TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA TOÁN - TIN HỌC

TẠ LÊ LỢI

GIẢI TÍCH 2

(Giáo Trình)

-- ***Lưu hành nội bộ*** --

Đà Lạt 2008

Hướng dẫn sinh viên đọc giáo trình

Đây là giáo trình **Giải tích 2** dành cho sinh viên ngành Toán hay ngành Toán Tin. Nội dung đề cập đến một số khái niệm cơ bản nhất về dãy và chuỗi hàm, không gian $\mathbf{R}^n$, tính liên tục, đạo hàm và tích phân Riemann của hàm nhiều biến thực. Để đọc được giáo trình này sinh viên cần có kiến thức căn bản của Giải tích 1 (phép tính vi tích phân hàm thực một biến thực) và Đại số tuyến tính (e.g. ánh xạ tuyến tính, ma trận, ..). Giáo trình được trình bày theo lối tuyến tính, vậy người đọc lần đầu nên đọc lần lượt từng phần theo thứ tự.

Để đọc một cách tích cực, sau các khái niệm và định lý sinh viên nên đọc kỹ các ví dụ, làm một số bài tập nêu liền đó. Ngoài ra học toán phải làm bài tập. Một số bài tập căn bản nhất của mỗi chương được nêu ở phần cuối của giáo trình.

Về nguyên tắc nên đọc mọi phần của giáo trình. Tuy vậy, có thể nêu ở đây một số điểm cần lưu ý ở từng chương:

I. Dãy hàm - Chuỗi hàm. Có thể bỏ qua tính hội tụ đều của chuỗi Fourier (mục 4.5).
II. Không gian $\mathbf{R}^n$. Tiết 5 là phần đọc thêm nên có thể bỏ qua.
III. Hàm liên tục trên $\mathbf{R}^n$. Có thể không đọc mục 3.4.
IV. Đạo hàm. Phần này sử dụng một số kiến thức về ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính.
V. Tích phân Riemann. Có thể bỏ qua các chứng minh: Tiêu chuẩn Darboux (mục 1.3) và Công thức đổi biến (mục 3.3) .

Để việc tự học có kết quả tốt sinh viên nên tham khảo thêm một số tài liệu khác có nội dung liên quan (đặc biệt là phần hướng dẫn giải các bài tập). Khó có thể nêu hết tài liệu nên tham khảo, ở đây chỉ đề nghị các tài liệu sau (bằng tiếng Việt):

[1] Jean-Marier Monier, *Giải tích 2* , NXB Giáo dục.
[2] Y.Y. Liasko, A.C. Bôiatruc, IA. G. Gai, G.P. Gôlôvac, *Giải tích toán học - Các ví dụ và các bài toán*, Tập II , NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp.

Ngoài ra, sinh viên nên tìm hiểu và sử dụng một số phần mềm máy tính hỗ trợ cho việc học và làm toán như Maple, Mathematica,...

Chúc các bạn thành công!

Giải Tích 2

Tạ Lê Lợi

Mục lục

I. Dãy hàm - Chuỗi hàm

Chương này ta sẽ xét đến dãy hàm và chuỗi hàm. Ngoài sự hội tụ điểm, một khái niệm quan trọng là tính hội tụ đều, nó bảo toàn một số tính chất giải tích của dãy hàm khi qua giới hạn. Đặc biệt sẽ nêu các kết quả cơ bản nhất của việc khai triển một hàm thành chuỗi lũy thừa (khai triển Taylor) hay chuỗi lượng giác (khai triển Fourier).

1. DÃY HÀM

1.1 Định nghĩa. Một **dãy hàm** trên X là một họ các hàm $f_n : X \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ký hiệu $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Với $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ là dãy số. Tập $D = \{x \in X :$ dãy số $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ hội tụ $\}$ gọi là **miền hội tụ** của dãy (f_n).
Khi đó, ta có $D \ni x \mapsto f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ xác định một hàm và ta nói (f_n) **hội tụ** (**điểm** hay **đơn giản**) về hàm f trên D.

