưởng của phương pháp này như sau:

Xét tích phân

$$I(t) = \int_a^b f e^{itg} dk, \quad (1.26)$$

trong đó f và g là các hàm liên tục theo k . Khi t lớn, pha tg của phần có dạng hình sin dao động nhanh khi k biến thiên. Nếu vẽ đồ thị hàm dưới dấu tích phân theo k , thì có rất ít vùng thực phía dưới đường cong bị loại bỏ, ngoại trừ một điểm tại đó

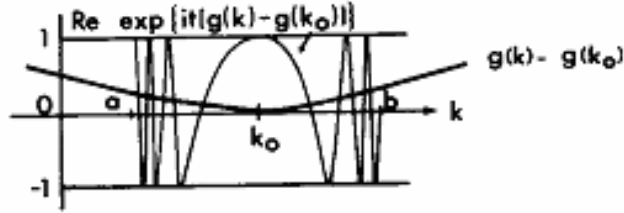
pha dừng, điểm đó là

$$g'(k) = 0, \quad k = k_0. \quad (1.27)$$

Tại lân cận của điểm dừng này, nhân tử dao động của hàm dưới dấu tích phân của phương trình (1.26) có thể được viết thành

$$e^{itg(k_0)} \exp \{ it [g(k) - g(k_0)] \}$$

Phần thực của $\exp \{ it [g(k) - g(k_0)] \}$ biến thiên chậm, như trên hình 1.2, trong khi đó phần ảo từ từ cắt ngang trục k tại $k = k_0$. Vì vậy ta có thể thấy, vùng lân cận này sẽ đóng góp đáng kể vào tích phân.



Hình 1.2 Phần thực của $\exp \{ it [g(k) - g(k_0)] \}$

Nếu ta xấp xỉ $g(k)$ bằng hai số hạng đầu của khai triển Taylor

$$g(k) \cong g(k_0) + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 g''(k_0),$$

thì tích phân có thể được viết thành

$$I \cong e^{itg(k_0)} f(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[\frac{1}{2} i (k - k_0) t g''(k_0) \right],$$

trong đó, các giới hạn (a, b) đã được xấp xỉ bằng $(-\infty, \infty)$. Sử dụng biểu thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i t k^2} dk = \left(\frac{\pi}{t} \right)^{1/2} e^{\pm i \pi / 4},$$

cuối cùng ta có

$$I \cong e^{itg(k_0)} f(k_0) \left(\frac{2\pi}{t |g''(k_0)|} \right)^{1/2} e^{\pm i \pi / 4}, \quad (1.28)$$

trong đó dấu \pm được lấy nếu $g''(k_0) > 0$, $g''(k_0) < 0$. Nếu phân tích công phu hơn, ta có thể thấy rằng sai số có bậc $O(t^{-1})$. Ngoài ra, nếu không có điểm dừng trong khoảng (a, b) , tích phân sẽ có bậc lớn nhất bằng $O(t^{-1})$. Điều này và các thông tin khác có thể thấy trong Stoker (1957) hay Carrier, Krook, và Pearson (1966).

Trở lại phương trình (1.25), chúng ta cần một số tính chất nhất định của đường cong phân tán, như được vẽ trên hình 1.3. Xét $x > 0$. Với tích phân thứ nhất

$$g(k) = k \frac{x}{t} - \omega,$$

từ hình 1.3b có thể thấy có một điểm dừng tại

$$\frac{x}{t} = \omega'(k_0) = C_g(k_0) \quad \text{nếu} \quad \frac{x}{t} < (gh)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Trong cùng khoảng $(0, \infty)$ của k , không có điểm dừng đối với tích phân thứ hai. Từ phương trình (1.28) suy ra

$$\zeta \cong \frac{1}{2\pi} \tilde{\zeta}_0^e(k_0) \left[\frac{2\pi}{t |\omega''(k_0)|} \right]^{1/2} \cos \left[k_0 x - \omega(k_0) t + \frac{\pi}{4} \right] + O(t^{-1}),$$

$$x < (gh)^{1/2} t, \quad (1.30)$$

trong đó $\omega''(k) < 0$ (xem hình 1.3c) và

$$\zeta \cong O(t^{-1}), \quad x > (gh)^{1/2} t.$$

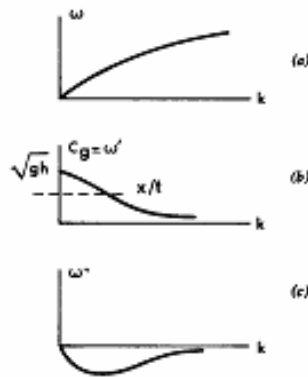
Bây giờ ta phân tích những tính chất vật lý mà phương

trình (1.30) diễn tả. Một người quan sát di chuyển với tốc độ xác định x/t chậm hơn $(gh)^{1/2}$, nhìn thấy một chuỗi sóng hình sin với số sóng k_0 [và tần số $\omega(k_0)$], vận tốc nhóm của các sóng này bằng x/t . Biên độ của chuỗi sóng giảm với bậc $O(t^{-1/2})$. Với x/t lớn, từ hình 1.3a ta thấy k_0 nhỏ, do đó, một người quan sát di chuyển nhanh hơn sẽ nhìn thấy các sóng dài hơn và với biên độ lớn hơn, vì $|\omega''(k_0)|^{1/2}$ nhỏ hơn. Hình dạng chính xác của $\zeta_0(x)$ có ảnh hưởng tới $\tilde{\zeta}_0(k)$ và biên độ của các sóng phân tán. Thí dụ, nếu

$$\zeta_0(x) = \frac{Sb}{\pi(x^2 + b^2)},$$

đây là một mô nước đối xứng, diện tích S và độ rộng đặc trưng b , ta tìm được:

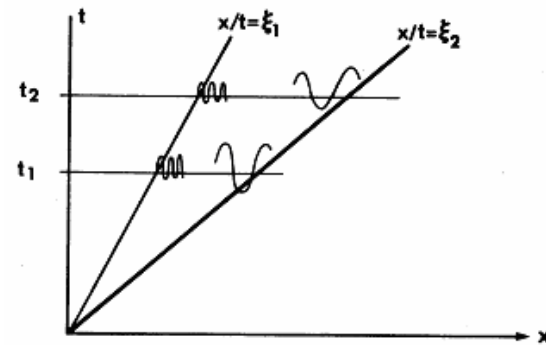
$$\tilde{\zeta}_0(k) = \tilde{\zeta}_0^e(k) = Se^{-|k|b}.$$



Hình 1.3 Các thay đổi của ω , ω' và ω'' theo k

Nếu độ rộng b lớn, thì $\tilde{\zeta}_0^e$ sẽ không đáng kể, ngoại trừ với k_0 nhỏ hoặc với trường hợp các sóng dẫn đầu dài. Khi b tăng, biên độ của một giá trị xác định k_0 giảm đi.

Nếu kết hợp các quan sát của nhiều quan sát viên trong cùng một thời gian t , ta thu được ảnh chụp của mặt tự do (xem hình 1.4). Thấy rằng, tại t không đổi, các sóng dài sẽ dẫn đầu, còn các sóng ngắn theo sau. Bây giờ ta xét quang cảnh tại một thời điểm muộn hơn, $t_2 > t_1$. Bây giờ cả hai quan sát viên cùng di chuyển về phía phải. Nhưng khoảng cách không gian đã tăng lên. Chẳng hạn, giả sử $\xi_1 \approx \xi_2$ sao cho giữa họ $k, \omega \approx \text{const}$. Độ rộng tổng cộng của chuỗi sóng đơn với k, ω bây giờ giãn ra cùng với sự tăng t , điều này có nghĩa rằng các đỉnh sóng được tạo thành trong quá trình lan truyền.



Hình 1.4 Biểu diễn không gian - thời gian của các sóng phân tán giữa hai quan sát viên di chuyển

Để đi theo một đỉnh sóng cụ thể tại tốc độ pha của nó, một người quan sát phải di chuyển với một tốc độ biến đổi, vì k_0 và $C(k_0)$ không giữ nguyên là hằng số khi đỉnh sóng di chuyển vào một khu vực mới. Tuy nhiên, nếu một người di chuyển với tốc độ bằng tốc độ nhóm của các sóng với bước bằng $2\pi/k_0$, thì anh ta chỉ nhìn thấy các sóng hình sin có cùng bước sóng, chúng đuổi kịp anh ta từ phía sau và vượt lên trước, vì vận tốc pha của chúng lớn hơn vận tốc nhóm.

Một cảnh tượng tương tự cũng diễn ra với những nhiễu độ lan truyền sang phía trái.

2.1.2 Sự truyền năng lượng, vận tốc nhóm

Xét một nhiễu động di chuyển sang phải duy nhất. Phương trình (1.30) đúng cho thời gian t lớn và biểu diễn một sóng tiến với biên độ

$$A = \frac{\tilde{\zeta}_0^e(k_0)}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{t |\omega''(k_0)|} \right)^{1/2}, \quad (1.32)$$

giảm chậm theo $t^{-1/2}$.

Mật độ năng lượng của sóng tiến này xấp xỉ bằng

$$\begin{aligned} E &\approx \rho \frac{g A^2}{2} = \frac{1}{2} \rho g |\zeta|^2 = \frac{g\rho}{2} \left| \frac{\tilde{\zeta}_0^e(k_0)}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{t |\omega''(k_0)|} \right)^{1/2} \right|^2 = \\ &= \frac{\rho g}{4\pi t} \frac{|\tilde{\zeta}_0^e(k_0)|^2}{|\omega''(k_0)|} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Tại t cho trước bất kỳ, các sóng nằm giữa hai quan sát viên di chuyển với với tốc độ $C_{g1} \equiv C_g(k_1)$ và $C_{g2} = C_g(k_2)$, tức giữa hai tia sóng

$$\frac{x_1}{t} = C_{g1} \quad \text{và} \quad \frac{x_2}{t} = C_{g2}$$

trong biểu đồ không - thời gian. Năng lượng sóng tổng cộng giữa chúng sẽ là

$$\int_{x_1}^{x_2} E dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho g}{4\pi t} \frac{|\tilde{\zeta}_0^e(k_0)|^2}{|\omega''(k_0)|} dx. \quad (1.34)$$

Vì $x = \omega'(k_0) t$ đối với t cố định và $\omega''(k_0) < 0$, ta có

$$\frac{dx}{t} = \omega''(k_0) dk_0 = -|\omega''(k_0)| dk_0. \quad (1.35)$$

Bây giờ, với $x_2 > x_1, k_2 < k_1$ (xem các hình 1.3a, b), phương

trình (1.34) trở thành

$$\int_{x_1}^{x_2} E dx \equiv \int_{k_1}^{k_2} \frac{|\tilde{\zeta}_0^e(k_0)|^2}{4\pi} dk_0 = \text{const} \quad (1.36)$$

là hằng số theo thời gian. Do đó, năng lượng tổng cộng của các sóng giữa hai người quan sát di chuyển với các vận tốc nhóm địa phương, được bảo toàn. Cách lý giải này, theo Jeffreys và Jeffreys (1953), tiếp tục làm tăng thêm ý nghĩa của vận tốc nhóm như đã bàn luận trong chương 1.

Whitham (1965) đã chỉ ra rằng kết quả tiệm cận do pha dừng đối với x và t lớn phù hợp với một lý thuyết được gọi là lý thuyết quang hình học. Từ phương trình (1.29), nếu lấy vi phân theo x và theo t , ta được

$$1 = \omega''(k) k_x t \quad \text{và} \quad 0 = \omega''(k) k_t t + \omega',$$

do đó

$$k_x = \frac{1}{t\omega''(k)}, \quad k_t = -\frac{\omega'}{t\omega''(k)}. \quad (1.37)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega' \frac{\partial k}{\partial x} = 0,$$

có thể được viết lại dưới dạng

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (1.38)$$

Vì

$$dk = \frac{\partial k}{\partial t} dt + \frac{\partial k}{\partial x} dx$$

từ phương trình (1.37) ta thấy rằng dọc theo đường cong $dx/dt = C_g = \omega'$, $dk = 0$; do đó k giữ không đổi. Ngoài ra, nếu nhân phương trình (1.33) với ω^{-1} và lấy vi phân theo t và x , ta

có ngay

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(C_g \frac{E}{\omega} \right) = 0. \quad (1.39)$$

Cả hai phương trình (1.38) và (1.39) là kết quả cơ bản của phép xấp xỉ quang hình và được coi là hợp lệ phổ biến cho các chuỗi sóng tựa điều hoà biến thiên chậm như sẽ được trình bày kỹ trong chương 3.

2.1.3 Các sóng dẫn đầu trong một xung nhiễu động

Các sóng nhanh nhất ứng với $k \approx 0$ và di chuyển với tốc độ gần bằng $(gh)^{1/2}$. Tại lân cận front sóng, $g'(k) \approx x/t - (gh)^{1/2}$ nhỏ và pha thì gần như là dừng. Hơn nữa, $\omega''(k) \approx -(gh)^{1/2} h^2 k$ cũng rất nhỏ và phép xấp xỉ của phương trình (1.30) không hợp lý. Cần có một xấp xỉ tốt hơn (Kajiura, 1963).

Do $k \approx 0$, ta khai triển hàm pha đối với k như sau:

$$\begin{aligned} g(k) &= k \frac{x}{t} - \omega(k) \approx k \left(\frac{x}{t} \right) - (gh)^{1/2} \left(k - \frac{k^3 h^2}{6} + \dots \right) = \\ &= k \left[\frac{x}{t} - (gh)^{1/2} \right] + \frac{(gh)^{1/2}}{6} h^2 k^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

Gần với sóng dẫn đầu, $x/t - (gh)^{1/2}$ có thể bằng không; chúng ta phải giữ số hạng tỉ lệ với k^3 . Một lần nữa, chỉ có tích phân thứ nhất trong phương trình (1.25) có giá trị, vì thế

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \tilde{\zeta}_0^e(k) \cos(kx - \omega t) + O\left(\frac{1}{t}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \tilde{\zeta}_0^e(0) \int_0^\infty \cos \left\{ k \left[x - (gh)^{1/2} t \right] + \left[\frac{(gh)^{1/2} h^2 t}{6} \right] k^3 \right\} dk \end{aligned}$$

ở đây ta đã lợi dụng tính chất $\tilde{\zeta}_0^e$ là số thực. Nếu tiến hành thay các biến

$$Z^3 = \frac{2 \left[x - (gh)^{1/2} t \right]^3}{(gh)^{1/2} h^2 t} \quad \text{và} \quad k \left[x - (gh)^{1/2} t \right] = Z\alpha,$$

thì tích phân trên trở thành

$$\zeta \sim \frac{(2)^{1/3} \tilde{\zeta}_0^e(0)}{2\pi \left((gh)^{1/2} h^2 t \right)^{1/3}} \int_0^\infty d\alpha \cos \left(Z\alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right),$$

và có thể được biểu diễn theo hàm Airy của Z :

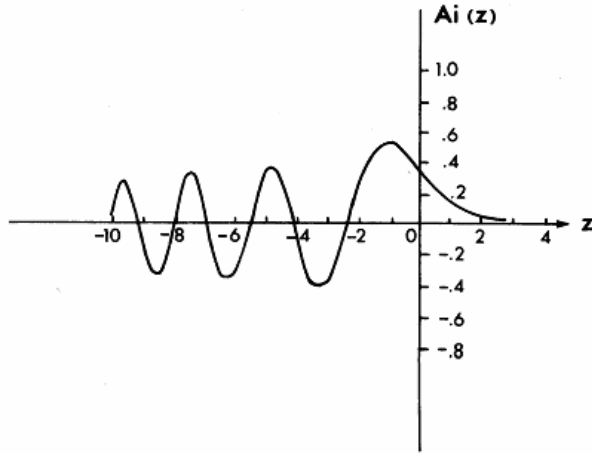
$$Ai(Z) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \cos \left(Z\alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right). \quad (1.41)$$

Vậy, ta có

$$\zeta \sim \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} \frac{1}{2} \tilde{\zeta}_0^e(0) Ai \left\{ \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} \left[x - (gh)^{1/2} t \right] \right\}. \quad (1.42)$$

$Ai(Z)$ là một hàm dao động với $Z < 0$ và suy giảm theo hàm mũ với $Z > 0$. Sự dao động của nó được thể hiện trên hình 1.5.

Bức tranh vật lý là như sau: Với một giá trị t cố định, thì Z tỉ lệ thuận với giá trị $x - (gh)^{1/2} t$ - khoảng cách tính từ front sóng $x = (gh)^{1/2} t$. Tại một thời điểm xác định, biên độ sẽ nhỏ ở phía trước front và điểm cao nhất ở một khoảng cách nào phía sau front. Về phía sau, thì biên độ và độ dài sóng suy giảm. Vì Z tỉ lệ với $t^{-1/3}$, các ảnh sóng tại những thời điểm khác nhau có cùng dạng, ngoại trừ việc tỉ lệ không gian tỉ lệ với nhân tử $t^{1/3}$, có nghĩa rằng cùng một dạng sóng kéo giãn ra theo thời gian. Trong quá trình tiến triển, biên độ giảm theo $t^{-1/3}$, trong khi các sóng còn lại trong chuỗi sóng giảm theo $t^{-1/2}$. Như vậy, phần đầu sóng lâu hơn phần còn lại của chuỗi sóng. Chú ý rằng biên độ của các sóng dẫn đầu tỉ lệ với $\tilde{\zeta}_0^e(0)$, đại lượng này bằng tổng diện tích li độ ban đầu $\tilde{\zeta}_0^e(x)$.



Hình 1.5 Sóng dẫn đầu do một mô nước hoặc rãnh nước đối xứng trên mặt gậy ra. Tung độ là $\zeta((gh)^{1/2} h^2 t / 2)^{1/3} [\zeta_0(0)]^{-1}$, xem phương trình (1.42)

2.1.4 Sóng thần gây bởi dao động nền đáy

Sóng thần (*tsunami*) là các sóng nước sinh ra do động đất. Nếu biết li độ của đáy biển trong vùng động đất, thì vấn đề sóng trên mặt nước trở thành một bài toán động lực học thuần túy. Đáng tiếc, rất khó đo đạc trực tiếp gần trấn tâm động đất, và người ta thường hướng tới sử dụng các số liệu ghi sóng biển trong một vùng rộng xung quanh trấn tâm để phán đoán thô về bản chất của chuyển động kiến tạo. Vì vậy, có rất nhiều công trình nghiên cứu lý thuyết về sóng nước do các chuyển động nền đáy khác nhau gây ra.

Trong số rất nhiều đặc tính của sóng thần ghi nhận được ở vùng gần bờ, có hai đặc tính thường hay được nhận thấy nhất, nhưng không phải bao giờ cũng vậy (Shepard, 1963). Đặc điểm thứ nhất là: sóng thần thường đi kèm sau một hiện tượng rút nước ở bãi biển. Đặc điểm thứ hai: sóng đầu tiên của sóng thần

có thể không phải là sóng lớn nhất. Trong mục này, ta sẽ xét một mô hình lý tưởng có thể phản ánh được những đặc điểm này một cách định tính.

Ta sẽ giả thiết rằng không có nhiễu động trên mặt tự do

$$\zeta(x,0) = \Phi(x,0) = P_a(x,0,t) = 0. \quad (1.43)$$

Trên đáy biển $z = -h$, li độ của nền đất $H(x,t)$ cho trước. Vậy là, $W = \partial H / \partial t$ được biết và nghiệm chuyển đổi rút ra từ theo phương trình (1.16)

$$\tilde{\Phi} = \frac{\tilde{W}}{k \operatorname{ch} kh} \frac{s^2 \operatorname{sh} kz - gk \operatorname{ch} kz}{s^2 + gk \operatorname{th} kh}. \quad (1.44)$$

Li độ của mặt tự do là

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{\operatorname{ch} kh} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} ds \frac{s \tilde{W} e^{st}}{s^2 + \omega^2}, \quad (1.45)$$

trong đó $\omega = (gk \operatorname{th} kh)^{1/2}$. Ta giới hạn thêm rằng chuyển động của nền đất là đột ngột và kết thúc ngay sau một khoảng thời gian vô cùng nhỏ:

$$H(x, 0-) = 0 \quad \text{nhưng} \quad H(x, 0+) = H_0(x).$$

Vận tốc của chuyển động của đất có thể được diễn tả bằng một hàm δ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = W(x,t) = H_0(x) \delta(t),$$

vì thế $\tilde{W} = \tilde{H}_0(k)$. Tích phân theo s có thể ngay lập tức cho

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{\tilde{H}_0(k)}{\operatorname{ch} kh} \frac{1}{2} [e^{i(kx+\omega t)} + e^{i(kx-\omega t)}]. \quad (1.46)$$

Hàm $H_0(x)$ có thể được coi là tổng của hai hàm lẻ và chẵn theo x , tuân tự là $H_0^o(x)$, $H_0^e(x)$. Một cách tuyến tính, hai phần này có thể được xét tách biệt và sau đó, các kết quả của chúng

được cộng lại. Dễ dàng chỉ ra rằng, phần chẵn $H_0^e(x)$ có các tác động rất giống với thí dụ ta đã xét trước đây về sự dịch chuyển đối xứng ban đầu của mặt tự do, nét khác duy nhất là nhân tử $(ch kh)^{-1}$, nó làm triệt tiêu sự ảnh hưởng của các sóng ngắn. Do đó, sau đây ta chỉ quan tâm đến thành phần lẻ.

Ta đưa ra đại lượng

$$H_0^o(x) = \frac{dB}{dx} \quad (1.47)$$

sao cho $\tilde{H}_0^o(k) = ik \tilde{B}(k)$. Do $\tilde{H}_0^o(k)$ lẻ, nên \tilde{B} phải là số thực và chẵn theo k ; do đó

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{ch kh} ik \tilde{B}(k) \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{ch kh} \tilde{B}(k) \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{ch kh} \tilde{B}(k) \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Với t lớn và xa các sóng dẫn đầu, các tích phân có thể xử lý bằng phương pháp pha dừng như trước đây, và có thể nhận được nhiều đặc điểm định tính tương tự như trước đây, một điểm khác quan trọng là $\zeta \sim t^{-2/3}$ khi $x/t = \text{const}$. Giả sử ta chỉ xét vùng lân cận các sóng dẫn đầu truyền về phía $x > 0$. Một lần nữa, tích phân thứ hai lại thống trị và phần đóng góp quan trọng là từ lân cận $k \approx 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dk \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{ch kh} \tilde{B}(k) &\equiv \operatorname{Re} \tilde{B}(0) \int_0^{\infty} dk e^{ikx} e^{-i\omega t} \equiv \\ &\equiv \operatorname{Re} \tilde{B}(0) \int dk \exp \left(i \left\{ k[x - (gh)^{1/2}t] + \frac{1}{6} (gh)^{1/2} h^2 k^3 t \right\} \right) \equiv \end{aligned}$$

$$= \pi \tilde{B}(0) \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} \operatorname{Ai} \left\{ \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} [x - (gh)^{1/2} t] \right\}$$

như đã bàn luận trước đây. Lấy vi phân theo x , ta có

$$\begin{aligned} \zeta &\equiv \frac{\tilde{B}(0)}{2} \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} \frac{d}{dx} \operatorname{Ai} \left\{ \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} [x - (gh)^{1/2} t] \right\} = \\ &= \frac{\tilde{B}(0)}{2} \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{2/3} \operatorname{Ai}' \left\{ \left[\frac{2}{(gh)^{1/2} h^2 t} \right]^{1/3} [x - (gh)^{1/2} t] \right\}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

trong đó

$$\operatorname{Ai}'(Z) \equiv \frac{d}{dZ} \operatorname{Ai}(Z)$$

Các sóng dẫn đầu suy yếu theo thời gian $t^{-2/3}$ nhanh hơn nhiều so với trường hợp tăng hay giảm thuần túy khi $\zeta \sim t^{-1/3}$. Kết quả này là do chuyển động của đất là một nửa dương, một nửa âm đã làm giảm ảnh hưởng hiệu dụng. Hàm $\operatorname{Ai}'(Z)$ diễn biến như trên hình 1.6. Chú ý rằng

$$\tilde{B}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^x H_0^o(x') dx' = - \int_{-\infty}^{\infty} x H_0^o(x) dx.$$

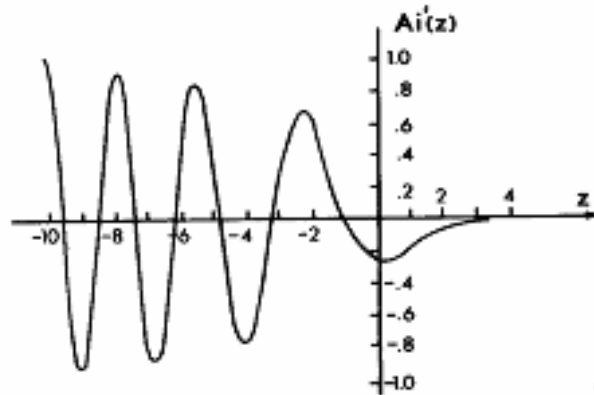
Vậy, nếu mặt đất sụt xuống ở phía phải và nâng lên ở phía trái, thì $\tilde{B}(0) > 0$ và front sóng truyền về phía phải được dẫn đầu bằng sự hạ thấp mặt nước (đó là nguyên nhân rút nước ở bãi biển). Các đỉnh sóng tiếp sau đó sẽ có biên độ tăng. Ở phía trái, $x < 0$, front sóng có pha ngược lại về hướng và được dẫn đầu bằng một đỉnh sóng. Nhưng nếu nền đất sụt theo hướng ngược lại, tức hạ thấp ở bên trái và nâng lên ở bên phải, thì front sóng truyền về phía phải sẽ được dẫn đầu bằng sự dâng nước.

Kajiura đã chỉ ra rằng, nếu giữ lại số hạng $gk^3 h^2$ trong biểu thức của $\omega(k)$ sẽ duy trì sự phân tán ở bậc thấp nhất, và có thể

nhận được cùng các kết quả tương tự – các phương trình (1.42) và (1.49), bằng cách vận dụng phép xấp xỉ sóng dài ngay từ đầu đầu, điều này hiển nhiên là hợp lý cho miền xa nguồn. Trong chương 11 sẽ cho thấy rằng phép xấp xỉ như vậy sẽ được thực hiện bằng các phương trình Boussinesq tuyến tính hoá, ở dạng một chiều, nó tương đương với

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gh \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right). \quad (1.50)$$

Các nhà khoa học như Kajiura (1963) và Momoi (1964a, b; 1965a, b) đã khảo sát miềm lân cận nguồn sóng thần.



Hình 1.6 Sóng dẫn đầu do nền đất chao nghiêng bất đối xứng

$$\zeta[\tilde{B}(0)]^{-1} ((gh)^{1/2} h^2 t / 2)^{2/3}, \text{ xem phương trình (1.49)}$$

Bài tập 2.1:

Hãy chỉ ra rằng nếu giải chính xác phương trình (1.50) với các điều kiện ban đầu:

$$\zeta(x, 0) = \tilde{\zeta}_0(0) \delta(x), \quad \zeta_t(x, 0) = 0,$$

thì kết quả cho ra là phương trình (1.42).

Bài tập 2.2: Bài toán Cauchy-Poisson với sóng trọng lực mao dẫn

Xét mặt tự do với tính chất mao dẫn (xem bài tập 5.2, mục 5.1). Hãy giải bài toán về sự phản ứng của mặt tự do hai chiều trong trường hợp xảy ra dâng nước cục bộ ban đầu: $\zeta(x, 0) = (b/\pi)(x^2 + b^2)^{-1}$. Rút ra kết quả tiệm cận cho trường hợp t lớn và x/t cố định và mô tả bức tranh vật lý. Hãy khảo sát trường hợp riêng khi điểm dừng là điểm 0 của $\omega'(k)$.

Bài tập 2.3: Sóng trên dòng chảy

Xét sóng đáy không đổi h và tốc độ dòng chảy đồng nhất U . Hãy phát biểu bài toán giá trị biên và giá trị ban đầu tuyến tính hoá đối với thế vị Φ của dòng nhiễu xác định bởi tốc độ toàn phần $= U\mathbf{i} + \nabla\Phi$, $\Phi = \Phi(x, z, t)$, trong đó x, z, t quy chiếu theo những toạ độ cố định trong không gian. Khảo sát ảnh hưởng của U lên tương quan tán mát $\omega = \omega(k; U)$ đối với sóng tiến.

Nếu tại $t = 0$, một áp suất xung cục bộ $P = P_0 \delta(x) \delta(t)$ tác động từ bên ngoài lên mặt tự do, hãy tìm dạng tiệm cận của $\zeta(x, t)$ với t lớn và x bao gồm cả front sóng. Nêu ý nghĩa vật lý và các hiệu ứng của U .

2.2 SỰ PHẢN HỒI BA CHIỀU NGẮN HẠN ĐỐI VỚI CÁC XUNG TỪ ĐÁY

Nếu nguồn nhiễu động được giới hạn trong một vùng ngang hữu hạn, các sóng sẽ truyền đi trong tất cả các hướng và chuyển động chất lỏng sẽ là chuyển động ba chiều. Chúng ta sẽ chỉ minh hoạ trường hợp sóng thần gây bởi chuyển động đột ngột của nền đáy biển (Kajiura, 1963).

Phương trình mô tả đối với thế vận tốc $\Phi(x, y, z, t)$ là phương trình Laplace ba chiều. Không có xung lực tác động trên mặt biển tại mọi thời gian. Trên đáy, chuyển động của nền đất là chuyển động hai chiều:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = W(x, y, t), \quad z = -h, \quad (2.1)$$

trong đó W chỉ có giá trị khác không trong một vùng hữu hạn. Ngoài ra

$$\Phi, \nabla \Phi \rightarrow 0 \text{ khi } r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Bài toán giá trị biên và giá trị ban đầu có thể giải bằng biến đổi Laplace theo t và phép biến đổi Fourier hai chiều theo x và theo y . Ở đây, phương pháp cộng nguồn tỏ ra hoàn toàn hợp lý. Xét một nhiễu động xung tập trung tại gốc $x = y = 0, z = -h$ tại thời gian $t = 0+$. Ký hiệu phản hồi thế bằng $G(x, y, z, t)$, khi đó thay vì phương trình (2.1) ta có phương trình:

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \delta(x) \delta(y) \delta(t - 0+), \quad z = -h. \quad (2.3)$$

Nói cách khác, hàm G cũng thoả mãn những điều kiện như hàm thế Φ , đó là:

$$\nabla^2 G = 0, \quad (2.4)$$

$$G_u + gG_z = 0, \quad z = 0, \quad (2.5)$$

$$G = G_t = 0, \quad t = 0, \quad z = 0, \quad (2.6)$$

$$G, \nabla G \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad t \text{ hữu hạn.} \quad (2.7)$$

Nếu tìm được hàm $G(x, y, z, t)$, thì hàm Φ có thể được biểu diễn ngay bằng

$$\Phi(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' W(x', y', \tau) G(x - x', y - y', z, t - \tau). \quad (2.8)$$

Về mặt vật lý, phương trình (2.8) diễn tả tổng của các

nguồn xung thành phần có cường độ tại $x = x', y = y', z = -h, t = \tau$ là $W(x', y', \tau) dx' dy' d\tau$. Ở đây ta đưa ra một nhận xét để có thể sử dụng sau này, rằng các hàm biến đổi Laplace Φ, W , và G quan hệ với nhau theo lý thuyết xếp cuộn như sau:

$$\bar{\Phi}(x, y, z, s) = \int \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \bar{W}(x', y', s) \bar{G}(x - x', y - y', z, s). \quad (2.9)$$

Hàm $G(x, y, z, t)$ được xem là dễ xây dựng, vì nguồn điểm có tính chất đối xứng qua trục. Ta định nghĩa $\delta(r)$ bằng

$$\delta(x) \delta(y) = \frac{\delta(r)}{2r\pi}$$

với ý rằng các tích phân mặt của cả hai phía là bằng nhau, tức là

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{r dr \delta(r)}{2r\pi} = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta(x) \delta(y).$$

Phương trình (2.3) có thể được viết lại thành

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{2r\pi} \delta(r) \delta(t - 0+); \quad (2.10)$$

và bây giờ bài toán G không chứa θ .

Do sự đối xứng trục, có thể vận dụng phép biến đổi Hankel, dùng hàm Bessel $J_0(kr)$ với tư cách là hàm trọng lượng. Định nghĩa phép biến đổi Hankel (xem Sneddon, 1951) như sau:

$$\hat{f}(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr) f(r) dr, \quad (2.11a)$$

khi đó, thì phép biến đổi ngược sẽ là

$$f(r) = \int_0^{\infty} k J_0(kr) \hat{f}(k) dk. \quad (2.11b)$$

Ta đi định nghĩa phép biến đổi hỗn hợp Laplace–Hankel của G bởi \hat{G}

$$\hat{G} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^{\infty} r J_0(kr) G dr.$$

Trong hệ trục tọa độ cực

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0, \quad -h < z < 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (2.12)$$

Nếu áp dụng phép biến đổi Hankel cho thành phần thứ nhất, lấy tích phân từng phần, sử dụng các điều kiện biên tại $r = 0$ và ∞ , và làm cho phương trình vi phân thoả mãn J_0 , ta có thể chỉ ra rằng

$$\int_0^{\infty} dr J_0(kr) r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G}{\partial r} \right) = -k^2 \hat{G}.$$

Như vậy, dạng biến đổi Laplace–Hankel của phương trình (2.12) là

$$\frac{d^2}{dz^2} \hat{G} - k^2 \hat{G} = 0. \quad (2.13)$$

Dạng biến đổi của điều kiện mặt tự do là

$$\frac{\hat{G}_z}{g} + \frac{s^2}{g} \hat{G} = 0, \quad (2.14)$$

và biến đổi của điều kiện biên đáy là

$$\hat{G}_z = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.15)$$

Nghiệm của phương trình (2.13) với các điều kiện biên (2.14) và (2.15) là

$$\hat{G} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \frac{s^2 \operatorname{sh} kz - gk \operatorname{ch} kz}{k \operatorname{ch} kh} \quad (2.16)$$

với $\omega^2 = gk \operatorname{th} kh$. Đảo ngược phép biến đổi Hankel, ta có

$$\bar{G}(r, z, s) = \int_0^{\infty} k J_0(kr) \hat{G}(k, z, s) dk, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Nếu điểm nhiễu động không nằm tại gốc mà tại điểm r' , thì chúng ta phải thay thế $|r|$ bằng $|r - r'|$ do đó

$$\bar{G}(|r - r'|, z, s) = \int_0^{\infty} k J_0(k|r - r'|) \hat{G}(k, z, s) dk, \quad (2.18)$$

trong đó

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ x' &= r' \cos \theta', & y' &= r' \sin \theta', \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$|r - r'| \equiv [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')]^{1/2}.$$

Khi phương trình (2.18) được thay thế vào phương trình (2.9) thì

$$\bar{\Phi}(r, \theta, z, s) = \int_0^{\infty} r' d r' \int_0^{2\pi} d\theta' \bar{W}(r', \theta', s) \int_0^{\infty} k J_0(k|r - r'|) \hat{G}(k, z, s) dk. \quad (2.20)$$

Tiếp theo, có thể nhận được thế Φ bằng biến đổi ngược Laplace.

Phép biến đổi Laplace đối với li độ mặt tự do là

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= -\frac{s}{g} \bar{\Phi} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r' d r' \int_0^{\pi} d\theta' W(r', \theta', s) \times \\ &\times \int_0^{\infty} k J_0(k|r - r'|) \frac{1}{\operatorname{ch} kh} \frac{s}{s^2 + \omega^2} dk. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bây giờ ta sẽ một số trường hợp đặc biệt.

2.2.1 Sóng thần hai chiều do dịch chuyển xung nền đáy

Trong trường hợp đặc biệt, đáy dịch chuyển dạng xung

$$W(r, \theta, t) = \wp(r, \theta) \delta(t - 0+) \quad (2.22)$$

biến đổi Laplace là $\bar{W} = \wp(r, \theta)$. Biến đổi ngược của phép biến đổi Laplace đối với phương trình (2.21) có ngay là

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \wp(r', \theta') \int_0^\infty \frac{k J_0(k|r-r'|)}{\text{ch } kh} \cos \omega t dk \quad (2.23)$$

Tiến trình tiếp theo có thể được thực hiện bằng cách biểu diễn $J_0(k|r-r'|)$ thành một chuỗi với theo định lý cộng đã biết (Watson, 1958, pp. 358–359)

$$\begin{aligned} J_0\left(k\left[r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\right]^{1/2}\right) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(kr) J_n(kr') \cos n(\theta-\theta') \end{aligned} \quad (2.24)$$

trong đó ε_n là ký hiệu Jacobi ($\varepsilon_0=1, \varepsilon_n=2, n=1, 2, 3, \dots$). Thế phương trình (2.24) vào phương trình (2.23) và ký hiệu:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \wp(r', \theta') J_n(kr') \begin{pmatrix} \cos n\theta' \\ \sin n\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_n^c(k) \\ W_n^s(k) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

ta có

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \int_0^\infty k J_n(kr) \frac{\cos \omega t}{\text{ch } kh} \times \\ &\times (W_n^c \cos n\theta + W_n^s \sin n\theta) dk. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Về nguyên tắc, nếu cho trước hàm $\wp(r, \theta)$, ta có thể lấy tích phân trong phương trình (2.25) và nhận được $W_n^s(k)$ và $W_n^c(k)$, và nghiệm cuối cùng có thể thu được bằng cách thực phân số và lấy tổng.

Để có một số ý niệm về phương diện vật lý, ta xét hai thí dụ đơn giản sau đây:

1) Dịch chuyển nên đối xứng qua trục:

$$\wp(r, \theta) = W_0(r) \quad (2.27)$$

Do tính trực giao của $\{\cos n\theta\}$ và $\{\sin n\theta\}$, suy ra

$$W_0^c = \int_0^\infty r W_0(r') J_0(kr') dr = \hat{W}_0(k), \quad n=0$$

$$W_n^c = 0, \quad W_n^s = 0 \quad n \neq 0$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \int_0^\infty k J_0(kr) \frac{\cos \omega t}{\text{ch } kh} \hat{W}_0(k) dk \\ &= \int_0^\infty r' J_0(kr') W_0(r') dr' \int_0^\infty k J_0(kr) \frac{\cos \omega t}{\text{ch } kh} dk, \end{aligned} \quad (2.28)$$

biểu thức này có thể suy ra trực tiếp từ phép biến đổi Hankel với $J_0(kr)$, không có nguồn đối với hàm nguồn G .

2) Dịch chuyển bất đối xứng theo trục y :

$$\wp(r, \theta) = W_1(r) \cos \theta \quad (2.29)$$

Để dàng chỉ ra rằng

$$W_1^c = \frac{1}{2} \int_0^\infty r W_1 J_1(kr') dr', \quad W_n^c = 0 \quad \text{tất cả } n \neq 1,$$

$$W_n^s = 0 \quad \text{tất cả } n.$$

Tích phân này chính là phép biến đổi Hankel của W_1 với J_1 như là hàm trọng lượng. Vì $\varepsilon_1=2$, ta có

$$\zeta(r, \theta, t) = \cos \theta \int_0^\infty k J_1(kr) \frac{\cos \omega t}{\text{ch } kh} dk \int_0^\infty r' W_1(r') J_1(kr') dr' \quad (2.30)$$

Kết quả trên cũng có thể thu được trực tiếp bằng biến đổi Hankel với hàm trọng lượng J_1 .

Nói chung, người ta có thể cần rất nhiều số hạng trong chuỗi của phương trình (2.26) để mô phỏng một nhiễu động tổng quát hơn.

Bây giờ, ta sẽ chỉ khảo sát sự diễn biến tiệm cận trường hợp nền đáy dịch chuyển xung bất đối xứng với r và t lớn, còn trường hợp đối xứng giành làm bài tập. Nếu viết

$$F(k) = k \frac{\hat{W}_1}{\text{ch } kh} \quad \text{và} \quad \hat{W}_1(k) = \int_0^{\infty} r J_1(kr) W_1(r) dr$$

và sử dụng đồng nhất thức

$$\begin{aligned} J_1(kr) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \exp[-i(\psi - kr \sin \psi)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi \cos(\psi - kr \sin \psi) \end{aligned} \quad (2.31)$$

đồng nhất thức này có thể chứng minh bằng phép khai triển sóng từng phần, phụ lục 4.A, phương trình (A.5), ta có thể viết lại phương trình (2.30) thành

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \cos \theta \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi \int_0^{\infty} dk F(k) \cos(\psi - kr \sin \psi) e^{-i\omega t} = \\ &= \cos \theta \text{Re} \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^{\pi} d\psi \left\{ e^{-i\psi} \int_0^{\infty} dk F(k) e^{ikr \sin \psi - i\omega t} + e^{i\psi} \int_0^{\infty} dk F(k) e^{-ikr \sin \psi - i\omega t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Bây giờ ta xét tích phân kép thứ nhất ở trên

$$I_1 = \int_0^{\pi} d\psi e^{-i\psi} \int_0^{\infty} dk F(k) e^{i[k(r/t) \sin \psi - \omega(k)]} \quad (2.33)$$

Hàm pha phụ thuộc vào hai biến, k và ψ , và một điểm pha dừng có thể được tìm thấy trong khoảng $k \geq 0, 0 \leq \psi \leq \pi$ bằng cách đồng thời cho bằng không các đạo hàm riêng theo k và ψ . Trong các công trình của Papoulis (1968) đã tổng quan đầy đủ về các phương pháp pha dừng trường hợp nhiều chiều hơn. Bây giờ ta chọn một cách khá dễ hiểu: trước hết giữ cố định ψ , và tìm phân bố của pha dừng dọc theo k , sau đó lặp lại quá trình cho ψ . Như vậy, với t lớn, r/t và $\sin \psi$ cố định, ta có thể áp dụng phương pháp pha dừng

$$g(k) = k \frac{r}{t} \sin \psi - \omega(k), \quad (2.34a)$$

$$g'(k) = \frac{r}{t} \sin \psi - \omega'(k), \quad (2.34b)$$

$$g'' = -\omega''(k) > 0, \quad (2.34c)$$

Có một điểm dừng tại đó $g'(k) = 0$ vì $\sin \psi > 0$ trong khoảng $0 < \psi < \pi$. Giá trị gần đúng cho tích phân theo k là

$$\left(\frac{2\pi}{t|\omega''(k)|} \right)^{1/2} F(k) \exp \left\{ it \left[k \frac{r}{t} \sin \psi - \omega(k) \right] + i \frac{\pi}{4} \right\},$$

trong đó điểm dừng k phụ thuộc vào ψ thông qua phương trình (2.34b).

Bằng cách phân tích tương tự, ta thấy tích phân còn lại trong phương trình (2.32) không có điểm dừng và có bậc $O(1/t)$. Tích phân I_1 trở thành

$$I_1 = \int_0^{\pi} d\psi e^{i(-\psi + \pi/4)} \left[\frac{2\pi}{t|\omega''(k)|} \right]^{1/2} F(k) e^{it[k(r/t) \sin \psi - \omega(k)]} + O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (2.35)$$

Tích phân ψ có thể được xấp xỉ một lần nữa bằng phương pháp pha dừng đối với t lớn và r/t cố định. Hàm pha và hai đạo hàm đầu tiên của nó bằng

$$f(\psi) = k \frac{r}{t} \sin \psi - \omega(k), \quad (2.36a)$$

$$\frac{df}{d\psi} = k \frac{r}{t} \cos \psi + \frac{dk}{d\psi} \left[\frac{r}{t} \sin \psi - \omega'(k) \right], \quad (2.36b)$$

$$\frac{d^2 f}{d\psi^2} = -k \frac{r}{t} \sin \psi + \frac{r}{t} \cos \psi \frac{dk}{d\psi} + \frac{d^2 k}{d\psi^2} \left[\frac{r}{t} \sin \psi - \omega'(k) \right]. \quad (2.36c)$$

Bằng việc sử dụng phương trình (2.34b), điểm pha dừng rõ ràng là tại điểm $\psi = \pi/2$. Kết hợp kết quả này vào các phương

trình (2.36b) và (2.36c), ta được

$$\frac{r}{t} - \omega'(k_0) = 0, \quad (2.37)$$

đối với điểm dừng được ký hiệu là k_0 , và

$$\left. \frac{d^2 f}{d\psi^2} \right|_{\psi=\pi/2} = -k_0 \frac{r}{t} < 0, \quad (2.38)$$

Phương trình (1.28) có thể được áp dụng vào phương trình (2.35), kết quả là

$$I_1 = -i\pi \left[\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|} \right]^{1/2} F(k_0) \left(\frac{2}{\pi k_0 r} \right)^{1/2} e^{i[k_0 r - \omega(k_0)t]} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Tích phân kép thứ hai trong phương trình (2.32) không có điểm dừng trong khoảng $k = [0, \infty]$, vì vậy nó có bậc $O(1/t)$.

Cuối cùng, li độ tổng cộng là

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \cos \theta \operatorname{Re} \frac{-i}{2} \left(\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|} \right)^{1/2} \times \\ &\times F(k_0) \left(\frac{2}{\pi k_0 r} \right)^{1/2} e^{i[k_0 r - \omega(k_0)t]} + O\left(\frac{1}{t}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \left[\frac{2\pi}{t|\omega''(k_0)|} \right]^{1/2} \times \\ &\times F(k_0) \left(\frac{2}{\pi k_0 r} \right)^{1/2} \sin [k_0 r - \omega(k_0)t] + O\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Kết quả trên đây cũng có thể thu được bằng cách áp dụng công thức tiệm cận của $J_1(kr)$ với kr lớn,

$$J_1(kr) \approx \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} \cos \left(k r - \frac{3\pi}{4} \right),$$

và sau đó áp dụng phương pháp pha dừng một lần. Tuy nhiên, tính hợp lý của giả thiết kr lớn khi k biến thiên trong khoảng từ 0 đến ∞ cần được khẳng định, còn ở đây ta đã chọn con đường đi thận trọng hơn.

Các đặc điểm vật lý về sự phân tán gần như hoàn toàn tương tự như trong trường hợp một chiều và ta không cần phải khảo sát kỹ hơn. Có điều phải nhận thấy rằng tốc độ suy giảm biên độ sẽ khác, vì với $r/t = \text{const}$ thì

$$\zeta \approx \frac{1}{2} \frac{1}{t} \cos \theta F(k_0) \left[\frac{2}{|\omega''(k_0)|} \right]^{1/2} \left(\frac{2}{k_0(r/t)} \right)^{1/2} \sin(k_0 r - \omega_0 t), \quad (2.40)$$

trong đó, k_0 phụ thuộc vào r/t theo phương trình (2.38). Như vậy, các sóng cá thể ở gần với $r/t = \text{const}$ suy giảm với tốc độ bậc $O(1/t)$ do phân bố toả tròn của các sóng hai chiều. Bản chất bất đối xứng của nguồn được truyền một cách chính xác cho các sóng lan truyền bởi nhân tử $\cos \theta$; sóng sẽ lớn nhất dọc theo hướng x , $\theta = 0$ và không đáng kể dọc theo trục bất đối xứng $\theta = \pi/2, 3\pi/2$.

Để thu được kết quả rõ ràng hơn, cần thiết phải mô tả hàm $W_1(r)$. Thí dụ, người ta có thể giả thiết rằng

$$W_1(r) = \begin{cases} \frac{A}{a} (a^2 - r^2)^{1/2}, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (2.41)$$

Từ công thức của Erdelyi (1954, II, tr.24, No. 25) ta có thể suy ra rằng:

$$\hat{W}_1(k) = \frac{A}{a} \int_0^a r J_1(kr) (a^2 - r^2)^{1/2} dr = \frac{A}{a} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{a^2}{k} J_1^2 \left(\frac{ka}{2} \right).$$

Do đó

$$F(k) = \frac{k}{\text{ch } kh} \hat{W}_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{Aa}{\text{ch } kh} J_1^2\left(\frac{ka}{2}\right), \quad (2.42)$$

điều này cho thấy ảnh hưởng kích thước A của vùng chứa nguồn. Thông qua hàm Bessel, $F(k)$ dao động theo ka , điều này biểu thị sự giao thoa của các sóng từ các phần khác nhau của nguồn.

2.2.2 Các sóng dẫn đầu trong sóng thần hai chiều

Ta tiếp tục xem xét thí dụ không đối xứng với hàm W_1 cụ thể cho bởi phương trình (2.41). Trong vùng của các sóng dẫn đầu $kh \ll 1$, nhưng với r đủ lớn, thì sóng dẫn đầu phải có bước sóng hữu hạn nào đó sao cho

$$kr \gg 1.$$

Chúng ta có thể hoặc biểu diễn hàm $J_1(kr)$ như là một tích phân, phương trình (2.31), và thực hiện xấp xỉ pha dừng đối với ψ trong tích phân, hoặc lấy xấp xỉ tiệm cận cho $J_1(kr)$ với kr lớn. Cả hai cách đều cho kết quả là

$$\zeta \approx \cos \theta \text{Re} \int_0^\infty dk F(k) \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \frac{1}{2} \left[e^{ikr - i\omega t - i3\pi/4} + e^{-ikr - i\omega t + i3\pi/4} \right] \quad (2.43)$$

Đối với các sóng dẫn đầu $kr \ll 1$, chỉ hàm thứ nhất dưới dấu tích phân có ý nghĩa, ta khai triển

$$\omega \cong (gh)^{1/2} \left(k - \frac{k^3 h^2}{6} \right),$$

$$F(k) \cong A a \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{ka}{4}\right)^2 = \frac{A a^3}{16} \left(\frac{\pi}{2}\right) k^2.$$

Suy ra rằng

$$\zeta \cong \frac{\cos \theta}{2} \frac{A a^3}{16} \frac{1}{r^{1/2}} \text{Re} e^{-i3\pi/4} \int_0^\infty dk k^3 \times$$

$$\times \exp \left(i \left\{ k \left[r - (gh)^{1/2} t \right] + \frac{(gh)^{1/2} h^2 k^3 t}{6} \right\} \right). \quad (2.44)$$

Tích phân này không thể được biểu diễn theo các hàm đã biết. Trước hết ta viết lại nó như sau

$$\int_0^\infty = h^{-5/2} \int_0^\infty d(kh) (kh)^{3/2} \exp \left(i \left\{ kh \left[\frac{r}{h} - \left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} t \right] + \frac{(kh)^3}{6} \left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} t \right\} \right) \quad (2.45)$$

và lập các biến mới (Kajiura, 1963, p. 549):

$$\frac{(kh)^3}{g} \left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} t = u^6 \quad \text{hay} \quad kh = u^2 \left[\left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} \frac{t}{6} \right]^{-1/3}$$

Tích phân của phương trình (2.45) trở thành

$$h^{-5/2} \left[\left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} \frac{t}{6} \right]^{-5/6} \int_0^\infty du 2u^4 e^{i(u^2 p + u^6)} \quad (2.46)$$

với

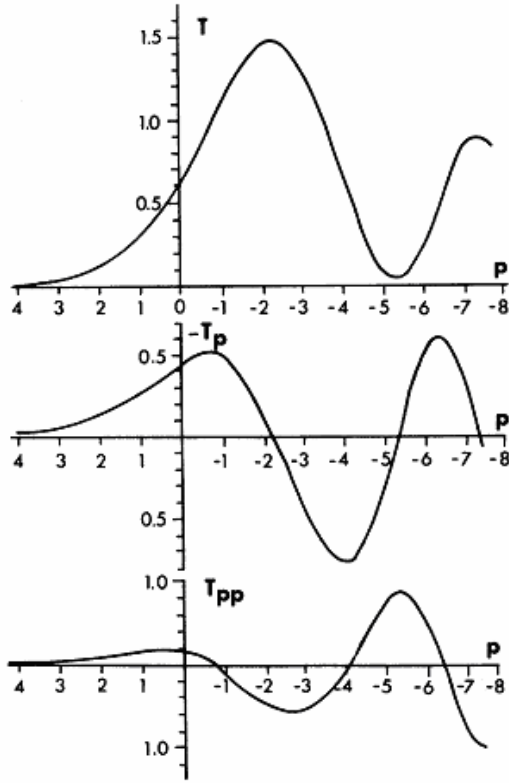
$$p = \frac{r/h - (g/h)^{1/2} t}{[(g/h)t/6]^{1/3}}. \quad (2.47)$$

Phương trình (2.46) có thể viết lại thành

$$-2h^{-5/2} \left[\left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} \frac{t}{6} \right]^{-5/6} \frac{d^2}{dp^2} \int_0^\infty du e^{i(u^2 p + u^6)}.$$

Nhờ đó, phương trình (2.44) trở thành

$$\zeta \cong \frac{\cos \theta}{2^{1/2}} \frac{A a^3}{16} r^{1/2} h^{-5/2} \left[\left(\frac{g}{h}\right)^{1/2} \frac{t}{6} \right]^{-5/6} \times \times \frac{d^2}{dp^2} \text{Re}(1+i) \int_0^\infty du e^{i(u^2 p + u^6)} \quad (2.48)$$



Hình 2.1 $T_1 - T_p$ và T_{pp} như là các hàm của p . (theo Kajiura, 1963)

Với $p=0$, nếu người quan sát ở tại $r=(gh)^{1/2}t$, thì tích phân trong phương trình (2.46) có thể được xác định bằng cách đặt $u^6 = \tau$

$$\int_0^{\infty} du u^4 e^{iu^6} = \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-1/6} e^{i\tau} = \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) e^{i5\pi/12}$$

Đối với p tổng quát, ta thực hiện theo Kajiura và định nghĩa

$$T(p) = \text{Re} (1 + i) \int_0^{\infty} du e^{i(u^2 p + u^6)}, \quad (2.49)$$

khi đó

$$\zeta = \cos\theta \frac{Aa^3}{16(2r)^{1/2}} \frac{T_{pp}}{h^{5/2}((g/h)^{1/2}t/6)^{5/6}}. \quad (2.50)$$

Các biến đổi của T , $-T_p$, và T_{pp} được vẽ trên hình 2.1. Vì hệ số của T_{pp} trong phương trình (2.48) tỉ lệ với

$$r^{-1/2}t^{-5/6} = \left(\frac{r}{t}\right)^{-1/2} t^{-4/3} \sim \left(\frac{r}{t}\right)^{5/6} r^{-4/3},$$

nên ta có thể kết luận rằng ở gần front sóng $r/t \cong (gh)^{1/2}$ biên độ sóng giảm theo $t^{4/3}$ hoặc $r^{-4/3}$. Nếu $a < 0$, mặt đất thụt xuống ở phía phải, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, và nâng lên ở phía trái. Đối với người quan sát ở phía phải, thì thấy các sóng dẫn đầu sẽ là một bụng sóng thấp và tiếp sau là một đỉnh sóng cao, tương tự như trường hợp hai chiều.

2.3 SỰ LAN TRUYỀN CỦA MỘT CHÙM SÓNG PHÂN TÁN

Bây giờ, chúng ta nghiên cứu sự tiến triển của một nhóm sóng điều biến chậm để hiểu thêm về sự phân tán sóng. Xét một nhiễu động di chuyển về phía phải. Nhiễu động này có thể mô tả bằng tổng các sóng hình sin với bước sóng liên tục:

$$\zeta(x,t) = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk. \quad (3.1)$$

Sóng này có thể do một máy tạo sóng đặt tại $x \sim -\infty$ trong một máng dài, tại thời gian $t \sim -\infty$. Phổ biên độ $\lambda(k)$ được xác định theo nhiễu động ban đầu (xem mục 2.1). Ta xét trường hợp $\omega(k)$ tổng quát, còn sóng trên nước chỉ là một trường hợp cụ thể. Ta xét một chùm sóng trong trường hợp đặc biệt có

đường bao dạng Gauss:

$$\zeta(x,0) = \text{Re } A_0 e^{ik_0 x} e^{-x^2/4\sigma^2}. \quad (3.2)$$

Phổ biên độ có thể thu được bằng biến đổi ngược Fourier:

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x,0) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k_0)x - x^2/4\sigma^2} dx = \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[x/2\sigma + i(k-k_0)\sigma]^2 - (k-k_0)^2\sigma^2} dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Đặt $u = x/2\sigma + i(k-k_0)\sigma$, ta thu được

$$\lambda(k) = \frac{A_0}{2\pi} 2\sigma e^{-(k-k_0)^2\sigma^2} \int_{\Gamma} e^{-u^2} du,$$

trong đó, đường viền Γ là một đường thẳng từ $-\infty + i(k-k_0)\sigma$ đến $\infty + i(k-k_0)\sigma$ trong mặt phẳng phức u . Vì e^{-u^2} là hàm giải tích trong dải nằm giữa Γ và trục u thực, theo định lý Cauchy, đường viền có thể được thay thế bằng trục thực. Sử dụng kết quả có sẵn

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \pi^{1/2}, \quad (3.4)$$

ta có,

$$\lambda(k) = \frac{A_0\sigma}{\pi^{1/2}} e^{-(k-k_0)^2\sigma^2}. \quad (3.5)$$

Vậy, hình dạng sóng tại thời điểm t bất kỳ sẽ là

$$\zeta = \text{Re } \frac{A_0\sigma}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2\sigma^2 + i(kx - \omega t)} dk. \quad (3.6)$$

Ta xét diễn biến của tích phân trên đây khi σk_0 rất lớn, tức đường bao gốc là rất phẳng, hay phổ biên độ rất nhọn ở gần điểm $k = k_0$. Hàm dưới dấu tích phân suy giảm nhanh ngay sau

điểm $k = k_0$, vì thế ta có thể xấp xỉ $\omega(k)$ bằng một ít số hạng khai triển Taylor:

$$\omega(k) = \omega_0 + (k-k_0)\omega'_0 + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\omega''_0 + \dots,$$

ở đây $\omega_0 \equiv \omega(k_0)$, $\omega'_0 \equiv \omega'(k_0)$... Đặt $u = k - k_0$, ta có

$$\zeta \equiv \text{Re } \frac{A_0\sigma}{\pi^{1/2}} e^{i(k_0x - \omega_0t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma^2 + i\omega''_0 t/2)u^2 + i(x - \omega'_0 t)u} du. \quad (3.7)$$

Hoàn thành các phép bình phương và sử dụng phương trình (3.4) ta thu được:

$$\zeta \equiv \text{Re } A_0 \frac{e^{i(k_0x - \omega_0t)}}{\left[1 + \frac{i\omega''_0 t}{2\sigma}\right]^{1/2}} \exp\left\{\frac{-(x - \omega'_0 t)^2}{4\sigma^2 \left[1 + \frac{i\omega''_0 t}{2\sigma}\right]}\right\} \quad (3.8)$$

Rõ ràng đường bao dịch chuyển với tốc độ nhóm $C_g = \omega'_0$; giá trị cực đại của nó đạt tại điểm $x = C_g t$ và giảm theo $t^{1/2}$ đối với t lớn. Độ dài của đường bao được xác định bằng

$$2\sigma \left(1 + \frac{i\omega''_0 t}{2\sigma}\right)^{1/2}$$

tăng theo $t^{1/2}$ đối với t lớn. Do đó toàn bộ nhóm sóng sẽ phẳng đi trong quá trình lan truyền.

So với phương trình (5.4) trong chương 1, thì phương trình (3.8) là một xấp xỉ khá hơn. Ta coi phương trình (3.8) như là các sóng dạng sin điều biến chậm, năng lượng chứa đựng trong toàn bộ nhóm sóng được xấp xỉ bằng:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \rho g A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \frac{\exp\left\{-\frac{(x-\omega'_0 t)^2}{4\sigma^2} \left[1 + \frac{i\omega''_0 t}{2\sigma}\right]\right\}}{\left[1 + \frac{i\omega''_0 t}{2\sigma}\right]^{1/2}} \right|^2 = \\
& = \frac{\rho g A_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp\left\{-\frac{(x-\omega'_0 t)^2}{2\sigma^2} \left[1 + \left(\frac{\omega''_0 t}{2\sigma}\right)^2\right]\right\}}{\left(1 + \left(\frac{\omega''_0 t}{2\sigma}\right)^2\right)^{1/2}} = \\
& = \frac{\rho g A_0^2}{4} \sqrt{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\rho g A_0^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \sigma. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Năng lượng tổng trong sóng ban đầu theo phương trình (3.2) là

$$\frac{\rho g}{4} A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{\rho g}{2\sqrt{2}} A_0^2 \pi^{1/2} \sigma. \quad (3.10)$$

Như vậy, năng lượng sóng được bảo toàn.

Có thể nhận thấy rằng trong khi σ^{-1} xác định tốc độ chậm của quá trình điều biến đường bao, thì độ cong của đường cong phân tán ω'' lại liên quan đến σ^{-2} . Để chứng minh rằng điều này không phải là ngẫu nhiên, ta khảo sát thí dụ cơ bản hai chuỗi sóng lan truyền trên nước có các bước sóng hơi khác nhau $k_+ = k + dk$ và $k_- = k - dk$ với $dk/k \ll 1$:

$$\zeta = A_0 \left\{ \exp[i(k_+ x - \omega_+ t)] + \exp[i(k_- x - \omega_- t)] \right\}, \quad (3.11)$$

trong đó $\omega_\alpha = \omega(k_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Khai triển ω đến $O(dk)^2$, ta có:

$$\omega_\pm = \left[\omega \pm \omega' dk + \frac{1}{2} \omega'' (dk)^2 + \dots \right]_k, \quad (3.12)$$

do đó

$$\zeta \cong 2A_0 \cos [dk(x - C_g t)] \exp \left\{ i \left(kx - \left[\omega + \frac{1}{2} \omega'' (dk)^2 \right] t \right) \right\}. \quad (3.13)$$

Trên qui mô không gian và thời gian $O(dk)^{-1}$, đường bao được điều biến và di chuyển với tốc độ C_g ; tuy nhiên, trên qui mô thời gian $O(dk)^{-2}$, thì pha, cụ thể là tần số, thay đổi. Trong thí dụ này đã giả định rằng các qui mô thời gian $O(1), O(dk)^{-1}, O(dk)^{-2}, \dots$ có tính chất bậc thang.

Cuối cùng, với một phổ biên độ bất kỳ có đỉnh tại k_0 (phổ Gauss (3.5) là một trường hợp đặc biệt), phương trình (3.1) có thể được xấp xỉ bằng

$$\zeta(x, t) \cong \text{Re} \left\{ A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \right\} \quad (3.14)$$

trong đó

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \lambda(k) \exp \left\{ i \left[(k - k_0)x - \left[(k - k_0)\omega'_0 + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 \omega''_0 \right] t \right] \right\} \quad (3.15)$$

Rõ ràng rằng A thỏa mãn phương trình vi phân sau:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'_0 \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2} \omega''_0 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

Một phương trình đơn giản như trên hiển nhiên sẽ rất dễ phân tích (xem mục tiếp sau). Để chuẩn bị cơ sở cho việc mở rộng sang các bài toán phi tuyến thường khó xác định nghiệm chính xác, ta sẽ xây dựng lại phương trình (3.16) bằng một phương pháp khác, trực tiếp xuất phát từ các phương trình mô tả, chứ không từ nghiệm tích phân.

2.4 CHUỖI SÓNG BIẾN ĐỔI CHẬM. PHÉP PHÂN TÍCH ĐA QUY MÔ

Ta hãy kết hợp các quy mô khác nhau như đã đề xuất ở cuối

mục 2.3. bằng cách đưa ra các biến biến đổi chậm:

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu x, & x_2 &= \mu^2 x, \dots \\ t_1 &= \mu t, & t_2 &= \mu^2 t, \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

trong đó $\mu \ll 1$ xác định tỉ số giữa hai qui mô thời gian, và sau đó xử lý các biến này trong phân tích nhiễu với tư cách là những biến độc lập. Thủ tục này có thể tỏ ra là cái gì đó nhân tạo đối với một người chưa quen, nhưng đã chứng minh được rằng nó phù hợp với các phương pháp khác trong các bài toán trước đây và là một công cụ mạnh đối với loại bài toán phi tuyến yếu. Để tìm hiểu một cách hệ thống, hãy tham khảo Cole (1968) và Nayfeh (1973).

Giả thiết rằng

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) &= \Phi(x, x_1, x_2, \dots; z; t, t_1, t_2, \dots), \\ \zeta(x, t) &= \zeta(x, x_1, x_2, \dots; t, t_1, t_2, \dots). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Các đạo hàm theo x và t phải được thay bằng

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots, \quad (4.3)$$

do đó

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_1} + \mu^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_2} \right) + \dots \quad (4.4)$$

Thay thế tương tự đối với các đạo hàm thời gian, còn các đạo hàm theo z giữ nguyên. Bây giờ ta giới hạn xét các sóng dạng sin biến thiên chậm và giả sử một chuỗi nhiễu như sau:

$$\Phi = (\psi_0 + \mu \psi_1 + \mu^2 \psi_2 + \dots) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.5)$$

trong đó

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha(x_1, x_2, \dots; z; t_1, t_2, \dots), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Thế phương trình (4.4) đến (4.6) vào phương trình Laplace và tách theo các lũy thừa của μ , ta được:

$$O(\mu^0): \quad -k^2 \psi_0 + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = 0 \quad (4.7a)$$

$$O(\mu^1): \quad -k^2 \psi_1 + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = -2ik \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} \quad (4.7b)$$

$$O(\mu^2): \quad -k^2 \psi_2 + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = - \left(2ik \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_1^2} + 2ik \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2} \right). \quad (4.7c)$$

Một cách tương tự, điều kiện biên mặt tự do sẽ cho:

$$O(\mu^0): \quad g \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - \omega^2 \psi_0 = 0 \quad (4.8a)$$

$$O(\mu): \quad g \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \omega^2 \psi_1 = 2i\omega \frac{\partial \psi_0}{\partial t_1} \quad (4.8b)$$

$$O(\mu^2): \quad g \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \omega^2 \psi_2 = 2i\omega \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} - \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t_1^2} - 2i\omega \frac{\partial \psi_0}{\partial t_2} \right) \quad (4.8c)$$

Tại đáy, ta có

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (4.9a,b,c)$$

Rõ ràng rằng, nghiệm cho ψ_0 xác định bởi phương trình (4.7a), (4.8a) và (4.9a) rất đơn giản:

$$\psi_0 = -\frac{igA}{\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh}, \quad A = A(x_1, x_2, \dots; t_1, t_2, \dots) \quad (4.10)$$

với $\omega^2 = gk \text{th } kh$. Biên độ A như vậy là chưa được xác định. Còn ψ_1 được xác định bởi bài toán giá trị biên bất đồng nhất (4.7b), (4.8b) và (4.9b). Vì bài toán giá trị biên đồng nhất có ψ_0 như là một nghiệm không tầm thường, nên bài toán bất đồng nhất phải thoả mãn một điều kiện khả giải theo định lý Green áp dụng cho ψ_0 và ψ_1 :

$$\int_{-h}^0 dz \left[\psi_0 \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k^2 \psi_1 \right) - \psi_1 \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - k^2 \psi_0 \right) \right] =$$

$$= \left[\psi_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \psi_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right]_{-h}^0. \quad (4.11)$$

Nếu các phương trình (4.7a,b) được đưa vào vế trái và các phương trình (4.8a, b) và (4.9a, b) được đưa vào vế phải, thì theo định lý trên, ta có:

$$-\frac{\partial A}{\partial x_1} \left[\frac{gk}{\omega} \frac{1}{ch^2 kh} \int_{-h}^0 ch^2 k(z+h) dz \right] = \frac{\partial A}{\partial t_1}.$$

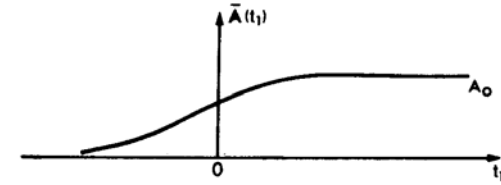
Từ phương trình (5.12), chương 1, suy ra rằng

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0. \quad (4.12)$$

Dễ dàng thấy rằng nghiệm sẽ là $A(x_1 - C_g t_1)$, có nghĩa rằng đường bao truyền với tốc độ nhóm, không thay đổi hình dạng. Kết quả chung này bao quát cả phương trình (5.5), chương 1, như một trường hợp cụ thể. Ngoài ra, nó cũng áp dụng đối với front của chuỗi sóng biến đổi dần đến ổn định, như ta đã biết trong mục 1.5.2.

Ta hãy dừng lại một chút, xét một ứng dụng trực tiếp của kết quả trên đây. Khi các nhiễu dạng sin phát sinh trong một vùng cục bộ, ta thấy điều kiện biên tại vô cùng trong bài toán về trạng thái ổn định tỏ ra không rõ về phương diện toán học. Thí dụ, yêu cầu rằng nhiễu phải hữu hạn (trường hợp một chiều), hoặc triệt tiêu (trường hợp hai, hoặc ba chiều) tại vô cùng sẽ không bảo đảm sự duy nhất nghiệm; cần sử dụng một điều kiện biên tốt. Trong khuôn khổ nghiêm ngặt của bài toán trạng thái ổn định, điều kiện này thường phát biểu như sau: “Một nhiễu hình sin phát sinh cục bộ phải lan ra đến vô cùng”. Phát biểu quan trọng này được gọi là điều kiện phát xạ (*radiation condition*). Còn hiệu

chính như thế nào đó, thậm chí cho một trường hợp cụ thể, thì đương nhiên là cần thiết.



Hình 4.1 Biến thiên của $A(t)$

Ta hãy xét trạng thái ổn định như là giới hạn của bài toán giá trị ban đầu khi $t \rightarrow \infty$. Cụ thể, xét các sóng một chiều trong miền $x > 0$ do một máy sóng hình sin tạo ra tại vị trí $x = 0$. Giả sử biên độ của sóng hình sin gần $x = 0$ biến thiên chậm từ 0 tại $t \sim -\infty$ đến A_0 không đổi tại $t \sim +\infty$ theo một quy luật nào đó $A(t) = \bar{A}(t_1)$ (xem hình 4.1). Ta sẽ tìm nghiệm tại mọi $x_1 > 0$ bằng phương trình (4.10) với $A(x, t) = \bar{A}(t_1 - x_1 / C_g)$. Thực tế, biên độ sóng sẽ triệt tiêu tại x_1 đủ lớn với mọi t hữu hạn; do đó $A(x, t) \equiv \bar{A}(-x_1 / C_g) \downarrow 0$ khi $x_1 \uparrow +\infty$. Từ hình (4.1), điều này chỉ thoả mãn khi $C_g > 0$. Vì C_g và k cùng dấu, ta phải có $k > 0$, từ phương trình (4.5) suy ra rằng $\psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$ truyền sang phải, tức lan ra phía ngoài.

Về nguyên tắc, điều kiện phát xạ có thể suy ra từ bài toán giá trị ban đầu, không cần giả định về một sự bắt đầu chậm. Song như vậy phải phân tích khá dài (xem Stoker, 1948, 1957).

Sự duy trì của dạng trong phương trình (4.12) chỉ đúng với qui mô $O(\mu^{-1})$, tức là, theo x_1 và t_1 . Ta sẽ xét bậc tiếp theo để theo dõi sự biến thiên trên khoảng không gian hoặc thời gian $O(\mu^{-2})$ dài hơn, tức theo x_2 và t_2 .

Trước hết, chúng tôi giành cho độc giả chứng minh rằng nghiệm bất đồng nhất của ψ_1 là

$$\psi_1 = -\frac{gQ \operatorname{sh} Q}{\omega k \operatorname{ch} kh} \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad \text{với } Q \equiv k(z+h), \quad (4.13)$$

nghiệm này thoả mãn các điều kiện biên theo phương trình (4.12). Nghiệm đồng nhất bị loại bỏ, vì nó được xem như đã bao hàm trong ψ_0 . Thế phương trình (4.10) và (4.13) vào vế phải của các phương trình (4.7c) và (4.8c), ta được

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - k^2 \psi_2 = \frac{2ig}{\omega} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \frac{Q \operatorname{sh} Q}{\operatorname{ch} kh} + \frac{ig}{\omega} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + 2ik \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) \frac{\operatorname{ch} Q}{\operatorname{ch} kh} \quad (4.14a)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \psi_2 = i \left(\frac{2h \operatorname{sh} kh}{\operatorname{ch} kh} C_g + \frac{C_g^2}{\omega} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial t_2}, \quad z=0 \quad (4.14b)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (4.14c)$$

Để nhận được phương trình (4.14b) ta đã sử dụng phương trình (4.12). Bây giờ, vấn đề chứng minh tính khả giải có thể được lặp lại: sau những biến đổi đại số khá dài những dễ thực hiện, ta có một kết quả đơn giản bất ngờ như sau:

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{i}{2} \omega'' \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \quad (4.15)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \omega'' &= \frac{d^2 \omega}{dk^2} = \frac{C_g}{k} (1 - 2kh \operatorname{th} kh) - \frac{C_g^2}{\omega} + \frac{C}{2k} (2kh \operatorname{cth} 2kh - 1) = \\ &= \frac{-g}{4\omega k \sigma} \{ T^2 - 2kh T(1 - T^2) + (kh)^2 (1 - T^2)^2 + 4(kh)^2 T^2 (1 - T^2) \} \end{aligned}$$

trong đó, để ngắn gọn đã dùng ký hiệu $T = \operatorname{th} kh$.

Hai quy mô (4.12) và (4.15) có thể kết hợp lại và tham số nhỏ μ có thể bỏ qua để có:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + C_g \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2} \omega'' \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

Phương trình này quy định sự điều biến chậm của đường bao và giống hệt như phương trình (3.16).

Nếu xét trong hệ toạ độ di chuyển với tốc độ C_g , tức dịch chuyển với nhóm

$$\xi = x - C_g t,$$

thì phương trình (4.16) trở thành phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i\omega''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \quad (4.17)$$

Phương trình này chỉ chứa một toạ độ không gian và, do đó, dễ xử lý hơn so với bài toán giá trị biên chứa cả x và z . Ta sẽ áp dụng nó cho một thí dụ mới dưới đây.

Tiến triển của front chuỗi sóng dạng sin

Xem xét một nhiễu dạng sin sinh ra từ một máy tạo sóng đã được bật ở một thời gian trước và sau đó giữ ổn định. Kết cục là tại một vị trí xác định sẽ hình thành chuyển động dạng sin ổn định. Bây giờ ta sẽ khảo sát sự phát triển của front sóng. Vấn đề này lần đầu tiên được Wu (1957) nghiên cứu cho trường hợp áp suất tại một điểm đột ngột bắt đầu dao động vào thời điểm $t=0$ trên mặt nước độ sâu vô hạn và có tính tới sức căng bề mặt. Vấn đề tương tự, nhưng không tính sức căng bề mặt, sau đó đã được Miles (1962) nghiên cứu. Front sóng ngắn gây bởi một tấm phẳng thẳng đứng lăn trên mặt thoáng cũng đã được Mei (1966a) khảo sát. Cách tiếp cận của tất cả các tác giả này là xuất phát từ nghiệm chính xác và sau đó tìm xấp xỉ tiệm cận của hàm tích phân với x và t lớn.

Ta hãy sử dụng phương trình (4.17) áp dụng cho front

sóng khi nó đủ cách xa nguồn nhiễu. Chọn nghiệm thoả mãn các điều kiện biên

$$A \rightarrow 0 \quad \text{khi} \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.18a)$$

$$A \rightarrow A_0 \quad \text{khi} \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad (4.18b)$$

có nghĩa rằng: đường bao thay đổi từ hằng số bằng A_0 phía sau front sóng đến bằng 0 phía đầu của front sóng. Không có hạn chế nào đối với kh .

Bài toán giá trị biên định nghĩa bằng các phương trình (4.17) và (4.18a, b) có thể được giải bằng phương pháp tương tự giống như trong lý thuyết lớp biên hay truyền nhiệt. Vì phương trình (4.17) giống phương trình truyền nhiệt, chúng ta chấp nhận một nghiệm tương tự dạng

$$A = A_0 f(\gamma), \quad \gamma = -\frac{\xi}{t^{1/2}}. \quad (4.19)$$

Từ phương trình (4.17) rút ra:

$$f'' - \frac{i\gamma}{|\omega''|} f' = 0, \quad (4.20)$$

với các điều kiện biên

$$f \rightarrow 1, \quad \gamma \sim \infty \quad (4.21a)$$

$$f \rightarrow 0, \quad \gamma \sim -\infty \quad (4.21b)$$

Phương trình (4.20) có thể được tích phân để cho

$$f = C \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(\frac{i u^2}{2|\omega''|}\right) du,$$

biểu thức này thoả mãn phương trình (4.12b). Để thoả mãn phương trình (4.21a), ta cần

$$1 = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i u^2}{2|\omega''|}\right) du.$$

Vì

$$\int_0^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = \frac{\pi^{1/2}}{2} e^{i\pi/4}, \quad (4.22)$$

nên ta có

$$C = e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2},$$

và nghiệm là

$$\frac{A}{A_0} = e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\gamma} du \exp\left(\frac{i u^2}{2|\omega''|}\right). \quad (4.23)$$

Kết quả trên có thể được biểu diễn dưới một dạng khác

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_0} &= e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2} \left[\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\gamma} \right] du \exp\left(\frac{i u^2}{2|\omega''|}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + e^{-i\pi/4} (2\pi|\omega''|)^{-1/2} \int_0^{\gamma} du \exp\left(\frac{i u^2}{2|\omega''|}\right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

sau khi đã sử dụng phương trình (4.22). Đưa ra $u^2/|\omega''| = \pi v^2$, ta sẽ nhận được:

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_0} &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-i\pi/4}}{2^{1/2}} \int_0^{\beta} e^{i\pi v^2/2} dv = \\ &= \frac{e^{-i\pi/4}}{2^{1/2}} \left[\frac{1+i}{2} + \int_0^{\beta} dv \left(\cos \frac{\pi v^2}{2} + i \sin \frac{\pi v^2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

trong đó

$$\beta = -\xi (\pi|\omega''|t)^{-1/2}. \quad (4.26)$$

Vì

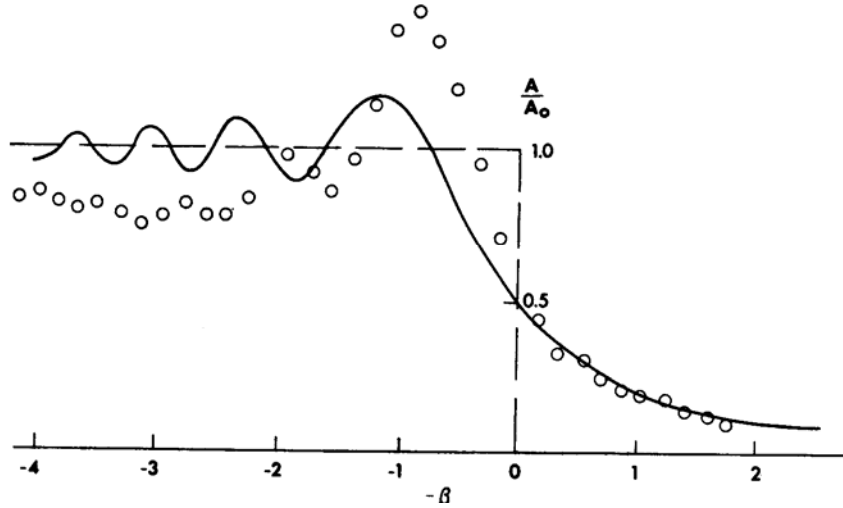
$$C(\beta) = \int_0^{\beta} \cos \frac{\pi v^2}{2} dv \quad (4.27a)$$

và

$$S(\beta) = \int_0^\beta \sin \frac{\pi v^2}{2} dv \quad (4.27b)$$

là các tích phân cosin và sin của Fresnel, phương trình (4.25) có thể viết thành

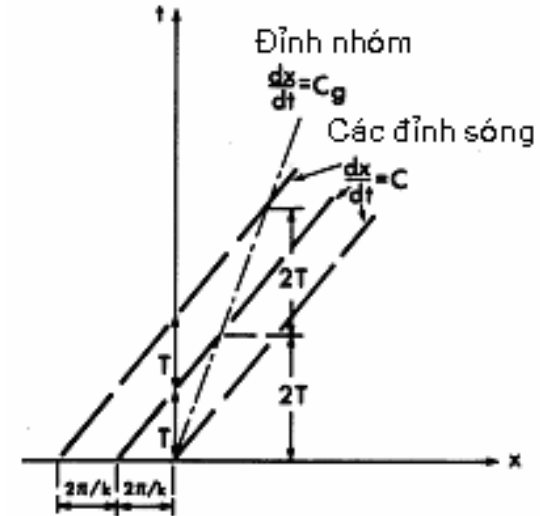
$$\frac{A}{A_0} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2^{1/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(\beta) \right] + i \left[\frac{1}{2} + S(\beta) \right] \right\}. \quad (4.28)$$



Hình 4.2 So sánh giữa lý thuyết (Miles 1962) và thực nghiệm. Biên độ được đo tại vị trí cách máy tạo sóng 160 foot. Tần số là 5,25 rad/s (Longuet-Higgins, 1964)

Độ lớn $|A/A_0|$ được xác định bằng

$$\left| \frac{A}{A_0} \right| = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(\beta) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(\beta) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (4.29)$$



Hình 4.3 ảnh hưởng của tốc độ nhóm lên tốc độ pha trong vùng nước sâu $C_g = C/2$; khoảng thời gian giữa hai lần liên tiếp các đỉnh sóng trùng với đỉnh đường bao bằng $2T$

và được vẽ trên hình (4.2). Rất thú vị là phương trình (4.29) cũng mô tả sự biến đổi ở phía bên kia của biên khuất trong bài toán nhiễu xạ mà sau này ta sẽ khảo. Để đi tới vị trí của người quan sát tại x cố định cách máy tạo sóng, thì đường bao trước hết lớn đơn điệu đến $A_0/2$ khi $t = x/C_g$, sau đó đạt đến giới hạn ổn định A_0 theo cách thức dao động. Vùng trung chuyển trải dài ra với thời gian theo $t^{1/2}$. Longuet-Higgins (1974) đã thực hiện một số thí nghiệm khẳng định lý thuyết này về mặt định tính. Có một số bất phù hợp về định lượng, chắc là do các hiệu ứng phi tuyến. Chẳng hạn, với trường hợp biên độ đủ lớn, thì các đỉnh sóng đổ tại đỉnh cao nhất của đường bao. Vì tốc độ đường

bao trong nước sâu bằng một nửa tốc độ đỉnh sóng, nên khoảng thời gian hai đỉnh sóng kế tiếp đi qua đỉnh đường bao sẽ là hai lần chu kỳ sóng (xem hình 4.3). Nếu các sóng tại đỉnh đủ lớn để đổ, ta thấy khoảng thời gian giữa hai sóng đổ bằng $2T$. Hiện tượng này có thể quan sát thấy trong sóng bạc đầu (Donelan, Longuet–Higgins và Turner, 1972).

bao trong nước sâu bằng một nửa tốc độ đỉnh sóng, nên khoảng thời gian hai đỉnh sóng kế tiếp đi qua đỉnh đường bao sẽ là hai lần chu kỳ sóng (xem hình 4.3). Nếu các sóng tại đỉnh đủ lớn để đổ, ta thấy khoảng thời gian giữa hai sóng đổ bằng $2T$. Hiện tượng này có thể quan sát thấy trong sóng bạc đầu (Donelan, Longuet-Higgins và Turner, 1972).

Chương 3 - KHÚC XẠ DO SỰ BIẾN ĐỔI CHẬM CỦA ĐỘ SÂU HOẶC CỦA DÒNG CHẢY

Khi một chuỗi các sóng đơn phẳng lan truyền vào một vùng độ sâu biến đổi chậm, số sóng có thể thay đổi theo độ sâu theo như phương trình (4.8), chương 1, kết quả là làm thay đổi dần dần tốc độ pha. Nhìn chung, khoảng cách giữa các đường đồng pha và biên độ của các đỉnh sóng hoặc chân sóng sẽ biến đổi từ nơi này đến nơi khác. Những biến đổi tương tự cũng có thể xảy ra khi các sóng lan truyền vào một vùng có nền dòng chảy với cường độ thay đổi theo phương ngang. Những hiện tượng này, chủ yếu liên quan đến sự thay đổi tốc độ pha, đã rất quen thuộc trong quang học và âm học và được gọi là *khúc xạ*. Trong chương này, chúng tôi sẽ phát triển một phép xấp xỉ gọi là *lý thuyết tia* (hay *lý thuyết quang hình học*) về các hiệu ứng của độ sâu biến đổi (các mục 3.1 và 3.4) và của dòng chảy biến đổi (các mục 3.6 và 3.7) đối với sự lan truyền của các sóng biên độ nhỏ. Các phương trình tiến triển sẽ được rút ra bằng một phương pháp được gọi là WKB, một dạng đặc biệt của phương pháp đa quy mô (*multiple-scales method*). Thường thì trong các bài toán thực tế, các phương trình này được giải bằng phương pháp số,

còn ở đây, thông qua một số thí dụ giải tích, chúng tôi muốn làm sáng tỏ một số khía cạnh vật lý từ những phương trình này. Trong phần này, cũng chỉ trong phần liên quan đến hiệu ứng độ sâu biến đổi, chúng tôi sẽ đề cập ngắn gọn đến một số giải pháp cục bộ cần thiết khi phép xấp xỉ tia gặp khó khăn. Khi xử lý số trị với địa hình tự nhiên, khó khăn này có thể khắc phục triệt để hơn bằng cách tính đến sự nhiễu xạ trong một phương trình được gọi là *phương trình độ nghiêng nhỏ* (*mild-slope equation*), mà chúng tôi sẽ rút ra trong mục 3.5. Những khía cạnh khác, chuyên hơn về toán học, không đề cập ở đây, độc giả có thể tìm xem trong các công trình hoàn hảo của Meyer (1979a) về độ sâu biến đổi và của Peregrine (1976) về dòng chảy biến đổi.

3.1 PHÉP XẤP XỈ QUANG HÌNH CHO CÁC SÓNG TIẾN TRÊN NỀN ĐÁY BIẾN ĐỔI ĐỀU

Ta giả sử rằng bước sóng điển hình nhỏ hơn nhiều so với qui mô biến đổi độ sâu phương ngang. Có thể đưa ra một tham số nhỏ như sau:

$$\mu = O\left(\frac{\nabla h}{kh}\right) \ll 1. \quad (1.1)$$

Để cho tổng quát, ta cũng chấp nhận sự điều biến thời gian chậm. Theo Keller (1958), ta đưa ra các tọa độ chậm:

$$\bar{x} = \mu x, \quad \bar{y} = \mu y, \quad \bar{t} = \mu t \quad (1.2)$$

Các phương trình mô tả tuyến tính hoá trở thành

$$\mu^2(\Phi_{\bar{x}\bar{x}} + \Phi_{\bar{y}\bar{y}}) + \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad -h(\bar{x}, \bar{y}) < z < 0, \quad (1.3)$$

$$\mu^2\Phi_{\bar{t}\bar{t}} + g\Phi_{\bar{z}} = 0, \quad z = 0, \quad (1.4)$$

$$\Phi_{\bar{z}} = -\mu^2(\Phi_{\bar{x}}h_{\bar{x}} + \Phi_{\bar{y}}h_{\bar{y}}), \quad z = -h(\bar{x}, \bar{y}). \quad (1.5)$$

Bước mấu chốt thứ hai của phương pháp WKB là đưa ra

phép khai triển sau đây với giả thiết các sóng là sóng tiến:

$$\Phi = [\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + (-i\mu)^2\phi_2 + \dots]e^{iS/\mu}, \quad (1.6)$$

trong đó

$$\phi_j = \phi_j(\bar{x}, \bar{y}, z, \bar{t}) \quad \text{với } j=0, 1, 2, \dots \quad \text{và} \quad S = S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}).$$

Cơ sở kinh nghiệm cho giả thiết này là khi biên độ sóng biến thiên theo các tọa độ chậm $\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}$, thì pha biến thiên theo các tọa độ nhanh $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})\mu^{-1}$. Lấy vi phân trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned} \mu^2 \Phi_{\bar{t}\bar{t}} &= -(-i\mu)^2 \Phi_{\bar{t}\bar{t}} = \\ &= -\left\{ S_{\bar{t}}^2 (\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + (-i\mu)^2\phi_2 + \dots) + \right. \\ &\quad + (-i\mu)[S_{\bar{t}\bar{t}}(\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + \dots) + \\ &\quad + 2S_{\bar{t}}(\phi_{0\bar{t}} + (-i\mu)\phi_{1\bar{t}} + \dots)] + \\ &\quad \left. + (-i\mu)^2(\phi_{0\bar{t}\bar{t}} + \dots) \right\} e^{iS/\mu}, \\ \bar{\nabla}\Phi &= \left\{ [\bar{\nabla}\phi_0 + (-i\mu)\bar{\nabla}\phi_1 + \dots] + \frac{i\bar{\nabla}S}{\mu} [\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + \dots] \right\} e^{iS/\mu}, \\ \mu^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\Phi &= -(-i\mu)^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\Phi = \\ &= -(-i\mu)^2 \left\{ \bar{\nabla}^2 \phi_0 + (-i\mu)\bar{\nabla}^2 \phi_1 + \dots \right\} + \\ &\quad + [\bar{\nabla}\phi_0 + (-i\mu)\bar{\nabla}\phi_1 + \dots] \cdot \frac{i\bar{\nabla}S}{\mu} + \\ &\quad + \frac{1}{-i\mu} [\bar{\nabla} \cdot \phi_0 \bar{\nabla}S + (-i\mu)\bar{\nabla} \cdot (\phi_1 \bar{\nabla}S) + \dots] + \\ &\quad + \left(\frac{i\bar{\nabla}S}{\mu} \right)^2 [\phi_0 + (-i\mu)\phi_1 + \dots] \left. \right\} e^{iS/\mu}. \end{aligned}$$

Ta định nghĩa:

$$\mathbf{k} = \bar{\nabla}S, \quad (1.7a)$$

$$\omega = -S_{\bar{t}}, \quad (1.7b)$$

những đại lượng này tuân tự đại diện cho vectơ số sóng địa

phương và tần số. Thế các phương trình (1.7a,b) vào các phương trình (1.3)–(1.5) và tách biệt các bậc đại lượng, ta thu được tại bậc $O(-i\mu^0)$:

$$\phi_{0zz} - k^2 \phi_0 = 0, \quad -h < z < 0, \quad (1.8)$$

$$\phi_{0z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_0 = 0, \quad z = 0, \quad (1.9)$$

$$\phi_{0z} = 0, \quad z = -h; \quad (1.10)$$

và tại bậc $O(-i\mu)$:

$$\phi_{1zz} - k^2 \phi_1 = \mathbf{k} \cdot \bar{\nabla}\phi_0 + \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{k}\phi_0), \quad -h < z < 0, \quad (1.11)$$

$$\phi_{1z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1 = -\frac{[\omega\phi_{0\bar{t}} + (\omega\phi_0)_{\bar{t}}]}{g}, \quad z = 0, \quad (1.12)$$

$$\phi_{1z} = \phi_0 \mathbf{k} \cdot \bar{\nabla}h, \quad z = -h. \quad (1.13)$$

Các phương trình (1.8)–(1.10) và (1.11)–(1.13) xác định hai bài toán giá trị biên được mô tả bằng các phương trình vi phân thường. Nghiệm của hệ các phương trình (1.8)–(1.10) là:

$$\phi_0 = -\frac{igA}{\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \quad (1.14)$$

với

$$\omega^2 = gk \text{ th } kh \quad (1.15)$$

Như vậy, $\omega(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ và $k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ có quan hệ với độ sâu địa phương $h(\bar{x}, \bar{y})$ thông qua quan hệ tán mát, nếu như h là hằng số. Còn biên độ $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ thì vẫn là tùy ý.

Để thu được điều kiện về A , ta xem xét tính khả giải của ϕ_1 bằng cách áp dụng công thức Green [phương trình (4.11), chương 2] với ϕ_0^* và ϕ_1 . Sử dụng tất cả các điều kiện (1.8)–(1.10) và (1.11)–(1.13), ta được

$$\int_{-h}^0 dz \phi_0^* [(\mathbf{k} \cdot \bar{\nabla} \phi_0) + \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{k} \phi_0)] =$$

$$= -\frac{1}{g} \left\{ \phi_0^* [\omega \phi_{0\bar{t}} + (\omega \phi_0)_{\bar{t}}] \right\}_{z=0} - |\phi_0|_{z=-h}^2 \mathbf{k} \cdot \bar{\nabla} h.$$

Sử dụng quy tắc Leibniz

$$D \int_b^a f dz = \int_b^a D f dz + (Da)(f)_{z=a} - (Db)(f)_{z=b}, \quad (1.16)$$

trong đó D có thể là $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}}$ hoặc là $\frac{\partial}{\partial \bar{y}}$; tích phân ở vế trái và thành phần cuối của vế phải có thể kết hợp lại, cho kết quả

$$\bar{\nabla} \cdot \int_{-h}^0 dz \mathbf{k} |\phi_0|^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left[\omega |\phi_0|^2 \right]_{z=0} = 0.$$

Sử dụng các phương trình (1.14) và (1.15), và các định nghĩa của E và C_g [phương trình (5.14) và (5.6), chương 1], dễ dàng thấy rằng

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\frac{E}{\omega} C_g \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{E}{\omega} \right) = 0. \quad (1.17)$$

Trong cơ học cổ điển về nguồn dao động, một tỉ số tương tự giữa năng lượng và tần số được gọi là *tác động* (action) và đồng thời là bất biến hàm khi các tính chất của nguồn dao động thay đổi chậm. Vậy E/ω là *tác động sóng* (wave action) và phương trình (1.17) mô tả sự bảo toàn của nó trong khi nó được vận chuyển đi với tốc độ nhóm.

Một cách sơ lược, hàm pha của các sóng nước biến đổi chậm được mô tả bằng phương trình (1.15), với k và ω được cho bằng phương trình (1.7). Như vậy S được xác định bằng một phương trình vi phân bậc một phi tuyến; phương trình dạng này trong quang học được gọi là phương trình *eikonal*. Một khi đã tìm được pha, thì biên độ sẽ được giải từ phương

trình tác động sóng (1.7).

Lưu ý rằng, định nghĩa (1.7) có nghĩa là

$$\bar{\nabla} \times \mathbf{k} = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \omega = 0. \quad (1.19)$$

Dạng một chiều của phương trình (1.19)

$$\frac{\partial k}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (1.20)$$

rất dễ lý giải ý nghĩa vật lý. Theo định nghĩa, k là số các đường đồng pha trên một khoảng cách đơn vị, tức *mật độ của các đường đồng pha*. Cũng theo định nghĩa, ω là số các đường đồng pha đi qua một vị trí cố định, tức *thông lượng của các đường đồng pha* (flux of equal phase lines). Giữa hai điểm \bar{x} và $\bar{x} + d\bar{x}$, số đường đồng pha thực có (*net rate of out-flux of phase lines*) bằng $(\partial \omega / \partial \bar{x}) d\bar{x}$, trong khi đó tốc độ giảm của các đường pha trong khối đang xét bằng $-(\partial k / \partial \bar{t}) d\bar{x}$. Rõ ràng, phương trình (1.20) chính là luật bảo toàn đỉnh sóng.

Trong một số mục tiếp sau đây, chúng ta sẽ tập trung vào các sóng dạng sin thực sự và nghiên cứu một số thí dụ tương tự như trong quang học (Luneberg, 1964). Do việc suy diễn ra các phương trình xấp xỉ đã được thực hiện, nên không cần thiết phải phân biệt các biến chậm với các biến vật lý. Tất cả các gạch ngang trên đầu các biến bây giờ sẽ được loại bỏ.

Bài tập 1.1:

Một đại dương phân hai lớp với mật độ ρ và ρ' , có đáy biến đổi chậm $z = -h(x, y)$. Mặt phân cách tại $z = 0$, mặt tự do trung bình nằm tại $z = h'$. Hãy thực hiện phép xấp xỉ rigid-lid và phân tích một chuỗi sóng nội, tiến bằng phương pháp xấp xỉ

WKB. Chứng minh rằng tại bậc dẫn đầu $O(\mu^0)$, năng lượng $E = \frac{1}{2} \Delta \rho g A^2$ với $\Delta \rho = \rho - \rho'$, trong khi quan hệ tán mát và tốc độ nhóm tuân tự bằng:

$$\omega^2 = \frac{\Delta \rho g k}{\rho' \operatorname{cth} kh' + \rho \operatorname{cth} kh},$$

$$C_g = \frac{C}{2} \left[1 + \frac{\omega^2}{g \Delta \rho} (\rho' h' \operatorname{csh}^2 kh' + \rho h \operatorname{csh}^2 kh) \right].$$

Từ điều kiện khả giải tại $O(\mu)$, hãy chứng minh rằng phương trình (1.17) là đúng.

3.2 LÝ THUYẾT TIA CHO CÁC SÓNG DẠNG SIN, NGUYÊN LÝ FERMAT

Nếu các sóng ổn định, $\partial/\partial t = 0$, thì phương trình (1.19) có nghĩa là $\omega = \text{const}$. Bài toán ở đây liên quan đến các sóng dạng sin thuần túy theo thời gian. Từ phương trình (1.17), sự thay đổi biên độ được diễn tả bằng phương trình

$$\nabla \cdot (EC_g) = 0. \quad (2.1)$$

Tưởng tượng mặt phẳng $x-y$ được lấp đầy các vectơ số sóng \mathbf{k} thay đổi cả độ lớn và hướng qua từng vị trí. Xuất phát từ một điểm cho trước, ta vẽ một đường cong tiếp tuyến với các vectơ \mathbf{k} địa phương tại mỗi điểm dọc theo đường cong. Đường cong như vậy được gọi là *tia sóng* và nó luôn vuông góc với các đường đỉnh sóng hoặc các đường pha địa phương $S = \text{const}$. Từ những điểm bắt đầu khác nhau có thể vẽ được các tia sóng khác nhau. Hai tia cạnh nhau làm thành một *kênh tia* (*ray channel*). Xem xét một đoạn của kênh tia, chúng có độ rộng tại hai đầu là $d\sigma_0$ và $d\sigma$ (hình 2.1). Tích phân phương trình (2.1) dọc theo đường khép kín tạo bởi các biên của đoạn kênh tia đang xét. Theo định lý phân kỳ của Gauss và thực tế là C_g tiếp tuyến với

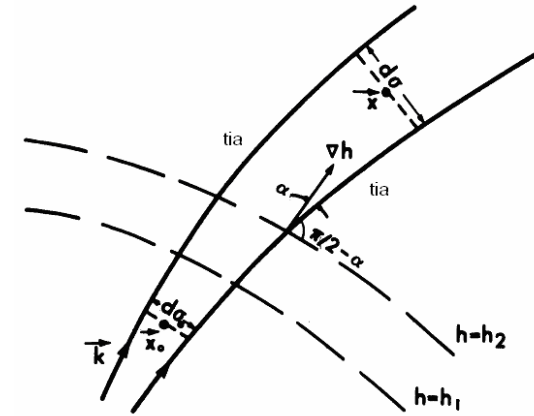
tia sóng, thấy rằng, các dòng năng lượng qua hai đầu của đoạn kênh tia là như nhau

$$EC_g d\sigma = (EC_g d\sigma)_0 = \text{const}. \quad (2.2)$$

Do đó, biến thiên của biên độ dọc theo tia sóng tuân theo luật:

$$\frac{A}{A_0} = \left[\frac{(C_g)_0}{C_g} \frac{d\sigma_0}{d\sigma} \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

trong đó tỷ số $d\sigma/d\sigma_0$ được gọi là nhân tố tách tia.



Hình 2.1 Sơ đồ đoạn kênh tia và các đường đẳng sâu

Vấn đề bây giờ là tìm ra các tia, hay các đường trực giao của chúng, tức chính là các đường pha $S(x, y) = \text{const}$. Khi các tia được định vị và biên độ sóng tại trạm 0 đã biết, thì biên độ tại bất kỳ điểm nào dọc theo tia cũng có thể xác định được.

Bình phương phương trình (1.7a), ta thu được một phương trình vi phân phi tuyến đối với S :

$$|\nabla S|^2 = k^2 \quad \text{hay} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = k^2, \quad (2.4)$$

vế phải của phương trình sẽ biết được từ quan hệ tản mát. Phương trình (2.4) gọi là *phương trình eikonal*, phương pháp chung nhất để giải phương trình này là phương pháp các đường đặc trưng. Dưới đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách tiếp cận đơn giản hơn.

Giả sử $y(x)$ đại diện một tia cụ thể; độ nghiêng của nó sẽ là

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial S}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Từ phương trình (2.4) suy ra:

$$(1 + y'^2)^{1/2} = \frac{k}{\partial S / \partial x} \quad \text{và} \quad \frac{k y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Đạo hàm của phương trình thứ hai ở trên cho ta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{k y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} &= \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} y' = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial S}{\partial y} \right) \bigg/ \frac{\partial S}{\partial x} = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla S)^2 \right] \bigg/ \frac{\partial S}{\partial x} = \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right) (1 + y'^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

hay

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{k y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \right] = (1 + y'^2)^{1/2} \frac{\partial k}{\partial y} \quad \text{với} \quad k = k(x, y(x)). \quad (2.5)$$

Phương trình (2.5) là một phương trình vi phân thường, phi tuyến đối với tia $y(x)$. Khi điểm ban đầu đã biết, thì đường đi của tia có thể tìm bằng cách giải số trị.

Trước khi phân tích các thí dụ cụ thể, ta cần thiết lập sự phù hợp giữa phương trình (2.5) và nguyên lý Fermat nổi tiếng, nói rằng: “Nếu P_0 và P_1 là hai điểm trên một tia và

$$L = \int_{P_0}^{P_1} k ds \quad (2.6)$$

là một tích phân dọc theo một đường dẫn cụ thể nối P_0 và P_1 , thì L là một cực trị nếu và chỉ nếu đường dẫn đó trùng với tia”. Từ phương pháp của phép tính biến phân (xem Hildebrand, 1964, tr. 355), thấy rằng phiếm hàm

$$L = \int_{P_0}^{P_1} F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (2.7)$$

sẽ cực trị khi và chỉ khi F thỏa mãn phương trình Euler sau đây:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Nếu ta đặt

$$L = \int_{P_0}^{P_1} k(1 + y'^2)^{1/2} dx$$

và xác định

$$F = k(1 + y'^2)^{1/2},$$

thì phương trình (2.5) chính xác là phương trình Euler cho nguyên lý Fermat.

Bây giờ ta thấy phương trình *eikonal* và nguyên lý Fermat là hai cách diễn tả của cùng một sự vật. Ta sẽ xét một số trường hợp thể hiện rõ ứng dụng của hình học tia. Thật ra, tất cả các trường hợp đều có bản sao của mình trong quang học (Luneberg, 1964).

3.3 CÁC ĐƯỜNG ĐẲNG SÂU THẲNG VÀ SONG SONG

3.3.1 Hình dạng các tia

Giả sử tất cả đường đẳng sâu song song với trục y và do đó $h = h(x)$ và $k = k(x)$. Phương trình Euler (2.5) sẽ cho:

$$\frac{d}{dx} \frac{ky'}{(1+y'^2)^{1/2}} = 0, \quad (3.1)$$

có nghĩa là

$$\frac{ky'}{(1+y'^2)^{1/2}} = K = \text{const}. \quad (3.2)$$

Vì

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = \frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \quad (3.3)$$

trong đó α là góc giữa tia sóng và chiều dương trục x , dễ dàng thấy phương trình (3.2) giống như luật Snell nổi tiếng:

$$k \sin \alpha = K = k_0 \sin \alpha_0 \quad \text{hay} \quad \frac{\sin \alpha}{C} = \frac{\sin \alpha_0}{C_0}, \quad (3.4)$$

ở đây, k_0 và α_0 tham chiếu đến một điểm biết trước (x_0, y_0) trên tia sóng. Giải ra y' từ phương trình (3.2), ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm K}{(k^2 - K^2)^{1/2}}. \quad (3.5)$$

Kết quả trên cũng có thể thu được một cách đơn giản hơn. Thực vậy, phương trình (3.4) chính là hệ quả của phương trình (1.18) với $\partial/\partial y = 0$, trong khi phương trình (3.5) nhận được từ định nghĩa hình học một tia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k \sin \alpha}{k \cos \alpha}.$$

Phương trình của tia sau khi tích phân sẽ là:

$$y - y_0 = \mp \int_{x_0}^x \frac{K dx}{[k^2(x) - K^2]^{1/2}}. \quad (3.6)$$

Rõ ràng rằng, một tia chỉ tồn tại khi $k^2 > K^2$.

Mặt khác, do đường pha sóng là trực giao với các tia, độ nghiêng của nó phải là:

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{1}{K} (k^2 - K^2)^{1/2}.$$

Phương trình của đường pha do đó là

$$\mp Ky = \int^x dx (k^2 - K^2)^{1/2} + \text{const}.$$

Một kết quả tốt đã nhận được từ các phương trình (3.5) và (3.6) cùng với việc không có giới hạn nào cho $k(x)$. Các trường hợp sau đây cho ta những ý tưởng về sự đa dạng có thể xảy ra.

Trường hợp 1: Sóng phẳng tiến đến một dải đất hay một bãi biển

Một sóng phẳng tới từ phía trái, $x \sim -\infty$. Các tia tới song song và tiến đến một luống đất tại $x = x_0 < 0$ với góc α_0 . Vì $k_0 \sin \alpha_0 = K < k$ ở mọi nơi, giá trị căn bậc hai $(k^2 - K^2)^{1/2}$ luôn luôn là số thực, và do $dy/dx > 0$, nên phải lấy dấu dương trong các phương trình (3.5) và (3.6). Khi h giảm, thì k tăng và dy/dx giảm; vậy, khi tia sóng vượt qua dải đất, trước tiên nó dần dần tiến tới vuông góc với các đường đẳng sâu. Sau khi đỉnh vượt qua, tia sóng không còn thẳng góc nữa. Các đường dẫn tia được phác họa trên hình 3.1.

Một trường hợp tới hạn, khi đỉnh của dải đất nhô cao hơn mực nước trung bình, thì ở hai phía của dải đất là bãi biển. Xét một tia với $k = k_0$ tại $x = x_0$ đi tới từ phía trái với góc tới α_0 . Tia tiến đến các đường đẳng sâu và cuối cùng lao vuông góc vào đường bờ vì $k \uparrow \infty$ nếu $h \downarrow 0$.

Sự lựa chọn k dưới đây theo Pocinki (1950) là một mô hình đặc biệt đối với một bãi biển bắt đầu tại $x = a$ và kết thúc tại đường bờ $x = b$.

$$\frac{k}{k_0} = 1, \quad x < a,$$

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1 - a/b}{1 - x/b}, \quad a < x < b.$$

Thế vào phương trình (3.5), ta được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - x/b)[(\sin \alpha_0)/(1 - a/b)]}{\left\{1 - [(\sin \alpha_0)/(1 - a/b)]^2(1 - x/b)^2\right\}^{1/2}}, \quad a > x > b.$$

Đặt

$$\beta = \frac{\sin \alpha_0}{1 - a/b}, \quad \xi = 1 - \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b},$$

khi đó phương trình vi phân tia trở thành

$$d\eta = \frac{-\beta \xi d\xi}{(1 - \beta^2 \xi^2)^{1/2}} = \frac{1}{\beta} d(1 - \beta^2 \xi^2)^{1/2}$$

và rất dễ tích phân, cho ta:

$$\xi^2 + (\eta - \eta_c)^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

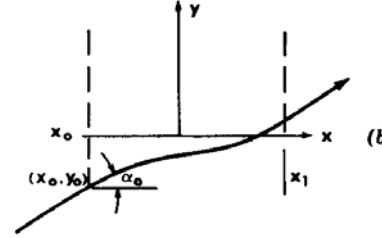
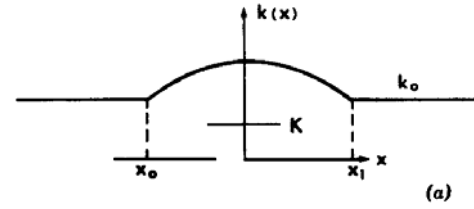
hay

$$(x - b)^2 + (y - y_c)^2 = \frac{(b - a)^2}{\sin^2 \alpha_0}$$

Như vậy, các tia sóng là một họ các cung tròn có tâm tại $x = b$ và $y = y_c$. Tham số y_c liên hệ với tọa độ y_0 tại đó tia sóng cắt đường đẳng sâu tại $x = a$. Bằng cách đặt $x = a$ và $y = y_0$

trong công thức cuối cùng, ta tìm được

$$y_c = y_0 - (b - a) \operatorname{ctg} \alpha_0.$$



Hình 3.1 Tia sóng vượt qua một dải đất ngầm: a) Thay đổi của $k(x)$; b) Tia sóng tới với $K < k_0 = k_{\min}$

Trường hợp 2: Bẫy sóng trên một dải đất

Nếu $k_{\max} > K = k_0 \sin \alpha_0 > k_{\min}$ (hình 3.2a), thì các tia sóng chỉ có thể tồn tại trong vùng $b < x < a$, tại đó $k > K$. Giả sử tia đó xuất phát từ x_0 với góc α_0 , $0 < \alpha_0 < \pi/2$. Từ x_0 đến a , $dy/dx > 0$ và y được cho bằng phương trình (3.6) với dấu dương. Tia sóng tiếp cận điểm $x = a$ và $y = y_a$, ở đây

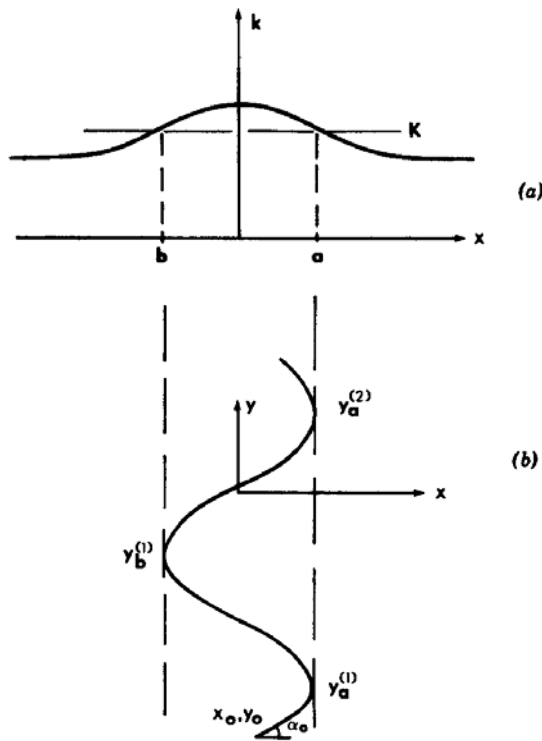
$$y_a = y_0 + \int_{x_0}^a \frac{K dx}{(k^2 - K^2)^{1/2}}$$

Với trường hợp đáy khá thoải, k có thể được khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận $x = a$:

$$k^2 = K^2 + (x - a)(k^2)'_a + \dots \quad \text{nếu } (k^2)'_a \equiv (k^2)'|_{x=a} \neq 0, \quad (3.7)$$

tích phân này là hữu hạn. Tuy nhiên, độ nghiêng dy/dx là vô hạn; do đó đường $x = a$ là đường bao của tất cả các tia sóng và được gọi là một đường tụ tia. Do sự cắt ngang của các tia lân cận, phương trình biến thiên biên độ (2.3) không còn hiệu lực.

Trong mục 3.3.3 sẽ trình bày về một cách xử lý tinh tế hơn đối với vùng lân cận điểm tụ tia. Phía sau điểm (a, y_0) , $dy/dx < 0$; tia sóng quay ngược lại và được diễn tả bằng phương trình (3.6) với dấu âm cho đến khi nó đạt tới đường $x=b$, đó là một điểm tụ tia khác bao tất cả các tia. Vậy là tia sóng uốn đi, uốn lại giữa hai điểm tụ tia trong khi tiến theo hướng chiều dương của trục y (hình 3.2b). Không thể có các sóng điều hoà đơn nào với K như trên nằm ngoài khoảng $b < x < a$. Hiện tượng này được gọi là bẫy sóng.



Hình 3.2 Bẫy sóng trên một dải đất: a) thay đổi của k khi sóng vượt qua dải đất; b) một tia bị bẫy với $k_{\max} > K > k_{\min}$

Nguyên nhân bên ngoài làm cho các sóng bị bẫy có thể là do các lực khí quyển tác động lên mặt tự do (khí áp hoặc gió). Với những giá trị cao của $K (> k_{\min})$ sẽ không có một sóng đơn điều hoà nào ở ngoài dải đất. Theo cơ chế tuyến tính, thì không thể kích hoạt sóng dải đất bằng một sóng đơn điều hoà từ bất kỳ phía nào của dải đất.

Trường hợp 3: Máng ngầm

Với một máng nổi hai phía có độ sâu bằng nhau, $k(x)$ thay đổi như trên hình 3.3a. Nếu một sóng tới có $K = k_0 \sin \alpha_0 = K_2 < k_{\min}$, nó sẽ đổi hướng, lúc đầu uốn cong về phía trục máng, sau đó rời xa trục máng và vượt qua máng về phía bên phải như trên hình 3.3b. Tuy nhiên, nếu $K = K_1$ là đủ lớn, thì không tia nào có thể tồn tại trong vùng $k < K$ và đường $x = x_1$, nơi $k(x_1) = K_1$ là một điểm tụ tia. Tia sóng khi đó đó phải quay lại phía mà nó xuất phát. Với $k_0 > k_{\min}$ cố định, một giá trị đủ lớn của K có thể đạt được nếu góc tới α_0 khá gần với $\pi/2$. Tia tới khi đó tạo một góc nhọn cực nhỏ với các đường đẳng sâu; hiện tượng này gọi là lướt tới. Tại giá trị tới hạn $k_0 \sin \alpha_0 = k_{\min}$, tia tới trở thành suýt soát song song với các đường đẳng sâu.

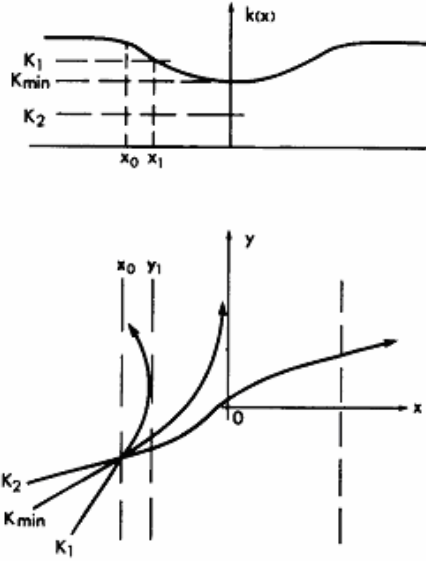
3.3.2 Sự biến thiên biên độ

Trong trường hợp đơn giản này, $\partial/\partial y = 0$ và phương trình (2.1) có thể được tích phân và ta được

$$EC_g \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho g A^2 C_g \cos \alpha = \text{const}. \quad (3.8)$$

Giả sử chỉ số $()_0$ chỉ các giá trị tại độ sâu tham chiếu h_0 , khi đó tỷ số biên độ sẽ là:

$$\frac{A}{A_0} = \left[\frac{(C_g)_0 \cos \alpha_0}{C_g \cos \alpha} \right]^{1/2} = \left[\frac{k \cos \alpha_0 (1 + 2kh / \text{sh } 2kh)_0}{k_0 \cos \alpha (1 + 2kh / \text{sh } 2kh)} \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$



Hình 3.3 Các tia sóng trên một máng ngầm

Trong vùng nước rất nông, $\cos \alpha > 1$, $C_g \cong C \cong (gh)^{1/2}$ và

$$\frac{A}{A_0} \cong (C_g \cos \alpha)_0^{1/2} (gh)^{-1/4}, \quad (3.10)$$

vậy biên độ tăng khi độ sâu giảm. Sự phụ thuộc mũ 1/4 thường được gọi là định luật Green. Kết hợp với bước sóng giảm, $[k \cong \omega(gh)^{-1/2}]$, độ dốc sóng sẽ tăng khi độ sâu giảm theo luật $kA \propto h^{-3/4}$. Với độ sâu đủ nhỏ, giả thiết sóng biên độ nhỏ là cơ sở của lý thuyết sóng tuyến tính không phù hợp nữa và các hiệu ứng phi tuyến trở nên quan trọng. Với một bãi biển có độ nghiêng đáy không đổi, giả thiết $(dh/dx)kh^{-1} \ll 1$ đặc trưng trong phương pháp WKB cũng đổ vỡ hoàn toàn. Trong những điều kiện cụ thể sẽ bàn ở chương 10, các sóng tiến có thể đổ ở vùng nước rất nông. Với sóng tới đổ bộ vuông góc vào bãi biển phẳng, những thí nghiệm của Eagleson (1956) đã khẳng định

phương trình (3.9) đúng đến dải sóng đồ đầu tiên.

3.3.3 Lân cận đường tụ tia

Sự thiếu sót của phép xấp xỉ tia có thể dễ dàng khắc phục ở lân cận đường tụ tia. Dưới góc độ các biến chậm đã định nghĩa trong phương trình (1.2), ta đặt trục \bar{y} trùng đường tụ tia, các tia tới và phản xạ ở phía trái của đường này. Khi đó ở lân cận điểm $\bar{x} = 0$, ta có thể xấp xỉ

$$k^2 \cong K^2 - \gamma \bar{x} \quad \text{với } \gamma > 0, \quad (3.11)$$

đảm bảo dk/dx không bị triệt tiêu tại $\bar{x} = 0$. Suy ra

$$k_1 = (-\gamma \bar{x})^{1/2} \quad \text{và} \quad \int k_1 d\bar{x} = -\frac{2}{3} \gamma^{1/2} (-\bar{x})^{3/2}, \quad (3.12)$$

trong đó k_1 là thành phần theo trục x của \mathbf{k} .

Theo phép xấp xỉ tia (3.9), ta có

$$A = A_0 \left(\frac{C_g k_1}{k} \right)^{1/2} \left(\frac{K}{C_g} \right)^{1/2} (-\gamma \bar{x})^{-1/4} \cong \tau (-\gamma \bar{x})^{-1/4}. \quad (3.13)$$

Mặt tự do ở phía trái của đường tụ tia là

$$\eta = \tau (-\gamma \bar{x})^{-1/4} e^{iK \bar{y}/\mu} \left\{ \exp \left[-i \frac{\gamma^{1/2}}{\mu} \frac{2}{3} (-\bar{x})^{3/2} \right] + R \exp \left[i \frac{\gamma^{1/2}}{\mu} \frac{2}{3} (-\bar{x})^{3/2} \right] \right\} \quad (3.14)$$

trong đó số hạng thứ nhất trong dấu ngoặc nhọn là sóng tới và số hạng thứ hai là sóng phản xạ với biên độ phức R chưa biết.

Từ kết quả trên cho thấy biên độ tăng không giới hạn khi $\bar{x} \rightarrow 0$. Do đó, một lý cục bộ hoàn thiện thêm cho vùng gần đường tụ tia phải duy trì đạo hàm bậc cao nhất của biên độ theo \bar{x} . Thế biểu thức

$$\Phi = \frac{-i g X(\bar{x}) \operatorname{ch} k(z+h)}{\omega \operatorname{ch} kh} \exp \left(\frac{i K \bar{y}}{\mu} - \frac{i \omega \bar{t}}{\mu} \right) \quad (3.15)$$

vào phương trình (1.3) và giữ lại các thành phần chủ đạo và các đạo hàm bậc cao nhất theo \bar{x} , ta được

$$\mu^2 X_{\bar{x}\bar{x}} + (k^2 - K^2)X \cong 0. \quad (3.16)$$

Bây giờ thì $(k^2 - K^2)$ sẽ đổi dấu tại $\bar{x} = 0$, nhận dấu dương khi $\bar{x} < 0$, âm khi $\bar{x} > 0$. Nghiệm sẽ là dao động khi $\bar{x} < 0$ và đơn điệu khi $\bar{x} > 0$. Điểm $\bar{x} = 0$ trong phương trình toán lý được gọi là một điểm ngoặt. Tính tới phương trình (3.11), từ phương trình (3.16), ta có

$$\mu^2 X_{\bar{x}\bar{x}} - \gamma \bar{x} X \cong 0. \quad (3.17)$$

Đây là một phép xấp xỉ tốt trong vùng $\bar{x} = O(\mu)^{2/3}$, có nghĩa là $x = O(\mu^{-1/3})$. Với biến mới

$$\sigma = \gamma^{1/3} \bar{x} \mu^{-2/3}, \quad (3.18)$$

phương trình (3.17) trở thành phương trình Airy

$$X_{\sigma\sigma} - \sigma X = 0 \quad (3.19)$$

có nghiệm tổng quát là

$$X = a \text{Ai}(\sigma) + b \text{Bi}(\sigma). \quad (3.20)$$

Hàm Airy Ai đã được vẽ trong hình 1.5, chương 2. Ta cũng biết rằng, với $|\sigma|$ lớn

$$\text{Ai}(\sigma) \sim \frac{1}{2\pi^{1/2}} \sigma^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}\sigma^{3/2}\right), \quad \sigma \sim \infty \quad (3.21a)$$

$$\sim \frac{1}{\pi^{1/2}} (-\sigma)^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3}(-\sigma)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], \quad \sigma \sim -\infty \quad (3.21b)$$

và

$$\text{Bi}(\sigma) \sim \frac{1}{2\pi^{1/2}} \sigma^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\sigma^{3/2}\right), \quad \sigma \sim \infty \quad (3.22a)$$

$$\sim \frac{1}{\pi^{1/2}} \sigma^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3}(-\sigma)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right], \quad \sigma \sim -\infty \quad (3.22b)$$

Nếu không có những đường tụ tia khác hoặc các biên cứng khác trong vùng $\bar{x} = O(\mu)^{2/3} > 0$, thì nghiệm $\text{Bi}(\sigma)$ phải được loại bỏ; vậy

$$\eta = a \text{Ai}(\sigma) e^{ik\bar{y}/\mu}. \quad (3.23)$$

Hệ số a và biên độ R của sóng phản xạ phải được tìm bằng cách xúng hợp phương trình (3.23) với (3.14) với $-\sigma \gg 1$. Với phương trình (3.21b) ta viết phương trình (3.23) thành

$$\eta \cong \frac{a}{2i\pi^{1/2}} \left(-\frac{\gamma^{1/3}}{\mu^{2/3}} \bar{x}\right)^{-1/4} \times \left\{ \exp\left[i\frac{2}{3}\frac{\gamma^{1/2}}{\mu}(-\bar{x})^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right] - \exp\left[-i\frac{2}{3}\frac{\gamma^{1/2}}{\mu}(-\bar{x})^{3/2} - \frac{i\pi}{4}\right] \right\} e^{ik\bar{y}/\mu} \quad (3.24)$$

cho trường hợp $\sigma \sim -\infty$. Phương trình (3.14) và phương trình (3.24) bây giờ cần được xúng hợp, do đó:

$$a = -2\pi^{1/2} i e^{i\pi/4} \tau (\gamma\mu)^{-1/6}, \quad (3.25a)$$

và

$$R = -e^{i\pi/2}. \quad (3.25b)$$

Với một sóng tới cho trước tại $\bar{x} = \bar{x}_0$, τ đã biết. Hệ số α có thể tìm được ngay. Thật thú vị là biên độ lớn nhất bây giờ là hữu hạn và xuất hiện phía trước đường tụ tia. Sóng phản xạ có cùng biên độ như sóng tới, nhưng khác pha $\frac{1}{2}\pi$.

Đối với một rãnh ngầm có thể có hai đường tụ tia song song. Nếu khoảng cách giữa chúng không quá lớn, thì hiệu ứng dư của $\text{Ai}(\sigma)$ từ đường tụ tia phía trái có thể xâm nhập sang đường tụ tia phía phải, tạo ra sóng thấm qua. Việc xử lý tương tự với đường tụ tia bên phải cũng sử dụng cả Ai và Bi . Một trường hợp khác, nếu $dk^2/d\bar{x} = 0$, còn $d^2k^2/d\bar{x}^2 \neq 0$ sẽ phức tạp hơn nhiều, nhưng về nguyên tắc vẫn có thể phân tích được bằng

cách biến thể phương trình (3.11).

3.4 CÁC ĐƯỜNG ĐẲNG SÂU DẠNG CUNG TRÒN

Lớp bài toán này lần đầu tiên được Arthur (1946) nghiên cứu đối với trường hợp sóng trên nước; những thí dụ tương đương cũng thấy trong quang học (Luneberg, 1964).

3.4.1 Hình dạng các tia

Trong hệ tọa độ cực (r, θ) , độ sâu nước, và do đó, độ lớn của vectơ số sóng, chỉ phụ thuộc vào r , tức $h = h(r)$, $k = k(r)$. Muốn có phương trình Euler cho tia, ta xuất phát từ nguyên lý Fermat và cực trị hoá tích phân

$$L = \int k(r)(1 + r^2 \theta'^2)^{1/2} dr, \quad (4.1)$$

ở đây $\theta' \equiv d\theta/dr$. Do đó, phương trình Euler sẽ là

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta'} [k(1 + r^2 \theta'^2)^{1/2}] \right\} = 0,$$

hay

$$\frac{kr^2 \theta'^2}{(1 + r^2 \theta'^2)^{1/2}} = \text{const} = \kappa \quad (4.2)$$

dọc theo một tia, trong đó κ là hằng số đặc trưng cho tia đó. Giải với ẩn là θ' , ta được

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\pm |\kappa|}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}. \quad (4.3)$$

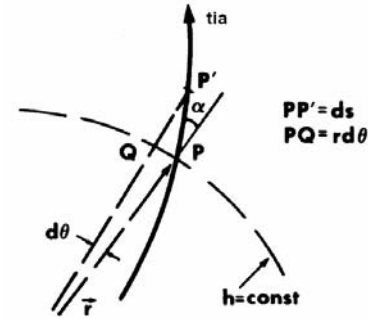
Phương trình vi phân này có thể tích phân một cách thông thường cho ta

$$\theta - \theta_0 = \pm |\kappa| \int_{r_0}^r \frac{dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \quad (4.4)$$

trong đó r_0 và θ_0 tham chiếu đến điểm đã biết mà tia sóng đã đi

qua.

Độ lớn của hằng số κ là bao nhiêu? Theo hình (4.1), phương trình (4.2) có thể viết lại như sau:



Hình 4.1 Đáy trôn với các đường đẳng sâu dạng cung tròn

$$\kappa = kr \frac{rd\theta}{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{1/2}} = kr \frac{rd\theta}{ds} = kr \sin \alpha \quad (4.5)$$

với α là góc giữa tia và vectơ (bán kính) pháp tuyến với đường đẳng sâu tại điểm mà tia cắt đường đẳng sâu. Nếu tại điểm r_0, θ_0 góc tới là $\alpha = \alpha_0$, thì

$$\kappa = k_0 r_0 \sin \alpha_0 \quad (4.6)$$

Vậy hằng số κ được xác định bằng vị trí và hướng ban đầu tia sóng.

Tương phản với trường hợp các đường đẳng sâu thẳng và song song, r xuất hiện ở phía phải của công thức Snell (4.5) như một nhân tố thêm vào. Để hiểu rõ sự khác biệt này, ta khảo sát một cách đơn giản trường hợp đáy có độ sâu biến đổi từng nấc đối xứng toả tia, tức

$$k = k_i = \text{const}, \quad r_{i-1} \leq r \leq r_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

ở đây các chỉ số 1, 2, 3 chỉ các vùng chứ không phải là các thành phần của vectơ. Xét một tia đi qua các vùng 1, 2 và 3 (xem hình 4.2). Tia này ở vùng i rời khỏi điểm gián đoạn tại $r = r_{i-1}$ dưới

một góc α_{i-1} và tới tại $r = r_i$ với góc α'_i , là một đoạn thẳng trong khoảng này. Áp dụng luật Snell tại mỗi nối $r = r_i$, ta được

$$k_1 \sin \alpha'_1 = k_2 \sin \alpha_1. \quad (4.7)$$

Phải chú ý rằng là $\alpha_1 \neq \alpha'_2$; thực tế từ hình 4.2 có thể thấy rằng

$$\sin \alpha_1 = \frac{CD}{AC} = \frac{r_2 \Delta \theta}{AC}, \quad \sin \alpha'_2 = \frac{AB}{AC} = \frac{r_1 \Delta \theta}{AC},$$

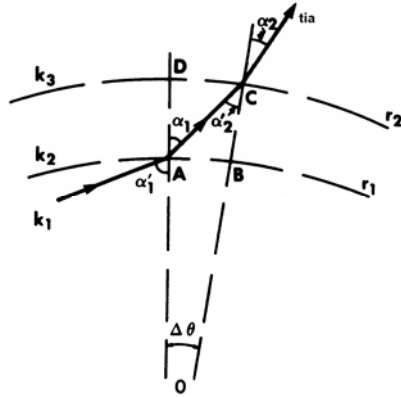
vì vậy

$$r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha'_2. \quad (4.8)$$

Kết hợp phương trình (4.8) với phương trình (4.7), ta có

$$k_1 r_1 \sin \alpha'_1 (= k_2 r_1 \sin \alpha_1) = k_2 r_2 \sin \alpha'_2.$$

Rõ ràng, lập luận tương tự có thể mở rộng cho các vòng tiếp theo, vì thế $k_n r_n \sin \alpha'_n = \text{const}$, đây chính là dạng gián đoạn của phương trình (4.5). Như vậy, sự xuất hiện của r là do sự uốn cong của các đường đẳng sâu.



Hình 4.2 Đáy dạng cung tròn từng nấc

Từ phương trình (4.4), rõ ràng các tia chỉ tồn tại trong các vùng mà $k^2 r^2 > \kappa^2$. Bán kính tối hạn tại đó bằng

$$k^2 r^2 = \kappa^2, \quad r = r_*. \quad (4.9)$$

sẽ được ký hiệu bằng r_* và tương ứng với θ là θ_* với

$$\theta_* - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^{r_*} \frac{|\kappa| dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}. \quad (4.10)$$

Từ phương trình (4.3), $dr/d\theta = 0$ tại (r_*, θ_*) ; tia này hoặc là gần nhất hoặc là xa nhất so với gốc. Việc chọn dấu trong công thức trên đây có thể được thực hiện bằng cách xem xét dấu của $dr/d\theta$ như sẽ minh hoạ trong các thí dụ dưới đây.

Ta sẽ rút ra phương trình cho các đường hằng số pha. Ký hiệu tia bằng $r = f(\theta)$ và đường hằng số pha bằng $r = g(\theta)$, sử dụng một thực tế là hai đường này trực giao, ta được

$$\nabla[r - f(\theta)] \cdot \nabla[r - g(\theta)] = 0,$$

hay

$$g' = -\frac{r^2}{f'}.$$

Vì

$$f'(0) = \pm \frac{r}{\kappa} (k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}$$

phương trình vi phân cho một đường pha sẽ là

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r\kappa}{(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \quad (4.11)$$

Phương trình này có thể được tích phân cho ta

$$\kappa\theta \pm \int \frac{dr}{r} (k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2} = \text{const}. \quad (4.12)$$

Bây giờ ta khảo sát một vài kiểu của k để làm sáng tỏ ý nghĩa vật lý.

Trường hợp 1: $0 < kr < \infty$ và kr đơn điệu theo r

Trong vùng nước rất nông, $k \sim h^{-1/2}$; ta có $kr \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow 0$ ngay khi $rh^{-1/2} \rightarrow 0$. Một bãi cạn dạng cung tròn cũng thuộc dạng này. Giả sử điểm $P_0(r_0, \theta_0)$ là điểm ban đầu. Khi đó

$$\theta - \theta_0 = -|\kappa| \int_{r_0}^r \frac{dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}, \quad (4.13)$$

ở đây dấu âm được chọn vì $dr/d\theta < 0$. Phương trình này hợp lệ đến tận điểm P_* , tại đây $r = r_*$ là nhỏ nhất. Phía ngoài điểm này tia được cho bằng biểu thức

$$\theta - \theta_* = \int_{r_*}^r \frac{|\kappa| dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}, \quad (4.14)$$

ở đây dấu dương được chọn. Vì tia đối xứng qua vectơ bán kính $\theta = \theta_*$, ta có thể sát nhập cả hai nhánh của tia vào một phương trình

$$|\theta - \theta_*| = \int_{r_*}^r \frac{|\kappa| dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}} \quad (4.15)$$

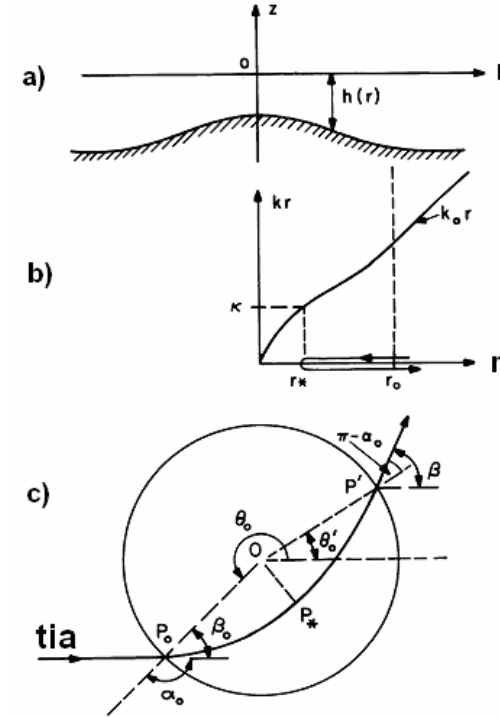
Hình dạng của tia được vẽ trên hình 4.3.

Giả sử có một sóng tới phẳng đi từ $x \sim -\infty$ về phía một vùng nước nông dạng cung tròn. Phía ngoài $r = r_0$, đáy được giả thiết nằm ngang, tức $k = k_0$ với $r > r_0$. Các tia tới lúc đầu song song với trục x . Trong số các tia này, những tia nào lúc đầu nằm ngoài rìa $|y| \leq r_0$ sẽ không cắt đường tròn $r = r_0$ và tiến tiếp tục, không bị lệch hướng. Ta xét một tia ban đầu nằm trong khoảng $-r_0 < y < 0$ đi vào vùng nông với một góc α_0 với vectơ bán kính; trước tiên nó sóng uốn cong về tâm và sau đó, khi đạt được giá trị nhỏ nhất r_* lại xa dần tâm. Vì tia sóng phải đối xứng qua vectơ bán kính nhỏ nhất $\theta = \theta_*$, nên góc giữa tia đi ra với vectơ bán kính tại điểm thoát ra phải bằng $\pi - \alpha_0$ (xem hình 4.3). Giả sử góc tổng cộng mà tia đã bị lệch hướng là β . Rõ ràng

$$\beta = \pi - \alpha_0 + \theta'_0,$$

trong đó θ'_0 – hướng tại điểm, nơi tia sóng thoát khỏi vùng nông:

$$\theta'_0 - \theta_* = \int_{r_*}^{r_0} \frac{|\kappa| dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}.$$



Hình 4.3 Vùng nước nông ngầm: a) địa hình; b) biến thiên kr theo r ; c) hành vi của tia

Một cách tương tự, các tia đi vào vùng nước nông từ khoảng $0 < y < r_0$ lúc đầu sẽ uốn cong về phía tâm vùng nông, sau đó xa dần khỏi tâm của vùng nông. Như vậy, ở phía sau của vùng

nông, các tia từ hai phía đối diện của trục x sẽ cắt nhau và các sóng tiến liên quan tới các tia này sẽ giao thoa. Thí dụ, tại điểm bất kỳ trên phần dương trục x biên độ tổng cộng tăng gấp đôi vì các tia đơn đối xứng. Tại một điểm không nằm trên trục x , các tia cắt nhau có thể giao thoa theo kiểu triệt tiêu hay kiểu cộng thêm tùy thuộc vào các pha sóng.

Xét các tia từ cùng một phía của trục x , thí dụ $-r_0 < y < 0$. Do không chênh hướng và $\beta=0$ đối với hai giá trị cực trị của α_0 : π (thẳng góc đi vào) và $\pi/2$ (song song đi vào), và do $\beta > 0$ đối với các giá trị trung gian của α_0 , nên phải có một cực đại dương của β . Tương tự, một tia tiến vào nửa phía trên của vùng nông phải có một cực đại âm của β . Suy ra, một chùm tia từ cùng một phía của trục x phải cắt nhau và cắt các tia từ phía bên kia của trục x . Một đường tụ quang tựa mũi nhọn sẽ sinh ra ở phía sau của vùng nông và ta phải xây dựng một giải pháp cực bộ phức tạp hơn so với trong mục 3.3.3 để nhận được biên độ hữu hạn.

Trường hợp 2: kr lúc đầu giảm đến một giá trị cực tiểu, sau đó tăng lên

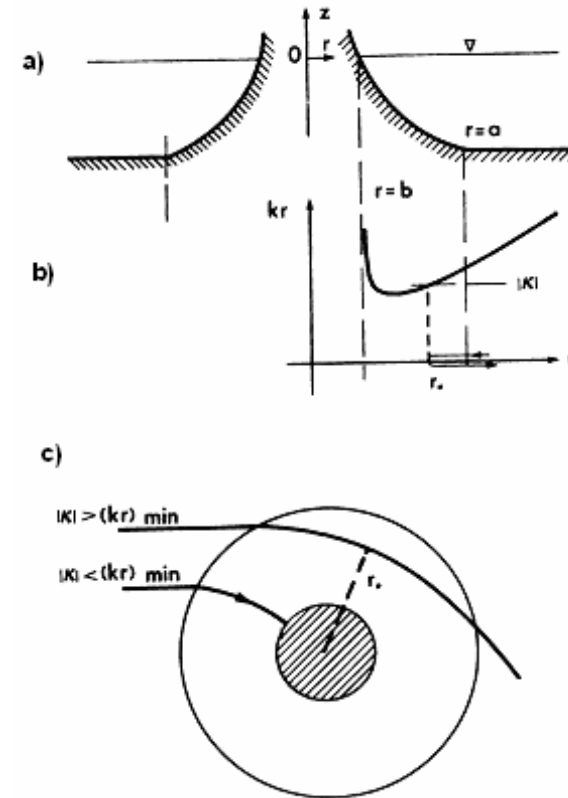
Đây là trường hợp các đảo tròn với đường bờ tại $r=b$ (xem hình 4.4). Giả sử $h \downarrow 0$ khi $r-b \downarrow 0$, khi đó từ quan hệ tản mát $k \downarrow h^{-1/2}$ và $kr \uparrow bh^{-1/2}$.

Tại giá trị r lớn, $kr \rightarrow k_0 r$. Tất cả các tia tới cắt vòng tròn ngoài $r=a$ có $|\kappa|$ nhỏ hơn $k_0 a$. Những tia đủ gần với trục đảo sẽ thoả mãn $\kappa^2 < (kr)_{\min}^2$, thành thử chúng tiến tới bờ một cách bình thường. Tuy nhiên, những tia xa trục đảo hơn sẽ thoả mãn $(kr)_{\min}^2 < \kappa^2 < (k_0 a)^2$ và sẽ bị đảo khước từ, không tiếp cận được bờ. Tia tới hạn là tia có góc $\alpha_0 = \alpha_0^C$, trong đó $|\sin \alpha_0^C| = (kr)_{\min} / k_0 r_0$.

Trường hợp 3: Bẫy sóng trên rãnh đất hình xuyên

Nếu độ sâu biến đổi như trên hình 4.5a, thì một cực đại địa phương của kr có thể đạt tại một r hữu hạn nào đó. Một tia xuất phát tại r_0, θ_0 , với góc nghiêng $\alpha_0 < \pi$, lúc đầu được cho bằng

$$\theta - \theta_0 = \int_{r_0}^r \frac{|\kappa| dr}{r(k^2 r^2 - \kappa^2)^{1/2}}$$



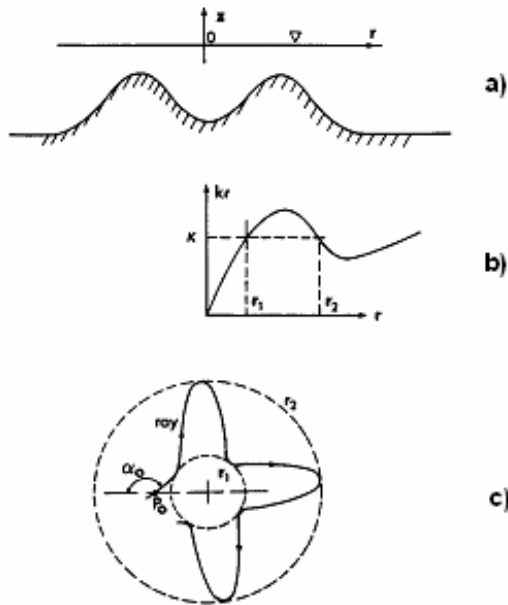
Hình 4.4 Đảo tròn. a) địa hình; b) biến thiên kr theo r ; c) hành vi tia

sao cho $dr/d\theta > 0$ cho đến tận $r = r_1, \theta = \theta'_1$. Sau đó tia này quay trở lại r lớn hơn với

$$\theta - \theta'_1 = \int_{r_1}^r \frac{-|\kappa|dr}{r(k^2r^2 - \kappa^2)^{1/2}},$$

và tiến theo chiều kim đồng hồ, đập dờn giữa hai đường tròn tụ tia $r = r_1$ và $r = r_2$. Các lập luận trước đây cho thấy rằng, tia sóng đối xứng qua vectơ bán kính $\theta = \theta'_1$ và θ'_2 , và v.v... Rõ ràng rằng hình dạng của tia lặp lại sau mỗi khoảng:

$$\Delta\theta = 2|\kappa| \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r(k^2r^2 - \kappa^2)^{1/2}}.$$



Hình 4.5 Các sóng bị bẫy trên một rãnh đất hình xuyên. a) địa hình; b) biến thiên kr theo r ; c) hành vi tia

Ngoài ra, nếu $\Delta\theta$ là một bội số hữu tỉ của 2π , thì tia sẽ quay lại điểm gốc của nó và tạo thành một đường cong khép kín. Như vậy, điều kiện

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{n}{m}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

xác định “các giá trị riêng” của dao động tự do bị bẫy trên rãnh đất. Các sóng ngắn hoặc các sóng khí tượng trực tiếp có thể kích hoạt các một này, tạo mối nguy hiểm tiềm tàng cho các công trình biển được xây dựng trên rãnh đất.

3.4.2 Biến đổi biên độ

Xét nhân tố phân tách tia đối với một sóng phẳng tiến đến một vùng tròn khúc xạ có $r \leq r_0$. Đặt các tia tới song song với chiều âm của trục x . Từ hình (4.3) nhận thấy rằng

$$\theta_0 = \pi + \beta_0$$

với $\beta_0 = \pi - \alpha_0$. Từ phương trình (4.4) rút ra

$$\theta = \pi + \beta_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{|\kappa|dr}{r(k^2r^2 - \kappa^2)^{1/2}}, \quad (4.16)$$

trong đó

$$|\kappa| = k_0 r_0 |\sin \alpha_0| = k_0 r_0 |\sin \beta_0|$$

và một tia tán xạ được đặc trưng bằng điểm đi vào r_0, θ_0 hoặc β_0 của nó.

Xét hai tia cạnh nhau với các góc tới hơi khác nhau một chút là β_0 và $\beta_0 + d\beta_0$. Từ hình 4.6, ta có tại đường tròn $r < r_0$ bất kỳ

$$d\sigma = \overline{AB} \cos \beta = rd\theta \cos \beta = r \cos \beta d\beta_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right)_{r=\text{const}}$$

vì $d\theta$ được đo dọc theo đường tròn bán kính r . Tại vòng tròn

ban đầu $r = r_0$, $d\theta = d\beta_0$ và

$$d\sigma_0 = \overline{A_0 B_0} \cos \beta_0 = r_0 d\beta_0 \cos \beta_0$$

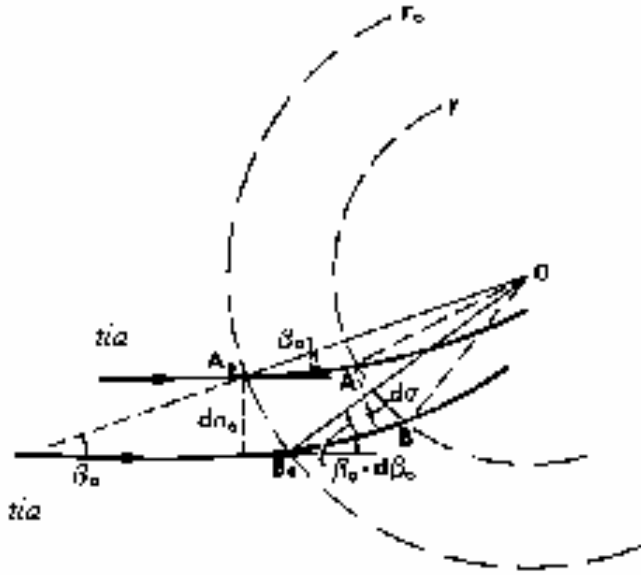
Như vậy nhân tố phân tách là

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{r \cos \beta}{r_0 \cos \beta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right)_{r=\text{const}}$$

Vì $kr \sin \beta = \kappa = \text{const}$ và $\cos \beta = \left(1 - \left(\frac{\kappa}{kr} \right)^2 \right)^{1/2}$, ta có

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \left\{ r \left[1 - \left(\frac{\kappa}{kr} \right)^2 \right]^{1/2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right)_{r=\text{const}} \right\} (r_0 \cos \beta_0)^{-1} \quad (4.17)$$

trong đó $\partial \theta / \partial \beta_0$ có thể thu được từ phương trình (4.16).



Hình 4.6 Hành vi của tia sóng tiến tới các đường đẳng sâu tròn

Thí dụ mẫu: Một đảo tròn (Pocinki, 1950)

Lấy

$$\begin{aligned} kr &= k_0 a \frac{\ln(a/b)}{\ln(r/b)}, & b < r < a, \\ &= k_0 r, & a < r, \end{aligned} \quad (4.18)$$

sao cho đường bờ trùng với $r = b$ và chân đảo trùng với $r = a$. Sự biến thiên thể hiện trên hình (4.7a). Ở gần bờ $r = b$, độ sâu nhỏ, $h \sim k^{-2} \sim r^{-2} \ln^2 r/b$ và $dh/dr \sim 0$ khi $r \rightarrow b$. Vậy bãi biển rất phẳng. Rõ ràng rằng trong trường hợp này tất cả các tia đi vào chân đảo thực sự cắt đường bờ với một góc vuông.

Với k chọn như vậy, phương trình tia dễ dàng tính phân:

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int_{r=a}^{r=r} \frac{\ln(r/b) d[\ln(r/b)] k_0 a |\sin \alpha_0|}{\left[(k_0 a)^2 \ln^2(a/b) - (k_0 a)^2 \sin^2 \alpha_0 \ln^2(r/b) \right]^{1/2}}, \quad (4.19)$$

ở đây dấu + (-) là chọn cho các tia đi vào vùng nước nông ở góc phân tư thứ hai (thứ ba). Nếu đặt

$$D = \frac{\ln(a/b)}{\sin \beta_0}, \quad \rho = \ln \frac{r}{b}, \quad (4.20)$$

ta viết lại và tích phân phương trình (4.19):

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int_{\ln(a/b)}^{\ln(r/b)} \frac{\rho d\rho}{(D^2 - \rho^2)^{1/2}} = \left(D^2 - \ln^2 \frac{a}{b} \right)^{1/2} - \left(D^2 - \ln^2 \frac{r}{b} \right)^{1/2}. \quad (4.21)$$

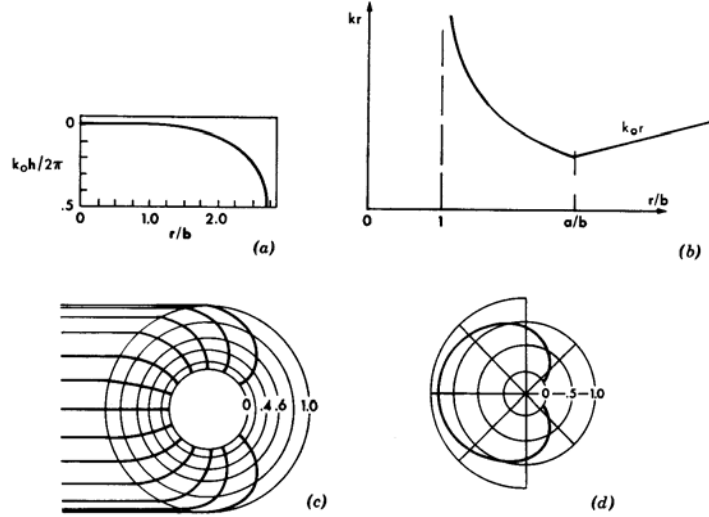
hay tương đương với

$$\ln \frac{r}{b} = \left\{ D^2 - \left[\pm(\theta - \theta_0) - \left(D^2 - \ln^2 \frac{a}{b} \right)^{1/2} \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Chia hai vế cho $\ln(a/b)$, cuối cùng ta có

$$\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} = \left\{ \operatorname{cosec}^2 \beta_0 - \left[\pm \frac{\theta - \theta_0}{\ln(a/b)} - \operatorname{ctg} \beta_0 \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad \theta_0 = \pi + \beta_0, \quad (4.22)$$

biểu thức này được vẽ trên hình 4.7c (theo Pocinki).



Hình 4.7 Đào tròn (Pocinki): (a) đáy; (b) kr theo r ; (c) hình tia sóng; (d) hình vẽ cực của $(d\sigma_0 / d\sigma)^{1/2}$ tại bờ $r = b$

Giả sử (r_h, θ_h) là điểm mà tia phía ngoài cùng đi vào vùng nước nông ở góc phần tư thứ ba ($\beta_0 = \frac{1}{2}\pi$, tức $\theta_0 = \frac{3}{2}\pi$) cắt đường bờ. Vì $\sin \beta_0 = 1$ và $\operatorname{ctg} \beta_0 = 0$, từ phương trình (4.21), ta có

$$\theta_b - \frac{3\pi}{2} = \ln \frac{a}{b}.$$

Vì $\theta_b > \frac{3\pi}{2}$ nên đã chọn dấu cộng. Tương tự, tia ngoài cùng đi vào vùng nước nông ở góc phần tư thứ hai ($\beta_0 = -\frac{1}{2}\pi$, tức $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$) cắt đường bờ tại điểm $r = b$ và

$$\theta'_b = \frac{\pi}{2} - \ln \frac{a}{b}.$$

Nếu $\ln(a/b) < \pi/2$, thì có một phần đường bờ trong khoảng $-\left[\pi/2 - \ln(a/b)\right] < \theta < \pi/2 - \ln(a/b)$ bị che khuất khỏi các sóng tới, khoảng này được gọi là bờ khuất (Arthur, 1946).

Nếu $\ln(a/b) > \pi/2$, thì các tia từ phía này của trục sẽ cắt các tia tương ứng ở phía kia tại phần khuất của đảo. Biên độ kết quả có thể tính bằng cách cộng sóng và tính toán chính xác các pha. Tại giá trị $\ln(a/b) = \pi/2$ hay $(a/b) \cong 4,81$, thì các tia ngoài cùng từ cả hai phía của trục sẽ gặp bờ tại $\theta = 0$; và bờ khuất sóng sẽ biến mất.

Để tìm nhân tố phân tách, ta lại xét các tia đi vào từ góc phần tư thứ ba. Lấy vi phân phương trình (4.21) phù hợp với phương trình (4.17), ta được

$$\frac{\partial}{\partial \beta_0} \left(D^2 - \ln^2 \frac{r}{b} \right)^{1/2} = D \frac{\partial D}{\partial \beta_0} \left(D^2 - \ln^2 \frac{r}{b} \right)^{-1/2},$$

vì thế

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} = 1 - D \frac{\partial D}{\partial \beta_0} \left[\left(D^2 - \ln^2 \frac{a}{b} \right)^{-1/2} - \left(D^2 - \ln^2 \frac{r}{b} \right)^{-1/2} \right].$$

Bây giờ từ định nghĩa đối với D ta thấy

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_0} = -\cos \beta_0 \ln \frac{a}{b} \sin^{-2} \beta_0.$$

Sau một số phép toán đại số, ta được

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} = \left\{ 1 + \frac{\ln(a/b)}{\sin^2 \beta_0} \left[1 - \frac{\cos \beta_0}{(1 - R^2 \sin^2 \beta_0)^{1/2}} \right] \right\} \quad (4.23)$$

trong đó

$$R \equiv \frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)}.$$

Do đó nhân tố phân tách là

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{r \cos \beta}{a \cos \beta_0} \frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} = \frac{r [1 - (k_0 a)^2 \sin^2 \beta_0 / (kr)^2]^{1/2}}{a \cos \beta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \beta_0} \right) \quad (4.24)$$

với $\partial \theta / \partial \beta_0$ được xác định theo phương trình (4.23). Căn bậc hai của phương trình (4.24) được phác hoạ với $r = b$ trên hình 4.7d.

Cách tiếp cận trong các mục 3.3 và 3.4 là cách tiếp cận bán nghịch đảo, trong đó giả định một số dạng thích hợp của k và biến thiên của độ sâu phải được tìm từ quan hệ tán mát. Như vậy, với những tần số khác nhau, cùng một k sẽ tương ứng với một số độ sâu. Bài toán cụ thể hơn về diễn tả ω và $h(\mathbf{x})$ thường phải giải bằng các phương pháp số. Với các đường đẳng sâu thẳng hoặc tròn thì đó không phải là một nhiệm vụ khó. Với trường hợp các đường đẳng sâu tổng quát, các phương pháp số đã được các tác giả như Skovgaard, Jonsson, và Bertelsen (1976) phát triển; các tác giả còn tính thêm cả những hiệu ứng của ma sát đáy.

Trên một địa hình tổng quát, có thể có nhiều kiểu tụ tia. Mặc dù một giải pháp cục bộ hay một phép xấp xỉ đúng cho toàn vùng hoàn toàn có thể thực hiện được về nguyên tắc (Ludwig, 1966), song trong thực tế xây dựng một chương trình tính tới tán xạ thì rất nặng nề. Trong mục tiếp theo, sẽ rút ra một phương trình gần đúng cho trường hợp độ sâu đáy biến đổi chậm, nhưng không có giả định về các tia như trong phương trình (1.6). Vì phương trình mới này có thể giải một cách hữu hiệu bằng các phương pháp số hiện đại, lý thuyết phức tạp về tụ tia có thể bị không còn hiệu lực đối với trường hợp địa hình tổng quát và ở đây ta sẽ không tiếp tục xem xét nữa.

3.5 PHƯƠNG TRÌNH GẦN ĐÚNG KẾT HỢP KHÚC XẠ VÀ TÁN XẠ TRÊN NỀN ĐÁY BIẾN ĐỔI CHẬM – PHƯƠNG TRÌNH ĐỘ NGHIÊNG NHỎ

Ưu điểm của phép xấp xỉ tia là giản ước bài toán ba chiều thành các bài toán một chiều dọc theo các đoạn tia. Song, ở gần điểm tụ tia, phải đưa ra giả thiết bổ sung về những biến thiên ngang hướng tia. Vậy là ít nhất bài toán cũng trở thành bài toán hai chiều cục bộ trên mặt phẳng ngang. Ngoài ra, còn có những tình huống làm cho bài toán thực sự là bài toán hai chiều, thí dụ bài toán về sự cản trở của cột trụ đứng đối với các sóng tới trên nền đáy biển biến đổi chậm. Những hiệu ứng hai chiều này liên quan đến nhiễu xạ, sẽ được trình bày kỹ hơn ở cuối sách này. Vì vậy, chúng tôi muốn có được một mô hình xấp xỉ có tính tới sự biến thiên chậm của nền đáy và cho phép các trường sóng biến thiên phương ngang nhanh do nhiễu xạ.

Trong trường hợp độ sâu không đổi, thế vận tốc có thể viết như sau

$$\phi = -\frac{ig\eta}{\omega} f, \quad (5.1)$$

trong đó

$$f = \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh}, \quad \omega^2 = gk \text{ th } kh. \quad (5.2)$$

Từ phương trình Laplace, có thể tìm được $\eta(x, y)$ thoả mãn phương trình Helmholtz hai chiều

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0; \quad (5.3)$$

phương trình này mô tả sự nhiễu xạ. Sẽ hợp lý nếu cho rằng, với độ sâu biến đổi chậm, các phương trình (5.1) và (5.2) vẫn áp dụng được với k và h tham chiếu đến các giá trị địa phương của chúng. Dựa trên ý tưởng này, Berkhoff (1972) đã rút ra một

phương trình thích hợp cho $\eta(x, y)$. Schonfeld (1972), Jonsson và Brink-Kjaer (1973), Smith và Sprinks (1975), Lozano và Meyer (1976) cũng công bố một số cách khác dẫn tới cùng kết quả. Ở đây, chúng tôi sẽ trình bày những lập luận theo Smith và Sprinks.

Các phương trình chính xác đối với ϕ có thể viết như sau:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nabla^2 \phi = 0, \quad -h \leq z \leq 0, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0, \quad z = 0, \quad (5.4b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\nabla h \cdot \nabla \phi, \quad z = -h, \quad (5.4c)$$

trong khi f thoả mãn các phương trình (1.8)–(1.10). Nếu coi phương trình (5.4a) như một phương trình vi phân thường theo z và áp dụng công thức Green đối với ϕ và f , sử dụng các phương trình (5.4a)–(5.4c) và (1.8)–(1.10), ta nhận được

$$\int_{-h}^0 (k^2 \phi f + f \nabla^2 \phi) dz = -(f \nabla h \cdot \nabla \phi)_{-h}. \quad (5.5)$$

Bây giờ sử dụng các phương trình (5.1) và (5.2) và chú ý các biểu thức

$$\nabla \phi = -\frac{ig}{\omega} \left(f \nabla \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla h \right),$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{ig}{\omega} \left(f \nabla^2 \eta + 2 \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h + \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h \right),$$

thì phương trình (5.5) có thể viết thành

$$\int_{-h}^0 \left\{ f^2 \nabla^2 \eta + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h + \eta h \frac{\partial^2 h}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \eta h \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h + k^2 \eta f^2 \right\} dz =$$

$$= -\nabla h \cdot \nabla \eta f^2 \Big|_{-h} - \eta (\nabla h)^2 f \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{-h} \quad (5.6)$$

Theo quy tắc Leibniz, hai số hạng đầu ở vế trái phương trình (5.6) có thể kết hợp với số hạng thứ nhất ở vế phải và ta được:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \int_{-h}^0 \nabla \eta dz + \int_{-h}^0 k^2 f^2 \eta dz = \\ & = -f \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{-h} \eta (\nabla h)^2 - \int_{-h}^0 \eta f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} (\nabla h)^2 dz - \int_{-h}^0 \eta f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h dz. \end{aligned}$$

Vì $\nabla h / kh = O(\mu) \ll 1$ và $\nabla \eta / k\eta = O(1)$, mọi số hạng ở vế phải của phương trình (5.6) có bậc $O(\mu^2)$ so với vế trái và ta có thể bỏ qua.

Nếu lấy tích phân và sử dụng phương trình (5.12), chương 1, cuối cùng ta nhận được:

$$\nabla \cdot (b \nabla \eta) + \omega^2 c \eta = 0, \quad (5.7)$$

trong đó

$$b = gh \frac{\text{th } kh}{kh} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) = CC_g \quad (5.8a)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right) = \frac{C_g}{C} \quad (5.8b)$$

Smith và Sprinks (1975) đã tiếp tục đánh giá cái gọi là các *hài bé* (xem mục 7.4.1) đại diện cho các hiệu ứng địa phương, có bậc $O(\mu^2)$ và do đó có thể bỏ qua (xem phần 7.4.1). Họ chỉ ra rằng trong khi phương trình (5.7) đúng với sai số $O(\mu^2)$, thì nghiệm có thể chỉ đúng tới bậc $O(\mu)$ do sai số tích lũy về pha sóng có thể đạt $O(\mu)$ sau quãng đường có bậc $O(1/\mu)$.

Trong trường hợp đặc biệt hằng số kh tùy ý, phương trình (5.7) giản hoá thành phương trình Helmholtz (5.3). Mặt khác, với độ sâu nhỏ nhưng biến đổi $kh \ll 1$, phương trình (5.7) được

giản hoá thành

$$\nabla \cdot (h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0; \quad (5.9)$$

trong chương 4 sẽ cho thấy rằng phương trình này sẽ đúng cho cả trường hợp thậm chí nếu $\nabla h/kh = O(1)$. Do đó, phương trình (5.7) cho một nội suy đối với toàn khoảng của bước ứng trong trường hợp độ nghiêng đáy biển nhỏ, và ngày nay phương trình này được biết đến với tên gọi *phương trình độ nghiêng nhỏ* (Jonsson và Skovgaard, 1979).

Bằng phép biến đổi đơn giản

$$\eta = b^{-1/2}\xi, \quad (5.10)$$

phương trình (5.7) có thể viết lại

$$\nabla^2\xi + \kappa^2\xi = 0, \quad (5.11)$$

trong đó

$$\kappa^2(x, y) = \frac{\omega^2 c}{b} - \frac{\nabla^2 b}{2b} + \frac{|\nabla b|^2}{4b^2}. \quad (5.12)$$

Phương trình (5.11) phổ biến trong âm học môi trường bất đồng nhất, với κ là chỉ số khúc xạ. Trong vật lý cổ điển có nhiều phương pháp giải tích gần đúng để giải với những lớp giá trị cụ thể của κ . Với các bài toán kỹ thuật bờ biển thì thường áp dụng các phương pháp số. Trong chương 4, sẽ trình bày một trong các phương pháp giải đó với phương trình (5.9); còn Houston (1981) đã tiến hành một số cải biến cần thiết để giải các phương trình (5.7) hoặc (5.11).

3.6 XẤP XỈ QUANG HÌNH ĐỐI VỚI KHÚC XẠ DO DÒNG CHẢY VÀ ĐỘ SÂU BIẾN ĐỔI CHẬM

Ngoài sự biến thiên của độ sâu, sự tồn tại của dòng chảy

trong đại dương cũng ảnh hưởng đến quá trình lan truyền sóng. Một trong những vấn đề quan tâm trong thực tiễn là dòng chảy triều gần cửa sông hoặc ở cửa vào của các cảng. Trong kỳ triều lên, dòng chảy và sóng có cùng hướng, kết quả là làm tăng bước sóng dài và giảm độ cao sóng. Trái lại, trong kỳ triều xuống các sóng bị ngăn lại và dốc hơn do truyền ngược hướng dòng chảy, khoảng sóng đồ mở rộng ra (xem ảnh máy bay của vịnh Humboldt, California, Johnson, 1947). Nếu có các dải đất ngầm ở luồng vào cảng, thì hiệu ứng kết hợp nước nông và dòng chảy trên dải đất có thể tạo thành dao động đáng kể trên mặt nước và do đó gây hiểm hoạ đối với hàng hải. Rất nhiều luồng vào cảng ở bờ Bắc Thái Bình Dương của nước Mỹ thuộc loại khó đi lại đối với loại ngư thuyền nhỏ trong pha triều xuống về mùa đông (Issacs, 1948). Thời gian tốt nhất cho thuyền qua lại là vào đoạn cuối của pha triều lên, khi đó nước sâu nhất và tốc độ dòng chảy nhỏ nhất.

Trong mục này, chúng tôi sẽ xây dựng cơ sở lý thuyết kết hợp ảnh hưởng của dòng chảy và độ sâu lên các sóng biên độ nhỏ. Đặc biệt, sẽ tập trung chú ý vào các dòng chảy mạnh có tác động lên sóng, nhưng không bị ảnh hưởng của sóng. Ta cũng giả sử, giống như trong tự nhiên thường xảy ra, rằng thời gian và khoảng cách đặc trưng dòng chảy lớn hơn nhiều lần so với thời gian và khoảng cách đặc trưng của sóng. Một lý thuyết có hệ thống về lớp bài toán này lần đầu tiên được Longuet-Higgins và Stewart (1961), Whitham (1962) đề xuất, còn Bretherton và Garrett (1969), Phillips (1977) thì phát triển mở rộng rất nhiều. Dưới đây sẽ dẫn lập những phương trình cơ bản theo một cách khác, qua thủ tục hình thức của phương pháp KWB ở mục 3.2.

Trong mục này, để mô tả độ lớn của một đại lượng, ta luôn căn cứ vào bước sóng đặc trưng $2\pi/k$ và chu kỳ sóng $2\pi/\omega$ (những đặc trưng này liên quan với nhau theo quan hệ tản

mát). Ta sẽ giả thiết rằng độ sâu h biến đổi chậm trong toạ độ ngang x_i ($i=1,2$), còn dòng chảy biến đổi chậm theo cả x_i và t . Các qui mô độ dài và thời gian ký hiệu là L và T sao cho:

$$(\omega T)^{-1} \sim (kL)^{-1} \sim \frac{h}{L} = O(\mu) \ll 1. \quad (6.1)$$

Khi các thành phần vận tốc theo phương ngang của dòng chảy mạnh U_i có bậc là $O(gh)^{1/2}$, và các vận tốc sóng nhỏ u_i và w có bậc là $O[(kA)(gh)^{1/2}]$, để ngắn gọn ta gọi là U_i , h có bậc $O(1)$, và u_i và w có bậc $O(kA)$. Tương tự, các toán tử $\partial/\partial t$ và $\partial/\partial x_i$ ($i=1,2$) sẽ có bậc $O(\mu)$ khi tác động lên một đại lượng liên quan đến dòng chảy và có bậc là $O(1)$ khi tác động lên một đại lượng liên quan đến sóng, thí dụ

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}, \frac{\partial U_j}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x_i} \dots \sim O(\eta);$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \dots \sim O(kA);$$

còn

$$\frac{\partial}{\partial z} = O(1)$$

khi tác động lên tất cả các đại lượng.

Trước hết xét dòng chảy $\mathbf{U} = (U_i, W)$, không có sóng. Nếu bỏ qua quá trình tiêu tán, thì các phương trình mô tả sẽ là

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + W \frac{\partial U_i}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad i=1,2, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U_j \frac{\partial W}{\partial x_j} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g. \quad (6.4)$$

Dựa vào phương trình (6.1) và tính liên tục, thì tốc độ thẳng đứng của dòng chảy sẽ nhỏ, $W = O(\mu)$. Từ phương trình (6.4) suy ra rằng áp suất sẽ tựa thủy tĩnh:

$$P = \rho g(\bar{\zeta} - z) + O(\mu^2), \quad (6.5)$$

ở đây $\bar{\zeta}$ – li độ mặt tự do gây bởi dòng chảy. Tại mặt tự do và tại đáy, các điều kiện biên động học là:

$$W = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_j}, \quad z = \bar{\zeta}(x_i, t), \quad (6.6)$$

$$W = -U_j \frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad z = -h(x_i). \quad (6.7)$$

Bây giờ ta vectơ xoáy sẽ có các thành phần ngang như sau:

$$\Omega_1 = \frac{\partial W}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial z}, \quad \Omega_2 = \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x_1}. \quad (6.8)$$

Số hạng $\partial W / \partial x_j$ ở trên có bậc là $O(\mu^2)$; nếu

$$\Omega_j \leq O(\mu^2), \quad (6.9)$$

thì U_j không phụ thuộc vào z đến bậc là $O(\mu^2)$, tức

$$\frac{\partial U_j}{\partial z} = O(\mu^2). \quad (6.10)$$

Giả sử ta sử dụng phương trình (6.9). Tuy nhiên, hãy nhớ rằng thành xoáy thẳng đứng chỉ được phép có bậc $O(\mu)$. Với phương trình (6.10), các phương trình động lượng phương ngang có thể được xấp xỉ bằng

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} + O(\mu^2 U_i). \quad (6.11)$$

Tích phân phương trình liên tục theo phương thẳng đứng từ $z = -h$ đến $z = \bar{\zeta}$ và sử dụng các phương trình (6.6), (6.7), ta được

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [U_i (\bar{\zeta} + h)] = 0. \quad (6.12)$$

Các phương trình (6.5), (6.11) và (6.12) tạo thành lý thuyết Airy về các sóng dài biên độ hữu hạn, sẽ được bàn kỹ hơn trong chương 11. Còn với mục đích hiện tại tại U_i và $\bar{\zeta}$ sẽ giả định là đã biết. Ta chỉ cần chứng minh rằng li độ mặt tự do $\bar{\zeta}$ có bậc là $O(h)$. Trường hợp đặc biệt dòng chảy ổn định $\partial/\partial t = 0$, phương trình (6.11) có thể được viết lại

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{U_i U_i}{2} + g \bar{\zeta} \right) = 0,$$

điều này có nghĩa rằng

$$\bar{\zeta} = -\frac{U_i U_i}{2g} + \text{const} \quad (6.13)$$

dọc theo đường dòng.

Tiếp theo, xét các dao động sóng diễn ra trên nền dòng chảy. Các thành phần vận tốc (u_i, w) và áp suất p của trường sóng nhỏ hơn những thành phần tương ứng trong dòng chảy theo nhân tử $O(kA)$. Tính liên tục đòi hỏi phải có:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.14)$$

Các phương trình động lượng có thể được tuyến tính hoá bằng việc loại bỏ $O(kA)^2$. Tiếp theo, ta loại bỏ các số hạng tuyến tính hoá bậc $O(\mu^2 kA)$ hoặc nhỏ hơn, tức là $w \partial U_i / \partial z$, $u_i \partial W / \partial x_i$, và thu được

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + W \frac{\partial u_i}{\partial z} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + U_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + W \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (6.16)$$

Các số hạng còn lại chứa $O(kA)$ và $O(\mu kA)$. Nếu lấy vi phân các phương trình (6.15) và (6.16), sau đó cộng các kết quả lại, loại bỏ một lần nữa các số hạng bậc $O(\mu^2 kA)$, ta có

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -2\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right). \quad (6.17)$$

Phương trình (6.17) được coi như là phương trình mô tả áp suất p .

Tại đáy biển, trường sóng cũng không có tốc độ pháp tuyến

$$w = -u_j \frac{\partial h}{\partial x_j}, \quad z = -h(x_i). \quad (6.18)$$

Từ điều kiện này, người ta muốn rút ra một điều kiện biên đối với áp suất p . Lấy vi phân phương trình (6.18) theo x_j và chú ý rằng w và u_i đã được ước lượng tại $z = -h(x_i)$, ta nhận được

$$\frac{\partial w}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i} + O(\mu^2 kA).$$

Với kết quả này, sau khi đã sử dụng các phương trình (6.7), (6.15) và (6.18), phương trình (6.16) có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{\partial u_j}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \left(U_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + W \right) \frac{\partial w}{\partial z} - U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i} - w \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = \\ &= -\frac{\partial h}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + O(\mu^2 kA) = \\ &= \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + O(\mu^2 kA). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Trên mặt tự do, điều kiện biên động học chính xác phát biểu rằng:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\zeta} + \zeta) + (U_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\zeta} + \zeta) = W + w \quad \text{tại } z = \bar{\zeta} + \zeta.$$

áp dụng tuyến tính hoá và sử dụng phương trình (6.6), ta được

$$\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} = w + \zeta \frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{tại } z = \bar{\zeta}. \quad (6.20)$$

Điều kiện biên động lực học: áp suất tổng không thay đổi khi nó cùng chất lỏng chuyển động dọc theo mặt tự do

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial p}{\partial x_j} + (W + w) \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + (W + w) \frac{\partial}{\partial z} \right] \rho g (\bar{\zeta} - z) = 0, \quad z = \bar{\zeta} + \zeta. \end{aligned}$$

Với sự trợ giúp của phương trình (6.6), phương trình trên có thể được tuyến tính hoá thành

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + W \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \left(u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} - w - \zeta \frac{\partial W}{\partial z} \right) = O(kA)^2, \quad z = \bar{\zeta}. \quad (6.21)$$

Để biểu diễn điều kiện biên chỉ đối với áp suất p , ta sẽ lấy vi phân phương trình (6.21) và sử dụng các phương trình (6.16), (6.20). Một lần nữa ta thấy rằng

$$\frac{\partial}{\partial x_i} W(x_i, \bar{\zeta}, t) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} W(x_j, z, t) + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial z} W(x_j, z, t) \right]_{z=\bar{\zeta}} \quad (6.22a)$$

và

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x_i, \bar{\zeta}, t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} W(x_i, z, t) + \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} W(x_i, z, t) \right]_{z=\bar{\zeta}}. \quad (6.22b)$$

Như vậy, trên bề mặt tự do ta được điều kiện biên như sau:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 p + 2W \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_j} + g \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ & z = \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (6.23)$$

trong đó các đạo hàm theo t và x_i được thực hiện trước khi đặt $z = \bar{\zeta}$.

Bây giờ ta đưa ra các biến chậm $\bar{x}_i = \mu x_i$ và $\bar{t} = \mu t$, sao cho $U_j = U_j(\bar{x}_i, \bar{t})$, $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{x}_i, \bar{t})$, và $h = h(\bar{x}_i)$, và giả sử các khai triển WKB là:

$$p(x_i, z, t) = [p_0 + (-i\mu)p_1 + \dots] e^{iS/\mu}, \quad (6.24a)$$

$$u_i(x_i, z, t) = [u_{0i} + (-i\mu)u_{1i} + \dots] e^{iS/\mu}, \quad (6.24b)$$

trong đó

$$\begin{aligned} p_0 &= p_0(\bar{x}_i, z, \bar{t}), \quad u_{0i} = u_{0i}(\bar{x}_i, z, \bar{t}), \\ S &= S(\bar{x}_i, \bar{t}) \quad \text{và} \dots \end{aligned} \quad (6.25)$$

Khi các phương trình (6.24a) và (6.24b) được thế vào các phương trình (6.17), (6.19) và (6.23), ta thu được một loạt các phương trình nhiễu động. Nếu lấy đến bậc đại lượng $O(\mu^0)$, ta có

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2} - k^2 p_0 = 0, \quad -h < z < \bar{\zeta}, \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} p_0 = 0, \quad z = \bar{\zeta}, \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad z = -h, \quad (6.28)$$

trong đó

$$\sigma = \omega - U_j k_j, \quad (6.29)$$

với

$$k_i \equiv \frac{\partial S}{\partial \bar{x}_i}, \quad \omega \equiv -\frac{\partial S}{\partial \bar{t}}, \quad k_i k_i = k^2.$$

Ta sẽ tuân tự gọi ω là tần số tuyệt đối và σ là tần số nội tại. Từ các định nghĩa này, rõ ràng rằng

$$\frac{\partial k_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_i} = 0, \quad (6.30)$$

điều này có nghĩa các đỉnh sóng được bảo toàn và

$$\frac{\partial k_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial k_j}{\partial \bar{x}_i}, \quad (6.31)$$

tức là \mathbf{k} không quay. Nghiệm của các phương trình (6.26)–(6.28) là

$$p_0 = \rho g A \frac{\text{ch } k(z + \bar{h})}{\text{ch } k\bar{h}}, \quad (6.32)$$

trong đó $A = A(\bar{x}_i, \bar{t})$, $\bar{h} = \bar{\zeta} + h$ là độ sâu trung bình tổng cộng và

$$\sigma^2 = gk \text{th } k\bar{h}. \quad (6.33)$$

Từ phương trình động lượng phương ngang (6.15) có thể thấy

$$u_{o_i} = \frac{k_i p_0}{\rho \sigma}. \quad (6.34)$$

Ký hiệu tốc độ nhóm liên quan đến dòng chảy bằng

$$C_g = \frac{\partial \sigma}{\partial k} \Big|_{\bar{h}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{k} \left(1 + \frac{2k\bar{h}}{\text{sh } 2k\bar{h}} \right) \quad (6.35)$$

và

$$c_{g_i} = C_g \frac{k_i}{k}.$$

Tại giai đoạn này, có thể suy ra hai kết quả hữu dụng về động học của sóng. Lấy vi phân phương trình (6.29) theo thời gian và sử dụng các phương trình (6.30) và (6.31), ta được

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{t}} + (U_i + C_{g_i}) \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_i} = k_i \frac{\partial U_i}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{h}} \Big|_k \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}. \quad (6.36)$$

Khi dòng chảy ổn định, tần số tuyệt đối ω không thay đổi đối với người quan sát di chuyển với tốc độ nhóm tuyệt đối $\mathbf{U} + \mathbf{C}_g$. Cách khác, người ta cũng có thể xuất phát từ phương trình (6.30), sau khi sử dụng tính không quay của \mathbf{k} (từ phương trình 6.31) để

nhận được

$$\frac{\partial k_i}{\partial \bar{t}} + (U_j + C_{g_j}) \frac{\partial k_i}{\partial \bar{x}_j} = -k_j \frac{\partial U_i}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{h}} \Big|_k \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}_i}. \quad (6.37)$$

Về nguyên tắc, phương trình (6.37) có thể giải bằng số cho các tia sóng tiếp tuyến với véctơ \mathbf{k} cục bộ tại mọi nơi.

Bây giờ ta phân tích về biến thiên biên độ sóng $A(\bar{x}_i, \bar{t})$.

Muốn đạt được điều đó, thì bậc đại lượng của bài toán phải bằng $O(\mu)$:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - k^2 p_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (k_j p_0) + k_j \frac{\partial p_0}{\partial \bar{x}_j} + 2\rho \left(k_j u_{o_i} \frac{\partial U_j}{\partial \bar{x}_i} + k_i u_{o_i} \frac{\partial U_j}{\partial \bar{x}_j} \right), \quad (6.38)$$

$$-h < z < \bar{\zeta},$$

$$g \frac{\partial p_1}{\partial z} - \sigma^2 p_1 = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\omega p_0) - \omega \frac{\partial p_0}{\partial \bar{t}} - 2U_j \left(\omega \frac{\partial p_0}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (k_j p_0) \right) +$$

$$+ U_i U_j \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (k_i p_0) + k_i \frac{\partial p_0}{\partial \bar{x}_j} \right] + \left(\frac{\partial U_i}{\partial \bar{t}} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial \bar{x}_j} \right) k_i p_0 -$$

$$- 2 \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}} + U_j \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}_j} \right) (\omega - U_i k_i) \frac{\partial p_0}{\partial z} - g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}_j} k_j p_0, \quad z = \bar{\zeta}, \quad (6.39)$$

và

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = k_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}_j} p_0, \quad z = -h. \quad (6.40)$$

Trong phương trình (6.39), các đạo hàm của p_0 theo \bar{t} và \bar{x}_i được thực hiện trước khi đặt $z = \bar{\zeta}(\bar{x}_i, \bar{t})$. Sử dụng phương trình (6.22), ta có thể thu gọn vế phải của phương trình (3.39) thành

$$- \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\omega p_0) - \omega \frac{\partial p_0}{\partial \bar{t}} - 2U_j \left[\omega \frac{\partial p_0}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (k_j p_0) \right] +$$

$$+ U_i U_j \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} (k_i p_0) + k_i \frac{\partial p_0}{\partial \bar{x}_j} \right] + p_0 \left[k_j \frac{\partial U_j}{\partial \bar{t}} + k_i U_j \frac{\partial U_i}{\partial \bar{x}_j} \right] - g k_j p_0 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}_j}$$

trong đó p_0 bây giờ xác định tại $z = \bar{\zeta}$ trước khi các đạo hàm được thực hiện theo \bar{t} và \bar{x}_i . Áp dụng công thức Green cho p_0 và p_1 , và sau khi sắp xếp lại một chút, ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[(U_i + C_{g_i}) \frac{E}{\sigma} \right] + \frac{2E}{\sigma^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} + (U_i + C_{g_i}) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}_i} \right] + \\ + \frac{2E}{\sigma} \frac{\partial U_i}{\partial \bar{x}_j} \left[\frac{C_g}{C} \frac{k_i k_j}{k^2} + \left(\frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

với $E = \frac{1}{2} \rho g A^2$. Như trong chương 10 sẽ thảo luận kỹ hơn, đại lượng

$$S_{ij} = E \left[\frac{C_g}{C} \frac{k_i k_j}{k^2} + \left(\frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) \delta_{ij} \right] \quad (6.42)$$

là một thành phần của tenxơ ứng suất sóng liên quan đến các dòng động năng trung bình trong một chuỗi sóng dạng sin. Phương trình (6.41) có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[(U_i + C_{g_i}) \frac{E}{\sigma} \right] \right\} + \\ + \left\{ \frac{2E}{\sigma^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{t}} + (U_i + C_{g_i}) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}_i} \right] + \frac{2}{\sigma} S_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial \bar{x}_j} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Bằng cách lấy đạo hàm phương trình (6.33) và sử dụng các phương trình (6.36), (6.37), (6.12), có thể chứng minh rằng (Bretherton và Garrett, 1968) các đại lượng trong cặp dấu ngoặc thứ hai trong phương trình (6.43) đồng nhất triệt tiêu, do đó

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{E}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[(U_i + C_{g_i}) \frac{E}{\sigma} \right] = 0. \quad (6.44)$$

Tác động sóng được định nghĩa với tần số nội tại σ một lần nữa

được bảo toàn! Sử dụng chính đồng nhất thức đó, chú ý rằng $S_{ij} = S_{ji}$, ta có thể viết lại phương trình (6.43)

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left[(U_i + C_{g_i}) E \right] + \frac{1}{2} S_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \bar{x}_i} \right) = 0. \quad (6.45)$$

Kết quả này lần đầu tiên do Longuet–Higgins và Stewart (1961) rút ra và về ý nghĩa vật lý có nghĩa rằng công do ứng suất sóng thực hiện để phát sinh dòng chảy có xu thế làm giảm năng lượng sóng.

Như trong mục 3.1, tham số bậc đại lượng μ có thể bỏ đi trong các kết quả cuối cùng và các tọa độ gốc được giữ nguyên.

Phương trình (6.44) là khởi điểm để tiếp tục phân tích. Về nguyên tắc, người ta tính được \mathbf{k} trước tiên; khi đó phương trình (6.44) được tích phân dọc theo đường cong tia sóng để thu được biên độ của sóng. Nhằm mục đích này, trong thực tiễn có một số phương pháp số (xem Dingemans, 1978). Trong mục tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ xét một vài thí dụ giải tích.