Ví dụ.
a) Cho $f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{n}|x|$ $(n \in \mathbf{N})$, là dãy hàm trên $\mathbf{R}$. Dãy này hội tụ trên $\mathbf{R}$ về hàm $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \dfrac{1}{n}|x|) = 1, \forall x$.
b) Cho $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$, là dãy hàm trên $\mathbf{R}$. Miền hội tụ của dãy là $(-1, 1]$. Trên miền đó dãy hội tụ về hàm

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| < 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$$

Nhận xét. Ở ví dụ trên f_n liên tục (thậm chí khả vi), nhưng hàm giới hạn f không liên tục. Tốc độ hội tụ của $(f_n(x))$ với mỗi $x \in D$ là khác nhau.

Bài toán: Với điều kiện nào thì hàm giới hạn bảo toàn các tính chất giải tích như liên tục, khả vi, khả tích của dãy?

1.2 Sự hội tụ đều. Dãy hàm (f_n) gọi là **hội tụ đều về hàm** f **trên** D nếuu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại N, sao cho

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall x \in D$$

Nói một các khác: $\quad M_n = \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, khi $n \to \infty$.

Ví dụ. Trong cả hai ví dụ nêu trên, ta có $M_n = \sup|f_n(x) - f(x)| = 1$. Vậy các dãy hàm trên hội tụ không đều.

Mệnh đề. *Nếu* (f_n) *và* (g_n) *hội tụ đều về* f *và* g *trên* D*, thì* $(f_n + g_n)$ *và* (cf_n) *hội tụ đều về* $f + g$ *và* cf *trên* D*.*

1.3 Tiêu chuẩn Cauchy. *Dãy hàm* (f_n) *hội tụ đều trên* D *khi và chỉ khi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \ \Rightarrow \ \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Chứng minh: Gỉa sử (f_n) hội tụ đều về f trên D. Khi đó

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$$

Suy ra khi $m, n \geq N$, ta có

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in D} |f_m(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Gỉa sử ngược lại (f_n) thỏa tiêu chuẩn Cauchy trên D. Khi đó với mỗi $x \in D$, dãy số $(f_n(x))$ là dãy Cauchy, nên hội tụ về $f(x) \in \mathbf{R}$.
Hơn nữa, từ tiêu chuẩn trên, khi cho $m \to \infty$, rồi $\epsilon \to 0$, ta có $\sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, khi $n \to \infty$. Vậy (f_n) hội tụ đều về f trên D. $\square$

1.4 Mệnh đề.
(1) *Gỉa sử* (f_n) *là dãy hàm liên tục và hội tụ đều về* f *trên* D*. Khi đó* f *là hàm liên tục trên* D*. Đặc biệt, khi đó có thể chuyển thứ tự* $\lim$

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

(2) *Gỉa sử* (f_n) *là dãy hàm liên tục và hội tụ đều trên* $[a, b]$*. Khi đó có thể chuyển thứ tự* $\lim$ *và* $\int$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) dx$$

(3) *Cho* (f_n) *là dãy hàm khả vi liên tục trên* $[a, b]$*. Gỉa sử dãy đạo hàm* (f_n') *hội tụ đều trên* $[a, b]$ *và dãy số* $(f_n(c))$ *hội tụ với một* $c \in [a, b]$*. Khi đó* (f_n) *hội tụ đều về một hàm khả vi* f *trên* $[a, b]$ *và có thể chuyển thứ tự* $\lim$ *và đạo hàm*

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)'$$

Chứng minh: (1) Cho $x_0 \in D$. Với $\epsilon > 0$.
Do sự hội tụ đều, tồn tại N sao cho: $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon/3, \forall x \in D$.
Do f_N liên tục tại x_0, tồn tại $\delta > 0$, sao cho: $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon/3, \forall x, |x - x_0| < \delta$.
Vậy khi $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

Vậy f liên tục tại x_0, i.e. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$

(2) Gỉa sử f_n liên tục và hội tụ đều. Theo (1) hàm giới hạn f là liên tục nên khả tích trên $[a,b]$. Hơn nữa

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| \to 0, \text{ khi } n\to\infty$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

(3) Đặt $F_n(x) = \int_c^x f_n'$. Theo (2) dãy (F_n) hội tụ đều về hàm F trên $[a,b]$, trong đó $F(x) = \int_c^x \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.

Ta có $F_n(x) = f_n(x) - f_n(c)$. Suy ra $f_n = F_n + f_n(c)$ hội tụ đều trên $[a,b]$ về $f = F + \lim\limits_{n\to\infty} f_n(c)$. Hơn nữa, ta có

$$f'(x) = F'(x) = \left(\lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n'\right)' = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x)$$

□

2. CHUỖI HÀM

2.1 Định nghĩa. Một **chuỗi hàm trên** X là tổng hình thức

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n + \cdots$$

trong đó f_k là hàm xác định trên X.

Xét chuỗi tương đương với xét **dãy hàm tổng riêng thứ** n: $S_n = f_0 + \cdots + f_n$.

Miền hội tụ của chuỗi: $D = \{x \in X : \text{dãy hàm } (S_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \text{ hội tụ }\}$.

Khi đó $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ xác định một hàm trên D.

Ta nói $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ là **chuỗi hàm hội tụ đều trên** D nếuu dãy hàm tổng riêng $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là hội tụ đều về S trên D, i.e.

$$M_n = \sup_{x\in D}|S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in D}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \to 0, \text{ khi } n\to\infty$$

Ví dụ. Xét chuỗi hàm $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$.

Miền hội tụ của chuỗi là $D = \{x \in \mathbf{R} : |x| < 1\}$.

Chuỗi là hội tụ đều về $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ trên miền $D_r = \{x : |x| \leq r\}$, với $0 < r < 1$.

Thật vậy, ta có $S_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ nên

$$\sup_{|xleqr} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{|x|\leq r}\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0, \text{ khi } n\to\infty$$

Tuy nhiên chuỗi không hội tụ đều trên D, vì $\sup\limits_{|x|\leq 1} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$

2.2 Tiêu chuẩn Cauchy. *Chuỗi hàm* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *hội tụ đều trên* D *khi và chỉ khi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \ \Rightarrow \ \sup_{x \in D} |\sum_{k=n}^{m} f_k(x)| < \epsilon$$

2.3 Mệnh đề. *Gỉa sử chuỗi hàm* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *hội tụ đều trên* $[a, b]$. *Khi đó*

(1) *Nếu* f_k *liên tục trên* $[a, b]$ *với mọi* $k \in \mathbf{N}$, *thì chuỗi trên xác định một hàm liên tục trên* $[a, b]$. *Đặc biệt khi đó có thể chuyển* $\lim$ *vào dấu* $\sum$

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x)$$

(2) *Nếu* f_k *liên tục trên* $[a, b]$, *thì có thể chuyển* $\int$ *vào dấu* $\sum$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

(3) *Nếu* f_k *khả vi liên tục trên* $[a, b]$ *và chuỗi* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f'_k$ *hội tụ đều trên* $[a, b]$, *thì* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *là một hàm khả vi trên* $[a, b]$ *và có thể lấy đạo hàm vào dấu* $\sum$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$$

2.4 Một số dấu hiệu hội tụ đều cho chuỗi hàm.

Weierstrass M-test: *Nếu* $|f_k(x)| \leq a_k, \forall x \in D$ *và* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ, thì* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ *hội tụ đều trên* D.

Dirichlet: *Nếu* (f_k) *dãy giảm, hội tụ đều về* 0 *và* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k$ *là chuỗi hàm có dãy tổng riêng bị chặn trên* D, *thì* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k$ *hội tụ đều trên* D.

Abel: *Nếu* (f_n) *là dãy đơn điệu bị chặn và* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k$ *hội tụ đều trên* D, *thì* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k$ *hội tụ.*

Chứng minh: Nếu $|f_k(x)| \leq a_k$, thì $\sum\limits_{k=n}^{m} |f(x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{m} a_k$. Theo tiêu chuẩn Cauchy chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ hội tụ đều.

Hai tiêu chuẩn sau chứng minh như phần chuỗi số (Bài tập). $\square$

3. CHUỖI LŨY THỪA

Phần này chúng ta nghiên cứu **chuỗi lũy thừa** là chuỗi hàm dạng $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, hay tổng quát hơn chuỗi lũy thừa tâm tại x_0, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Nhận xét. Khi thay biến $z = x - x_0$ ta đưa chuỗi lũy thừa tâm tại x_0 về dạng chuỗi lũy thừa.