Luật bảo toàn tác động sóng là một kết quả rất tổng quát đúng đắn trong nhiều tình huống thực liên quan với môi trường thay đổi chậm. Thực tế phương trình (6.44) được Bretherton và Garrett (1969) rút ra cho các hệ động lực tổng quát không tiêu hao năng lượng, bằng cách áp dụng các khai triển WKB.

3.7 CÁC HIỆU ỨNG VẬT LÝ CỦA DÒNG CHẢY ĐƠN GIẢN ỔN ĐỊNH LÊN SÓNG

Khi dòng chảy và sóng đều ổn định, $\partial/\partial t = 0$, từ các phương trình (6.29) và (6.30) ta có

$$\boldsymbol{\omega} = \text{const} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}. \quad (7.1)$$

Giả sử $y = y(x)$ là phương trình của một tia sóng. Với phương trình (7.1), phương trình (2.5) có thể được giải bằng số với chú ý

là

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = (U_1 + U_2 y') k (1 + y_2')^{-1/2}. \quad (7.2)$$

Có thể nhận được biên độ sóng từ phương trình

$$\nabla \cdot \left[(\mathbf{U} + \mathbf{C}_g) \frac{E}{\sigma} \right] = 0. \quad (7.3)$$

Rõ ràng, ngoài các tia theo \mathbf{k} , cần phải xây dựng các đường cong mà ở mọi nơi chúng tiếp tuyến với tốc độ nhóm sóng địa phương $\mathbf{U} + \mathbf{C}_g$.

ý nghĩa của phương trình (7.1) sẽ thể hiện rõ qua thí dụ đơn giản nhất về trường hợp dòng chảy đồng nhất.

3.7.1 Dòng chảy đồng nhất trên nền độ sâu không đổi

Nếu áp dụng phép biến đổi Galile:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{U}t, \quad (7.4)$$

một sóng tiến trong miền yên tĩnh có thể được viết

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i[(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' + \mathbf{U}t) - \omega t)]} = e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U})t]}. \quad (7.5)$$

Vậy trong miền di chuyển, tần số hữu hiệu sẽ bằng

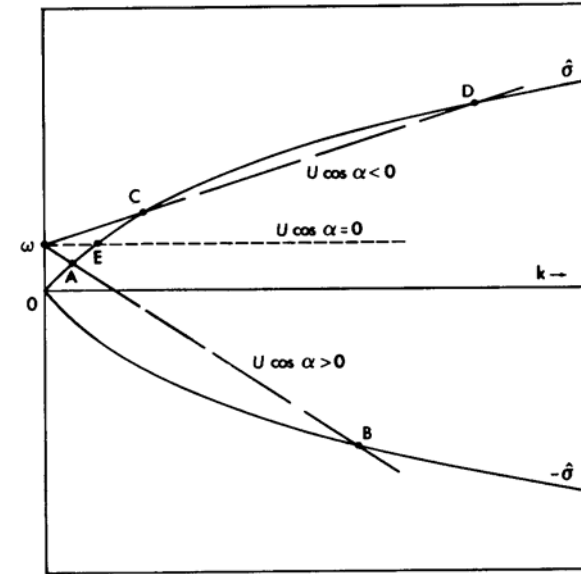
$$\sigma = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} = \omega - Uk \cos \alpha \quad (7.6)$$

trong đó α – góc giữa \mathbf{k} và \mathbf{U} . Ta thấy ngay rằng $\sigma \leftrightarrow \omega$ nếu $|\alpha| \leftrightarrow \pi/2$; kết quả này là hiệu ứng Doppler nổi tiếng.

Hướng hệ trục tọa độ sao cho $\mathbf{k} = (k, 0)$ với $k > 0$. Phương trình (6.33) có thể được viết lại

$$\omega - kU \cos \alpha = \hat{\sigma}(k) = \pm (gk \text{ th } kh)^{1/2}. \quad (7.7)$$

Quan hệ tán mát này có thể được giải bằng đồ họa từ giao điểm của đường thẳng $y = \omega - kU \cos \alpha$ và đường cong $y = \pm \hat{\sigma}(k)$ như trên hình 7.1. Khi $\alpha = \pm \pi/2$, dòng chảy không ảnh hưởng lên sóng (xem điểm E).



Hình 7.1 Nghiệm của phương trình (7.7)

Với $U \cos \alpha > 0$, có hai nghiệm tương ứng với các điểm A và B. So với trường hợp không có dòng chảy (điểm E), các sóng tiêu biểu tại A được kéo dài, tốc độ pha nội và tốc độ nhóm của chúng tăng lên. Điều ngược lại đúng cho các sóng hiện diện tại B. Đặc biệt, tốc độ pha nội và tốc độ nhóm âm, nhưng cả hai đều nhỏ hơn $U \cos \alpha$ về độ lớn. Do đó, các đỉnh sóng và năng lượng sóng bị cuốn đi bởi dòng chảy nhanh.

Với $U \cos \alpha < 0$, dòng chảy có một thành phần ngược hướng sóng. Nếu $-U \cos \alpha > (g\bar{h})^{1/2}$, thì không có sóng với bất kỳ bước sóng nào. Với giá trị của $-U \cos \alpha$ nhỏ hơn, có một ngưỡng để chỉ có một nghiệm tồn tại cho bất kỳ giá trị nào cho trước của ω . Tại ngưỡng này, tốc độ vận chuyển năng lượng thực triệt tiêu,

$$C_g + U \cos \alpha = 0. \quad (7.8)$$

Như vậy, mặc dù các đỉnh sóng truyền ngược dòng ($\sigma/k > 0$),

nhưng năng lượng vẫn giữ nguyên tại chỗ theo không gian.

Với giá trị $-U \cos \alpha$ nhỏ hơn nữa, có hai nghiệm tồn tại. Các sóng hiện diện tại điểm C thỏa mãn

$$\frac{\sigma}{k} > C_g > -U \cos \alpha,$$

do đó, cả các đỉnh sóng và năng lượng sóng di chuyển ngược dòng. Các sóng hiện diện tại D thỏa mãn

$$\frac{\sigma}{k} > -U \cos \alpha > C_g.$$

Bây giờ năng lượng sóng bị cuốn xuôi dòng trong khi các đỉnh sóng di chuyển ngược dòng. Dạng sóng này tồn tại được là do độ cong hữu hạn của đường cong σ , tức do sự tản mát.

3.7.2 Sóng cắt xiên dòng chảy trên nền độ sâu không đổi

Giả sử dòng chảy theo hướng dương của trục y ,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = V(x) > 0. \quad (7.9)$$

Giá trị liên quan $\bar{\zeta}$ có thể lấy bằng không. Vì $\partial/\partial y = 0$, theo phương trình (6.31) $k_2 = k \sin \alpha = \text{const}$. Hướng của tia sóng xác định từ biểu thức

$$k_1 = [k^2(x) - k_2^2]^{1/2}, \quad (7.10)$$

trong đó

$$\omega - V(x)k_2 = (gk \text{ th } kh)^{1/2}. \quad (7.11)$$

Phương trình của tia tương tự phương trình (3.6)

$$y - y_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx k_2}{(k^2(x) - k_2^2)^{1/2}}. \quad (7.12)$$

Giả sử rằng V tăng từ 0 với $x < 0$ đến đỉnh điểm tại $x = 0$ và giảm đến 0 với $x > 0$ như trên hình 7.2. Ta xét các sóng đầu tiên truyền cùng với dòng chảy, tức $k_2 > 0$. Sự biến thiên của

$k(x)$ biểu diễn bởi phương trình (7.11) được thể hiện một cách định tính trên các hình 7.2a và 7.2b. Nếu $0 < k_2 < k_{\min}$ thì tia sóng có thể xuyên qua dòng chảy (xem hình 7.2a). Tuy nhiên, nếu $0 < k_{\min} < k_2$ thì căn bậc hai trong phương trình 7.12 là thực chỉ với $x < x_c$. Các tia tới từ phía ngoài phải uốn cong ngược trở lại sau khi gặp đường tụ tia tại $x = x_c$, tại đó $k_1 = 0$. Các dạng hình học này giống các trường hợp sóng lan trên rãnh ngầm ở mục 2.3. Nếu các sóng truyền ngược hướng dòng chảy đó, $k_2 < 0$, thì biến thiên của $k(x)$ được thể hiện trên hình 7.2c phù hợp với biểu thức

$$\omega + V|k_2| = (gk \text{ th } kh)^{1/2}. \quad (7.13)$$

Bây giờ các tia có thể chỉ tồn tại bên trong dòng chảy khi $k_0 < k_2 < k_{\max}$, có nghĩa là các tia có thể bị bẫy ở gần tâm của dòng chảy. Tình huống này tương tự dải đất ngầm ở mục 2.3.

Từ phương trình tác động sóng (7.3), biến thiên biên độ sóng có thể tìm theo

$$\frac{k_1 EC_g}{k(\omega - Vk_2)} = \left[\frac{k_1 EC_g}{k(\omega - Vk_2)} \right]_0 = \text{const}.$$

Suy ra

$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{C_{g0} \cos \alpha_0}{C_g \cos \alpha} \frac{\omega - Vk_2}{\omega - V_0 k_2}. \quad (7.14)$$

Trong trường hợp đặc biệt, độ sâu lớn, $kh \gg 1$, có thể thu được các kết quả tường minh hơn. Chẳng hạn, phương trình (7.11) cho

$$\omega - Vk_2 = (gk)^{1/2}. \quad (7.15)$$

Nếu đơn giản hoá hơn nữa, cho $V = 0$, phương trình (7.14) trở thành

$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{\cos \alpha_0 [1 - (V/C_0) \sin \alpha_0]^2}{\{1 - \sin^2 \alpha_0 / [1 - (V/C_0) \sin \alpha_0]^4\}^{1/2}} \quad (7.16)$$

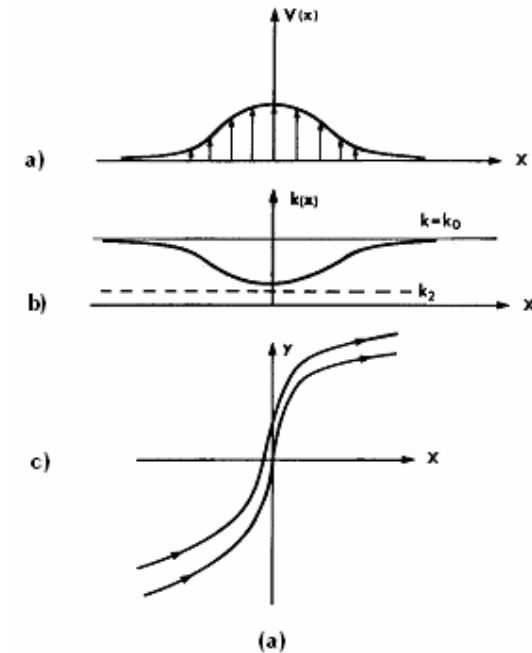
Hình 7.3 thể hiện tỉ số biên độ đối với các giá trị khác nhau của góc tới α_0 và cường độ dòng chảy V/C_0 .

Đọc đường tự tia, $\alpha = \pm\pi/2$ trong phương trình (7.14) và biên độ không thể dự báo chính xác bằng phép xấp xỉ tia. Có thể cải thiện tình hình này theo kiểu đã trình bày ở mục 2.3.3. McKee (1974), Peregrine và Smith (1975) đã xử lý tỉ mỉ các dạng tự tia khác nhau trong dòng chảy dưới ánh sáng lý thuyết tuyến tính. Smith (1976) đã đưa thêm thành phần phi tuyến để giải quyết trường hợp sóng biên độ khá lớn. Những khảo sát lý thuyết tinh tế nhằm giải thích những con sóng khổng lồ trong dòng chảy Agulhas đã từng được mô tả rất sinh động trong phần mở đề bài báo của Smith:

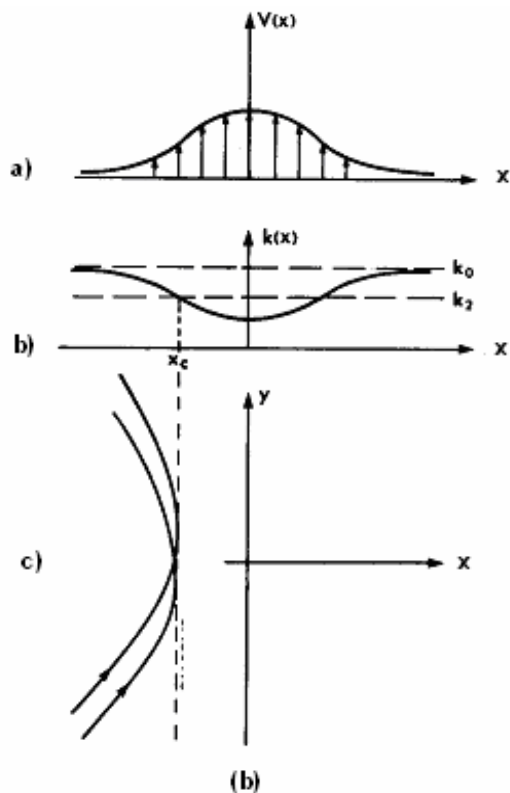
Trong thời kỳ kênh Suez đóng cửa, một số lớn tàu biển, đặc biệt các tàu chở dầu, đã thông báo hay bị hư hỏng do các con sóng lớn ở phần khơi bờ biển đông nam Phi Châu (Mallory, 1974). Hai tàu lớn đặc biệt rủi ro là "World Glory", bị gãy làm đôi và đắm tháng 6 năm 1968, và "Neptune Sapphire", bị cắt đứt mất 60 m ở bộ phận mũi vào tháng 8 năm 1973. Chúng ta chỉ có thể phỏng đoán gán tội cho các con sóng khổng lồ để giải thích những vụ việc tàu biển bị mất hút ở ngoài khơi vùng biển này. Trên đường trở về từ vịnh Ba Tư, các tàu chở dầu thường lợi dụng dòng hải lưu Agulhas. Và thế là tất cả 11 vụ nạn do thuyền trưởng Mallory (1974) ghi nhận, ngoại trừ có một vụ, đều dính với chuyện du ngoạn trên dòng chảy. Bằng cách xem lại các bản đồ thời tiết, Mallory chỉ ra rằng khi các vụ nạn xảy ra, thì là lúc dòng biển ngược hướng với trường sóng gió ngự trị.

Thông báo của Smith gợi ý rằng tình huống mô tả trên hình

7.2c có lẽ đã diễn ra thật.



Hình 7.2 a) $0 < k_2 < k_{\min}$: các tia truyền qua dòng chảy sau khi lệch hướng, b) $k_0 > k_2 > k_{\min}$: các tia bị dòng chảy uốn cong ngược trở lại, c) $k_2 < 0$ và $k_0 < |k_2| < k_{\max}$: các tia bị bẫy trong dòng chảy



Hình 7.2 (tiếp)

3.7.3 Sóng và dòng chảy cùng tuyến tính

Giả sử rằng cả sóng và dòng chảy cùng song song với trục x và tốc độ dòng chảy biến đổi theo x :

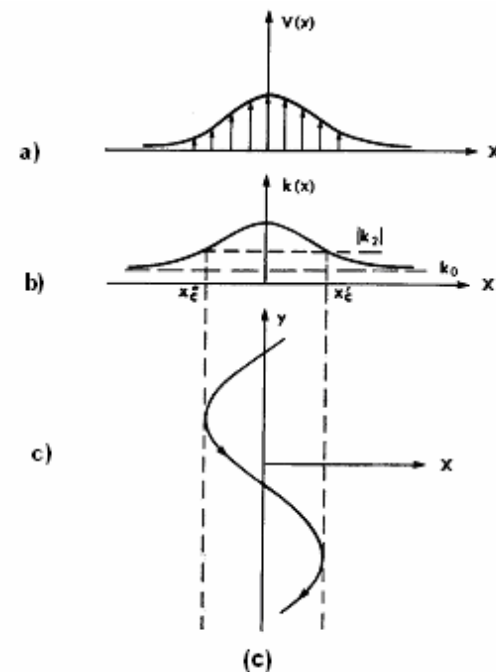
$$U_1 = U(x), \quad U_2 = 0, \quad \mathbf{k} = (k, 0). \quad (6.17)$$

Loại dòng chảy này phải kèm với thành phần tốc độ thẳng đứng để thỏa mãn tính liên tục, phương trình (6.2), được gọi là nước trôi (hay nước chìm). Lại giả sử $\omega = \text{const}$, tức

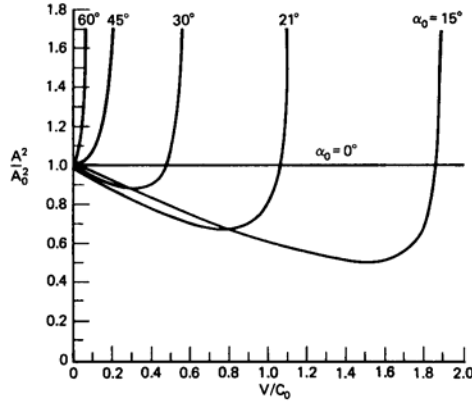
$$\omega = kU + \sigma = k_0 U_0 + \sigma_0 = \text{const}, \quad (7.18)$$

trong đó chỉ số 0 biểu thị giá trị tại một điểm tham chiếu. Nếu định nghĩa C và C_0 – các vận tốc pha ứng với chất lỏng chuyển động, bằng

$$C^2 = \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 = \frac{g}{k} \text{th} k \bar{h}, \quad C_0^2 = \left(\frac{\sigma_0}{k_0}\right)^2 = \frac{g}{k_0} \text{th} k_0 \bar{h}_0, \quad (7.19)$$



Hình 7.2 (tiếp)



Hình 7.3 Biên độ sóng và tốc độ dòng chảy với các góc tới khác nhau

thì từ phương trình (7.18), ta có

$$\frac{k}{k_0} \left(\frac{U}{C_0} + \frac{C}{C_0} \right) = \frac{U_0}{C_0} + 1. \quad (7.20)$$

Mặt khác, từ phương trình (7.19) có

$$\frac{C^2}{C_0^2} = \frac{k_0}{k} \frac{\text{th} k \bar{h}}{\text{th} k_0 \bar{h}_0} \quad (7.21)$$

là một phương trình không tường minh đối với k/k_0 theo C/C_0 .

Các phương trình (7.20) và (7.21) có thể kết hợp lại thành

$$\frac{C^2}{C_0^2} = \frac{(U/C_0 + C/C_0)}{(U_0/C_0 + 1)} \frac{\text{th} k \bar{h}}{\text{th} k_0 \bar{h}_0}. \quad (7.22)$$

Giải C/C_0 một cách hình thức từ phương trình (7.22) bằng cách giả sử k bằng hằng số, ta được

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2T} \left[1 + \left(1 + 4T \frac{U}{C_0} \right)^{1/2} \right], \quad (7.23)$$

trong đó

$$T = \left(1 + \frac{U_0}{C_0} \right) \frac{\text{th} k_0 \bar{h}_0}{\text{th} k \bar{h}}. \quad (7.24)$$

Rõ ràng tồn tại một vận tốc dòng chảy tối hạn, tại đó không thể có căn bậc hai trong phương trình (7.23), tức

$$U = -\frac{C_0}{4T} \quad (7.25a)$$

điều này có nghĩa là

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2T} \quad (7.25b)$$

và

$$U = -\frac{C}{2}. \quad (7.25c)$$

Khi $-U$ lớn hơn $C/2$, thì C/C_0 là số phức và sự lan truyền đẳng hướng không thể tồn tại.

Xét giới hạn của độ sâu $k\bar{h}$, $k_0\bar{h}_0 \gg 1$, và $U_0 = 0$. Phương trình (7.23) giản ước thành

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + 4 \frac{U}{C_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (7.26)$$

Vậy, dòng chảy theo hướng sóng ($U > 0$) làm tăng vận tốc pha và làm tăng bước sóng. Mặt khác, dòng chảy ngược hướng ($U < 0$) làm giảm tốc độ pha và giảm bước sóng. Tốc độ tối hạn bằng $U = -C/2 = -C_0/4$.

Với độ sâu tùy ý, Jonsson, Skovgaard, và Wang (1970) đã tính bước sóng cho một dải rộng tốc độ dòng và độ sâu. Hình 7.4 biểu diễn một số kết quả thí dụ do Brevik và Aas (1980) tính; các tác giả này cũng đã tiến hành một số thí nghiệm khẳng định lý thuyết này.

Về biên độ thì phương trình (7.3) cho

$$(C_g + U) \frac{E}{\sigma} = \text{const}$$

do đó

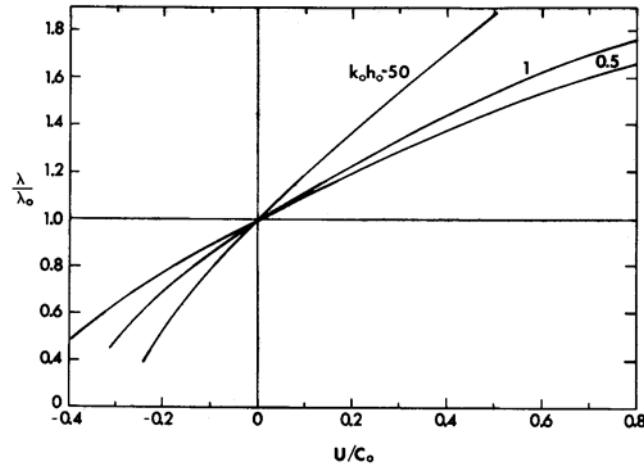
$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{C_{g0} + U_0}{C_g + U} \quad (7.27)$$

Phương trình này trở thành không xác định khi $U = -C_g$. Đối với nước sâu, $C_g \rightarrow C/2$, $\sigma \rightarrow g/C$; phương trình (7.27) có thể viết thành

$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{C_0}{C} \frac{C_0/2 + U_0}{C/2 + U} = \frac{C_0}{C} \frac{\frac{1}{2} + U_0/C_0}{\frac{1}{2} C/C_0 + U/C_0}, \quad k\bar{h} \gg 1. \quad (7.28)$$

Sử dụng (7.26), có thể loại C/C_0 và được

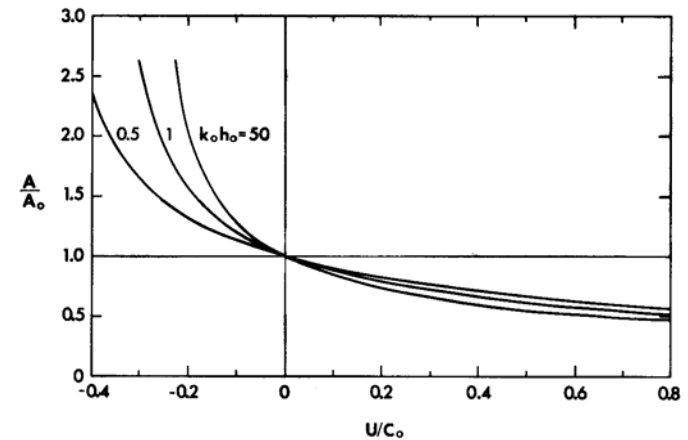
$$\frac{A^2}{A_0^2} = \frac{\frac{1}{2} + U_0/C_0}{U/C_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + 4U/C_0)^{1/2} \right]} \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 + 4U/C_0)^{1/2}} \right], \quad k\bar{h} \gg 1 \quad (7.29)$$



Hình 7.4 Thay đổi bước sóng do dòng chảy tuyến tính (theo Brevik và Aas, 1980)

Lại thấy rằng, khi đạt tới tốc độ tới hạn $U = -C/2 = -C_0/4$, thì biên độ sóng trở thành vô định. Phán đoán này thường được sử dụng để giải thích sự đổ vỡ sóng và là ý tưởng về cái gọi là đê chắn thuỷ lực. Thực tế, phép xấp xỉ tia không còn hiệu lực ở đây. Trong công trình của Peregrine (1976) có thể thấy một lý thuyết tuyến tính tinh tế hơn tính đến sự phản xạ ở gần tốc độ tới hạn. Tuy nhiên, các hiệu ứng phi tuyến, có thể cũng quan trọng và đã được Crapper (1972) khảo sát khá tỉ mỉ.

Các kết quả số cho A/A_0 có thể thu được dễ dàng đối với giá trị $k\bar{h}$ tùy ý bằng cách tính độ cao mặt nước trung bình từ phương trình (6.13), sau đó giải phương trình (7.22) đối với k . Cuối cùng, phương trình (7.27) cho A/A_0 . Hình 7.5 thể hiện một số kết quả thí dụ với $U_0 = 0$ do Brevik và Aas (1980) tính; các tác giả cũng đã thực hiện một số thí nghiệm theo hướng ủng hộ lý thuyết này. Jonsson, Skovgaard và Wang (1970) cũng có những tính toán tương tự và tỉ mỉ hơn.



Hình 7.5 Biến thiên biên độ do dòng chảy tuyến tính (theo Brevik và Aas, 1980)

Nhằm mục đích tính toán với các trường hợp thực tế: biến thiên độ sâu và dòng chảy là tùy ý, Booij (1981) đã sử dụng lý thuyết Lagrange để khái quát hoá phương trình (5.7). Cả khúc xạ và tán xạ đều được đưa vào. Song, việc tính toán thực tế có thể khá tốn kém và nên tiến hành xấp xỉ hoá tiếp.

Nhằm mục đích tính toán với các trường hợp thực tế: biến thiên độ sâu và dòng chảy là tùy ý, Booij (1981) đã sử dụng lý thuyết Lagrange để khái quát hoá phương trình (5.7). Cả khúc xạ và tán xạ đều được đưa vào. Song, việc tính toán thực tế có thể khá tốn kém và nên tiến hành xấp xỉ hoá tiếp.

CHƯƠNG 4 - SÓNG DÀI BIÊN ĐỘ NHỎ VÔ HẠN TRÊN NỀN ĐÁY BIẾN ĐỔI ĐÁNG KỂ

Khi sóng lan truyền vào vùng có độ sâu biến thiên đáng kể trong khoảng bước sóng, hiện tượng phân tán xuất hiện, trong đó sự phản xạ trở thể hiện rõ. Lý thuyết tia đơn bỏ qua sự phản xạ sẽ không phù hợp nữa. Trước khi bàn luận về sự phân tán các sóng tán mát, ta khảo sát các bài toán tương tự đối với các sóng dài trên vùng nước nông trường hợp quá trình phân tán được xem là không quan trọng. Để đơn giản về phương diện toán học, ta chủ yếu đề cập tới trường hợp độ sâu biến đổi không liên tục. Một hiện tượng thú vị khi xét độ sâu biến đổi là hiện tượng bẫy sóng, tức các sóng bị giữ lại ở một vùng nào đó của biển. Chủ đề này đã thảo luận đối với các sóng ngắn ở chương 3. Các bài toán về bẫy sóng dài ở những bãi biển thoải, những vùng thềm lục địa và các dãy núi ngầm đại dương sẽ được xét ở đây bằng một số mô hình đơn giản như là miền hình chữ nhật và độ nghiêng bãi đồng nhất, v.v... Ngoài ra, ở đây cũng sẽ nghiên cứu một số khía cạnh về ma trận phân tán. Vì chỉ có thể giải được bằng giải tích theo phương pháp đại số cho một số ít ỏi

trường hợp biến thiên độ sâu liên tục, nên các phương pháp gần đúng, hay phương pháp số, sẽ rất cần thiết và sẽ được xem xét ở cuối của chương này.

4.1 XÂY DỰNG LÝ THUYẾT SÓNG DÀI TUYẾN TÍNH HOÁ

4.1.1 Các phương trình mô tả

Trong mục 1.4 ta đã thấy rằng, với các sóng nhỏ vô hạn trên nền sâu không đổi, thì chuyển động của nước trong sóng dài chủ yếu diễn ra trong phương ngang, tức sự biến đổi trong thẳng đứng yếu và áp suất là thuỷ tĩnh. Nhận xét này đã được khẳng định lại trong mục 3.6 khi rút ra các phương trình phi tuyến cho các dòng chảy qui mô lớn, tức chính là các sóng dài biên độ hữu hạn. Vậy chuyển động sóng dài là chuyển động gần đúng hai chiều.

Tuyến tính hoá các phương trình (6.11) và (6.12), chương 3, đối với các sóng biên độ nhỏ vô hạn

$$\frac{|\zeta|}{h} \ll 1 \quad (1.1)$$

và đổi các ký hiệu từ U thành \mathbf{u} , từ $\bar{\zeta}$ thành ζ , ta có phương trình bảo toàn khối lượng

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad (1.2)$$

và phương trình bảo toàn động lượng

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g\nabla\zeta. \quad (1.3)$$

áp suất tổng là áp suất thuỷ tĩnh

$$P = \rho g(\zeta - z). \quad (1.4)$$

Loại \mathbf{u} từ phương trình (1.2) và phương trình (1.3), ta được

$$g\nabla \cdot (h\nabla\zeta) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Đây là một phương trình đạo hàm riêng dạng hyperbolic với các hệ số biến đổi.

Nếu các sóng có dạng sin theo thời gian với tần số góc ω , ta có thể tách riêng các phần phụ thuộc không gian và thời gian thành

$$\begin{aligned} \zeta &= \eta(x, y)e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{u}(x, y, t) &\rightarrow \mathbf{u}(x, y)e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Từ các phương trình (1.2) và (1.3), các nhân tố không gian liên quan với

$$i\omega\eta = \nabla \cdot (h\mathbf{u}), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{ig}{\omega} \nabla\eta \quad (1.8)$$

và

$$\nabla \cdot (h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0. \quad (1.9)$$

Với độ sâu không đổi ($h = \text{const}$), phương trình (1.5) trở thành phương trình sóng cổ điển:

$$\nabla^2 \zeta = \frac{1}{gh} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

trong khi phương trình (1.9) trở thành phương trình Helmholtz:

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0, \quad k = \frac{\omega}{(gh)^{1/2}}. \quad (1.11)$$

Nếu biên bên là tường thẳng đứng, thì điều kiện biên phải là dòng năng lượng pháp tuyến bằng không. Từ phương trình (1.8) rút ra

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0, \quad (1.12)$$

có nghĩa rằng độ cao mặt tự do có thể là cực đại hoặc cực tiểu. Nếu biên là một bãi biển nghiêng tương đối và nếu sóng không quá dốc đến mức có thể đổ (xem mục 10.5), thì phương trình (1.12) có thể biến đổi thành

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0. \quad (1.13)$$

Mặt khác, điều kiện biên dọc theo đê chắn sóng lớn chồm hoặc dọc theo một bãi biển thoải có sóng đổ thì khó có thể xác định, vì sự tiêu tán năng lượng trên các biên này là một quá trình phi tuyến khó mô tả bằng toán học.

Cuối cùng, phải xác định một điều kiện biên thích hợp tại vô cực.

Để diễn đạt luận chứng luận lý trên, ta tiến hành dẫn lập các phương trình (1.1) và (1.4) một cách chính thức hơn, bằng cách vận dụng lý thuyết tuyến tính hoá tổng quát cho trường hợp sóng dài. Những lập luận ở đây tuân theo Friedrichs (1948) đối với các sóng dài phi tuyến và một phần như trong mục 3.1. Ta sẽ quy chuẩn tất cả các biến theo các qui mô đã biết trước dựa trên các căn cứ vật lý:

$$\begin{aligned} (x', y') &= k(x, y), & z' &= \frac{z}{h_0}, & h' &= \frac{h}{h_0}, \\ t' &= [k(gh_0)^{1/2}]t, & \zeta' &= \frac{\zeta}{A_0}, & \Phi &= \frac{1}{k h_0} (gh_0)^{1/2} \Phi, \end{aligned} \quad (1.14)$$

trong đó $\omega \sim (gh_0)^{1/2} k$. Việc quy chuẩn đối với t và Φ tuân theo phương trình (2.2), chương 1. Các phương trình phi thứ nguyên quả sẽ đúng như các phương trình (1.3)–(1.5) ở chương 3, nếu ta thay tất cả các dấu gạch trên bằng dấu '. Để cho ngắn gọn, từ đây trở đi ta sẽ bỏ các dấu phẩy trên trong các phương trình.

Giả sử ta có chuỗi

$$\phi = \phi_0 + \mu^2 \phi_2 + \mu^4 \phi_4 + \dots \quad (1.15)$$

Tại bậc $O(\mu^0)$ ta có

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} = 0, \quad -h < z < 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial z} = 0, \quad z = 0, -h, \quad (1.17)$$

sao cho $\phi_0 = \phi_0(x, y, t)$. Tại bậc $O(\mu^2)$ ta có

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = -\nabla^2 \phi_0, \quad -h < z < 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2}, \quad z = 0, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = -\nabla h \cdot \nabla \phi_0, \quad z = -h, \quad (1.20)$$

áp dụng công thức Green (phương trình 4.11, chương 2) với ϕ_0 và ϕ_2 sẽ cho điều kiện khả giải với ϕ_2

$$\nabla \cdot (h \nabla \phi_0) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2}. \quad (1.21)$$

Nếu các biến tự nhiên được khôi phục và phương trình Bernoulli tuyến tính hoá $g\zeta = \Phi_t$ được sử dụng, thì phương trình (1.21) dẫn đến phương trình (1.5).

4.1.2 Các sóng tựa một chiều trong kênh dài tiết diện ngang biến thiên chậm

Đối với một kênh dài, tiết diện ngang hình chữ nhật, chiều rộng kênh nhỏ hơn nhiều so với quy mô dài phương dọc, thì biến thiên theo phương ngang nhỏ hơn nhiều so với biến thiên theo chiều dọc. Xét theo kinh nghiệm ta thấy điều này là đúng, vì các điều kiện biên dòng pháp tuyến bằng không tại các bờ của kênh

hẹp có nghĩa rằng sự biến đổi phương ngang của ζ có thể bỏ qua ở mọi nơi. Chuyển động có thể mô tả bằng phương trình một chiều; cách thiết lập luận lý sẽ trình bày dưới đây.

Giả sử x là trục dọc và y là trục ngang, $b(x)$ là độ rộng và $h(x, y)$ là độ sâu. Giả sử $y = a_1(x)$ và $a_2(x)$ là các bờ, khi đó

$$b = a_2 - a_1, \quad \text{diện tích } A = \int_{a_1}^{a_2} h dy. \quad (1.22)$$

Tích phân phương trình liên tục (1.2) từ bờ này đến bờ kia và lợi dụng công thức Leibniz, ta có

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{a_1}^{a_2} h u dy + \left[h \left(v - u \frac{\partial a}{\partial x} \right) \right]_{y=a_1}^{y=a_2} = 0.$$

Các số hạng tích phân triệt tiêu dọc theo cả hai bờ, do đó

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial A u}{\partial x} = 0. \quad (1.23)$$

Khi bỏ qua những biến thiên phương ngang của ζ và u , thì phương trình động lượng dạng gần đúng sẽ là

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.24)$$

Kết hợp các phương trình (1.23) và (1.24), ta có

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{b}{g} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0. \quad (1.25)$$

Với các sóng dạng sin $\zeta = \eta e^{-i\omega t}$, phương trình mô tả sẽ là

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\omega^2 b}{g} \eta = 0; \quad (1.26)$$

đây là một kiểu phương trình loại Sturm–Liouville quen biết. Phải nhấn mạnh rằng từ giờ trở đi bước sóng và kích thước dọc của kênh được xem như cùng bậc.

Bài tập 1.1:

Sử dụng phương pháp Friedrich để rút ra phương trình (1.25) bằng phép phân tích nhiễu.

4.1.3 Nhận xét thêm về điều kiện phát xạ

Theo mục 2.4, với các bài toán sóng dạng sin ổn định, thì phải đặt điều kiện biên phát xạ: các sóng gây bởi những nhiễu địa phương được lan ra ngoài. Một cách tiếp cận tương đương khác: đó là xuất phát từ bài toán giá trị ban đầu và xem trạng thái ổn định là trạng thái giới hạn khi $t \rightarrow \infty$. Một cách lựa chọn khác: đó là duy trì theo cách dẫn lập với trạng thái ổn định, nhưng yêu cầu một sự tiêu giảm nho nhỏ, sự tiêu giảm này có thể là thực hay là nhân tạo, và sau đó đòi hỏi nghiệm điều hoà đơn phải triệt tiêu ở vô cùng. Khi sự tiêu giảm được phép giảm đi ở cuối, thì kết quả cuối cùng sẽ thoả mãn điều kiện phát xạ. Tính nhân tạo của tiêu giảm nhân tạo là ý tưởng của Rayleigh.

Trong nước nông, người ta có thể tưởng tượng ma sát đáy là nguồn tiêu giảm tự nhiên. Giả sử lực ma sát được diễn tả bằng $2\varepsilon \mathbf{u}$, ε – một hệ số dương giá trị bé. Phương trình động lượng sẽ như sau

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g\nabla\zeta - 2\varepsilon \mathbf{u}, \quad (1.27)$$

phương trình này có thể kết hợp với phương trình liên tục (1.2) cho

$$\nabla \cdot gh\nabla\eta - 2\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \quad (1.28)$$

Đối với chuyển động điều hoà đơn, phương trình (1.28) trở thành

$$\nabla \cdot gh\nabla\eta + (\omega^2 + 2i\varepsilon\omega)\eta = 0, \quad (1.29)$$

hay có thể viết lại thành

$$\nabla \cdot gh\nabla\eta + (\omega + i\varepsilon)^2 \eta = 0 \quad (1.30)$$

với ε nhỏ. Điều kiện biên tại vô cùng là η phải có hạn. Vậy

trạng thái ổn định cuối cùng sẽ là giới hạn của nghiệm tại $\varepsilon \downarrow 0$.

Thay vì cách tiếp cận vật lý hoặc giả vật lý về đưa ra sự tiêu giảm, con đường toán học tương đương là phát biểu rằng η thoả mãn

$$\nabla \cdot gh\nabla\eta + \omega'^2 \eta = 0, \quad (1.31)$$

ở đây ω' là số phức với phần ảo nhỏ, dương.

Để thấy ý nghĩa của “tiêu giảm” hay số phức ω' , ta xét quá trình phân tán một chiều gần một vật cản. Trong các vùng độ sâu h không đổi, sóng phân tán bằng

$$e^{ik|x|} \quad \text{hoặc} \quad e^{-ik'|x|}$$

ở đây

$$k' = k + i\varepsilon(gh)^{-1/2}, \quad (1.32)$$

$k = \omega(gh)^{-1/2}$. Muốn nghiệm giới hạn khi $|x| \rightarrow \infty$, phải loại bỏ $e^{-ik'|x|}$. Trong giới hạn của $\varepsilon \downarrow 0$, nhiễu trở thành

$$\eta^S \sim e^{ik|x|}, \quad |kx| \rightarrow \infty. \quad (1.33)$$

điều này có nghĩa là các sóng đi ra. Như vậy giá trị phức ω' chỉ điều kiện phát xạ. Dễ dàng kiểm tra được rằng điều kiện phát xạ có thể diễn tả như sau

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp ik \right) \eta^S \rightarrow 0, \quad |kx| \rightarrow \infty. \quad (1.34)$$

Trong sự phân tán hai chiều gây ra do các vật cản, nghiệm trong vùng biển độ sâu không đổi có thể xây dựng bằng tổng của các số hạng dưới đây:

$$\begin{Bmatrix} H_n^{(1)}(k'r) \\ H_n^{(2)}(k'r) \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}.$$

Do biến thiên bất đối xứng của các hàm Hankel

$$\left\{ \begin{array}{l} H_n^{(1)}(k'r) \\ H_n^{(2)}(k'r) \end{array} \right\} \sim \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} \exp \left[\pm i \left(k' r - \frac{\pi}{4} - \frac{n \pi}{2} \right) \right], \quad (1.35)$$

$H_n^{(2)}$ phải được loại bỏ khi k' phức với phần thực dương. Tại giới hạn $\varepsilon \downarrow 0$, nghiệm tổng quát của các sóng phân tán có thể viết như sau:

$$\eta^S = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) H_n^{(1)}(kr). \quad (1.36)$$

Với $kr \gg 1$, η^S biến thiên như

$$\begin{aligned} \eta^S &\approx \left[\sum ((\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) e^{-in\pi/2}) \right] \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} e^{ikr - i\pi/4} \equiv \\ &\equiv A(\theta) \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} e^{ikr - i\pi/4}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

đây lại là một sóng đi ra. Vì vậy, phương trình (1.37) là điều kiện phát xạ cho sự phân tán hai chiều gây bởi các vật cản hữu hạn. Một cách khác, điều kiện này có thể biểu diễn tả bằng

$$(kr)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \eta^S \rightarrow 0, \quad kr \gg 1. \quad (1.38)$$

Ta phải nhấn mạnh ngay rằng phương trình (1.38) mạnh hơn nhiều so với yêu cầu $\eta^S \downarrow 0$ tại vô cùng.

Những nhận xét trên đây gọi ra một thủ tục quy tắc giản để xây dựng các nghiệm biến thiên thời gian từ các nghiệm điều hoà đơn. Nếu nhiễu bắt đầu sinh ra tại một thời điểm hữu hạn, thì $\zeta \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow -\infty$. Với quá trình tiêu giảm, ta cũng kỳ vọng rằng $\zeta \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$. Vậy có thể vận dụng phép biến đổi Fourier

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.39)$$

Biến đổi của phương trình (1.28) chính là phương trình (1.29) và

bài toán giá trị biên đúng là bài toán về nhiễu điều hoà tiêu giảm $\eta(\mathbf{x}, \omega')$. Do đó, nhiễu biến thiên có thể nhận được bằng phép biến đổi ngược:

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega', \quad (1.40)$$

đây là tổng cộng tuyến tính của các nghiệm điều hoà đơn bị tiêu giảm. Vì $\omega' = \omega + i\varepsilon$, phương trình (1.40) có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}, t) &= e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega' = \\ &= e^{\varepsilon t} \int_{-\infty + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \eta(\mathbf{x}, \omega') e^{-i\omega' t} d\omega'. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Nghiệm không nhớt đơn giản là giới hạn của $\varepsilon \downarrow 0$, nếu quan niệm rằng tích phân Fourier trong phương trình (1.41) thực hiện dọc theo một đường ở bên trên một chút so với trục thực x trong mặt phẳng phức ω' . Bây giờ vì mục đích cuối cùng đã đạt được, ta có thể quên đi tính nhân tạo của sự tiêu giảm và đơn giản nói rằng $\zeta(\mathbf{x}, t)$ là tích phân Fourier của nghiệm điều hoà đơn thoả mãn điều kiện phát xạ

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.42)$$

trong đó đường lấy tích phân phải ở phía trên trục thực ω một chút.

Các ý tưởng trong phụ mục này có thể khái quát hoá cho trường hợp ba chiều với kh tuỳ ý.

4.2 ĐỘ SÂU GIÁN ĐOẠN – SÓNG TỚI VÙNG GÓC

4.2.1. Nghiệm

Xét đại dương đơn giản độ sâu biến thiên gián đoạn: tại $x=0$, $h=h_1$ tại $x<0$ và $h=h_2$ tại $x>0$, h_1, h_2 – các hằng số. Hai

sóng tới tần số ω đến từ $x \sim \pm\infty$. Từ mỗi chuỗi sóng đó, có một phần năng lượng được truyền qua chỗ gián đoạn độ sâu và một phần bị phản xạ trở lại, tạo thành các sóng phân tán truyền ra xa từ chỗ gián đoạn này. Vấn đề là phải tìm các sóng truyền qua và các sóng phản xạ.

Sóng trên hai phía của $x=0$ thoả mãn

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \quad (2.1)$$

và

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

trong đó $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $u = (u_1, u_2)$, và $h = (h_1, h_2)$ tuần tự tại $x < 0$ và $x > 0$. Bây giờ ta phải tìm các điều kiện tương hợp tại $x=0$. Để lập luận chu đáo hơn, bây giờ ta giả sử các phương trình (2.1) và (2.2) là đúng ngay cả khi qua điểm gián đoạn độ sâu và có thể tích phân được theo x từ $x=0-$ đến $x=0+$. Vì khoảng lấy tích phân là vô cùng bé và $\partial \zeta / \partial t$ và $\partial u / \partial t$ là hữu hạn, nên các số hạng đầu của các phương trình (2.1) và (2.2) không đóng góp vào kết quả, do đó

$$\lim_{x \rightarrow 0-} h_1 u_1 = \lim_{x \rightarrow 0+} h_2 u_2, \quad (2.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \zeta_1 = \lim_{x \rightarrow 0+} \zeta_2, \quad (2.4)$$

Những điều kiện này (Lamb, 1932) liên hệ ζ và dòng uh qua điểm gián đoạn độ sâu.

Đối với chuyển động điều hoà đơn, ta sử dụng phương trình (1.9) sao cho các thừa số không gian thoả mãn phương trình

$$\frac{d^2 \eta_m}{dx^2} + k_m^2 \eta_m = 0, \quad m = 1, 2, \quad (2.5)$$

với

$$k_m = \frac{\omega}{(gh_m)^{1/2}}. \quad (2.6)$$

Thừa số không gian của vận tốc được cho bằng

$$u_m = -\frac{ig}{\omega} \frac{d\eta_m}{dx}. \quad (2.7)$$

Các điều kiện tương hợp tại điểm nối là

$$\eta_1 = \eta_2, \quad (2.8a)$$

$$h_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = h_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x}. \quad (2.8b)$$

Để kết thúc việc thiết lập công thức, ta phải bổ sung thêm điều kiện phát xạ: nhiễu gây ra bởi sóng tới chỉ có thể đi ra ngoài. Vậy nếu chỉ có một sóng tới từ phía trái (hoặc từ phía phải), thì các sóng ở phía phải (trái) phải là sóng chỉ chạy sang phải (hoặc sang trái). Một cách tổng quát hơn, ta giả sử rằng có các sóng tới đến từ cả hai phía của vô cùng $A_- e^{ik_1 x}$ và $B_+ e^{-ik_2 x}$. Nghiệm tổng quát sẽ có dạng sau:

$$\eta_1 = A_- e^{ik_1 x} + B_- e^{-ik_1 x} \quad \text{với } x < 0 \quad (2.9)$$

và

$$\eta_2 = B_+ e^{-ik_1 x} + A_+ e^{ik_1 x} \quad \text{với } x > 0. \quad (2.10)$$

Các biên độ của những sóng tới A_- và B_+ là biết trước và các biên độ của các sóng phân tán A_+ và B_- sẽ phải tìm thấy. Áp dụng các điều kiện xúng hợp (2.8a) và (2.8b), ta thu được

$$A_+ + B_+ = A_- + B_-,$$

$$k_1 h_1 (A_- - B_-) = k_2 h_2 (-B_+ + A_+)$$

từ các biểu thức này có thể giải ra

$$B_- = \frac{(k_1 h_1 - k_2 h_2) A_- + 2k_2 h_2 B_+}{k_1 h_1 + k_2 h_2}, \quad (2.11)$$

$$A_+ = \frac{2k_1 h_1 A_- - (k_1 h_1 - k_2 h_2) B_+}{k_1 h_1 + k_2 h_2}. \quad (2.12)$$

Các kết quả có thể viết gọn hơn dưới dạng ma trận như sau

$$\{A^s\} = [S] \{A^i\} \quad (2.13)$$

với

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} A_- \\ B_+ \end{Bmatrix}, \quad \{A^s\} = \begin{Bmatrix} A_+ \\ B_- \end{Bmatrix}, \quad (2.14)$$

và

$$[S] = (k_1 h_1 - k_2 h_2)^{-1} \begin{bmatrix} 2k_1 h_1 & -(k_1 h_1 - k_2 h_2) \\ k_1 h_1 - k_2 h_2 & 2k_2 h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & R_2 \\ R_1 & T_2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Ma trận $[S]$ được gọi là ma trận phân tán.

Để hiểu ý nghĩa của T_1, T_2, R_1 và R_2 , hãy giả sử sóng chỉ tới từ phía trái, sao cho $A_- \neq 0$ và $B_+ = 0$. Rõ ràng rằng

$$\frac{A_+}{A_-} = T_1 = \frac{2k_1 h_1}{k_1 h_1 + k_2 h_2}, \quad (2.16a)$$

$$\frac{B_-}{A_-} = R_1 = \frac{k_1 h_1 - k_2 h_2}{k_1 h_1 + k_2 h_2}. \quad (2.16a)$$

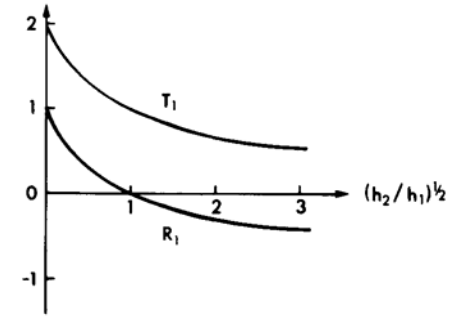
Như vậy, T_1 và R_1 có thể được định nghĩa tuần tự là hệ số truyền qua và hệ số phản xạ khi sóng tới xuất phát phía $h = h_1$. T_2 và R_2 được định nghĩa tương tự cho sóng đến từ phía h_2 . Do $k_m h_m = \omega(h_m / g)^{1/2}$, ta có

$$T_1 = \frac{2(h_1)^{1/2}}{(h_1)^{1/2} + (h_2)^{1/2}} = \frac{2}{1 + (h_2 / h_1)^{1/2}}, \quad (2.17a)$$

$$R_1 = \frac{(h_1)^{1/2} - (h_2)^{1/2}}{(h_1)^{1/2} + (h_2)^{1/2}} = \frac{1 - (h_2 / h_1)^{1/2}}{1 + (h_2 / h_1)^{1/2}}. \quad (2.17b)$$

Biến thiên của T_1 và R_1 theo tỉ số độ sâu thể hiện trên hình 2.1. Chú ý rằng pha của sóng phản xạ không thay đổi khi sóng tới đến từ phía sâu hơn, nhưng nó lệch pha bằng π khi sóng tới đến từ phía nông hơn. Việc chứng minh rằng năng lượng do các sóng phân tán (phản xạ và truyền qua) truyền tải bằng năng lượng do sóng tới chuyển tải sẽ giành cho bạn đọc như là một bài tập. Đối với vùng thềm rất nông, $h_2 / h_1 \ll 1$, thì

$$T_1 = 2 \left(1 - \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} \right) \quad R_1 = 1 - 2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$



Hình 2.1 Các hệ số truyền qua T_1 và phản xạ R_1 vùng độ sâu gián đoạn, hướng sóng tới vuông góc

Hệ số phản xạ $R_1 \equiv 1$, thành thử tổng các sóng tới và sóng phản xạ trên thực tế làm thành một sóng đứng với một điểm bụng có biên độ $2A^i$ tại $x=0$. Phải nhận xét rằng các hiệu ứng phi tuyến từ trước đến giờ bị bỏ qua, ở đây nó có thể trở nên rất quan trọng đối với trường hợp h_2 đủ nhỏ. Mặc dù biên độ sóng truyền qua tăng lên hai lần so với biên độ sóng tới do giảm độ sâu h_2 , nhưng chỉ có một phần năng lượng rất nhỏ xuyên qua được vì tốc độ dòng năng lượng là $T_1^2 C_g \propto (h_2)^{1/2}$. Trong trường hợp đặc

biệt, $h_2/h_1 \gg 1$ hệ số phản xạ $R_1 = -1$, tức hệ thống sóng tổng cộng trong phần $x < 0$ cũng là một sóng đứng nhưng với điểm nút tại $x = 0$.

Bài tập 2.1

Xét một thêm có độ sâu h_1 trong vùng $x < x_1$ nối với đại dương có độ sâu lớn hơn h_2 trong vùng $x > x_2$. Tại vùng chuyển tiếp $x_1 < x < x_2$, độ sâu được cho bằng $h = ax^2$, với $h_1 = ax_1^2$, $h_2 = ax_2^2$ và $x_2 - x_1 > h_1$ hoặc h_2 . Giả sử một chuỗi sóng chu kỳ dài là sóng tới trực diện từ phía đại dương. Hãy chứng minh rằng các hệ số phân tán là

$$T = \frac{ib}{\mu^{1/2} \Delta}$$

và

$$R = i \operatorname{sh} \left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\mu} \right) \frac{\exp \left[-2i (\omega^2 / ga)^{1/2} \right]}{\Delta},$$

trong đó

$$b = \left(1 - 4 \frac{\omega^2}{ga} \right)^{1/2}, \quad \mu = \frac{x_1}{x_2},$$

và

$$\Delta = 2 \left(\frac{\omega^2}{ga} \right)^{1/2} \operatorname{sh} \left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\mu} \right) + ib \operatorname{ch} \left(\frac{b}{2} \ln \frac{1}{\mu} \right).$$

Vẽ các kết quả và khảo sát các hiệu ứng của ω^2/ga và μ (Kajiura, 1961).

4.2.2 Hiệu chỉnh các điều kiện tương hợp tại điểm nối

Mặc dù các điều kiện tương hợp phương trình (2.8a) và (2.8b) là hợp lý về mặt linh nghiệm, chúng đã được rút ra trên cơ sở các phương trình (2.1) và (2.2), mà các phương trình này

chỉ có hiệu lực khi các chuyển động thẳng đứng không đáng kể so với chuyển động ngang và khi $\partial/\partial x$ nhỏ. Tuy nhiên, những giả thiết này sẽ không còn đúng ở lân cận điểm bậc thêm. Vậy lý thuyết của ta ở mục 4.2.1 có còn đúng hay không? Câu hỏi này là chủ đề bài báo của Bartholomeuz (1958), ông đã xuất phát từ bài toán với kh tùy ý và chứng minh chặt chẽ rằng các kết quả của mục trước là giới hạn tiệm cận chính xác của $k_m h_m \rightarrow 0$. Lập luận của ông rất dài và gồm một số phép toán rất phức tạp. Dưới đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách dẫn giải đơn giản hơn thông qua phương pháp tiệm cận tương hợp, phương pháp này là một phiên bản đầy đủ hơn của phép xấp xỉ lớp biên ở mục 3.3.3 và đã được Ogilvie (1960), Tuck (1975) và một số nhà khoa học khác sử dụng rất hiệu nghiệm trong nhiều bài toán về sóng dài.

Trước tiên, ta chia miền tự nhiên thành vùng gần và vùng xa theo qui mô ngự trị ở mỗi vùng. Thí dụ, qui mô độ dài ở phía sóng tới ở cách xa điểm nối là bước sóng $1/k_1$, vậy phương trình

$$\eta_1 = A(e^{ik_1 x} + \operatorname{Re}^{-ik_1 x}) \quad (2.19)$$

mô tả chính xác các sóng. Vùng này có bậc đại lượng $O(k_1^{-1})$ là một vùng xa. Dưới mắt của người quan sát ở vùng xa thì miền lân cận điểm độ sâu gián đoạn nhỏ đến mức chỉ một số ít các số hạng khai triển Taylor phương trình (2.19) đã đủ để xấp xỉ mặt tự do ở đó; vậy

$$\eta_1 = A[1 + R + (1 - R)ik_1 x] + O(k_1 x)^2 \quad k_1 x \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Với một người quan sát tương tự khác ở phía truyền qua của vùng xa thì sóng được mô tả bằng phương trình

$$\eta_2 = ATe^{ik_2 x}, \quad (2.21)$$

phương trình này có xu thế trở thành

$$\eta_2 = AT(1 + ik_2 x) + O(k_2 x)^2 \quad (2.22)$$

trong vùng lân cận của gián đoạn độ sâu. Đối với vùng nước nông, phương trình Bernoulli cho

$$\phi = \frac{-ig}{\omega} \eta,$$

do đó

$$\phi_1^{xa} \rightarrow \frac{-ig}{\omega} A[(1+R) + (1-R)ik_1x], \quad k_1x \rightarrow 0, \quad (2.23)$$

$$\phi_2^{xa} \rightarrow \frac{-ig}{\omega} AT(1+ik_2x), \quad k_2x \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

Bây giờ miền lân cận điểm gián đoạn cấu thành một vùng gần có chuyển động hai chiều và kích thước đặc trưng là độ sâu địa phương h (h_1 hoặc h_2). Phương trình chuyển động và điều kiện biên tại điểm gián đoạn) là

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad (2.26)$$

Mặc dù điều kiện biên tuyến tính hoá chính xác tại mặt tự do là

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0, \quad (2.27)$$

hai số hạng trên đây có tương quan tỉ lệ là

$$\frac{\omega^2 \phi / g}{(\partial \phi / \partial z)} = O\left(\frac{\omega^2 h}{g}\right) = O(k^2 h^2).$$

Do đó điều kiện (2.27) là một xấp xỉ

$$\phi_z \cong 0 \quad (2.28)$$

với sai số $(kh)^2$. Về vật lý, phương trình (2.28) ám chỉ rằng người quan sát ở vùng gần đã không chú ý đến các sóng kích thước dài và nhìn thấy, tại mọi thời điểm, một dòng chảy đi qua một kênh nối với điểm gián đoạn như trên hình 2.2. Nghiệm hình thức

của bài toán dòng chảy thế đơn giản hoá này, về nguyên tắc, có thể nhận được bằng cách vẽ bản đồ đồng dạng hay những phương tiện khác.

Cho đến giờ, các nghiệm vùng gần và vùng xa chứa các hệ số chưa được xác định. Bước tiếp theo của phương pháp tiệm cận tương hợp đòi hỏi các nghiệm này được nối trơn trên các vùng trung gian, ở rất gần với điểm nối theo người quan sát ở vùng xa nhưng ở rất xa điểm nối theo người quan sát ở vùng gần; nói cách khác

$$\phi^{xa} \Big|_{|kx| \ll 1} = \phi^{gần} \Big|_{|x/h| \gg 1} + O(kh)^2. \quad (2.29)$$

Trước khi thực hiện tương hợp, ta viết ra biểu thức xấp xỉ vùng xa $\phi^{gần}$:

$$\begin{aligned} \phi^{gần} &= C - DUh_1 + Ux, & \frac{x}{h_1} \sim -\infty \\ &= C + DUh_1 + U\frac{h_1}{h_2}x, & \frac{x}{h_2} \sim +\infty \end{aligned} \quad (2.30)$$

đặc biệt chú ý rằng, các hằng số cộng tại $x \sim \pm \infty$ khác nhau một lượng $2DUh_1$; thực tế, D liên quan đến hằng số chưa biết U . Do tính liên tục, tại x bất kỳ ta có

$$Uh_1 = \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 \phi dz - \frac{\partial h}{\partial x} \phi(x, -h),$$

biểu thức này, sau khi lấy tích phân từ x_1 đến x_2 với $-x_1/h_1$ và $x_2/h_2 \gg 1$, sẽ cho

$$\left[\int_{-h}^0 \phi dz \right]_{x_1}^{x_2} = Uh_1(x_2 - x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} \phi(x, -h) dx. \quad (2.31)$$

Vì phương trình (2.30) áp dụng tại x_1 và x_2 , vế trái của phương trình (2.31) có thể viết lại

$$C(h_2 - h_1) + DUh_1(h_1 + h_2) + Uh_1(x_2 - x_1),$$

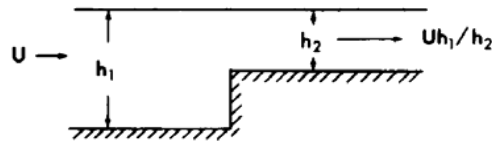
trong khi vế phải của phương trình (2.31) là

$$Uh_1(x_2 - x_1) + C(h_2 - h_1) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial x} [\phi(x, -h) - C] dx.$$

Thế các biểu thức này vào phương trình (2.31), ta được

$$D = \frac{1}{h_1 + h_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\phi(x, -h) - C}{Uh_1}. \quad (2.32)$$

Vì $\phi - C$ phải có bậc là Uh_1 , D là một số phi thứ nguyên có bậc đơn vị và chỉ phụ thuộc vào hình học của vùng gần. Giá trị tường minh của D có thể thu được cho trường hợp miền gián đoạn độ sâu hình chữ nhật như ở mục 4.2.3.



Hình 2.2 Vùng gần của một thêm gián đoạn độ sâu

Giả sử rằng vùng gần và do đó D được biết trước theo C và U , ta đi thực hiện so sánh các phương trình (2.23) và (2.24) với phương trình (2.30). Bằng cách cho bằng nhau các hệ số của các số hạng chứa cùng lũy thừa của x , ta được:

$$C - Uh_1D = -\frac{igA}{\omega}(1 + R),$$

$$U = -\frac{igA}{\omega}(1 - R)ik_1,$$

$$C + Uh_1D = -\frac{igA}{\omega}T,$$

$$U \frac{h_1}{h_2} = -\frac{igA}{\omega}Tik_2.$$

Các phương trình này có thể giải đối với R, T, U và C ; các kết

quả là:

$$R = -\frac{1 - s + 2iDk_1h_1}{1 + s - 2iDk_1h_1}, \quad (2.33)$$

$$T = \frac{2s}{1 + s - 2iDk_1h_1}, \quad (2.34)$$

$$h_1U = \frac{igA}{\omega}ik_2h_2 \frac{2s}{1 + s - 2iDk_1h_1} \quad (2.35)$$

và

$$C = \frac{igA}{\omega} \frac{2s - iDk_1h_1}{1 + s - 2iDk_1h_1}. \quad (2.36)$$

trong đó

$$s \equiv \frac{k_1h_1}{k_2h_2}. \quad (2.37)$$

Vì D là số thực và có bậc đơn vị (xem phương trình (2.32)), nó chỉ tác động đến pha của R, T, U và C , nhưng có thể được bỏ qua do độ lớn của chúng, với sai số bậc $O(kh)^2$. Kết luận này phù hợp với Bartholomeuz (1958) và đã được Tuck (1976) rút ra theo cách này. Như vậy, những đòi hỏi đơn giản của phương trình (2.8) đã được đáp ứng.

4.2.3 Vùng gần trong miền gián đoạn hình chữ nhật

Nói chung, vùng gần của phần chuyển tiếp thô phải được giải bằng số như bài toán kinh điển về dòng thế ổn định. Đối với một miền gián đoạn hình chữ nhật, nghiệm có thể nhận được bằng phương pháp giải tích nhờ lý thuyết các hàm phức (xem Milne-Thomson, 1967). Ta đưa ra biến phức $z = x + jy$ và thế vận tốc phức $W(z)$ với $\phi(x, y) = \text{Re}_j W(z)$. Chú ý rằng đơn vị ảo được ký hiệu bằng j nhằm phân biệt với đơn vị i được dùng để chỉ biến thiên thời gian. Mặc dù cả i và j là $(-1)^{1/2}$, nhưng mỗi

một đại lượng phải được coi là số thực so với đại lượng kia khi chúng cùng xuất hiện. Chẳng hạn, thế vận tốc thực được trình diễn bằng

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, t) &= \operatorname{Re}_i \operatorname{Re}_j W(z) e^{-i\omega t} = \\ &= \operatorname{Re}_i e^{-i\omega t} \operatorname{Re}_j (\phi + j\psi) = \\ &= \operatorname{Re}_i e^{-i\omega t} \phi = \operatorname{Re}_i e^{-i\omega t} (\phi_1 + i\psi_2) = \\ &= \phi_1 \cos \omega t + \phi_2 \sin \omega t,\end{aligned}$$

ở đây ϕ_1 và ϕ_2 là thực theo cả i và j .

Đường vật lý trong mặt z có thể được vẽ vào nửa phía trên của mặt ζ như trên hình 2.3, theo công thức của Schwarz-Christoffel

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta \left(\frac{\zeta-1}{\zeta-c^2} \right)^{1/2}} \quad (2.38)$$

Rõ ràng rằng, thế phức $W = \phi + j\psi$ là một nguồn lực $U h_1$ tại gốc của mặt ζ

$$W = \frac{U h_1}{\pi} \ln \zeta + \text{const}. \quad (2.39)$$

Để ấn định K và c^2 ta chú ý rằng vận tốc phức là

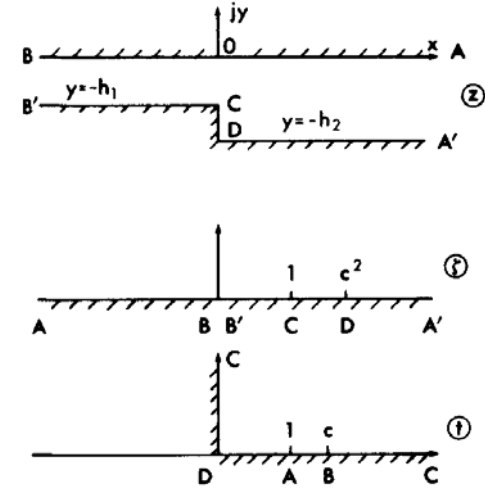
$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \bigg/ \frac{dz}{d\zeta} = \frac{U h_1}{\pi K} \left(\frac{\zeta - c^2}{\zeta - 1} \right)^{1/2}.$$

Vì $\zeta \sim \infty$ ở gần A , $dW/dz \cong U h_1 / \pi K = U h_1 / h_2$; do đó

$$K = \frac{h_2}{\pi}.$$

Gần B , $\zeta \sim 0$ và $dW/dz \cong U h_1 c / \pi K = U$; do đó

$$c = \frac{h_2}{h_1}.$$



Hình 2.3 Phác họa đường vật lý trong mặt z trong nửa trên của mặt ζ

Để tích phân phương trình (2.38), ta đưa ra một mặt t bằng phương trình

$$\zeta = \frac{t^2 - c^2}{t^2 - 1}. \quad (2.40a)$$

hay

$$t = \left(\frac{\zeta - c^2}{\zeta - 1} \right)^{1/2}, \quad (2.40b)$$

biểu thức này sắp đặt nửa trên mặt ζ vào cung phần tư thứ nhất của t như trên hình 2.3. Lấy đạo hàm loga phương trình (2.40) và kết hợp với phương trình (2.38), ta có thể tích phân z theo t , với kết quả là

$$z + j h_1 = \frac{h_2}{\pi} \left(\frac{1}{c} \ln \frac{t-c}{t+c} - \ln \frac{t-1}{t+1} \right), \quad (2.41)$$

trong đó hằng số $j h_1$ được chọn sao cho các hình ảnh của điểm C xuất hiện trong cả mặt z và t .

Bây giờ đặt phương trình (2.40a) vào trong phương trình (2.39), ta có

$$W = \frac{U h_1}{\pi} \ln \frac{t^2 - c^2}{t^2 - 1}. \quad (2.42)$$

Đối với một t cho trước trong góc phần tư thứ nhất, ta có thể tìm z từ phương trình (2.41) và W tương ứng từ phương trình (2.42). Bây giờ việc giải nghiệm ở vùng gần hoàn thành.

Các phép xấp xỉ tiệm cận ở các lân cận của A và B là cần thiết. Giả sử t tiếp cận điểm B từ phía trái, $t \rightarrow c - 0$, khi đó

$$z - j h_1 \cong \frac{h_2}{\pi} \left[\frac{1}{c} \ln(t - c) - \frac{1}{c} \ln 2c - \ln \frac{c - 1}{c + 1} \right],$$

và

$$W \cong \frac{U h_1}{\pi} \left[\ln(t - c) + \ln \frac{2c}{c^2 - 1} \right].$$

Sau khi loại $\ln(t - c)$ ta có

$$W \cong U z + \frac{U h_1}{\pi} \left[j\pi + \ln 2c + \ln \frac{c - 1}{c + 1} + \ln \frac{2c}{c^2 - 1} \right]. \quad (2.43)$$

Giả sử t tiếp cận A từ phía phải, khi đó

$$z + j h_1 \cong \frac{h_2}{\pi} \left[\frac{1}{c} \left(\ln \frac{c - 1}{c + 1} + j\pi \right) - \ln(t - 1) + \ln 2 \right],$$

và

$$W \cong \frac{U h_1}{\pi} \left[\ln(c^2 - 1) + j\pi - \ln 2 - \ln(t - 1) \right].$$

Loại $\ln(1 - t)$, ta được

$$W \cong \frac{U h_1 z}{h_2} + \frac{U h_1}{\pi} \left[\ln(1 - c^2) - 2 \ln 2 + j\pi - \frac{1}{c} \ln \frac{c - 1}{c + 1} \right]. \quad (2.44)$$

Bây giờ ta có thể trừ các hằng số thêm của các phương trình (2.43) và (2.44) để có

$$2D = \frac{1}{\pi} \left[\frac{c^2 + 1}{c} \ln \frac{c + 1}{c - 1} - 2 \ln \frac{4c}{c^2 - 1} \right]; \quad (2.45)$$

đây là phương trình do Tuck (1976) nhận được và nó khẳng định ước lượng bậc D ở mục 4.2.2.

4.3 ĐỘ SÂU GIÁN ĐOẠN - SÓNG TỐI XIÊN

Xét một chuỗi sóng phẳng đi tới dưới một góc θ_1 so với đường gián đoạn độ sâu (hình 3.1). Giả sử trục y trùng với đường gián đoạn và trục x vuông góc với trục y . Các độ sâu ở hai phía là h_1 , $x < 0$ và h_2 , $x > 0$, một cách tổng quát $h_1 \neq h_2$.

Giả sử các sóng đi tới từ phía $x \rightarrow -\infty$

$$\eta_I = A e^{i(\alpha_1 x + \beta y)} \quad \text{sao cho} \quad \alpha_1^2 + \beta^2 = k_1^2. \quad (3.1)$$

Vectơ số sóng của sóng tới nghiêng một góc

$$\theta_1 = \text{tg}^{-1}(\beta / \alpha_1) \quad (3.2)$$

so với trục x . Các nghiệm có thể có dạng như sau:

$$\eta_1 = A(e^{i\alpha_1 x} + \text{Re}^{-i\alpha_1 x})e^{i\beta y}, \quad \alpha_1^2 + \beta^2 = k_1^2, \quad x < 0, \quad (3.3)$$

$$\eta_2 = A T e^{i(\alpha_2 x + \beta y)}, \quad \alpha_2^2 + \beta^2 = k_2^2, \quad x > 0, \quad (3.4)$$

sao cho ở phía trái có một sóng phản xạ hướng sang trái và ở phía phải có một sóng truyền qua hướng sang phải. Các hệ số phản xạ và truyền qua R và T phải được xác định bằng cách làm tương hợp độ cao mặt nước và dòng khối lượng tại điểm $x = 0$. Thế các phương trình (3.3) và (3.4) vào các phương trình (2.8a) và (2.8b), ta được

$$1 + R = T, \quad (3.5a)$$

$$h_1(i\alpha_1 - R i\alpha_1) = h_2 i\alpha_2 T. \quad (3.5b)$$

Các nghiệm cho R và T về hình thức giống như trường hợp sóng tới vuông góc nếu ta thay thế k_1 và k_2 bằng α_1 và α_2

trong các phương trình (2.16) và (2.17), tức là

$$T = \frac{2\alpha_1 h_1}{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}, \quad (3.6a)$$

$$R = \frac{\alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}. \quad (3.6b)$$

Ta cần chú ý tới một số tính chất của nghiệm. Hướng sóng tới và sóng truyền qua bằng:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\beta}{(k_1^2 - \beta^2)^{1/2}}, \quad (3.7)$$

và

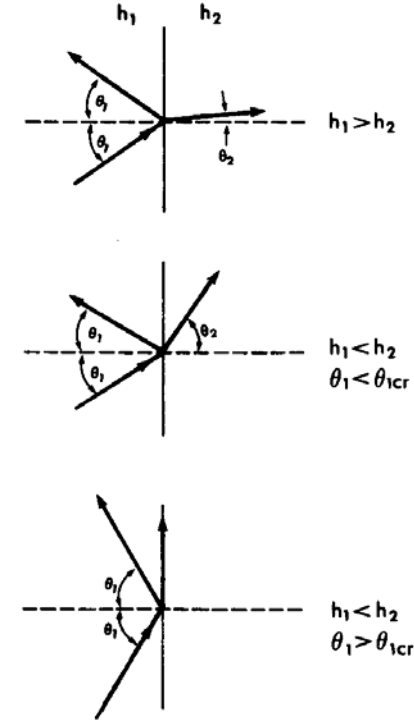
$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\beta}{(k_2^2 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Với $h_1 > h_2$, $k_1 < k_2$, thì $\theta_1 > \theta_2$.

Nếu phía truyền qua nông hơn, thì vectơ sóng của sóng truyền qua sẽ hướng gần trùng với trục x hơn so với vectơ sóng tới. Mặt khác, nếu $h_1 < h_2$, phía sóng tới nông hơn, thì $\theta_1 < \theta_2$ và các sóng truyền qua sẽ quay ra xa khỏi trục x . Kết quả này chính là hiện tượng khúc xạ đã bàn luận ở chương 2 đối với trường hợp độ sâu biến thiên chậm và các sóng truyền qua được gọi là sóng khúc xạ. Với một tần số cố định, k_1 và k_2 sẽ cố định theo h_1 và h_2 . Nếu ta tăng β về phía k_1 (tức tăng góc tới), thì sẽ có một giai đoạn sao cho $k_2 = \beta$ vì $k_2 < k_1$. Tại giai đoạn này, $\theta_2 = \pi/2$ và sóng truyền qua truyền dọc theo điểm gián đoạn ($\alpha_2 = 0$). Góc tới tới hạn bằng

$$(\theta_1)_{\text{cr}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{k_2}{\alpha_1} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{k_2}{(k_1^2 - k_2^2)^{1/2}}. \quad (3.9)$$

Vì $\alpha_2 = 0$, hệ số phản xạ $R = 1$; như vậy là có phản xạ toàn phần. Sóng truyền qua có các đỉnh song song với trục x với biên độ như nhau dọc theo các đỉnh sóng.



Hình 3.1 Hướng của các vectơ sóng tại đường gián đoạn

Điều gì sẽ xảy ra khi β tăng nữa? $\alpha_2 = (k_2^2 - \beta^2)^{1/2}$ sẽ trở thành ảo, và $\operatorname{tg}\theta_2$ mất ý nghĩa. Ta quay lại nghiệm nguyên bản và viết lại $\alpha_2 = i\gamma_2$, $\gamma_2 = (\beta^2 - k_2^2)^{1/2}$ sao cho γ_2 là thực và dương:

$$\eta_2 = a_1 T e^{-\gamma_2 x} e^{i\beta y}. \quad (3.10)$$

Nghiệm tổng quát thực sự chứa $e^{\gamma_2 x}$ và $e^{-\gamma_2 x}$; ta chỉ lấy $e^{-\gamma_2 x}$ cho nghiệm biên tại $x \sim \infty$. Như vậy:

$$T = \frac{2\alpha_1 h_1}{\alpha_1 h_1 + i\gamma_2 h_2}, \quad (3.11a)$$

$$R = \frac{\alpha_1 h_1 - i\gamma_2 h_2}{\alpha_1 h_1 + i\gamma_2 h_2}. \quad (3.11b)$$

Rõ ràng rằng, $|R|=1$, sự phản xạ là toàn phần. Với các phương trình (3.11), nghiệm có thể chuẩn hoá lại thành

$$\eta_1 = A \cos(\alpha_1 x + \delta) e^{i\beta y}, \quad (3.12)$$

$$\eta_2 = A \frac{\alpha_1 h_1}{(\alpha_1^2 h_1^2 + \gamma_2^2 h_2^2)^{1/2}} e^{-\gamma_2 x} e^{i\beta y}. \quad (3.13)$$

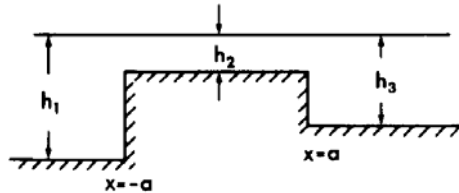
với δ – góc pha

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma_2 h_2}{\alpha_1 h_1}.$$

Ta phải giải thích nghiệm với một ý nghĩa mới. Tại phía sâu hơn, $x > 0$, sóng truyền qua truyền dọc theo trục y , biên độ của nó cực đại tại $x=0$ và giảm dần theo hàm mũ. Góc β càng lớn thì biên độ càng giảm nhanh.

4.4 SỰ PHÂN TÁN Ở THÊM HOẶC MÁNG ĐỘ RỘNG HỮU HẠN

Xét đáy biển có độ sâu biến thiên kiểu bậc như trên hình 4.1. Từ $x \sim -\infty$ truyền đến một sóng tới biên độ đơn vị dưới một góc xiên. Ta xét xem kích thước hữu hạn của bậc độ sâu sẽ có những hiệu ứng gì?



Hình 4.1. Sóng đất ngầm

Nghiệm tổng quát trên mỗi miền phẳng có thể viết như sau:

$$\eta_1 = e^{i\beta y} (e^{i\alpha_1(x+a)} + R' e^{-i\alpha_1(x+a)}), \quad x < -a, \quad (4.1)$$

$$\eta_2 = e^{i\beta y} (A e^{i\alpha_2 x} + B e^{-i\alpha_2 x}), \quad -a < x < a, \quad (4.2)$$

$$\eta_3 = T' e^{i\beta y} e^{i\alpha_3(x-a)}, \quad x > a, \quad (4.3)$$

Ta có thể định nghĩa

$$R = R' e^{-2i\alpha_1 a} \quad (4.4)$$

là hệ số phản xạ, và

$$T = T' e^{-i(\alpha_1 + \alpha_3)a} \quad (4.5)$$

là hệ số truyền qua. Các hệ số A , B , R' và T' phải tìm bằng cách tương hợp η và $h\partial\eta/\partial x$ tại hai bên đường gián đoạn.

Tại $x = -a$, ta có

$$1 + R' = A e^{-ia_2 a} + B e^{ia_2 a}, \quad (4.6)$$

và

$$\alpha_1 h_1 (1 - R') = \alpha_2 h_2 (A e^{-ia_2 a} - B e^{ia_2 a}), \quad (4.7)$$

trong khi tương hợp tại $x = a$, ta có

$$A e^{ia_2 a} + B e^{-ia_2 a} = T', \quad (4.8)$$

và

$$\alpha_2 h_2 (A e^{ia_2 a} - B e^{-ia_2 a}) = \alpha_3 h_3 T'. \quad (4.9)$$

Bây giờ việc còn lại là giải đồng thời các phương trình (4.6)–(4.9). Các tính toán có thể được đơn giản hoá nếu dùng các ký hiệu mới sau đây:

$$S_{\mu\nu} = \frac{\alpha_\mu h_\mu}{\alpha_\nu h_\nu} \quad \text{với } \mu, \nu = 1, 2, 3 \quad (\text{không lấy tổng}) \quad (4.10)$$

Các phương trình (4.6)–(4.9) trở thành

$$A e^{-i\alpha_2 a} + B e^{i\alpha_2 a} = 1 + R', \quad (4.11)$$

$$A e^{-i\alpha_2 a} - B e^{i\alpha_2 a} = S_{12} (1 - R'), \quad (4.12)$$

$$Ae^{i\alpha_2 a} + Be^{-i\alpha_2 a} = T', \quad (4.13)$$

$$Ae^{i\alpha_2 a} - Be^{-i\alpha_2 a} = s_{32} T'. \quad (4.14)$$

Từ các phương trình (4.13) và (4.14) ta có thể biểu diễn A và B theo T' hoặc T :

$$A = \frac{1}{2} T' e^{-i\alpha_2 a} (1 + s_{32}), \quad (4.15)$$

$$B = \frac{1}{2} T' e^{-i\alpha_2 a} (1 - s_{32}). \quad (4.16)$$

Khử A và B từ các phương trình (4.11) và (4.12), ta có thể giải phương trình cho R' và T' :

$$R' = \frac{e^{-i\alpha_2 a} \left[-(1 - s_{12})(1 + s_{32}) + (1 + s_{32})(1 - s_{32})e^{2i\alpha_2 a} \right]}{\Delta}, \quad (4.17)$$

$$T' = \frac{4s_{12}}{\Delta}, \quad (4.18)$$

trong đó

$$\Delta = (1 + s_{12})(1 + s_{32})e^{-2i\alpha_2 a} - (1 - s_{12})(1 - s_{32})e^{2i\alpha_2 a}. \quad (4.19)$$

Cuối cùng, A và B có thể nhận được từ phương trình (4.15) và phương trình (4.16) nhờ phương trình (4.18).

Để tìm hiểu ý nghĩa vật lý, ta khảo sát một trường hợp đặc biệt: độ sâu ở cả hai phía của điểm gián đoạn bằng nhau, $h_1 = h_3$. Bây giờ ta có $\alpha_1 = \alpha_3$, do đó

$$s_{12} = s_{32} = \frac{\alpha_1 h_1}{\alpha_2 h_2} \equiv s = \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{\omega^2 / gh_1 - \beta^2}{\omega^2 / gh_2 - \beta^2} \right)^{1/2}. \quad (4.20)$$

Chú ý rằng $s > 1$ nếu vùng trung tâm là miền thềm và $s < 1$ nếu là một vùng trũng. Các hệ số truyền qua và phản xạ là:

$$T' = \frac{4s}{(1+s)^2 e^{-2i\alpha_2 a} - (1-s)e^{2i\alpha_2 a}}, \quad (4.21)$$

$$R' = \frac{-(1-s^2)(e^{-2i\alpha_2 a} - e^{2i\alpha_2 a})}{(1+s)^2 e^{-2i\alpha_2 a} - (1-s)e^{2i\alpha_2 a}}. \quad (4.22)$$

Năng lượng của các sóng truyền qua và phản xạ tỉ lệ với

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} |T'|^2 \\ |R'|^2 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} |T|^2 \\ |R|^2 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c} 4s^2 \\ (1-s^2)^2 \sin^2 2\alpha_2 a \end{array} \right) [4s^2 + (1-s^2)^2 \sin^2 2\alpha_2 a]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Để dàng chứng minh được $|R|^2 + |T|^2 = 1$, có nghĩa rằng năng lượng của các sóng phân tán cũng bằng năng lượng của các sóng tới. Một đặc tính vật lý quan trọng là $|R|^2$ và $|T|^2$ biến thiên tuần hoàn với $2\alpha_2 a$. Đặc biệt, với $2\alpha_2 a = n\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, nghĩa là, $4a/\lambda_2 = 0, 1, 2, 3, \dots$, trong đó $\lambda_2 = 2\pi/\alpha_2$, thì $|R|^2 = 0$, và $|T|^2 = 1$ thành thử trường hợp này sóng truyền qua hoàn toàn và thêm gọi là trong suốt đối với sóng tới sóng tới. Truyền qua cực tiểu và phản xạ cực đại xảy ra khi $\sin^2 2\alpha_2 a = 1$, hay

$$2\alpha_2 a = (n - \frac{1}{2})\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

có nghĩa là

$$\frac{4a}{\lambda_2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

Các giá trị tương ứng là:

$$\min |T|^2 = \frac{4s^2}{(1+s^2)^2}, \quad (4.24)$$

$$\max |R|^2 = \frac{(1-s^2)^2}{(1+s^2)^2}; \quad (4.25)$$

những giá trị này phụ thuộc vào s^2 như trên hình 4.2a. Phụ thuộc của $|T|$ và $|R|$ vào $2\alpha_2 a$ là phụ thuộc kiểu dao động (hình 4.2b).

Sóng trên thềm thu được bằng cách thế phương trình (4.21)

vào các phương trình (4.15) và (4.16) với $s_{12} = s_{32} = s$, tức là

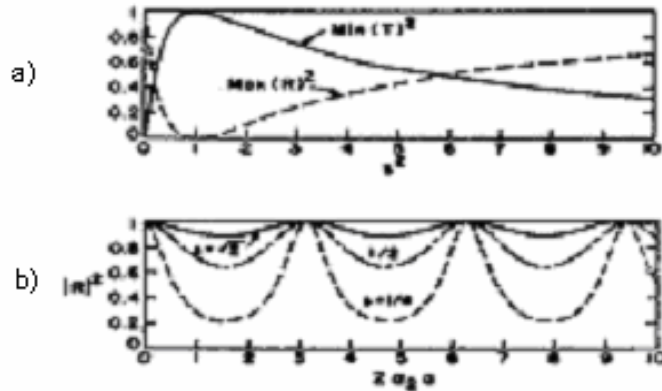
$$A = \frac{1}{2} T'(1+s)e^{-i\alpha_2 a}, \quad B = \frac{1}{2} T'(1-s)e^{i\alpha_2 a} \quad (4.26)$$

và sau đó thế vào phương trình (4.2). Bỏ qua các bước trung gian, ta có kết quả cuối cùng:

$$\eta_2 = \frac{2s[(1+s)e^{i\alpha_2(x-a)} + (1-s)e^{-i\alpha_2(x-a)}]}{(1+s)^2 e^{-i\alpha_2 a} - (1-s)^2 e^{i\alpha_2 a}} \quad (4.27)$$

do đó bình phương của đường bao là

$$|\eta_2|^2 = \frac{4s^2 [\cos^2 \alpha_2(x-a) + s^2 \sin^2 \alpha_2(x-a)]}{4s^2 + (1-s^2)^2 \sin^2 2\alpha_2 a} \quad (4.28)$$



Hình 4.2. Đặc tính của $|T|^2$ và $|R|^2$: a) ảnh hưởng do $s = \alpha_1 h_1 / \alpha_2 h_2$ biến thiên; b) ảnh hưởng do $2\alpha_2 a$ biến thiên

Mặt tự do trong khoảng $-a < x < a$ là tổng của hai chuỗi sóng lan theo hai hướng ngược nhau dẫn tới giao thoa và hình thành một sóng đứng không gian có biên độ thay đổi dọc trục x . Riêng tại rìa $x = a$

$$|\eta_2|^2 = \frac{4s^2}{4s^2 + (1-s^2)^2 \sin^2 2\alpha_2 a}, \quad x = a \quad (4.29)$$

cho nên giao thoa làm giảm sóng, tức $|\eta|^2$ nhỏ nhất khi $2\alpha_2 a = (n - \frac{1}{2})\pi$, và làm tăng sóng, tức $|\eta|^2$ lớn nhất khi $2\alpha_2 a = n\pi$. Vì chất lỏng tại $x = a$ hoạt động như là một cái pít tông đối với chuyển động trong vùng $x > a$, nên biên độ của nó quy định biên độ của sóng truyền qua.

Các đặc tính giao thoa rút ra đơn thuần từ phân tích toán học như trên cũng có thể được giải thích về mặt vật lý. Khi một sóng đập vào rìa tại $x = -a$, một phần sóng truyền qua vào vùng $-a < x < a$ và một phần phản xạ. Khi đạt tới rìa tại $x = a$, sóng truyền cũng cùng chịu trình phân tán, thành thử một phần sóng truyền qua tới vùng $x > a$ và một phần phản xạ về phía rìa $x = 0$. Quá trình qua và phản xạ lui và tiến lặp đi lặp lại vô cùng tận đối với tất cả sóng của chuỗi sóng điều hoà. Sóng tổng cộng đi về phía trái trong khoảng $x < -a$ là tổng của các sóng phản xạ từ $x = -a$ và tất cả các sóng truyền qua từ $-a < x < a$ đến $x < -a$, trong khi đó các sóng tổng cộng đi về phía phải trong phần $x > a$ là tổng của tất cả các sóng truyền qua từ $-a < x < a$ đến $x > a$. Bây giờ nếu $4a$ là một bội số tích phân của bước sóng λ_2 , mỗi lần đỉnh sóng điển hình hoàn thành một vòng khứ hồi, phản xạ từ $x = a$ đến $x = -a$ và quay lại tới $x = a$, thì pha của nó bị thay đổi hai lần π . Thành thử tất cả các đỉnh sóng nào đến tới $x = a$ cùng một thời điểm sau một số lần thực hiện các vòng khứ hồi..., $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ sẽ có cùng pha; chúng giao thoa với nhau theo kiểu làm tăng sóng và hệ quả là biên độ tổng tại $x = a$ lớn hơn. Mặt khác, nếu $4a$ bội lẻ của nửa bước sóng $\lambda_2/2$, thì sau một vòng khứ hồi một đỉnh sóng điển hình sẽ ngược về pha so với các đỉnh sóng khác chậm hay vượt trước một số lẻ lần các vòng khứ hồi. Sự giao thoa sẽ theo kiểu làm yếu sóng, dẫn đến biên độ thực nhỏ nhất tại $x = a$.

Ngoài ra, nếu lấy đạo hàm $|\eta_2|^2$ theo x , ta thấy $\partial|\eta_2|^2 / \partial x \propto$

$\sin 2\alpha_2(x-a)$, thành thử cường độ $|\eta_2|^2$ đạt cực trị tại $2\alpha_2(x-a) = n\pi$, tức $x-a = \frac{1}{2}n\lambda_2$. Từ phương trình (4.28) suy ra các giá trị cực trị bằng:

$$\text{Extr } |\eta_2|^2 = \frac{4s^2}{4s^2 + (1-s^2)^2 \sin^2 2\alpha_2 a} \quad \text{nếu } n = \text{chẵn}$$

và

$$\text{Extr } |\eta_2|^2 = \frac{4s^2}{4s^2 + (1-s^2)^2 \sin^2 2\alpha_2 a} \quad \text{nếu } n = \text{lẻ.}$$

Trong cả hai trường hợp các giá trị cực trị là lớn nhất khi $2\alpha_2 a$ là các số nguyên lần của π . Như vậy, các đỉnh của T theo $2\alpha_2 a$ trùng với đỉnh thích ứng trong vùng $-a < x < a$.

Cuối cùng, ta xét giới hạn khi $\alpha_2 a \downarrow 0$. Nếu khai triển Taylor phương trình (4.23) sẽ rút ra

$$|T|^2 = 1 - \frac{(1-s^2)^2}{s^2} (\alpha_2 a)^2 + O(\alpha_2 a)^4$$

$$|R|^2 = \frac{(1-s^2)^2}{s^2} (\alpha_2 a)^2 + O(\alpha_2 a)^4.$$

Vậy một barie hẹp hơn nhiều so với bước sóng thì thuộc loại trong suốt đối với các sóng tới. Thật ra thì các hiệu ứng chất lỏng thực thường gây ra sự tách dòng chảy, và do đó, sự tản mát, và làm thay đổi kết luận trên đây một cách đáng kể.

4.5 SỰ TRUYỀN QUA VÀ PHẢN XẠ Ở VÙNG ĐỘ SÂU BIẾN ĐỔI CHẬM

Có một số dạng địa hình đáy cụ thể (biến thiên tuyến tính, parabol); với chúng có thể nhận được nghiệm giải tích (Kajiura, 1961). Việc phân tích toán học để nhận được kết quả trong trường hợp này không có gì khó khăn. Với các loại nền đáy với

độ sâu biến đổi chậm, ta có thể rút ra nghiệm khá tổng quát nhưng ở dạng gần đúng và có ý nghĩa về mặt vật lý.

Đối với loại nền đáy mà quy mô biến đổi độ sâu của nó lớn hơn nhiều so với bước sóng, thì hiển nhiên là nên xuất phát từ phép gần đúng WKB kinh điển. Giả sử biến thiên độ sâu là một chiều, tức $h = h(x)$, từ phương trình (1.26), phương trình chuyển động là

$$\frac{d}{dx} \left(gh \frac{d\eta}{dx} \right) + \omega^2 \eta = 0. \quad (5.1)$$

Xét một sóng truyền theo chiều dương trục x :

$$\eta = A(\bar{x}) e^{iS(\bar{x})/\mu}, \quad (5.2)$$

ở đây $\bar{x} = \mu x$, với μ – một tham số nhỏ đặc trưng độ nghiêng đáy.

Như trong mục 2.1, ta ký hiệu

$$k(\bar{x}) = \frac{1}{\mu} \frac{dS}{dx} = \frac{dS}{d\bar{x}}. \quad (5.3)$$

Thế các đạo hàm của η vào phương trình (5.1), ta được

$$(-ghk^2 + \omega^2)A + \mu \left\{ g \frac{dh}{d\bar{x}} ikA + gh \left[ik \frac{dA'}{d\bar{x}} + ih \frac{d(kA)}{d\bar{x}} \right] \right\} + \mu^2 \left(g \frac{dh}{d\bar{x}} \frac{dA}{d\bar{x}} + gh \frac{d^2 A}{d\bar{x}^2} \right) = 0.$$

Từ bậc $O(\mu^0)$ quan hệ tản mát sẽ như sau

$$\frac{\omega^2}{g} = k^2 h, \quad (5.4)$$

trong khi từ $O(\mu)$, sau một vài phép toán đơn giản, ta có

$$\frac{d}{dx} (khA^2) = 0$$

do đó

$$(khA^2) = \text{const} \equiv E_0^2 \equiv (khA^2)_{x \rightarrow -\infty}. \quad (5.5)$$

Theo E_0 , nghiệm bậc dẫn đầu sẽ là

$$\eta = \frac{E_0}{(kh)^{1/2}} e^{iS/\mu} = \frac{E_0}{(kh)^{1/2}} \exp \left[\frac{i}{\mu} \int \bar{x} k(\bar{x}) d\bar{x} \right], \quad (5.6)$$

ở đây E_0^2 tỉ lệ thuận với dòng năng lượng của sóng tới từ $x \sim -\infty$.

Ta có thể giả thiết các sóng di chuyển theo cả hai hướng sao cho nghiệm tổng quát là

$$\eta \equiv \frac{1}{(kh)^{1/2}} (E_0 e^{iS/\mu} + F_0 e^{-iS/\mu}),$$

ở đây F_0^2 tỉ lệ với năng lượng sóng tới từ phía phải,

$$F_0^2 = (khA^2)_{x \rightarrow +\infty}$$

Nghiệm (5.6) hoặc (5.7) đều không tính tới sự phản xạ. Bremmer (1951) và các tác giả khác đã có những bổ khuyết thêm cho cách phân tích trên đây với trường hợp phản xạ yếu và trong tình huống vật lý khác; và Ogawa và Yoshida (1959) đã ứng dụng cho các sóng nước nông. Muốn biết tổng quan rất đầy đủ về vấn đề này hãy xem Kajiwara (1961) hoặc Wait (1962). Ở đây, ta sẽ sử dụng cách lập luận của họ.

Bắt đầu từ các phương trình khối lượng và động lượng, để tiện lợi ta định nghĩa $uh = Q$, do đó

$$i\omega\eta = \frac{dQ}{dx}, \quad (5.8)$$

$$i\omega Q = gh \frac{d\eta}{dx}. \quad (5.9)$$

Từ phương trình (5.7) lưu lượng đối với bậc dẫn đầu cho bằng

$$i\omega Q \equiv ig(kh)^{1/2} (E_0 e^{iS/\mu} - F_0 e^{-iS/\mu}), \quad (5.10)$$

bỏ qua số hạng bậc $O(\mu)$. Bây giờ, ta làm theo Bremmer và thế E_0, F_0 trong các phương trình (5.7) và (5.10) bằng hai hàm ẩn E

và F , tức

$$\eta = \frac{1}{(kh)^{1/2}} (E e^{iS/\mu} + F e^{-iS/\mu}), \quad (5.11)$$

$$i\omega Q = ig(kh)^{1/2} (E e^{iS/\mu} - F e^{-iS/\mu}); \quad (5.12)$$

bây giờ những biểu thức này được coi như là các nghiệm chính xác của các phương trình (5.8) và (5.9). Trong khi thế ta được một cặp phương trình mô tả E và F :

$$\frac{dE}{dx} e^{iS/\mu} - \frac{dF}{dx} e^{-iS/\mu} = -\frac{\mu}{(kh)^{1/2}} \frac{d(kh)^{1/2}}{d\bar{x}} (E e^{iS/\mu} - F e^{-iS/\mu}),$$

và

$$\frac{dE}{dx} e^{iS/\mu} - \frac{dE}{dx} e^{-iS/\mu} = \frac{\mu}{(kh)^{1/2}} \frac{d(kh)^{1/2}}{d\bar{x}} (E e^{iS/\mu} + F e^{-iS/\mu}).$$

Các đạo hàm dE/dx và dF/dx có thể được giải ra

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\mu}{(kh)^{1/2}} \frac{d(kh)^{1/2}}{d\bar{x}} F e^{-2iS/\mu}, \quad (5.13a)$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\mu}{(kh)^{1/2}} \frac{d(kh)^{1/2}}{d\bar{x}} E e^{2iS/\mu}, \quad (5.13b)$$

các phương trình này cũng là những phương trình chính xác. Bây giờ ta đưa ra các khai triển nhiễu:

$$E = E_0 + \mu E_1 + \mu^2 E_2 + \dots,$$

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

Thế trực tiếp biểu thức của E và F ta được

$$\frac{dE_0}{dx} = \frac{dF_0}{dx} = 0,$$

$$\frac{dE_{n+1}}{dx} = \left[\frac{d}{d\bar{x}} \ln(kh)^{1/2} \right] F_n e^{-2iS/\mu},$$

và

$$\frac{dF_{n+1}}{dx} = \left[\frac{d}{d\bar{x}} \ln(kh)^{1/2} \right] E_n e^{2iS/\mu},$$

các biểu thức trên có thể tích phân cho kết quả:

$$E_0 = \text{const}, \quad F_0 = \text{const}, \quad (5.14a)$$

$$E_{n+1} = \int_{-\infty}^x \left[\frac{d}{d\bar{x}} \ln(kh)^{1/2} \right] F_n e^{-2iS/\mu} dx, \quad (5.14b)$$

$$F_{n+1} = \int_{\infty}^x \left[\frac{d}{d\bar{x}} \ln(kh)^{1/2} \right] E_n e^{2iS/\mu} dx. \quad (5.14c)$$

Các giới hạn dưới của tích phân được chọn sao cho

$$E_n(-\infty) = 0, \quad F_n(\infty) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Từ giờ trở đi tham số μ có thể đặt bằng đơn vị và \bar{x} khôi phục thành x . Bài toán đã giải xong.

Giả sử một trường hợp cụ thể, lấy $F_0 = 0$ sao cho sóng tới lan từ trái sang phải. Khi đó

$$E = E_0 + \mu E_1 + \mu^2 E_2 + \mu^3 E_3 + \dots, \quad x \sim +\infty \quad (5.15)$$

sẽ biểu diễn sóng truyền qua, trong khi

$$F = \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots, \quad x \sim -\infty \quad (5.16)$$

biểu diễn sóng phản xạ. Đến bậc $O(\mu)$ hệ số phản xạ là

$$R_1 = \left(\frac{F_1}{E_0} \right)_{x \approx -\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{d}{dx} \ln(kh)^{1/2} \right] e^{2iS/\mu}. \quad (5.17)$$

Các tích phân có thể thực hiện bằng một phép cầu phương một khi các giá trị của ω và $h(x)$ được mô tả trước.

Để thấy ý nghĩa vật lý, ta giả sử rằng h hơi khác một hằng h_0 :

$$h = h_0 [1 + q(x)], \quad q \ll 1, \quad (5.18)$$

khi đó

$$\frac{\omega^2}{g} = k^2 h_0 (1 + q),$$

và

$$k = \frac{\omega}{(gh_0)^{1/2}} (1 + q)^{-1/2} \cong k_0 \left(1 - \frac{q}{2} \right)$$

sao cho

$$kh \cong k_0 h_0 \left(1 + \frac{q}{2} \right).$$

Khai triển loga, ta có

$$\frac{d}{dx} \ln(kh)^{1/2} \cong \frac{1}{4} \frac{dq}{dx},$$

và

$$\int_0^x k dx \cong k_0 x.$$

Vậy, với các nhiễu nhỏ, phản xạ xấp xỉ bằng

$$R_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{dq}{dx} e^{2ik_0 x} dx. \quad (5.19)$$

Ta sẽ xét một số trường hợp cụ thể khi độ sâu thay đổi từ một giá trị hằng số này sang một giá trị khác. Nếu độ sâu biến đổi không liên tục một lượng Δh_0 , tức

$$q = \Delta H(x), \quad H(x) = \text{hàm Hevisai} \quad (5.20)$$

trong đó $\delta \ll 1$, ta có

$$R_1 = -\frac{1}{4} \Delta \quad (5.21)$$

là hằng số. Kết quả ở trên cũng có thể rút ra như là giới hạn của phương trình (2.17) mặc dù tính gián đoạn thì không còn tương thích với giả thiết rằng độ sâu biến đổi chậm nữa.

Nếu độ sâu biến đổi một lượng Δ một cách tuyến tính từ

$x = -\frac{1}{2}L$ đến $x = +\frac{1}{2}L$, thì

$$q = \left(\frac{\Delta}{L}\right)x, \quad (5.22)$$

do đó

$$R_1 = -\frac{\Delta}{4} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{e^{2ik_0x} dx}{L} = -\frac{\Delta \sin k_0L}{4 k_0L}; \quad (5.23)$$

R_1 dao động theo k_0L ; đường bao sẽ nhỏ dần khi $k_0L \rightarrow \infty$.

Cuối cùng, nếu sự chuyển tiếp độ sâu vô cùng trơn và có thể mô tả bằng một hàm sai số theo x , thì

$$\frac{d}{dx}q = \frac{\Delta}{\pi^{1/2}L} e^{-x^2/L^2} \quad (5.24)$$

có dạng Gauss, do đó

$$R_1 = -\frac{\Delta}{4\pi^{1/2}L} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/L)^2} e^{2ik_0x} dx = -\frac{\Delta}{4} e^{-k_0^2L^2}. \quad (5.25)$$

Chú ý rằng với trường hợp này R_1 giảm theo hàm mũ theo $(k_0L)^2$.

Các thí dụ trên đây khác nhau rõ rệt về tốc độ giảm theo k_0L ; địa hình trơn hơn sẽ giảm nhanh hơn theo k_0L tăng. Điều này có thể chứng minh một cách tổng quát hơn từ phương trình (5.17) (Felsen và Marcuvitz, 1973). Giả sử h , do đó cả k , chỉ khác hằng số trong khoảng $x_1 < x < x_2$ với $x_2 - x_1 = L$. Ta viết phương trình (5.17) thành

$$R_1 = -\int_{x_1}^{x_2} e^{2iS} \frac{d}{dx} \ln(kh)^{1/2} dx.$$

Nếu dh/dx hữu hạn tại các điểm đầu $x = x_1, x_2$, còn d^2h/dx^2 thì không, ta có thể tích phân từng phần một lần để được

$$R_1 = -\left\{ e^{2iS} \frac{1}{2ik} \left[\frac{d}{dx} \ln(kh)^{1/2} \right] \right\} + \int_{x_1}^{x_2} dx e^{2iS} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2ik} \left[\frac{d}{dx} \ln(kh)^{1/2} \right] \right\}.$$

Từ số hạng tích phân trong phương trình trên, rõ ràng là $R_1 = O(k_0L)^{-1}$, điều này phù hợp với phương trình (5.23). Nếu d^2h/dx^2 hữu hạn tại các đầu, còn d^3h/dx^3 thì không, thì tích phân cuối ở trên có thể được tích phân từng phần một lần nữa để cho một số hạng có bậc $O(k_0L)^{-2}$. Tổng quát hơn, nếu $d^n h/dx^n$ hữu hạn tại cả hai đầu, thì $R_1 = O(k_0L)^{n-1}$. Nếu địa hình vô cùng trơn, tức $x_1 \rightarrow -\infty$ và $x_2 \rightarrow \infty$, thì R_1 suy giảm nhanh hơn bất kỳ lũy thừa số nào của k_0L_0 .

Kết quả nói rằng sự phản xạ phụ thuộc mạnh độ là trơn tại hai điểm gọi tính toán học, vì theo quan điểm vật lý thì một đặc tính địa phương như thế liệu có tác dụng ảnh hưởng mạnh không. Thật vậy, phương trình (5.25) ám chỉ rằng hệ số phản xạ là rất nhỏ đối với địa hình trơn vô hạn. Trong một bài báo với nhiều phép toán phức tạp, Meyer (1979b), không sử dụng phép xấp xỉ WKB, đã cho thấy hệ số phản xạ lại có dạng $\exp[-\alpha(k_0L)^{1/2}]$ cho cả hai trường hợp địa hình lõng (mô tả bằng hàm Gauss) và thềm (dạng mặt cắt tiếp tuyến hyperbolic). Ở đây chúng tôi sẽ không xét tiếp vấn đề này. Bạn đọc quan tâm có thể xem chi tiết trong bài báo của Meyer và trong tài liệu tham khảo.

4.6 SÓNG BỊ BÃY TRÊN LUỒNG ĐẤT ĐỐC

Mục 4.3 đã cho thấy những sóng dạng sin nhất định có thể tồn tại ở một điểm gián đoạn độ sâu, nhưng không thể truyền được từ nước nông ra vùng nước sâu. Ta sẽ nghiên cứu điều gì

sẽ xảy ra trên một miền thêm với hai rìa tại khoảng cách hữu hạn $2a$. Có thể thấy rằng tồn tại những tần số riêng ứng với các hài bị bẫy trên thêm. Những hài này tương tự như cái gọi là “các trạng thái bao” trong cơ học lượng tử và *Love Waves* trong bán không gian co giãn phân lớp. Thực sự là nếu vay mượn các phương pháp của cơ lượng tử (thí dụ, Bohn, 1951), ta có thể phân tích các sóng dài bị bẫy (Snodgrass, Munk, và Miller, 1962; Longuet-Higgins, 1967).

Xét một luống đất có hình dạng như hình 4.1 với $h = h_2$ trên sườn $-a < x < a$; nghiệm tổng quát là

$$\eta_2 = (Be^{i\alpha_2 x} + Ce^{-i\alpha_2 x})e^{i\beta y} \quad (6.1)$$

trong đó $\alpha_2 = (k_2^2 - \beta^2)^{1/2}$. Ta chỉ quan tâm đến nghiệm nào đảm bảo giảm đến không tại vô cùng ở cả hai phía của luống đất; do đó

$$\eta_1 = Ae^{\gamma_1(x+a)}e^{i\beta y}, \quad x < -a, \quad (6.2)$$

và

$$\eta_3 = De^{-\gamma_1(x-a)}e^{i\beta y}, \quad x > a \quad (6.3)$$

trong đó $\gamma_1 = (\beta^2 - k_1^2)^{1/2}$. Giả thiết rằng

$$k_2 > \beta > k_1 \quad \text{hay} \quad \beta(gh_1)^{1/2} > \omega > \beta(gh_2)^{1/2} \quad (6.4)$$

Các hệ số A, B, C và D vẫn là những hệ số bất kỳ. Tính liên tục của η và $h\partial\eta/\partial x$ tại $x = \pm a$ cho ta bốn điều kiện:

$$A = Be^{-i\alpha_2 a} + Ce^{i\alpha_2 a}, \quad (6.5)$$

$$\gamma_1 h_1 A = i\alpha_2 h_2 (Be^{-i\alpha_2 a} - Ce^{i\alpha_2 a}), \quad (6.6)$$

$$D = Be^{i\alpha_2 a} + Ce^{-i\alpha_2 a}, \quad (6.7)$$

$$\gamma_1 h_1 D = i\alpha_2 h_2 (Be^{i\alpha_2 a} - Ce^{-i\alpha_2 a}). \quad (6.6)$$

Để tìm nghiệm không tầm thường thì định thức hệ số của hệ các phương trình (6.5)–(6.8) phải bằng không:

$$(\gamma_1 h_1 - i\alpha_2 h_2)^2 e^{-2i\alpha_2 a} - (\gamma_1 h_1 + i\alpha_2 h_2)^2 e^{2i\alpha_2 a} = 0 \quad (6.9)$$

Phương trình này có thể sắp xếp lại để được

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 a = \frac{2\gamma_1 h_1 \alpha_2 h_2}{(\alpha_2 h_2)^2 - (\gamma_1 h_1)^2}. \quad (6.10)$$

Đặt

$$\frac{\gamma_1 h_1}{\alpha_2 h_2} = \operatorname{tg} \delta, \quad (6.11)$$

khi đó phương trình (6.10) trở thành

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 a = \frac{2\operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg}^2 \delta} = \operatorname{tg} 2\delta,$$

từ đó có

$$\delta = \frac{1}{2}n\pi + \alpha_2 a. \quad (6.12)$$

Lấy tang hai vế phương trình (6.12), ta có

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma_1 h_1}{\alpha_2 h_2} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} \alpha_2 a \\ -\cos \alpha_2 a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n = \text{chẵn} \\ n = \text{lẻ} \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

hay

$$\frac{h_1 (\beta^2 - k_1^2)^{1/2}}{h_2 (k_2^2 - \beta^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(k_2^2 - \beta^2)^{1/2} a \\ -\cos(k_2^2 - \beta^2)^{1/2} a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n = \text{chẵn} \\ n = \text{lẻ} \end{pmatrix}.$$

Vì

$$k_2^2 = \frac{\omega^2}{gh_2} \quad \text{và} \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{gh_1} = \frac{h_2}{h_1} k_2^2$$

phương trình (6.13) có thể được biểu diễn chỉ qua k_2

$$\frac{h_1 [\beta^2 - (h_2/h_1)k_2^2]^{1/2}}{h_2 (k_2^2 - \beta^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}(k_2^2 - \beta^2)^{1/2} a \\ -\cos(k_2^2 - \beta^2)^{1/2} a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n = \text{chẵn} \\ n = \text{lẻ} \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Bằng phép thay các biến

$$\xi = a(k_2^2 - \beta^2)^{1/2} = \alpha_2 a, \quad (6.15)$$

ta được

$$a \left(\beta^2 - \frac{h_2}{h_1} k_2^2 \right)^{1/2} = \left[k_2^2 a^2 \left(1 - \frac{h_2}{h_1} \right) - \xi^2 \right]^{1/2}$$

và do đó phương trình (6.14) trở thành

$$\frac{(h_2/h_1)\xi}{(\xi_*^2 - \xi^2)^{1/2}} = \begin{pmatrix} \text{ctg } \xi \\ -\text{tg } \xi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n = \text{chẵn} \\ n = \text{lẻ} \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

với

$$\xi_*^2 = k_2^2 a^2 \left(1 - \frac{h_2}{h_1} \right) = \frac{(\omega a)^2}{g h_2} \left(1 - \frac{h_2}{h_1} \right). \quad (6.17)$$

Với ω và dạng hình học cho trước, thì ξ_* là cố định; ξ được giải ra từ phương trình (6.16), và số sóng riêng α_2 rút ra từ phương trình (6.15). Ta xét riêng rẽ các trường hợp n lẻ và chẵn.

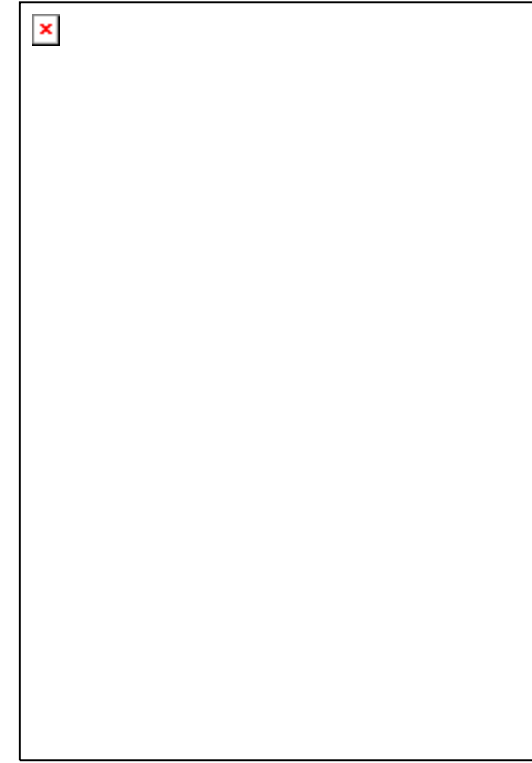
n lẻ: Các giá trị riêng có thể tìm bằng phương pháp đồ thị và nó tương ứng với các giao điểm của đường cong $y_1 = \text{tg } \xi$ với đường cong

$$y_2 = -\frac{h_2}{h_1} \frac{\xi}{(\xi_*^2 - \xi^2)^{1/2}}$$

(hình 6.1a). Đường cong $y_2(\xi)$ là hàm lẻ theo ξ , đi qua gốc tọa độ và tiến đến $\pm\infty$ khi ξ tiến đến $\pm\xi_*$.

Từ cùng hình vẽ đó, thấy rõ rằng nghiệm sẽ ở chỗ các cặp điểm $\pm\xi_n$ và ta chỉ cần xét $+\xi_n$. Với $\frac{1}{2}\pi < \xi_* < \frac{3}{2}\pi$ thì có một hài với $\frac{1}{2}\pi < \xi_1 < \pi$. Với $\frac{3}{2}\pi < \xi_* < \frac{5}{2}\pi$, có hai hài ξ_1 và ξ_3 với $\frac{3}{2}\pi < \xi_3 < 2\pi$. Nói chung, nếu $(n - \frac{1}{2})\pi < \xi_* < (n + \frac{1}{2})\pi$, thì có n hài $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2n-1}$ (n lẻ) với nghiệm thứ m nằm trong khoảng

$$(m - \frac{1}{2})\pi < \xi_m < m\pi.$$



Hình 6.1. Nghiệm đồ thị của các giá trị riêng: a) n lẻ, b) n chẵn

Như vậy, có một hài mới bị bẫy mỗi lần ξ_* tăng một lượng bằng π , có thể nhận được bằng cách tăng ωa hoặc giảm độ sâu thêm h_2 với h_2/h_1 cố định.

n chẵn: Ta cần khảo sát các giao điểm của $y_1 = \cos \xi$ với

$$y_2 = \frac{h_2}{h_1} \frac{\xi}{(\xi_*^2 - \xi^2)^{1/2}}.$$

Các điểm cắt biểu diễn trên hình 6.1b. Với $0 < \xi_* < \pi$, có một hài bẫy, $\pm\xi_0$ với $0 < \xi_0 < \frac{1}{2}\pi$; với $\pi < \xi_* < 2\pi$ có hai hài $\pm\xi_0$ và $\pm\xi_2$, với $\pi < \xi_2 < \frac{3}{2}\pi$. Nói chung, với $(n+1)\pi < \xi_* < n\pi$ thì có $n+1$

hài: $\xi_0, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$.

Tóm lại, các nghiệm ξ_n tạo thành một chuỗi $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots$; các số sóng riêng tương ứng cũng tạo thành một dãy tăng dần $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$.

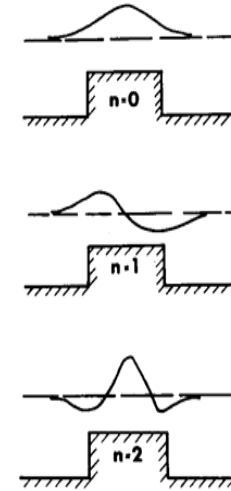
Vậy hình dạng mặt tự do của các hài này như thế nào? Từ các phương trình (6.5) và (6.6), ta có

$$\begin{aligned} \frac{B}{C} &= -e^{2i\alpha_2 a} \left(\frac{\gamma_1 h_1 + i\alpha_2 h_2}{\gamma_1 h_1 - i\alpha_2 h_2} \right) = -e^{2i\alpha_2 a} \frac{\operatorname{tg}\delta + i}{\operatorname{tg}\delta - i} = \\ &= e^{2i\alpha_2 a} \frac{\cos\delta - i \sin\delta}{\cos\delta + i \sin\delta} = e^{2i(\alpha_2 a - \delta)} = e^{in\pi} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Dấu bằng cuối cùng được suy ra từ phương trình (6.12). Với n chẵn, $B = C$; từ các phương trình (6.5) và (6.7), $A = D$, và li độ tỉ lệ với $\cos\alpha_2 x$, xem các phương trình (6.1)–(6.3). Do đó n chẵn tương ứng với một hài chẵn. Tương tự, với n lẻ, $B = -C$ và $A = -D$; li độ tỉ lệ với $\sin\alpha_2 x$ và lẻ theo x . Một số hài đầu tiên được phác họa trên hình 6.2.

Các hài chẵn có thể xem như là các hài bẫy trên thêm lục địa lí tưởng hoá với độ rộng a và đường bờ tại $x=0$. Nhằm mô phỏng gần đúng thêm California, Miles (1972) đã lấy $h_2 = 600$ m, $h_1 = 3600$ m và $\xi_* = 2,19\pi$, với $a = 70$ km, sẽ tương ứng với $T = 2\pi/\omega = 27,78$ phút $= \frac{1}{6} \times 10^4$ s. Ba hài bẫy là tại $\xi_0 \cong \pi/2$, $\xi_2 \cong 1,45\pi$ và $\xi_4 \cong 2,15\pi$, do đó $2\pi/\alpha_0 = 280$ km, $2\pi/\alpha_2 = 96$ km và $2\pi/\alpha_4 = 65$ km, những giá trị này rất quan trọng để gây cộng hưởng dao động gọi là dao động Helmholtz trong cảng – đây là chủ đề sẽ thảo luận trong chương tiếp sau. Với cùng những giá trị của ω và β , không có nghiệm nào tương ứng với giá trị ảo γ_1 ; không thể có sự lan truyền sóng theo hướng x . Từ đó suy ra rằng các sóng tới dạng sin không thể kích hoạt những sóng bẫy trên một luống đất hay một thêm dài vô hạn có độ rộng hữu hạn theo

lý thuyết tuyến tính hoá. Tuy nhiên, sự kích hoạt lại có thể xảy ra bởi các sóng cực ngắn, ứng lực gió trên luống (hoặc thêm) độ dài hữu hạn. Hơn nữa, phải tính tới những cơ chế kích hoạt phi tuyến.



Hình 6.2. Các hài bẫy trên một luống đất

Bài tập 6.1: Các sóng bị bẫy trên dòng chảy dạng tia

Trong chương 3, sự hiện diện của dòng chảy biến thiên đã được xem giống như là độ sâu biến đổi ảnh hưởng đến các sóng. Hãy khảo sát các sóng dài nước nông trên dòng chảy mạnh $U = 0$, $V = V(x)$, trên biển độ sâu biến đổi $z = -h(x)$. Chứng minh rằng các phương trình nhiễu động sóng sẽ là

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial uh}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_y = -g \nabla \zeta, \quad (6.20)$$

trong đó dòng thành đứng bằng không.

Giải sử

$$\begin{pmatrix} \zeta(x, y, t) \\ u(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\zeta}(x) \\ \bar{u}(x) \end{pmatrix} e^{i(\beta y - \omega t)}, \quad (6.21)$$

và chúng tỏ rằng

$$(h \bar{\zeta}')' + \frac{2\beta V'}{\omega - \beta V} \bar{\zeta}' + \left[\left(\frac{\omega - \beta V}{g} \right)^2 - \beta^2 h \right] \bar{\zeta} = 0. \quad (6.22)$$

Như vậy, nếu $V(x) > 0$ trong khoảng hữu hạn $|x| < a$ và triệt tiêu ở ngoài khoảng, và nếu $\beta < 0$ (các sóng truyền ngược dòng chảy), thì những sóng nào thoả mãn điều kiện

$$\frac{\omega^2}{gh} < \beta^2 < \frac{(\omega - \beta V)^2}{gh} \quad (6.23)$$

sẽ bị bẫy trong dòng chảy.

Với trường hợp cụ thể $h = \text{const}$ với mọi x , $V = \text{const}$ nếu $|x| < a$ và $V = 0$ nếu $|x| > a$, hãy nghiên cứu các giá trị riêng β của các sóng bị bẫy, đồng thời phân tích vấn đề tản mát khi $\beta^2 < \omega^2 / gh$.

4.7 MỘT SỐ ĐẶC ĐIỂM CHUNG CỦA CÁC BÀI TOÁN MỘT CHIỀU – CÁC HÀI BẦY VÀ MA TRẬN TẢN MÁT

4.7.1 Nhận xét định tính về các sóng bẫy

Ta xét sự tồn tại của các hài bẫy trong trường hợp địa hình một chiều liên tục $h = h(x)$ về mặt định tính. Thay thế $\zeta = X(x) \exp[i(\beta y - \omega t)]$ vào trong phương trình (1.5), ta được

$$(hX')' + \left(\frac{\omega^2}{g} - \beta^2 h \right) X = 0. \quad (7.1)$$

Có thể nghiên cứu những đặc điểm định tính trong cái gọi là mặt phẳng pha của X và Y , trong đó Y được định nghĩa bằng

$$Y = hX' \quad \text{hay} \quad X' = \frac{1}{h} Y. \quad (7.2)$$

Phương trình (7.2) có thể được viết lại

$$Y' + \left(\frac{\omega^2}{g} - \beta^2 h \right) X = 0. \quad (7.3)$$

Chia (7.3) cho (7.2) được

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-(\omega^2 / g - \beta^2 h) X}{(1/h) Y}, \quad (7.4)$$

đây là phương trình bậc nhất theo X và Y với x như là tham số. Trong mặt phẳng pha nghiệm của phương trình (7.4) được biểu diễn bằng một quỹ đạo. Giả sử $h(x)$ tiến đến một hằng hữu hạn tại vô cùng, tức

$$h(x) \rightarrow h_\infty, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

và giả thiết thêm rằng

$$\beta^2 h_0 < \frac{\omega^2}{g} < \beta^2 h_\infty \quad (7.5)$$

sao cho có hai điểm (x_1, x_2) tại đó

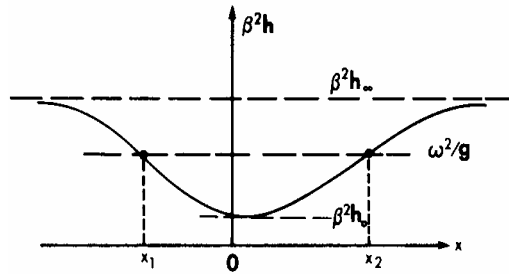
$$\frac{\omega^2}{g} = \beta^2 h(x_l), \quad l = 1, 2$$

(xem hình 7.1). Trong lý thuyết phương trình vi phân, hai điểm này được gọi là các điểm uốn, trên hai phía đối lập của các điểm này nghiệm sẽ có hành vi khác nhau. Trong khoảng $x > x_2$ và $x < x_1$, thừa số $h(\omega^2 / g - \beta^2 h)$ âm, và nghiệm $X(x)$ biến thiên đơn điệu theo x . Đặc biệt, với x lớn

$$h \left(\beta^2 h - \frac{\omega^2}{g} \right) \rightarrow h_\infty \left(\beta^2 h_\infty - \frac{\omega^2}{g} \right) \equiv h_\infty H^2 > 0.$$

do đó $X \propto e^{-H|x|}$. Trong mặt phẳng pha điểm nghiệm (X, Y) tiến

tới gốc tọa độ khi $x \rightarrow \mp\infty$ dọc các đường thẳng $Y = \pm Hh_{\infty}^{1/2} X$, đó là các tích phân dạng giới hạn của phương trình (7.4). Trong khoảng $x_1 < x < x_2$, hệ số $h(\omega^2/g - \beta^2 h)$ dương và nghiệm $X(x)$ về tổng quát sẽ dao động theo x . Quĩ đạo trong mặt phẳng pha có thể lượn vòng quanh gốc tọa độ và cắt các trục X và Y . Một số nghiệm có thể có được vẽ trên hình 7.2 cho cả mặt phẳng pha và mặt phẳng tự nhiên. Như vậy, mặt nổi sóng chỉ tồn tại trong khoảng (x_1, x_2) và giảm theo hàm mũ ở ngoài khoảng; đó chính là các đặc trưng của các sóng bẫy. Nếu $\omega^2/g > \beta^2 h_{\infty}$, sẽ không có một vùng biến thiên đơn điệu nào và toàn bộ chất lỏng có thể có chuyển động dạng sóng; các sóng không bị bẫy nữa. Nếu $\omega^2/g < \beta^2 h_0$, không ở đâu có sóng điều hoà.



Hình 7.1. Thay đổi của $\beta^2 h$ theo x trên một sóng đất ngầm

4.7.2 Ma trận tán mát $[S(\alpha)]$

Xét sóng tới xiên góc trên luống đất ngầm với $h(x) \rightarrow h_{\infty}$ khi $|x| \rightarrow \infty$. Ta viết lại phương trình (7.1)

$$(aX')' + \left(\frac{\omega^2}{gh_{\infty}} - \beta^2 a \right) X = 0 \quad \text{với} \quad a(x) = \frac{h}{h_{\infty}}, \quad (7.6a)$$

hay, vì $\omega^2/gh_{\infty} = \alpha^2 + \beta^2$,

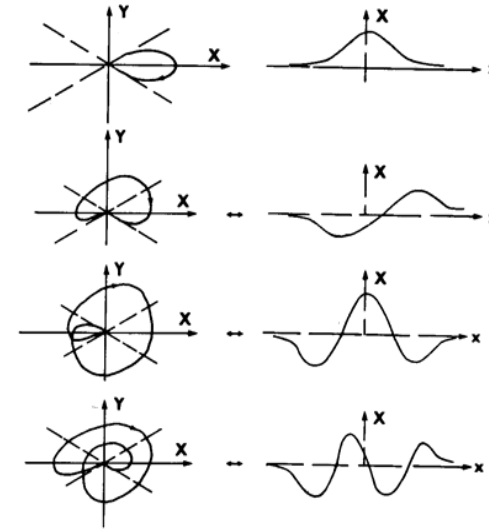
$$(aX')' + [\alpha^2 + \beta^2(1-a)]X = 0, \quad (7.6b)$$

đây là phương trình Sturm – Liouville. Bằng biến đổi $X = a^{-1/2}\xi$, phương trình (7.6b) trở thành phương trình không phụ thuộc vào thời gian Schrodinger trong cơ học lượng tử:

$$\xi'' + [\lambda - U(x)]\xi = 0,$$

trong đó

$$\lambda = -\beta^2, \quad -U = h^{-1} \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{3}{4} \frac{h'^2}{h} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h} - \frac{h''}{h} \right).$$



Hình 7.2. Các quỹ đạo nghiệm trong mặt phẳng pha (bên trái) và mặt tự do tương ứng (bên phải) cho một số hài bẫy đầu tiên. Các đường gạch nối trong các mặt phẳng pha là $Y = \pm Hh_{\infty}^{1/2} X$. Các mũi tên dọc theo các đường cong chỉ hướng tăng của x

Rất nhiều tính chất chung các phương trình Schrodinger đã quen thuộc trong lý thuyết phân tán lượng tử. Ta sẽ chỉ thảo luận một vài tính chất trong số đó liên quan tới phương trình (7.6). Để nghiên cứu kỹ hơn nên tham khảo Roseau (1952) và Sitenko (1971).

Xét bài toán tán mát tổng quát có diễn biến tiệm cận như sau:

$$X \sim A_- e^{i\alpha x} + B_- e^{-i\alpha x}, \quad x \sim -\infty, \quad (7.7a)$$

$$\sim A_+ e^{i\alpha x} + B_+ e^{-i\alpha x}, \quad x \sim +\infty. \quad (7.7b)$$

Vậy A_- và B_+ tuân tự ứng với các sóng tới từ phía trái và phía phải; A_+ và B_- tuân tự ứng với các sóng phân tán hướng về phía phải và phía trái.

Ta cũng định nghĩa $f_1(x, \alpha)$ là nghiệm của bài toán phân tán sang trái:

$$f_1(x, \alpha) \sim \frac{1}{T_1} e^{i\alpha x} + \frac{R_1}{T_1} e^{-i\alpha x}, \quad x \sim -\infty, \quad (7.8a)$$

$$\sim +\infty \sim +\infty \quad (7.8b)$$

và $f_2(x, \alpha)$ là nghiệm của bài toán phân tán sang phải:

$$f_2(x, \alpha) \sim e^{-i\alpha x}, \quad x \sim -\infty \quad (7.9a)$$

$$\sim \frac{1}{T_2} e^{-i\alpha x} + \frac{R_2}{T_2} e^{i\alpha x}, \quad x \sim +\infty. \quad (7.9b)$$

Trong cơ học lượng tử f_1 và f_2 được gọi là các hàm Jost. Bây giờ các hàm f_1 và f_2 là những nghiệm độc lập tuyến tính vì các toán tử Wronksian của chúng

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2) &\equiv f_1 f_2' - f_2 f_1' = -\frac{2i\alpha}{T_1} \quad (\text{từ } x \sim -\infty) \\ &= -\frac{2i\alpha}{T_2} \quad (\text{từ } x \sim +\infty) \end{aligned}$$

nói chung không triệt tiêu. Phương trình trên ngụ ý là

$$T_1 = T_2, \quad (7.10)$$

tức các hệ số truyền qua bên phải và bên trái bằng nhau ngay cả khi $h(x)$ không đối xứng. Ngoài ra, vì không phụ thuộc tuyến tính giữa f_1 và f_2 ta có thể biểu diễn X trong phương trình

(7.7) bằng tổ hợp tuyến tính

$$X = Cf_1 + Df_2. \quad (7.11)$$

So sánh các giá trị tiệm cận của các phương trình (7.11) và (7.7), ta có

$$\frac{C}{T_1} = A_-, \quad C \frac{R_1}{T_1} + D = B_-,$$

$$C + \frac{R_2}{T_2} = A_+, \quad D \frac{1}{T_2} = B_+.$$

A_+ và B_- có thể giải ra bằng cách khử C và D :

$$A_+ = T_1 A_- + R_2 B_+, \quad B_- = R_1 A_- + T_2 B_+$$

và kết quả này có thể biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ B_- \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} A_- \\ B_+ \end{pmatrix} \quad (7.12a)$$

với

$$[S] = \begin{bmatrix} T_1 & R_2 \\ R_1 & T_2 \end{bmatrix}. \quad (7.12b)$$

Như trước đây, $[S]$ là ma trận tán mát hay ma trận S – là tổng quát hoá của các phương trình (2.13) và (2.15) cho dạng độ sâu cụ thể.

4.7.3 Các hài bẫy như là những cực ảo của $[S(\alpha)]$

Trong kết quả đối với thêm hình chữ nhật, giả sử ta thay $\gamma_1 = -i\alpha_1$ sao cho điều kiện giá trị riêng (6.9) trở thành

$$(1+s)^2 e^{-2i\alpha_2 a} - (1-s)^2 e^{2i\alpha_2 a} = 0 \quad \text{với } s = \frac{\alpha_1 h_1}{\alpha_2 h_2}.$$

Nếu xét tới các phương trình (4.21) và (4.22), phương trình trên tương đương với sự triệt tiêu các mẫu số của R và T trong bài toán phân tán, tức các hài bẫy sẽ ứng với các cực ảo dương của

R và T trong mặt phẳng phức α . Vậy hai bài toán khác nhau có thể kết nối lại về toán học hay không, đó là vấn đề đáng tò mò. Bây giờ ta đưa ra lý thuyết cho độ sâu tùy ý $h(x)$ với $h \rightarrow \infty$ khi $|h| \rightarrow \infty$.

Các nghiệm Jost $f_1(x, \alpha)$ và $f_2(x, -\alpha)$ độc lập tuyến tính vì toán tử Wronskian của chúng

$$W[f_1(x, \alpha), f_1(x, -\alpha)] = f_1(x, \alpha)f_1'(x, -\alpha) - f_1(x, -\alpha)f_1'(x, \alpha) = -2i\alpha$$

không triệt tiêu sau khi sử dụng các giá trị tiệm cận tại $x \sim +\infty$. Nghiệm tùy ý thí dụ như $f_2(x, \alpha)$ có thể biểu diễn bằng một tổ hợp tuyến tính của $f_1(x, \alpha)$ và $f_1(x, -\alpha)$. Xét diễn biến tại $x \sim \infty$, dễ dàng thấy rằng

$$f_2(x, \alpha) = \frac{R_2}{T_2} f_1(x, \alpha) + \frac{1}{T_2} f_1(x, -\alpha),$$

hay

$$T_2 f_2(x, \alpha) = R_2 f_1(x, \alpha) + f_1(x, -\alpha). \quad (7.13)$$

Đạo hàm các phương trình trên theo x , ta có

$$T_2 f_2'(x, \alpha) = R_2 f_1'(x, \alpha) + f_1'(x, -\alpha). \quad (7.14)$$

Ta giải T_2 và R_2 từ các phương trình (7.13) và (7.14):

$$T_2 = -\frac{2i\alpha}{W\{f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)\}},$$

$$R_2 = -\frac{W\{f_1(x, -\alpha), f_2(x, \alpha)\}}{W\{f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)\}}.$$

Nếu có các cực đối với T_2 , thì chúng phải ứng với các giá trị không của:

$$W\{f_1(x, \alpha), f_2(x, \alpha)\} = 0.$$

Giả sử các cực được ký hiệu là α_n . Thứ nhất, chúng cũng phải là các cực của R_2 , do đó của $[S(\alpha)]$. Thứ hai, tại các cực này

$1/T_2 = 0$ và $R_2/T_2 =$ hữu hạn, thành thử f_2 có dáng tiệm cận

$$f_2 \sim e^{-i\alpha_n x}, \quad x \sim -\infty,$$

$$\sim \left(\frac{R_2}{T_2}\right)_{\alpha_n} e^{i\alpha_n x}, \quad x \sim +\infty. \quad (7.15)$$

Giả sử rằng các cực này phức với các phần ảo dương sao cho f_2 giảm theo hàm mũ tới không khi $|x| \rightarrow \infty$, tức

$$\alpha_n = \delta_n + i\gamma_n, \quad \gamma_n > 0.$$

Từ phương trình (7.6) dễ dàng rút ra

$$[a(XX^* - X^*X')] = 2i(\text{Im}\alpha^2)|X|^2. \quad (7.16)$$

Bây nếu cho $X = f_2$, tích phân hai vế của (7.16) từ $-\infty$ đến ∞ và sử dụng tính biến thiên kiểu hàm mũ tại $|x| \rightarrow \infty$, ta được

$$\text{Im}\alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f_2|^2 dx = 0,$$

tức:

$$\text{Im}\alpha_n^2 = 0 \quad \text{hay} \quad \delta_n = 0 \quad (7.17)$$

Vậy, các cực ảo hoàn toàn và các hài bẫy giảm đơn điệu tại x lớn.

Với một giá trị riêng như $\alpha_n = i\gamma_n$, hàm riêng X có thể lấy bằng thực. Nhân phương trình (7.6a) với X và tích phân từng phần, ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(X')^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\beta^2 a - \frac{\omega^2}{gh_\infty} \right) X^2 dx = 0.$$

Vì $(\beta^2 a - \omega^2/gh_\infty) \rightarrow (\beta^2 - \omega^2/gh_\infty) > 0$ khi $x \rightarrow \pm\infty$, đẳng thức trên có nghĩa rằng $(\beta^2 a - \omega^2/gh_\infty) < 0$ cho một khoảng x nào đó; nói cách khác X tầm thường bằng 0. Điều kiện tồn tại của các hài bẫy (7.5) một lần nữa được khẳng định.

4.7.4 Các tính chất của $[S(\alpha)]$ với α thực

Trở lại phương trình (7.7) với bài toán tán mát, bây giờ ta khảo sát một số tính chất khác của ma trận S . Xét α thực, từ các phương trình (7.6) và liên hợp phức của nó, có thể chỉ ra rằng

$$a (XX^* - X^*X') = \text{const}. \quad (7.18)$$

Cho bằng nhau các giá trị tiệm cận của vế trái tại $x \sim -\infty$ và $x \sim +\infty$, ta được

$$|A_+|^2 + |B_-|^2 = |A_-|^2 + |B_+|^2, \quad (7.19)$$

biểu thức này nói rằng năng lượng của các sóng tới bằng năng lượng của các sóng đi ra. Nếu tính tới phương trình (7.12a), phương trình (7.19) có thể viết thành

$$|A_+|^2 + |B_-|^2 = \{A_+, B_-\} \begin{Bmatrix} A_+^* \\ B_-^* \end{Bmatrix} = \{A_-, B_+\} [S]^T [S^*] \begin{Bmatrix} A_-^* \\ B_+^* \end{Bmatrix}, \quad (7.19)$$

trong đó $[S]^T$ – ma trận chuyển vị của $[S]$. Suy ra

$$[S]^T [S^*] = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.20)$$

được gọi là tính chất đơn vị của ma trận S . Theo định nghĩa của $[S]$, phương trình (7.20) có nghĩa rằng

$$\begin{bmatrix} T_1 & R_1 \\ R_2 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^* & R_2^* \\ R_1^* & T_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

từ đây nhận được ba quan hệ độc lập:

$$|T_1|^2 + |R_1|^2 = 1, \quad (7.22a)$$

$$|T_2|^2 + |R_2|^2 = 1, \quad (7.22b)$$

$$T_1 R_2^* + R_1 T_2^* = 0. \quad (7.22c)$$

Các phương trình (7.22a) và (7.22c) một lần nữa biểu diễn sự bảo toàn năng lượng. Theo phương trình (7.10), phương trình

(7.22c) có nghĩa rằng

$$|R_1| = |R_2|. \quad (7.23)$$

Từ các phương trình (7.7), biến thiên tiệm cận của liên hợp phức của X là:

$$X^* \sim A_-^* e^{-i\alpha x} + B_+^* e^{i\alpha x}, \quad x \sim -\infty, \quad (7.24a)$$

$$\sim A_+^* e^{-i\alpha x} + B_-^* e^{i\alpha x}, \quad x \sim +\infty, \quad (7.24b)$$

So sánh với các phương trình (7.7), rõ ràng là $A_-^*, B_-^*, A_+^*, B_+^*$ có thể được thế tuần tự cho B_-, A_-, B_+, A_+ , do đó phương trình (7.12a) có thể được viết lại

$$\begin{Bmatrix} B_+^* \\ A_-^* \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} B_-^* \\ A_+^* \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

hay

$$\begin{Bmatrix} B_+^* \\ A_-^* \end{Bmatrix} = [S^*] \begin{Bmatrix} B_-^* \\ A_+^* \end{Bmatrix}. \quad (7.25b)$$

Mặt khác, ta viết lại nghiệm X – các phương trình (7.7) như sau

$$X \sim B_- e^{-i(-\alpha)x} + A_- e^{-i(-\alpha)x}, \quad x \sim -\infty, \quad (7.26a)$$

$$B_+ e^{i(-\alpha)x} + A_+ e^{-i(-\alpha)x}, \quad x \sim +\infty, \quad (7.26b)$$

nó được xem như là bài toán với ω được thay bằng $(-\omega)$, và α được thay bằng $-\alpha$. Bây giờ B_- và A_+ là các sóng tới và A_- và B_+ là các sóng đi ra. Bằng cách tương tự đối với phương trình (7.12) ta có

$$\begin{Bmatrix} B_+ \\ A_- \end{Bmatrix} = [S(-\alpha)] \begin{Bmatrix} B_- \\ A_+ \end{Bmatrix}. \quad (7.27)$$

Khi so sánh các phương trình (7.25b) và (7.27), ta đi đến kết luận

$$[S^*(\alpha)] = [S(-\alpha)]. \quad (7.28)$$

Tóm lại, phương trình (7.18) là hệ quả của công thức Green, đã dẫn đến những thông tin quan trọng về các trường phía xa. Cách tiếp cận này sẽ được khai thác thêm trong chương 7.

Bài tập 7.1

Xét một kênh có mặt cắt ngang biến đổi chỉ trong một phần hữu hạn của x và có độ rộng, độ sâu hằng số tại vô cùng: $(b, h) \rightarrow (b_1, h_1)$ khi $x \sim -\infty$, và $\rightarrow (b_2, h_2)$ khi $x \rightarrow +\infty$. Lấy (R_1, T_1) và (R_2, T_2) là các hệ số tán mát trái và phải. Chứng minh rằng

$$k_1 A_1 (1 - |R_1|^2) = k_2 A_2 |T_1|^2, \quad \text{trong đó} \quad A_1 = b_1 h_1 \quad \text{và} \quad A_2 = b_2 h_2 \quad (7.29a)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1 A_1}{k_2 A_2} \quad (7.29b)$$

và

$$|R_1| = |R_2|, \quad (7.30a)$$

$$|T_1 T_2| = 1 - |R_2|^2. \quad (7.30b)$$

4.8 CÁC SÓNG RÌA TRÊN NỀN ĐỘ DỐC KHÔNG ĐỔI

Như là một trường hợp cụ thể của độ sâu biến đổi liên tục, ta xét một bãi biển thẳng dài với độ nghiêng không đổi (Eckart, 1951). Đặt đường bờ trung bình trùng với trục y và vùng nước nằm trong miền $x > 0$. Đáy được mô tả bằng

$$z = -h = -sx, \quad x > 0, s = \text{const}. \quad (8.1)$$

Vì các hệ số là hằng số theo trục y và t , ta thử tìm nghiệm dưới dạng:

$$\zeta = \eta(x) e^{i(By - \omega t)}. \quad (8.2)$$

Phương trình (1.9) cho

$$x\eta'' + \eta' + \left(\frac{\omega^2}{sg} - \beta^2 x \right) \eta = 0. \quad (8.3)$$

Sử dụng phép chuyển đổi

$$\xi = 2\beta x, \quad \eta = e^{-\xi/2} f(\xi), \quad (8.4)$$

phương trình (8.3) được viết lại thành

$$\xi f'' + (1 - \xi) f' + \left[\frac{\omega^2}{2\beta sg} - \frac{1}{2} \right] f = 0, \quad (8.5)$$

phương trình này thuộc lớp các phương trình hypergeometric (xem thêm về phương trình Kummer, trong (Abramowitz và Stegun, 1972)). Trường hợp tổng quát sẽ có hai nghiệm, một trong số đó là nghiệm đơn tại đường bờ $\xi = 0$ và phải loại bỏ. Các nghiệm không tầm thường làm cho η hữu hạn tại $\xi = 0$ và bằng không khi $\xi \rightarrow \infty$ tồn tại khi ω ứng với những giá trị rời rạc sau:

$$\frac{\omega^2}{2\beta sg} = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.6)$$

Các hàm riêng liên quan tỉ lệ với các đa thức Laguerre

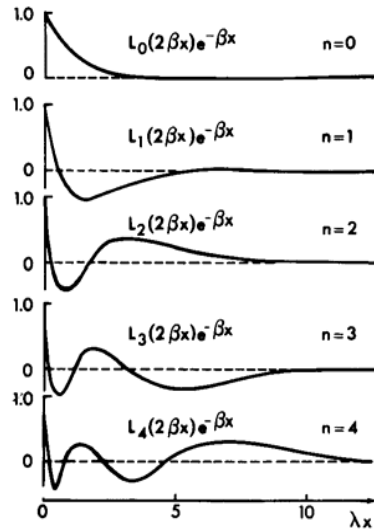
$$L_n(\xi) = \frac{(-)^n}{n!} \left[\xi^n - \frac{n^2}{1!} \xi^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} \xi^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{3!} \xi^{n-3} + \dots + (-)^n n! \right]; \quad (8.7)$$

thí dụ, $L_0 = 1, L_1 = 1 - \xi, L_2 = 1 - 2\xi + \frac{1}{2}\xi^2, \dots$ Một số ít hài đầu tiên được vẽ trên hình 8.1, hài bậc càng cao thì càng giảm nhanh hơn theo hướng ra khơi. Vì các hàm riêng này ứng với các hài nào chỉ phù hợp với vùng gần bờ, nên chúng được gọi là các sóng rìa (*edge waves*). Các hàm riêng này trực giao theo nghĩa sau

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} L_n L_m d\xi = \delta_{nm} . \quad (8.8)$$

Với $m = n$ phương trình (8.8) sẽ nói lên rằng mỗi hài có một năng lượng hữu hạn.

Các sóng rìa được quan tâm trong hải dương học vùng bờ vì chúng có biên độ lớn nhất, do đó gây nước dâng mạnh nhất ở bờ. Người ta cũng cho rằng các sóng này là nguyên nhân gây ra các dòng chảy gián đoạn trong vùng ven bờ khi đổ nhào các sóng ngắn hơn. Stokes (1847) đã phát hiện các sóng rìa như vậy với các bãi biển có góc nghiêng lớn, còn Ursell (1952) phát hiện phổ đầy đủ gồm cả phần gián đoạn và liên tục các sóng rìa.



Hình 8.1 Trắc diện của một số hài sóng rìa

Trong tự nhiên tồn tại một số cơ chế phát sinh các sóng rìa. Ở qui mô lớn (bước sóng điển hình 200 hải lý, chu kỳ 6 giờ, biên độ 3 foot) sóng rìa có thể gây bởi ứng lực gió trực tiếp lên mặt nước. Munk, Snodgrass, Carrier (1956) và Greenspan (1958) đã nghiên cứu hiệu ứng biến thiên khí áp khi bão di chuyển song

song bờ; kết quả của họ thích hợp với sóng bão. Sóng rìa qui mô nhỏ hơn có thể được kích hoạt bởi một cơ chế cộng hưởng phi tuyến các hài thành phần (Guza và Bowen, 1976; Minzoni và Whitham, 1977), vấn đề này sẽ xét ở chương 7. Sóng rìa qui mô vừa, chu kỳ 1–5 phút, có thể cũng do nhóm các sóng lừng ngắn kích hoạt thông qua cơ chế phi tuyến và sẽ được xét ở chương 12.

4.9 CÁC ĐƯỜNG ĐẲNG SÂU DẠNG CUNG TRÒN

4.9.1 Những nét chung

Dạng phức tạp hơn so với các đường đẳng sâu thẳng và song song là loại địa hình với các đường đẳng sâu tròn đồng tâm. Trong hệ tọa độ cực (r, θ) , $h = h(r)$; phương trình sóng dài trở thành

$$\nabla^2 \eta + \frac{h'}{h} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\omega^2}{gh} \eta = 0, \quad (9.1)$$

với

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (9.2)$$

Xét

$$\eta = R(r) e^{i(n\theta - \omega t)} \quad (9.3)$$

với n – nguyên, sao cho R thỏa mãn

$$R'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) R' + \left(\frac{\omega^2}{gh} - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (9.4)$$

hay

$$(h r R')' + \left(\frac{\omega^2}{g} - \frac{n^2 h}{r^2} \right) r R = 0. \quad (9.4')$$

Bây giờ diễn biến của R sẽ là dạng hàm mũ hay dạng dao động

thuỷ thuộc

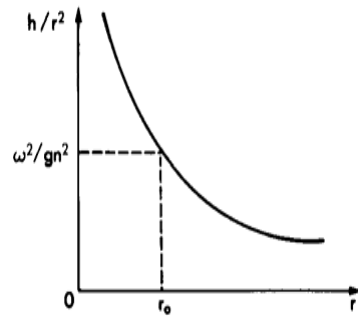
$$\frac{\omega^2}{gn^2} > \frac{h}{r^2} \text{ dạng dao động} \quad (9.5)$$

$$\frac{\omega^2}{gn^2} < \frac{h}{r^2} \text{ dạng hàm mũ}$$

Xét một đảo ngầm với độ sâu h tăng đơn điệu $0 < h(0) < h(r) < h(\infty)$. Với n cố định, h/r^2 diễn biến như trên hình 9.1. Nghiệm là dao động ở phía ngoài đường tròn tới hạn $r = r_0$ với

$$\frac{\omega^2}{g} = \left(\frac{n^2 h}{r^2} \right), \quad r = r_0. \quad (9.6)$$

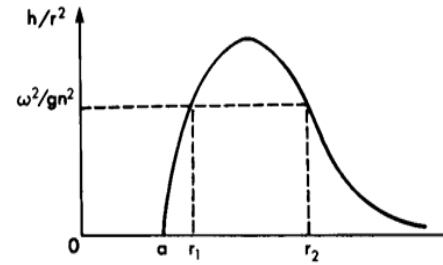
So sánh với địa hình một chiều, thừa số $1/r^2$ thay đổi hẳn tình hình và không còn hiện tượng bẫy sóng hoàn chỉnh nữa.



Hình 9.1 Biến thiên h/r^2 theo r với đảo ngầm

Xét đảo với bờ tại $r = a$, sao cho $h(r) = 0$ khi $0 < r < a$ và tăng đơn điệu khi $r > a$. Khi đó, $n^2 h/r^2$ biến thiên như trên hình 9.2. Với $\omega^2/gn^2 < \max(h/r^2)$, mặt tự do sẽ có dạng dao động ở gần bờ $a < r < r_1$, có dạng giảm theo hàm mũ trong vùng $r_1 < r < r_2$ và lại có dạng dao động ở phía ngoài ($r > r_2$). Do đó, đáy nghiêng của đảo có vai trò như một vật chắn độ dày hữu hạn để bẫy các sóng có tần số đủ thấp, hoặc các sóng tần số ω cố định, nhưng n đủ lớn. Với n lớn, vật chắn tỏ ra dày hơn và hiệu quả hơn trong việc bẫy năng lượng, tức ít rò rỉ năng lượng hơn. Những hiện

tượng này có hệ quả quan trọng đối với sự cộng hưởng của các sóng bẫy trên các mũi đất ngầm khi các sóng tới từ phía ngoài.



Hình 9.2 Biến thiên h/r^2 theo r với đảo có bán kính đường bờ a

Longuet-Higgins (1967) đã xét một thí dụ cụ thể về một thành tạo dạng chân đế tròn độ sâu biến thiên gián đoạn

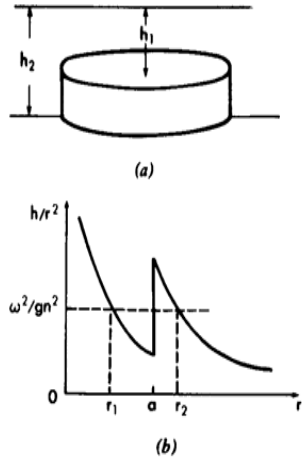
$$h = h_1, \quad 0 < r < a$$

$$= h_2, \quad r > a \quad \text{với} \quad \frac{h_1}{h_2} < 1 \quad (9.7)$$

như trên hình 9.3a. Biến thiên của h/r^2 thể hiện trên hình 9.3b. Với ω đủ thấp, hoặc n đủ cao, thì cũng có một vùng hình vòng $r_1 < r < a$ bên trên chân đế tồn tại dạng dao động. Vùng vòng có dao động này bao quanh một nhân trung tâm có chuyển động đơn điệu ($0 < r < r_1$) và bị tách khỏi vùng biển dao động ($r > r_2$) bởi một barrier $a < r < r_2$. Nếu h_1/h_2 rất nhỏ, thì barrier sẽ cao, bẫy sóng sẽ rất hiệu quả, nhưng vẫn chưa hoàn hảo, và sự cộng hưởng của các hài cao hơn ở gần rìa phía trên chân đế có thể rất mãnh liệt.

Cơ chế bẫy năng lượng này có ý nghĩa thực tiễn trong kỹ thuật vùng khơi, nơi các điều kiện địa chất có thể quyết định vị trí xây dựng công trình trên mũi đất. Mối nguy hiểm tiềm ẩn vốn có của vị trí như vậy không phải bao giờ các nhà thiết kế cũng biết rõ. Trong chuyến khảo sát tháp Texas trên Brown Bank, ngoài khơi bờ đông nước Mỹ, nhóm điều tra đã thấy sóng

trong cơn bão Noreaster lay động các trụ thép và đường ống lên xuống cỡ 100 bộ và có nguy cơ làm sập công trình. Những cột trụ này có sức nặng cỡ vài tấn mỗi chiếc, được đặt để bảo vệ chân đế các đường ống. Hiện tượng này cho thấy một minh chứng về cơ chế cộng hưởng đã bàn luận ở đây (Meyer, 1970).



Hình 9.3 Chân đế tròn ngấm: a) hình vẽ; b) biến thiên h/r^2 theo r

Trong mục sau, ta mô tả chi tiết hơn thí dụ của Longuet-Higgins, ở đây nghiệm giải tích tương đối đơn giản. Với các dạng địa hình tròn tròn khác, phép xấp xỉ WKB có thể hợp lý. Tuy nhiên, đối với dạng địa hình hai chiều tổng quát hơn nữa thì không thể tránh khỏi sử dụng phương pháp số.

4.9.2 Sự tán mát các sóng tới phẳng bởi chân đế tròn

Xét một chân đế tròn như trên hình 9.3. Đỉnh của chân đế tại độ sâu $z = -h_2$. Giả sử vùng nước lân cận có độ sâu không đổi h_1 . Với các sóng điều hoà đơn tần số ω , số sóng sẽ bằng $k_2 = \omega/(gh_2)^{1/2}$ tại vùng bên trên chân đế $r < a$ và bằng $k_1 = \omega/(gh_1)^{1/2}$ ở xung quanh chân đế $r > a$. Giả sử các sóng tới lan đến từ phía $x \sim -\infty$ với biên độ đơn vị sao cho

$$\eta' = e^{ik_1 x}. \quad (9.8)$$

Trong vùng $r > a$, phải có các sóng bị phát xạ (tán mát) truyền đi tới $r \sim \infty$. Do đó nếu

$$\eta_1 = \eta' + \eta^R, \quad (9.9)$$

thì η^R phải thoả mãn phương trình sau trong hệ toạ độ cực

$$\nabla^2 \eta^R + k_1^2 \eta^R = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta^R}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta^R}{\partial \theta^2} + k_1^2 \eta^R = 0, \quad (9.10)$$

và phải là sóng đi ra khi $r \rightarrow \infty$. Bên trên chân đế, li độ thoả mãn phương trình

$$\nabla^2 \eta_2 + k_2^2 \eta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial \theta^2} + k_2^2 \eta_2 = 0. \quad (9.11)$$

Tại rìa của chân đế $r = a$ phải tương hợp về áp suất và thông lượng:

$$\eta_1 = \eta_2, \quad (9.12)$$

$$h_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial r} = h_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial r}, \quad r = a. \quad (9.13)$$

Bằng cách tách các biến, dễ dàng chứng minh rằng nghiệm tổng quát của các phương trình (9.10) và (9.11) phải chứa các tổ hợp tuyến tính của các hàm Bessel, tức

$$\eta_R \sim \cos n\theta [J_n(k_1 r), Y_n(k_1 r)],$$

$$\eta_2 \sim \cos n\theta [J_n(k_2 r), Y_n(k_2 r)].$$

Trong phụ lục 4.A sẽ chứng tỏ rằng sóng tới có thể khai triển thành chuỗi sóng không gian, mỗi sóng có phụ thuộc góc theo $\cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$e^{ikx} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_0^\infty \epsilon_n (i)^n \cos n\theta J_n(kr) \quad (9.14)$$

trong đó ϵ_n - các ký hiệu Jacobi xác định bằng $\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2, n = 1, 2, \dots$

Ta giả định nghiệm sau cho η :

$$\eta_1 = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n (i)^n \cos n\theta [J_n(k_1 r) + B_n H_n^{(1)}(k_1 r)], \quad r > a, \quad (9.15)$$

$$\eta_2 = \sum_0^{\infty} \varepsilon_n (i)^n \cos n\theta [A_n J_n(k_2 r)], \quad r < a, \quad (9.16)$$

trong đó A_n và B_n phải xác định. Trong phương trình (9.16) chỉ có các J_n được giữ lại để bảo đảm hữu hạn tại $r=0$. Trong phương trình (9.15), chỉ có các $H_n^{(1)}$ được giữ lại sao cho các sóng phân tán đi ra. Vì $H_n^{(2)}$ không bao giờ được sử dụng ở đây, ta sẽ bỏ chỉ số trên ở các hàm Hankel và viết một cách đơn giản

$$H_n(k_2 r) \equiv H_n^{(1)}(k_2 r). \quad (9.17)$$

Các hệ số A_n và B_n phải chọn sao cho các điều kiện tương hợp tại $r=a$ – các phương trình (9.12) và (9.13) thoả mãn; vậy

$$A_n J_n(k_2 a) = J_n(k_1 a) + B_n H_n(k_1 a),$$

$$k_2 h_2 A_n J_n'(k_2 a) = k_1 h_1 [J_n'(k_1 a) + B_n H_n'(k_1 a)],$$

trong đó các dấu phẩy chỉ các đạo hàm theo đối số.

Với các ký hiệu

$$s = \frac{k_2 h_2}{k_1 h_1} \left(= \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} = \frac{k_1}{k_2} \right), \quad v = k_2 a \quad (9.18)$$

các nghiệm cho A_n và B_n sẽ là:

$$A_n = \frac{-[J_n(sv)H_n'(sv) - J_n'(sv)H_n(sv)]}{\Delta_n} = \frac{-2i}{\pi sv \Delta_n}, \quad (9.19a)$$

và

$$B_n = \frac{J_n(v)J_n'(sv) - sJ_n'(v)J_n(sv)}{\Delta_n}, \quad (9.19b)$$

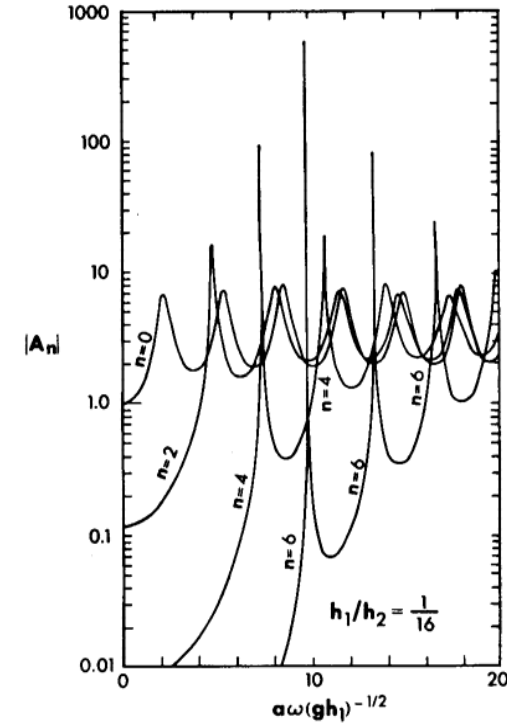
trong đó

$$\Delta_n = -J_n(v)H_n'(sv) + sJ_n'(v)H_n(sv). \quad (9.19c)$$

Trên đây ta đã sử dụng đồng nhất thức Wronskian

$$J_n(\zeta)H_n'(\zeta) - J_n'(\zeta)H_n(\zeta) = \frac{2i}{\pi\zeta}, \quad (9.20)$$

ta có thể kiểm chứng bằng cách viết phương trình Bessel dưới dạng Sturm-Liouville và sử dụng diễn biến tiệm cận của J_n và H_n . Khi các phương trình (9.19a)–(9.19c) được thế vào phương trình (9.15) và phương trình (9.16), nghiệm cho η được hoàn toàn xác định.



Hình 9.4 Đồ thị của A_n cho trường hợp $h_1/h_2 = 1/6$ và $n = 0, 2, 4$ và 6 cho thấy biên độ cộng hưởng như một hàm của tần số sóng tới (theo Longuet-Higgins, 1967)

Các phản hồi dao động trên chân đế được Longuet – Higgins (1967) tính toán (hình 9.4). Lưu ý rằng với hài bậc thấp nhất $n = 0$, tỉ lệ khuếch đại cộng hưởng gần bằng 8, trong khi tăng n dẫn đến các đỉnh cộng hưởng rõ hơn và cao hơn. Tất nhiên, sự co hẹp của đỉnh có nghĩa là hài tương ứng khó được kích hoạt ngoại trừ chuỗi sóng tới chính xác khớp tần. Nếu chỉnh tần tốt, thì sóng tới yếu nhưng dài theo thời gian có thể gây phản hồi lớn. Đặc tính này có thể thấy trước trên hình 9.3, ở đó n lớn dẫn đến một barie ngoài dây hơn, làm năng lượng các sóng tới khó mà vào được. Mặt khác, một khi năng lượng sóng bị bẫy trong barie ngoài, thì nó khó có thể thoát được. Những đặc điểm này còn có những nét khác biệt khác nữa nếu ta xét sự kích hoạt các sóng ngăn bởi các sóng tới có thời gian tồn tại ngắn, điều sẽ được bàn trong chương 5 về các bài toán cộng hưởng trong cảng. Khi một số thừa số khuếch đại có trị số lớn, thì ta tính tới các hiệu ứng phi tuyến và hoặc hiệu ứng ma sát ở gần các đỉnh cộng hưởng, nếu sóng tới thuộc loại ổn định.

4.10 ĐÓN SÓNG TỚI TRÊN CẤU TRÚC ĐỊA HÌNH NHỎ – XẤP XỈ PARABOLIC

Trước khi xét phương pháp số tổng quát, ta trình bày phép phân tích gần đúng cho trường hợp đảo nhỏ hay cho một chân đế, sóng tới hướng dọc theo trục dọc của địa hình. Mới đầu phương pháp này xuất hiện trong kỹ thuật điện từ, sau đó phát triển tiếp trong âm học (xem tổng quan trong Tappert, 1977). Sự áp dụng ở đây dựa theo công trình của Mei và Tuck (1980), và đánh giá phê phán của Bigg (1982). ý tưởng tương tự cũng đã áp dụng với sóng nước sâu (Haren và Mei, 1981) và các sóng phi tuyến yếu (Yue và Mei, 1980).

Trước hết, xét một đảo với các mặt biên thẳng đứng nằm trong vùng biển nông độ sâu không đổi h . Độ dài đảo L được

giả thiết lớn hơn nhiều so với một nửa bề ngang B và bước sóng tới $2\pi/k$, cụ thể là:

$$\frac{B}{L} = \mu \ll 1 \quad kL = \omega L(gh)^{-1/2} \gg 1. \quad (10.1)$$

Với trường hợp đón sóng tới trên vật cản nhỏ, sóng tới có thể gần giữ nguyên hướng truyền tiếp với biên độ bị điều biến nhẹ trong cả hai phương ngang, tức

$$\eta(x, y) = A(x, y)e^{ikx} \quad (10.2)$$

trong đó A biến thiên chậm theo x và y . Thế (10.2) vào phương trình (1.11), ta được

$$2ikA_x + A_{yy} + A_{xx} = 0. \quad (10.3)$$

Bây giờ kích thước dài của A dọc x là L , $2ikA_x/A_{xx} = O(kL)$, từ đó A_{xx} có bậc quan trọng thứ hai. Để nhận nghiệm không tầm thường, ta giữ lại A_{yy} ; qui mô dài dọc y khi đó bằng $O[L(kL)^{-1/2}]$. Giả sử ta đưa ra các kích thước dài phía ngoài như sau:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = y/(\mu^{\alpha/2}L), \quad (10.4)$$

và biểu diễn

$$\eta = A(X, Y)e^{ikX\mu^{-\alpha}} \quad (10.5)$$

với $kL = K\mu^{-\alpha}$ và $K = O(1)$; gần đúng dẫn đầu của phương trình (10.3) sẽ là

$$2iKA_x + A_{YY} = 0 \quad (10.6)$$

với sai số tương đối là $O(\mu^\alpha)$. Đây gọi là xấp xỉ parabolic và miền được định nghĩa bằng biểu thức (10.4) sẽ gọi là miền parabolic. Tương tự với phương trình truyền nhiệt, hiển nhiên có các điều kiện biên và ban đầu sau:

$$A = 1 \quad x = 0, \quad |y| < \infty \quad (10.7)$$

$$A \rightarrow 1 \quad x > 0, |y| \uparrow \infty \quad (10.8)$$

trong đó biên độ sóng tới đã được lấy bằng đơn vị. Điều kiện phát xạ thông thường là thích hợp cho miền tại đó $O(x, y) = L$, tuy nhiên miền này nằm ngoài miền parabolic.

Giả sử miền đối xứng qua trục x , ta chỉ cần quan tâm phía $y > 0$. Khi đó điều kiện không thông lượng trên bờ tường đảo đòi hỏi

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{dW}{dx} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{tại } y = W(x). \quad (10.9)$$

Đặt

$$W(x) = Bb(x), \quad 0 < b < 1 \quad (10.10)$$

và sử dụng phương trình (10.5), ta có theo các biến chuẩn hoá:

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = iK\mu^{1-\alpha/2} b' A, \quad \text{tại } Y = \mu^{1-\alpha/2} b(x) \quad (10.11)$$

với sai số tương đối bậc $O(\mu^\alpha)$. Với $\alpha = 2$, cả hai vế của phương trình (10.11) được cân bằng

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = iKb' A \quad \text{tại } Y = b(x). \quad (10.12)$$

Bài toán giá trị biên, giá trị ban đầu như định nghĩa bằng các phương trình (10.6), (10.7), (10.8) và (10.12) nói chung có thể giải bằng các phương pháp số cho sự dẫn nhiệt một chiều theo trục Y . Ở đây X đóng vai trò thời gian và tính toán tiến hành theo X qua các bước rời rạc lớn hơn nhiều so với bước sóng, do đó sẽ kinh tế hơn so với giải số trực tiếp với phương trình Helmholtz. Với trường hợp đặc biệt một nửa miền parabolic, $b = \sqrt{X}$, bài toán gần đúng có thể được giải nhanh bằng phương pháp tương tự như trong mục 2.4; kết quả là:

$$A = 1 + \frac{iK}{2} \left(\int_0^{\gamma/\sqrt{X}} e^{iK\xi^2} d\xi \right) \left(e^{iK/2} + \frac{iK}{2} \int_1^\infty e^{iK\xi^2/2} d\xi \right)^{-1}. \quad (10.13)$$

Như vậy, biên độ dọc theo đảo giữ nguyên không đổi. Nếu không giả thiết đảo nhỏ, thì miền trụ parabolic có thể được giải chính xác theo các tọa độ parabolic (xem Jones, 1964, tr. 467).

Bây giờ ta trở lại bài toán với chân đế có đỉnh ngập ở độ sâu $h_0 < h$. Giả sử nửa bề ngang B nhỏ hơn nhiều so với $\mu^{\alpha/2}$ ($\alpha < 2$); chân đế giống như một vệt mỏng đối với người quan sát ở phía ngoài trong miền parabolic, gây ra một dòng $\partial A / \partial Y = V(X)$ dọc X với $V \neq 0$ đối với $0 < X < 1$ và $V = 0$ đối với $X > 1$. Bài toán này giống như bài toán truyền nhiệt trong một thanh bán bán vô hạn có biến thiên dòng nhiệt được cho ở một đầu. Nghiệm chính tắc là

$$A(X, Y) = 1 - \frac{1+i}{2(\pi K)^{1/2}} \int_0^X \frac{d\xi V(\xi)}{(X-\xi)^{1/2}} \exp \frac{iKY^2}{2(X-\xi)}, \quad 0 < X < 1. \quad (10.14)$$

Gần chân đế, các biến bên trong thích hợp là

$$X = \frac{x}{L}, \quad \bar{Y} = \frac{y}{\mu L}. \quad (10.15)$$

Giả sử nghiệm bên trong có dạng

$$\eta = A(X, \bar{Y}) e^{iKX\mu^{-\alpha}}, \quad (10.16)$$

khi đó ở phía ngoài chân đế, nghiệm này phải thoả mãn phương trình (1.11), ta được

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{Y}^2} + \mu^{2-\alpha} 2iK \frac{\partial A}{\partial X} + \mu^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = 0, \quad \bar{Y} > b(X). \quad (10.17)$$

Bỏ các số hạng bậc $O(\mu^{2-\alpha})$, ta có

$$A = B + C(\bar{Y} - b). \quad (10.18)$$

Phía trên chân đế, phương trình Helmholtz có cùng dạng như phương trình (1.11), nhưng k^2 phải được thay bằng $k_0^2 = \omega^2 / gh_0$. Thế phương trình (10.16) vào, khi đó ta có

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \bar{Y}^2} + K^2 \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right) \mu^{2(1-\alpha)} A = O(\mu^{2-\alpha} A). \quad (10.19)$$

Nghiệm, đối xứng qua trục X , là

$$A = \bar{A} \cos \left[K \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/2} \mu^{2(1-\alpha)} \bar{Y} \right], \quad 0 < \bar{Y} < b, \quad (10.20)$$

trong đó $\bar{A}(X)$ – biên độ dọc trục. Nếu yêu cầu các nghiệm bên trong (10.18) và (10.20) phải liên tục và có thông lượng vuông góc cân bằng tại $\bar{Y} = b$, ta được biểu thức với bậc đại lượng dẫn đầu là

$$B = \bar{A} \cos \left[\mu^{1-\alpha} K \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/2} b \right], \quad (10.21)$$

và

$$-h_0 \bar{A} \mu^{1-\alpha} K \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/2} \sin \left[\mu^{1-\alpha} K \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/2} b \right] = hC. \quad (10.22)$$

Bây giờ ta thực hiện tương hợp phép xấp xỉ trong của phương trình (10.14) cho Y nhỏ,

$$A(X, Y) \cong 1 - \frac{1+i}{2(\pi K)^{1/2}} \int_0^X \frac{d\xi V(\xi)}{(X-\xi)^{1/2}} + VY + \dots, \quad Y \gg 1. \quad (10.23)$$

với phép xấp xỉ bên của phương trình (10.20) cho giá trị lớn $\bar{Y} \gg 1$,

$$A \cong B + C\bar{Y}, \quad (10.24)$$

ta được

$$B = 1 + \frac{1+i}{2(\pi K)^{1/2}} \int_0^X \frac{d\xi V(\xi)}{(X-\xi)^{1/2}} \quad (10.25)$$

và

$$C = V\mu^{1-\alpha/2}. \quad (10.26)$$

Từ các phương trình (10.21), (10.22), (10.25) và (10.26) B, C và \bar{A} có thể được khử để có kết quả

$$\frac{1+i}{2(\pi K)^{1/2}} \int_0^X \frac{d\xi V(\xi)}{(X-\xi)^{1/2}} = 1 + Z(X)V(X), \quad (10.27)$$

trong đó

$$Z(X) = \frac{h\mu^{\alpha/2}}{h_0 K (h/h_0 - 1)^{1/2}} \operatorname{ctg} \left[\mu^{1-\alpha} K \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/2} b \right]. \quad (10.28)$$

Ta đòi hỏi rằng $Z = O(1)$ để làm cho tất cả số hạng trong phương trình (10.27) có cùng bậc đại lượng, vậy

$$\alpha = 2/3 \quad \text{và} \quad \frac{h}{h_0} = \mu^{-2/3}, \quad (10.29)$$

tức, chân đế phải nông hơn nhiều so với nền đáy xung quanh.

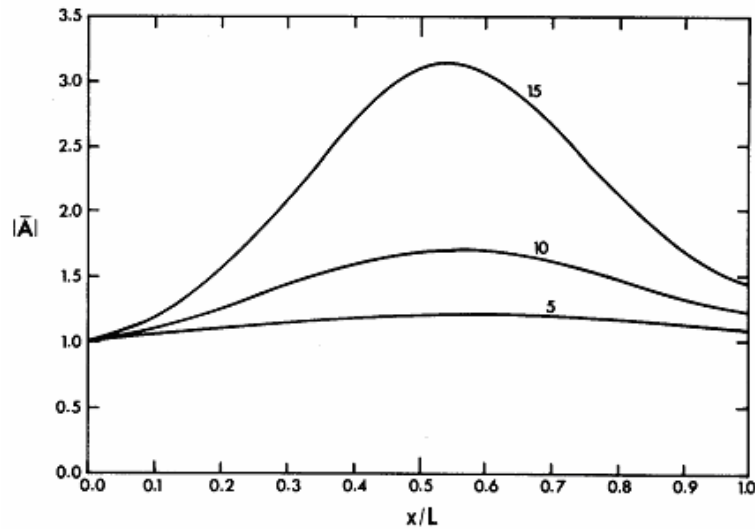
Thông lượng V có thể giải bằng số từ phương trình tích phân (xem Mei và Tuck, 1980); sau đó có thể tính biên độ \bar{A} dọc trục của chân đế.

Bigg (1982) đã đánh giá lý thuyết này so với các nghiệm số của phương trình Helmholtz đầy đủ. Ông nhắc nhở rằng chỉ có thể sử dụng phương trình (10.27) khi phương trình (10.29) thỏa mãn và \bar{A}, V không được biến đổi nhanh trên chân đế. Bằng số cho thấy, khi K tăng tới giá trị để

$$\operatorname{ctg} \left[\mu^{1-\alpha} K \left(\frac{h}{h_0} - 1 \right)^{1/2} b_{\max} \right] = 0,$$

thì V và \bar{A} trở thành vô giới hạn tại vị trí mà chân đế rộng nhất. Mặc dù điều này giả định có cộng hưởng phía trên chân đế, nhưng các kết quả rất sai. Vì những lý do đó, một số thí nghiệm số mà Mei và Tuck (1980) thông báo là không chấp nhận được. Chúng tôi thể hiện trên hình 10.1 biên độ dọc tuyến trung tâm dọc một chân đế parabolic, với khoảng của các tham

số sao cho phương trình (10.27) đúng. Biên độ sóng phía ngoài chân đế tuân theo phương trình (10.14) và bị loại bỏ.



Hình 10.1 Biến thiên biên độ sóng dọc tuyến trung tâm của một chân đế đón sóng. Hai phía của chân đế là cặp parabol $y/L = \pm \mu x(L-x)/L^2$. Các số cạnh mỗi đường cong chỉ giá trị $kL = \omega L(gh)^{-1/2}$ của sóng tới, $\mu = 0,05, h/h_0 = 9$

Phép xấp xỉ parabolic đã được áp dụng cho các sóng ngắn lan truyền trên nền đáy biến đổi chậm. Thí dụ, Radder (1979) đã khảo sát một bãi nông dạng tròn, bỏ qua sự uốn cong của các tia sóng. Nhiều xạ xung quanh các tia sóng cong được Liu và Mei (1976a) nghiên cứu ở phía biên khuất do đầu của một đê chắn sóng dài gây nên (xem mục 10.7). Lozano và Liu (1980) đã mở rộng hơn nữa để áp dụng cho trường hợp tia có độ cong cục bộ và vùng lân cận tiêu điểm. Booij (1981) đã xử lý hiệu ứng kết hợp của dòng chảy và độ sâu biến thiên. Vì phép xấp xỉ này làm tăng tốc các tính toán số trị, nên nó đáng được phát triển tiếp để phục vụ các bài toán thực tiễn.

4.11 PHƯƠNG PHÁP SỐ DỰA TRÊN CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

4.11.1 Giới thiệu

Địa hình vùng ven bờ biển thường hiếm khi đơn giản. Để dự báo phản ứng của thủy vực đối với các kích hoạt sóng, cần một phương pháp có khả năng xử lý hình dạng và độ sâu thủy vực bất kỳ. Phương pháp phần tử hữu hạn đặc biệt thích hợp cho yêu cầu đó vì kích thước và hình dạng của các phần tử có thể tự do thay đổi để rời rạc hoá một miền không đều. Sau khi đạt được thành công ngoạn mục trong cơ học công trình, phương pháp này đã được mở rộng cho nhiều bài toán về sóng nước. Trong khi vẫn tiếp tục được cải tiến thêm, phương pháp này đã có nhiều ứng dụng thực tiễn trong công tác thiết kế và kế hoạch hoá. Do đó, chúng tôi giành mục này để mô tả những điều trọng yếu của phương pháp trong bối cảnh nó áp dụng vào sóng dài, nhấn mạnh những nét đặc thù riêng có đối với các bài toán loại này. Về những cơ sở chuẩn mực của lý thuyết phần tử hữu hạn, độc giả có thể tham khảo nhiều tài liệu rất đạt, thí dụ Zienkiewicz (1971), Tong và Rossettos (1976).

Trình tự chung của phương pháp phần tử hữu hạn với bài toán giá trị biên tuyến tính gồm các bước sau:

- 1) Biểu diễn bài toán giá trị biên như là một nguyên lý biến phân, trong đó một phiếm hàm cụ thể là ổn định.
- 2) Phân giải miền thành những phần tử hữu hạn (như các tam giác, các tứ giác..., với các bài toán hai chiều).
- 3) Chọn các hàm nội suy để xấp xỉ nghiệm bên trong các phần tử hữu hạn (tuyến tính, bậc hai...). Các hàm nội suy này gồm các hệ số chưa biết.
- 4) Với mỗi phần tử, thực hiện phép vi phân và tích phân

cần thiết ứng với phiếm hàm. Đối với các bài toán tuyến tính phiếm hàm có bậc hai và có thể biểu diễn như một dạng song tuyến theo những hệ số chưa biết.

5) Tập hợp các dạng song tuyến cơ sở sao cho phiếm hàm toàn thể được biểu diễn như là một dạng song tuyến toàn cục.

6) Cực trị hoá phiếm hàm theo từng hệ số chưa biết và nhận được một tập phương trình đại số tuyến tính với các hệ số.

7) Giải các phương trình tìm các hệ số.

8) Tính toán các đại lượng quan tâm.

Các nguyên lý biến phân không phải luôn dễ dàng xác định, và không phải tồn tại cho tất cả các bài toán vật lý. Một cách tiếp cận tổng quát và trực tiếp hơn gọi là phép thiết lập tập mờ Galerkin, sẽ được đề cập trong chương 7, khi xét các bài toán hai và ba chiều có sự biến thiên thẳng đứng. Với những bài toán ta quan tâm, thì có thể chứng minh rằng cách phát biểu biến phân tương đương với cách phát biểu tập mờ. Cả hai cách phát biểu đều liên quan tới các đạo hàm bậc thấp hơn bậc thể hiện trong phương trình sai phân gốc; do đó, chúng cho phép sử dụng một lớp hàm nội suy khả vi yếu hơn (do đó, tổng quát hơn).

Thông thường các bài toán trong cơ học công trình liên quan tới miền độ rộng hữu hạn (dạng tấm, dạng khung, chi tiết máy, thân máy bay), trong khi các bài toán cơ học chất lỏng thì gắn với miền vô hạn về lý thuyết. Tất nhiên, người ta vẫn có thể cố gắng sử dụng biên ngoài lớn nhưng hữu hạn, trên đó áp dụng điều kiện biên tại vô cực. Sau khi có được nghiệm số cho vùng hữu hạn, thì sẽ đưa ra biên mới và xa hơn và các tính toán lại lập lại. Trình tự này được tiếp tục cho đến khi nào việc mở rộng thêm chỉ cung cấp những hiệu chỉnh không đáng kể cho nghiệm. Đối với các bài toán sóng, bên ngoài cần phải cách phần tính toán một khoảng ít nhất là vài lần bước sóng để có

thể đạt độ chính xác nào đó, trong khi đó bên trong từng bước sóng cần phải có đủ số các điểm lưới để đạt độ phân giải khá. Vậy, để nghiên cứu một dải rộng các bước sóng, ta cần sử dụng hoặc các lưới khác nhau cho mỗi dải hẹp bước sóng, hoặc một vùng toàn cục duy nhất, nhưng đủ lớn do sóng dài nhất quy định, với bước lưới rất chi tiết do sóng ngắn nhất quy định. Rõ ràng cả hai lựa chọn đều không kinh tế, và người ta đã đề xuất nhiều giải pháp nhân tạo, như phép là giảm thiểu nhân tạo.

Để nghiên cứu nhiễu xạ gây bởi một hòn đảo, nơi nền đáy có độ sâu không đổi, ngoại trừ ở lân cận đảo, Beckhoff (1972) đã chia chất lỏng thành hai vùng bằng một đường tròn bao quanh đảo, nhưng nằm trong miền độ sâu không đổi. Chỉ miền trong đường tròn được rời rạc hoá thành các phần tử hữu hạn, trong khi nghiệm ở miền ngoài được biểu diễn bằng phân bố liên tục của nguồn dọc đường tròn. Nghiệm nguồn là nghiệm giải tích và thoả mãn chính xác phương trình mô tả và điều kiện biên tại vô cùng. Song cường độ nguồn dọc theo đường tròn là ẩn, và phải được giải cùng với miền trong đường tròn bằng cách duy trì tính liên tục của áp suất và vận tốc pháp tuyến qua đường tròn. Nhiều kiểu hàm nội suy được sử dụng trong nhiều vùng khác nhau; do đó phương pháp này có thể gọi là *phương pháp phần tử lai*. Theo Tong, Pian và Lasry (1973), phần tử cùng với một hàm nội suy giải tích gọi là siêu phần tử.

Ta vẫn có thể có nhiều tự do trong cách thức duy trì tính liên tục của áp suất và tốc độ pháp tuyến giữa các phần tử hữu hạn và siêu phần tử. Tối ưu nhất là phỏng đoán hai điều kiện tương hợp như là các điều kiện biên tự nhiên trong nguyên lý biến phân sao cho chúng được tự động thoả mãn trong thủ tục số. Cách tiếp cận biến phân này được sử dụng rất thành công với các bài toán phát xạ và phân tán hai chiều (Chen và Mei 1974a, b; Bai và Yeung, 1974), các bài toán sóng tàu hai chiều

(Mei và Chen, 1976), các bài toán phân tán ba chiều (Yue, Chen và Mei, 1976, 1978), cũng như cho các bài toán sóng liên quan đến sự tương tác với công trình (Mei, Foda và Tong, 1979). Thủ tục của Chen và Mei sẽ trình bày dưới đây.

4.11.2 Nguyên lý biến phân

Giả sử địa hình phức tạp, như các công trình lớn, đường bờ cong, độ sâu biến đổi... nằm phía trong một đường khép kín C (hình 11.1). Phía ngoài đường C , độ sâu là hằng số và miền chất lỏng được ký hiệu bằng $\bar{\Omega}$. Sóng phẳng tới trên hướng θ_I :

$$\eta' = A e^{ikr \cos(\theta - \theta_I)} = A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kr) \cos n(\theta - \theta_I). \quad (11.1)$$

Trong vùng $\bar{\Omega}$, sóng phân tán ký hiệu bằng $\bar{\eta}^s$, phải thỏa mãn phương trình Helmholtz và điều kiện phát xạ và có thể biểu diễn chính xác bằng khai triển Fourier–Bessel:

$$\bar{\eta}^s = \alpha_0 H_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n(kr) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad (11.2)$$

trong đó H_n là các hàm Hankel loại một. Các hệ số khai triển $\alpha_n, n=0, 1, 2, \dots$ và $\beta_n, n=1, 2, 3, \dots$ là những hệ số phải tìm. Li độ tổng cộng trong $\bar{\Omega}$ sẽ được ký hiệu bằng $\bar{\eta} (= \eta' + \bar{\eta}^s)$. Vùng $\bar{\Omega}$ là vùng siêu phân tử.

Giả sử vùng chất lỏng phía trong C ký hiệu bằng Ω và li độ tương ứng bằng η . Khi đó, η phải thỏa mãn phương trình (1.9) trong Ω và phương trình (1.13) trên B . Cắt ngang qua C áp suất và vận tốc pháp tuyến phải liên tục:

$$\eta = \bar{\eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} \quad \text{trên } C. \quad (11.3)$$

Bây giờ ta chứng minh rằng tính dừng của phiếm hàm

$$J(\eta, \bar{\eta}) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[h(\nabla \eta)^2 - \frac{\omega^2}{g} \eta^2 \right] dA + \int_C h \left[\left(\frac{1}{2} \bar{\eta}^s - \eta^s \right) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} - \frac{1}{2} \bar{\eta}^s \frac{\partial \eta'}{\partial n} \right] ds \quad (11.4)$$

trong đó $\eta^s \equiv \eta - \eta'$, tương đương với bài toán giá trị biên xác định η trong Ω và $\bar{\eta}^s$ trong $\bar{\Omega}$. Để chứng minh sự tương đương, ta thực hiện biến phân thứ nhất của J :

$$\delta J = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[h \nabla \eta \cdot \nabla \delta \eta - \frac{\omega^2}{g} \eta \delta \eta \right] dA + \int_C h \left[\left(\frac{1}{2} \delta \bar{\eta}^s - \delta \eta^s \right) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} + \left(\frac{1}{2} \bar{\eta}^s - \eta^s \right) \frac{\partial \delta \bar{\eta}}{\partial n} - \frac{1}{2} \delta \bar{\eta}^s \frac{\partial \eta'}{\partial n} \right] ds.$$

Bằng tích phân từng phần và định lý Gauss, số hạng thứ nhất trên đây có thể được viết thành

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} h \nabla \eta \cdot \nabla \delta \eta dA &= \iint_{\Omega} [\nabla \cdot (h \delta \eta \nabla \eta) - \delta \eta \nabla \cdot (h \nabla \eta)] dA = \\ &= - \iint_{\Omega} \delta \eta \nabla \cdot (h \nabla \eta) dA + \int_C h \delta \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} ds + \int_B h \delta \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

Vì η' đã biết, $\delta \eta' = 0$ và

$$\delta \bar{\eta}^s = \delta \bar{\eta} \quad \text{và} \quad \delta \eta^s = \delta \eta.$$

Rút ra

$$\begin{aligned} \delta J &= - \iint_{\Omega} \delta \eta \left[\nabla \cdot (h \nabla \eta) + \frac{\omega^2}{g} \eta \right] dA + \\ &+ \int_C h \left[\left(\frac{1}{2} \delta \bar{\eta} - \delta \eta \right) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} + \left(\frac{1}{2} \bar{\eta}^s - \eta^s \right) \frac{\partial \delta \bar{\eta}}{\partial n} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \delta \bar{\eta} \frac{\partial \eta'}{\partial n} + \delta \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} \right] ds + \int_B h \delta \eta \frac{\partial \eta}{\partial n} ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\iint_{\Omega} \delta\eta \left[\nabla \cdot (h \nabla \eta) + \frac{\omega^2}{g} \eta \right] dA + \\
&+ \int_C h \left[\delta\eta \left(\frac{\partial \eta}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} \right) - \frac{\partial \delta\bar{\eta}}{\partial n} (\eta^s - \bar{\eta}^s) \right] ds + \\
&+ \frac{1}{2} \int_C h \left[\delta\eta \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} - \bar{\eta}^s \frac{\partial \delta\bar{\eta}}{\partial n} \right] ds + \int_B h \delta\eta \frac{\partial \eta}{\partial n} ds. \quad (11.5)
\end{aligned}$$

Tích phân cạnh tích phân cuối cùng trong phương trình trên bằng

$$I(C) = \frac{h}{2} \int_C \left[\delta\bar{\eta}^s \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} - \bar{\eta}^s \frac{\partial \delta\bar{\eta}^s}{\partial n} \right] ds.$$

Bây giờ áp dụng công thức Green cho $\bar{\eta}^s$ và $\delta\bar{\eta}^s$ với miền $\bar{\Omega}$. Vì cả $\bar{\eta}^s$ và $\delta\bar{\eta}^s$ thoả mãn chính xác phương trình Helmholtz, nên tích phân I ở trên không thay đổi nếu thay C bằng đường tròn C_{∞} có bán kính rất lớn. Dọc theo C_{∞} , cả $\bar{\eta}^s$ và $\delta\bar{\eta}^s$ thoả mãn điều kiện phát xạ (1.38); do đó

$$I(C_{\infty}) = 0, \quad \text{tức là } I(C) = 0.$$

Với I được loại bỏ khỏi phương trình (11.5), rõ ràng rằng nếu các phương trình (1.9), (1.13b), (11.3a) và (11.3b) được thoả mãn bởi η , thì

$$\delta J = 0. \quad (11.6)$$

Ngược lại, nếu $\delta J = 0$, thì η phải thoả mãn các phương trình (1.9) trong Ω , khi phương trình Euler, phương trình (1.13b) trên B và các phương trình (11.3a) và (11.3b) trên C như là các điều kiện biên tự nhiên. Vậy sự tương đương được chứng minh.

Phiếm hàm dừng liên quan đến các tích phân trong và trên các biên của Ω và có thể được sử dụng làm cơ sở để nhận được nghiệm xấp xỉ trong Ω . Phương pháp phần tử hữu hạn chỉ là một trong số các khả năng xấp xỉ.

4.11.3 Xấp xỉ phần tử hữu hạn

Ta rời rạc hoá các tích phân trong phương trình (11.4) bằng cách chia vùng nước trong Ω thành một mạng lưới các phần tử hữu hạn, kích thước của các phần tử phải nhỏ hơn nhiều so với bước sóng điển hình và qui mô biến đổi địa hình địa phương. Vì các tích phân trong phương trình (11.4) chỉ chứa các đạo hàm bậc nhất của η , nên chỉ cần đòi hỏi tính liên tục của η trong miền phần tử hữu hạn. Để đơn giản, ta chọn các phần tử dạng tam giác, trong mỗi phần tử, η được xấp xỉ bằng các hàm nội suy tuyến tính

$$\eta^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e \eta_i^e = \begin{Bmatrix} N^e \end{Bmatrix}_{1 \times 3}^T \begin{Bmatrix} \eta^e \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (11.7)$$

trong đó các chỉ số trên e biểu diễn các đại lượng liên quan với một phần tử. Dấu $\{ \}$ ký hiệu một véc tơ cột và chỉ số trên T chỉ phép chuyển vị; do đó $\{ \}^T$ là một vectơ dòng. Các tích số viết dưới chân chỉ các kích thước của ma trận, thí dụ 1×3 có nghĩa là ma trận có 1 hàng và 3 cột. Một cách tường minh hơn thì

$$\begin{Bmatrix} \eta^e \end{Bmatrix}^T = (\eta_1^e, \eta_2^e, \eta_3^e), \quad (11.8a)$$

$$\begin{Bmatrix} N^e \end{Bmatrix}^T = (N_1^e, N_2^e, N_3^e), \quad (11.8b)$$

trong đó

$$N_i^e(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta^e}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.9a)$$

$$a_1 = x_2^e y_3^e - x_3^e y_2^e, \quad b_1 = y_2^e - y_3^e, \quad c_1 = x_3^e - x_2^e, \quad (11.9b)$$

$\Delta^e =$ diện tích của phần tử $e =$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix}. \quad (11.9c)$$

Các hệ số khác $a_{2,3}, b_{2,3}$ và $c_{2,3}$ có thể nhận được bằng phép hoán

vị trong lúc x_i, y_i và hệ số η_i^e tuần tự biểu thị các tọa độ x, y và giá trị của η^e tại nút i . Giả sử độ sâu bên trong một phần tử được xấp xỉ bằng một mặt phẳng

$$h^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e h_i^e = \begin{Bmatrix} N^e \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} h^e \end{Bmatrix}, \quad (11.10)$$

h_i^e là độ sâu nước tại nút i . Khi phép tích phân được thực hiện cho tích phân diện tích, ta được

$$I_1 = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[h(\nabla \eta)^2 - \frac{\omega^2}{g} \eta^2 \right] dA = \frac{1}{2} \sum_{e \in \Omega} \begin{Bmatrix} n^e \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_1^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta^e \end{Bmatrix}, \quad (11.11)$$

trong đó ma trận cố định phần tử $[K_1^e]$ có các thành phần

$$K_{1ij}^e = h_{\beta}^e \iint_e N_{\beta}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_{\alpha}} dx dy - \frac{\omega^2}{g} \iint_e N_i^e N_j^e dx dy. \quad (11.12)$$

Khi phương trình (11.9) được thế vào phương trình (11.12), các tích phân trên tam giác e có thể ước lượng tường minh như sau

$$\begin{aligned} \iint_e N_i^e N_j^e dx dy &= \frac{1}{6} \Delta^e, & i = j \\ &= \frac{1}{2} \Delta^e, & i \neq j \end{aligned} \quad (11.13a)$$

$$\iint_e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_{\alpha}} dx dy = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j), \quad (11.13b)$$

$$h_{\beta}^e \iint_e N_{\beta}^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial N_j^e}{\partial x_{\alpha}} dx dy = \frac{h_1^e + h_2^e + h_3^e}{12\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j). \quad (11.13c)$$

Ma trận phần tử cố định $[K_1^e]$ là một ma trận đối xứng. Bây giờ tập hợp tất cả các li độ tại nút phần tử và định nghĩa véc tơ li độ tổng cộng tại nút $\{\eta\}$ với E phần tử, trong đó E là tổng số các nút trong và trên các biên của miền Ω . Khi làm như vậy, các điểm nút phần tử phải được đánh chỉ số lại để làm sao cùng một nút có thể thuộc về một số phần tử nằm kề nhau. Các ma trận phần tử cố định phải được tập hợp lại để tạo ra ma trận cố định

tổng cộng $[K_1]$. Cuối cùng, I_1 được viết lại

$$I_1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \eta \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \end{Bmatrix}. \quad (11.14)$$

Vì $[K_1^e]$ đối xứng đối với tất cả các phần tử, nên $[K_1]$ cũng đối xứng.

Tích phân đường trong phương trình (11.4) có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} & \int_C h \left[\left(\frac{1}{2} \bar{\eta}^s - \eta^s \right) \left(\frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} + \frac{\partial \eta'}{\partial n} \right) - \frac{1}{2} \bar{\eta}^s \frac{\partial \eta'}{\partial n} \right] ds = \\ &= \int_C h \frac{1}{2} \bar{\eta}^s \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} ds - \int_C h (\eta - \eta') \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} ds - \int_C h (\eta - \eta') \frac{\partial \eta'}{\partial n} ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_C h \bar{\eta}^s \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} ds \dots I_2 \\ & \quad - \int_C h \eta \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} ds \dots I_3 \\ & \quad - \int_C h \eta \frac{\partial \eta'}{\partial n} ds \dots I_4 \\ & \quad + \int_C h \eta' \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} ds \dots I_5 \\ & \quad + \int_C h \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial n} ds \dots I_6. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Để đơn giản, C được giả thiết là đường tròn bán kính R . Nhằm các mục đích tính toán, ta cắt bỏ Các chuỗi (11.1) và (11.2) từ số hạng sau m . Với phương trình (11.2), tích phân đường I_2 có thể ước lượng giải tích bằng cách sử dụng tính trực giao của các hàm sin và cosin:

$$I_2 = \frac{\pi}{2} k R h \left[2\alpha_0^2 H_0 H_0' + \sum_{n=1}^m (\alpha_n^2 + \beta_n^2) H_n H_n' \right],$$

trong đó

$$H_n = H_n^{(1)}(kR), \quad H'_n \equiv \left[\frac{d}{d(kr)} H_n^{(1)}(kr) \right]_{r=R}$$

và R là bán kính của C . Chú ý rằng h ở trên và phía ngoài đường C đã được giả sử là hằng số. Ta định nghĩa véc tơ cột

$$\{\mu\}_{1 \times M}$$

vậy thì

$$\{\mu\}_{1 \times M}^T = \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_m, \beta_m\}$$

với $M = 2m + 1$, và $[K_2]$ là ma trận đường chéo

$$[K_2]_{M \times M} = \pi k R h \text{diag} \{2H'_0 H_0, H'_1 H_1, H'_1 H_1, \dots, H'_m H_m, H'_m H_m\}.$$

Tích phân I_2 bây giờ được viết thành

$$I_2 = \frac{1}{2} \{\mu\}_{1 \times M}^T [K_2]_{M \times M} \{\mu\}_{M \times 1}. \quad (11.16)$$

Với các tích phân I_3 và I_4 , để thuận tiện ta định nghĩa tập hợp con $\{\tilde{\eta}\}$ của $\{\eta\}$ nằm trên C (xem hình 11.2)

$$\{\tilde{\eta}\}_{1 \times P}^T = \{\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_P\}.$$

Xấp xỉ tích phân đường trên C bằng tổng các tích phân dọc theo các phần tử đoạn thẳng $\hat{\eta}_p \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_{p-1} \hat{\eta}_p$, η bằng các phép nội suy tuyến tính của nó và $\bar{\eta}^s$ bằng giá trị của nó tại tâm mỗi phần tử cung đoạn trên C , cụ thể là, tại $\theta = \theta_j$ (xem hình 11.2), ta được

$$I_3 \cong -\frac{1}{2} k h \sum_{j=1}^P L_j (\tilde{\eta}_{j-1} + \tilde{\eta}_j) \left[\alpha_0 H'_0 + \sum_{n=0} H'_n (\alpha_n \cos n\theta_j + \beta_n \sin n\theta_j) \right],$$

trong đó L_j là độ dài của đoạn phần tử j . Tích phân này có thể viết dưới dạng ma trận

$$I_3 = \{\tilde{\eta}\}_{1 \times P}^T [K_3]_{P \times M} \{\mu\}_{M \times 1} \quad (11.17)$$

trong đó $[K_3]$ là một ma trận $P \times M$ đầy đủ

$$[K_3]_{P \times M} = -\frac{kh}{2} \times \begin{bmatrix} 2H'_0 L_1 \dots H'_n (\cos n\theta_p + \cos n\theta_1) L_1 & H'_n (\sin n\theta_p + \sin n\theta_1) L_1 \dots \\ 2H'_0 L_2 \dots H'_n (\cos n\theta_1 + \cos n\theta_2) L_2 & H'_n (\sin n\theta_1 + \sin n\theta_2) L_2 \dots \\ \vdots & \vdots \\ 2H'_0 L_P \dots H'_n (\cos n\theta_{P-1} + \cos n\theta_P) L_P & H'_n (\sin n\theta_{P-1} + \sin n\theta_P) L_P \dots \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

trong đó $n = 1, 2, \dots, m$.

Một cách tương tự, ta nhận được tích phân I_4 :

$$I_4 = -\frac{1}{2} kh \sum_{j=1}^P L_j [i \cos(\theta_j - \theta_l)] \exp [ikR \cos(\theta_j - \theta_l)] \cdot (\tilde{\eta}_{j-1} + \tilde{\eta}_j) \equiv -\{Q_4\}_{1 \times P}^T \{\tilde{\eta}\} \quad (11.19)$$

trong đó

$$\{Q_4\}_{1 \times P}^T = \frac{1}{2} kh \{(q_p - q_l) L_1, (q_1 + q_2) L_2, \dots, (q_{p-1} - q_p) L_P\},$$

$$q_j = i \cos(\theta_j - \theta_1) \exp [ikR \cos(\theta_j - \theta_1)], \quad j = 1, 2, \dots, P.$$

Cuối cùng, tích phân I_5 có thể ước lượng bằng giải tích, kết quả là

$$I_5 = -\{Q_5\}_{1 \times M}^T \{\mu\}_{M \times 1} \quad (11.20)$$

trong đó

$$\{Q_5\}_{1 \times M}^T = 2\pi R k h \{J_0 H'_0, \dots, i^m J_m H'_m \cos m\theta_l, i^m J_m H'_m \sin m\theta_l\}.$$

I_6 là một hằng đã biết và bị loại bỏ khi cực trị hoá, do đó I_6 không cần quan tâm.

Bây giờ ta tổng kết phép hàm

$$J = \frac{1}{2} \{\eta\}^T [K_1] \{\eta\} + \frac{1}{2} \{\mu\}^T [K_2] \{\mu\} + \{\tilde{\eta}\}^T [K_3] \{\mu\} -$$

$$-\{Q_4\}^T \{\tilde{\eta}\} - \{Q_5\}^T \{\mu\}. \quad (11.21)$$

Vì J dừng, nên phải có các đẳng thức

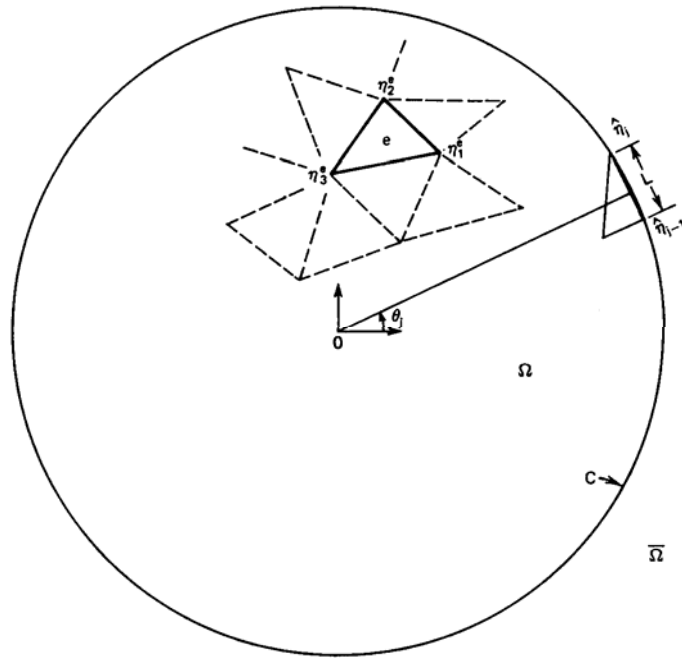
$$\frac{\partial J}{\partial \eta_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, E,$$

và

$$\frac{\partial J}{\partial \mu_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, M,$$

những đẳng thức này dẫn đến một tập các phương trình đại số tuyến tính:

$$[K]\{\eta\} + [K_3]\{\mu\} = \{Q_4\}, \quad [K_2]\{\mu\} + [K_3]^T \{\tilde{\eta}\} = \{Q_5\}. \quad (11.22)$$

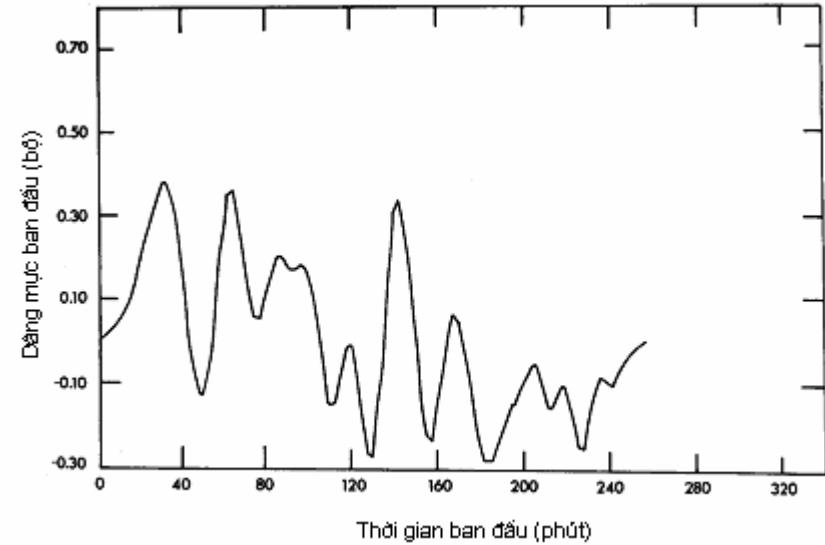


Hình 11.2 Các phần tử điển hình bên trong và trên biên

Loại $\{\mu\}$ sẽ cho một phương trình ma trận đối với $\{\eta\}$

$$[K]\{\eta\} - [K_1] - [K_3][K_2]^{-1}[K_3]^T \{\eta\} = \{Q_4\} + [K_3][K_2]^{-1}\{Q_5\} \quad (11.23)$$

Ma trận kết quả $[K]$ là một ma trận đối xứng; chỉ cần một nửa các phần tử của nó được lưu trong máy tính.



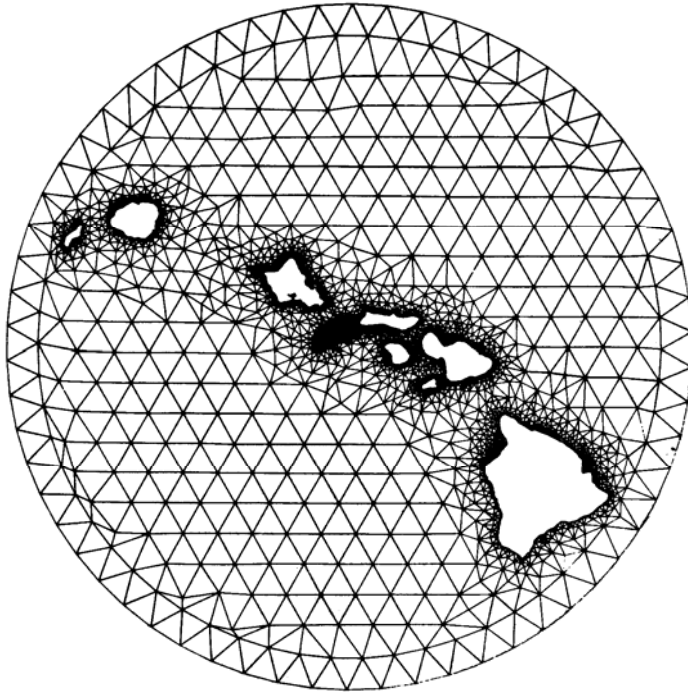
Hình 11.3 Kết quả tính các sóng ngắn tới, trận động đất năm 1964 ở Alaska (theo Houston, 1978)

Bằng những lý lẽ linh nghiệm và những thí nghiệm số, trong đó tiến hành so sánh kết quả của một số trường hợp tính với các nghiệm giải tích, người ta đã tìm ra những quy tắc thực nghiệm sau đây để xác định kích thước phần tử:

- 1) Kích thước phần tử tại mọi nơi phải nhỏ hơn 10% bước sóng tới.
- 2) Tại lân cận của các chỗ uốn cong mạnh, nên sử dụng cục

bộ những phần tử nhỏ hơn bán kính cong, nếu không thì có thể gây ra các sai số địa phương tại đó.

Số lượng các hệ số M cần trong siêu phần tử dễ dàng xác định bằng phép thử và sai số; nó thường tăng đối với các sóng ngắn hơn.

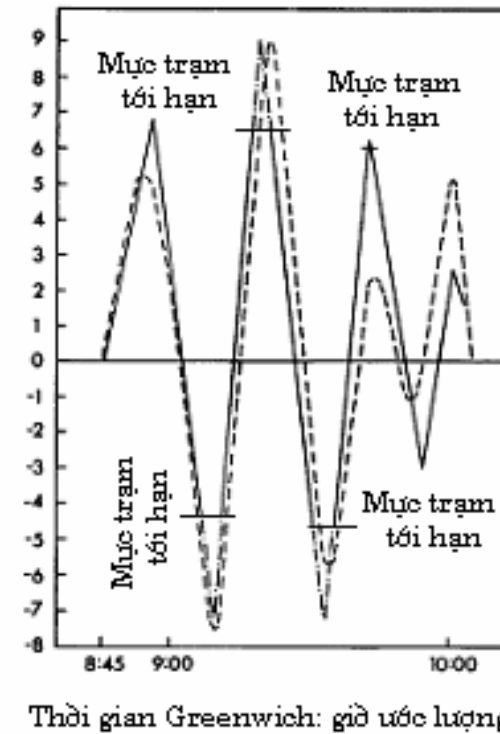


Hình 11.4 Lưới phần tử hữu hạn quanh quần đảo Hawaii (Houston, 1978)

Để tối thiểu hoá dải rộng của $[K]$, số hiệu các nút nên được chọn trước tiên dọc theo một vòng tròn, sau đó dọc theo vòng tròn tiếp theo về phía bên trong và bên ngoài C . Khi điều này được hoàn thành, thì một nửa dải rộng thường gần bằng số điểm nút trên C và không phụ thuộc vào số các hệ số chuỗi

trong siêu phần tử. Do tính đối xứng và dải hẹp của ma trận, cách giải số phương trình đại số sẽ đặc biệt hiệu quả. Rõ ràng rằng, vòng tròn C càng nhỏ thì độ rộng của dải càng nhỏ, và khối lượng tính toán thường giảm, thậm chí ngay cả khi các hệ ta đòi hỏi số hệ số trong siêu phần tử nhiều hơn.

Cần nhận thấy rằng đường viền C không nhất thiết phải là vòng tròn; với một viền có hình dạng bất kỳ, thì phải thực hiện tích phân số đối với tích phân đường dọc theo C và ma trận $[K_2]$ là đầy đủ.



Hình 11.5 Kết quả tính (đường gạch nối) và số liệu đo sóng thần (liền nét) tại Kahului, Maui, trận động đất năm 1964 ở Alaska (Houston, 1976)

Houston (1978) thực hiện một ứng dụng thú vị phương pháp phần tử lai để nghiên cứu sự phản ứng ở gần quần đảo Hawaii đối với sóng tsunami phát sinh trong trận động đất ở Chile năm 1960 và ở Alaska năm 1964. Dựa trên phương trình sóng dài hai chiều tuyến tính, có tính tới độ cong mặt Trái Đất, Houston đã sử dụng các dữ liệu ban đầu, được ước lượng căn cứ vào số liệu về độ dịch chuyển thường xuyên của đứt gãy và đã tính được các sóng đến độ sâu 5000m gần quần đảo. Số liệu lịch sử về sóng tính được (hình 11.3) mang phân tích Fourier thành 18 hài điều hoà với các chu kỳ từ 14,5 phút đến 260 phút. Các dao động này được sử dụng với tư cách các sóng tới. Lưới phần tử hữu hạn thể hiện trên hình 11.4, gồm khoảng 2500 nút, từng dao động phản ứng được tính toán và sau đó tổng hợp lại theo phương trình (2.56) để tạo nhận được phản ứng xung tại ba trạm sóng: Kahului (Maui), Honolulu (Oahu) và Hilo (Hawaii). Lý thuyết và số liệu ghi rất phù hợp. Hình 11.5 là một thí dụ so sánh động đất Alaska với một đứt gãy dài 500 hải lý. Về lập luận lý thuyết đảm bảo phương trình nước nông tuyến tính thích hợp để mô tả các sóng tsunami trong đại dương sẽ xét ở chương 11. Dạng tính toán này hữu ích đối với công tác hoạch định bảo hiểm ngập lụt sóng thần và có thể ứng dụng để tăng hạn báo và độ chính xác của hệ thống cảnh báo sóng thần.

PHỤ LỤC 4.A: KHAI TRIỂN KHÔNG GIAN ĐỐI VỚI SÓNG PHẪNG

Xét tích số của các chuỗi khai triển Taylor $e^{zt/2}$ và $e^{-z/2t}$:

$$e^{z(t-1/t)/2} = e^{zt/2} e^{-z/2t} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{zt}{2} \right)^n \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{z}{2t} \right)^m \right]. \quad (\text{A.1})$$

Thực hiện phép nhân và nhóm các hệ số của số hạng t^n , ta được

$$e^{z(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \left[\frac{(z/2)^n}{n!} - \frac{(z/2)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(z/2)^{n+4}}{2!(n+2)!} + \dots + (-1)^r \frac{(z/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!} + \dots \right].$$

Chuỗi trong dấu móc trên chính là hàm Bessel bậc n , $J_n(z)$; do đó

$$e^{z(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z). \quad (\text{A.2})$$

Nếu thay

$$t = i e^{i\theta}, \quad \frac{1}{t} = -i e^{-i\theta}$$

vào phương trình (A.2) thì

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\theta+\pi/2)} J_n(z). \quad (\text{A.3})$$

Bây giờ ta kết hợp các cặp số hạng cùng có n nhưng ngược dấu và sử dụng đẳng thức

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

Phương trình (A.3) có thể viết thành một dạng khác:

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_0^{\infty} \epsilon_n \cos n\theta (i)^n J_n(z), \quad (\text{A.4})$$

ở đây đã sử dụng các ký hiệu Jacobi.

Với một sóng phẳng, đặt $z = kr$ trong phương trình (A.4), ta được

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_0^{\infty} \epsilon_n \cos n\theta i^n J_n(kr). \quad (\text{A.5})$$

CHƯƠNG 5 - DAO ĐỘNG CẢNG DO TÁC ĐỘNG SÓNG DÀI

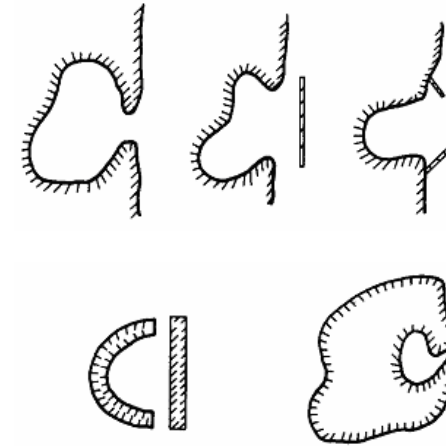
5.1 GIỚI THIỆU

Cảng là một vùng nước nửa kín thông với biển qua một hoặc một số cửa. Các cảng bình thường được xây dựng dọc bờ biển, nơi phần nước khuất của cảng là các vũng lõm tự nhiên hoặc được tạo ra bởi các đê chắn sóng nhô từ bờ ra phía biển (hình 1.1a–1.1c). Cảng nhân tạo có thể cách biệt xa đất liền, ví dụ cảng ngoài khơi cho các trạm phát điện ở Đại Tây Dương do Công ty điện khí công cộng New Jersey một thời đã xây dựng. Cảng này bao quanh hai nhà máy điện hạt nhân nổi bằng hai đê chắn sóng khổng lồ (hình 1.1d). Ngoài ra còn một số cảng nằm trên đảo nhỏ ngoài khơi, những cảng này có thể gần hoặc xa đất liền, như hình 1.1e.

Mặc dù các dao động trong cảng có thể do rất nhiều ngoại lực gây nên, nhưng nguyên nhân được nghiên cứu nhiều nhất là các sóng sóng thần (tsunami), chu kỳ từ vài phút đến một giờ và có xuất xứ từ các trận động đất xa. Nếu tổng thời gian diễn ra sóng thần đủ dài, thì dao động trong cảng có thể tiếp diễn nhiều ngày, làm đứt dây neo, hỏng đệm bảo vệ tàu, gây nguy hiểm khi neo, bốc dỡ hàng hoặc ra vào cảng... Nhiều khi các tàu sắp cập cảng phải neo lại bên ngoài, đợi đến khi ngừng dao động, gây trạm chề rất tốn kém.

Để hiểu sơ bộ về cơ chế vật lý của những dao động này, ta xét một cảng có cửa dọc theo đường bờ dài và thẳng. Các sóng tới bờ một phần phản xạ và một phần bị hấp thụ ở bờ biển. Tuy nhiên, một phần nhỏ bị nhiễu xạ qua cửa vào cảng và bị phản

xạ một lần nữa tại các biên bên trong cảng. Một phần năng lượng sóng phản xạ thoát ra khỏi cảng và lại phát xạ ra biển, trong khi một phần năng lượng lưu lại bên trong cảng. Nếu chuỗi sóng kéo dài và tần số sóng tới gần bằng tần số sóng đứng trong thủy vực kín, thì sự cộng hưởng trong cảng sẽ xuất hiện, vậy một sóng tới tương đối yếu có thể gây nên phản ứng khá lớn trong cảng.



Hình 1.1 Sự đa dạng của cấu hình cảng

Biên độ cộng hưởng lớn nhất có thể bị giới hạn bởi một số cơ chế sau đây:

- 1) Suy giảm phát xạ do năng lượng thoát ra biển qua cửa.
- 2) Mất mát do ma sát gần biên và cửa cảng.
- 3) Mất mát do sóng đổ trên các bãi nông.
- 4) Hiệu ứng vận chuyển năng lượng biên độ hữu hạn sang các hài tần cao hơn.

Trong số những cơ chế này, sự suy giảm phát xạ là dễ hiểu nhất về mặt lý thuyết và đã được xử lý lần đầu tiên trong một

bài báo của Miles và Munk (1961) đối với một hải cảng hình chữ nhật. Mất mát do ma sát xảy ra ở biên cảng và gần đỉnh đê chắn sóng tại cửa cảng; lượng mất mát này khó ước lượng và biến thiên nhiều tùy tính chất của biên. Muốn ước lượng tin cậy thì cần đến những thông tin thực nghiệm khó có thể thu được bằng mô hình bởi lý do các hiệu ứng tỉ lệ kích thước. Sóng đổ là hiện tượng chủ yếu liên quan với sóng gió ở trên những bãi thoải và cho đến nay thì không theo một lý thuyết nào. Rất may, đối với các sóng rất dài như sóng thần thì hiện tượng sóng đổ thường là không quan trọng.

Ở chương này, ta sẽ bỏ qua các mất mát do ma sát và do sóng đổ, chỉ xét các hiệu ứng suy giảm phát xạ. Sau phần đặt vấn đề, ta sẽ thảo luận riêng rẽ ba yếu tố của bài toán cảng: sóng đứng trong vịnh, khái niệm suy giảm phát xạ và nhiễu xạ ở khe. Tiếp nữa, đối với các sóng đầu vào hình sin và độ sâu không đổi, ta sẽ nghiên cứu bài toán đầy đủ gồm biển và các cảng với hình dạng đơn giản khác nhau. Sẽ xét các sóng ngắn đối với một vịnh hẹp. Ở cuối chương phương pháp phân tử-ghép tổng quát ở mục 4.11 sẽ được cải biên áp dụng cho các cảng độ sâu và hình dạng bất kỳ.

5.2 Thiết lập các bài toán dao động cảng

Để đơn giản, ta giả thiết như sau về chuyển động chất lỏng: chất lỏng không nhớt, dòng chảy không xoáy, biên độ sóng nhỏ vô hạn, bước sóng rất dài so với độ sâu và các đường biên bên có tính phản xạ hoàn toàn và thẳng đứng. Các phương trình đã rút ra ở mục 4.1 có thể áp dụng được. Để tiện dùng, ta sẽ nhắc lại dưới đây. Đối với dao động ngắn, li độ thoả mãn phương trình

$$g\nabla \cdot (h\nabla\zeta) = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

với điều kiện không có thông lượng

$$h \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \quad (2.2)$$

tại các vách bên. Đối với chuyển động điều hoà đơn, biên độ không gian η của li độ mặt tự do sẽ thoả mãn phương trình

$$\nabla \cdot (h\nabla\eta) + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0 \quad (2.3)$$

và chịu điều kiện không thông lượng

$$h \frac{\partial\eta}{\partial n} = 0 \quad (2.4)$$

tại các vách bên. Đối với độ sâu không đổi, phương trình (2.1) rút gọn thành phương trình sóng cổ điển, trong khi phương trình (2.3) thành phương trình Helmholtz

$$\nabla^2\eta + k^2\eta = 0, \quad (2.5)$$

trong đó $\omega = (gh)^{-1/2}k$.

Điều kiện phát xạ đối với chuyển động hình sin có thể viết ra một cách tường minh nếu địa hình ở phía xa cảng có tính đơn giản. Xét một cảng nằm trên đường bờ biển phản xạ hoàn toàn. Giả sử Ω là vùng gồm cảng và toàn bộ miền lân cận, và $\bar{\Omega}$ là phần còn lại của biển nơi có $h = \text{const}$ và đường bờ biển \bar{B} thẳng (xem hình 2.1). Sóng tới phẳng có thể diễn tả bằng

$$\eta' = A \exp[ik(x \cos\theta_i + y \sin\theta_i)], \quad (2.6)$$

trong đó A, k và hướng θ_i cho trước. Hệ thống sóng hoàn chỉnh trong đại dương $\bar{\Omega}$ có thể được chia thành

$$\eta = \eta' + \eta'' + \eta^s \quad (2.7)$$

trong đó η'' chỉ sóng phản xạ do bờ biển thẳng không tính đến địa hình địa phương gần cảng, η^s chỉ sóng phân tán do tác động của địa hình địa phương và bị lan toả do tác động dồn đẩy tại cửa cảng. Giả sử trục y trùng với đoạn bờ thẳng \bar{B} ; sóng phản

xạ là

$$\eta'' = A \exp [ik (-x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)] \quad (2.8)$$

do đó trên \bar{B} có

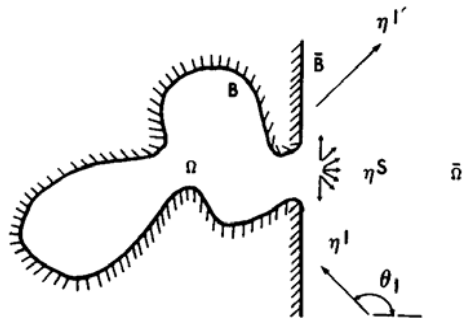
$$\frac{\partial}{\partial x} (\eta' + \eta'') = 0. \quad (2.9)$$

Khi đó sóng phát xạ/ phân tán sẽ không thể có thông lượng pháp tuyến dọc theo bờ biển thẳng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta^s = 0 \quad \text{trên } \bar{B}. \quad (2.10)$$

Hơn nữa, η^s phải hướng ra ngoài tại những khoảng cách lớn

$$(kr)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) \eta^s \rightarrow 0, \quad kr \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$



Hình 2.1 Sơ đồ định nghĩa

Trong trường hợp cảng khơi cách xa bờ một khoảng bằng nhiều lần bước sóng, người ta có thể đơn thuần bỏ qua sóng phản xạ η'' trong phương trình (2.7). Đối với các địa hình bờ biển loại khác, hoặc độ sâu ở vùng $\bar{\Omega}$ không phải hằng số, thì việc diễn tả tường minh η' và η'' là một vấn đề khó khăn.

Khi độ sâu không đổi ở mọi nơi trong Ω và $\bar{\Omega}$ và tất cả các biên đều thẳng đứng, thì thể vận tốc ba chiều đối với kh tùy ý có thể diễn tả bằng phương trình

$$\phi(x, y, z) = \frac{-ig \eta}{\omega} \frac{\text{ch}k(z+h)}{\text{ch}kh}.$$

Từ mục 3.5, ta đã biết rằng η cũng thoả mãn phương trình Helmholtz trừ việc ω và k liên quan với nhau bằng phương trình $\omega^2 = gk \text{th} kh$. Do các vách thẳng đứng, nên vectơ pháp tuyến nằm trong mặt phẳng ngang, và điều kiện biên là $\partial \eta / \partial n = 0$ tại vách bên. Như vậy, các bài toán giá trị biên đối với các sóng ngắn và sóng dài về hình thức là một. Sự đồng dạng toán học này cho phép người ta thực hiện các thí nghiệm cảng ở vùng nước sâu để có thể dễ dàng tránh các hiệu ứng phi tuyến.

5.3 CÁC HÀI TỰ NHIÊN TRONG VỊNH KÍN HÌNH DẠNG ĐƠN GIẢN VÀ ĐỘ SÂU KHÔNG ĐỔI

Trước hết nên bàn về những tính chất điển hình của các sóng đứng trong vịnh kín. Để đơn giản, ta giả thiết độ sâu không đổi. Bài toán giá trị biên đối với η bây giờ có thể coi là bài toán thực, được xác định bằng các phương trình thuần nhất (2.5) và (2.4), và có các nghiệm không tầm thường chỉ khi k bằng các giá trị riêng nhất định. Các giá trị tương ứng của ω được gọi là các tần số tự nhiên (hay tần số riêng) và các giá trị tương ứng của η là các hài dao động tự nhiên (hay hài riêng). Dưới đây sẽ xét hai thí dụ đơn giản.

5.3.1 Thủy vực hình chữ nhật

Giả sử các biên bên của là $x=0, a$ và $y=0, b$. Các nghiệm riêng của phương trình (2.5) được tìm bằng cách tách các biến

$$\eta = A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad (3.1)$$

với $n, m = 0, 1, 2, 3 \dots$ Các giá trị riêng tương ứng là

$$k = k_{nm} = \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2)$$

Các chu kỳ tự nhiên là

$$T_{nm} = 2\pi / \omega_{nm}, \quad (3.3)$$

trong đó ω_{nm} liên hệ với k_{nm} bằng mối quan hệ tán mạn

$$\omega_{nm}^2 = ghk_{nm}^2. \quad (3.4)$$

Nếu $a > b$, thì hài thấp nhất ($n=1, m=0$) có tần số thấp nhất và chu kỳ dài nhất, nó được gọi là hài cơ bản. Chuyển động tương ứng là chuyển động một chiều.

Nếu tỷ số giữa hai phía là một số hữu tỉ, tức $a = pL$, $b = qL$ (p, q là những số nguyên)

$$k = k_{nm} = \left[\left(\frac{m}{p} \right)^2 + \left(\frac{n}{q} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\pi}{L},$$

thì sẽ có hơn một tập hợp (n, m) tương ứng với cùng một tần số riêng. Tình huống này gọi là sự suy thoái.



Hình 3.1 Các đường đồng mức mặt tự do của hài tự nhiên $\cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)$ trong thủy vực hình chữ nhật

Ta sẽ minh họa cấu trúc không gian của hài $(n, m) = (1, 1)$, tức

$$\eta_{11} = A_{11} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Tại các biên $x=0, a$ và $y=0, b$ biên độ bằng cực đại. Mặt khác, biên độ sẽ bằng không dọc theo các đường nút $x=a/2$ hoặc $y=b/2$, những đường này chia thủy vực thành bốn hình chữ nhật. Tại một thời điểm nhất định hai hình chữ nhật kề nhau sẽ đối nhau về pha. Vậy nếu hai vùng nằm cao trên mực nước trung bình thì hai vùng kia sẽ nằm thấp dưới và ngược lại. Trên hình 3.1 biểu diễn các đường đồng mức.

Đối với các hài (n, m) cao hơn, mặt tự do cũng bị chia bởi n tuyến nút dọc $x/a = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots, (n - \frac{1}{2})\pi$ và đồng thời m tuyến nút dọc $y/b = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \dots, (m - \frac{1}{2})\pi$.

5.3.2 Thủy vực hình tròn

Giả sử bán kính của thủy vực là a ; ta sẽ chọn tọa độ cực (r, θ) sao cho điểm gốc nằm ở giữa. Phương trình Helmholtz có thể được viết dưới dạng phương trình (9.10) trong chương 4. Tại vách, $r=a$ thành phần vận tốc pháp tuyến theo bán kính triệt tiêu. Do đó

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = 0. \quad (3.5)$$

Bằng cách tách biến, nghiệm của phương trình Helmholtz là

$$\eta = J_m(kr) (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (3.6)$$

trong đó A_m và B_m là các hằng số tùy ý. Để thoả mãn điều kiện biên, ta cần có

$$J'_m(kr) \Big|_{r=a} = J'_m(ka) = 0. \quad (3.7)$$

Bây giờ $J'_m(z)$ là hàm dao động của z có một số lượng vô hạn giá trị không. Ký hiệu số không thứ n của J'_m bằng j'_{mn} :

$J'_m(j'_{mn}) = 0$, ta có các giá trị riêng:

$$k_{mn} = \frac{j'_{mn}}{a}, \quad n=1, 2, 3, \dots, m=1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

Các nghiệm riêng tương ứng hay các hài tự nhiên là

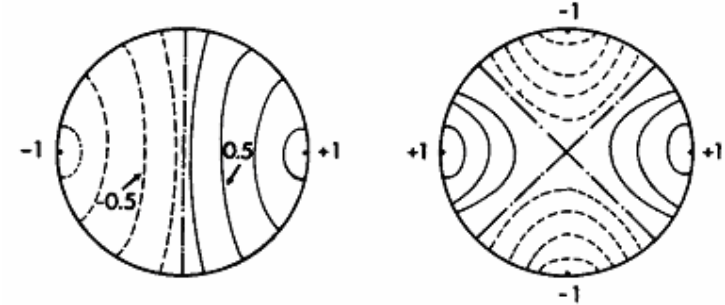
$$\eta_{mn} = J_m(k_{mn}r) (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta). \quad (3.9)$$

Bảng 3.1 Các giá trị của j'_{mn} sao cho $J'_m(j'_{mn}) = 0$

n	m					
	0	1	2	3	4	5
1	0	1,84118	3,05424	4,20119	5,31755	6,41562
2	3,83171	5,33144	6,70713	8,01524	9,28240	10,51986
3	7,01559	8,53632	9,96947	11,34592	12,18190	13,98719
4	10,17346	11,70600	13,17037	14,58525	15,96411	17,31284

Để minh họa cấu trúc của một hài cụ thể, ta sẽ xét sự biến thiên của mặt tự do đối với $\eta_{nm} = J_m(k_{mn}r) \cos m\theta$ với n, m cố định. Rõ ràng rằng $\cos m\theta = 1$ khi $m\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, 2m\pi$ và bằng -1 khi $m\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2m-1)\pi$. Vì vậy, $\theta = 0, \pi/m, 2\pi/m, 3\pi/m, \dots$ là các tuyến bụng (antinode), tại đó li độ của mặt là lớn nhất trên đường tròn bán kính r cho trước. Mặt khác, $\theta = \pi/2m, 3\pi/2m, 5\pi/2m, \dots$ là các tuyến nút, tại đó li độ bằng 0. Đối với một θ cố định, đường cong $J_m(k_{mn}r)$ cắt tuyến không đúng $n-1$ lần trong khoảng $r < a$, do đó có $n-1$ vòng nút; hiện tượng này là hệ quả của định lý dao động Sturm tổng quát trong lý thuyết các phương trình vi phân thường. Các phần mặt tự do nằm trên và dưới bề mặt trung bình được minh họa trên hình 3.2. Các giá trị của các điểm không này có trong Abramowitz và Stegun (1972) và được liệt kê trong bảng 3.1. Theo thứ tự tăng dần, các chỉ số (n, m) của các điểm không là $(0, 1), (1, 1), (2, 1), (0,$

$2), (3, 1), (4, 1), (1, 2), \dots$ Để bảo toàn khối lượng, thì hài $(0, 0)$ không thể tồn tại trong thủy vực kín hoàn toàn.



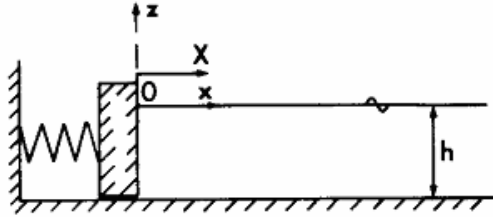
Hình 3.2 Các đường đồng mức của hai hài tự nhiên $J_1(k_{11}r) \cos \theta$ và $J_2(k_{21}r) \cos 2\theta$ trong vịnh tròn

5.4 KHÁI NIỆM SUY GIẢM PHÁT XẠ: MỘT VÍ DỤ VỀ MÔ HÌNH

Một thuộc tính quan trọng của nhiễu xạ sóng môi trường vô hạn là những dao động bất nguồn từ một vùng hữu hạn cũng sẽ bị suy giảm ngay cả khi môi trường là bảo toàn. Sự suy giảm này là do năng lượng được các sóng mang đi ra tới vô cùng và được gọi là hiện tượng *suy giảm phát xạ*. Để có được một số khái niệm về hiện tượng này, ta xét một ví dụ mô hình có tính chất giáo học thuần túy của Carrier (1970), mô hình này có đặc điểm vật lý điển hình của một hệ thống dao động kết hợp với các sóng lan truyền.

Xét một kênh bán vô hạn với độ sâu h và chiều rộng b (hình 4.1). Tại $x=0$ có một cổng với khối lượng M có thể trượt dọc kênh không bị ma sát. Cổng khối lượng M được trợ giúp

bằng một lò xo có độ đàn hồi K . Để đơn giản ta giả sử rằng không có rò rỉ tại $x=0$, ta sẽ tìm li độ $Xe^{-i\omega t}$ của cổng khi có một sóng nước nông tới với biên độ A và tần số ω từ phía $x \sim +\infty$.



Hình 4.1 Hệ lò xo vật nặng chống lại các sóng nước

Mặt nước có thể biểu diễn bằng

$$\zeta = \eta e^{-i\omega t} = A(e^{-ikx} + R e^{ikx})e^{-i\omega t} = A[e^{-ikx} + e^{ikx} + (R-1)e^{ikx}]e^{-i\omega t}. \quad (4.1)$$

Trong ngoặc vuông cuối ở phương trình trên, số hạng thứ hai đại diện cho sóng phản xạ khi cổng cố định và số hạng thứ ba là sóng phát xạ do chuyển động cảm ứng của cổng.

Phương trình chuyển động của cổng là

$$-M\omega^2 X = -KX - pbh, \quad (4.2)$$

trong đó p là áp suất thủy động lực trên một diện tích đơn vị tại $x=0$:

$$p = \rho g \eta = \rho g A (1 + R). \quad (4.3)$$

Các phương trình (4.2) và (4.3) có thể kết hợp thành

$$A(1+R) = -\frac{K - M\omega^2}{\rho g b h} X. \quad (4.4)$$

Tại điểm $x=0$, vận tốc chất lỏng $u(0) = (-ig/\omega)\eta_x(0)$ phải bằng vận tốc của cổng $-i\omega X$, vậy

$$u(0) = -i\omega X = \frac{gkA}{\omega}(-1+R). \quad (4.5)$$

Dễ dàng rút ra nghiệm từ các phương trình (4.4) và (4.5)

$$\frac{X}{2A} = \frac{\rho g b h}{-K + M\omega^2 + i\left(\frac{\omega^2}{k}\right)\rho b h} = \frac{\rho g b h}{-K + M\omega^2 + i\omega(gh)^{1/2}(\rho b h)}. \quad (4.6)$$

Biên độ sóng phát xạ là

$$R - 1 = -2i\omega\left(\frac{h}{g}\right)^{1/2} \frac{X}{2A}.$$

Phương trình (4.6) có thể so sánh với hệ thống vật lò xo giảm sóc thông dụng. Ngoại trừ tỉ lệ không đổi, mẫu số trong phương trình (4.6) có thể được gọi là một trở kháng. Phần ảo (tỷ lệ với $\rho b h$) của trở kháng đóng vai trò làm suy giảm. Để xem xét vấn đề này ta xét một hệ thống không chịu lực. Dao động tự do không tầm thường có thể vẫn được diễn tả bằng phương trình (4.6) với $A=0$ nếu ta đòi hỏi mẫu số triệt tiêu, nghĩa là

$$-K + M\omega^2 + i\omega(gh)^{1/2}(\rho b h) = 0, \quad (4.7)$$

đây là điều kiện giá trị riêng với các nghiệm phức của ω :

$$\omega = \pm \left\{ \omega_0^2 - \left[\frac{(gh)^{1/2} \rho b h}{2M} \right]^2 \right\}^{1/2} - \frac{i(gh)^{1/2} \rho b h}{2M},$$

trong đó $\omega_0 = K/M$. Chèn nghiệm vào nhân tử thời gian $\exp(-i\omega t)$, ta thấy dao động giảm theo hàm mũ với tốc độ tỉ lệ với

$$\frac{(gh)^{1/2} \rho b h}{2M}. \quad (4.8)$$

Để xem xét nguồn gốc vật lý của hiện tượng suy giảm này, ta sẽ tính tốc độ của công do sóng phát xạ thực hiện, lấy trung bình trong một chu kỳ

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{rad} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [p_{rad} u^*]_{x=0} bh \\
&= \frac{1}{2} bh \operatorname{Re} \rho g A (R-1) (-i\omega X)^* \\
&= \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^3}{k} |X|^2 = \frac{1}{2} \rho bh (\omega^2 (gh)^{1/2}) |X|^2
\end{aligned}$$

sau khi đã sử dụng phương trình (4.5) và $\omega = (gh)^{1/2} k$. Đại lượng xác định dương này rõ ràng chỉ liên quan với số hạng suy giảm sao cho sự suy giảm là do tốc độ công được các sóng phát xạ phát tán vào chất lỏng. Do đó, ta xem thành phần ảo trong phương trình (4.6) như là thành phần suy giảm phát xạ.

Phản ứng (4.6) còn có thể được viết như là hàm của ω :

$$\frac{X}{2A} = \left(\frac{\rho g b h}{M} \right) \left(k^2 - \frac{K}{Mgh} + \frac{ik\rho b h}{M} \right)^{-1}. \quad (4.9)$$

hay là hàm của k :

$$\frac{X}{2A} = \left(-\frac{\rho b}{M} \right) \left(k^2 - \frac{K}{Mgh} + \frac{ik\rho b h}{M} \right)^{-1}. \quad (4.10)$$

Trên mặt phẳng k phức có hai cực đặt tại

$$\pm \tilde{k} + i\hat{k} \quad (4.11)$$

với

$$\tilde{k} = k_0 \left[1 - \left(\frac{\rho b h^2}{M} \right)^2 \frac{Mg}{4Kh} \right]^{1/2}, \quad k_0 \equiv \frac{\omega_0}{(gh)^{1/2}} \equiv \left(\frac{K}{M} \right)^{1/2} \frac{1}{(gh)^{1/2}}, \quad (4.12)$$

và

$$\hat{k} = -\frac{\rho b h}{2M} < 0. \quad (4.13)$$

Phương trình (4.10) khi đó trở thành

$$\frac{X}{2A} = \left(\frac{\rho b}{M} \right) (k - \tilde{k} - i\hat{k})^{-1} (k + \tilde{k} - i\hat{k})^{-1}. \quad (4.14)$$

Khi sự suy giảm nhỏ, hai cực chỉ nằm phía dưới trục thực

một chút. Trong bài toán vật lý, ω và k đều là hai số thực dương; cực duy nhất có ý nghĩa vật lý là $\tilde{k} + i\hat{k}$. Tại lân cận nó, $|X|$ lớn và phương trình (4.14) có thể được xấp xỉ bằng

$$\frac{X}{2A} \equiv \left[\left(\frac{\rho b}{M} \right) \frac{1}{2\tilde{k}} \right] (k - \tilde{k} - i\hat{k})^{-1}. \quad (4.15)$$

Cực đại của $|X/2A|^2$ bằng

$$\left| \frac{X}{2A} \right|_{\max}^2 = (\tilde{k}h)^{-2} \equiv (k_0h)^{-2}$$

đạt được ở lân cận $k \equiv \tilde{k}$. Khi $k - \tilde{k} = \pm \hat{k}$, giá trị bình phương của phản ứng sẽ giảm xuống bằng một nửa của giá trị đỉnh, do đó \hat{k} là thước đo độ rộng của đường cong phản ứng ($|X/2A|^2$ theo k).

Giống như trong lý thuyết dòng điện, ta có thể định nghĩa nhân tử chất lượng Q bằng

$$Q = -\frac{\hat{k}}{\tilde{k}} \equiv \frac{\rho b h}{2M} \left(\frac{M}{K} \right)^{1/2} (gh)^{1/2}. \quad (4.16)$$

Khi yếu tố suy giảm phát xạ \hat{k} giảm, thì Q giảm; độ rộng đỉnh của đường cong phản ứng giảm, do đó dạng đường cong nhọn hơn. Như đã thấy từ phương trình (4.8), tích $Q\omega$ cũng tương ứng với tốc độ suy giảm của các dao động tự do.

5.5 HIỆN TƯỢNG NHIỀU XẠ Ở KHE HẸP

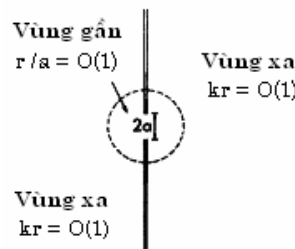
Cửa cảng thường là một cửa mở dọc theo một đê chắn sóng dài và mảnh nào đó. Sự truyền sóng qua cửa cảng rõ ràng rất đáng quan tâm. Để đơn giản hoá phân tích, ta giả thiết đê chắn sóng mảnh, thẳng đứng và có tính phản xạ hoàn toàn, và độ sâu không đổi sao cho bài toán giống như bài toán tương tự về âm thanh.

Theo hình 5.1, ta xét sóng tới thẳng góc từ phía $x > 0$. Tại

phía sóng tới, $x > 0$, toàn bộ hệ thống sóng bao gồm sóng tới, sóng phản xạ từ vách cứng và các nhiễu động do chuyển động chất lỏng dọc theo khe hở. Ở phía truyền sóng, $x < 0$, chỉ có các nhiễu động do chuyển động dọc theo khe. Khe hoạt động như một cái piston trong vách ngăn và phát xạ sóng ra ngoài vô cùng từ cả hai phía.

Bài toán giá trị biên có thể giải cho độ rộng tùy ý của khe hở bằng phương pháp phương trình tích phân, ta sẽ áp dụng phương pháp khai triển tiệm cận xứng hợp, phương pháp này đặc biệt thuận tiện đối với những khe hở có độ rộng nhỏ hơn nhiều so với bước sóng (Buchwald, 1971).

Về mặt trực giác, khái niệm về phương pháp này đã được giải thích ở mục 4.2.2. Một cách ngắn gọn, khi các phần khác nhau của vùng vật lý được quy định bằng các kích thước khác nhau, ta sẽ xấp xỉ các phương trình và các điều kiện biên tuân theo các kích thước địa phương và tìm các nghiệm thích hợp ở các vùng riêng biệt này. Nghiệm ở trong một vùng thường không thoả mãn điều kiện biên ở vùng khác, dẫn đến một sự không xác định. Bằng cách yêu cầu chúng phù hợp ở một số vùng trung gian, hiện tượng không xác định sẽ bị xoá bỏ và ta tìm được nghiệm theo trật tự mong muốn.



Hình 5.1 Khe hẹp giữa hai đê chắn sóng

Định nghĩa vùng xa (*far field*) là vùng ở cách xa khe một vài bước sóng

$$kr = O(1) \quad (\text{vùng xa}). \quad (5.1)$$

Rõ ràng, $1/k$ là kích thước hợp lý và tất cả các số hạng trong phương trình Helmholtz quan trọng như nhau. Tại khoảng cách rất xa từ khe hở, các sóng phát xạ phải thoả mãn phương trình Helmholtz và điều kiện phát xạ. Tuy nhiên, đối với người quan sát ở vùng xa, thì khe hở là một vùng rất nhỏ ở lân cận của gốc. Sóng phát xạ có thể được diễn tả bằng cách cộng chồng các nghiệm đơn tại gốc tọa độ và không gây ra thông lượng dọc theo trục y :

$$\eta_{\pm}^R = \frac{\omega Q^{\pm}}{2g} H_0^{(1)}(kr) + \frac{\omega \mu^{\pm}}{2g} H_1^{(1)}(kr) \sin \theta + \dots, \quad x \gg 0. \quad (5.2)$$

Các nghiệm tổng cộng cho vùng xa ở cả hai phía của khe hở là

$$\eta_{+} = 2A \cos kx + \eta_{+}^R, \quad x > 0, \quad \text{và} \quad \eta_{-} = \eta_{-}^R, \quad x < 0. \quad (5.3)$$

Từ số hạng thứ nhất trong chuỗi của phương trình (5.2), thông lượng đi ra từ nửa vòng tròn có bán kính nhỏ quanh gốc tọa độ bằng, đối với x hoặc lớn hơn không, hoặc nhỏ hơn không $x \gg 0$:

$$\text{thông lượng} = \lim_{r \rightarrow 0} \pi r \left(\frac{-ig}{\omega} \frac{\omega Q^{\pm}}{2g} \right) \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) = Q^{\pm}.$$

Do đó số hạng đầu của phương trình (5.2) biểu diễn nguồn có thông lượng Q^{\pm} đi vào nửa mặt phẳng ($x > 0$). Các số hạng tiếp theo là cực đôi, cực bốn...

Gần điểm nối, kích thước độ dài là độ rộng khe; do đó, chúng ta có thể định nghĩa vùng gần (*near field*) nơi

$$\frac{r}{a} = O(1). \quad (5.4)$$

Trong vùng này

$$\frac{k^2 \eta}{\nabla^2 \eta} = O(ka)^2$$

do đó dòng chảy được mô tả chủ yếu bằng phương trình Laplace

$$\nabla^2 \eta = 0$$

với sai số tương đối có bậc $O(ka)^2$. Điều kiện không có thông lượng cần phải được thoả mãn tại các vách cứng. Điều kiện phát xạ sẽ không còn thích ứng nữa và cần loại bỏ. Bây giờ phương trình (5.5) và điều kiện không thông lượng sẽ xác định một bài toán dòng thế thông thường với một tham số duy nhất là thời gian. Vì η là hàm điều hoà, nên η có thể coi là phần thực của hàm giải tích W của biến phức $z = x + jy$, nghĩa là

$$\eta = \text{Re}_j W(z), \quad (5.6)$$

trong đó Re_j là phần thực theo j , với i được xem là một số thực. Giải các phương trình (5.5) và (2.4) sẽ quy về tìm một hàm $W(z)$ giải tích trong mặt phẳng z với

$$\text{Im}_j W(z) = \text{const} \quad \text{trên các tường cứng}. \quad (5.7)$$

Đối với những thủy vực hình dạng đơn giản, nghiệm chủ yếu sẽ được tìm một cách dễ nhất bằng phương pháp ánh xạ thích hợp. Trong ví dụ này, ta sẽ dụng phép biến đổi Joukowski trong lý thuyết cánh máy bay

$$z = -\frac{ja}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \quad (5.8)$$

để ánh xạ mặt phẳng z bên ngoài hai đê chắn sóng lên nửa mặt phẳng trên của τ (xem hình 5.2). Cụ thể, ảnh của vách cứng ABD là thực âm trên trục τ và ảnh của $A'B'D'$ là thực dương trên trục τ . Để thoả mãn điều kiện $\text{Im}_j W = 0$ trên $A'B'D'$ và $\text{Im}_j W = \text{const}$ trên ABD , ta chấp nhận nghiệm

$$W(z) = C + M \ln \tau + C_1 \tau + C_2 \tau^2 + \dots + C_{-1} \tau^{-1} + C_{-2} \tau^{-2} + \dots \quad (5.9)$$

trong đó các hệ số là thực đối với j nhưng có thể là phức đối với i . Các hệ số Q^\pm và μ^\pm trong phương trình (5.2) cũng như C , M và $C_1, C_{-1} \dots$ sẽ tìm được khi ghép vùng gần và vùng xa.

Chúng ta thử cho rằng trong một vùng trung gian tỏ ra là gần điểm gốc theo người quan sát vùng xa ($kr \ll 1$) nhưng trong khi đó lại là xa người quan sát vùng gần ($r/a \gg 1$), các nghiệm vùng xa và vùng gần có thể được ghép lại. Đối với $kr \ll 1$, khai triển bên trong của vùng xa là

$$\eta_+ = 2A + \frac{i\omega Q^+}{g} \left(-\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma kr}{2} \right) - \frac{\omega \mu^+}{2g} \frac{1}{r} \sin \theta + \dots O(kr)^2 \ln kr, \quad x > 0 \quad (5.10)$$

$$\eta_- = + \frac{i\omega Q^-}{g} \left(-\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma kr}{2} \right) - \frac{\omega \mu^-}{2g} \frac{1}{r} \sin \theta + \dots O(kr)^2 \ln kr, \quad x < 0 \quad (5.11)$$

trong đó $\ln \gamma$ là hằng số Euler = 0,5772157... Để xấp xỉ nghiệm vùng gần đối với $r/a \gg 1$, ta cần phân biệt hai phía $x < 0$ và $x > 0$. Trên phía $x > 0$, vùng $|z|/a \gg 1$ tương ứng với $|\tau| \gg 1$ trong mặt phẳng τ sao cho

$$\tau = \frac{2jz}{a} \left[1 + O\left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \right] \quad (5.12)$$

từ phương trình (5.8). Nếu thế biểu thức này vào phương trình (5.6), thì khai triển bên ngoài của vùng gần η sẽ nhận được bằng

$$\eta \approx \text{Re}_j W \approx \text{Re}_j \left[C + M \ln \frac{2jz}{a} + C_1 \left(\frac{2jz}{a} \right) + \dots + C_{-1} \left(\frac{a}{2jz} \right) + \dots \right]$$

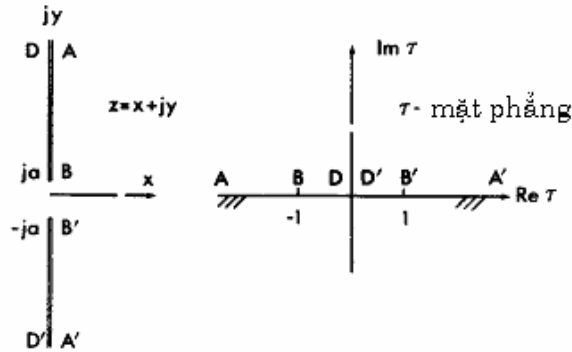
$$= C + M \ln \frac{2r}{a} - C_1 \left(\frac{2y}{a} \right) + \dots + C_{-1} \left(\frac{a}{2r} \right) \sin \theta + \dots \quad (5.13)$$

ở phía $x < 0$, vùng $|z|/a \gg 1$ tương ứng với góc trong mặt phẳng τ . Do đó, từ phương trình (5.8)

$$\tau = \frac{a}{2jz} \left[1 + O\left(\frac{z}{a}\right)^{-2} \right], \quad (5.14)$$

và khai triển bên ngoài của vùng gần là

$$\begin{aligned} \eta &\approx \operatorname{Re}_j W \approx \operatorname{Re}_j \left(C + M \ln \frac{a}{2jz} + C_1 \left(\frac{a}{2jz} \right) + \dots + C_{-1} \left(\frac{2jz}{a} \right) + \dots \right) \\ &= C - M \ln \frac{2r}{a} - C_1 \left(\frac{a}{2r} \right) \sin \theta + \dots - C_{-1} \left(\frac{2y}{a} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$



Hình 5.2 ánh xạ vùng gần từ mặt phẳng z lên nửa trên của mặt phẳng τ

Bây giờ ta cho bằng nhau các phương trình (5.10) và (5.13) để xứng hợp η_+ . Từ các hệ số của các số hạng giống nhau, ta tìm được một số biểu thức đại số:

$$(\text{const}): \quad 2A + \frac{i\omega Q^+}{g} \left[-\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right] = C + M \ln \frac{2}{a} \quad (5.16 \text{ a})$$

$$(\ln r): \quad \frac{i\omega Q^+}{\pi g} = M \quad (5.16 \text{ b})$$

$$(y): \quad C_1 = 0 \quad (5.16 \text{ c})$$

$$\left(\frac{1}{r} \sin \theta \right): \quad C_{-1} = \frac{\omega \mu^{+1}}{ga}. \quad (5.16 \text{ d})$$

Xứng hợp η_- bằng cách cho bằng nhau các phương trình (5.11) và (5.15), ta có:

$$(\text{const}): \quad \frac{i\omega Q^-}{g} \left[-\frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right] = C - M \ln \frac{2}{a} \quad (5.17 \text{ a})$$

$$(\ln r): \quad \frac{i\omega Q^-}{\pi g} = -M \quad (5.17 \text{ b})$$

$$(y): \quad C_{-1} = 0 \quad (5.17 \text{ c})$$

$$\left(\frac{1}{r} \sin \theta \right): \quad C_1 = \frac{\omega \mu^{-1}}{ga}. \quad (5.17 \text{ d})$$

Nhận thấy ngay rằng

$$C_1 = C_{-1} = 0, \quad (5.18 \text{ a})$$

$$\mu^+ = \mu^- = 0. \quad (5.18 \text{ b})$$

Có thể chỉ ra rằng các cực bậc cao hơn gần bằng 0 do đó chỉ có yếu tố nguồn tại bậc dẫn đầu là quan trọng. Vậy C_n , $n = \pm 2, \pm 3 \dots$ cũng bằng 0 và để đạt độ chính xác hiện tại không cần phải có các lũy thừa khác không của τ trong nghiệm bên trong. Thực tế này sẽ được sử dụng tiếp trong các phân tích sau mà không cần kiểm tra nữa.

Bây giờ chỉ còn bốn ẩn: Q^\pm , M và C có thể được giải và cho kết quả là:

$$-\frac{i\omega Q^+}{g} = +\frac{i\omega Q^-}{g} = \frac{A}{-\frac{1}{2}i + (1/\pi) \ln(\gamma ka/4)}, \quad (5.19 \text{ a})$$

$$M = +\frac{i\omega Q^+}{\pi g} = -\frac{i\omega Q^-}{\pi g}, \quad (5.19 \text{ b})$$

$$C = A. \quad (5.19 \text{ c})$$

Kết hợp hai phương trình (5.19 a) với (5.2), cuối cùng ta có

$$\eta_{\pm}^R \approx \frac{\pm i \frac{1}{2} AH_0^{(1)}(kr)}{-\frac{1}{2}i + (1/\pi) \ln(\gamma ka/4)}. \quad (5.20)$$

Khai triển phương trình Hankel đối với kr lớn, ta có

$$\eta_{\pm}^R = \pm A \wp \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} e^{ikr - i\pi/4} \quad (5.21)$$

trong đó

$$\wp = \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma ka}{4} \right)^{-1}. \quad (5.22)$$

Hàm $-\ln z$ tiến đến vô cùng rất chậm khi z giảm. Ví dụ, $-\ln z = 2,0, 4,6, 6,9, \dots$ khi $z = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ v.v... Vì vậy, $-\ln(\gamma ka/4)$ thực sự không lớn trong khoảng biến thiên thực tế của ka , và $|\wp|$ nhỏ dần chậm khi ka giảm như bảng dưới đây:

ka	1	0,1	0,01	0,001
$ \wp $	0,8890	0,4506	0,2786	0,1995

ở mức độ xấp xỉ hiện tại, vùng gần bị chi phối bởi một hằng số và một đại lượng tỉ lệ với $\ln r$. Về mặt vật lý, hằng số thể hiện sự nâng lên và hạ xuống đều đặn của mặt tự do, còn đại lượng sau chỉ rằng khe hở hoạt động như là một nguồn phát sinh sóng tới một phía và như là một điểm hấp thụ sóng có cùng biên độ đối với phía kia.

Để kết luận, ta lưu ý rằng với ka tùy ý, bài toán nhiễu xạ có thể giải bằng một số phương pháp xấp xỉ dựa trên phương pháp các phương trình tích phân. Khi ka tăng, biên độ sóng phát xạ \wp sẽ phụ thuộc phức tạp hơn vào θ . Như sau này sẽ thấy, sự

cộng hưởng đáng kể ở trong cảng sẽ xuất hiện khi bước sóng ít nhất là cùng cỡ với kích thước cảng, mà kích thước cảng thường lớn hơn nhiều so với độ rộng của cảng. Vì vậy chúng ta sẽ không thảo luận thêm về bài toán khe hở.

5.6 PHÂN TÁN DO MỘT KÊNH HOẶC VỊNH HẸP DÀI

5.6.1 Nghiệm tổng quát

Ta xét một kênh hẹp độ rộng $2a$ thông với biển. Hình dạng kênh mô tả trên hình 6.1. Đối với các sóng dài, $ka \ll 1$, vùng xa trong kênh chỉ có thể là một chiều và trở thành trường hợp đặc biệt của mục 4.1.2. Vì vậy, nghiệm tổng quát của vùng xa trong kênh là

$$\eta_c = Be^{-ikx} + De^{ikx}, \quad x < 0 \quad (6.1)$$

với khai triển bên trong

$$\eta_c = (B + D) + ik(-B + D)x + \dots O(kx)^2 \quad \text{với } |kx| \ll 1. \quad (6.2)$$

Giống như trước, nghiệm vùng xa trong đại dương là

$$\eta_0 \approx 2A \cos kx + \frac{\omega Q}{2g} H_0^{(1)}(kr) \quad (6.3)$$

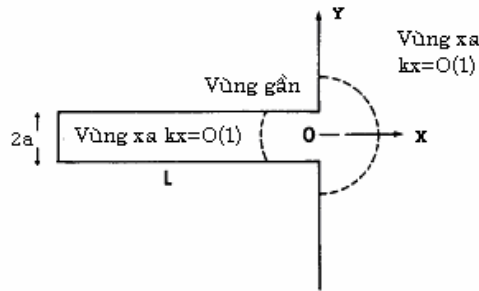
với khai triển bên trong

$$\eta_0 \approx 2A \cos kx + \frac{\omega Q}{2g} \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma kr}{2} \right) + O(kr), \quad kr \ll 1. \quad (6.4)$$

Bài toán vùng gần là bài toán dòng chảy thế qua một vùng của sông có dạng vuông cạnh (xem hình 6.2). Bằng phép biến đổi Schwarz-Christoffel, vùng vật lý trong mặt phẳng phức z ($z = x + jy$) có thể ánh xạ lên nửa trên của mặt τ theo

$$z = \frac{2a}{\pi} \left[-j(\tau^2 - 1)^{1/2} + \ln \frac{\tau}{(\tau^2 - 1)^{1/2} + j} \right] \quad (6.5)$$

(Kober, 1957, tr. 155) với các ảnh biểu diễn trên hình 6.2. Đối với giá trị đơn, căn bậc hai $(\tau^2 - 1)^{1/2}$ được xác định trong mặt phẳng τ với một nhánh cắt dọc trục thực $-1 \leq \text{Re } \tau \leq 1$, và nhánh được lựa chọn sao cho $(\tau^2 - 1)^{1/2} \rightarrow \tau$ khi $|\tau| \rightarrow \infty$. Hàm logarit $\ln \tau$ được xác định với mặt cắt dọc phần dương của trục thực.



Hình 6.1 Dạng một vịnh hẹp

Xấp xỉ vùng gần phải là giải tích trong τ như trước đây

$$\eta = \text{Re}_j W(\tau) = \text{Re}_j (M \ln \tau + C) \quad (6.6)$$

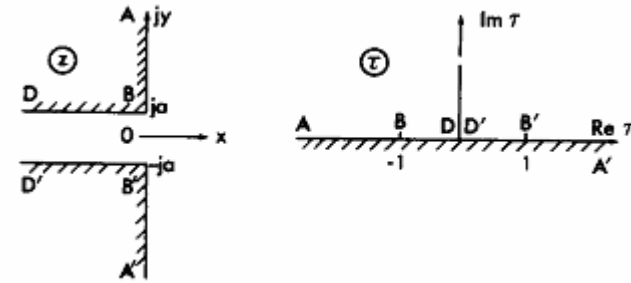
với M và C là số thực theo j . Khai triển phía ngoài cần phải được tính bằng cách tách riêng hai phía $x \gg 0$. Trên phía đại dương, $x > 0$, $|z/a|$ lớn tương ứng với $|\tau|$ lớn (xem hình 6.2).

Bằng cách khai triển về phải của phương trình (6.5), ta có

$$z = \frac{2a}{\pi} \left[-j\tau + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \right], \quad -j\tau = \frac{\pi z}{2a} \left[1 + O\left(\frac{a}{z}\right)^2 \right], \quad x > 0. \quad (6.7)$$

Thế (6.7) vào (6.6), ta được khai triển ngoài của vùng gần

$$\eta \cong \text{Re}_j M \ln \frac{j\pi z}{2a} + C = M \ln \frac{\pi r}{2a} + C, \quad x > 0. \quad (6.8)$$



Hình 6.2 ánh xạ vùng gần từ mặt z tới nửa trên của mặt τ

Ở phía kênh, $x < 0$, $|z/a|$ lớn tương ứng với $|\tau|$ nhỏ. Vì từ phương trình (6.5):

$$\begin{aligned} \frac{\pi z}{2a} &= 1 + \ln \tau - \ln 2j + O(\tau)^2 \\ &= \ln \frac{e\tau}{2j} + O(\tau)^2 \quad \text{hay} \quad \tau \cong \frac{2j}{e} e^{\pi z/2a}, \quad -\frac{x}{a} \gg 1, \end{aligned}$$

ta có

$$\ln \tau \cong \frac{\pi z}{2a} - \ln \frac{e}{2j}, \quad (6.9)$$

sai số sẽ nhỏ theo hàm mũ khi $x/a \rightarrow -\infty$. Khai triển ngoài của nghiệm vùng gần, do đó, sẽ bằng

$$\eta \cong M \frac{\pi x}{2a} - M \ln \frac{e}{2} + C, \quad x < 0. \quad (6.10)$$

Xúng hợp các nghiệm trong và ngoài trên phía kênh $x < 0$ cho

$$B + D = C - M \ln \frac{e}{2}, \quad (6.11 a)$$

$$ik(-B + D) = \frac{\pi M}{2a}. \quad (6.11 b)$$

Tương tự, kết hợp hai phương trình (6.4) và (6.8) ta có kết quả trên phía đại dương là

$$2A + \frac{\omega}{2g} Q \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right) = C + M \ln \frac{\pi}{2a}, \quad (6.11 \text{ c})$$

$$\frac{i Q \omega}{\pi g} = M. \quad (6.11 \text{ d})$$

Như vậy đến nay ta có bốn phương trình đại số cho năm ẩn số: B, D, C, M và Q ; với A cho trước. Cần có một điều kiện nữa, nó phụ thuộc vào điều kiện ràng buộc tại đầu xa của kênh. Những khả năng sau đây đáng quan tâm về mặt vật lý:

1) Sóng phân tán vào kênh dài vô hạn, không có phản xạ ở đầu xa của kênh. Vì chỉ có thể có các sóng đi về bên trái, $D=0$, vì thế nghiệm của kênh là

$$\eta_c = B e^{-ikx}. \quad (6.12)$$

2) Sóng tới từ đầu xa của kênh và truyền ra biển. Trong trường hợp này, D cho trước và $A=0$.

3) Sóng phân tán vào vịnh dài có chiều dài L , đầu xa $x=-L$ có tính phản xạ cao. Ở đây ta đòi hỏi

$$\frac{\partial \eta_c}{\partial x} = 0, \quad x = -L.$$

Nghiệm ngoài tương ứng là

$$\eta_c = E \cos k(x+L), \quad (6.13)$$

do đó

$$B = \frac{1}{2} E e^{-ikL}, \quad (6.14 \text{ a})$$

$$D = \frac{1}{2} E e^{ikL}. \quad (6.14 \text{ b})$$

Khai triển trong tương ứng là

$$\eta_c = E [\cos kL + (\sin kL)kx] + O(kx)^2. \quad (6.15)$$

Bây giờ ta có thể giải các bài toán đại số để tính các hệ số chưa biết cho từng trường hợp. Ví dụ, với bài toán thứ nhất (sóng phân tán vào kênh dài), ta được

$$\frac{\omega Q}{2g} = \frac{2Aka}{[1 + ka + (2ika/\pi) \ln(2\gamma ka/\pi e)]}, \quad (6.16)$$

$$B = \frac{-2A}{[1 + ka + (2ika/\pi) \ln(2\gamma ka/\pi e)]}. \quad (6.17)$$

Một lần nữa C chỉ liên quan đến vùng gần và sẽ không được ghi nhận. Phương trình (6.16) đưa ra cường độ của nguồn phát sóng quay trở lại đại dương vô hạn và phương trình (6.17) cho biên độ của sóng truyền qua.

Bài tập 6.1

Tìm nghiệm cho bài toán 2: sóng truyền từ kênh ra biển và thảo luận kết quả.

5.6.2 Vịnh hẹp mở

Trường hợp một vịnh hẹp độ dài hữu hạn, tức bài toán 3 ở trên, sẽ minh họa nhiều tính chất chung của sự cộng hưởng trong cảng. Vì vậy ở đây ta sẽ phân tích chi tiết. Miles và Munk (1961) lần đầu tiên đã phân tích đầy đủ bài toán này. Xấp xỉ ở cửa vịnh của họ hơi khác so với phép tiệm cận xứng hợp (theo Unluata và Mei, 1973).

Kết hợp các phương trình (6.14 a) và (6.14 b) với các phương trình (6.11 a)–(6.11 d), ta được phản ứng η_c của vịnh và lưu lượng Q qua cửa:

$$\eta_c = \frac{2A \cos k(x+L)}{\cos kL + (2ka/\pi) \sin kL \ln(2\gamma ka/\pi e) - ika \sin kL}, \quad (6.18)$$

$$\frac{\omega Q}{2g} = \frac{2Aika \sin kL}{\cos kL + (2ka/\pi) \sin kL \ln(2\gamma ka/\pi e) - ika \sin kL}, \quad (6.19)$$

trong đó η_c ứng với chuyển động sóng từ vùng xa ra khỏi của vịnh một khoảng lớn hơn $2a$ rất nhiều nhưng nhỏ hơn bước sóng cũng rất nhiều. Với cường độ sóng đứng $2A$, ta có thể định ra một hệ số khuếch đại:

$$\wp = \frac{1}{\cos kL + (2ka/\pi) \sin kL \ln(2\gamma ka/\pi e) - ika \sin kL} \quad (6.20)$$

sao cho

$$\eta_c = 2A \wp \cos k(x+L). \quad (6.21)$$

Đồ thị của $|\wp|^2$ phụ thuộc vào kL , với ka là tham số, được gọi là đường cong phản ứng (*response curve*).

Vì $ka \ll 1$, đường cong phản ứng có một đỉnh gần các giá trị 0 của $\cos kL$, có nghĩa là

$$\cos kL \cong 0, \quad kL \cong k_n L = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vì các đại lượng có bậc $O(ka)$ trong phương trình (6.20) nhỏ, nên các đỉnh cộng hưởng hơi di dời khỏi các giá trị thô này. Ta sẽ có phép xấp xỉ tốt hơn nếu cho

$$k = k_n + \Delta$$

và khai triển đối với Δ nhỏ:

$$\cos kL = -L\Delta \sin k_n L + O(\Delta^3), \quad \sin kL = \sin k_n L + O(\Delta^2).$$

Tại lân cận của đỉnh cộng hưởng thứ n hệ số khuếch đại bằng

$$\begin{aligned} \wp &\cong \frac{1}{-\sin k_n L [L\Delta - (2k_n a/\pi) \ln(2\gamma k_n a/\pi e) + ik_n a]} \\ &\cong \frac{1}{(-1)^{n+1} [(k - \tilde{k}_n)L + ik_n a]}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

với

$$\tilde{k}_n \equiv k_n \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{a}{L} \ln \frac{2\gamma k_n a}{\pi e} \right) \quad (6.23)$$

phương trình này có thể so sánh với phương trình (4.15) như là một thí dụ mẫu. Rõ ràng, đỉnh xảy ra tại $k = \tilde{k}_n$, và khoảng di rời của đỉnh bằng

$$(\tilde{k}_n - k_n) = \frac{2}{\pi} \frac{k_n a}{L} \ln \frac{2\gamma k_n a}{\pi e} < 0. \quad (6.24)$$

Xung quanh đỉnh, bình phương hệ số khuếch đại là

$$|\wp| = \frac{1}{|(k - \tilde{k}_n)L|^2 + (k_n a)^2}, \quad (6.25)$$

trong khi giá trị đỉnh là

$$|\wp|_{\max} = \frac{1}{k_n a} = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi a/L}. \quad (6.26)$$

Vậy là độ cao của các đỉnh cộng hưởng tiếp sau sẽ giảm theo số hiệu hài n .

Đối với hài n , đồ thị của \wp theo kL xấp xỉ đối xứng qua đỉnh. Tại những giá trị

$$(k - \tilde{k}_n)L = \pm k_n a,$$

thì giá trị $|\wp|^2$ giảm một nửa. Vậy $k_n a$ là thước đo của cả độ cao đỉnh cũng như một nửa độ rộng của đường cong cộng hưởng. Trắc diện sóng tương ứng trong vịnh tỉ lệ một cách thô với

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left(\frac{x}{L} + 1 \right) \right].$$

Đặc biệt, với hài thấp nhất $n=0$, chiều dài của vịnh bằng khoảng một phần tư bước sóng, thành thử của cảng rất gần với điểm nút đầu tiên. Ta hãy so sánh hai vịnh cùng độ dài L , nhưng khác độ rộng. Cảng hẹp hơn sẽ có độ di dời $(k_n - \tilde{k}_n)L$ nhỏ

và đỉnh cộng hưởng sẽ nhọn và cao hơn. Khi $ka \rightarrow 0$, độ suy giảm phát xạ sẽ giảm dần đến 0 và độ cao đỉnh sẽ trở thành vô hạn. Vì độ rộng của đỉnh cộng hưởng trên đồ thị phản ứng cũng giảm theo a , nên sóng tới phải điều chỉnh tần số một cách chính xác về tần số đỉnh để cộng hưởng với cảng. Nếu sự điều tần hơi sai, sự phản ứng sẽ giảm rất nhiều. Đặc điểm phản ứng cộng hưởng tăng khi hẹp dần của cảng không phải lúc nào cũng phù hợp với thực tiễn và đây chính là một vấn đề trong cái mà Miles và Munk năm 1961 gọi là điều *ngịch lý về cảng*. Nghịch lý này sẽ không còn nếu ta tính tới ma sát tại cửa cảng và/hoặc sự phi tuyến; hai vấn đề này sẽ được xét trong các chương sau.

Từ phương trình (6.19), lưu lượng trên một đơn vị độ sâu tại cửa cảng Q – chính là biên độ của các sóng phát xạ, cũng đạt cực đại tại đỉnh cộng hưởng. Giá trị cực đại của Q nhận được bằng cách cho triệt tiêu phần thực của mẫu số, vậy:

$$\max |Q| = \frac{4Ag}{\omega_n},$$

trong đó $\omega_n = k_n(gh)^{1/2}$. Với hài cao hơn, lưu lượng cộng hưởng sẽ nhỏ hơn.

Chú ý rằng tại đỉnh thứ n , mặt tự do có điểm nút biểu lộ rõ tại $x=l$, vì thế

$$\cos \tilde{k}_n(l+L) = 0$$

hay

$$(k_n + \Delta)(l+L) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

hay

$$\frac{l}{L} \cong -\frac{\Delta}{k_n} = -\frac{2a}{\pi L} \ln \frac{2\gamma k_n a}{\pi e} > 0,$$

nó giảm theo a/L và n . Như vậy, độ dài hữu hiệu của vịnh lớn

hơn độ dài L thực. Việc tăng độ dài vịnh như vậy có thể được coi như là hiện tượng quán tính bổ sung của nước biển ở gần cửa cảng.

Kết quả giải tích của phương trình (6.20) sẽ là chính xác khi nào ka còn nhỏ. Đối với một trường hợp đặc biệt được xử lý bằng các phân tử hữu hạn và sẽ được mô tả sau trên hình 10.3, thì lý thuyết này thoả mãn về định lượng chỉ đối với hài bậc thấp nhất (một phần tư bước sóng).

Bài tập 6.2

Hãy khảo sát ảnh hưởng lẫn nhau của hai kênh thẳng, hẹp, độ dài hữu hạn và cửa thông vuông góc với cùng một đoạn bờ biển thẳng. Xét góc tới tùy ý. (Mei và Foda, năm 1979 đã giải quyết bài toán tương tự về mặt toán học cho sóng đàn hồi tới trên các mũi hướng ra biển).

Bài tập 6.3

Hãy nghiên cứu dao động trong một kênh hình bán nguyệt với độ rộng hẹp bằng $2a$, cả hai đầu kênh cùng thông ra một đoạn bờ biển thẳng. Xét góc tới tùy ý (Mei và Foda, 1979).

Bài tập 6.4: Mô hình hoá tác động cộng hưởng cảng (Roger và Mei, 1977)

Trong các thí nghiệm về cảng, biển bị giới hạn bởi kích thước hữu hạn của bể thí nghiệm. Trong trường hợp điển hình là máy tạo sóng đặt ở một khoảng hữu hạn L' cách bờ. Bằng phương pháp ảnh hưởng chỉ ra rằng hiệu ứng của máy tạo sóng đặt tại $x=L'$ có thể được tính đến một cách xấp xỉ bằng cách cho nghiệm vùng xa trong biển bằng

$$\eta = 2A \cos kx + \frac{\omega Q}{2g} \left\{ H_0^{(1)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} [H_0^{(1)}(k|r-2nL'e_x|) + H_0^{(1)}(k|r+2nL'e_x|)] \right\}$$

trong khoảng $0 < x < L'$ và $kL' \neq m\pi$. Gần cửa cảng, $kr \ll 1$, hiệu chỉnh do L' hữu hạn bằng

$$e = \frac{\omega Q}{g} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(1)}(2nkL').$$

Đối với kL' lớn, các hàm Hankel có thể được thay thế bằng các xấp xỉ tiệm cận sao cho

$$e \cong \frac{\omega Q}{g} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inZ}}{(nZ)^{1/2}}, \quad Z = 2kL'.$$

Với $Z = 2kL' \gg 1$ chuỗi có thể được xấp xỉ bằng một tích phân theo cách sau:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\Delta n && (\text{vì } \Delta n = 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\sigma Z)Z\Delta\sigma && \text{với } \frac{n}{Z} = \sigma \\ &\cong \int_{1/Z}^{\infty} f(\sigma Z)Zd\sigma. \end{aligned}$$

Biểu diễn tích phân đó như một tích phân Fresnel và chỉ ra rằng $e \sim O(kL')^{-3/2}$, từ đó nêu ra tiêu chuẩn của bạn về việc xác định độ lớn cần thiết của bề sóng để mô phỏng được một đại dương vô hạn.

5.7 Cảng hình chữ nhật với cửa hẹp

Ngoài những thuộc tính vật lý đã được nêu ở mục 5.6, một cảng có các kích thước theo hai hướng ngang tương đương nhau sẽ có một kiểu dao động mới trong đó mặt tự do trong cảng đồng thời nâng lên và hạ xuống. Hiện tượng này rất quen thuộc trong âm học và có thể mô tả bằng một phép phân tích đơn giản. Xét một thủy vực diện tích mặt S thông ra đại dương vô hạn qua một kênh có độ dài L , độ rộng a , L được giả thiết là đủ dài để độ dài thủy động lực bổ sung có thể bỏ qua (hình 7.1). Giả sử

biên độ mặt tự do tại A bằng ζ và vận tốc trong kênh bằng U . Sự liên tục đòi hỏi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} S = -Uah.$$

Khi cộng hưởng xuất hiện trong thủy vực, ζ rất nhỏ tại cửa sông B ; gradien áp suất giữa A và B xấp xỉ bằng

$$-\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_A - p_B}{L} = \frac{\rho g \zeta}{L}.$$

Phương trình động lượng của nước trong kênh là

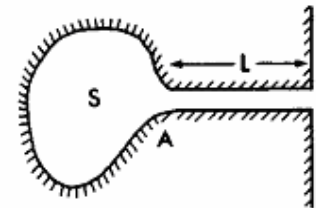
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{g\zeta}{L}.$$

Kết hợp các phương trình khối lượng và động lượng bằng cách khử U , ta được

$$S \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + gh \frac{a}{L} \zeta = 0,$$

nó giống với một hệ lò xo – vật nặng và hài tự nhiên với tần số tự nhiên

$$\omega = \left(\frac{gha}{SL}\right)^{1/2}.$$



Hình 7.1 Sơ đồ thủy vực thông với đại dương qua kênh hẹp

Số sóng đặc trưng tương ứng dạng không thứ nguyên là $kS^{1/2} = (a/L)^{1/2}$ và rất nhỏ. Hài dao động này gọi là hài Helmholtz trong âm học và là dạng bơm (pumping mode) trong

văn liệu kỹ thuật cảng. Rõ ràng, sự tồn tại hài Helmholtz liên quan với diện tích hữu hạn của cảng. Vì vịnh hẹp trong mục 5.6 tương ứng với dao động có một lò xo nhưng không có vật nặng nên không có dạng Helmholtz.

Bây giờ ta chuyển sang phân tích chi tiết một ví dụ cụ thể về cảng hình chữ nhật. Ví dụ này được Miles và Munk lần đầu tiên nghiên cứu năm 1961 và được Garrett kiểm tra năm 1970. Ta sử dụng các tiệm cận xúng hợp do Unluata và Mei đề xuất năm 1973. Giả sử các cạnh của cảng là B và L như hình 7.2. Cửa cảng là khe qua một đê chắn sóng mỏng, thẳng cùng tuyến với bờ biển. Giả sử độ rộng của khe rất nhỏ so với bước sóng $ka \ll 1$.

Để đơn giản, ta giả thiết rằng sóng tới là thẳng góc, nghiệm bên ngoài cho đại dương một lần nữa được tính bằng phương trình (6.3):

$$\eta_0 = 2A \cos kx - \frac{i\omega}{g} Q_0 \left[\frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr) \right], \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (7.1)$$

ở đây hệ tọa độ có điểm gốc nằm tại giữa cửa. Để thuận tiện, ta nhắc lại khai triển bên trong của η_0

$$\eta_0 = 2A + i \frac{\omega}{g} Q_0 \left(\frac{-i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right) + i \frac{\omega}{g\pi} Q_0 \ln r + O(kr \ln kr). \quad (7.2)$$

Nghiệm bên trong gần cửa cảng là dòng chảy thế qua khe hở và có khai triển bên ngoài gồm hai số hạng sau (xem các phương trình 5.13 và 5.15):

$$\eta_E = C \mp M \ln \frac{a}{2} + M \begin{pmatrix} + \ln r \\ - \ln r \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ x < 0 \quad (x_1 > 0) \end{array} \quad (7.3 \text{ a})$$

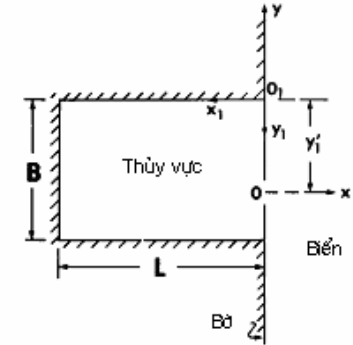
b)

Để mô tả phần bên trong cảng, sẽ thuận tiện hơn nếu dùng một hệ tọa độ khác (x_1, y_1) với gốc trùng với một góc của vịnh sao

cho

$$x = -x_1, \quad y = y_1 - y, \quad r_1^2 = x_1^2 + (y_1 - y)^2. \quad (7.4)$$

Điểm giữa của cửa cảng tại $y_1 = y'$ (xem hình 7.2).



Hình 7.2 Cảng hình chữ nhật nằm sau bờ biển thẳng

5.7.1 Giải bằng các phương pháp khai triển tiệm cận xúng hợp

Ta hiểu trong cảng sẽ sử dụng hệ tọa độ (x_1, y_1) . Tuy nhiên, để cho ngắn gọn, ta bỏ các chỉ số dưới $(\)_1$.

Đối với bậc dẫn đầu, nghiệm phía ngoài của cảng là một vùng do nguồn dao động của lực với độ lớn Q_H chưa biết tại điểm $x = 0, y = y'$. Giả sử $G(x, y; y')$ là nghiệm tương ứng với

$$\nabla^2 G + k^2 G = 0, \quad (7.5 \text{ a})$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < L, \quad y = 0, B, \quad (7.5 \text{ b})$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad x = L \quad (7.5 \text{ c})$$

$$= \delta(y - y'), \quad x = 0, \quad 0 < y < B. \quad (7.5 \text{ d})$$

Vì G biểu diễn nghiệm cho nguồn điểm có lưu lượng đơn vị, suy ra

$$\eta_H = \frac{i\omega}{g} Q_H G(x, y; y') \quad (7.6)$$

là nghiệm bên ngoài cần tìm ở trong thủy vực cảng. Hàm G là một dạng hàm Green; nghiệm của nó được dẫn lập trong phụ lục 5.A. Ta chỉ đưa ra kết quả như sau:

$$G(x, y; y') = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) Y_n(y'), \quad (7.7)$$

trong đó

$$X_n(x) = \frac{\varepsilon_n \cos K_n(x-L)}{K_n B \sin K_n L}, \quad (7.8 a)$$

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{B}\right), \quad (7.8 b)$$

$$K_n = \left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (7.8 c)$$

và ε_n là ký hiệu Jacobi. Tuy nhiên, khai triển bên trong cần một số bước nữa. Chuỗi của G hội tụ chậm vì nó dừng do

$$K_n \sim i \left(\frac{n\pi}{B}\right)$$

đối với n lớn và

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_n \cos K_n(x-L)}{K_n B \sin K_n L} &= -\frac{2 \operatorname{ch}[n\pi(x-L)/B]}{n\pi \operatorname{sh}(n\pi L/B)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \\ &= -\frac{2}{n\pi} e^{-n\pi x/B} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Số hạng thứ n triệt tiêu chỉ nhanh như $1/n$. Phương pháp thông thường để đẩy nhanh quá trình hội tụ là lấy tổng tất cả chuỗi bao gồm phép xấp xỉ bậc dẫn đầu của từng số hạng:

$$\tilde{G} = \sum_1^{\infty} -\frac{2}{n\pi} e^{-n\pi x/B} Y_n(y) Y_n(y'). \quad (7.9)$$

Chuỗi còn lại

$$X_0 Y_0(y) Y_0(y') + \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n + \frac{2}{n\pi} e^{-n\pi x/B} \right) Y_n(y) Y_n(y') \quad (7.10)$$

khi đó sẽ hội tụ nhanh hơn nhiều (cỡ $1/n^3$) (xem Kantorovich và Krylov, 1964, tr. 79 để hiểu thêm về phương pháp này). Phép lấy tổng ở đây có thể thực hiện được và được trình bày chi tiết trong Phụ lục 5.B; chúng tôi chỉ đưa ra các kết quả sau:

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \ln \left| 1 - e^{-Z_s} \right|^2 \left| 1 - e^{-Z'_s} \right|^2, \quad (7.11)$$

trong đó

$$Z_s = \frac{\pi}{B} [x + j(y - y')], \quad Z'_s = \frac{\pi}{B} [x + j(y + y')]. \quad (7.12)$$

Lưu ý rằng Z là khoảng cách phức được chuẩn hoá từ điểm vùng (x, y) đến nguồn $(0, y')$, và Z'_s là khoảng cách phức được chuẩn hoá từ (x, y) đến ảnh qua gương của nguồn tại $(0, -y')$.

Rất gần cửa, $r/B \ll 1$, ta có $|Z_s| \ll 1$. Vì

$$Z'_s = Z_s + \frac{2j\pi y'}{B},$$

$$1 - e^{-Z_s} = Z_s [1 + O(Z_s)],$$

$$1 - e^{-Z'_s} = (1 - e^{-2j\pi y'}) [1 + O(Z_s)], \quad (7.13)$$

nên suy ra

$$\left| 1 - e^{-Z_s} \right|^2 = \left(\frac{\pi r}{B}\right)^2 \left[1 + O\left(\frac{r}{B}\right) \right],$$

$$\left| 1 - e^{-Z'_s} \right|^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi y'}{B} \left(\frac{\pi r}{B}\right)^2 \left[1 + O\left(\frac{r}{B}\right) \right]. \quad (7.14)$$

Thế những công thức này vào phương trình (7.11), ta có

$$\tilde{G} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{2\pi r}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + O\left(\frac{r}{B}\right), \quad (7.15)$$

đây là phương trình dạng logarit kỳ dị khi $r \rightarrow 0$. Đây là kết quả mong đợi vì $r=0$ là điểm nguồn. Từ phương trình (7.15), thông lượng qua hình bán nguyệt nhỏ vô cùng lân cận điểm nguồn ở phía $x > 0$ bằng đơn vị. Do đó, \tilde{G} biểu diễn phần kỳ dị của hàm Green, và chuỗi dư trong phương trình (7.10) phải là đều tại điểm nguồn $r=0$. Khai triển trong của G sẽ là

$$G(x, y; y') \cong \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{2\pi r}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + F, \quad (7.16)$$

trong đó F là giá trị của chuỗi dư tại điểm nguồn

$$B = \frac{-2A}{[1 + ka + (2ika/\pi) \ln(2\gamma ka/\pi e)]}. \quad (7.17)$$

Cuối cùng, khai triển trong của nghiệm bên ngoài là

$$\eta_c = \frac{2A \cos k(x+L)}{\cos kL + (2ka/\pi) \sin kL \ln(2\gamma ka/\pi e) - ik \sin kL}. \quad (7.18)$$

Bây giờ ta có thể tiến hành phép xúng hợp. Ở phía đại dương, các số hạng không đổi và các đại lượng $\ln r$ trong phương trình (7.2) và (7.3 a) cần phải ghép riêng biệt; ta được hai phương trình sau:

$$C - M \ln \frac{a}{2} = 2A + i \frac{\omega}{g} Q_0 \left(\frac{-i}{2} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k}{2} \right), \quad (7.19)$$

và

$$M = i \frac{\omega}{g} \frac{Q_H}{\pi}. \quad (7.20)$$

Tương tự, khi ghép các phương trình (7.3 b) và (7.18) ở phía cảng $x < 0$ ($x_1 > 0$), ta có

$$C + M \ln \frac{a}{2} = i \frac{\omega}{g} Q_H \left[\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{2\pi}{B} \sin \frac{\pi y'}{B} \right) + F \right], \quad (7.21)$$

$$-M = i \frac{\omega}{g} \frac{Q_H}{\pi}. \quad (7.22)$$

Bốn phương trình đại số (7.19)–(7.22) có thể giải dễ dàng đối với các ẩn số C, Q_0, Q_H, M . Kết quả thấy ngay là $Q_0 = -Q_H$, điều này có thể đoán trước trên cơ sở sự liên tục. Kết quả quan trọng nhất là

$$i \frac{\omega}{g} Q_0 = \frac{-i\omega Q_H}{g} = -2A \left[\frac{-i}{2} + F - I \right]^{-1}, \quad (7.23)$$

trong đó

$$I = \frac{1}{\pi} \ln \left[\frac{4B}{(\pi\gamma ka^2 \sin(\pi y'/B))} \right]. \quad (7.24)$$

Cuối cùng, nghiệm vùng xa trong cảng là

$$\eta_H = \frac{-2A}{-i/2 + F - I} \sum_n X_n(x) Y_n(y) Y_n(y'), \quad (7.25)$$

nghiệm này có thể sử dụng để tính toán bằng số phản ứng của cảng tại hầu hết các điểm, ngoại trừ một vùng nhỏ bậc $O(a)$ tính từ cửa cảng.

5.7.2 Phổ cộng hưởng và sự phản ứng đối với các hài không thuộc hài Helmholtz

Để làm rõ bản chất vật lý của các kết quả số trình bày dưới đây, ta cần kiểm tra các công thức (7.23) và (7.25).

Khi số sóng tới k gần bằng một trong các hài tự nhiên của một vịnh kín, $k_{nm} = [(n\pi/B)^2 + (m\pi/L)^2]^{1/2}$, thì có thể xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Ở lân cận k_{nm} đặt

$$k = k_{nm} + \Delta, \quad (7.26)$$

và giả thiết rằng

$$\frac{\Delta}{k_{nm}} \ll 1. \quad (7.27)$$

Từ phương trình (7.8 c) ta có

$$K_n L = L \left[(k_{nm} + \Delta)^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 \right]^{1/2} \\ \cong m\pi + \frac{k_{nm} L^2 \Delta}{m\pi}, \quad n=0, 1, 2, \dots, m=1, 2, 3, \dots \quad (7.28 \text{ a})$$

hoặc

$$\cong L(2k_{n0}\Delta)^{1/2} \quad m=0, n=1, 2, 3, \dots \quad (7.28 \text{ b})$$

Chú ý rằng trong cả hai phương trình (7.28a) hoặc (7.28b) sin $K_n L$ đều gần bằng 0. Trong chuỗi của G hay của F , số hạng thứ n lớn hơn rất nhiều so với tất cả các số hạng còn lại. Số hạng chính trong chuỗi F là

$$F \cong \frac{\varepsilon_n \cos K_n L}{K_n B \sin K_n B} \cos^2 \frac{n\pi y'}{B} \cong \frac{c}{\Delta}, \quad c = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{2k_{nm} B L} \cos^2 \frac{n\pi y'}{B}, \quad (7.29)$$

khi có ít nhất một chỉ số n hoặc m không bằng 0, trong khi đó G được xấp xỉ bằng

$$X_n Y_n(y) Y_n(y') \cong \frac{c}{\Delta} \frac{\cos(m\pi/L)(x-L)}{\cos m\pi} \frac{Y_n(y)}{Y_n(y')}.$$

Phương trình (7.25) cho phản ứng cảng bằng

$$\eta_H \cong \frac{-2A}{-i/2 + c/\Delta - I(k_{nm})} \frac{c}{\Delta} \frac{\cos(m\pi/L)(x-L)}{\cos m\pi} \frac{Y_n(y)}{Y_n(y')}, \quad (7.30)$$

trong đó

$$I(k_{nm}) \equiv [I(k)]_{k=k_{nm}} \quad (7.31)$$

là giá trị lớn dạng logarit đối với $k_{nm} a$ nhỏ. Điều quan trọng là phải chỉ ra rằng khi $\Delta=0$, tức $k=k_{nm}$, vế phải của phương trình

(7.30) tiếp cận đến giá trị không lớn

$$-2A \frac{\cos(m\pi/L)(x-L)}{\cos m\pi} \frac{Y_n(y)}{Y_n(y')}.$$

Do vậy, hài cộng hưởng không trùng với hài tự nhiên của vịnh kín. Yếu tố khuếch đại \wp cho hài (n, m) có thể được xác định bằng phương trình

$$\frac{\eta_H}{2A} = \wp \frac{\cos(m\pi/L)(x-L)}{\cos m\pi} \frac{Y_n(y)}{Y_n(y')}, \quad (7.32 \text{ a})$$

trong đó

$$\wp = \frac{c/I}{\Delta - c/I + \frac{1}{2}i\Delta/I}. \quad (7.32 \text{ b})$$

Phương trình (7.32 b) có cùng dạng như phương trình (4.15) đối với ví dụ mẫu. Vì vậy, số hạng $i\Delta/2I$ có liên quan đến sự suy giảm phát xạ, nó phụ thuộc vào độ di dịch tần số Δ . Xét bình phương của yếu tố khuếch đại

$$|\wp|^2 = \frac{(c/I)^2}{(\Delta - c/I)^2 + \Delta^2/4I^2}. \quad (7.33)$$

Cực tiểu của mẫu xảy ra tại

$$\Delta_p = \frac{c}{I} \left(1 + \frac{1}{4I^2} \right)^{-1} \cong \frac{c}{I}.$$

Như vậy, số sóng cộng hưởng hơi lớn hơn giá trị tự nhiên k_{nm} ,

$$\tilde{k}_{nm} \cong k_{nm} + \frac{c}{I}. \quad (7.34)$$

Hiệu chỉnh c/I giảm khi độ rộng của cửa cảng thu hẹp. Giá trị đỉnh $|\wp|^2$ của (7.33) là

$$|\wp|_{\max}^2 \cong 4I^2. \quad (7.35)$$

Có thể dễ dàng thấy rằng khi

$$\Delta \equiv \frac{c}{I} \pm \frac{c}{2I^2},$$

thì giá trị phản ứng bình phương giảm xuống còn bằng một nửa giá trị tại đỉnh. Vì vậy, $c/2I^2$ thực chất là một nửa độ rộng của đỉnh cộng hưởng trên đồ thị của $|\phi|^2$ theo k . Theo định nghĩa của I , sự suy giảm độ rộng của sẽ dẫn đến tăng I , do đó tăng $|\phi|^2$ và giảm độ rộng đỉnh cộng hưởng. Mặc dù thu hẹp độ rộng của cảng sẽ làm giảm thay độ tinh chỉnh cộng hưởng, nhưng nếu điều tần tốt thì phản ứng đỉnh vẫn rõ nét. Cơ chế này liên quan với sự suy giảm phát xạ tương ứng với số hạng $i\Delta/I$ trong phương trình (7.32). Tỷ lệ với $c/2I^2$ tại điểm cộng hưởng, sự suy giảm phát xạ sẽ giảm mạnh khi a giảm. Vì vậy, năng lượng thoát ra khỏi cảng khó hơn nhiều và sự khuếch đại cường độ sẽ lớn hơn. Kết quả này lại một lần nữa mâu thuẫn với kinh nghiệm của nhà thiết, nhà kế thường muốn thu hẹp cửa cảng để bảo vệ cảng tốt hơn và đây chính là điểm nghịch lý cảng. Lưu ý rằng đỉnh cộng hưởng càng nhọn thì diện tích dưới đường cong xấp xỉ bằng

$$|\phi|_{\max}^2 \frac{c}{2I^2} = 2c, \quad (7.36)$$

diện tích này không phụ thuộc vào độ rộng của cảng và giảm khi hài cộng hưởng cao hơn (n hoặc m tăng) (Garrett, 1970). Nếu các sóng tới là quá trình ngẫu nhiên dừng với phổ là $S_I(k)$, có thể chứng minh rằng bình phương trung bình của phản ứng trong cảng tỉ lệ với

$$\int_0^\infty S_I(k) |\phi(k)|^2 dk$$

như trong trường hợp các dao động đơn. Đỉnh cộng hưởng tại k_{nm} sẽ góp vào tích phân trên đây một lượng xấp xỉ bằng tích

của $S_I(k_{nm})$ và diện tích của đường cong $|\phi|^2$ phía dưới đỉnh. Vậy phương trình (7.36) có nghĩa rằng phản ứng bình phương trung bình là không đổi khi thu hẹp cửa cảng. Đây là một điểm nữa của nghịch lý cảng.

Kết hợp hai phương trình (7.29) và (7.23), lưu lượng trên một đơn vị độ sâu gần đỉnh cộng hưởng qua cửa cảng sẽ là

$$\frac{i\omega Q_0}{g} = \left(\frac{-2A}{-i/2 + c/\Delta - I} \right). \quad (7.37)$$

Lưu ý rằng khi độ rộng của cảng a mất đi, $k = k_{nm}$ và $Q_0 = 0$, thành thử áp suất sẽ truyền qua cửa còn khối lượng thì không. Tại điểm cộng hưởng, đại lượng $\omega Q_0 / g$ đơn giản bằng $4A$; vận tốc dòng chảy trung bình tương ứng qua cửa U_E bằng

$$|U_E| = \left| \frac{Q_0}{2a} \right|_{\max} = \frac{2gA}{\omega_{nm} a} = \frac{gAT_{nm}}{\pi a}, \quad (7.38)$$

trong đó ω_{nm} là tần số cộng hưởng $= (gh)^{1/2} k_{nm}$ và T_{nm} là chu kỳ tương ứng. Như một thí dụ bằng số ta cho $a = 200$ m, $A = 0,2$ m, và $T_{nm} = 10$ phút, thì

$$|U_E| = 6 \text{ m/s}.$$

Nếu bề dày của đê chắn sóng là 10m, thì số Reynolds cục bộ cực đại là 6×10^7 . Vì dòng chảy dao động, số Reynolds tức thời sẽ thay đổi từ 0 đến $O(10^8)$. Trên thực tế sẽ có hiện tượng tiêu hao năng lượng đáng kể do dòng cuộn xoáy phía sau và rối. Phương trình (7.38) cũng cho thấy rằng $|U_E|$ tỷ lệ nghịch với độ rộng a của cửa, điều này cho thấy với các cửa hẹp hơn thì các hiệu ứng chất lỏng thực sẽ quan trọng hơn. Chương 6 sẽ trình bày tiếp về hiện tượng tiêu hao năng lượng tại cửa cảng.

5.7.3 Hài Helmholtz

Những phân tích trước đây (cụ thể là phương trình (7.28))

không nghiên cứu trường hợp $n = m = 0$ dẫn đến $k_{00} = 0$. Vì X_0 và Y_0 là các hằng số, nên mặt tự do nâng lên và hạ xuống đồng đều trong toàn vịnh, và do đó tương ứng với hài Helmholtz hay hài bơn. Từ phương trình (7.8 c) ta có

$$\Delta = k \quad \text{và} \quad K_n = k = \Delta \quad (7.39)$$

thay cho phương trình (7.28). Các số hạng đầu trong chuỗi F và G có liên quan đến số hạng $n = 0$, và phản ứng cảng là

$$\eta_H \equiv \frac{-2A}{-i/2 + 1/k^2 BL - I} \frac{1}{k^2 BL}. \quad (7.40)$$

Số sóng cộng hưởng \tilde{k}_{00} xấp xỉ bằng căn của phương trình siêu việt

$$\frac{1}{k^2 BL} - I = 0 \quad \text{hay} \quad k^2 BL = \frac{1}{I}, \quad k \equiv \tilde{k}_{00}, \quad (7.41)$$

do I phụ thuộc vào k . Khi a giảm, I tăng dẫn đến k giảm đi. Yếu tố khuếch đại bình phương sẽ bằng

$$|\phi|^2 = \frac{(1/k^2 BL)^2}{\frac{1}{4} + (1/k^2 BL - I)^2}. \quad (7.42)$$

Giá trị đỉnh của (7.42) sẽ xấp xỉ bằng $4I^2$ khi thoả mãn phương trình (7.41). Ta tính được nửa độ rộng của đỉnh bằng cách đặt

$$\frac{1}{k^2 BL} - I = \pm \frac{1}{2} \quad \text{hay} \quad k = \tilde{k}_{\infty} = \pm \frac{1}{4(BLI^3)^{1/2}}. \quad (7.43)$$

Khi a giảm, ϕ_{\max}^2 tăng và độ rộng của đỉnh giảm đi. Tuy nhiên, diện tích dưới đỉnh đường cong $|\phi|^2$ theo k , sẽ tỉ lệ thuận với

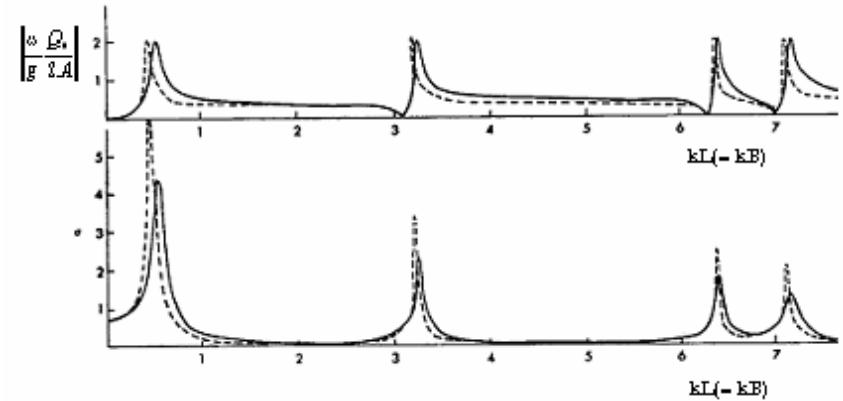
$$\frac{1}{4(BLI^3)^{1/2}} = \left(\frac{I}{BL}\right)^{1/2}, \quad (7.44)$$

biểu thức này sẽ tăng, dù tăng rất ít, khi a giảm. Nghịch lý

cảng sẽ thể hiện yếu hơn đối với hài Helmholtz, nếu cho rằng mất mát ma sát sẽ quan trọng hơn tại cửa cảng. Vấn đề này sẽ thảo luận chi tiết trong chương 6.

5.7.4 Các kết quả và thực nghiệm số

Phản ứng của cảng hình vuông đã được Unluata và Mei (1973) tính toán theo phương trình (7.25) cho một dải rộng các số sóng; những kết quả này phù hợp với những kết quả Miles đưa ra năm 1971 bằng một phép phân tích xấp xỉ khác. Hai giá trị độ rộng cửa khác nhau đã được xét, xem hình 7.3. Hiệu ứng giảm a phù hợp với các phân tích trong các mục 5.7.2 và 5.7.3.



Hình 7.3 Phản ứng bình phương trung bình σ và cường độ dòng chuẩn hoá $|(\omega/g)(Q_0/2A)|$ tại cửa cảng. $2a/B = 3 \times 10^{-2}$ (đường liền nét); $2a/B = 0,585 \times 10^{-2}$ (đường gạch nổi). σ được định nghĩa trong phương trình (9.5)

Các lý thuyết giải tích xấp xỉ cho cảng hình tròn đã được Miles và Lee đưa ra 1971. Ngoài ra, Lee đã tiến hành những thí nghiệm rất phù hợp với lý thuyết tuyến tính. Chỉ có một khác

biệt đáng kể xuất hiện đối với các đỉnh cộng hưởng tần thấp nhất, ở gần đó có lẽ ma sát quan trọng, xem hình 7.4. Có thể chỉ ra rằng các thí nghiệm của Lee tiến hành ở vùng nước rất sâu, $kh \gg 1$ và phép so sánh với lý thuyết sóng dài dựa trên tính đồng dạng đối với các thuyết tuyến tính với độ sâu không đổi và các vách đứng. Tuy nhiên, trong phòng thí nghiệm, tính phi tuyến là không thể tránh khỏi ở các vùng nước nông và các sự khác biệt giữa các thí nghiệm nước nông và lý thuyết sóng dài tuyến tính chắc hẳn là khá lớn.

5.7.5 Các hiệu ứng của kênh vào hữu hạn

Đối với một cảng có một thủy vực đơn, Carrier, Shaw và Miyata (1971) đã phát hiện rằng độ dài hữu hạn của kênh vào, hay bề dày hữu hạn của một đê chắn sóng tại cửa vào, có cùng hiệu ứng về mặt định tính như một cửa hẹp. Kết luận này cũng có thể chứng minh bằng các phép tiệm cận xứng hợp. Đối với một kênh nối, độ rộng $2d$ cùng bậc đại lượng như độ rộng $2a$, nghiệm vùng gần có thể được tính bằng phép biến đổi Schwarz–Christoffel. Năm 1944 Davey đã đưa ra các kết quả ở dạng các tích phân elliptic và được Guiney, Noye và Tuck (1972) áp dụng cho sự truyền sóng nước sâu qua một khe hẹp. Unluata và Mei (1973, khi xét dao động cảng) và Tuck (1975, khi khảo sát sự truyền sóng qua các lỗ hổng nhỏ) đã cho biết rằng tất cả các kết quả nghiên cứu cho một khe hở hẹp có thể áp dụng giải thích cho một khe hổng giữa tường dày nếu đưa ra độ rộng hữu hiệu a_e thay cho độ rộng thực tế. Độ rộng hữu hiệu a_e được cho dưới dạng tham số (thông qua v) bằng các mối liên hệ sau:

$$\frac{a_e}{a} = 2pv^{1/2}, \quad \frac{d}{a} = -\frac{p}{2}(K'v^2 - 2K' - 2E'), \quad (7.45)$$

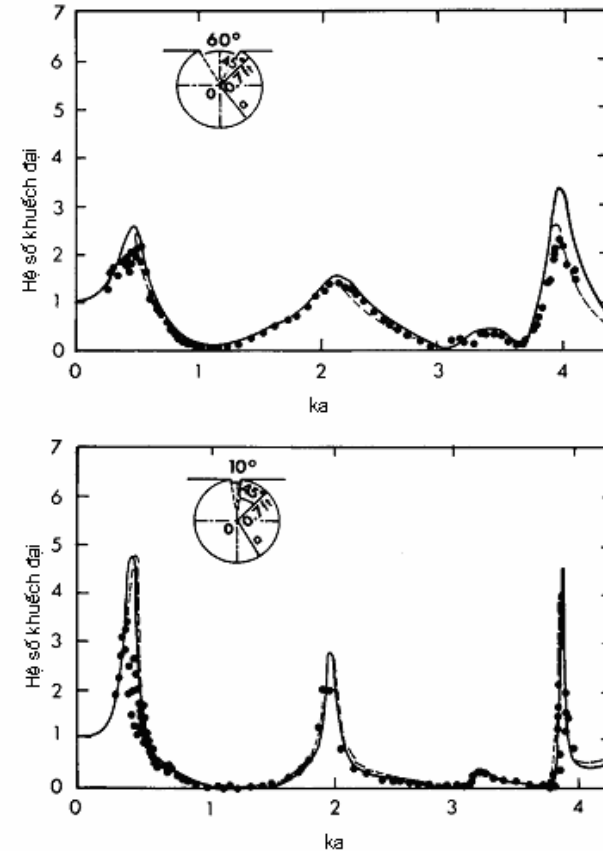
trong đó

$$p = (2E - v^2K)^{-1},$$

$$v' = (1 - v^2)^{1/2},$$

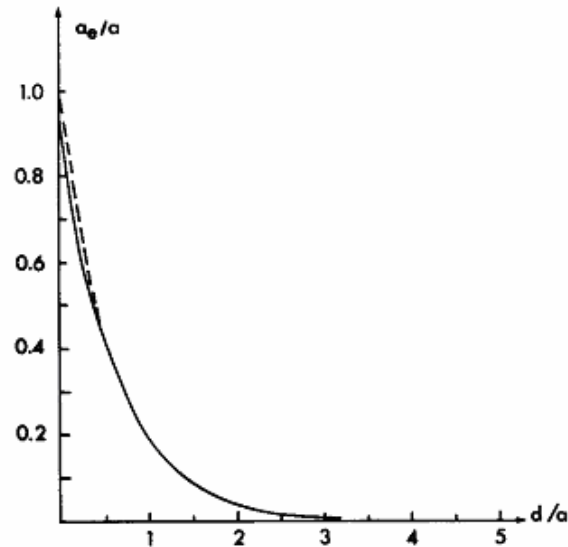
$$\left. \begin{aligned} E &= E(v) \\ K &= K(v) \end{aligned} \right\} = \text{tích phân elliptic hoàn chỉnh loại } \left\{ \begin{array}{l} \text{một} \\ \text{hai} \end{array} \right\},$$

$$E' \equiv E(v'), \quad K' \equiv K(v').$$



Hình 7.4 Đường cong phản ứng tại $r = 0,7$ bộ, $\theta = 45^\circ$, cảng tròn bán kính $= 0,75$ bộ. Các đường liền nét và gạch nối tương ứng với hai lý thuyết khác nhau; \bullet : theo thí nghiệm. (a) mở 60° ; (b) mở 10° (theo Lee, 1971)

(Chú ý rằng các ký hiệu E và K là các qui ước dùng trong tài liệu về các tích phân elliptic, chứ không có nghĩa là các ký hiệu chỉ đại lượng).



Hình 7.5 Tỷ số a_e/a giữa độ rộng hữu hiệu và độ rộng thực của kênh nối như là hàm số của tỉ số độ dày và độ rộng d/a . Phương trình (7.45): đường liền nét; phương trình (7.46): đường gạch nối (Mei và Unluata, 1978)

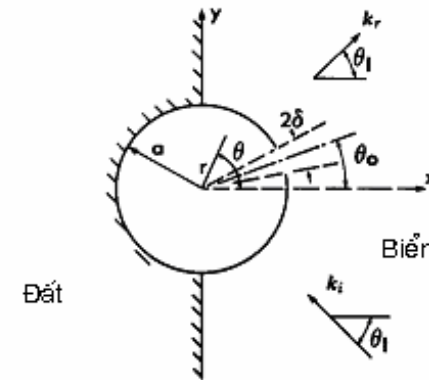
Chi tiết để dẫn lập các phương trình (7.45) khá phức tạp và có trong tài liệu của Unluata và Mei (1973). Chúng ta chỉ diễn tả một cách đơn giản là a_e/a giảm đơn điệu theo d/a . Phép xấp xỉ tường minh hơn cho các phương trình (7.45) đúng cho d/a lớn là

$$\frac{a_e}{a} \cong \frac{8}{\pi} \exp\left[-\left(\frac{\pi d}{2a} + 1\right)\right], \quad (7.46)$$

nó rất chính xác đối với $d/a > 0,5$. Thực tế thậm chí đối với $d/a = 0$, phương trình (7.46) vẫn cho một kết quả khá tốt: $a_e/a = 0,937$ (xem hình 7.5).

5.8 TÁC DỤNG CỦA ĐÈ CHẮN SÓNG NHÔ RA BIỂN

Đường bờ ở gần cửa cảng thường không phải là đường thẳng do địa hình tự nhiên hoặc do đê chắn sóng hướng ra biển. Đó là hình thái thường thấy ở các cảng nhỏ tại các bờ nông. Về phương diện vật lý, đê nhô ra biển làm thay đổi các sóng phân tán khi cửa cảng đóng; do đó, nhân tố cường bức tại cửa sẽ khác với trường hợp đường bờ thẳng. Bức tranh phát xạ cũng khác vì bây giờ cửa cảng thường giống như một chiếc loa phóng thanh nhô ra biển từ một vách chắn. Hình dạng nhô ra và vị trí của cửa cảng đã trở thành một yếu tố mới cần được xem xét khi thiết kế và vận hành cảng.



Hình 8.1 Cảng dạng tròn với đê chắn sóng nhô ra biển

Để minh họa ảnh hưởng của việc nhô ra biển, ta theo phương pháp của Mei và Petroni (1973) và xét một cảng hình

tròn với một nửa diện tích nằm sau bờ biển thẳng. Đê chắn sóng là một cung hình bán nguyệt với cửa mở tại $\theta = \theta_0$. Cửa cảng đối diện với góc 2δ (xem hình 8.1).

5.8.1 Biểu diễn nghiệm

Xét nghiệm ở bên ngoài cảng. Ta nghiên cứu bờ biển thẳng trước, sau đó là đê chắn sóng hình bán nguyệt và cuối cùng là cửa cảng. Lấy góc tới là θ_I như hình 8.1.

Bờ biển phản xạ hoàn phần dọc theo trục y sinh ra sóng phản xạ η' cùng với sóng tới η^I . Tổng các sóng là

$$\begin{aligned}\eta^I + \eta' &= A \left[e^{-ikr \cos(\theta + \theta_I)} + e^{ikr \cos(\theta + \theta_I)} \right] \\ &= A \sum_m \varepsilon_m \left[(-i)^m \cos m(\theta + \theta_I) + (i)^m \cos m(\theta - \theta_I) \right] J_m(kr) \\ &= 2A \sum_m \varepsilon_m \left(\cos \frac{m\pi}{2} \cos m\theta_I \cos m\theta + i \sin \frac{m\pi}{2} \sin m\theta_I \sin m\theta \right) J_m(kr), \\ & \qquad \qquad \qquad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (8.1)$$

Để dàng chứng minh rằng không có vận tốc vuông góc trên trục y , nghĩa là

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\eta^I + \eta') = 0, \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}. \quad (8.2)$$

Sự tồn tại của một xy lanh tròn thể rắn nằm tại gốc tọa độ sẽ tạo ra các sóng phân tán phát xạ ra ngoài vô cực. Do đó, chúng ta cần bổ sung vào phương trình (8.1) các số hạng tỷ lệ với $H_m(kr) \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix}$, trong đó H_m là các hàm Hankel loại một.

Các hệ số cần được lựa chọn sao cho tổng $\eta^I + \eta'$ và η^S phân tán thoả mãn phương trình

$$\frac{\partial \eta^0}{\partial r} = 0, \quad r = a, \quad (8.3)$$

trong đó

$$\eta^0 = \eta^I + \eta' + \eta^S \quad (8.4)$$

là nghiệm cho bài toán nhiễu xạ đối với bán đảo hình tròn trên một bờ biển thẳng. Kết quả là

$$\begin{aligned}\eta^0(r, \theta) &= A \sum_m 2\varepsilon_m \left(\cos \frac{m\pi}{2} \cos m\theta_I \cos m\theta + i \sin \frac{m\pi}{2} \sin m\theta_I \sin m\theta \right) \\ & \times \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)} H_m(kr) \right], \quad r \geq a\end{aligned}\quad (8.5)$$

trong đó $()'$ ký hiệu phép vi phân theo đối số. Chú ý rằng điều kiện biên trên đường bờ vẫn được thoả mãn. Nghiệm trên có thể được ví như là hai sóng phẳng đi đến đối xứng từ hai phía đối diện của trục y và bị phân tán bởi một trụ hình tròn trong biển mở. Phần tương tự âm thanh đối với một sóng tới đã được biết rõ (Morse và Feshbach, 1953, Tập 2, tr. 1387).

Để hoàn thiện trường sóng ở bên ngoài cảng, ta cần tiếp tục điều chỉnh đối với tác động piston tại cửa cảng. Li độ tương ứng có thể cho một cách hình thức như sau

$$\eta^R = \sum_m \frac{H_m(kr)}{kaH'_m(ka)} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta), \quad R \geq a, \quad (8.6)$$

trong đó A_m và B_m là các đại lượng cần tìm.

Tóm lại, trường sóng tổng cộng bên ngoài cảng là

$$\eta_0 = \eta^0 + \eta^R, \quad r \geq a, \quad |\theta| < \frac{1}{2}\pi. \quad (8.7)$$

Li độ trong cảng η_H phải thoả mãn phương trình Helmholtz sao cho nghiệm hình thức là

$$\eta_H(r, \theta) = \sum_m \frac{J_m(kr)}{kJ'_m(ka)} (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta), \quad (8.8)$$

trong đó C_m và D_m vẫn là các ẩn chưa biết.

5.8.2 Dẫn tới phương trình tích phân

Các hệ số chưa biết như A_m , B_m , C_m và D_m cần phải cố định sao cho độ cao của bề mặt sóng (nói cách khác là áp suất) và độ dốc của bề mặt theo hướng thẳng góc (tức là vận tốc thẳng góc) là liên tục tại mọi điểm của cửa cảng

$$\eta_0 = \eta_H, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial r} = \frac{\partial \eta_H}{\partial r}, \quad r = a, \quad |\theta - \theta_0| \leq \delta. \quad (8.10)$$

Giả sử độ dốc của bề mặt theo hướng phát xạ tại cửa cảng là $F(\theta)$

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial r} = \frac{\partial \eta_H}{\partial r} = F(\theta) \quad (8.11)$$

chỉ khác 0 khi đi qua cửa $|\theta - \theta_0| \leq \delta$. Áp dụng phương trình (8.11) vào phương trình (8.8) và sử dụng lý thuyết chuỗi Fourier, ta có thể biểu diễn các hệ số C_m và D_m như sau

$$C_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_M f(\theta') \cos m\theta' d\theta', \quad (8.12 a)$$

$$D_m = \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \int_M f(\theta') \sin m\theta' d\theta', \quad (8.12 b)$$

trong đó M là cửa cảng.

Bây giờ ta áp dụng phương trình (8.11) vào phương trình (8.7). Cần thận trọng đối với A_m và B_m vì các điều kiện $\partial \eta_0 / \partial \theta = 0$ đối với $\theta = \pm \pi/2$ và $r > a$ không được vi phạm. Vùng vật lý bên ngoài cảng nằm về phía phải của $x=0$ (nghĩa là $|\theta| < \pi/2$). Tuy nhiên, ở xa phía ngoài cảng, bài toán tương tự như một cảng hình tròn ngoài khơi với hai cửa đối xứng qua trục y , bị tấn công bởi hai sóng tới đối xứng tại các góc θ_l và $\pi - \theta_l$. Điều kiện biên tương ứng khi đó là

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial r} = \frac{\partial \eta^R}{\partial r} = F(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad r = a, \quad (8.13a)$$

trong đó

$$F(\theta) = F(\pi - \theta). \quad (8.13b)$$

Với điều kiện này, điều kiện không thông lượng trên bờ (trục y) được đảm bảo bằng tính đối xứng.

Áp dụng phương trình (8.13) vào phương trình (8.6) cho toàn bộ khoảng $0 \leq \theta \leq 2\pi$ và sử dụng đặc tính đối xứng của $F(\theta)$, phương trình (8.13), ta được các hệ số Fourier như sau:

$$A_m = \frac{\varepsilon_m}{\pi} \cos^2 \frac{m\pi}{2} \int_M d\theta' F(\theta') \cos m\theta', \quad (8.14a)$$

$$B_m = \frac{\varepsilon_m}{\pi} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \int_M d\theta' F(\theta') \sin m\theta'. \quad (8.14b)$$

Do đó, $A_m = 0$ đối với m lẻ và $B_m = 0$ đối với m chẵn.

Theo độ dốc bề mặt $F(\theta)$, từ các phương trình (8.6) và (8.7), ta có

$$\eta_0 = \eta^0 + a \sum_m \frac{\varepsilon_m}{\pi} \frac{H_m(kr)}{ka H'_m(ka)} \left[\cos^2 \frac{m\pi}{2} \cos m\theta \int_M du F(u) \cos mu + \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin m\theta \int_M du F(u) \sin mu \right], \quad r > a \quad (8.15)$$

và từ phương trình (8.8) có

$$\eta_H = a \sum_m \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \frac{J_m(kr)}{ka J'_m(ka)} \left[\cos m\theta \int_M du F(u) \cos mu + \sin m\theta \int_M du F(u) \sin mu \right], \quad r < a. \quad (8.16)$$

Cuối cùng, điều kiện (8.9) được sử dụng để xứng hợp li độ bề mặt cho tất cả các điểm tại cửa cảng $r = a$, $|\theta - \theta_0| \leq \delta$, dẫn đến một phương trình tích phân cho $F(\theta)$:

$$\int_M du F(u) K(\theta|u) = \frac{1}{a} \eta^0(a, \theta), \quad |\theta - \theta_0| \leq \delta, \quad (7.17a)$$

trong đó nhân K bằng

$$K(\theta|u) = K(u|\theta) = \sum_m \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \frac{J_m(ka)}{ka J'_m(ka)} (\cos m\theta \cos mu + \sin m\theta \sin mu) - \sum_m \frac{\varepsilon_m}{\pi} \frac{H_m(ka)}{ka H'_m(ka)} \times \left(\cos^2 \frac{m\pi}{2} \cos m\theta \cos mu + \sin^2 \frac{m\pi}{2} \sin m\theta \sin mu \right). \quad (8.17b)$$

Ta nhận thấy đặc tính quan trọng là phần tử này đối xứng qua giao điểm của u và θ .

Đẳng thức Wronskian (9.20) trong chương 4 có thể được sử dụng để viết lại vế phải của phương trình (8.17 a) thành

$$\frac{1}{a} \eta^0(a, \theta) = \frac{A}{a} \sum_m \frac{2i}{\pi ka} \frac{2\varepsilon_m}{H'_m(ka)} \times \left(\cos \frac{m\pi}{2} \cos m\theta_l \cos m\theta + i \sin \frac{m\pi}{2} \sin m\theta_l \sin m\theta \right), \quad |\theta - \theta_0| < \delta. \quad (8.18)$$

Điểm mấu chốt của bài toán là giải $F(\theta)$ từ phương trình (8.17) cho mọi θ trong khoảng $|\theta - \theta_0| \leq \delta$. Điều đó có thể thực hiện nhờ một số thủ tục tính toán, phần lớn đều quy về một tập hợp các phương trình đại số hữu hạn. Một cách khác, bằng cách tính lại phương trình tích phân như một nguyên lý biến thiên, người ta có thể thu được một biểu thức gần đúng đơn giản nhưng tối ưu, có độ chính xác số tốt nhất cho các cửa hẹp, như trường hợp Miles và Munk (1961) đã làm với bài toán bờ biển thẳng. Cách tiếp cận này sẽ được dùng dưới đây.

5.8.3 Xấp xỉ nghiệm bằng phương pháp biến thiên

Có thể thấy rằng giải phương trình tích phân (8.17) tương ứng với việc tìm ra cực trị của các dạng hàm sau (phép chứng minh được trình bày ở Phụ lục 5.C)

$$J[F(\theta)] = \frac{1}{2} \int_M \int F(\theta) K(\theta|u) d\theta du - \frac{1}{a} \int_M \eta^0(a, \theta) F(\theta) d\theta. \quad (8.19)$$

Mặc dù nguyên lý biến thiên này có thể được sử dụng như là cơ sở của phép xấp xỉ phần tử hữu hạn, ta áp dụng phép tiếp cận số ít hơn và giả thiết F có một dạng nhất định với một tham số nhân f_0 , có nghĩa là

$$F(\theta) = f_0 f(\theta) \quad (8.20)$$

với $f(\theta)$ cho trước; khi đó

$$J = \frac{f_0^2}{2} \int_M \int f(\theta) K(\theta|u) f(u) d\theta du - \frac{f_0}{a} \int_M \eta^0(a, \theta) f(\theta) d\theta. \quad (8.21)$$

Đối với J dừng, f_0 cần phải được lựa chọn sao cho $dJ/df_0 = 0$; do đó

$$f_0 = \frac{(1/a) \int_M \eta^0(a, \theta) f(\theta) d\theta}{\int_M \int f(\theta) K(\theta|u) f(u) d\theta du}. \quad (8.22)$$

Một lựa chọn hợp lý cho $f(\theta)$ là

$$f = \frac{1}{\pi} [\delta^2 - (\theta - \theta_0)^2]^{-1/2} \quad (8.23)$$

nó có độ chính xác tại các đỉnh và đặc biệt thích hợp cho cửa hẹp (\ll độ dài sóng). Về mặt trực giác, trong vùng lân cận của cửa hẹp, số hạng $k^2 \eta$ có thể được loại bỏ khỏi phương trình Helmholtz và phương trình (8.23) có thể sẽ là một phép xấp xỉ tương đối chính xác. Đối với cửa rộng, phương trình (8.23) không đủ phù hợp và ta sẽ phải áp dụng các phương pháp khác.

Đẳng thức

$$\frac{1}{\pi} \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} [\delta^2 - (\theta - \theta_0)^2]^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} \cos m\theta_0 \\ \sin m\theta_0 \end{pmatrix} J_0(m\delta) \quad (8.24)$$

làm thay đổi tử số của phương trình (8.22) thành

$$\begin{aligned} \frac{A}{a} N &\equiv \frac{1}{a} \int_M \eta^0(a, \theta) f(\theta) d\theta = \frac{A}{a} \sum_m \frac{2i}{\pi ka} \frac{2\varepsilon_m J_0(m\delta)}{H'_m(ka)} \\ &\times \left(\cos \frac{m\pi}{2} \cos m\theta_l \cos m\theta_0 + i \sin \frac{m\pi}{2} \sin m\theta_l \sin m\theta_0 \right). \quad (8.25) \end{aligned}$$

Vì η^0 là áp suất sóng tại cửa cảng khi đóng cửa, N là giá trị trung bình tỉ trọng của áp suất lực. Ta nhận thấy rằng trong trường hợp đặc biệt, có sự đảo cho nhau giữa θ_0 và θ_l , có nghĩa là N đối xứng qua giao điểm của θ_0 và θ_l . Hơn nữa, mẫu số của phương trình (8.22) là

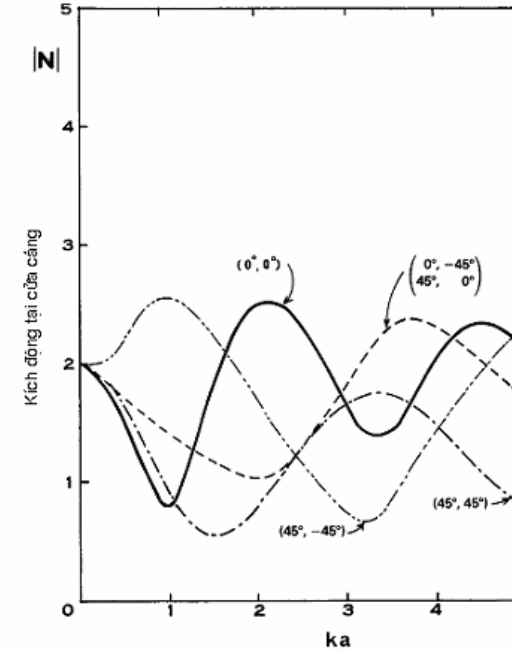
$$\begin{aligned} D &\equiv \int_M \int f(\theta) K(\theta|u) f(\theta) d\theta du = \sum_m \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \frac{J_m(ka) J_0^2(m\delta)}{ka J'_m(ka)} \\ &- \sum_m \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \frac{H_m(ka) J_0^2(m\delta)}{ka H'_m(ka)} (1 + \cos m\pi \cos 2m\theta_0). \quad (8.26) \end{aligned}$$

Chuỗi đầu tiên trong phương trình (8.26) cũng xuất hiện trong trường hợp bờ biển thẳng nhưng chuỗi thứ hai thì khác. Thế các phương trình (8.20) và (8.23) vào phương trình (8.16), và sử dụng các phương trình (8.22) và (8.24) – (8.26), chúng ta thu được phản ứng cảng là

$$\eta_H = A \frac{N}{D} \sum_m \frac{\varepsilon_m}{2\pi} \frac{J_0(m\delta)}{ka J'_m(ka)} J_m(kr) \cos [m(\theta - \theta_0)]. \quad (8.27)$$

Các phép tính toán số cần thiết chỉ đơn thuần liên quan đến phép lấy tổng của chuỗi.

Cơ chế bản chất của η_H gần với các dạng tự nhiên có thể được khảo sát giải tích như trong các chương trước, và có thể tìm thấy trong các tài liệu của Mei và Petroni (1973).



Hình 8.2 Sự kích thích tại cửa cảng khi có độ mở $2\delta = 10^\circ$. Các số trong ngoặc đơn là tọa độ (θ_0, θ_l) tính bằng độ (theo Mei và Petroni, 1973)

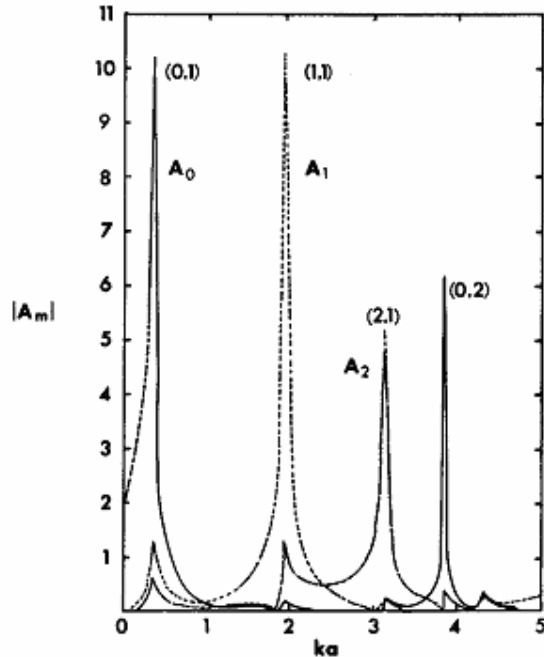
5.8.4 Các kết quả số

Yếu tố kích thích N tại cửa cảng được biểu thị như là một hàm của ka cho một số giá trị của góc tới θ_l và vị trí cửa θ_0 , xem hình 8.2. Ngược lại với bờ biển thẳng, thuộc tính quan trọng nhất là độ dao động đối với ka , do quá trình nhiễu xạ phức tạp. Với ka và θ_l cho trước đặc trưng cho sóng tới, ta có thể định hướng cửa cảng θ_0 sao cho áp lực là nhỏ.

Ta định nghĩa

$$A_m = \frac{N}{D} \frac{\varepsilon_m}{2} \frac{J_0(m\delta) J_m(ka)}{ka J'_m(ka)} \quad (8.28)$$

là hệ số khuếch đại cho các hài với sự phụ thuộc góc $\cos m(\theta - \theta_0)$. Gần giá trị không của $J'_m(ka)$, nghĩa là $ka \cong j'_{ms}$, $s=1,2,\dots,A_m$ là lớn và dạng sóng đứng (m, s) được cộng hưởng. Từ mục 5.3, một số giá trị ban đầu của j'_{ms} là 0 (0, 1), 1,84118 (1, 1), 3,05424 (2, 1), 3,83170 (0, 2), 4,20119 (3, 1), 5,33144 (1, 2)..., trong đó các số trong ngoặc là cặp chỉ số (m, s) . Ta nhận thấy rằng dạng (0, 1) tương ứng với dạng Helmholtz. Do có yếu tố suy giảm phát xạ, nên ta có D là số phức. Tần số đỉnh hơi bị dịch chuyển và A_m là hữu hạn tại điểm cộng hưởng. Hình 8.3 là đồ thị điển hình đối với $|A_m|$.



Hình 8.3 Hệ số khuếch đại đối với hài m với $2\delta = 10^\circ$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_I = 0^\circ$
(theo Mei & Petroni, 1973)

Đối với bất kỳ tập hợp cho trước của ka , a , θ_0 và δ , li độ của mặt tự do tại điểm (r, θ) trong cảng có thể được tính khi tính được hệ số khuếch đại A_m . Phương pháp ước lượng dao động bình phương trung bình, lấy trung bình từng phần qua tổng diện tích của vịnh là rất có ích và được coi là một phương pháp thuận tiện để tính phản ứng tổng thể. Từ phương trình (8.27), ta có bình phương trung bình là

$$\begin{aligned} \overline{|\eta_H|^2} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dr r |\eta_H|^2 = \frac{A^2}{\pi a^2 k^2} \sum_m \frac{|A_m|^2}{J_m^2(ka)} \frac{2\pi}{\epsilon_m} \int_0^{ka} z J_m^2(z) dz \\ &= \frac{4A^2}{(ka)^2} \sum_m \frac{1}{\epsilon_m} \frac{|A_m|^2}{J_m^2(ka)} \sum_{n=0}^m (m+2n+1) J_{m+2n+1}^2(ka) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Tích phân cuối cùng được tính nhờ sự trợ giúp của một đẳng thức trong tài liệu của Abramowitz và Stegun (1972, tr. 484).

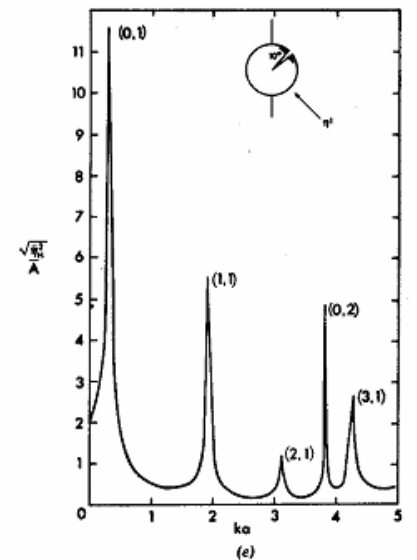
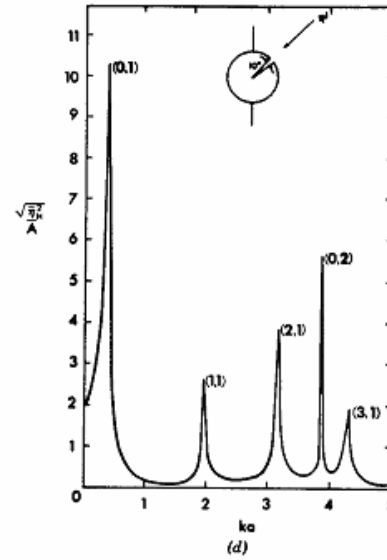
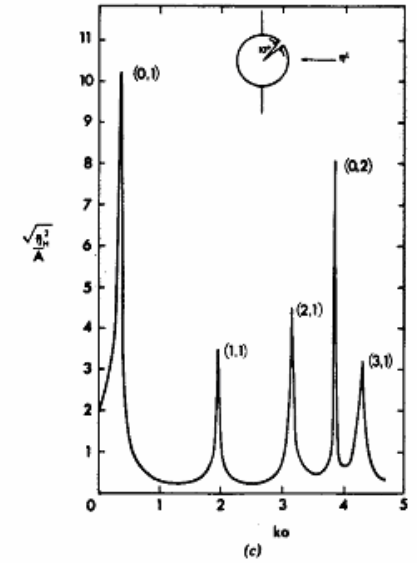
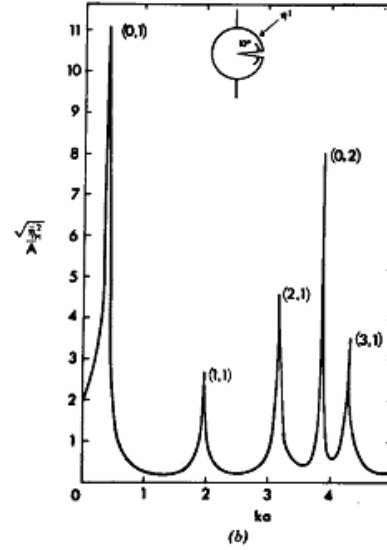
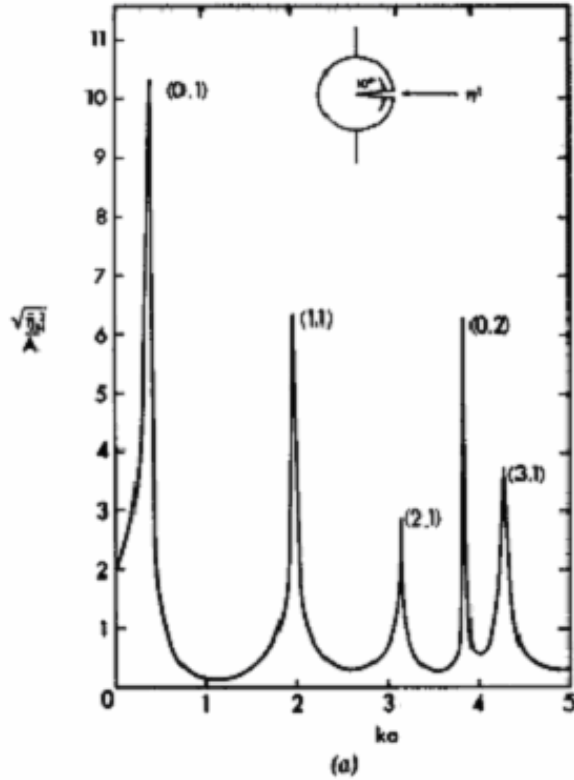
Đối với khoảng sau đây của các tham số: độ dài sóng, $0 < ka < 5$; góc mở một nửa của cửa cảng, $\delta = 5^\circ$; vị trí của cửa $\theta_0 = 0^\circ, 45^\circ$; và hướng của sóng tới, $\theta_I = 0^\circ, \pm 45^\circ$, thì căn bậc hai bình phương trung bình của phản ứng cảng $(|\eta_H|_2)^{1/2}$ được biểu thị trong các hình 8.4a – 8.4e.

Về mặt định tính, các đường cong phản ứng trông giống như nhau trong tất cả các trường hợp với các đỉnh xuất hiện tại các vị trí dự đoán. Tuy nhiên, các độ cao của các đỉnh khác nhau về mặt lượng đối với các giá trị khác nhau của θ_0 và θ_I .

Thí dụ, ta xét dạng cộng hưởng (2, 1) gần $ka = 3,1$. Các độ cao của đỉnh giảm theo bậc $(\theta_0 = 45^\circ, \theta_I = 0)$, $(\theta_0 = 45^\circ, \theta_I = -45^\circ)$, $(\theta_0 = 0, \theta_I = 0)$ và $(\theta_0 = 45^\circ, \theta_I = 45^\circ)$; lực cưỡng bức N tại cửa cũng có cùng bậc như được chỉ ra trên hình 8.3. Do đó, nếu độ dài sóng thiết kế gần với một dạng nguy hiểm thì việc xác định vị trí hợp lý cho cửa cảng có thể sẽ giảm bớt các

yếu tố nguyên nhân và sự phản ứng.

Ta nhận thấy rằng dạng Helmholtz ít bị ảnh hưởng bởi θ_0 và θ_I ; có nghĩa là phù hợp với hình 8.2 trong đó $N \approx 2$ khi ka nhỏ.



Hình 8.4 Phản ứng cảng trung bình đối với $2\delta = 10^\circ$. (a) $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_I = 0^\circ$; (b) $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_I = -45^\circ$; (c) $\theta_0 = 45^\circ$, $\theta_I = 0^\circ$; (d) $\theta_0 = 45^\circ$, $\theta_I = 45^\circ$; (e) $\theta_0 = 45^\circ$, $\theta_I = 45^\circ$

Hình 8.4 (tiếp)

So sánh các hình 8.4*b* (đối với $\theta_0 = 0, \theta_l = -45^\circ$) và 8.4*c* ($\theta_0 = 45^\circ, \theta_l = 0$), ta nhận thấy rằng các dạng có $m = 0, 2$, cụ thể (0, 1), (0, 2) và (2, 1), có cùng độ cao đỉnh. Hiện tượng này xảy ra vì N đối xứng đối với giao điểm của θ_0 và θ_l (phương trình (8.25)), trong khi đó D độc lập với θ_l (xem phương trình (8.26)) và có cùng giá trị đối với hai tập hợp của θ_0 và m .

Các phản ứng địa phương có thể được tính theo phương trình (8.27) và chúng ta sẽ không trình bày tiếp ở đây.

5.9 CẢNG CÓ HAI THỦY VỰC THÔNG NHAU

Mặt rộng tổng cộng của một số cảng gồm hai thủy vực lớn nối với nhau qua một cửa hẹp. Cảng Long Beach ở California là một ví dụ. Cảng này có một số thuộc tính mới do có thêm bậc tự do. Lee và Raichlen (1972) đã tiến hành các thử nghiệm bằng phương pháp số và trong phòng thí nghiệm cho hai thủy vực hình tròn có diện tích như nhau và có các tâm cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với bờ biển. Kết quả đã cho thấy luôn xuất hiện một cặp đỉnh cộng hưởng khác với cảng có một thủy vực. Mei và Unluata (1978) đã tiến hành các nghiên cứu tiếp theo cho các cửa hẹp có sử dụng các phép tiệm cận xứng hợp như đã giới thiệu tại mục 5.7. Mặc dù đơn giản nhưng các phân tích khá dài và chúng tôi chỉ tóm tắt các kết quả ước tính cho hai thủy vực hình chữ nhật có diện tích như nhau. Hình dạng các thủy vực được trình bày trên hình 9.1, trong đó các độ rộng của cửa vào cảng và đường nối hai thủy vực được ký hiệu tuần tự là $2a_1$ và $2a_2$.

Tương ứng với hài tự nhiên k_{nm} của vịnh kín với n và m không cùng bằng không, có hai đỉnh cộng hưởng \tilde{k}_{nm}^+ và \tilde{k}_{nm}^- với

$$\tilde{k}_{nm}^\pm \cong k_{nm} + c \left\{ \frac{1}{I'} + \frac{1}{2I} \pm \left[\left(\frac{1}{I'} \right)^2 + \left(\frac{1}{2I} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}_{k=k_{nm}}, \quad (9.1)$$

trong đó

$$c = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_m}{2k_{nm} BL}, \quad (9.2)$$

và

$$I = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4B}{\pi \gamma k a_1^2}, \quad (9.3a)$$

$$I' = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4B^2}{\pi^2 a_2^2}. \quad (9.3b)$$

Phân biệt giữa hai đỉnh là

$$\tilde{k}_{nm}^+ - \tilde{k}_{nm}^- \cong 2c \left[\left(\frac{1}{I'} \right)^2 + \left(\frac{1}{2I} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (9.4)$$

Khi hoặc a_1 hoặc a_2 tăng lên thì hoặc I hoặc I' giảm đi, như thế các đỉnh dịch chuyển một phần thêm nữa. Tương ứng với k_{00} , cũng có hai hài Helmholtz với sự phụ thuộc vào các cửa mở tương tự.

Nếu ta định nghĩa σ_H^2 như là hệ số khuếch đại bình phương trung bình của thủy vực ngoài

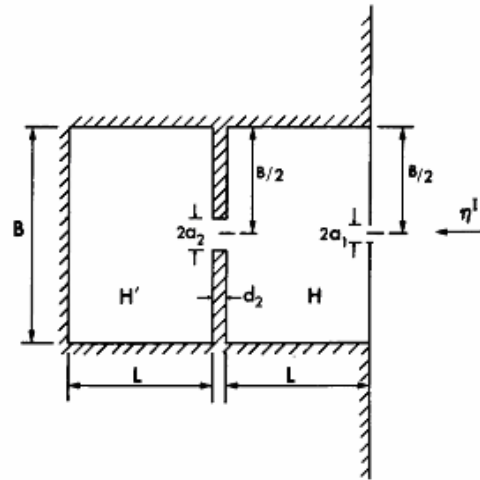
$$\sigma_H^2 = \frac{1}{2BL} \int_0^L dx \int_0^B dy \frac{|\eta_H|^2}{4A^2}, \quad (9.5)$$

và định nghĩa σ_H^2 ' tương tự cho thủy vực trong, có thể chỉ ra rằng

$$\frac{(\tilde{\sigma}_H^2)'^+}{(\tilde{\sigma}_H^2)^+} \cong \frac{(\tilde{\sigma}_H^2)^-}{(\tilde{\sigma}_H^2)'^-} \cong \left\{ \frac{1}{\beta} \left[\left(\beta^2 + \frac{1}{4} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \right] \right\}_{k_{nm}}^2 \quad (9.6)$$

trong đó $\beta \equiv I/I'$ tăng theo sự giảm đi của cửa vào cảng ($2a_1$) hay theo sự tăng lên của cửa nối hai thủy vực ($2a_2$). Do β nằm trong khoảng 0 và ∞ , nên các sắp xếp thứ tự sau đây là đúng

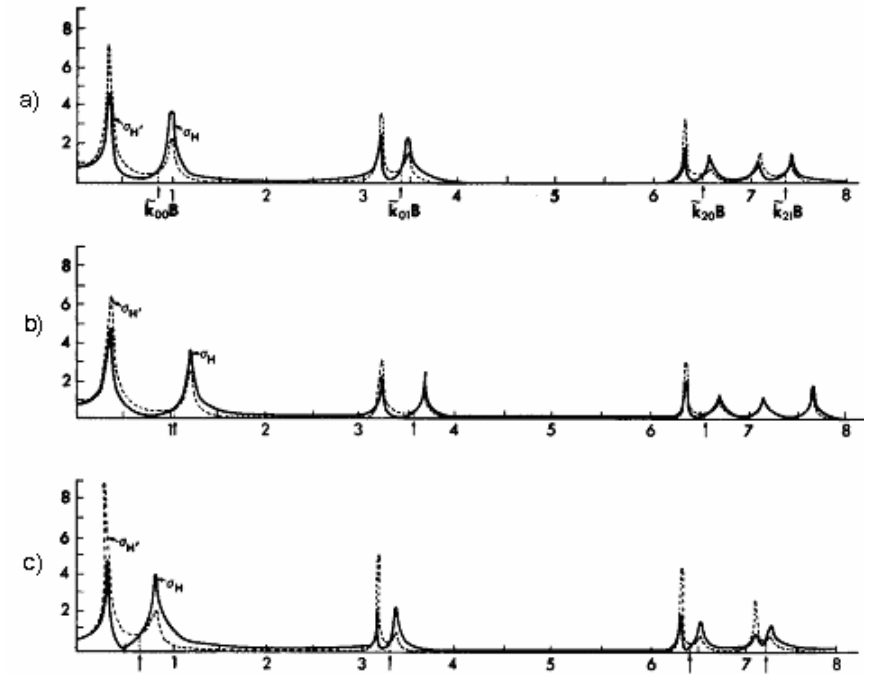
$$(\tilde{\sigma}_{H'}^2)^- > (\tilde{\sigma}_H^2)^- > (\tilde{\sigma}_H^2)^+ > (\tilde{\sigma}_{H'}^2)^+. \quad (9.7)$$



Hình 9.1 Cảng có hai thủy vực

Đối với giá trị β rất lớn thì các tỉ số của các bình phương trung bình trong phương trình (9.6) tiến đến một; các phản ứng vịnh đối với cả hai đỉnh là bằng nhau. Tuy nhiên đối với β nhỏ thì các tỉ số này trở thành nhỏ như 2β ; các phản ứng ngược của cảng do đó tăng đối với cả hai hài \tilde{k}_{nm}^\pm . Đặc biệt nó có nghĩa là thủy vực phía trong trở nên kém được bảo vệ đối với hài thấp \tilde{k}_{nm}^- . Rõ ràng, đây là một nghịch lý cảng liên quan đến các cặp vịnh trong lý thuyết không nhất.

Đối với cặp hài Helmholtz tương ứng với k_{00} , mối quan hệ thứ bậc và sự phụ thuộc vào β một cách định tính là tương tự. Hơn nữa hai thủy vực có pha lệch pha với \tilde{k}_{00}^+ nhưng cùng pha với \tilde{k}_{00}^- .



Hình 9.2 Các căn bậc hai của các phản ứng bình phương trung bình của hai thủy vực diện tích như nhau: Vịnh phía ngoài: đường cong liền nét; vịnh phía trong: đường gạch nối. $2a_1/B = 3 \times 10^{-2}$. (a) $a_1 = a_2, d_1 = d_2 = 0$; (b) $a_2 = 4a_1, d_1 = d_2 = 0$; (c) $a_1 = a_2, d_1 = 0, d_2 = 2a_1$ (theo Mei và Unluata, 1976, J. Eng. Math.)

Các kết quả số dựa trên lý thuyết tiệm cận xứng hợp được trình bày trên hình 9.2 cho hai vịnh hình vuông có cùng diện tích. Độ rộng cửa vào cảng được cố định là $2a_1/B = 3 \times 10^{-2}$. Trong hình 9.2 a lấy $a_1 = a_2$ và các đê chắn sóng có độ dày bằng không. Trong khoảng tính toán $0 < kB < 8$, các hài tự nhiên phân biệt của một vịnh H hay H' là: $k_{01}B = \pi = 3,1415$, $k_{02}B = k_{20}B = 2\pi = 6,2833$, $k_{21}B = \sqrt{5}\pi = 7,0248$, chúng tương ứng với các cặp thứ hai, thứ ba, thứ tư của các đỉnh, cặp thứ nhất là

các hài Helmholtz. Rõ ràng thứ bậc của ba cặp thứ nhất của các đỉnh tuân theo phương trình (9.7). Thứ bậc của cặp cuối cùng của các đỉnh chỉ phù hợp một phần với phương trình (9.7) bởi vì tham số $\tilde{k}a$ không còn nhỏ nữa ($>0,107$).

Trong hình 9.2b của nối hai thủy vực được thay đổi thành $a_2 = 4a_1$; độ dày của các đê chắn sóng vẫn là không. Ta hãy khảo sát ba cặp thấp nhất của các đỉnh. So sánh với hình 9.2a thấy sự phân biệt giữa cặp \tilde{k}^\pm thực tế tăng lên, và đối với hài tương tự, sự khác nhau giữa sự phản ứng vịnh giảm đi, theo phương trình (9.7). Chú ý rằng đối với cặp các đỉnh thứ tư và cao nhất luật thứ tự theo phương trình (9.7) không có giá trị nữa, khi đó $\tilde{k}a_2 > 0,426$.

Trong hình 9.2c giữ lại $a_1 = a_2$ nhưng tăng độ dày của các đê chắn sóng từ không đến $d_2 = 2a_2$, các đê này chia hai thủy vực. Theo các kết quả trong mục 5.7.5 thì độ rộng hữu hiệu a_{2e} sẽ bị giảm đi. So sánh với hình 9.2a thì cặp các đỉnh cao nhất bây giờ tuân theo luật thứ bậc do ($\tilde{k}a_{2e}$) bị giảm xuống thành $\sim 0,027$. Tuy nhiên, sự phân biệt giữa các cặp các đỉnh tại \tilde{k}^\pm giảm đi, trong khi đó đối với hài tương tự (\tilde{k}^+ hay \tilde{k}^-) sự khác biệt giữa các phản ứng cộng hưởng của các thủy vực được tăng lên.

Các đặc tính này phù hợp với các kết quả thí nghiệm và thực nghiệm số do Lee và Raichlen (1972) thực hiện.

5.10 Một phương pháp số cho các cảng hình dạng phức tạp

Đối với các cảng độ sâu không đổi nhưng có hình dạng bất kỳ, Hwang và Tuck (1970) và Lee (1970) đã thực hiện phương pháp các phương trình tích phân và thu được các nghiệm số. Việc mở rộng các phương trình tích phân cho độ sâu biến đổi là

khá phức tạp và tốn kém (Lautenbacher, 1970); Mattioli, 1978). Phương pháp phần tử ghép (HEM) được thảo luận trong mục 4.11 có thể được sửa đổi để áp dụng cho đường bờ và các cảng có đặc trưng đặc biệt khác và nó đặc biệt phù hợp với các cảng độ sâu biến đổi.

Đường bờ gây ra sóng phản xạ và làm thay đổi các sóng phân tán. Để đơn giản, ta giả sử tất cả các gờ ghề của địa hình nằm trong một đường đẳng sâu C và bờ biển ở ngoài đường này là thẳng và trùng với trục x như trên hình 10.1. Trong phần tử đặc biệt $\bar{\Omega}$ phía ngoài C , độ sâu được giả sử là hằng số. Bây giờ sóng tổng cộng trong $\bar{\Omega}$ phải bao gồm một sóng tới và một sóng phản xạ do bờ biển thẳng gây ra và sóng phân tán. Như vậy

$$\eta = \eta^I + \eta^S$$

trong đó

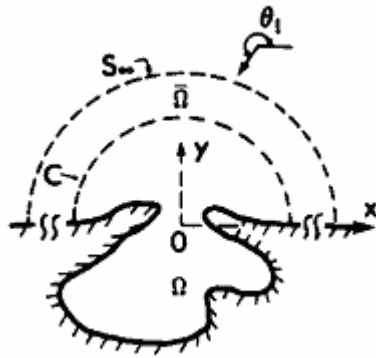
$$\eta^I = e^{ikr \cos(\theta - \theta_I)} + e^{ikr \cos(\theta + \theta_I)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n J_n(kr) \cos n\theta_I \cos n\theta, \quad (10.1)$$

và

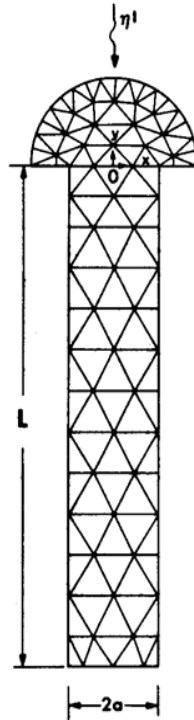
$$\eta^S = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n(kr) \cos n\theta \quad \text{sao cho} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = 0, \pi. \quad (10.2)$$

Phiếm hàm dừng (11.4) trong chương 4 vẫn được sử dụng cùng với các biểu diễn của η^I và η^S ở đây. Qui trình tính toán được giữ nguyên.

Hình 10.2 trình bày lưới phần tử hữu hạn cho một vịnh hình chữ nhật. Vịnh này đã được nghiên cứu bằng các phép tiệm cận xứng hợp trong mục 5.6.2. Phản ứng tại phía đầu đất liền của vịnh được trình bày trên hình 10.3 để so sánh với các thí nghiệm thực hiện trong vùng nước khá sâu. Sự khác nhau ở gần đỉnh thấp nhất cho thấy sự quan trọng của mất mát do ma sát tại cửa vào.



Hình 10.1 Càng với bờ biển thẳng



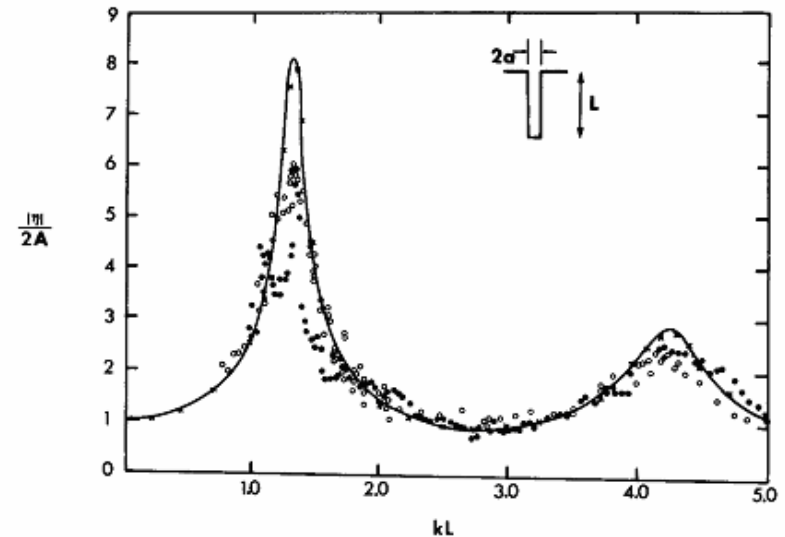
Hình 10.2 Lưới các phần tử hữu hạn cho một vịnh hình chữ nhật

Nếu có một đê chắn sóng mỏng, vận tốc ở gần đầu đê rất lớn sao cho các gradient địa phương lớn. Sẽ là không hợp lý khi tăng số lượng các phần tử hữu hạn xung quanh đầu đê này do các hàm nội suy thông thường không thể thể hiện điểm kỳ dị một cách đúng đắn. Tuy nhiên, ý tưởng phần tử ghép có thể lại được áp dụng bằng cách chèn thêm một phần tử đặc biệt Ω' tâm đặt tại đầu đê (xem hình 10.4). Trong phần tử Ω' , nghiệm

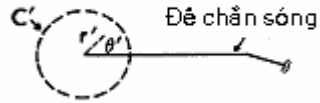
giải tích η' được sử dụng do đó diễn biến của kỳ dị được tính đến một cách chính xác. Phiếm hàm của phương trình (11.4) trong chương 4 phải được sửa đổi bằng cách thêm vào tích phân sau:

$$-\int_{C'} \left(\frac{1}{2}\eta' - \eta\right) \frac{\partial \eta'}{\partial n} ds, \quad (10.3)$$

trong đó C' là biên của Ω' , và \mathbf{n} là véc tơ đơn vị pháp tuyến của C' chỉ ra khỏi Ω' . Các điều kiện xứng hợp của η và $\partial \eta / \partial n$ được đảm bảo như là các điều kiện biên tự nhiên.



Hình 10.3 Hệ số khuếch đại $|\eta|/2A$ tại đầu phía trong của vịnh mở hình chữ nhật, đường cong liền nét: nghiệm của phương trình tích phân (Lee, 1969); $\times \times \times$: nghiệm theo phương pháp phần tử ghép; $\circ \circ \circ$: theo thí nghiệm của Lee (1969); $\bullet \bullet \bullet$: theo thí nghiệm của Ippen và Goda (1963). Trong cả hai thí nghiệm các tham số là: $2a = 2,38$ in; $L = 12,25$ in và $h = 10,13$ in (theo Mei và Chen, 1975)



Hình 10.4 Vùng lân cận đầu của một đê chắn sóng mỏng

Đối với một đê chắn sóng mỏng, đường cong C' có thể được lấy như là một vòng tròn đủ nhỏ sao cho độ sâu trong đó xấp xỉ hằng số. Dạng đúng của η' là

$$\eta' = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n J_{n/2}(kr') \cos \frac{n\theta'}{2}, \quad (10.4)$$

trong đó r' và θ' là các tọa độ cực địa phương được chỉ ra trên hình 10.4. Phương trình (10.4) thoả mãn phương trình Helmholtz và các điều kiện thông lượng bằng không trên các tường:

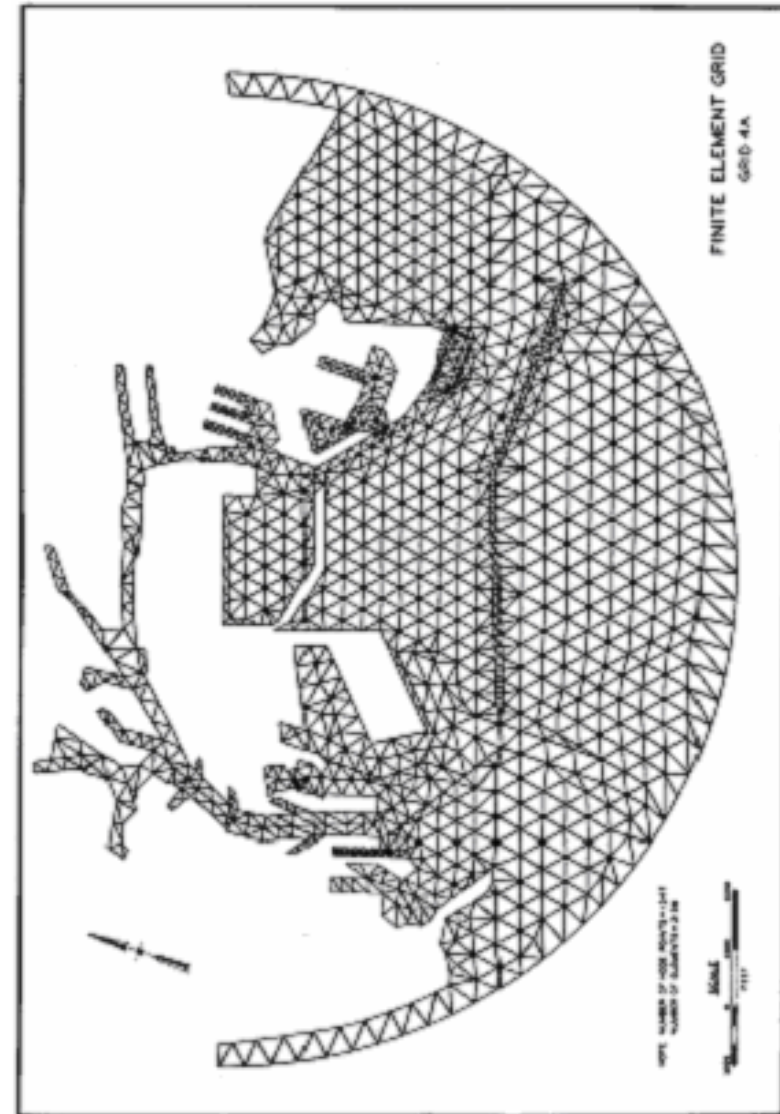
$$\frac{1}{r'} \frac{\partial \eta}{\partial \theta'} = 0 \quad \theta' = 0, 2\pi. \quad (10.5)$$

Ngoài ra, vì

$$J_{1/2}(kr') = \left(\frac{2}{kr'} \right)^{1/2} \sin kr'$$

nên phương trình (10.4) có diễn biến kỳ dị phía phải. Đối với các góc hình nêm với góc mũi nhọn bằng một bội số hữu tỉ của 2π , thì có thể thu được biểu diễn giải tích giống như phương trình (10.4) (theo Chen và Mei, 1974).

Do linh hoạt trong việc xử lý độ sâu và hình dạng biên tùy ý, phương pháp phần tử ghép là phương pháp rất mạnh để nghiên cứu cảng. Thực vậy, Houston (1976) đã sử dụng phương pháp này để lập kế hoạch xây dựng các cầu tàu mới và bãi đậu trong cảng Long Beach; lưới phần tử hữu hạn được trình bày trên hình 10.5.



Hình 10.5 Lưới phần tử hữu hạn cho cảng Long Beach (theo Houston, 1976)

5.11 PHẢN ỨNG CẢN ĐỐI VỚI SÓNG TỚI NGẮN

Trong mục 4.1.3 ta đã chỉ ra rằng sự phản ứng sóng ngắn trong nước nông có thể thu được bằng phép tích phân Fourier của các phản ứng đơn điều hoà. Bây giờ ta sẽ áp dụng thủ tục này cho phản ứng sóng ngắn trong cảng. Ta sẽ sử dụng cách phân tích của Carrier (1970) (xem chi tiết mô hình cơ bản trong mục 5.4).

Giả sử sóng tới ngắn được mô tả bằng:

$$\zeta^I(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_0(\omega) e^{-ikx - i\omega t} \quad (11.1)$$

trong đó $A_0(-\omega) = A_0^*(\omega)$ cho giá trị thực ζ^I . Hệ sóng tới và sóng phản xạ do đường bờ thẳng tại $x=0$ phải là

$$\zeta^I + \zeta^{I'} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega 2A_0(\omega) (\cos kx) e^{-i\omega t}. \quad (11.2)$$

Phản ứng của cảng có thể được viết là

$$\zeta_H = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_0(\omega) e^{-i\omega t} \eta_H(x, y, \omega), \quad (11.3)$$

trong đó η_H là phản ứng tần số đối với một chuỗi sóng tới có biên độ đơn vị. Đường lấy tích phân nên lấy hơi cao hơn phía trên trục thực sao cho $\zeta_H \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow -\infty$. Mặc dù tất cả các kết quả trước đây là đối với các giá trị thực dương của ω và k , các kết quả đối với ω thực âm cũng có thể được suy ra theo trước đây bằng cách thay đổi dấu của i , nghĩa là

$$\eta_H(\mathbf{x}, -\omega) = \eta_H^*(\mathbf{x}, \omega). \quad (11.4)$$

Trước hết chú ý rằng, để thu được phản ứng ngắn theo phép chồng chất Fourier thì về nguyên lý cần phải biết $\eta_H(x, y, \omega)$ cho toàn bộ các tần số $-\infty < \omega < \infty$. Điều đó đòi hỏi một nghiệm bằng số không bị hạn chế đối với cửa vào hẹp. May thay, sóng thần đi

vào thường là các sóng chu kỳ dài và phản ứng cảng chỉ là đáng kể đối với một vài hài thấp nhất; sai số trong dải tần cao không đáng kể. Do đó ta có quyền hy vọng rằng lý thuyết sóng dài gần đúng ở các mục trước có thể dùng được mà không phát sinh sai số lớn.

Xét một chùm sóng ngắn với tần số mang ω_0 và đường bao Gauss biến đổi chậm, do đó tại $x=0$ có

$$\zeta^I + \zeta^{I'} = 4Be^{-\Omega^2 t^2} \cos \omega_0 t, \quad x=0, \quad (11.5)$$

trong đó

$$\frac{\omega_0}{\Omega} \gg 1. \quad (11.6)$$

Đỉnh của đường bao đập vào bờ tại $t=0$. Ta dễ dàng tìm được phổ biên độ là:

$$A_0(\omega) = \frac{B}{\pi^{1/2}} \frac{1}{2\Omega} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\omega - \omega_0}{2\Omega} \right)^2 \right] + \exp \left[- \left(\frac{\omega + \omega_0}{2\Omega} \right)^2 \right] \right\}.$$

Tận dụng phương trình (11.4), ta rút ra rằng

$$\zeta_H = \frac{B}{\pi^{1/2}} \frac{1}{\Omega} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[- \frac{\omega - \omega_0}{2\Omega} \right]^2 \right\} \eta_H(x, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

hay một cách tương đương là

$$\zeta_H = \frac{B}{\pi^{1/2}} \frac{1}{K} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[- \frac{k - k_0}{2K} \right]^2 \right\} \eta_H(x, k) e^{-ik\tau} dk, \quad (11.7)$$

trong đó

$$(k, k_0, K) = (\omega, \omega_0, \Omega) (gh)^{-1/2} \quad \tau = (gh)^{1/2} t. \quad (11.8)$$

Phương trình (11.6) có nghĩa là

$$\frac{K}{k_0} \ll 1, \quad (11.9)$$

vì thế phần quan trọng của phổ là hẹp.

Để đơn giản, ở đây ta chỉ xét vịnh chữ nhật trong mục 5.5.2, nhưng việc phân tích thì hoàn toàn tương tự đối với các cảng khác nếu có các nghiệm giải tích (xem Carrier, 1970; Risser, 1976). Ta chú ý tới điểm $x = -L$, tức phần cuối vịnh ở phía đất liền:

$$\zeta_H = \frac{B}{K\pi^{1/2}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \wp(k) \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{4K^2} - ik\tau\right] dk, \quad (11.10)$$

trong đó

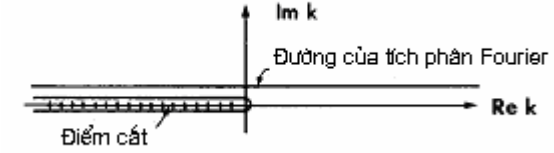
$$\wp = \left[\cos kL + \frac{2ka}{\pi} \sin kL \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} - ika \sin kL \right]^{-1} \quad (11.11)$$

là hệ số khuếch đại từ phương trình (6.20). Tích phân có thể ước lượng bằng số. Tuy nhiên, nghiên cứu giải tích đối với thí dụ đơn giản này ở đây là rất bổ ích về mặt vật lý cũng như việc chỉ dẫn giải số. Trước tiên, $\wp(k)$ có một điểm rẽ nhánh dạng loga tại $k=0$. Do đường tích phân hơi nằm trên trục thực k , nên điểm cắt nhánh phải nằm phía dưới đường tích phân này và có thể được chọn như trên hình 11.1. Ta có thể kiểm tra, đối với số thực âm ω thì có thể thay thế i bằng $-i$ trong phương trình (6.20) và kết quả là

$$\wp(\omega) = \left[\cos kL + \frac{2ka}{\pi} \sin kL \ln \frac{2\gamma ka}{\pi e} + ika \sin ka \right]^{-1},$$

$$k = \omega(gh)^{-1/2} < 0. \quad (11.12)$$

Phương trình (11.12) cũng có thể nhận được từ phương trình (6.20) bằng cách thay k bằng $ke^{i\pi}$ (không phải bằng $ke^{-i\pi}$). Sự lựa chọn pha cụ thể này phù hợp với vị trí của điểm cắt nhánh.



Hình 11.1 Mặt phẳng phức đối với tích phân Fourier

Tiếp theo, ta chú ý rằng hệ số khuếch đại có các cực trong phần nửa dưới của mặt phẳng phức k tại

$$\bar{k}_n = \pm \tilde{k}_n + i\hat{k}_n, \quad \hat{k}_n < 0,$$

trong đó \tilde{k}_n tương ứng với hài cộng hưởng thứ n và \hat{k}_n tương ứng với tốc độ suy giảm phát xạ.

Tích phân trong phương trình (11.10) có thể được phân tích bằng phương pháp *tiệm cận sườn dốc* (*asymptotic method of steepest descent*). Có rất nhiều tài liệu toán học ứng dụng (thí dụ các tài liệu của Carrier, Krook, và Pearson, 1966) trình bày tổng quát vấn đề này, ở đây ta chỉ trình bày những vấn đề cần thiết. Xét hàm pha của hàm mũ trong phương trình (11.10)

$$g(k) = -\frac{(k-k_0)^2}{4K^2} - ik\tau \quad (11.13)$$

như là một hàm giải tích của k . Đặt $k = \alpha + i\beta$, khi đó các đường đồng mức của $\operatorname{Re} g$ và $\operatorname{Im} g$ được biểu diễn bằng

$$\operatorname{Re} g = \text{const}: \quad (\alpha - k_0)^2 - (\beta + 2K^2\tau)^2 = \text{const} \quad (11.14a)$$

$$\operatorname{Im} g = \text{const}: \quad (\alpha - k_0)^2 (\beta + 2K^2\tau)^2 = \text{const} \quad (11.14b)$$

có dạng hyperbol; các đường đồng mức của $\operatorname{Re} g$ được vẽ trên hình 11.2 đối với $\tau < 0$ và trên hình 11.3 đối với $\tau > 0$. Tâm của các đường hyperbol là điểm S ở đó có

$$k = k_0 - 2iK^2\tau = k_0 - 2iK\Omega t. \quad (11.15)$$

So với điểm S , địa thế của $\exp(\text{Re}g)$ hạ xuống ở hai phía đông, tây và tăng lên ở hai phía nam và bắc; điểm S do đó được gọi là điểm yên ngựa*. Do g là giải tích, nên các đường đồng mức của $\text{Im}g$ là trục giao với $\text{Re}g = \text{const}$ và là các đường mà dọc theo nó $\exp(\text{Re}g)$ thay đổi nhanh nhất; chúng ta gọi các đường này là *sườn dốc*. Mục tiêu là biến các đường gốc thành các đường sườn dốc sao cho tích phân chỉ có giá trị đáng kể trên một đoạn ngắn của đường.

Trước khi đỉnh tiến vào cửa cảng, $\tau < 0$, điểm yên ngựa nằm trong cung phần tư thứ nhất. Đường chữ nhật đóng kín được đưa vào trong hình 11.2 với một đường ngang I_1 đi từ vùng trũng (valley) phía tây qua yên ngựa và đi vào vùng trũng phía đông. Tích phân dọc theo hai quãng đường thẳng đứng tại $\text{Re}k \rightarrow \pm\infty$ triệt tiêu do hàm mũ trong tích phân. Theo định lý Cauchy thì $I_0 = I_1$. Dọc theo đường I_1 , $\text{Im}g = 0$ và $\text{Re}g$ hạ xuống rất nhanh trên cả hai phía của S ; I_1 là một đường sườn dốc. Rõ ràng đóng góp quan trọng nhất là từ vùng lân cận của bản thân điểm S , ở đó tốc độ thay đổi của $\text{Re}g$ bằng không. Dọc theo I_1 , lấy

$$\sigma = k - k_0 + 2iK^2\tau, \quad (11.16)$$

khi đó

$$\zeta_H = \frac{B}{K\pi^{1/2}} \text{Re} \left\{ e^{-K^2\tau^2 - ik_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4K^2}\right) \varphi(k) \Big|_{k=k_0-2iK^2\tau+\sigma} \right\}. \quad (11.17)$$

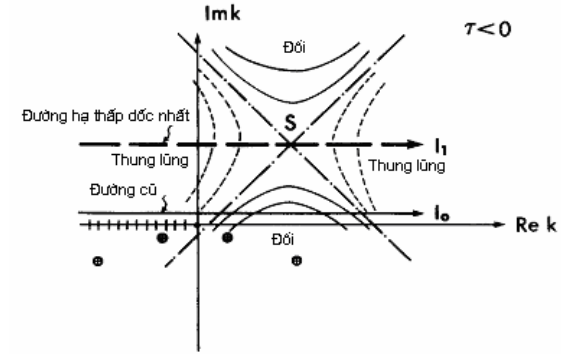
Do có hệ số Gauss $\exp(-K^2\tau^2)$ chúng ta chỉ cần tập trung quan tâm vào $K\tau = O(1)$. Vì $K/k_0 \ll 1$ nên số hạng dẫn đầu trong phương trình (11.7) là

* Trong trường hợp tổng quát nhất, điểm yên ngựa được xác định bằng $dg/dz = 0$.

$$\begin{aligned} \zeta_H &\equiv \frac{B}{K\pi^{1/2}} \text{Re} \left\{ e^{-K^2\tau^2 - ik_0\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4K^2}\right) \right\} \\ &= 2B \text{Re} \left\{ \varphi(k_0) e^{-\Omega^2 t^2} e^{-i\omega_0 t} \right\} \quad t, \tau < 0. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Như vậy, trước khi đỉnh của đường bao tới thì cảng phản ứng thụ động với cùng một tần số mang và đường bao tương tự như sóng tới.

Phương trình (11.18) đúng khi điểm yên ngựa ở một khoảng cách lớn hơn $O(K)$ tính từ cực của $\varphi(k)$. Bây giờ, tất cả các cực của $\varphi(k)$ tương ứng với các cộng hưởng và có các phần ảo âm, $k_n < 0$. Nếu hài cộng hưởng thấp nhất có $-\hat{k}_1 > O(K)$ tức là khi khoảng thời gian của chùm sóng tới lớn hơn nhiều so với qui mô thời gian của suy giảm phát xạ, thì phương trình (11.18) đúng cho tới khi $t = 0$, khi đó đỉnh của đường bao các sóng tới đập vào bờ biển. Nếu đường bao dài vô hạn thì đỉnh của đường bao tới bờ biển là tiệm cận theo thời gian. Nếu sóng tới có dạng sin, phản ứng ở trạng thái ổn định có thể thu được bằng cách cho $\Omega \rightarrow 0$, trong khi giữ t là hữu hạn trong phương trình (11.18).



Hình 11.2 Địa hình gần điểm yên ngựa với $\tau < 0$ (trước khi xung đập vào bờ). Tỷ lệ thẳng đứng được phóng đại, $-2K^2\tau \ll k_0$, $K/k_0 \ll 1$

Sau khi đỉnh của chùm sóng tới đập vào bờ, τ trở thành dương và điểm yên ngựa S di chuyển tới góc phần tư thứ tư. Trường hợp thú vị nhất là khi

$$k_0 = \tilde{k}_N, \quad (11.19)$$

nghĩa là sóng tới có tần số giống như một trong những hài cộng hưởng thấp nhất N . Đối với $K\tau < O(1)$ chùm sóng vẫn phù hợp, có một khoảng thời gian khi S nằm ngay phía trên cực thứ N , nghĩa là $2K^2\tau < -\hat{k}_N$. Để dịch chuyển đường tích phân tới đường ngang đi qua S , ta phải tính tới các đóng góp từ nhánh bị cắt và từ các cực nằm ở phía trên điểm S và tương ứng với các hài có tần số thấp hơn tần số sóng tới. Xem hình 11.3, chúng ta phân tách nhánh bị cắt sao cho nó đi theo đường sườn dốc. Theo định lý Cauchy thì

$$\zeta_H = \zeta_H(I_1) + \zeta_H(I_2) + \zeta_H(I_3) - \frac{B}{K\pi^{1/2}} \operatorname{Re} 2\pi i \sum_n \text{thặng dư}, \quad (11.20)$$

trong đó $\zeta_H(I_\alpha)$ đại diện cho phương trình (11.10) với I_α là đường lấy tích phân. Dọc theo I_2 và I_3 (chúng là các đường sườn dốc), lân cận của $k=0$ đóng góp chính cho tích phân. Do có hệ số nhỏ $\exp(-k_0^2/4K^2)$, các tích phân tương ứng $\zeta_H(I_2)$ và $\zeta_H(I_3)$ là không quan trọng.

Phần dư đối với hài n có thể thu được bằng cách trước tiên sử dụng phương trình (6.22), phương trình này đúng cho vùng gần cực

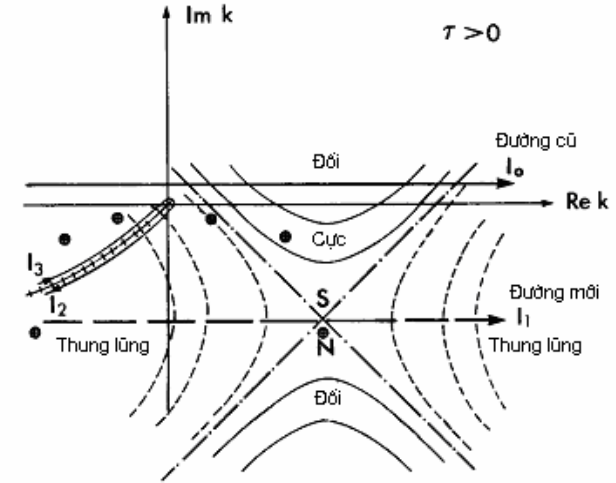
$$\wp \cong (-1)^{n+1} \frac{1}{(k - \tilde{k}_N)L + ik_n a} \quad (11.21)$$

$$= \frac{1}{(-1)^{n+1} L} \frac{1}{k - (\tilde{k}_N + i\hat{k}_N)} \quad \text{với} \quad \hat{k}_N = -\frac{k_n a}{L} < 0, \quad (11.22)$$

trong đó \tilde{k}_N được cho bằng phương trình (6.23). Phần dư sẽ là

$$\frac{B}{K\pi^{1/2}} \frac{-2\pi i}{(-1)^{n+1} L} e^{-i\tilde{k}_N \tau} e^{\hat{k}_N \tau} \exp\left[-\frac{(\tilde{k}_N - k_0 + i\hat{k}_N)^2}{4K^2}\right], \quad (11.23)$$

nó cũng là dạng nhỏ e mũ đối với mọi $n \neq N$.



Hình 11.3 Địa hình gần điểm yên ngựa với $\tau > 0$ (sau khi xung đập vào bờ) các nhánh cắt I_2 và I_3 đi theo đường sườn dốc. N tham chiếu tới cực cộng hưởng

Bây giờ chúng ta đi khảo sát số hạng $\zeta_H(I_1)$. Do điểm S khá gần với cực $\tilde{k}_N + i\hat{k}_N$ nên ta cần thực hiện thêm một số việc. Lại sử dụng phương trình (11.22), từ phương trình (11.10) ta được

$$\zeta_H(I_1) = \frac{B}{K\pi^{1/2}} \operatorname{Re} \int_{I_1} \frac{\exp[-(k - k_0)^2 / 4k^2 - ik\tau]}{[k - (\tilde{k}_N + i\hat{k}_N)](-)^{N+1} L} dk$$

sau khi sử dụng phương trình (11.16) và phương trình (11.19), nó có thể được viết thành

$$\zeta_H(I_1) \equiv \frac{B}{K\pi^{1/2}} \operatorname{Re} \frac{e^{-K^2\tau^2} e^{-i\hat{k}_N\tau}}{(-)^{N+1} L} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\sigma^2/4K^2} d\sigma}{\sigma - i(2K^2\tau + \hat{k}_N)}. \quad (11.24)$$

Tích phân ở trên có thể được tính toán một cách chính xác (theo Carrier, 1970), chi tiết được trình bày trong phần phụ lục 5.D. Trong trường hợp đặc biệt với $2K^2\tau + \hat{k}_N < 0$ thì điểm S vẫn nằm trên cực, và có

$$\zeta_H(I_1) \equiv \frac{B}{K\pi^{1/2}} \operatorname{Re} \frac{-i\pi e^{-i\hat{k}_N\tau}}{(-)^{N+1} L} \left\{ e^{\hat{k}_N^2/4K^2} e^{\hat{k}_N\tau} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{2K^2\tau + \hat{k}_N}{2K} \right) \right] \right\}. \quad (11.25)$$

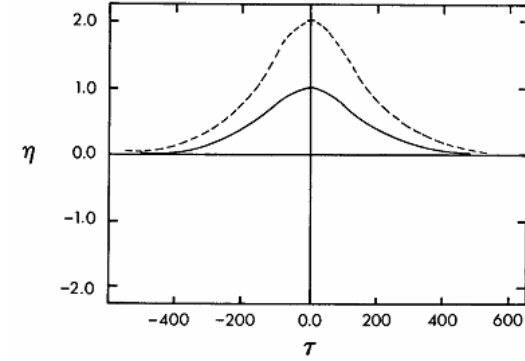
Khi thời gian tăng lên nữa thì $2K^2\tau + \hat{k}_N$ là dương, tích phân dọc theo I_1 trở thành

$$\zeta_H(I_1) \equiv \frac{B}{K\pi^{1/2}} \operatorname{Re} \frac{i\pi e^{-i\hat{k}_N\tau}}{(-)^{N+1} L} \left\{ e^{\hat{k}_N^2/4K^2} e^{\hat{k}_N\tau} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{2K^2\tau + \hat{k}_N}{2K} \right) \right] \right\} \quad (11.26)$$

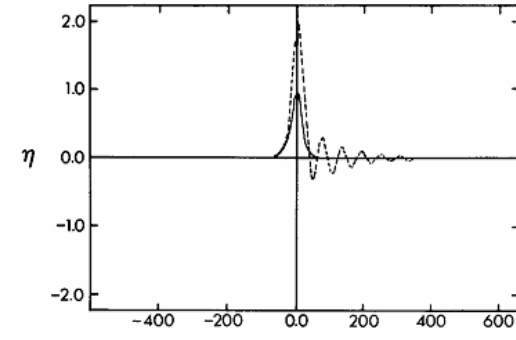
(xem phụ lục 5.D). Bây giờ ta phải cộng thêm thành phần dư từ cực N :

$$\operatorname{Re} \frac{-2iB\pi^{1/2}}{(-)^{N+1} KL} e^{i\hat{k}_N\tau} e^{\hat{k}_N\tau} e^{\hat{k}_N^2/4K^2}, \quad (11.27)$$

theo phương trình (11.23). Kết quả kết hợp lại cũng được trình bày bằng phương trình (11.25). Rõ ràng rằng vịnh bị kích hoạt ở tần số của hài N và suy giảm theo thời gian suy giảm phát xạ $\propto |\hat{k}_N|^{-1}$. Biên độ cực đại trong vịnh tăng theo khoảng thời gian của nhóm sóng tới tăng (giảm K). Đối với nhóm sóng ngắn hơn (K lớn hơn), giá trị cực đại không chỉ nhỏ hơn mà còn xuất hiện sớm hơn.



a)

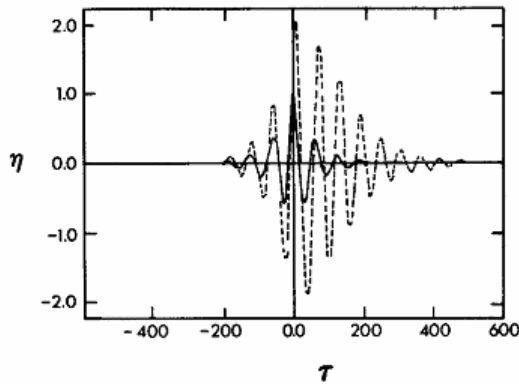


b)

Hình 11.4 Các phản ứng ngắn đối với sóng đỉnh đơn: (a) xung dài, (b) xung ngắn. Đường cong liền nét: sóng tới; đường đứt nét: phản ứng của cảng (theo Carrier & Shaw, 1970), Tsunamis in the Pacific Ocean)

Phân tích trên có thể được mở rộng cho các vịnh của cảng dạng hai chiều thực sự. Hài Helmholtz có tầm số cộng hưởng và tốc độ suy giảm thấp nhất, nó có thể bị kích hoạt bằng một xung đơn với tần số mang xấp xỉ không $\omega \approx 0$. Carrier và Shaw (1970) đã tích phân số phản ứng điều hoà để thu được phản ứng gần trong một cảng chữ nhật có $B = 600$ bộ, $L = 100$ bộ, $h = 21$ bộ. Đối

với một xung rất dài (khoảng tác động khoảng 6,4 lần chu kỳ của hài Helmholtz), họ đã thấy rằng phản ứng là thụ động như trình bày trên hình 11.4a. Lý do là phổ Fourier của một xung phẳng là rất nhọn với $k_0 = 0$ và K rất nhỏ; phần thặng dư từ cực Helmholtz là rất nhỏ. Tuy nhiên đối với một xung cực ngắn thì hài Helmholtz bị kích hoạt như trên hình 11.4b. Sự kích hoạt này xuất hiện bởi vì phổ Fourier của một xung tới ngắn là rất rộng (K lớn) vì thế địa hình ở gần yên ngựa là mềm mại, và phần thặng dư từ cực Helmholtz là đáng kể. Cuối cùng, hình 11.5 trình bày phản ứng của hài Helmholtz bị kích hoạt do một gói sóng tới. Sự lớn dần lên đến cộng hưởng đối với $t < 0$ và sự dội trở lại và sự suy yếu đối với $t > 0$ về mặt định tính phù hợp với các kết quả giải tích của một vịnh hẹp.



Hình 11.5 Phản ứng ngắn đối với một gói sóng tới (theo Carrier & Shaw, 1970, *Tsunamis in the Pacific Ocean*)

Đối với cặp vịnh hình vuông, các nghiên cứu số và giải tích đã được Risser thực hiện năm 1976. Trên hình 11.6 trình bày một kết quả thí dụ của Risser cho hệ thống cảng đã được vẽ trong hình 9.1a với $h = 20$ m và $B = L = 1000$ m. Tần số mang của

chùm sóng được giả thiết là $kB = 3,289$ nó tương ứng với đỉnh thấp nhất thứ ba ($k_{01}^- B$ hay $k_{10}^- B$). Theo thuật ngữ vật lý thì chu kỳ sóng tới $T_0 = 136$ s. Đối với một chùm sóng có khoảng tồn tại $= 30T_0$, các đường bao của các phản ứng tại các điểm P và Q được đánh dấu trên bản đồ lồng ghép và được trình bày trên hình 11.6. Thật thú vị là có sự dao động trao đổi năng lượng giữa hai vịnh của cảng và sự phản ứng của vịnh phía trong có thể hơi cao hơn vịnh phía ngoài.

PHỤ LỤC 5.A: HÀM NGUỒN ĐỐI VỚI VỊNH HÌNH CHỮ NHẬT

Trong mục phụ lục này, chúng ta xây dựng lại hàm nguồn $G(x, y, y')$ thoả mãn phương trình Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0, \quad (\text{A.1})$$

và các điều kiện biên

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \text{ tại } y = 0, B, \quad 0 < x < L, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \begin{cases} 0 & x = L \\ \delta(y - y') & x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$\quad \quad \quad (\text{A.4})$$

Như vậy, G biểu diễn một nguồn trên tường tại $x = 0, y = y'$.

Ta giả sử nghiệm có dạng

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad (\text{A.5})$$

và chú ý rằng nó thoả mãn điều kiện thông lượng bằng không (A.2). Thế phương trình (A.5) vào phương trình (A.1), ta có

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + K_n^2\right)X_n = 0, \quad (\text{A.6})$$

trong đó

$$K_n^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Nghiệm của phương trình (A.6) thoả mãn phương trình (A.3) đơn giản là

$$X_n = A_n \cos K_n(x - L). \quad (\text{A.8})$$

Để xác định các hệ số chưa biết A_n trong phương trình (A.8), trước tiên ta thế phương trình (A.8) vào phương trình (A.5) và sử dụng điều kiện (A.4), ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n K_n \sin K_n L \cos \frac{n\pi y}{B} = \delta(y - y'). \quad (\text{A.9})$$

Thứ hai, ta nhân cả hai vế của phương trình (A.9) với $\cos(n\pi y/B)$ và tích phân theo y từ 0 đến B . Theo mối quan hệ trực giao

$$\int_0^B \cos \frac{n\pi y}{B} \cos \frac{m\pi y}{B} dy = \frac{B\delta_{mn}}{\varepsilon_n}$$

trong đó

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{A.10})$$

thì các hệ số tìm được là

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{BK_n \sin K_n L} \cos\left(\frac{n\pi y'}{B}\right). \quad (\text{A.11})$$

Cuối cùng, hàm nguồn sẽ là

$$G(x, y, y') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{BK_n \sin K_n L} \cos K_n(x - L) \cos \frac{n\pi y}{B} \cos \frac{n\pi y'}{B}. \quad (\text{A.12})$$

PHỤ LỤC 5.B: TỔNG CỦA CHUỖI \tilde{G}

Chuỗi để lấy tổng là

$$\tilde{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n, \quad (\text{B.1})$$

trong đó

$$\tilde{G}_n = \tilde{X}_n(x)Y_n(y)Y_n(y'), \quad (\text{B.2})$$

và

$$\tilde{X}_n = -\frac{2}{n\pi} e^{-n\pi x/B}, \quad (\text{B.3})$$

$$Y_n = \cos \frac{n\pi y}{B}. \quad (\text{B.4})$$

Ta đặt

$$\xi = \frac{\pi x}{B}, \quad \eta = \frac{\pi y}{B}, \quad \eta' = \frac{\pi y_0}{B}, \quad (\text{B.5})$$

và sử dụng đẳng thức lượng giác ta để ý là

$$\begin{aligned} Y_n(y)Y_n(y') &= \cos n\eta \cos n\eta' \\ &= \frac{1}{4} \left\{ e^{-jn(\eta-\eta')} + e^{-jn(\eta+\eta')} \right\} + *, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

trong đó (*) ký hiệu liên hiệp phức của các số hạng phía trước trong dấu móc. Thế các phương trình (B.6) và (B.3) vào trong phương trình (B.2), ta có

$$\tilde{G}_n = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{e^{-nZ_s}}{n} + \frac{e^{-nZ'_s}}{n} \right) + * \right], \quad (\text{B.7})$$

trong đó

$$Z_s = \xi + j(\eta - \eta'), \quad Z'_s = \xi + j(\eta + \eta'). \quad (\text{B.8})$$

Thế phương trình (B.7) vào phương trình (B.1) thu được bốn chuỗi vô hạn, mỗi chuỗi có thể được lấy tổng dưới dạng gần đúng theo công thức sau (theo Collin, 1960, trang 579):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{n} = -\ln(1 - e^{-s}), \quad (\text{B.9})$$

và thu được kết quả

$$\tilde{G} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n = \frac{1}{2\pi} \left[\ln(1 - e^{-Z_s}) + \ln(1 - e^{-Z'_s}) \right] + *, \quad (\text{B.10})$$

hay

$$\tilde{G} = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \left| 1 - e^{-Z_s} \right|^2 \left| 1 - e^{-Z'_s} \right|^2 \right\}. \quad (\text{B.11})$$

PHỤ LỤC 5.C: CHỨNG MINH NGUYÊN LÝ BIẾN THIÊN

Hàm J được định nghĩa là

$$J = \frac{1}{2} \int_M \int F(\theta) K(\theta|\theta') F(\theta') d\theta d\theta' - \frac{1}{a} \int_M F(\theta) \eta^0(\theta) d\theta \quad (\text{C.1})$$

trong đó $F(\theta)$ là nghiệm của phương trình tích phân

$$\int_M F(\theta') K(\theta|\theta') d\theta' = \frac{1}{a} \eta^0(\theta), \quad \theta \text{ nằm trong } M, \quad (\text{C.2})$$

với nhân đối xứng

$$K(\theta|\theta') = K(\theta'|\theta). \quad (\text{C.3})$$

Ta sẽ chứng minh rằng phương trình (C.2) tương đương với sự triệt tiêu của biến thiên thứ nhất của J , tức

$$\delta J = 0. \quad (\text{C.4})$$

Đặt một nghiệm xấp xỉ là \bar{F} , nó khác nghiệm đúng F một lượng là δF , tức

$$\bar{F} = F + \delta F. \quad (\text{C.5})$$

Như vậy, giá trị gần đúng của J là

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_M \int (F + \delta F) K(F' + \delta F') d\theta d\theta' - \frac{1}{a} \int_M (F + \delta F) \eta^0 d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_M \int [FF' + F'(\delta F) + F(\delta F')] K d\theta d\theta' \\ &\quad - \frac{1}{a} \int_M (F + \delta F) \eta^0 d\theta + O(\delta F)^2 \\ &= J + \frac{1}{2} \int_M \int (F' \delta F + F \delta F') K d\theta d\theta' - \frac{1}{a} \int_M \delta F \eta^0 d\theta + O(\delta F)^2 \quad (\text{C.6}) \end{aligned}$$

trong đó ký hiệu rút gọn được sử dụng là $F' = F(\theta')$. Biến thiên thứ nhất của J là

$$\delta J = \bar{J} - J = \frac{1}{2} \int_M \int (F' \delta F + F \delta F') K d\theta d\theta' - \frac{1}{a} \int_M \delta F \eta^0 d\theta. \quad (\text{C.7})$$

Do tính đối xứng của K (xem phương trình (C.3)) nên

$$\int_M \int F' \delta F K d\theta d\theta' = \int_M \int F \delta F' K d\theta d\theta', \quad (\text{C.8})$$

do đó

$$\delta J = \int_M d\theta F \int_M d\theta' \left[F(\theta') K(\theta|\theta') - \frac{1}{a} \eta^0(\theta') \right]. \quad (\text{C.9})$$

Như vậy phương trình tích phân (C.2) bao hàm phương trình (C.4). Ngược lại, nếu phương trình (C.4) đúng cho giá trị nhỏ bất kỳ δF , thì phương trình (C.2) phải đúng.

PHỤ LỤC 5.D: ƯỚC LƯỢNG TÍCH PHÂN

Carrier (1970) đã đưa ra kết quả sau:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma e^{-\sigma^2/4K^2}}{\sigma + i\gamma} = -(\text{sgn } \gamma) i\pi e^{\gamma^2/4K^2} \left[1 - \text{erf} \left(\frac{|\gamma|}{2K} \right) \right], \quad (\text{D.1})$$

nó có thể được khai triển bằng cách lấy tích phân đường (theo Risser, 1976). Trước hết xét $\gamma > 0$ và đưa ra $z = \sigma + i\gamma$. Từ đó ta có

$$J = \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} \frac{dz}{z} \exp\left[-\frac{(z^2 - 2i\gamma z - \gamma^2)}{4K^2}\right]. \quad (D.2)$$

Cực bẫy giờ nằm tại gốc của mặt z trong khi đó đường lấy tích phân nằm ở trên trục z thực. Theo định lý Cauchy, đường lấy tích phân có thể được thay bằng trục z thực nghĩa là ở trên gốc.

Bây giờ ta tách tích phân thành hai phần: một tích phân giá trị gốc J_p :

$$J_p = e^{\gamma^2/4K^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} e^{-(z^2 - 2i\gamma z)/4K^2}, \quad (D.3)$$

và một tích phân dọc theo chỗ tách:

$$J_\varepsilon = e^{\gamma^2/4K^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \frac{d\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} = -i\pi e^{\gamma^2/4K^2}. \quad (D.4)$$

Ký hiệu tích phân giá trị gốc trong (D.3) bằng F

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} e^{-(z^2 - 2i\gamma z)/4K^2}, \quad (D.5)$$

ta tìm

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \gamma} &= \frac{i}{2K^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(z^2 - 2i\gamma z)/4K^2} = \frac{i}{2K^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-(\varepsilon - i\gamma)^2/4K^2} e^{-\gamma^2/4K^2} \\ &= \frac{i}{2K^2} 2K\pi^{1/2} e^{-\gamma^2/4K^2} = \frac{i\pi^{1/2}}{K} e^{-\gamma^2/4K^2}. \end{aligned} \quad (D.6)$$

Khi $\gamma = 0$, hàm bị tích trong phương trình (D.5) là lẻ theo z ; như thế $F(\gamma = 0) = 0$. Ta có thể tích phân phương trình (D.6) để có

$$F = \frac{i\pi^{1/2}}{K} \int_0^\gamma e^{-\gamma^2/4K^2} d\gamma = i\pi \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^{\gamma/2K} e^{-\sigma^2} d\sigma = i\pi \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{2K}\right). \quad (D.7)$$

Cộng J_p và J_ε lại ta có

$$J = J_p + J_\varepsilon = -i\pi e^{\gamma^2/4K^2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma}{2K}\right)\right]. \quad (D.8)$$

Nếu $\gamma < 0$, ta viết $\gamma = -|\gamma|$, điều này có nghĩa là thay thế i bằng $-i$ trong hàm bị tích của phương trình (D.1), tức thay đổi dấu.

Chương 6 - CÁC HIỆU ỨNG TỔN THẤT CỘT NƯỚC TẠI EO HẸP ĐỐI VỚI SỰ PHÂN TÁN SÓNG DÀI: LÝ THUYẾT THỦY LỰC

Trong lý thuyết lý tưởng về sóng phân tán trong chất lỏng không nhớt, người ta thường giả thiết chất lỏng chuyển động song song với biên cứng của tường hay của vật thể. Tuy nhiên, trên thực tế gradient áp suất ngược và độ nhớt có thể làm chậm chuyển động gần nơi dòng uốn lượn đột ngột, buộc dòng chảy bị phân tách và tạo ra các xoáy nước có độ xoáy cao, gây mất năng lượng đáng kể. Khuynh hướng tự nhiên này giống như các tấm lưới lỗ trên tường nhà hấp thụ năng lượng âm. Jarlan (1965) đã đưa ý tưởng này vào kỹ thuật vùng bờ và sáng chế thiết kế đê chắn sóng với tấm dạng lưới khoét lỗ gắn phía trước tường cứng. Sự tiêu tán được tăng cường do các tia nước chui qua các lỗ khi mực nước bề mặt ở hai phía khác nhau. Các đê chắn sóng dạng tương tự đã được xây dựng tại các cảng Baie Comeau và cảng Chandler ở Quebec, Canada và cảng Roscoff ở Pháp (Richey và Sollitt, 1969). Một thí dụ mới hơn và ấn tượng hơn là bể chứa dầu Ekofisk ở Bắc Hải: nó được bao bọc bởi một đê chắn sóng dạng lưới lỗ vòng tròn đường kính xấp xỉ 90 m trên vùng

Chương 6 - CÁC HIỆU ỨNG TỔN THẤT CỘT NƯỚC TẠI EO HẸP ĐỐI VỚI SỰ PHÂN TÁN SÓNG DÀI: LÝ THUYẾT THỦY LỰC

Trong lý thuyết lý tưởng về sóng phân tán trong chất lỏng không nhớt, người ta thường giả thiết chất lỏng chuyển động song song với biên cứng của tường hay của vật thể. Tuy nhiên, trên thực tế gradient áp suất ngược và độ nhớt có thể làm chậm chuyển động gần nơi dòng uốn lượn đột ngột, buộc dòng chảy bị phân tách và tạo ra các xoáy nước có độ xoáy cao, gây mất năng lượng đáng kể. Khuynh hướng tự nhiên này giống như các tấm lưới lỗ trên tường nhà hấp thụ năng lượng âm. Jarlan (1965) đã đưa ý tưởng này vào kỹ thuật vùng bờ và sáng chế thiết kế đê chắn sóng với tấm dạng lưới khoét lỗ gắn phía trước tường cứng. Sự tiêu tán được tăng cường do các tia nước chui qua các lỗ khi mực nước bề mặt ở hai phía khác nhau. Các đê chắn sóng dạng tương tự đã được xây dựng tại các cảng Baie Comeau và cảng Chandler ở Quebec, Canada và cảng Roscoff ở Pháp (Richey và Sollitt, 1969). Một thí dụ mới hơn và ấn tượng hơn là bể chứa dầu Ekofisk ở Bắc Hải: nó được bao bọc bởi một đê chắn sóng dạng lưới lỗ vòng tròn đường kính xấp xỉ 90 m trên vùng

biển sâu 70 m (Gerwick và Hognestad, 1973). Ở cảng Osaka Nhật bản (Hayashi, Kano và Shirai, 1966) có một đê chắn sóng gồm một dãy ống tròn đường kính 2 m đặt cách nhau 0,5 m đã được sử dụng.

Trong tất cả các thiết kế này, sự phân tách dòng do sự co hẹp và dẫn ra đột ngột là đặc tính vật lý cơ bản. Sự phân tách dòng xung quanh một hình trụ nhỏ là một chủ đề quan trọng đối với các công trình ngoài khơi và người ta đã nghiên cứu thực nghiệm nhiều với các cột trụ đơn độc có biên chu vi tròn hay sắc cạnh (thí dụ, xem Sarpkaya và Issacson, 1981). Từ các thực nghiệm thấy rằng số Strouhal $U/\omega a$ (hay tương đương là số Keulegan–Carpenter UT/a trong công trình đầu tiên của G. H. Keulegan và L. H. Carpenter, 1956 về các dòng dao động) là một tham số quan trọng, ở đây U là biên độ vận tốc và a là kích thước của vật. Theo Graham (1980), có ít nhất là hai chế độ phân biệt trong khoảng $2 < UT/a < 100$. Với $UT/a > 20$ (con số này phụ thuộc vào thiết diện ngang của trụ), thì vết rẽ nước giới hạn gồm một số các xoáy sẽ toả rộng xuống phía xuôi dòng kể từ điểm phân dòng. Khi UT/a tăng thì vết rẽ nước sẽ dài ra và càng giống với tình huống dòng ổn định của đường xoáy Karman. Tuy nhiên, với $UT/a < 20$ thì các xoáy tản ra khỏi các điểm phân dòng của trụ; từng xoáy một bị cuốn trở lại bởi dòng chảy ngược đến phía bên kia của trụ để liên kết thành cặp với một xoáy kế tiếp với dấu ngược lại. Cặp xoáy này sau đó cuốn trôi khỏi vật thể với một góc lớn ($\sim 45^\circ$) so với dòng tới. Công thức tổn thất do ma sát tỉ lệ với bình phương vận tốc địa phương (xem phương trình (1.17) dưới đây) chỉ đúng với các giá trị UT/a lớn. Đáng tiếc, ta chưa có một chỉ tiêu tương tự áp dụng cho các khe hay các lỗ hở. Vì số Keulegan–Carpenter có

thể là lớn hơn * trong trường hợp các kích thước của đê chắn sóng và chu kỳ sóng thông thường, nên công thức tổn thất bình phương ít ra cũng giúp ta có ước lượng thô một khi chưa có thêm các dữ liệu thực nghiệm. Với các bài toán phân tán một chiều, một lý thuyết bán kinh nghiệm kiểu đó đã được đề xướng bởi Hayashi, Kano và Shirai (1966), Terrett, Osorio và Lean (1968)... Sau này lý luận của họ đã được Mei, Liu và Ippen (1974) hoàn thiện thêm và được trình bày dưới đây.

6.1 SỰ PHÂN TÁN MỘT CHIỀU BỞI ĐÊ CHẮN SÓNG DẠNG SẺ RÃNH HOẶC DẠNG LƯỚI LỖ

6.1.1 Các phương trình mô tả

Ta giới hạn nghiên cứu với các sóng biên độ nhỏ trên nước nông. Vì tốc độ địa phương ở lân cận điểm thu hẹp đột ngột có thể lớn, ta nên kể đến sự phi tuyến và bắt đầu bằng các phương trình Airy – các phương trình (5.11) và (5.12) đã thấy trong chương 3:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta + h)\mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -g\nabla \zeta. \quad (1.2)$$

Xét một bức cản mỏng với hai cột thẳng đứng rộng $2b$. Khoảng cách tâm tới tâm giữa hai cột là $2a$. Tính chất tuần hoàn cho phép ta xét một kênh với các tường biên bên trùng với hai đường xuyên tâm của hai cột đứng kề cận như trên hình 1.1. Giả

* Với sóng thần truyền qua một đê chắn sóng, ta có thể lấy $U = 1 \text{ m/s}$, $T = 360 \text{ s}$ và $a = \text{độ dày đê chắn sóng} = 10 \text{ m}$, vậy $UT/a = 360$. Với sóng gió tấn công vào một đê chắn sóng dạng lưới lỗ ta có thể lấy tốc độ qua lỗ $U = 3 \text{ m/s}$, $T = 10 \text{ s}$, $a = 0,5 \text{ m}$, khi đó $UT/a = 60$.

thiết độ sâu h không đổi. Sóng tới dài, biên độ thấp và truyền tới thẳng góc. Vậy phải thoả mãn các phương trình:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

hai phương trình này là giới hạn của các phương trình (1.1) và (1.2) khi $A/h \ll 1$. Một cách tường minh hơn, sóng tới có thể viết như sau:

$$\zeta^I = \frac{1}{2} A \left[e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)} \right], \quad (1.5)$$

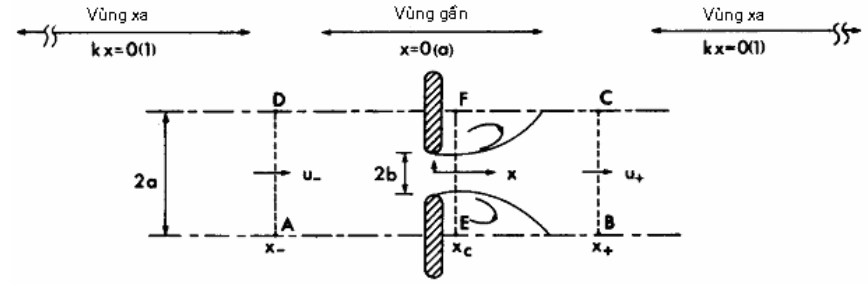
$$u^I = \frac{gk}{\omega} \zeta^I. \quad (1.6)$$

Ở đây đã giả định sóng tới không chỉ là sóng dài so với độ sâu mà thậm chí dài hơn so với độ rộng kênh, do đó $ka \ll 1$.

Căn cứ trên hình 1.1, gọi vùng cách vùng thắt một đoạn $O(k^{-1})$ là *vùng xa*. Vì $ka \ll 1$ nên dòng chảy là một chiều và mô tả bằng các phương trình (1.3) và (1.4) ở cả hai phía của bức cản. Nghiệm của chúng phải được liên kết lại tại bức cản nhờ vào những điều kiện ghép nhất định tùy thuộc vùng gần – tức lân cận $O(a)$ quanh bức cản.

6.1.2 Các điều kiện ghép và vùng gần

Với vùng thắt đủ hẹp và biên độ vừa phải, dòng bị chia ra ở phía sau bức chắn. Một tia nước hình thành, nó mở rộng ra và đụng phải các tia xuất phát từ các cột chắn bên cạnh để tạo thành hai dải xoáy. Ở xa hơn về phía xuôi, dòng lại trở nên gần như dòng một chiều. Ta ký hiệu giới hạn ngoài của vùng gần là x_- và x_+ như trên hình 1.1. Tình huống sẽ ngược lại nếu dòng đổi chiều.



Hình 1.1 Vùng gần và vùng xa

Trong vùng gần phức tạp này, phương trình liên tục (1.1) có thể được đơn giản hoá. Thậm chí ngay khi không có khe hay lỗ hổng, biên độ sóng tối đa có thể bằng $2A$, do đó ta có thể bỏ qua ζ so với h . Hơn nữa giữa x_- và x_+ kích thước ngang là a , $\zeta = O(A)$, $t = O(\omega^{-1})$ và $u \geq O((A/h)(gh)^{1/2})$; suy ra

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sqrt{\nabla \cdot (h\mathbf{u})} \leq O(ka) \ll 1.$$

Phương trình liên tục (1.1) trở thành

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \cong 0. \quad (1.7)$$

Bên ngoài vùng xoáy rối, ta áp dụng phương trình chuyển động không nhớt. Vì vận tốc qua các cột chắn có thể lớn, ta giữ lại số hạng đối lưu quán tính, tức toàn bộ phương trình (1.2), phương trình này đúng ở bên ngoài dải xoáy.

Bây giờ ta áp dụng quan điểm thuỷ lực bằng cách khảo sát các trị số trung bình thiết diện ngang giữa x_- và x_+ . Sau khi tích phân phương trình (1.7), thấy rằng

$$u_- S = u_c S_c = u + S, \quad (1.8)$$

ở đây S là tổng diện tích kênh, S_c là diện tích tại *đoạn thắt tĩnh mạch* và có quan hệ với diện tích biên mở rộng S_0 bằng một hệ số thoát nước thực nghiệm c :

$$S_c = cS_0; \quad (1.9)$$

u_c là vận tốc trung bình tại *đoạn thắt tĩnh mạch*.

Bên ngoài vùng xoáy, để nhất quán với phương trình (1.2) ta xem \mathbf{u} là không xoáy, tức $\mathbf{u} = \nabla\Phi$. Khi đó phương trình Bernoulli có dạng

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + g\zeta = \text{const}. \quad (1.10)$$

Áp dụng phương trình (1.1) cho đoạn giữa x_- và x_+ , tức tại *đoạn thắt tĩnh mạch* (xem hình 1.1), ta được

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_c - \Phi_-) + \frac{1}{2}(u_c^2 - u_-^2) + g(\zeta_c - \zeta_-) = 0, \quad (1.11)$$

trong đó giả thiết rằng ở cả hai trạm sự biến thiên ngang hướng có thể bỏ qua.

Phía xuôi dòng của bức chắn, ta áp dụng sự bảo toàn động lượng chung cho thể tích *EBCF* trên hình 1.1. Trong vùng chia dòng của bức chắn cứng vận tốc trung bình chất lỏng có thể bỏ qua và độ cao mặt tự do, do đó áp suất động, thực chất đồng nhất theo y , và bằng so với trong vùng tia nước xiết. Như vậy, áp lực dọc theo *EF* là $\rho g\zeta_c S$. Sự cân bằng tổng động lượng đòi hỏi

$$\rho g S(\zeta_c - \zeta_-) + \rho(u_c^2 S_c - u_-^2 S) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_-}^{x_+} S_J u dx, \quad (1.12)$$

với S_J là diện tích thiết diện ngang của vùng tia xiết. Trừ phương trình (1.11) cho phương trình (1.12) và sử dụng (1.8), ta được

$$(\zeta_- - \zeta_+) = \frac{1}{2g} u_+^2 \left(\frac{S}{cS_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x_-}^{x_c} u dx + \int_{x_c}^{x_+} u \left(\frac{S_J}{S} \right) dx \right], \quad (1.13)$$

trong đó tích phân thứ nhất suy ra từ định nghĩa Φ . Nếu ta

đưa ra hệ số tổn thất f :

$$f = \left(\frac{S}{cS_0} - 1 \right)^2, \quad (1.14)$$

và độ dài L

$$Lu_+ = \int_{x_-}^{x_+} u dx + \int_{x_c}^{x_+} u \left(\frac{S_J}{S} \right) dx, \quad (1.15)$$

thì phương trình (1.13) có thể được viết thành

$$\zeta_- - \zeta_+ = \frac{f}{2g} u_+^2 + \frac{L}{g} \frac{\partial u_+}{\partial t}, \quad u_+ > 0. \quad (1.16)$$

Nếu đổi số được lặp lại cho $u_+ < 0$, một dấu âm sẽ xuất hiện phía trước số hạng thứ nhất ở vế phải phương trình (1.16). Tính đến cả hai hướng của dòng, ta có

$$\zeta_- - \zeta_+ = \frac{f}{2g} u + |u_+| + \frac{L}{g} \frac{\partial u_+}{\partial t}. \quad (1.17)$$

Khi các hệ số f và L được xác định (bằng thực nghiệm) thì các phương trình (1.8) và (1.17) cung cấp các điều kiện biên cho các nghiệm vùng xa trên hai phía của vật chắn. Do kích thước dài của vùng xa là $O(k^{-1})$, một cách xấp xỉ, các điều kiện ghép có thể được áp dụng cho các nghiệm vùng xa bằng cách cho $x \rightarrow \pm 0$.

Nếu có một tường cứng tại $x = l$, như trong trường hợp một đê chắn với tường dạng lưới lỗ, ta phải thêm điều kiện biên $\partial\zeta_+ / \partial x = 0$ tại $x = l$. Nếu vùng mở rộng tới $x \rightarrow \pm\infty$, thì các sóng phân tán phải đi ra từ $x = 0$ (điều kiện phát xạ). Trên thực tế, độ rộng của đê l thường có bậc $O(10\text{m})$ và ngắn hơn so với bước sóng thiết kế. Sử dụng phương trình (1.9) và phương trình (1.17) cho tường lưới lỗ là hoàn toàn không được phép về góc độ lý thuyết.

Hiển nhiên, có thể quy nạp một công thức cho lực tác động lên tường cứng. Xét chất lỏng trong $ABCD$ và ở bên ngoài vật và dải rãnh nước của nó. Hiệu ứng thực của phân bố áp suất trên mặt phía thượng lưu của vật và trong dải rãnh nước của nó là tạo ra một lực $-F$ chống lại chất lỏng trong thể tích đang xét. Như vậy từ cân bằng động lượng

$$S[\rho g(\zeta_- - \zeta_+) + \rho(u_-^2 - u_+^2)] - F = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x_-}^0 dx uS + \int_0^{x_+} dx uS_J \right],$$

từ các phương trình (1.8), (1.15) và (1.17) suy ra

$$F = S \left[pg(\zeta_- - \zeta_+) - pL \frac{\partial u_+}{\partial t} \right] = \frac{1}{2} pf S u_+ |u_+| \quad (1.18)$$

6.1.3 Các hệ số f và L

Được biết rằng trong các dòng ổn định qua các lỗ có rìa sắc, thì hệ số thoát nước c (cũng như f) chủ yếu phụ thuộc vào hình dạng lỗ, nếu số Reynolds đủ lớn sao cho sự chia dòng biểu hiện rất rõ. Đối với lỗ có cạnh sắc, công thức thực nghiệm là

$$c = 0,6 + 0,4 \left(\frac{S_0}{S} \right)^3. \quad (1.19)$$

Đối với các cạnh dày và thuôn tròn thì hệ số thoát nước c xấp xỉ 1. Theo công thức này, c biến thiên trong khoảng 0,6 và 1. Khi luồng chất lỏng chảy qua giảm tốc thì tần số xoáy giảm đi. Như vậy, f và c thay đổi theo vận tốc và gia tốc tức thời, và do đó, theo số Reynolds và số Strouhal. Vì không có dữ liệu thực nghiệm tổng hợp về f và c cho loại dòng dao động này cho nên trong văn liệu kỹ thuật thường sử dụng các giá trị của trường hợp ổn định. Mặt khác, độ dài L là khó ước lượng nhất. Trong lúc Hayashi (1966) hoàn toàn bỏ qua L , thì Terrett (1968) đã chọn một giá trị hằng số để tiến hành thực nghiệm. Nếu không

có sự phân dòng, thì bài toán giá trị biên sẽ tuyến tính; độ dài tương ứng, ký hiệu bằng L_0 ở đây, có thể được tính bằng lý thuyết hai chiều. Thực tế là với các sóng dài, L_0 có quan hệ với các hệ số truyền qua T và phản xạ R như sắp chỉ ra dưới đây. Ở vùng xa, nơi dòng chảy là một chiều, thì li độ của mặt tự do xác định bằng các phương trình:

$$\zeta_- = Ae^{i(kx - \omega t)}, \quad x < 0, \quad (1.20)$$

$$\zeta_+ = ATe^{i(kx - \omega t)}, \quad x > 0. \quad (1.21)$$

Ước lượng ζ_- tại x_- , ζ_+ tại x_+ và lưu ý $|kx_-|, kx_+ \ll 1$ ta có

$$\zeta_- - \zeta_+ \cong A(1 + R - T)e^{-i\omega t}. \quad (1.22)$$

Tại x_+ trường vận tốc ở phía phải bằng

$$u_+ = \frac{gk}{\omega} \zeta_+ \cong \frac{gk}{\omega} ATe^{-i\omega t}. \quad (1.23)$$

Với phương trình (1.23), phương trình (1.22) có thể được viết thành dạng

$$\zeta_- - \zeta_+ = \left[\frac{T - (1 + R)}{ikT} \right] \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{L_0}{g} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.24)$$

ở đây L_0 xác định bằng

$$L_0 = \left[\frac{T - (1 + R)}{ikT} \right]. \quad (1.25)$$

Sau khi nhân với $\rho g S$, ta có thể lý giải phương trình (1.24) như là định luật thứ hai của Newton đối với khối lượng $\rho S L_0$ chịu một lực thực $\rho g S(\zeta_- - \zeta_+)$; ảnh hưởng của lỗ tương đương với việc thêm một khối lượng $\rho S L_0$ tại thiết diện $x = 0$. Các hệ số truyền qua và phản xạ cần phải được xác định bằng lý thuyết hai chiều tại các vị trí cụ thể. Các sóng dài biên độ nhỏ bây giờ giống hệt như các sóng âm; những kết quả phân tích cho một số lỗ âm thanh (khe trong tấm hình chữ nhật, lỗ hình tròn trong

một đường ống tròn...) cũng có thể được áp dụng trong trường hợp này. Thí dụ như đối với một khe hẹp hai chiều, ta có:

$$\frac{L_0}{2a} \cong \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi b}{4a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi b}{4a} \right), \quad ka \ll 1 \quad (1.26)$$

(Morse và Ingard, 1968). Thấy rằng với sóng dài thì L_0 phụ thuộc vào k trong phép xấp xỉ trên. Chúng tôi giành phần dẫn lập công thức này làm một bài tập về phép tiệm cận ghép. Trong các giới hạn lớn và nhỏ của các khe, ta có

$$\frac{L_0}{2a} \cong \frac{1}{\pi} \ln \frac{2a}{\pi b} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{2S}{\pi S_0}, \quad \frac{b}{a} \ll 1, \quad (1.27)$$

$$\frac{L_0}{2a} \sim \frac{\pi}{8} \left(\frac{a-b}{a} \right)^2; \quad \frac{a-b}{a} \ll 1.$$

Thậm chí đối với S/S_0 rất lớn, $\ln(S/S_0)$ thực tế vẫn có bậc là $O(1)$; tỉ số

$$\frac{L_0}{g\zeta} \frac{\partial u_+}{\partial t} = O(kL_0) \quad (1.28)$$

rất nhỏ đối với các sóng dài. Do đó, $\zeta_- \cong \zeta_+$ và chỗ thắt không có tác dụng. Kết quả này có liên quan đến lập luận trong mục 5.5, ở đó nói rằng các hệ số truyền qua gần bằng 1 trong thuyết không xoáy, trừ khi S/S_0 là một số rất lớn.

Nếu có sự phân dòng, thì rõ ràng là khó vận dụng L về mặt lý luận. So với dòng không bị phân tách, thì sự phân dòng đã làm giảm độ cong của các luồng chảy cục bộ quanh khe hẹp. Gia tốc địa phương, nguyên nhân gây ra phản ứng thủy động lực và do đó, khối lượng biểu kiến, cũng bị giảm đi. Nói cách khác, ta có thể kỳ vọng L_0 không nhất là giới hạn trên của L . Bây giờ ta hãy so sánh số hạng quán tính với số hạng tổn thất ma sát trong phương trình (1.17):

$$\alpha = \frac{(L/g)(\partial u_+ / \partial t)}{(f/2g)u_+ |u_+|} = O\left(\frac{kL}{\frac{1}{2}fA/h}\right) = O\left(\frac{2kaL/2a}{\frac{1}{2}fA/h}\right).$$

Thay L_0 trong phương trình (1.26) cho L , ta thấy tỉ số trên chỉ quan trọng đối với các sóng tương đối ngắn. Khi tỉ lệ diện tích S/S_0 tăng, $L/2a \sim \ln(S/S_0)$ và $f \sim (S/S_0)^2$, do đó tỉ số trên giảm đi nhanh chóng theo

$$\alpha \cong \frac{(4/\pi)ka \ln(2/\pi)(S/S_0)}{f(A/h)(S/S_0)^2}. \quad (1.29)$$

Như vậy, đối với các lỗ hoặc khe nhỏ sự mất mát do ma sát chiếm ưu thế đối với các biên độ sóng nhỏ. Lấy một thí dụ bằng số, giả thiết rằng $A=1$ m, $h=10$ m, $T=2\pi/\omega=10$ s, $k=\omega/(gh)^{1/2}=0,06$ /m và $c=1$. Đối với đê chắn sóng dạng lưới lỗ của bể chứa dầu ở Bắc Hải thì $S/S_0 \cong 2$ với đường kính lỗ gần bằng 1m. Ta có thể lấy ước lượng $a=1$ m và $b=0,5$ m là các độ rộng tương ứng của kênh và lỗ. Đối với đê chắn sóng Osaka, các giá trị xấp xỉ là $a=1$ m, $b=25$ mm và $S/S_0=40$. Độ dài của lỗ được tính theo phương trình (1.26) và tỉ số α được tính theo phương trình (1.29) (xem bảng 1.1). Nhận thấy rằng đối với các sóng gió thì α rất nhỏ và nó còn giảm đi đối với các sóng có biên độ lớn hơn hoặc sóng dài hơn, hoặc cả hai. Do vậy trong tính toán thực tế thường có rất nhiều các trường hợp trong đó đại lượng quán tính bị bỏ qua.

Bảng 1.1 Tỉ số α theo phương trình (1.29)

a (m)	b (m)	$\frac{b}{a}$ hoặc $\frac{S_0}{S}$	$\frac{L}{2a}$	f	$\frac{1}{2} \frac{fA}{h}$	α
1	0,5	0,5	0,22	1	00,5	0,1332
1	0,025	0,025	2,32	1,521	76	0,0018

Bài tập 1.1: Sử dụng phương pháp đồ thị và tiệm cận ghép để kiểm chứng phương trình (1.26).

6.1.4 Phép tuyến tính hoá tương đương

Số hạng ma sát bình phương trong phương trình (1.17) làm cho toàn bộ bài toán trở nên phi tuyến và đầu vào là một sóng đơn điều hoà sẽ gây ra phản ứng gồm nhiều hài điều hoà. Nếu như phản ứng là sự ngự trị bởi hài thứ nhất ở đầu vào, thì dần sau này chúng ta sẽ thấy, có thể áp dụng cái gọi là phép tuyến tính hoá tương đương. Giả sử số hạng ma sát được biểu diễn dưới một dạng tuyến tính $c_e u$, tức là

$$\zeta_- - \zeta_+ = c_e u, \quad (1.30)$$

ở đây c_e chỉ hệ số ma sát tương đương. Ta sẽ chọn c_e làm sao để sai số bình phương trung bình

$$e = \frac{f}{2g} u |u| - c_e u \quad (1.31)$$

cực tiểu. Lấy trung bình qua một chu kỳ, bình phương trung bình sẽ bằng

$$\overline{e^2} = \overline{\left(\frac{f}{2g} u |u| \right)^2} - \frac{f}{g} c_e \overline{u^2 |u|} + c_e^2 \overline{u^2}. \quad (1.32)$$

Cực tiểu xuất hiện khi $\partial \overline{e^2} / \partial c_e = 0$, phương trình này cho phép xác định c_e tốt nhất

$$c_e = \frac{f}{2g} \frac{\overline{u^2 |u|}}{\overline{u^2}}. \quad (1.33)$$

Hệ số ma sát tương đương bây giờ phụ thuộc vào u và là chưa biết khi nghiệm chưa được giải ra. Cách khác, phương trình (1.33) có thể thu được bằng cách yêu cầu rằng lực ma sát phi tuyến và ma sát tuyến tính tương đương cùng cho cùng một tổn

thất năng lượng trong một chu kỳ. Xấp xỉ u bằng một hài đơn, tức

$$u \cong \frac{1}{2} (U_0 e^{-i\omega t} + U_0^* e^{-i\omega t}) = |U_0| \cos \omega(t + \tau), \quad (1.34)$$

với τ là pha của U_0 , tức $U_0 = |U_0| e^{-i\omega \tau}$, ta có

$$\overline{u^2} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt |U_0|^2 \cos^2 \omega(t + \tau) = |U_0|^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \cos^2 \sigma = \frac{1}{2} |U_0|^2$$

$$\overline{u^2 |u|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma \cos^2 \sigma |\cos \sigma| \cdot |U_0|^3 = \frac{4}{3\pi} |U_0|^3.$$

Suy ra

$$c_e = \frac{f}{2g} \frac{8}{3\pi} |U_0| \quad (1.35)$$

phụ thuộc vào biên độ chuyển động.

6.1.5 Nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác

Trước tiên ta rút ra nghiệm xấp xỉ bằng sử dụng phương trình (1.30) thay cho phương trình (1.17). Nghiệm có thể được viết dưới dạng sau:

$$\zeta_- = A e^{-i\omega t} [e^{+ikx} + R e^{-ikx}], \quad x < 0 \quad (1.36)$$

$$u_- = \frac{gk}{\omega} A e^{-i\omega t} [e^{+ikx} - R e^{-ikx}],$$

$$\zeta_+ = A T e^{-i\omega t + ikx}, \quad x > 0. \quad (1.37)$$

$$u_+ = \frac{gk}{\omega} A T e^{-i\omega t + ikx},$$

Sử dụng tính liên tục của vận tốc (1.8), ta được

$$T = \frac{\omega U_0}{gk A} \frac{U_0}{(A/h)(gh)^{1/2}}, \quad (1.38)$$

$$R = 1 - T = 1 - \frac{\omega U_0}{gk A}. \quad (1.39)$$

Áp dụng điều kiện tổn thất cột nước (1.30), ta có

$$A = \left(\frac{c_e}{2} + \frac{\omega}{gk} \right) U_0$$

và nếu tính tới phương trình (1.35) sẽ trở thành

$$A = \frac{\omega}{gk} U_0 + \frac{2}{3\pi} \frac{f}{g} U_0 |U_0|. \quad (1.40)$$

Các pha của U_0 và A_0 bằng nhau và có thể lấy bằng không, nghĩa là $U_0 = |U_0|$. Phương trình (1.40) là phương trình bậc hai đối với U_0 và có thể giải ra:

$$U_0 = \frac{A}{h} (gh)^{1/2} T = \frac{A}{h} (gh)^{1/2} \frac{(1+2\beta)^{1/2} - 1}{\beta} \quad (1.41)$$

với $\beta = (4/3\pi)(fA/h)$ (Hayashi và nnk., 1966).

Với các sóng biên độ nhỏ hay với khe mở rộng, β nhỏ hơn rất nhiều so với đơn vị. Khai triển Taylor của vế phải phương trình (1.41) cho ta

$$U_0 = \frac{A}{h} (gh)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2}\beta + O(\beta^2) \right].$$

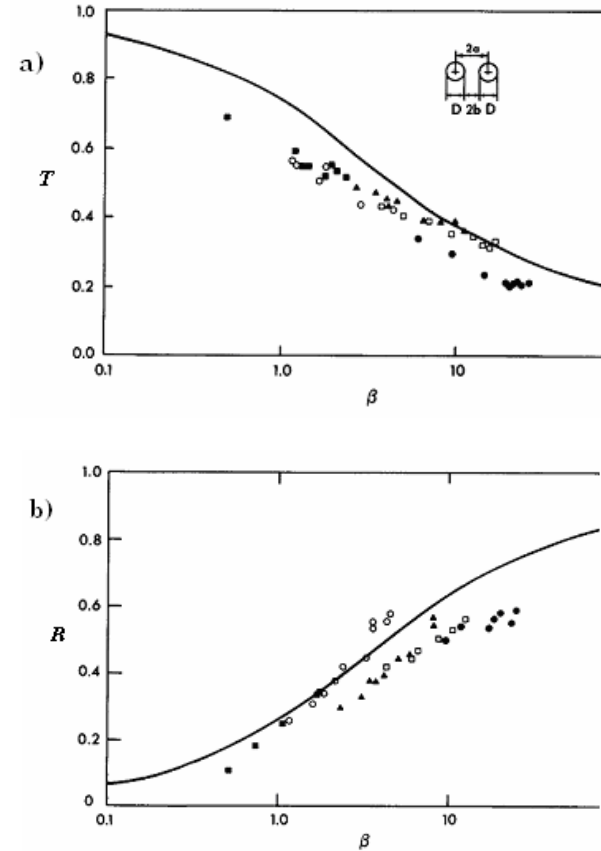
Như vậy

$$c_e \cong \frac{f}{2g} \frac{8}{3\pi} \left(\frac{A}{h} (gh)^{1/2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4}{3\pi} \frac{fA}{h} \right), \quad (1.42)$$

$$T \cong (1 - \frac{1}{2}\beta), \quad R \cong \frac{1}{2}\beta.$$

Đối với các khe mở hẹp, $S_0/S \ll 1$, thì f lớn theo phương trình (1.14); phương trình (1.41) có thể được xấp xỉ đối với giá trị β lớn bằng

$$U_0 = \frac{A}{h} (gh)^{1/2} \left(\frac{2}{\beta} \right)^{1/2} = \left(\frac{3\pi}{2f} gA \right)^{1/2} \cong \left(\frac{3\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{cS_0}{S} (gA)^{1/2}. \quad (1.43)$$



Hình 1.2 So sánh giữa lý thuyết (đường liền nét), các phương trình (1.14) và (1.41), với các thực nghiệm của Hayashi et al. (1966). Các thí nghiệm được thực hiện với nhiều giá trị b/a : \bullet : 0,055; \circ : 0,075; \blacktriangle : 0,091; \circ : 0,141; \blacksquare : 0,182. a) T ; b) R (Ozsoy, 1977)

Giới hạn ở trên có thể được suy diễn một cách trực tiếp hơn như dưới đây. Bằng việc giả định rằng sự phản xạ gần như toàn phần và sẽ có một sóng đứng với biên độ $2A$ ở phía $x < 0$. Sự chênh lệch cực đại của mặt tự do ở hai phía bằng $2A$, nó tạo

nên tốc độ chảy $(2gA)^{1/2}$ qua lỗ nhỏ theo định luật Torricelli. Tốc độ thoát nước, được xác định bằng cách lấy trung bình trên tổng diện tích của S , khi đó bằng $U_0 = (2gA)^{1/2} S_0 / S$, điều này ứng với $c = 2/(3\pi)^{1/2} = 0,65$ trong phương trình (1.43), khoảng lý thuyết của c là $0,6 < c < 1$.

Cuối cùng, hệ số truyền qua tương ứng là:

$$T \cong \left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2} = \left(\frac{3\pi}{2} \frac{h}{fA}\right)^{1/2} = \left(\frac{3\pi}{2} \frac{h}{A}\right)^{1/2} \frac{cS_0}{S}. \quad (1.44)$$

Các hệ số phân tán T và R được vẽ trên các hình 1.2a và 1.2b.

Ozsoy (1977) đã so sánh các thực nghiệm của Hayashi (1966) với lý thuyết trong phần này cho trường hợp dề chắn sóng có ống xếp xít nhau. Với f cho theo phương trình (1.14), Ozsoy đã thấy rằng sự phù hợp của các hệ số phản xạ và truyền qua là khá tốt (xem hình 1.2a và 1.2b). Ozsoy cũng đã thực hiện các thí nghiệm đối với các khe đứng trong một vật chắn mỏng ($b/a = 0,052, 0,103, 0,162, 0,441$ và $d/2b \leq 0,133$ trong đó $d =$ độ dày, $2b =$ độ rộng khe, và $2a = 0,87$ m). Hệ số thực nghiệm f có sự phân tán khá lớn đối với một giá trị cố định của b/a (hình 1.3) đã gợi ý cho ta rằng các tham số khác, thí dụ như số Strouhal có thể là rất quan trọng. Bạn đọc có thể xem thêm những thông tin đáng quan tâm trong tài liệu của Ozsoy.

Bài toán hiện tại với điều kiện biên phi tuyến (1.17) và không có thành phần $(L/g)(\partial u/\partial t)$ đã được Mei, Liu và Ippen (1974) giải một cách chính xác. Ta sẽ diễn giải ở đây để chỉ ra rằng mặc dù các dao động điều hoà bậc lẻ cao hơn tồn tại, dao động điều hoà cơ sở vẫn chiếm ưu thế trong thực tiễn và phương pháp xấp xỉ tuyến tính tương đương là hoàn toàn chính xác.

Do điều kiện biên phi tuyến, ta biểu diễn nghiệm:

$$\zeta_- = \zeta_I + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{-im(kx+\omega t)}, \quad (1.45)$$

$$u_- = u_I - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{gk}{2\omega} A_m e^{im(kx+\omega t)}, \quad x < 0, \quad (1.46)$$

$$\zeta_+ = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} B_m e^{im(kx-\omega t)}, \quad (1.47)$$

$$u_+ = \frac{gk}{2\omega} \sum_{-\infty}^{\infty} B_m e^{im(kx-\omega t)}, \quad x > 0. \quad (1.48)$$

Bằng cách trung bình hoá theo thời gian các điều kiện mô tả, có thể chứng minh rằng $\bar{\zeta}$ sẽ bằng không nếu \bar{u} được giả thiết bằng không tại một đầu. Như vậy, không có hài bậc không trong các chuỗi ở trên. Đối với mỗi hài ta đòi hỏi phải có:

$$A_{-m} = A_m^*, \quad B_{-m} = B_m^*, \quad (1.49)$$

vì vậy tất cả các đại lượng vật lý là thực.

Bằng việc ghép vận tốc tuân theo phương trình (1.8), suy ra

$$\begin{aligned} B_m &= -A_m & m \neq 1, \\ B_1 &= A_1 + A & m = 1. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Vì

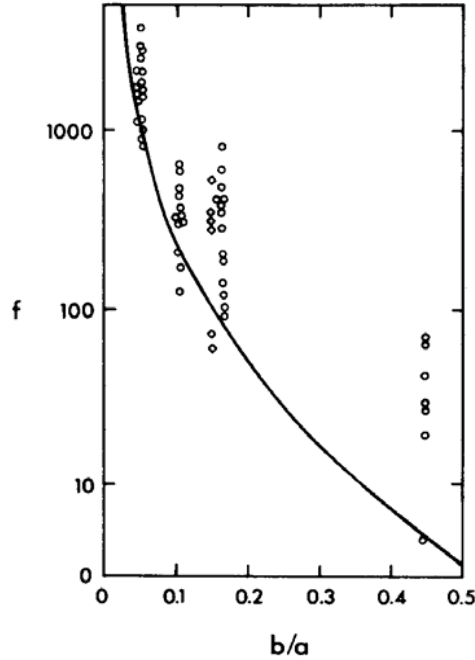
$$\begin{aligned} \zeta_- &= \frac{\omega}{gk} \left(u_I + \frac{gk}{2\omega} \sum A_m e^{-im\omega t} \right) = \frac{\omega}{gk} \left[2u_I - \left(u_I - \frac{gk}{2\omega} \sum A_m e^{-im\omega t} \right) \right] \\ &= \frac{\omega}{gk} (2u_I - u_+) \end{aligned}$$

tại $x=0-$ và

$$\zeta_+ = \frac{\omega}{gk} u_+$$

tại $x=0+$, từ phương trình (1.17) suy ra với $L=0$ thì

$$\frac{f}{2g} u_+ |u_+| + 2 \frac{\omega}{gk} u_+ = 2 \frac{\omega}{gk} u_I = 2A \cos \omega t.$$



Hình 1.3 Hệ số ma sát như là hàm của b/a (theo Ozsoy, 1977)

Rõ ràng u_+ và u_l là cùng dấu, nghĩa là u_+ và $u_l(0, t)$ là luôn đồng pha. Khi đó phương trình trên cho

$$\frac{f}{2g}|u_+|^2 + \frac{2\omega}{gk}|u_+| = 2A|\cos \omega t|. \quad (1.51)$$

Theo biến không thứ nguyên W được định nghĩa là

$$u_+(0, t) = A \frac{gk}{\omega} W = \frac{A}{h} (gh)^{1/2} W(t), \quad (1.52)$$

nghiệm của phương trình (1.51) bằng

$$|W| = \frac{(1 + 2\beta' |\cos \omega t|)^{1/2} - 1}{\beta'}, \quad (1.53)$$

trong đó

$$\beta' = \frac{fA}{2h} = \frac{3\pi}{8}\beta. \quad (1.54)$$

Khi W được biểu diễn bằng một chuỗi Fourier

$$W = \frac{1}{2} \sum T_m e^{-im\omega t} \quad (1.55)$$

thì hệ số Fourier phải bằng

$$\frac{T_m}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tau e^{im\tau} \operatorname{sgn}(\cos \tau) |W(\tau)|.$$

Các kết quả là

$$T_m = 0, \quad m = 2, 4, 6, \dots, \text{ các số chẵn} \quad (1.56)$$

$$\frac{1}{2} T_m = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{(m+3)/2}}{\beta m} - \frac{M_m(\beta')}{\beta'} \right], \quad m = 1, 3, 5, \dots, \text{ các số lẻ} \quad (1.57)$$

trong đó

$$M_m(\beta') = \int_0^{\pi/2} d\tau \cos m\tau (1 + 2\beta' \cos \tau)^{1/2} \quad (1.58)$$

có thể được biểu diễn dưới dạng các tích phân elliptic nhưng dễ dàng lấy được tích phân bằng phương pháp số.

Kết hợp các phương trình (1.46), (1.50), (1.52) và (1.55), ta được

$$B_m = AT_m, \quad (1.59)$$

do đó T_m là hệ số truyền qua của hài thứ m . Hệ số phản xạ của hài thứ m bằng

$$R_1 = 1 - T_1, \quad R_m = -T_m, \quad (1.60)$$

với $A_m = AR_m$.

Bảng 1.2 cho thấy các hài thứ nhất và thứ ba được tính theo lý thuyết chính xác và hài thứ nhất bằng phép xấp xỉ tuyến tính hoá tương đương cho $1 < \beta < 5$. Sự nhỏ bé của hài thứ ba và sự hiệu quả của lý thuyết xấp xỉ là thực tế.

Bảng 1.2 Các hệ số truyền qua là hàm của $\beta' = fA/2h$, T_m : hàm thứ m

β'	T_1		T_3
	Chính xác	Xấp xỉ	Chính xác
0,0	1	1	0
0,1	0,9601	0,9608	-0,0052
0,2	0,9271	0,9290	-0,0120
0,3	0,8978	0,8975	-0,0169
0,4	0,8719	0,8712	-0,0207
0,5	0,8486	0,8476	-0,0238
0,6	0,8276	0,8262	-0,0264
0,7	0,8084	0,8067	-0,0285
0,8	0,7907	0,7888	-0,0304
0,9	0,7744	0,7722	-0,0319
1,0	0,7593	0,7569	-0,0332
2,0	0,6498	0,6459	-0,0400
3,0	0,5813	0,5766	-0,0418
4,0	0,5326	0,5275	-0,0421
5,0	0,4954	0,4902	-0,0418

Bài tập 1.2

Xét một đê chắn sóng dạng xếp thùng gồm hai tường song song tại $x=0$ và $x=l$. Tường tại $x=0$ đối mặt với các sóng tới trực diện và được khoét lỗ với tỉ số diện tích là S_0/S . Sử dụng công thức ma sát tuyến tính tương đương (1.30) để tìm hệ số phản xạ. Hãy bàn luận về ảnh hưởng của l .

6.2 ẢNH HƯỞNG CỦA TỔN THẤT CỦA LÊN CÁC DAO ĐỘNG CỦA CẢNG

Trong chương 5 ảnh hưởng của chất lỏng thực bị bỏ qua, sự cộng hưởng trong cảng được tăng lên khi độ rộng cửa vào giảm. Tuy nhiên, các thí nghiệm của Lee (1971) chỉ khẳng định xu thế này xảy ra đối với các cửa vào tương đối rộng và chứng minh rằng sự thu hẹp độ rộng của cửa vào rất cuộc làm suy giảm sự

phản ứng tại đỉnh phổ. Điều trái ngược này là vì sự tổn thất do ma sát ở cửa vào là đáng kể. Thực vậy, các kỹ sư Nhật Bản đã sử dụng ma sát một cách thành công để làm giảm ảnh hưởng của sóng thần trong vịnh Ofunato bằng cách thu hẹp cửa vào với hai đê chắn sóng ngang. Trong nghiên cứu thực hiện cho dự án Ofunato, Ito (1970) và Horikawa và Nishimura (1970) bằng thực nghiệm đã thấy rằng ma sát cửa vào thực tế đã loại bỏ hài sóng phần tư trong vịnh dài. Họ cũng đã phát triển một mô hình lý thuyết bao hàm cả công thức tổn thất thuỷ lực (1.17) không có thành phần quán tính, nghĩa là

$$\zeta_- - \zeta_+ = \frac{f}{2g} u|u|. \tag{2.1}$$

Trong khi ta cần nhiều thông tin thực nghiệm hơn nữa cho các bài toán hai chiều liên quan đến sự thất hợp, thì công thức đơn giản (2.1) với một hằng số ước lượng f tỏ ra có thể dùng được để dự báo khái quát về cộng hưởng. Dựa trên cùng những giả thiết đó, Unluata và Mei (1975) khảo sát bằng giải tích bài toán cảng đơn giản hình chữ nhật với một cửa vào ở giữa, còn Miles và Lee (1975) đã nghiên cứu với hài Helmholtz trong cảng hình dạng tổng quát. Lý thuyết của Unluata và Mei được đơn giản hoá bằng việc bỏ qua tất cả các hài bậc cao sẽ được trình bày dưới đây.

6.2.1 Bài toán giá trị biên

Để tiện giải bằng giải tích, ta xét cảng hình chữ nhật với một cửa vào ở giữa như trên hình 7.2, chương 5.

Trong phần đại dương $x > 0$, ta tách các sóng phát xạ khỏi các sóng tới thẳng góc và các sóng phản xạ:

$$\eta_0 = 2A \cos kx + \eta^R. \tag{2.2}$$

Sóng phát xạ η^R thoả mãn phương trình

$$\nabla^2 \eta^R + k^2 \eta^R = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \eta^R}{\partial x} = 0, \quad |y| > a \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \eta^R}{\partial x} = \frac{i\omega}{g} U(y), \quad |y| < a \quad \text{tại } x=0 \quad (2.5)$$

và phải đối xứng như các sóng đi ra tại vô cùng.

Tốc độ qua cửa cảng được ký hiệu bằng $U(y) = |U(y)| e^{-i\omega\tau}$ với τ là pha của U . Trong cảng $x < 0$, biên độ dịch chuyển η_H được mô tả bằng

$$\nabla^2 \eta_H + k^2 \eta_H = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial x} = 0, \quad x = -L, \quad |y| < B \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial y} = 0, \quad y = \pm \frac{1}{2} B, \quad -L < x < 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial x} = 0, \quad a < |y| < \frac{B}{2} \quad (2.9)$$

$$= \frac{i\omega}{g} U(y), \quad |y| < a \quad x=0. \quad (2.10)$$

Các phương trình (2.9) và (2.10) ngụ ý tính liên tục của vận tốc pháp tuyến qua cửa cảng. Ngoài ra, ta có tại $x=0, |y| < a$:

$$\eta_H - \eta_0 = c_e U, \quad c_e = \frac{8}{3\pi} \frac{f}{2g} |U|. \quad (2.11)$$

Nghiệm có thể được viết lại dưới dạng chuẩn tắc như một sự chồng chất của các nguồn sóng:

$$\eta_0 = \int_{-a}^a U(y') G_0(x, y|y') dy' + 2A \cos kx, \quad (2.12)$$

$$\eta_H = \int_{-a}^a U(y') G_H(x, y|y') dy', \quad (2.13)$$

trong đó các hàm nguồn là

$$G_0 = -\frac{i\omega}{g} \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr), \quad (2.14)$$

$$G_H = -\frac{i\omega}{g} \left[\frac{\cos k(x+L)}{kB \sin kL} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos K_n(x+L)}{K_n B \sin K_n L} \cos \frac{2n\pi y}{B} \cos \frac{2n\pi y'}{B} \right], \quad (2.15)$$

với $K_n = [k^2 - (2n\pi/B)^2]^{1/2}$. Các phương trình (2.14) và (2.15) là thiết yếu tương tự như các phương trình (7.1) và (7.7), trong chương 5, ngoại trừ đối với nhân tố $-i\omega/g$. Thế các phương trình (2.12) và (2.13) vào phương trình (2.11), ta được

$$\int_{-a}^a M(y|y') U(y) dy - 2A = c_e U(y) = \frac{f}{2g} \frac{8}{3\pi} |U| U = \frac{f}{2g} \frac{8}{3\pi} |U|^2 e^{-i\omega\tau} \quad (2.16)$$

$$M(y|y') = G_H(0, y|y') - G_0(0, y|y'). \quad (2.17)$$

Phương trình (2.16) là một tích phân phi tuyến có thể được giải bằng số cho $U(y)$. Do việc không xác định chắc chắn f , chúng ta nên thực hiện với việc ước lượng tổng thể bằng giả sử rằng U là hằng số theo y đối với $|y| < a$ và cố làm thoả mãn phương trình (2.16) chỉ về trung bình, nghĩa là

$$U \int_{-a}^a M(y|y') dy - 4aA = a \frac{f}{g} \frac{8}{3\pi} |U|^2 e^{-i\omega\tau} \quad (2.18)$$

Đối với khe nhỏ trong chất lỏng hoàn hảo, $U(y)$ được xấp xỉ tốt bằng $(\text{const})(a^2 - y^2)^{-1/2}$ sự phân chia dòng, tuy nhiên $U(y)$ không còn khác biệt tại các điểm đầu. Với lý lẽ này và để đơn giản toán học, ta chấp nhận một phân bố đồng nhất của tốc độ dòng. Không cần nói cũng hiểu rằng phép xấp xỉ này không đưa ra được trường dòng chảy U chính xác ở mức chi tiết và mức độ sai số không dễ xác định được. Vì đã biết trước rằng sự phản ứng của cảng trường hợp cửa vào hẹp có liên quan với thông

lượng toàn phần đi qua cửa, nên sai số tổng chung chắc sẽ không xảy ra nếu ta sử dụng phép xấp xỉ này. Với

$$\frac{2a^2\omega}{g}D = -\int_{-a}^a M dy dy' \quad (2.19)$$

và $S \equiv 4/3\pi$, phương trình (2.18) có thể được sắp xếp lại như sau:

$$-\left(\frac{f}{\omega a} S|U|\right) + \left(\frac{f}{\omega a} S|U|\right)D = \frac{2fA}{h} \frac{S}{(ka)^2} \exp(-i\omega t), \quad (2.20)$$

trong đó đã sử dụng biểu thức $\omega^2 = gk^2h$. Lấy bình phương phương trình trên, ta được

$$W^4 + 2(\operatorname{Re} D)W^3 + |D|^2W^2 - \left[\frac{4\beta}{(ka)^2}\right]^2 = 0, \quad (2.21)$$

trong đó $\operatorname{Re} D$ là phần thực của D ,

$$W = \frac{fS}{\omega a}|U| \quad \text{và} \quad \beta = \frac{fA}{2h}S = \frac{2fA}{3\pi h}. \quad (2.22)$$

Phương trình (2.21) là một phương trình bậc bốn đối với W , và có thể được giải bằng số. Sau đó pha ωt suy ra từ phương trình (2.20) và nghiệm cho U được hoàn thành. Cuối cùng, giá trị của U được thế vào phương trình (2.13) cho ta sự phản ứng của cảng.

6.2.2 Sự phản ứng cục bộ và bình phương trung bình trong cảng

Từ các phương trình (2.13) và (2.16), sự phản ứng tại một điểm (x, y) trong cảng bằng

$$\eta_H(x, y) = \frac{(A/a) \int_{-a}^a G_H(x, y|y') dy'}{(1/4a^2) \int_{-a}^a M(y|y') dy dy' - (fS/2ga)|U|}. \quad (2.23)$$

Vì tích phân

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a G_H dy' = -\frac{i\omega}{g} \left[\frac{\cos k(x+L)}{kb \sin kL} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos K_n(x+L)}{K_n B \sin K_n L} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \cos \frac{2n\pi y}{B} \right], \quad (2.24)$$

trong đó

$$\alpha \equiv \frac{2\pi a}{B}, \quad (2.25)$$

là phản ứng đối với một piston dao động có tốc độ đồng nhất $1/2a$ tại cửa vào (do đó, lưu lượng tổng đơn vị trên đơn vị độ sâu), nên nhân tố duy trì

$$Q \equiv \frac{2A}{(1/4a^2) \int_{-a}^a M dy dy' - fS|U|/2ga} \quad (2.26)$$

trong phương trình (2.23) diễn tả biên độ của lưu lượng qua cửa vào.

Ta sẽ đưa ra sự phản ứng bình phương trung bình quy chuẩn như sau:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{BL} \int_{-L}^0 dx \int_{-B/2}^{B/2} dy \left| \frac{\eta_H}{2A} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|Q/2A|^2}{BL} \int_{-L}^0 dx \int_{-B/2}^{B/2} dy \left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dy' G_H \right|^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sau khi ước lượng tất cả các tích phân, người ta nhận được

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \left| \frac{Q}{2A} \frac{\omega}{g} \right|^2 F, \quad (2.28)$$

trong đó

$$F = \frac{1}{(kB \sin kL)^2} \left(1 + \frac{\sin 2kL}{2kL} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\sin n\alpha / n\alpha)}{K_n B \sin K_n B} \right)^2 \left(1 + \frac{\sin K_n L}{2K_n L} \right). \quad (2.29)$$

Rất nhiều khía cạnh khác nhau của các công thức tổng quát này sẽ được khảo sát kiểm tra trong phần dưới đây.

6.2.3 Các phép xấp xỉ cho cửa vào hẹp

Có thể thấy bằng trực giác, hiệu ứng tổn thất cột nước là quan trọng nhất đối với các cửa vào hẹp và gần các đỉnh cộng hưởng. Do đó ta tiếp tục xem xét và giới hạn với trường hợp $ka \ll 1$.

Bằng một kỹ thuật thông thường nhằm tăng cường sự hội tụ của các chuỗi, có thể chỉ ra rằng

$$\frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a M dy dy' \cong -\frac{i\omega}{g} \left(-\frac{i}{2} + F - I \right) + O(k^2 a^2 1nka), \quad (2.30)$$

trong đó

$$F \equiv \frac{\cot kL}{kB} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cot K_n L}{K_n B} + \frac{1}{2n\pi} \right) \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right), \quad (2.31)$$

và

$$I = - \left(1n \frac{\pi ka^2 \gamma}{4B} + 1n16 - 3 \right), \quad (2.32)$$

với $\ln \gamma = 0,5772157 =$ hằng số Euler. Các chi tiết về khai triển được trình bày trong phụ lục 6.A. Lưu lượng xấp xỉ trên đơn vị độ sâu là

$$Q \cong \frac{2A}{-(i\omega/g) \left[-\frac{1}{2}i(1+W) + F - I \right]}, \quad W = \frac{fS|U|}{a\omega}, \quad (2.33)$$

biểu thức này có thể kết hợp với phương trình (2.28) cho xấp xỉ σ và với phương trình (2.23) cho xấp xỉ η_H . Kết quả giống như phương trình (7.23) trong chương 5.

Hiệu ứng tổn thất cột nước tham gia vào lý thuyết một cách tường minh chỉ thông qua nhân tử $W = fS|U|/a\omega$ trong lưu lượng cửa vào Q (phương trình (2.33)). Trong trường hợp không có ma sát ($f=0$), các tính chất cộng hưởng trong cảng đã được nghiên cứu trong chương 5. Đặc biệt, số hạng $-\frac{i}{2}$ trong ngoặc của phương trình (2.33) (với $W=0$) tương ứng với suy yếu phát xạ. Rõ ràng, số hạng $\left(-\frac{1}{2}i\right)(1+W)$ tương ứng với tổng của suy yếu phát xạ và suy yếu ma sát tại cửa vào. Đối với cửa vào hẹp và $f=W=0$, suy giảm phát xạ yếu do đó sự cộng hưởng xuất hiện gần với các hài tự nhiên của vịnh kín hoàn toàn, nghĩa là

$$k = k_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{B} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.34)$$

Bây giờ, khi $W \neq 0$ nhưng

$$W \leq O(1) \quad (2.35)$$

mất mát do ma sát, và như thế suy giảm tổng cộng cũng yếu; các đỉnh cộng hưởng vẫn gần với k_{mn} và các vùng lân cận của các đỉnh cộng hưởng có thể được khảo sát theo cách của phần 5.7. Để ngắn gọn, các đỉnh mà khi chính nó là cô lập sẽ được nghiên cứu trong phần sau.

6.2.4 Sự suy giảm nhẹ do bức xạ và ma sát

Gần với hài tự nhiên $k = k_{mn}$, từ phương trình (2.33), có độ lớn của Q bằng

$$|Q| = \frac{2A(\omega/g)^{-1}}{\left[\frac{1}{2}(1+W)^2 + (F-I)^2\right]^{1/2}}. \quad (2.36)$$

Do F lớn đối với $k \approx k_{mn}$ và I là lớn theo loga đối với giá trị nhỏ ka^2/B , các cực đại của $|Q|$ xuất hiện một cách xấp xỉ khi

$$F - I = 0, \quad (2.37)$$

với điều kiện là $W \leq O(1)$. Giả sử (\sim) chỉ các đại lượng được ước lượng tại các đỉnh cộng hưởng. Đặc biệt, các nghiệm thực của phương trình (2.37) sẽ được định rõ bằng \tilde{k}_{mn} . Vì F và I không phụ thuộc vào f nên các vị trí của những đỉnh cộng hưởng không bị ảnh hưởng mạnh bởi tổn thất ma sát. Lưu lượng cực đại tương ứng bằng

$$|\tilde{Q}| = \left(\frac{4A(\omega/g)^{1/2}}{1+W} \right)_{\omega=\tilde{\omega}_{mn}}. \quad (2.38)$$

Vì

$$|\tilde{Q}|_{f=0} = \left(\frac{4A}{\omega/g} \right)_{\omega=\tilde{\omega}_{mn}} \quad (2.39)$$

đối với $f = 0$ nên tỉ số suy giảm đối với lưu lượng đỉnh tại cửa vào bằng

$$\frac{|\tilde{Q}|}{|\tilde{Q}|_{f=0}} = \frac{1}{(1+W)_{\omega=\tilde{\omega}_{mn}}}. \quad (2.40)$$

Nhìn vào phương trình (2.28), phương trình (2.40) cũng là tỉ số suy giảm đối với phản ứng bình phương trung bình tại cộng hưởng vì F và các số sóng cộng hưởng gần như không phụ

thuộc vào f .

Cần phải tìm giá trị W tại điểm cộng hưởng. Từ phương trình (2.30) và phương trình (2.19) suy ra rằng đối với cửa vào hẹp và tại cộng hưởng:

$$\frac{2a^2\omega}{g} D = -\int_{-a}^a M dy dy' \equiv \frac{2a^2\omega}{g} \quad \text{hay} \quad D \approx 1. \quad (2.41)$$

Vì

$$\omega\tau = 0 \quad (2.42)$$

rút ra từ phương trình (2.20) và W có thể được giải ra từ phương trình (2.21):

$$W = \frac{fS|U|}{\omega a} = \frac{1}{2} \left[-1 + \left(\frac{16\beta}{(ka)^2} \right)^{1/2} \right]_{k=\tilde{k}_{mn}}, \quad (2.43)$$

trong đó $\beta = 2fA/3\pi h$ (phương trình (2.22)). Lưu ý rằng điều kiện nguyên bản (2.35) có nghĩa là

$$\frac{16\beta}{(ka)^2} \leq O(1). \quad (2.44)$$

Sau khi phương trình (2.43) được thế vào phương trình (2.40), nhân tử suy giảm tìm được bằng

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_{f=0}} \equiv \frac{\tilde{Q}}{\tilde{Q}_{f=0}} = \left(\frac{2}{1 + \left(1 + 16\beta/(ka)^2 \right)^{1/2}} \right)_{k=\tilde{k}_{mn}}, \quad (2.45)$$

trong đó giá trị của \tilde{k}_{mn} có thể được ước lượng bằng các số sóng tự nhiên của vịnh kín khi n và m không cùng lúc bằng không (*non-Helmholtz mode*). Đối với hài Helmholtz, \tilde{k}_{00} có thể được ước lượng bằng giá trị không nhất.

Từ phương trình (2.45) ta có thể kết luận rằng sự suy giảm các đỉnh cộng hưởng do sự tổn thất tại cửa vào sẽ xảy ra mạnh

nhất khi $16\beta/(\tilde{k}a)^2$ tăng, tức khi: 1) f lớn hơn, 2) biên độ lớn hơn, 3) sóng dài hơn hoặc các hài cộng hưởng thấp hơn hoặc 4) cửa vào hẹp hơn. Những suy xét trong việc thiết kế đê chắn sóng Ofunato là một bằng chứng. Các mục (1) và (4) cũng phù hợp với quan sát thực tế của Lee năm 1971 đối với cảng dạng tròn.

Về phần tham số $16\beta/(\tilde{k}a)^2$, có thể chỉ ra rằng hệ số tổn thất f có thể phụ thuộc vào số Strouhal và số Reynolds và hình dạng các đầu của đê chắn sóng tại cửa vào. Ito (1970) cho rằng các giá trị thực nghiệm $f=1,5$ cho kết quả hợp lý đối với đê chắn sóng thần tại Ofunato. Để tham khảo thêm hãy chú ý rằng khi $A=0,5$ m, $h=10$ m và f được lấy bằng 1 thì $\beta=10^{-2}$. Bây giờ ta xét một vịnh hình vuông với $B=L$. Một số ít hài tự nhiên bậc thấp nhất của vịnh đóng kín là:

$$k_{10}L = \pi, \quad k_{01}L = k_{20}L = 2\pi \quad \text{và} \quad k_{11}L = 5^{1/2}\pi.$$

Với cửa vào hẹp và $2a/B = 3 \times 10^{-2}$, hệ số suy giảm và tham số $16\beta/(\tilde{k}a)^2$ được trình bày trong bảng 2.1 đối với các giá trị β không lớn hơn 10^{-2} . Các giá trị được đánh dấu bằng + trái với giả thiết là $16\beta/(ka)^2 \leq O(1)$ và hệ số suy giảm được tính toán không đáng tin cậy về mặt định lượng. Do đó, cần một phép xấp xỉ khác.

6.2.5 Suy giảm lớn do ma sát

Bảng 2.1 cho thấy giá trị của $16\beta/(\tilde{k}a)^2$ có thể rất lớn đối với hài cộng hưởng bậc thấp nhất hay đối với cửa vào hẹp. Từ phương trình (2.21) giá trị của $W = fS|U|/\omega a$ cũng lớn và có thể được xấp xỉ theo các bậc đại lượng dẫn đầu là

$$W \cong \frac{(4\beta)^{1/2}}{ka}, \quad (2.46)$$

hay

$$|U| \cong \left(\frac{2gA}{fS} \right)^{1/2}. \quad (2.47)$$

Chú ý rằng theo định luật Torricelli cơ sở vận tốc U tỉ lệ thuận với $(2gA)^{1/2}$. Lưu lượng tương ứng trên một đơn vị độ sâu qua cửa vào là

$$|Q| \cong 2a \left(\frac{2ga}{fS} \right)^{1/2}, \quad (2.48)$$

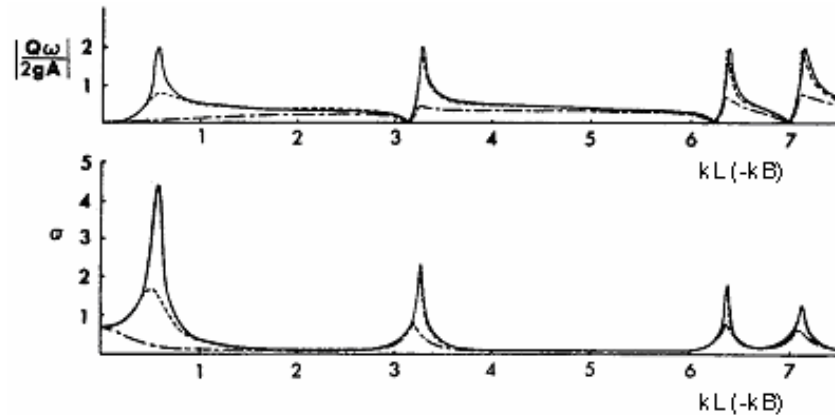
và giảm đi theo độ rộng $2a$ của cửa vào. Kết hợp kết quả này với phương trình (2.28) có thể kết luận rằng tổn thất cột nước đủ lớn sẽ loại bỏ phản ứng nghịch của cảng, nghĩa là phản ứng của cảng cuối cùng giảm đi theo độ rộng của cửa vào.

Bảng 2.1 Yếu tố suy giảm theo phương trình (2.45)

m, n	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0), (0, 1)	(1, 1)	
$\tilde{k}B$	0,55	π	2π	$\sqrt{5}\pi$	
$\tilde{k}a = \frac{2a}{B} \frac{\tilde{k}B}{2}$	$0,825 \times 10^{-2}$	$4,71 \times 10^{-2}$	$9,42 \times 10^{-2}$	$10,53 \times 10^{-2}$	
$\frac{16\beta}{(\tilde{k}a)^2}$	$\beta = 10^{-2}$	2350 \square	72,1 \square	18,0 \square	14,43 \square
	$\beta = 10^{-3}$	23,5 \square	0,721 \square	0,18 \square	1,44
	$\beta = 10^{-4}$	23,5 \square	0,721	0,18	0,144
	$\beta = 10^{-5}$	2,35	0,0721	0,018	0,0144
	$\beta = 10^{-2}$	0,04 \square	0,209 \square	0,373 \square	0,406 \square
$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}_{f=0}}$	$\beta = 10^{-3}$	0,122 \square	0,517	0,748	0,781
	$\beta = 10^{-4}$	0,336 \square	0,865	0,959	0,966
	$\beta = 10^{-5}$	0,707	0,983	0,996	0,996

+ Theo Mei, Liu và Ippen (1974). Tc. Waterway, Port, Coastal and Ocean Division

Theo bảng 2.1, giả thiết suy giảm nhỏ do ma sát $W \leq O(1)$ không phù hợp với hài Helmholtz và ta cần nhận nghiệm chính xác

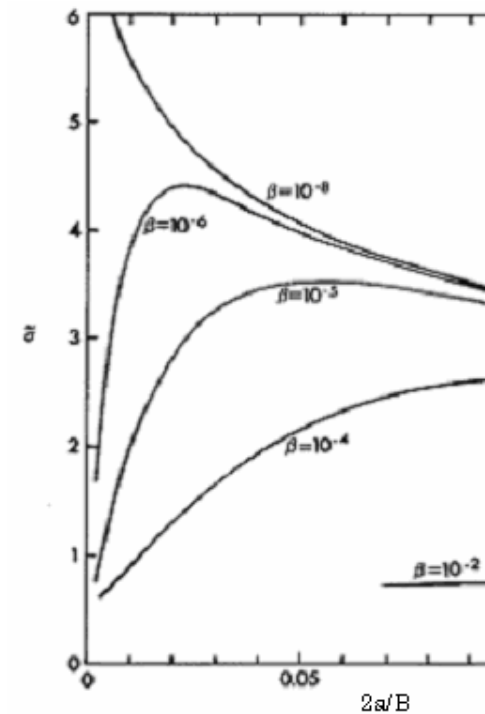


Hình 2.1 Phản ứng bình phương trung bình σ và cường độ thông lượng chuẩn hoá $|Q\omega/2gA|$ của dao động điều hoà cơ bản như là hàm của $kL (=kB)$. Độ rộng cửa vào chuẩn hoá $2a/B = 3 \times 10^{-2}$. $\beta = 0$: đường liền nét; $\beta = 10^{-4}$: đường gạch nối, $\beta = 10^{-2}$: đường chấm gạch (Unluala và Mei, 1975)

6.2.6 Các kết quả số đối với W tổng quát

Vì phần thực của D tỉ lệ với độ suy giảm toàn phần, các hệ số của W^4 , W^3 và W^2 trong phương trình (2.21) là những số dương; chỉ có thể tồn tại một nghiệm dương, thực. Sau khi giải được W bằng số, phản ứng bình phương trung bình đối với dao động điều hoà cơ bản được tính từ phương trình (2.28) mà không giả thiết $ka \ll 1$. Thông lượng pháp tuyến và phản ứng bình phương trung bình được vẽ trên hình 2.1 cho dải $0 < kL < 8$ và $\beta = 10^{-2}$, 10^{-4} và 0. Để so sánh, thuyết không nhớt dự tính phản ứng nghịch của cảng cũng được trình bày. Trên các hình 2.2 và hình 2.3, các tỉ số biên độ đối với hài Helmholtz

($m = n = 0$) và cho hài $m = 1$, $n = 0$ được vẽ như là các hàm của độ rộng chuẩn hoá của cửa vào $2a/B$. Một lần nữa sự phản ứng cảng giảm theo $2a/B$ đối với giá trị cố định của β .



Hình 2.2 Sự khuếch đại cộng hưởng trung bình σ của hài cơ bản đối với hài Helmholtz (Unluala và Mei, 1975)

PHỤ LỤC 6.A: CÁC PHÉP XẤP XỈ TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI

$ka \ll 1$

Tích phân quan tâm là

$$\frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a dy dy' M(y|y') = \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [G_H(0, y, y') - G_0(0, y|y')] = \mathfrak{S}_H - \mathfrak{S}_0.$$

(A.1)

Từ phương trình (2.14) rút ra

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &\equiv \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a G_0(0, y, y') dy dy' = \frac{1}{4a^2} \frac{i\omega}{g} \left(-\frac{i}{2} \right) \int_{-a}^a H_0^{(1)}(k|y-y'|) dy dy' \\ &= \frac{\omega}{2g} \int_{-1/2}^{1/2} H_0^{(1)}[(2ka)|\xi - \xi'] d\xi d\xi', \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

sau phép biến đổi $y = 2a\xi$, $y' = 2a\xi'$. Nếu xấp xỉ $H_0^{(1)}$ đối với ka nhỏ, ta có

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\omega}{2g} \int_{-1/2}^{1/2} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \ln(\gamma k a |\xi - \xi'|) \right] d\xi d\xi' + O(ka^2) \ln(ka), \quad (\text{A.3})$$

ở đây $\ln \gamma = 0,5772157 =$ hằng số Euler. Như vậy

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\omega}{2g} \left[\left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \gamma k a \right) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \ln |\xi - \xi'| d\xi d\xi' \right] \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{\omega}{2g} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln \gamma k a - \frac{3}{2} \right) \right] + O[(ka)^2 \ln ka], \quad (\text{A.5})$$

trong đó đồng nhất thức dưới đây đã được sử dụng:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \ln |\xi - \xi'| d\xi d\xi' = -\frac{3}{2}. \quad (\text{A.6})$$

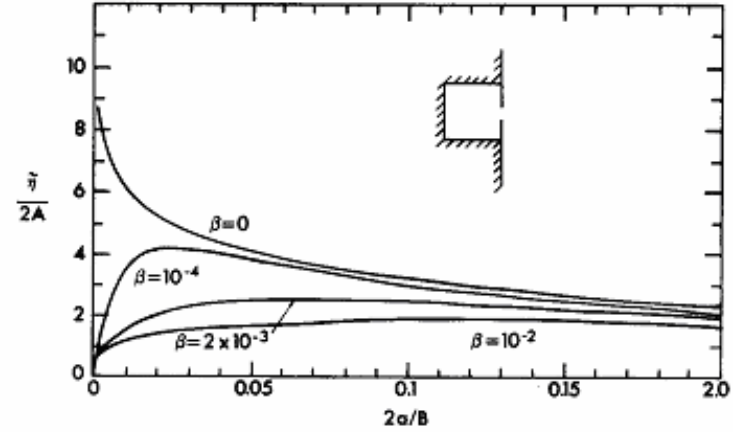
Từ phương trình (2.15) suy ra

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_H &= \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a G_H(0, y, y') dy dy' = \\ &= -\frac{i\omega}{g} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a dy dy' \left(\frac{\text{ctg} kL}{kB} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ctg} K_n L}{K_n B} \cos \frac{2n\pi y}{B} \cos \frac{2n\pi y'}{B} \right) = \\ &= -\frac{i\omega}{g} \left[\frac{\text{ctg} kL}{kB} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ctg} K_n L}{K_n B} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{A..7})$$

với $\alpha \equiv 2\pi a/B$. Xét các chuỗi ở trên. Do các kích thước của cảng đã

được giả sử tương đương với kích thước độ dài sóng tới nên chúng ta phải có

$$\alpha = \frac{2\pi a}{B} \ll 1.$$



Hình 2.3 Biên độ cộng hưởng $\tilde{\eta}$ của dao động điều hoà cơ bản tại góc $x = -B$, $y = 0,5B$ đối với hài thứ nhất $k_{01}B = \pi$ (hay $\eta \propto \cos(\pi(x+L)/L)$) (Unluala và Mei, 1975)

Đối với n lớn, số hạng thứ n trong chuỗi cuối cùng của phương trình (A.7) tiếp cận đến

$$\frac{\text{ctg} K_n L}{K_n B} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 \rightarrow -\frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2;$$

chuỗi được ký hiệu bằng Σ có thể được viết lại

$$\Sigma = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{ctg} K_n L}{K_n B} + \frac{1}{2n\pi} \right) \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2. \quad (\text{A.8})$$

Chuỗi thứ hai trên vế phải ở trên hội tụ rất nhanh; tổng của nó với số hạng còn lại trong phương trình (A.1) được ký hiệu là F :

$$F = \frac{\text{ctg} kL}{kB} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\text{ctg} K_n L}{K_n B} + \frac{1}{2n\pi} \right) \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2. \quad (\text{A.9})$$

Chuỗi thứ nhất ở vế phải của phương trình (A.8) có thể được xấp xỉ lấy tổng trong dạng gần nhất. Bằng cách sắp xếp lại dưới đây,

$$F' \equiv -\frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2 = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3} (\cos 2n\alpha - 1),$$

theo Collin (1960, tr. 579) có thể thấy rằng

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3} = \frac{z^2}{2} \ln z - \frac{3}{4} z^2 + O(z^4) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3},$$

Do đó

$$\begin{aligned} F' &= \frac{1}{2\pi\alpha^2} \left[\frac{(2\alpha)^2}{2} \ln 2\alpha - \frac{3}{4} (2\alpha)^2 + O(\alpha^4) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\ln 2\alpha - \frac{3}{2} \right) [1 + O(\alpha^2)] \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{4\pi a}{B} - \frac{3}{2} \right) \left[1 + O\left(\frac{2\pi\alpha}{B} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (A.8) và kết hợp với các phương trình (A.7) và (A.9), ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a M dy dy' &= \\ &\equiv -\frac{i\omega}{g} \left\{ F + \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{4\pi a}{B} - \frac{3}{2} \right) + O[(ka)^2 \ln ka] - \frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\ln \gamma ka - \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &= -\frac{i\omega}{g} \left\{ -\frac{i}{2} + F + \left[\ln \left(\frac{\pi ka^2 \gamma}{4B} \right) + \ln 16 - 3 \right] + O(ka)^2 \ln(ka) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Vì $\ln 16 - 3 = -0,2274$ và $ka^2/B \ll 1$, ngoặc vuông là âm và sẽ được ký hiệu bằng

$$I = - \left[\ln \left(\frac{\pi ka^2 \gamma}{4B} \right) + \ln 16 - 3 \right]. \quad (\text{A.11})$$

Tóm lại tích phân trong phương trình (A.1) bằng

$$\frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a M(y|y') dy dy' \equiv -\frac{i\omega}{g} \left(-\frac{i}{2} + F - I \right) + O(k^2 a^2 \ln ka). \quad (\text{A.12})$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Abbot M. B. (1979). Computational Hydraulics, Pitman, New York.
- Ablowitz, M. J. and A. C. Newell (1973). The decay of the continuous spectrum for solutions of the Korteweg-deVries equation. J. Math. Phys. 14: 1277-1284.
- Ablowitz M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur (1974). The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems. Studies Appl. Math. LIII 4: 249-336.
- Ablowitz M. J. and H. Segur (1981). Solitons and the Inverse Scattering Transform, Society Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Abramowitz M. and I. A. Stegun (1972). Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.
- Adams N. K. (1941). The Physics and Chemistry of Surfaces, Oxford University Press, London.
- Aranha J. A., C. C. Mei and D. K. P. Yue (1979). Some properties of a hybrid element method for water waves. Int. J. Num. Methods Eng. 14: 1627-1641.
- Armstrong J. A., N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan (1962). Interactions between light waves in a nothnear dielectric. Phys. Rev. 127:

- 1918-1939.
- Arthur R. S. (1946). Refraction of water waves by islands and shoals with circular bottom contours. *Trans. Am. Geophys. Union* 27: 168-177.
- Arthur R. S. (1962). A note on the dynamics of rip currents. *J. Geophys. Res.* 67: 2777-2779.
- Atkin R. J. and R. E. Craine (1976). Continuum theory of mixture: applications. *J. Inst. Math. Appl.* 17: 153-207.
- Bagnold R. A. (1946). Sand movement by waves: some small scale experiments with sand of very low density. *J. Inst. Civil Eng.* 27: 457.
- Bai K. J. and R. Yeung (1974). Numerical solutions of free-surface and flow problems. Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn. Office of Naval Research, 609-641.
- Bartholomeuz E. F. (1958). The reflection of long waves at a step. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 54: 106-118.
- Batchelor G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London.
- Battjes J. A. (1972). Set up due to irregular waves. Proc. 13th Conf. Coastal Eng. ASCE 2: 1993-2004.
- Battjes J. A. (1974a). Computation of set-up long shore currents, run-up and overtopping due to wind generated waves. *Communications on Hydraulics, Dept. of Civil Engineering, Delft University of Technology Report 74-2*.
- Battjes J. A. (1974b). Surf similarity. Proc. 14th Conf. Coastal Eng. ASCE 466-480.
- Battjes J. A. (1975). Modeling of turbulence in the surf zone. Proc. Symp. Modeling Techniques ASCE. 1050-1061.
- Benjamin T. B. (1967). Instability of periodic wave trains in nonlinear dispersive systems. *Proc. R. Soc. Lond. A* 299: 59-75.
- Benjamin T. B. and J. E. Feir (1967). The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.* 27: 417-430.
- Benjamin T. B. and M. J. Lighthill (1954). On cnoidal waves and bores. *Proc. R. Soc. Lond. A* 244: 448-460.
- Benney D. J. (1962). Nonlinear gravity wave interactions. *J. Fluid Mech.* 14: 574-584.
- Benney D. J. (1966). Long nonlinear waves in fluid flows. *J. Math. Phys.* 45: 52-63.
- Benney D. J. and J. C. Luke (1964). On the interactions of permanent waves of finite amplitude. *J. Math. Phys.* 43: 309-313.
- Benney D. J. and A. C. Newell (1967). The propagation of nonlinear wave envelopes. *J. Math. Phys.* 46: 133-139.
- Benney D. J. and G. J. Roskes (1969). Wave instabilities. *Studies Appl. Math* 48: 377-385.
- Berger U. and S. Kohlhase (1976). Mach reflection as a diffraction problem. Proc. 15th Conf. Coastal Eng. ASCE 1: 796-814.
- Berkhoff J. C. W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Conf. Coastal Eng. ASCE 1: 471-490.
- Bessho M. (1965). On the wave-free distribution in the oscillation problem of the ship. *J. Zosen Kiokai* 117: 127-138.
- Bessho M. (1967). On the two-dimensional theory of the rolling motion of ships. *Mem. Defense Acad. Yokoyuka* 7: 105-125.
- Bigg G. R. (1982). Diffraction and trapping of waves by cavities and slender bodies. Ph. D. thesis, Depart. of Applied Mathematics, University of Adelaide, Australia.
- Biot M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 12: 155-164.
- Biot M. A. (1956). Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid I. Low frequency range. II. High frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 28: 168-191.
- Boczar-Karakiewicz B. (1972). Transformation of wave profile in shallow water

- a Fourier analysis. Arch. Hydrolechniki 19: 197-210.
- Bohm D. (1951). Quantum Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Bolt B. A. (1978). Earthquakes - A Primer, Freeman, San Francisco.
- Booij N. (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Communications on Hydraulics, Dept. of Civil Engineering, Delft University of Technology, Report No. 81-1.
- Boussinesq J. (1877). Essai sur la thÉorie des eaux courantes. MÐm. Pres. Acad. Sci. Paris. (Ser. 2) 23: 1-680.
- Boussinesq J. (1878). Complement a une Étude intitulÉe: "Essai sur la theorie des eaux courante" et a un memoire "Sur l'influence des frottements sur les mouvements regulier des fluids." J. Math. Pures Appl. 4: 335.
- Bowen A. J. (1969). The generation of longshore currents on a plane beach. J. Marine Res. 27: 206-214.
- Bowen A. J. (1969). Rip currents, 1. Theoretical investigations. J. Geophys. Res. 74: 5467-5478.
- Bowen A. J. (1972). Edge waves and the littoral environment. Proc. 13th Conf. Coastal Eng. ASCE 1313-1320.
- Bowen A. J. and R. T. Guza (1978). Edge waves and surf beat. J. Geophys. Res. 83: 1913-1920.
- Bowen A. J. and D. L. Inman (1969). Rip currents. II. Laboratory and field observations. J. Geophys. Res. 74: 5479-5490.
- Bowen A. J., D. L. Inman and V. P. Simrnons (1968). Wave set-down and set-up. J. Geophys. Res. 73: 2569-2577.
- Braddock R. D., P. Van den Driessche and G. W. Peady (1973). Tsunami-generation. J. Fluid Mech. 59: 817-828.
- Bremmer H. (1951). The WKB approximation as the first term of a geometric optical series. Comm. Pure Appl. Math. 4: 105-115.
- Bretherton F. P. (1964). Resonant interaction between waves. J. Fluid Mech. 20: 457-480.
- Bretherton F. P. and C. J. R. Garrett (1968). Wave trains in inhomogeneous moving media. Proc. R. Soc. Lond. A 302: 529-554.
- Brevik I. and B. Aas (1980). Flume experiments on waves and currents, I. Rippled bed. Coastal Eng. 3: 149-177.
- Bryant P. J. (1976). Periodic waves in shallow water. J. Fluid Mech. 59: 625-644.
- Buchwald V. T. (1971). The diffraction of tides by a narrow channel. J. Fluid Mech. 46: 501-511.
- Budal K. (1977). Theory of absorption of wave power by a system of interacting bodies. J. Ship Res. 21: 248-253.
- Budal K. and J. Falnes (1975). A resonant point absorber of ocean wave power. Nature 256: 478-479; 257: 626-627.
- Budal K., J. Falnes, A. Kyllingstad and G. Oltedal (1979). Experiments with point absorbers. Proc. 1st Symp. Wave Energy Utilization. Chalmers Institute of Technology, Sweden, 253-282.
- Byatt-Smith J. G. B., (1970). An exact integral equation for steady surface waves. Proc. R. Soc. Lond. A 315: 405-418.
- Byatt-Smith J. G. B. and M. S. Longuet-Higgins (1976). On the speed and profile of steep solitary waves. Proc. R. Soc. Lond. A 350: 175-189.
- Carrier G. F. (1966). Gravity waves on water of variable depth. J. Fluid Mech. 24: 641-659.
- Carrier G. F. (1970). The dynamics of tsunamis. Mathematical Problems in the Geophysical Sciences. L Geophysical Fluid Dynamics, American Mathematical Society, Providence, R. I., 157-181.
- Carrier G. F. and H. P. Greenspan (1957). Water waves of finite amplitude on a sloping beach. J. Fluid Mech. 4: 97-109.
- Carrier G. F., M. Krook and C. E. Pearson (1966). Functions of a Complex Variable - Theory and Technique. McGraw-Hill, New York.
- Carrier G. F. and R. P. Shaw (1969). Tsunamis in the Pacific Ocean, edited by

- W. M. Adams, Fast West Center Press, Honolulu, 377-398.
- Carrier G. F., R. P. Shaw and M. Miyata (1971). The response of narrow mouthed harbors in a straight coastline to periodic incident waves. *J. Appl. Mech.* 38 E-2: 335-344.
- Carter T. G., P. L. F. Liu and C. C. Mei (1973). Mass transport by waves and offshore sand bedforms. *J. Waterways, Harbours Coastal Eng. Div. ASCE* 99: 165-184.
- Case K. M. and W. C. Parkinson (1957). Damping of surface waves in an incompressible liquid. *J. Fluid Mech.* 2: 172-184.
- Chao Y. Y. (1971). An asymptotic evaluation of the wave field near a smooth caustic. *J. Geophys. Res.* 76: 7401-7408.
- Chao Y. Y. and W. J. Pierson Jr. (1972). Experimental studies of the refraction of uniform wave trains and transient wave groups near a straight caustic. *J. Geophys. Res.* 77: 4545-4554.
- Charkrabarti S. K. (1972). Nonlinear wave forces on vertical cylinders. *J. Hydraul. Div. ASCE* 98:1895-1909.
- Charkrabarti S. K. (1978). Comments on second order wave effects on large diameter vertical cylinder. *J. Ship Res.* 22: 266-268.
- Charkrabarti S. K. and W. A. Tam (1975). Interaction of waves with a large vertical cylinder. *J. Ship Res.* 19: 23-33.
- Chen T. G. (1961). Experimental studies on the solitary wave reflection along a straight sloped wall at oblique angle of incidence. U.S. Beach Erosion Board Tech. Mem. 124.
- Chen H. S. and C. C. Mei (1974a). Oscillations and wave forces in an offshore harbor. Parsons Lab., Massachusetts Institute of Technology, Report 190.
- Chen H. S. and C. C. Mei (1974b). Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea. Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn., Office of Naval Research, 573-594.
- Chu V. C. and C. C. Mei (1970). On slowly varying stokes waves. *J. Fluid Mech.* 41: 873-887.
- Chu V. C. and C. C. Mei (1971). The nonlinear evolution of stokes waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 47: 337-352.
- Cokelet E. D. (1977). Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* 286: 183-230.
- Cole J. D. (1968). *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, Mass.
- Collin R. E. (1960). *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York.
- Courant R. and K. O. Friedrichs (1949). *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience, New York.
- Courant R. and D. Hilbert (1962). *Methods of Mathematical Physics. II*. Interscience, New York.
- Crapper G. D. (1972). Nonlinear gravity waves on steady non-uniform currents. *J. Fluid Mech.* 52: 713-724.
- Crapper G. D. (1979). Energy and momentum integrals for progressive capillary-gravity waves. *J. Fluid Mech.* 94: 13-24.
- Crawford D. R., B. M. Lake, P. G. Saffman and H. C. Yuen (1981). Stability of weakly nonlinear wave in two or three dimensions. *J. Fluid Mech.* 105: 177-191.
- Cummins W. E. (1962). The impulse response functions and ship motion. *Schiffstechnik* 9: 101-109.
- Dailey J. W. and S. C. Stephan, Jr. (1952). The solitary wave - its celerity, profile, internal velocities and amplitude attenuation in a horizontal smooth channel. Proc. 3rd Conf. Coastal Eng. ASCE, 13-30.
- Dalrymple R. A. (1975). A mechanism for rip current generation on open coast. *J. Geophys. Res.* 80: 3485-3487.
- Davey A. (1972). The propagation of a weak nonlinear wave. *J. Fluid Mech.* 53: 769-781.
- Davey A. and K. Stewartson (1974). On three-dimensional packets of surface

- waves. Proc. R. Soc. London. A 338: 101-110.
- Davey N. (1944). The field between equal semi-infinite rectangular electrodes on magnetic pole-pieces. Philos. Mag. 35: 819-8M.
- Dean R. G. (1965). Stream function representation of nonlinear ocean waves. J. Geophys. Res. 70: 4561-4572.
- Dean W. R. (1945). On the reflection of surface waves by a submerged plane barrier. Proc. Cambridge Philos. Soc. 41: 231-238.
- De Best A. and E. W. Bijker (1971). Scouring of a sand bed in front of a vertical breakwater. Communications on Hydraulics, Dept. of Civil Engineering, Delft University of Technology, Report 71-1.
- Deresiewicz H. (1960). The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. I. Reflection of plane waves at a free plane boundary (non-dissipative case). Bull. Seis. Soc. Am. 50: 599-607.
- Deresiewicz H. (1961). The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous liquid. II. Love waves in a porous layer. Bull. Seis. Soc. Am. 51: 51-59.
- Deresiewicz H. (1962a). The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. II. Reflection of plane waves at a full plane boundary (general case). Bull. Seis. Soc. Am. 52: 595-625.
- Deresiewicz H. (1962b). The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid. IV. Surface waves in a half space. Bull. Seis. Soc. Am. 52: 627-638.
- Dingemans M. (1978). Refraction and diffraction of irregular waves, a literature survey. Delft Hydraulics Laboratory Report, W301, Part 1.
- Djordjevic V. D. and L. G. Redekopp (1978). On the development of packets of surface gravity wave moving over an uneven bottom. J. Appl. Math. Phys. 29: 950-962.
- Donelan M., M. S. Longuet-Higgins and J. S. Turner (1972). Periodicity in Whitecaps. Nature 239: 449-451.
- Dore B. D. (1969). The decay of oscillations of a non-homogeneous fluid within a container. Proc. Cambridge Philos. Soc. 65: 301-307.
- Dore B. D. (1976). Double boundary layers in standing surface waves. Pure Appl. Geophys. 114: 629-637.
- Dore B. D. (1977). On mass transport velocity due to progressive waves. Q. J. Mech. Appl. Math. 30: 157-173.
- Dore B. D. (1978). Some effects of the air-water interface on gravity waves. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics 10: 215-230.
- Dysthe K. B. (1979). Note on a modification to the nonlinear Schrodinger equation for application to deep water waves. Proc. R. Soc. Lond. A 369: 105-114.
- Eagleson P. S. (1956). Properties of shoaling waves by theory and experiment. Trans. Am. Geophys. Union 37: 565-572.
- Eagleson P. S. (1965). Theoretical study of longshore currents on a plane beach. Hydraulics Lab., Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 82.
- Eckart C. (1951). Surface waves in water of variable depth. Marine Physical Lab. of Scripps Inst. Ocean. Wave Report 100-99.
- Erdelyi A. (ed) (1954). Tables of Integral Transform. 1. Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill, New York.
- Euvrard D., A. Jami, M. Lenoir and D. Martin (1981). Recent progress towards an optimum coupling of finite elements and singularity distribution. Proc. 3rd Intl. Sym. Num. Ship Hydrodyn. Paris.
- Evans D. V. (1976). A theory for wave power absorption by oscillating bodies. J. Fluid Mech. 77: 1-25.
- Evans D. V. (1978). The oscillating water column wave-energy device. J. Inst. Math. Appl. 22: 423-433.
- Evans D. V. (1979). Some theoretical aspects of three-dimensional wave energy absorbers. Proc. Ist. Symp. on Wave Energy Utilization, Chalmers Institute

- of Technology, Sweden, 77-113.
- Evans D. V. (1981). Power from water waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 13: 157-187.
- Evans D. V., D. C. Jeffrey, S. H. Salter and J. R. M. Taylor (1979). Submerged cylinder wave energy device: Theory and experiment. *Appl. Ocean Res.* 1: 3-12.
- Falnes J. (1980). Radiation impedance matrix and optimum power absorption for interacting oscillations in surface waves. *Appl. Ocean Res.* 2: 75-80.
- Falnes J. and K. Budal (1978). Wave power conversion by point absorbers. *Norwegian Maritime Res.* 6: 211.
- Faltinsen O. M. and A. E. Loken (1979). Slow drift oscillations of a ship in irregular waves. *Appl. Ocean Res.* 1: 21-31.
- Feir J. E. (1967). Some results from wave pulse experiments. Discussion of M. S. Lighthill: Some special cases treated by the Whitham theory *Proc. R. Soc. London A* 299: 54-58.
- Felsen L. B. and N. Marcuvitz (1973). *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Fenton J. (1972). A ninth-order solution for the solitary wave. *J. Fluid Mech.* 53: 257-271.
- Fenton J. (1979). A higher-order cnoidal wave theory. *J. Fluid Mech.* 94: 129-161.
- Finkelslein A. (1953). The initial value problem for transient water waves, Dissertation, New York University.
- Foda M. A. (1980). I. Dynamics of fluid-filled porous media. II. Excitation of surf beats in the ocean. Sc.D. Thesis, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Foda M. A. and C. C. Mei (1981). Nonlinear excitation of long trapped waves by a group of short swells. *J. Fluid Mech.* 111: 319-345.
- Fornberg B. and G. B. Whitham (1978). A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 289: 373-404.
- Frank W. (1967). Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. Naval Ship Research and Development Center Report 2375.
- Frank W. (1967). The heaving damping coefficients of bulbous cylinders partially immersed in deep water. *J. Ship Res.* 11: 151-153.
- French M. J. (1979). The search for low cost wave energy and the flexible bag device. *Proc. 1st. Symp. Wave Energy Utilization*, Chalmers Institute of Technology, Sweden. 364-377.
- Friedrichs K. O. (1948a). On the derivation of the shallow water theory. *Comm. Pure Appl. Math.* 1: 81-85.
- Friedrichs K. O. (1948b) Water waves on a shallow sloping beach. *Commun. Pure Appl. Math.* 1: 109-134.
- Gallagher B. (1971). Generation of surf beat by non-linear wave interactions. *J. Fluid Mech.* 49: 1-20.
- Galvin C. J., Jr. (1968). Breaker type classification on three laboratory beaches. *J. Geophys Res.* 73: 3651-3659.
- Galvin C. J. and P. S. Eaglesen (1965). Experimental study of longshore currents on a plane beach. U.S. Army Coastal Engineering Research Center Technical Memorandum 10.
- Garabedian P. R. (1964). *Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, New York.
- Gardner C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1967). Method for solving the Korteweg - deVries equation. *Phys. Rev. Lett.* 19: 1095-1096.
- Gardner C. S., J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura (1974). Korteweg - deVries equation and generalizations, VI: Methods for exact solution. *Commun. Pure Appl. Math.* 27: 97-133.
- Garrett C. J. C. (1970). Bottomless harbours. *J. Fluid Mech.* 43: 432-449.
- Geerstma J. and D. C. Smit (1961). Some aspects of elastic wave propagation in

- fluid saturated porous solids. *Geophysics* 26: 169-181.
- Gelfand I. M. and B. M. Levitan (1955). On the determination of a differential equation from its spectral function. *Am. Math. Soc. Transl.* 1: 253-304.
- Gerwick, B. C., Jr. and E. Hognestad (1973). Concrete oil storage tank placed on North Sea floor. *Civil Eng. ASCE* 43: 81-85.
- Goda Y. (1967). Travelling secondary wave in channels. Port and Harbour Research Institute, Ministry of Transport, Japan. Report 13: 32.
- Goldstein H. (1950). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Gradshteyn I. S. and I. A. Ryzhik (1965). *Tables of Integrals Series and Products*. Academic, New York.
- Graham J. M. R. (1980). The forces on sharp edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.* 97: 331-346.
- Grant W. D. (1977). Bottom friction under waves in the presence of a weak current: Its relation to coastal sediment transport, Sc. D. Thesis, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Grant W. D. and O. S. Madsen (1979a). Bottom friction under waves in the presence of a weak current. *Tech. Mem. ERL-MESA, National Oceanic and Atmospheric Administration*.
- Grant W. D. and O. S. Madsen (1979b). Combined wave and current interaction with rough bottom. *J. Geophys. Res.* 84: 1797-1808.
- Grant W. D. and O. S. Madsen (1982). Movable bed roughness in unsteady oscillatory flow. *J. Geophys. Res.* 87: 469-481.
- Greenspan H. P. (1956). The generation of edge waves by moving pressure distributions. *J. Fluid Mech.* 1: 574-590.
- Greenspan H. P. (1958). On the breaking of water waves of finite amplitude on a sloping beach. *J. Fluid Mech.* 4: 330-334.
- Greenspan H. P. (1968). *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press, London.
- Guincy D. C., B. J. Noye and E. O. Tuck (1972). Transmission of waves through small apertures. *J. Fluid Mech.* 55: 149-167.
- Guza R. T. and A. J. Bowen (1976). Finite amplitude Stokes edge waves. *J. Marine Res.* 34: 269-293.
- Guza R. T. and D. C. Chapman (1979). Experimental study of the instabilities of waves obliquely incident on a beach. *J. Fluid Mech.* 95: 199-208.
- Guza R. T. and R. E. Davis (1974). Excitation of edge waves by waves incident on a beach. *J. Geophys. Res.* 79: 1285-1291.
- Guza R. T. and D. L. Inman (1975). Edge waves and beach cusps. *J. Geophys. Res.* 80: 2997-3012.
- Guza R. T. and E. B. Thornton (1982). Swash oscillations on a beach. *J. Geophys. Res.* 87: 483-491.
- Hagen G. E. (1975). Wave-driven generator. U. S. Pat. 4,077,213.
- Hammack J. L. and H. Segur (1978). Modelling criteria for long water waves. *J. Fluid Mech.* 84: 359-373.
- Hanaoka T. (1959). On the reverse flow theorem concerning wave-making theory. *Proc. 9th Japan Nat'l Congr. Appl. Mech.* 223-226.
- Haren P. and C. C. Mei (1980). Rafts for absorbing wave power. *Proc. 13th Symp. Naval Hydrodyn. The Ship Building Research Institute, Japan*, 877-886.
- Haren P. and C. C. Mei (1981). Head-sea diffraction by a slender raft with application to wave-power absorption. *J. Fluid Mech.*, 104: 505-526.
- Hashimoto H. and H. Ono (1972). Nonlinear modulation of gravity waves. *J. Phys. Soc. Japan* 33: 805-811.
- Haskind M. D. (1944). The oscillation of a body immersed in a heavy fluid. *Prikl. Mat. Mekh.* 8: 287-300.
- Haskind M. D. (1957). The exciting forces and wetting of ships in waves (in Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Tekh. Nauk*, 7: 65-79. English version available as David Taylor Model Basin Translation No. 307.
- Hasselmann K. et al. (1973). Measurements of wind-wave growth and swell

- decay during the joint north sea wave project (JONSWAP). *Deutschen Hydrographischen Zeitschrift. Reihe A8*: 7-95.
- Hayashi T., T. Kano and M. Shirai (1966). Hydraulic research on the closely spaced pile breakwater. *Proc. 10th Conf. Coastal Eng., Santa Barbara Specialty Conf. ASCE* 873-884.
- Herbich J. B., H. D. Murphy and B. Van Weele (1965). Scour of flat sand beaches due to wave action in front of sea walls. *Coastal Eng., Santa Barbara Specialty Conf. ASCE*. 705-726.
- Hesegawa A. and F. D. Tappert (1973). Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. *Appl. Phys. Lett.* 23: 142-172.
- Hibberd S. and D. H. Peregrine (1979). Surf and run-up on a beach: a uniform bore. *J. Fluid Mech.* 95: 323-345.
- Hildebrand F. B. (1962). *A dvanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Hill M. N. (1962). *The Sea, Vol. 1. Physical Oceanography*. Interscience, New York.
- Ho D. V. and R. E. Meyer (1962). Climb of a bore on a beach, Part 1. Uniform beach slope. *J. Fluid Mech.* 14: 305-318.
- Holman R. A. and A. J. Bowen (1982). Bars, bumps and holes: Models for the generation of complex beach topography.
- Horikawa K. and H. Nishimura (1970). On the function of tsunami breakwaters. *Coastal Eng. Jap.* 13: 103-122.
- Horikawa K. and A. Watanabe (1968). Laboratory study on oscillatory boundary layer flow. *Proc. 12th Conf. Coastal Eng.* 1: 467-486.
- Houston J. R. (1976). Long beach harbor: numerical analysis of harbor oscillations. U. S. Army Engineering Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS, Report 1, Misc. Paper H-76-20.
- Houston J. R. (1978). Interaction of tsunaniis with the Hawaiian Islands calculated by a finite element numerical model. *J. Phys. Ocean.* 8: 93-102.
- Houston J. R. (1981). Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method. *Appl. Ocean Res.* 3: 163-170.
- Huang N. E. (1978). On surface drift currents in the ocean. *J. Fluid Mech.* 91: 191-208.
- Hunt J. N. (1952). Viscous damping of waves over an inclined bed in a channel of finite width. *Houille Blanche* 7: 836-842.
- Hunt J. N. and B. Johns (1963). Current induced by tides and gravity waves. *Tellus* 15: 343-351.
- Hunt J. N. and R. E. Baddour (1981). The diffraction of nonlinear progressive waves by a vertical cylinder. *Q. J. Mech. Appi. Math.* 34: 69-87.
- Huntley D. A., R. T. Guza and E. B. Thornton (1981). Field observations of surf beat. 1. Progressive edge waves. *J. Geophys. Res.* 86: 6451-6466.
- Huthnance J. M. (1981). On mass transports generated by tides and long waves. *J. Fluid Mech.* 102: 367-387.
- Hwang L. S. and Y. K. Lee (eds.) (1980). *Tsunamis. Proceedings of the National Science Foundation Work Shop, Tetra Tech Inc., Pasadena, Calif.*
- Hwang L. S. and E. O. Tuck (1970). On the oscillation of harbours of arbitrary shape. *J. Fluid Mech.* 42: 447-464.
- Ingard K. U. (1970). Nonlinear distortion of sound transmitted through an orifice. *J. A coust. Soc. Am.* 48: 32-33.
- Ingard K. U. and H. Ising (1967). Acoustic nonhnearity in an orifice. *J. Acouse. Soc. Am.* 42: 6-17.
- Inman D. L. (1957). Wave generated ripples in nearshore sands, Beach Erosion Board U.S. Corps of Engineers Technical Memo 100.
- Inman D. L., R. J. Tait and C. E. Nordstrom (1971). l@'fixing in the surf force. *J. Geophys Res.*76: 3493-3514.
- Ippen A. T. and Y. Goda (1963). Wave induced oscillations in harbors. The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea. *Hydrodynamics Lab., Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology*

- Report 59.
- Ippen A. T. and C. R. Kulin (1957). The effect of boundary resistance on solitary waves. *Houille Blanche* 12: 401-408.
- Ippen A. T. and M. M. Mitchell (1957). The damping of the solitary waves from boundary shear measurement. Hydrodynamics Lab., Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology Report 23.
- Iribarren C. R. and C. Nogales (1949). Protection des Ports II.. *Comm. 4, 17th Int. Navig. Congr., Lisbon* 31-80.
- Issacs J. D. (1948). Discussion of "Refraction of surface waves by current" J. W. Johnson. *Trans. Am. Geophys. Union* 29: 739-742.
- Issaeson M. St. Q. (1976). The viscous damping of enoidal waves. *J. Fluid Mech.* 75: 449-457.
- Issaeson M. St. Q. (1977). Nonlinear wave forces on large offshore structures. *G. Waterways Port Coastal and Ocean Eng. A SCE* 101: 166-170.
- Ito Y. (1970). Head loss at tsunami breakwater opening. *Proc. 12th Conf. Coastal Eng. ASCE* 2123-2131.
- James I. D. (1974a). Nonlinear waves in the near shore region: Shoaling and set-up. *Estuary Coastal Marine Sci.* 2: 207-234.
- James I. D. (1974b). A nonlinear theory of longshore currents. *Estuary Coastal Marine Sci.* 2: 235-250.
- Jansson K. G., J. K. Lunde and T. Rindby (eds.) (1979). *Proc. 1 st Symp. Wave Energ Utilization, Chalmers Institute of Technology, Sweden.*
- Jarlan C. E. (1965). The application of acoustical theory to the reflective properties of coastal engineering structure. *Q. Bull. National Res. Council Canada* 1: 23-63.
- Jawson M. A. and G. T. Symm (1977). *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics, Academic, New York.*
- Jeffreys H. (1929). On the transport of sediments by streams. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 25: 272-277.
- Jeffreys H. and B. S. Jeffreys (1953). *Methods of Mathematical Physics, 3rd. ed., Cambridge University Press, London.*
- John F. (1949). On the motions of floating bodies 1. *Comm. Pure Appl. Math.* 2: 13-57.
- John F. (1950). On the motions of floating bodies. II. *Comm. Pure Appl. Math.* 3: 45-101.
- Johns B. (1968). A boundary layer method for the determination of the viscous damping of small amplitude gravity waves. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 21: 93-103.
- Johns B. (1970). On the mass transport induced by oscillatory flow in a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.* 43: 177-185.
- Johnson D. W. (1919). *Shore Processes and Shoreline Development, Hafner, New York.*
- Johnson J. W. (1947). The refraction of surface waves by currents. *Trans. Am. Geophys. Union.* 28: 867-874.
- Johnson R. S. (1972). Some numerical solutions of a variable-coefficient Korteweg - deVries equation (with applications to soliton wave development on a shelf). *J. Fluid Mech.* 54: 81-91.
- Johnson R. S. (1973). On the development of a solitary wave over an uneven bottom. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 73: 183-203.
- Jolas P. (1960). Passage de la houle sur un scuil. *Houille Blanche IS:* 148-152.
- Jones D. S. (1964). *The Theory of Electromaglim, Pergamon, London.*
- Jonsson I. G. (1966). Wave boundary layers and friction factors. *Proc. 10th Conf. Coastal Eng. ASCE* 127-148.
- Jonsson I. G. and O. Brink-Kjaer (1973). A comparison between two reduced wave equations for gradually varying depth. *Inst. Hydrodyn. Hydraul. Eng., Tech. Univ. Denmark Progr. Rep.* 31: 13-18.
- Jonsson I. G. and N. A. Carlsen (1976). Experimental and theoretical investigations in an oscillatory turbulent boundary layer. *J. Hydraul. Ree.* 14:

- 45-60.
- Jonsson I. G. and O. Skovgaard (1979). A mild slope equation and its application to tsunami calculations. *Marine Geodesy* 2: 41-58.
- Jonsson I. G., O. Skovgaard and O. Brink-Kjaer (1976). Diffraction and refraction calculations for waves incident on an island. *J. Marine Res.* 34: 469-496.
- Jonsson I. G., O. Skovgaard and T. S. Jacobsen (1974). Computation of longshore currents. *Proc. 14th Conf. on Coastal Eng. ASCE* 699-714.
- Jonsson I. G., O. Skovgaard and J. O. Wang (1970). Interactions between waves and currents. *Proc. 12th Conf. Coastal Eng.* 1: 486-501.
- Kajiura K. (1961). On the partial reflection of water waves passing over a bottom of variable depth. *Proc. Tsunami Meetings 10th Pacific Science Congress. IUGG Monograph 24*: 206-234.
- Kajiura K. (1963). The leading wave of a tsunami. *Bull. Earthquake Res. Inst. University of Tokyo* 41: 525-571.
- Kajiura K. (1964). On the bottom friction in an oscillatory current. *Bull. Earthquake Res. Inst. Univ. Tokyo* 42: 147-174.
- Kajiura K. (1968). A model of the bottom boundary layer in water waves. *Bull. Earthquake Res. Inst. Univ. Tokyo* 46: 75-123.
- Kakutani T. (1971). Effect of an uneven bottom on gravity waves. *J. Phys. Soc. Jap.* 30: 272-276.
- Kamphuis J. W. (1975). Friction factor under oscillatory waves. *J. Waterways, Harbors Coastal Eng. ASCE* 101: 135-144.
- Kaneko A. and H. Honji (1979). Double structures of steady streaming in the oscillatory flow over a wavy wall. *J. Fluid Mech.* 93: 727-736.
- Kantorovich L. V. and V. I. Krylov (1964). *Approximate Methods in Higher Analysis.* Noordhoff, Groningen.
- Karpman V. I. (1973). *Nonlinear Waves in Dispersive Media,* Pergamon, New York.
- Kehnemuyi M. and R. C. Nichols (1973). The Atlantic generating station. *Nuclear Eng. Institute* 18: 477.
- Keller J. B. (1958). Surface waves on water on non-uniform depth. *J. Fluid Mech.* 4: 607-614.
- Keller J. B. (1961). Tsunamis ... *Water Waves Produced by Earthquakes,* edited by D. C. Cox, *Proc. Tsunami Meetings 10th Pacific Science Congress, IUGG Monograph 24*: 154-166.
- Keller H. B., D. A. Levine and G. B. Whithain (1960). Motion of a bore over a sloping beach. *J. Fluid mech.* 7: 302.
- Keulegan G. H. (1948). Gradual damping of solitary waves. *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 40: 487-498.
- Keulegan O. H. (1959). Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. *J. Fluid Mech.* 6: 33-50.
- Keulegan G. H. and L. H. Carpenter (1956). Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. *National Bureau of Standards Report* 4821.
- King C. A. M. (1959). *Beaches and Coasts.* Arnold, London.
- King R. and R. Smith (1978). Excitation of low frequency trapped waves. *Proc. 16th Coastal Eng. ASCE* 1: 449-466.
- Kjeldsen S. P. and G. B. Olsen (1971). *Breaking Waves.* Film by Technical University of Denmark, Lynby, Denmark.
- Ko K. and H. H. Kuehl (1978). Korteweg-de Vries soliton in a slowly varying medium. *Phys. Rev. Lett.* 40: 233-236.
- Kober H. (1957). *Dictionary of Conformal Representations,* Dover, New York.
- Komar P. D. (1971). Near shore circulation and the formation of giant cusps. *Geol. Soc. Am. Bull.* 82: 2643-2650.
- Komar P. D. and M. K. Gaughan (1972). Airy wave theory and breaker height prediction. *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Eng.* 405-418.
- Korteweg D. J. and G. de Vries (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves.

- Philos. Mag. 39: 422-443.
- Kreisel G. (1949). Surface Waves. Q. Appl. Math. 7: 21-24.
- Kuehl H. H. (1976). Nonlinear effects on mode-converted low-hybrid waves. Phys. Fluid. 19: 1972-1974.
- Kyozuka Y. and K. Yoshida (1981). On wave-free floating-body in heaving oscillations. Appi. Ocean Res. 3: 183-194.
- Lake B. M. and H. C. Yuen (1977). A note on some nonlinear water wave experiments and comparison of data with theory. J. Fluid Mech. 83: 75-81.
- Lake B. M. and H. C. Yuen (1978). A new model for nonlinear wind waves Part 1. Physical model and experimental evidence. J. Fluid Mech. 88: 33-62.
- Lake B. M., H. C. Yuen, H. Rungaldier and I. N. E. Ferguson, Jr. (1977). Nonlinear deep water waves: Theory and experiment Part II. Evolution of a continuous wave train. J. Fluid Mech. 83: 49-74.
- Lamb G. L., Jr. (1980). Elements of Soliton Theory, Wiley-Interscience, New York.
- Lamb H. (1932). Hydrodynamics. Dover, New York.
- Lamoure J. and C. C. Mei (1977). Effects of horizontally two-dimensional bodies on the mass transport near the sea bottom. J. Fluid Mech. 83: 415-431.
- Landau L. D. and E. M. Lifshitz (1958). Quantum mechanics (Non-relativistic theory). Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Landau L. D. and E. M. Lifshitz (1959). Fluid Mechanics. Pergamon, New York.
- Lau J. and A. Barcilon (1972). Harmonic generation of shallow water wave over topography. J. Phys. ocean 2: 405-410.
- Lau J. and B. Travis (1973). Slow varying Stokes waves and submarine long-shore bars. J. Geophys. Res. 78: 4489-4498.
- Lautenbacher C. C. (1970). Gravity wave refraction by islands. J. Fluid Mech. 41: 655-672.
- Lax P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Comm. Pure Appl. Math. 21: 467-490.
- LeBlond P. H. and L. A. Mysak (1978). Waves in the Ocean, Elsevier, Amsterdam.
- LeBlond P. H. and C. L. Tang (1974). On energy coupling between waves and rip currents. J. Geophys. Res. 79: 811-816.
- Lebreton J. C. and A. Marganae (1968). Calcul des mouvements d'un navire ou d'une platforms amarrts dans la houle. Houille Blanche 23: 379-390.
- Lee C. M. (1968). The second order theory of heaving cylinders in a free surface. J. Ship Res. 12: 313-317.
- Lee J. J. (1971). Wave-induced oscillation in harbors of arbitrary geometry. J. Fluid Mech. 45: 375-394.
- Lee J. J. and F. Raichlen (1972). Oscillations in harbor with connection basins. J. Waterways, Harbors Coastal Eng. Div. ASCE 98: 311-332.
- Lenoir M. and A. Jami (1978). A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics. Comp. Methods Appi. Mech. 16: 341-359.
- Lepelletier T. G. (1980). Tsunamis-Harbor oscillations induced by nonlinear transient long waves. Report No. KH-R-41. Keek Laboratory, California Institute of Technology.
- Lesser M. B. and D. G. Creighton (1975). Physical acoustics and the method of matched asymptotic expansions, edited by W. P. Mason and R. N. Thurston Phys. Acoust. 11: 69-149.
- Li H. (1954). Stability of oscillatory laminar flow along a wall. U.S. Army Beach Erosion Board. Tech. Memo. 47.
- Lighthill M. J. (1949). The diffraction of blast 1. Proc. R. Soc. Lond. A 198: 454-470.
- Lighthill M. J. (1967). Some special cases by the Whitham theory. Prot. R. Soc. Lond. A 299: 28-53.
- Lighthill M. J. (1978). Waves in Fluids, Cambridge University Press, London.

- Lighthill M. J. (1979a). Two-dimensional analysis related to wave energy extraction by submerged resonant ducts. *J. Fluid Mech.* 91: 253-317.
- Lighthill M. J. (1979b). Waves and hydrodynamic loading. *Proc. 2nd. Int. Conf. Behavior of Offshore Structures.* 1: 1-40.
- Lin C. C. and A. Clark, Jr. (1959). On the theory of shallow water waves. *Tsing Hua J. of Chinese Studies, Special 1:* 54-62.
- Liu A. K. and S. H. Davis (1977). Viscous attenuation of mean drift in water waves. *J. Fluid Mech.* 81: 63-84.
- Liu P. L. F. (1973). Damping of water waves over porous bed. *J. Hydraul. Div. ASCE* 99: 2263-2271.
- Liu P. L. F. (1978). Integral equation solutions to nonlinear free surface flows. *Proceedings of the Conference on Finite Elements in Water Resources.* Imperial College, London, 487-498.
- Liu P. L. F. and R. A. Dalrymple (1977). Bottom friction stresses and longshore currents due to waves with large scales of incidence. *J. Marine Res.* 36: 357-475.
- Liu P. L. F. and G. P. Lennon (1978). Finite element modeling of near shore currents. *J. Waterways, Port, Coastal Ocean Div. ASCE* 104: 175-189.
- Liu P. L. F., C. J. Lozano and N. Pantazarus (1979). An asymptotic theory of combined wave refraction and diffraction. *Appl. Ocean Res.* 1: 137-146.
- Liu P. L. F. and C. C. Mei (1974). Effects of a breakwater on near-shore currents due to breaking waves. *Parsons Lab., Dept. of Civil engineering, Massachusetts Institute of Technology Report* 192.
- Liu P. L. F. and C. C. Mei (1976a, b). Water motion on a beach in the presence of a breakwater 1. waves 2. mean currents. *J. Geophys. Res.-Oceans Atmos.* 81: 3079-3084; 3085-3094.
- Long R. B. (1973). Scattering of surface waves by bottom irregularities. *J. Geophys. Res.* 78: 7861-7870.
- Longuet-Higgins M. S. (1953). Mass transport in water waves. *Philos. Trans. R. Soc.* 345: 535-581.
- Longuet-Higgins M. S. (1958). The mechanics of the boundary layer near the bottom in a progressive wave. *Proc. 6th Conf. Coastal Eng.* 184-193.
- Longuet-Higgins M. S. (1960). Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface. *J. Fluid Mech.* 8: 293-305.
- Longuet-Higgins M. S. (1967). On the trapping of wave energy round islands. *J. Fluid Mech.* 29: 781-821.
- Longuet-Higgins M. S. (1970a, b). Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 1 and 2. *J. Geophys. Res.* 75: 6778-6789; 6790-6801.
- Longuet-Higgins M. S. (1970c). Steady currents induced by oscillations round islands. *J. Fluid Mech.* 42: 701-720.
- Longuet-Higgins M. S. (1974a). Breaking waves in deep or shallow water. *Proc. 10th Symp. Naval Hydrodyn., Office of Naval Research,* 597-605.
- Longuet-Higgins M. S. (1974b). On mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave. *Proc. R. Soc. Lond. A* 337: 1-13.
- Longuet-Higgins M. S. (1975). Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitudes. *Proc. R. Soc. Lond.* 342: 157-174.
- Longuet-Higgins M. S. (1977a). The mean forces exerted by waves on floating or submerged bodies, with applications to sand bars and wave power machines. *Proc. R. Soc. Lond. A* 352: 463-480.
- Longuet-Higgins M. S. (1977b). On the nonlinear transformation of wave trains in shallow water. *Arch. Hydrotek.* 24.
- Longuet-Higgins M. S. (1978a). The instability of gravity of finite amplitude in deep water I. Superharmonics. *Proc. R. Soc. Lond. A* 360: 471-488.
- Longuet-Higgins M. S. (1978b). The instabilities of steep gravity waves of finite amplitude in deep water II. Subharmonics. *Proc. R. Soc. Lond. A* 360: 489-505.
- Longuet-Higgins M. S. (1981). Oscillating flow over sand ripples. *J. Fluid Mech.* 107: 1-35.

- Longuet-Higgins M. S. and E. D. Cokelet (1976). The Deformation of steep surface waves on water I. A numerical method of computation. Proc. R. Soc. Lond. A 350: 1-26.
- Longuet-Higgins M. S. and E. D. Cokelet (1978) The deformation of steep surface waves on water II. Growth of normal mode instabilities. Proc. R. Soc. Lond. A 364: 1-28.
- Longuet-Higgins M. S. and J. Fenton (1974). Mass, Momentum, Energy and Circulation of a Solitary Wave, II, Proc. R. Soc. Lond. A 340: 471-493.
- Longuet-Higgins M. S. and M. J. H. Fox (1977). Theory of the almost highest wave: The inner solution. J. Fluid Mech. 80: 721-742.
- Longuet-Higgins M. S. and M. J. H. Fox (1978). Theory of the almost highest wave II: Matching and analytic extension. J. Fluid Mech. 85: 769-786.
- Longuet-Higgins M. S. and R. W. Stewart (1960). Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal currents. J. Fluid Mech. 8: 565-583.
- Longuet-Higgins M. S. and R. W. Stewart (1961). The changes in amplitudes of short gravity waves on steady non-uniform currents. J. Fluid Mech. 10: 529-549.
- Longuet-Higgins M. S. and R. W. Stewart (1962). Radiation stresses and mass transport in gravity waves with applications to surf-beats. J. Fluid Mech. 13: 481-504.
- Longuet-Higgins M. S. and R. W. Stewart (1964). Radiation stresses in water waves; a physical discussion with applications. Deep-Sea Res. 11: 529-562.
- Longuet-Higgins M. S. and J. S. Turner (1973). A model of flow separation at a free surface. J. Fluid Mech. 57: 129-148.
- Longuet-Higgins M. S. and J. S. Turner (1974). An entrainment plume model of a spilling breaker. J. Fluid Mech. 63: 1-20.
- Lozano C. J. and P. L. F. Liu (1980). Refraction-diffraction model for linear surface water waves. J. Fluid Mech. 101: 705-720.
- Lozano C. J. and R. E. Meyer (1976). Leakage and response of waves trapped round islands. Phys. Fluids 19: 1075-1088.
- Ludwig D. (1966). Uniform asymptotic expansions at a caustic. Comm. Pure Appl. Math. 19: 215-250.
- Luneberg R. K. (1964). Mathematical Theory of Optics, University of California Press, Los Angeles.
- Madsen O. S. (1978a). Mass transport in deep-water waves. J. Phys. Ocean 8: 1009-1015.
- Madsen O. S. (1978b). Wave induced pore pressures and effective stresses in a porous sea bed. Geotechnique 28: 377-393.
- Madsen O. S. and W. D. Grant (1976). Sediment transport in the coastal zone. Parsons Lab., Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology Report 208.
- Madsen O. S. and W. D. Grant (1977). Quantitative description of sediment transport by waves. Proc. 5th Conf. Coastal Eng. 1093-1112.
- Madsen O. S. and C. C. Mei (1969). The transformation of a solitary wave over an uneven bottom. J. Fluid Mech. 39: 781-791.
- Madsen O. S., C. C. Mei and R. P. Savage (1970). The evolution of time-periodic waves of finite amplitude. J. Fluid Mech. 44: 195-208.
- Maeda H., H. Tanaka and T. Kinoshita (1980). Theoretical and experimental study of wave power absorption. Proc. 4th Symp. Naval Hydrodyn., The Ship Building Res. Inst. Japan 857-876.
- Mallory J. K. (1974). Abnormal waves on the south east coast of South Africa. University of Capetown Libraries, Cape Town.
- Martin D. U. and H. C. Yuen (1980). Quasi recurring energy leakage in the two space dimensional nonlinear Schrödinger equations. Phys. Fluids 23: 1269-1271.
- Maruo H. (1960). The drift of a body floating on waves. J. Ship Res. 4: 1-10.
- Maskell S. J. and F. Ursell (1970). The transient motion of a floating body. J. Fluid Mech. 44: 203-313.

- Masuda M. (1979). Experimental full scale result of wave power machine KAIMEI. Proc. Ist. Symp. Wave Energy Utilization, Chalmers Institute of Technology, Sweden 349-363.
- Mattioli F. (1978). Wave-induced oscillations in harbors of variable depth. Computers and Fluids 6: 161-172.
- McCamy R. C. and R. A. Fuchs (1954). Wave forces on a pile: a diffraction theory. Tech. Memo. No. 69, U.S. Army Board, U.S. Army Corp. of Eng.
- McCormick M. E. (1981). Ocean Wave Energy Conversion, Wiley-Interscience, New York, 233 pp
- McKee W. D. (1974). Waves on a shearing current: a uniformly valid asymptotic solution. Proc. Cambridge Philos. Soc. 75: 295-301.
- McKee W. D. (1974). Waves on a shear current: a uniformly valid asymptotic solution. Proc. Cambridge Philos. Soc. 75: 295-361.
- McLean J. W., Y. C. Ma, D. U. Martin, P. G. Saffman, and H. C. Yuen (1981). A new type of three-dimensional instability of finite amplitude gravity waves. Phys. Rev. Lett. 46: 817-820.
- Mehlum E. and J. Stamnes (1979). Power production based on focusing of ocean swells. Proc. Ist Wave Energy Utilization, Chalmers Institute of Technology, Sweden. 29-35.
- Mei C. C. (1966a). Radiation and scattering of transient gravity waves by vertical plates. Q. J. Mech. Appl. Math. 19: 417-440.
- Mei C. C. (1966b). On the propagation of periodic water waves over beaches of small slope. Technical Note 12, Hydrodynamics Laboratory, Massachusetts Institute of Technology.
- Mei C. C. (1973). A note on the averaged momentum balance in two-dimensional water waves, J. Marine Res. 31: 97-104.
- Mei C. C. (1976). Power extraction from water waves. J. Ship Res. 20: 63-66.
- Mei C. C. (1978). Numerical methods in water wave diffraction and radiation. Annual Rev. Fluid Mech., 10: 393-416.
- Mei C. C. and D. Angelides (1976). Longshore currents around a conical island. Coastal Eng. 1: 31-42.
- Mei C. C. and H. S. Chen (1975). Hybrid element method for water waves, Symposium on Modeling Techniques, 2nd Annual Symposium of the Waterways Harbors and Coastal Engineering Division American Society of Civil Engineers, Vol. 1, pp. 63-81.
- Mei C. C. and H. S. Chen (1976). A hybrid element method for steady linearized free surface flows. Inst. J. Num. Math. Eng. 10: 1153-1175.
- Mei C. C. and M. A. Foda (1979). An analytical theory of resonant scattering of SH waves by thin overground structures. Earthquake Eng. Structure Dynamics 7: 335-353.
- Mei C. C. and M. A. Foda (1981a). Wave induced responses in a fluid filled poro-clastic solid with a free surface - a boundary layer theory. Geophys. J. R. Astr. Soc. 66: 597-637.
- Mei C. C. and M. A. Foda (1981b). Wave induced stresses around a pipe laid on a poro-elastic sea-bed, Geotechnique. 31: 509-517.
- Mei C. C. and M. A. Foda (1982). Boundary layer theory of waves in a poro-clastic sea bed, Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, G. N. Pande and O. C. Zienkiewicz (eds.) 17-35, Wiley, New York.
- Mei C. C., M. A. Foda, and P. Tong (1979). Exact and hybrid-element solutions for the vibration of a thin elastic structure seated on the sea bottom. Appl. Ocean Res. 1: 79-88.
- Mei C. C. and B. LeMehaute (1966). Note on the equations of long waves over an uneven bottom. J. Geophys. Res. 71: 393-400.
- Mei C. C. and P. L. F. Liu (1973). The damping of surface gravity waves in a bounded liquid. J. Fluid Mech. 59: 239-256.
- Mei C. C. and P. L. F. Liu (1977). Effects of topography on the circulation in and near the surf zone-linear theory. atuary Coastal Marine Sci. 5: 25-37.
- Mei C. C., P. L. F. Liu and T. G. Carter (1972). Mass transport in water waves.

- Parsons Lab., Massachusetts Institute of Technology Report 146: 287.
- Mei C. C., P. L. F. Liu and A. T. Ippen (1974). Quadratic head loss and scattering of long waves. *J. Waterway Harbors Coastal Eng. Div. Proc. A SCE* 100, 217-239.
- Mei C. C. and R. P. Petroni (1973). Waves in a harbor with protruding breakwaters. *J. Waterways Harbors Coastal Eng. Proc. A SCE* 99, 209-229.
- Mei C. C. and E. O. Tuck (1980). Forward scattering by thin bodies. *SIAM J. Appl. Math.* 39:178-191.
- Mei C. C. and U. Unluata (1972). Harmonic generation in shallow water waves. *Waves on Beaches*, edited by R. E. Meyer, Academic, New York, 181 -202.
- Mei C. C. and U. Unluata (1978). Resonant scattering by a harbor with two coupled basins. *J. Eng. Math.* 10: 333-353.
- Melville W. K. (1980). On the mach reflexion of a solitary wave. 98: 285-297.
- Melville W. K. (1982). The instability and breaking of deep-water waves. *J. Fluid Mech.* 115, 165-185.
- Meyer R. (1955). Symétrie du coefficient (complexe) de transmission de houles A travers un obstacle quelconque. *Houille Blanche* 10: 139-140.
- Meyer R. E. (1970). Resonance of unbounded water bodies. *Mathematical Problems in Geophysical Sciences. I, Geophysical Fluid Dynamics*, American Mathematical Society, Providence, R.I. 189-227.
- Meyer R. E. (1979a). Theory of water-wave refraction. *Adv. Appl. Mech.* 19: 53-141.
- Meyer R. E. (1979b). Surface-wave reflection by underwater ridges. *J. Physical Ocean.* 9: 150-157.
- Meyer R. E. and A. D. Taylor (1972). Run-up on beaches. *Waves on Beaches*, edited by R. E. Meyer, Academic, New York, 357-412.
- Miche R. (1944). Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante form limite de la houle lors de son déferlement. Application aux digues maritimes. *Ann. Pontes Chaussees* 114: 25-78, 131-164, 270-292, 369-406.
- Miche R. (1951). Le pouvoir reflechissant des ouvrages maritime exposés , l'action de la houle. *Ann. Pontes Chaussies* 121: 285-319.
- Miles J. W. (1957). On the generation of surface waves by shear flows. *J. Fluid Mech.* 3: 185-204.
- Miles J. W. (1962). Transient gravity wave response to an oscillating pressure. *J. Fluid Mech.* 13: 145-150.
- Miles J. W. (1967). Surface-wave damping in closed basins. *Proc. Soc. Lond. A* 297: 459-475.
- Miles J. W. (1971). Resonant response of harbors: An equivalent circuit analysis. *J. Fluid. Mech.* 41: 241-265.
- Miles J. W. (1972). Wave propagation across the continental shelf. *J. Fluid Mech.* 54: 63-80.
- Miles J. W. (1974). Harbor sciching. *Annual Rev. Fluid Mech.* 6: 17-35.
- Miles J. W. (1976). Damping of weakly nonenear shallow water waves. *J. Fluid Mech.* 76: 251-257.
- Miles J. W. (1977). Diffraction of solitary waves. *J. Appl. Math. Phy.* 28: 889-902.
- Miles J. W. (1979). On the Korteweg - deVries equation for a gradually varying channel. *J. Fluid Mech.* 91: 181-190.
- Miles J. W. (1980). Solitary waves. *Annual Rev. Fluid Mech.* 12: 11-44.
- Miles J. W. and Y. K. Lee (1975). Helraholtz resonance of harbors. *J. Fluid Mech.* 67: 445-464.
- Miles J. W. and W. Munk (1961). Harbor paradox. *J. Waterways Harbors Div. Proc. ASCE* 87: 111-130.
- Miline-Thomson M. N. (1967). *Theoretical Hydrodynamics*, 5th ed. Macmillan. New York, 630 pp.
- Miloh T. (1980). Irregularities in solutions of nonlinear wave diffraction problem

- by vertical cylinder. *J. Waterways, Port Coastal Ocean Eng. Div Proc. A SCE*: 106: 279-284.
- Minzoni A. A. (1976). Nonlinear edge waves and shallow water theory. *J. Fluid Mech.* 79:369-374.
- Minzoni A. A. and G. B. Whitham (1977). On the excitation of edge wave on beaches. *J. Fluid Mech.* 79: 273-287.
- Miura R. M. (1974). The Korteweg - deVries equation: a model equation for nonlinear dispersive waves *Nonlinear waves*, edited by S. Lcibovich and A. R. Scabass, Cornell University Press, Ithaea, New York, 212-234.
- Miura R. M. (1976). The Korteweg - deVries equation-a survey of results. *SIAM Rev.* IS: 412-459.
- Molin B. (1979). Second order diffraction loads upon three-dimensional bodies. *Appi. Ocean Res.* 1: 197-202.
- Mollo-Christensen E. and A. Ramamonjiariosa (1978). Modeling the presence of wave groups in a random wave field. *J. Geophys. Res.* 83: 4117-4122.
- Momoi T. Tsunami in the vicinity of a wave origin (I-IV *Bull. Earthquake Res. Inst. Univ. Tokyo* I: (1964a). 42: 133-146; II: (1964b). 42: 369-381; III: (1965). 43: 53-93; IV: (1965b). 43: 755-772.
- Monin A. S. and A. M. Yaglom (1971). *Statistical Fluid Mechanics*. M.I.T. Press, Cambridge, 769 pp.
- Moore D. (1970). The mass transport velocity induced by the free oscillation of a single frequency. *Geophys. Fluid Dynamics* 1: 237-247.
- Moraes C. de C. (1970). Experiments of wave reflection on impermeable slopes. *Proc. 12th Conf. on Coastal Eng. ASCE* 509-521.
- Morse P. M. and H. Feshbach (1953). *Methods of Theoretical Physics I and II*, McGraw-Hill, New York.
- Morse P. M. and K. U. Ingard. (1968). *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York.
- Munk W. H. (1949a). The solitary wave and its application to surf problems. *N. Y. Acad. Sci.* 1: 376-424.
- Munk W. H. (1949b). Surf beats. *Trans. Am. Geophys. Union* 30: 849-854.
- Munk W. H., F. E. Snodgrass and G. F. Carrier (1956). Edge waves on the continental shelf. *Science* 123: 127-132.
- Munk W. H. and M. Wimbush (1969). A rule of thumb for wave breaking over sloping beaches. *Oceano.* 9: 56-59.
- Murty T. S. (1977). *Seismic Sea WavesITsunamis*, Bulletin 198, Fisheries and Environment, Ottawa, Canada.
- Mushkelishvili N. I. (1954). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Noordhoff, Leyden, The Netherlands.
- Mynett A. E. and C. C. Mei (1982). Wave-induced stresses in a poro-elastic sea bed beneath a rectangular caisson. *Geotechnique* 32, No. 3: 235-247.
- Mynett A. E., D. D. Serman, and C. C. Mei (1979). Characteristics of Salter's cam for extracting energy from ocean waves. *Appi. Ocean Res.* 1: 13-20.
- Naheer E. (1978). The damping of solitary waves. *Int. J. Hydraul. Res.* 16: 235-249.
- Nayfeh A. H. (1973). *Perturbation Methods*. Wiley, New York.
- Newman J. N. (1960). The exciting forces on fixed bodies in waves. *J. Ship Res.* 6: 10-17.
- Newman J. N. (1965). Propagation of water waves past long two-dimensional obstacles. *J. Fluid Mech.* 23: 23-29.
- Newman J. N. (1967). The drift force and moment on ships in waves. *J. Ship. Res.* 11: 51-60.
- Newman J. N. (1974). Second-order, slowly-vuying forces on vessels in irregular waves. *Proc. Int. Symp. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves*, Univ. College, London.
- Newman J. N. (1975). Interaction of waves with two dimensional obstacles: a relation between the radiation and scattering problems. *J. Fluid Mech.* 71: 273-282.

- Newman J. N. (1976). The interaction of stationary vessels with regular waves. Proc. 11th Symp. Naval Hydrodyn., Office of Naval Research 491-502.
- Newman J. N. (1979). Absorption of wave energy by elongated bodies. *Appl. Ocean Res.* 1: 189-196.
- Nielsen A. H. (1962). Diffraction of periodic waves along a vertical breakwater for small angles of incidence. University of California-Berkeley IER Technical Report HEL 1-2.
- Noda E. K. (1972). Rip currents. Proc. 13th Conf. Coastal Eng. 653-668.
- Noda E. K. (1974). Wave-induced nearshore circulation. *J. Geophys. Res.* 79: 4097-4106.
- Noda H. (1968). A study on mass transport in boundary layers in standing waves. Proc. 11th Conf. Coastal Eng. ASCE 227-235.
- Ogawa K. and K. Yoshida (1959). A practical method for a determination of long gravitational waves. *Records Oceanographic Works Jap* 5: 38-50.
- Ogilvie T. F. (1960). Propagation of waves over an obstacle in water of finite depth, University of California-Berkeley, Inst. Eng. Res. Report 82-14.
- Ogilvie T. F. (1963). First and second order forces on a cylinder submerged under the free surface. *J. Fluid, Mech.* 16: 451-472.
- Ogilvie T. F. (1964). Recent progress toward the understanding and prediction of ship motions. Proc. 5th Symp. Naval Hydrodyn. Office of Naval Research 3-97.
- Ono H. (1972). Wave propagation in an inhomogeneous anharmonic lattice, *J. Phys. Soc. Jap.* 32: 332-336.
- Ono H. (1974). Nonlinear wave modulation in inhomogeneous media. *J. Phys. Soc. Japan* 37: 1668-1672.
- Ostendorf D. W. and O. S. Madsen (1979). An analysis of longshore current and associated sediment transport in the surf zone, Parsons Laboratory, Dept. Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology Report 241.
- Ostrovsky L. A. and E. N. Pelinovskiy (1970). Wave transformation on the surface of a fluid of variable depth. *A tmos. Oceanic Phys.* 6: 552-555.
- Ott E. and R. N. Sudan (1970). Damping of solitary waves. *Phys. Fluids* 13: 1432.
- Ozhan E. and H. Shi-igai (1977). On the development of solitary waves on a horizontal bed with friction. *Coastal Eng.* 1: 167-184.
- Ozsoy E. (1977). Dissipation and wave scattering by narrow openings. Coastal and Occang. Engineering Lab. University of Florida UFL/ COEL/TR-037.
- Pande G. N. and O. C. Zienkiewicz (eds). (1982). *Soils Mechanics: Cyclic and Transient loading* Wiley, New York.
- Papanikolaou A. and H. Nowacki (1981). Second-order theory of oscillating cylinders in a regular steep wave. Proc. 13th Symp. on Naval Hydrodyn., Office of Naval Research. 303-333.
- Papoulis A. (1968). *System and Transform with Applications in Optics*, McGraw-Hill, New York.
- Peregrine D. H. (1967). Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.* 27: 815-827.
- Peregrine D. H. (1976). Interaction of water waves and currents. *Adv. Appl. Mech.* 16: 10-117.
- Peregrine D. H. and R. Smith (1975). Stationary gravity waves on non-uniform free streams. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77: 415-438.
- Perroud P. H. (1957). The solitary wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence. University of California-Berkeley IRE Technical Report 99-3.
- Phillips O. M. (1957). On the generation of waves by turbulent wind. *J. Fluid Mech.* 2: 415-417.
- Phillips O. M. (1960). On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part I. *J. Fluid Mech.* 9: 193-217.
- Phillips O. M. (1977). *Dynamics of the Upper Ocean*, 2nd ed. Cambridge University Press, London.
- Pierson W. J., Jr. (1962). Perturbation analysis of the Navier- Stokes equations in

- Lagrangian form with selected linear solutions. *J. Geophys. Res.* 67: 3151-3160.
- Pleass C. M. (1978). The use of wave powered system for desalinization-a new opportunity. *Proc. Symp. Wave Tidal Energy*. 1, Paper D1-1, BHRA.
- Pocinki L. S. (1950). The application of conformal transformations to ocean wave refraction problems. *Trans. Am. Geophys. Union* 31: 856-860.
- Prevost J. H. (1980). Mechanics of continuous porous media. *J. Eng. Sci.* IS: 787-800.
- Price W. G. and R. E. D. Bishop, (1972). *Probabilistic Theory of Ship Dynamics*, Wiley, New York.
- Putnam J. A. (1949). Loss of wave energy due to percolation in a permeable sea bottom. *Trans. Am. Geophys. Union* 30: 349-356.
- Putnam J. A., W. H. Munk and M. A. Traylor (1949). The prediction of longshore currents. *Trans. Am. Geophys Union* 30: 337-345.
- Raats P. A. C. (1968). Forces acting upon the solid phase of a porous medium. *J. Appl. Math. Phys.* 19: 606-613.
- Radder A. C. (1979). On the parabolic equation method for water wave propagation. *J. Fluid Mech.* 95: 159~176.
- Raman H., G. V. Prabhakara Rao and P. Venkatanarasalah (1975). Diffraction of nonlinear waves by a circular cylinder. *Acta Mechanica* 23: 145- 1 58.
- Raman H. and P. Venkatanarasalah (1976). Forces due to nonlinear waves on vertical cylinders. *J. Waterways Harbor, Coastal Engineering Div. ASCE* 102: 301-316.
- Rayleigh L. (1883). On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and some allied acoustical problems. *Philos, Trans. R. Soc. London* 175: 1-21.
- Rayleigh L. and J. W. Strutt (1897). On the passage of waves through apertures in plane screens, and allied problems. *Philos. Mag.* 43: 259-272.
- Riabouchinsky D. (1932). Sur L'analogie hydraulique des mouvements dun fluid compressible. *Institut do France Academic des Sciences. Comptes Rendus.* 195: 998.
- Richard F. E., Jr., J. R. Hall, Jr. and R. D. Woods (1969). *Vibration of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Richey E. P. and C. K. Sollitt (1969). Attenuation of deep water waves by a porous-walled breakwater. Dept. of Civil Engineering University of Washington, Seattle, Technical Report 25.
- Rienecker M. M. and J. D. Fenton (1981). A Fourier approximation for steady water waves. *J. Fluid Mech.* 104: 119-137.
- Riley N. (1967). Oscillatory viscous flows: review and extension. *J. Inst. Math. Appl.* 3: 419-434.
- Risser J. F. (1976). *Transient Response in Harbors*, Master of Science Thesis. Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Rockliff N. (1978). Finite amplitude effects in free and forced edge waves. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 83: 463-479.
- Rogers S. R. and C. C. Mei (1978). Nonlinear resonant excitation of a long and narrow bay. *J. Fluid Mech.* 88: 161 - 180.
- Roseau M. (1952). Contribution a la theorie des ondes liquides do gravite on profondeur variable. *Pub. Sci. Tech. Due Ministere do l'Air*, 275.
- Roseau M. (1976). *Asymptotic Wave Theory*, North-Holland, Amsterdam.
- Roskes G. (1969). *Wave Envelopes and Nonlinear Waves*, Ph.D. Thesis, Dept. of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology.
- Russell J. S. (1838). Report of the Committee on Waves. *Rep. Meet. Br Assoc. Adv. Sci.* 7th. Liverpool, 1837, John Murray, London, 417-496.
- Russell J. S. (1845). Report on waves. *Rep. Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci.* 14th York, 1844, John Murray, London, 311-390.
- Russell R. C. H. and J. D. C. Osorio (1957). An experiment investigation of drift profiles in a dosed channel. *Proc. 6th Conf. Coastal Eng. ASCE* 171-193.
- Salter S. (1974). Wave power, *Nature* 249: 720-724.

- Salter S. H. (1979). Recent progress on ducks. Proc. 1st Symp. Wave Energy Utilization, Chalmers Institute of Technology, Sweden. 36-76.
- Sarpkaya T. and M. St. Q. Isaacson (1981). Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures, Van Nostrand Reinold, New York.
- Satsuma J. and N. Yajima (1974). Initial value problems of One-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media. Suppl. Progr. Theor. Phys. 55, 284-306.
- Sauvage de Saint Mare, M. G., and M. G. Vincent (1955). Transport littoral formation de fleches et de tombolos. Proc. of 5th Conf. Coastal Eng. ASCE 296-328.
- Schlichting H. (1968). Boundary Layer Theory, 6th ed, McGraw-Hill, New York.
- Schonfeld J. C. (1972) Propagation of Two Dimensional Short Waves. Delft University of Technology Manuscript (in Dutch).
- Schwartz L. W. (1974). Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves. J. Fluid Mech. 62: 553-578.
- Schwartz L. W. and J. D., Fenton, (1982). Strongly nonlinear waves. Ann. Rev. Fluid Mech. 14: 39-60.
- Scott A. C., F. Y. F. Chu and D. W. McLaughlin (1973). The soliton: a new concept in applied science. Proc. IEEE 61: 1443-1483.
- Seed H. B. and K. L. Lee (1966). Liquefaction of saturated sands during cyclic loading. J. Soil Mech. Found. Div. A SCE 92: 105-134.
- Seed H. B. (1968). The Fourth Terzaghi Lecture: Landslides during earthquakes due to liquefaction. J. Soil Mech. Found. Div. A SCE 94: 1053-1122.
- Segur H. (1973). The Korteweg - deVries equation and water waves. Solution of the equation: Part I. J. Fluid Mech. 59: 721-736.
- Serman D. D. (1978). Theory of Salter's wave energy device in random sea. Master of Science Thesis, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Seto H. and Y. Yamamoto (1975). Finite element analysis of surface wave problems by a method of superposition. Proc. Inst. Int. Conf. Num. Ship Hydrod. David Taylor Naval Ship Res. and Devel. Center, 49-70.
- Shen M. C. and R. E. Meyer (1963a). Climb of a bore on a beach-Part II. Nonuniform beach slope. J. Fluid Mech. 16: Part I, 108-112.
- Shen M. C. and R. E. Meyer (1963b). Climb of a bore on a beach-Part III. Run-up. J. Fluid Mech. 16: Part I, 113-125.
- Shepard F. P. (1963). Submarine Geology, 2nd ed., Harper and Row, New York.
- Shepard F. P. and H. R. Wanless (1973). Our Changing Coastlines, McGraw-Hill, New York.
- Shimano T. M. Homma and K. Horikawa (1958). Effect of a jetty on nearshore currents. Coastal Eng. Japan 1: 45-58.
- Simon M. J. (1981). Wave energy extractions by submerged cylindrical resonant duct. J. Fluid Mech. 104: 159-181.
- Sitenko A. G. (1971). Lectures in Scattering Theory. Pergamon, New York.
- Skovgaard O., I. G. Jonsson, and J. A. Bertelsen (1976). Computation of wave heights due to refraction and friction. J. of Waterways Harbors and Coastal Eng. Div. ASCE. 102: 100-105.
- Sleath J. F. A. (1970). Velocity measurements close to the bed in a wave tank. J. Fluid Mech. 42: Part I, 111- 123.
- Smith J. D. and S. R. McLean (1977). Spatially averaged flow over a wavy surface. J. Geophys. Res. 82: 1732-1746.
- Smith R. (1976). Giant waves. J. Fluid Mech. 77: 417-431.
- Smith R. and T. Sprinks (1975). Scattering of surface waves by a conical island. J. Fluid Mech. 72: 373-384.
- Sneddon I. N. (1951). Fourier Transform, McGraw-Hill, New York.
- Snodgrass F. E., W. H. Munk and G. R. Miller (1962). Long period waves over California's continental borderland, part I. background spectra. J. Marine Res. 20: 3-30.

- Sonu C. J. (1972). Field observation of nearshore circulation and meandering currents. *J. Geophys. Res.* 77: 3232-3247.
- Srokosz M. A. (1979). Some theoretical aspects of wave power absorption. Ph.D. Thesis, Dept. of Appl. Math., University of Bristol.
- Srokosz M. A. (1980). Some relations for bodies in a canal, with an application for wave power absorption, *J. Fluid Mech.* 99: 145-162.
- Stiassnie M. and U. I. Kroszynski (1982). Long-time evolution of an unstable water-wave Train. *J. Fluid Mech.* 116: 201-225.
- Stiassnie M. and D. H. Peregrine, (1979). On averaged equations for finite amplitude water waves. *J. Fluid Mech.* 94: 401-407.
- Stiassnie M. and D. H. Peregrine, (1980). Shoaling of finite-amplitude surface waves on water of slowly-varying depth. *J. Fluid Mech.* 97: 783-805.
- Stoker J. J. (1948). The formation of breakers and bores. *Comm. Pure and Appl. Math.* 1: 1-87.
- Stoker J. J. (1956). On radiation conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* 9: 577-595.
- Stoker J. J. (1957). *Water Waves*. Interscience, New York.
- Stokes G. G. (1847). On the theory of oscillatory waves. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 8: 441-455. Reprinted in *Math. Phys. Papers Cambridge University Press, London, Vol. 1, 314-326*.
- Stoll R. D. and G. M. Bryan (1970). Wave attenuation in saturated sediments. *J. Acoust. Soc. Am.* 47: 1440-1447.
- Stuart J. T. (1966). Double boundary layers in oscillatory viscous flow. *J. Fluid Mech.* 24: 673-687.
- Su C. L. (1973). Asymptotic solutions of resonances in harbors with connected basins. *J. Waterways Harbor Coastal Eng. Div. ASCE* 375-391.
- Susbielles G. and Ch. Bratu, (1981). *Vagues et Quvrages Petroliers en Mer* Editions Tecbnip 27, Paris.
- Svensen I. A. (1967). The wave equation for gravity waves in water of gradually varying depth. Technical University Denmark, Coastal Engineering Lab. Progress Report 15.
- Tam C. K. W. (1973). Rip currents. *J. Geophys. Res.* 78: 1937-1943.
- Tappert F. D. (1977). The Parabolic Approximation, Wave Propagation and Underwater Acoustics, 224-287, edited by J. B. Keller and J. S. Papadakis, Springer-Verlag, Berlin.
- Tappert F. D. and N. J. Zabusky (1971). Gradient-induced fission of solitons. *Phys. Rev. Lett.* 27: 1774-1776.
- Terrett F. L., F. D. C. Osorio and G. H. Lean (1968). Model studies of a perforated breakwater, Proc. 11th Conf Coastal Eng. ASCE 1104-1109.
- Terzaghi K. (1954). *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York,
- Thomas J. R. (1981). The absorption of wave energy by a three-dimensional submerged duct. *J. Fluid Mech.* 104: 189-215.
- Thornton E. B. (1970). Variation of longshore current across the surf zone. Proc. 12th Coastal Eng. Conf. ASCE 291-308.
- Tong P. P., T. H. H. Pian and S. J. Lasry (1973). A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *Int. J. Num. Methods Eng.* 7: 297-308.
- Tong P. and J. N. Rossettos (1976). *Finite Element Method*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
- Tuck E. O. (1971). Transmission of water waves through small apertures. *J. Fluid Mech.* 49: 65-73.
- Tuck E. O. (1975). Matching problems involving flow through small holes. *Adv. Appl. Mech.* 15: 90-158.
- Tuck E. O. (1976). Some classical water-wave problems in variable depth, *Waves on Water of Variable Depth*, edited by D. G. Provis and R. Radak, Lecture Notes in Physics no 64, Springer-Verlag, New York.
- Tuck E. O. and L. S. Hwang (1972). Long wave generation on a sloping beach. *J. Fluid Mech.* 51: 449-461.
- Tucker M. J. (1950). Surf beats: Sea waves of 1 to 5 min. period. *Proc. R. Soc.*

- Lond. A 202: 565-573.
- Turpin F. M., C. Benmoussa and C. C. Mei (1983). Evolution of finite amplitude surface waves over slowly varying depth and current. *J. Fluid Mech.* 132: 1-23.
- Unluata U. and C. C. Mei (1970). Mass transport in water waves. *J. Geophys. Res.* 7611-7618.
- Unluata U. and C. C. Mei (1973). Long wave excitation in harbors - an analytic study. Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology Technical Report 171.
- Unluata U. and C. C. Mei (1975). Effects of entrance loss on harbor oscillations. *J. Waterways Harbors and Coastal Eng. Div. ASCE* 101: 161-180.
- Unluata U. and C. C. Mei (1976). Resonant scattering by a harbor with two coupled basins, *J. Eng. Math.* 10: 333-353.
- Ursell F. (1947). The effect of a vertical barrier on surface waves in deep water. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 47: 374-82.
- Ursell F. (1948). On the waves due to the rolling of a ship. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1: 246-52.
- Ursell F. (1952). Edge waves on a sloping beach. *Proc. R. Soc. Lond. A* 214: 79-97.
- Ursell F. (1953). The long wave paradox in the theory of gravity waves. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 49: 685-694.
- Ursell F. (1964). The decay of the free motion of a floating body. *J. Fluid Mech.* 19: 305-319.
- Ursell F. (1981). Irregular frequencies and the motion of floating bodies. *J. Fluid Mech.* 105:143 -156.
- U.S. Army Coastal Engineering Research Center (1975). Shore Protection Manual, Vols. I-III, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.
- Van Dom W. G. (1966). Boundary dissipation of oscillatory waves. *J. Fluid Mech.* 24: 769-779.
- Van Dom W. G. (1968). Tsunamis. *Contemp. Phys.* 9: 145-164.
- Verruijt A. (1969). Elastic storage of aquifers. *Flow through Porous Media*, edited by R. J. M. DeWiest, Academic, New York.
- Vinje T. and P. Brevig (1981a). Nonlinear ship motions. *Proc. 3rd Int. Symp. Num. Ship Hydrodyn. Paris.*
- Vinje T. and P. Brevig (1981b). Numerical simulation of breaking waves. *Adv. Water Res* 4: 77-82.
- Vitale P. (1979). Sand bed friction factors for oscillatory flows. *J. Waterways, Port Coastal Ocean Div. ASCE* 105: 229-245.
- Von Kerczek C. (1975). Numerical solution of naval free surface hydrodynamics problems. *Proc. 1st Int. Conf. Num. Ship Hydrodyn.*, edited by J. W. Schot and N. Salvesen, David Taylor Naval Ship Research and Development Center, 1-47.
- Wait J. (1962). *Electromagnetic Waves in Stratified Media*, Pergamon, New York.
- Wang C. Y. (1968). On high-frequency oscillatory viscous flows. *J. Fluid Mech.* 32: 55-68.
- Watson G. N. (1958). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, London.
- Weggel J. R. (1972). Maximum breaker height. *J. Waterways, Harbours Coastal Eng. Div. ASCE.* 98: 529-548.
- Wehausen J. V. (1967). Initial value problem for the motion in an undulating sea for a body with a fixed equilibrium position. *J. Eng. Math.* 1: 1-19.
- Wehausen J. V. (1971). The motion of floating bodies. *An. Rev. Fluid Mech.* 3: 237-268.
- Wehausen J. V. (1980). Perturbation methods in diffraction. *J. Waterways Port Coastal Ocean Eng. Div.* 2: 290-291.
- Wehausen J. V. and E. V. Laitone (1960). *Handbuch der Physik*, edited by W. Fliigge, vol. 9, pp. 446-778. Springer-Verlag, Berlin.

- West B. J. (1981). *Deep Water Gravity Waves*. Springer-Verlag, Berlin.
- Whitham G. B. (1962). Mass, momentum and energy flux in water waves. *J. Fluid Mech.* 12: 135-147.
- Whitham G. B. (1965). Nonlinear dispersive waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* 283: 238-261.
- Whitham G. B. (1967). Nonlinear dispersion of water waves. *J. Fluid Mech.* 27: 399-412.
- Whitham G. B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, New York.
- Whitham G. B., (1976). Nonlinear effects in edge waves. *J. Fluid Mech.* 74: 353-368.
- Wiegel R. L. (1960). A presentation of enoidal wave theory for practical application. *J. Fluid Mech.* 7: 273-286.
- Wiegel R. L. (1964). *Oceanographical Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Wilson B. W. and A. Torum (1968). The tsunami of the Alaskan earthquake 1964: engineering evaluation. Technical Memo. No. 25 Coastal Engineering Research Center, U.S. Army Corps. of Engineers.
- Wirt L. and T. ffiggins (1979). DAM-ATOLL: Ocean Wave Energy Extraction, Marine Technology Society Meeting, New Orleans, La., Oct. 11-12.
- Wooley M. and J. Platts (1975). Energy on the crest of a wave. *New Scientist* 66: 241-243.
- Wu T. Y. (1957). Water waves generated by the transiatory and oscillatory surface disturbance. California Institute of Technology, Engineering Division Report No. 85-3.
- Yamaguchi M. and Y. Tsuchiya. (1974). Non-linear effect of waves on wave pressure and wave force on a large cylindrical pile. *Proc. Civil. Eng. Japan* 229: 41-53 (in Japanese).
- Yamamoto T. (1977). Wave induced instability in scabeds. *Proc. ASCE Specialty Conf.: Coastal Sediments*. Charleston, South Carolina.
- Yamamoto T. (1982). Nonfinear mechanics of ocean wave interaction with sediment beds. *Appl. Ocean Res.* 4: 99-106.
- Yamamoto T., H. L. Koning, H. Selimeigher and E. V. Hijum (1978). On the response of poro-elastic bed to water waves. *J. Fluid. Mech.* 87: 193-206.
- Yeung R. W. (1975). A hybrid integral equation method for time-harmonic free surface flow. *Proc. Ist Int. Conf. Num. Ship Hydrodyn.* David Taylor Naval Ship Research and Development Center 581-607.
- Yeung R. W. (1982). Numerical methods in free-surface flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 14: 395-442.
- Yue D. K. P. (1980). Numerical theory of Stokes wave diffraction at grazing incidence, Se.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology.
- Yue D. K. P., H. S. Chen and C. C. Mei (1976). Water wave forces on three-dimensional bodies by a hybrid element method. Parsons Laboratory, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology Technical Report 215.
- Yue D. K. P., H. S. Chen and C. C. Mei (1978). A hybrid element method for diffraction of water waves by three-dimensional bodies. *Int. J. Num. Methods Engineering* 12: 245-266
- Yue D. K. P., and C. C. Mei (1980). Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge. *J. Fluid Mech.* 99: 33-52.
- Yuen H. C. and W. E. Ferguson, Jr. (1978a). Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrodinger equation. *Phys. Fluids* 21: 1275-1278.
- Yuen H. C. and W. E. Ferguson, Jr. (1978b) Fermi-Pasta-Ulam recurrence in the two space dimensional nonlinear Schrodinger equation. *Phys. Fluids* 21: 2116-18.
- Yuen H. C. and B. M. Lake (1975). *Nonlinear deep water waves: Theory and*

- experiment. *Phys. Fluids* 18: 956-960.
- Yuen H. C. and B. M. Lake (1980). Instabilities of waves on deep water. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 12: 303-334.
- Zabusky N. J. (1968). Solitons and bound states of the time independent Schrodinger equation. *Phys. Rev.* 168: 124-128.
- Zabusky N. J. and C. J. Galvin (1971). Shallow-waterwaves, the Korteweg-deVries equation and solitons. *J. Fluid Mech.* 47: 811-824.
- Zabusky N. J. and M. D. Kruskal (1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phy. Rev. Lett.* 15: 240.
- Zakharov V. E. (1968). Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2: 190-194.
- Zakharov V. E. and A. B. Shabat (1972). Exact theory of two-dimensional shelf-focusing and one-dimensional self modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP* 34: 62-69.
- Zakharov V. E. and A. B. Shabat (1973). Interaction between solitons in a stable medium. *Sov. Phys. JETP* 37: 823-828.
- Zenkovich V. (1967). *Processes of Coastal Development*. Oliver and Boyd, London.
- Zienkiewicz O. C. (1971). *Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill. New York.