3.1 Định lý Abel. *Cho chuỗi* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$. *Khi đó tồn tại* $R, 0 \leq R \leq +\infty$, *sao cho, nếu* $R > 0$, *thì*
(1) $S(x)$ *hội tụ trên khi* $|x - x_0| < R$, *phân kỳ khi* $|x - x_0| > R$.
(2) S *hội tụ đều trên* $D_r = \{x : |x - x_0| \leq r\}$, *với mọi* $0 < r < R$.
Số R *gọi là* **bán kính hội tụ của** S *và được tính bởi* **công thức Cauchy-Hadamard**

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Chứng minh: Như nhận xét ở trên tịnh tiến từ x_0 về 0 bằng đổi biến $z = x - x_0$.
Khi $|z| \leq r < R$. Chọn $\rho : r < \rho < R$. Theo định nghĩa $\limsup$, tồn tại k_0 sao cho: $|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{\rho}$, $\forall k > k_0$. Suy ra $|a_k z^k| < \left(\frac{r}{\rho}\right)^k$. Theo M-test $S(z)$ hội tụ đều trên đĩa D_r. Từ đây cũng suy ra $S(z)$ hội tụ khi $|z| < R$.
Khi $|z| > R$. Chọn $\rho : R < \rho < |z|$. Theo định nghĩa $\limsup$, tồn tại vô số chỉ số k: $|a_k|^{\frac{1}{k}} > \frac{1}{\rho}$. Vậy $|a_k z^k| > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^k$ với vô số chỉ số k. Suy ra $a_k z^k \not\to 0$, nên theo điều kiện cần $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ phân kỳ. □

Nhận xét. Do nhận xét ở phần chuỗi số, có thể dùng **công thức D'Alembert** để tính bán kính hội tụ (nếu giới hạn tồn tại):

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

Ví dụ.
a) Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ có bán kính hội tụ là $R = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0$.
b) Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ có bán kính hội tụ là ∞.
c) Định lý Abel không cho kết luận về sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi khi $|x - x_0| = R$. Chẳng hạn các chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ đều có bán kính hội tụ là 1, nhưng tính

hội tụ khi $|x| = 1$ khác nhau.

Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ phân kỳ khi $x = \pm 1$, theo điều kiện cần.

Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ hội tụ khi $|x| = 1$, theo tiêu chuẩn so sánh.

Chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ phân kỳ khi $x = 1$, nhng hội tụ khi $x = -1$ theo tiêu chuẩn Leibniz.

3.2 Mệnh đề. *Gỉa sử chuỗi lũy thừa* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *có bán kính hội tụ* $R > 0$. *Khi đó* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *xác định hàm khả vi mọi cấp trên* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *và ta có thể lấy đạo hàm và tích phân vào dấu tổng:*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right)' &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \\
\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C
\end{aligned}$$

Chứng minh: Suy từ Định ký Abel và các kết qủa từ tính hội tụ đều của chuỗi hàm. □

Ví dụ.

a) Ta có $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \ |x| < 1$.

Đạo hàm từng từ ta có $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^{k-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ |x| < 1$.

Tích phân từng từ ta có $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x), \ |x| < 1$.

b) Ta có khai triển

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \ |x| < 1$$

Tích phân từng từ ta có

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \ |x| < 1$$

Bài tập: Áp dụng dấu hiệu Abel cho sự hội tụ đều của chuỗi với $f_k(x) = x^k$ và $\varphi_k(x) = a_k$ chứng minh **Định lý Abel** sau đây:

Nếu chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *hội tụ và có tổng* S, *thì* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *hội tụ khi* $|x| < 1$ *và* $\lim_{x \to 1^-} S(x) = S$.

c) Dễ thấy các chuỗi cuối ở hai ví dụ trên thỏa định lý Abel, suy ra ta có công thức tính gần đúng

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_n$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R_n$$

Bài tập: Chứng minh sai số R_n ở hai công thức trên là $O(\frac{1}{n})$.

Hệ qủa. *Nếu hàm f có thể biểu diễn thành chuỗi lũy thừa tại lân cận x_0, i.e. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, thì biểu diễn đó là duy nhất. Cụ thể*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Chứng minh: Qui nạp mệnh đề trên, với mọi $n \in \mathbf{N}$ và x ờ lân cận x_0, ta có

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right)^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n}$$

Cho $x = x_0$ ta có công thức trên. $\square$

3.3 Chuỗi Taylor. Cho f là hàm khả vi vô hạn ở một lân cận x_0. Khi đó **chuỗi Taylor của f tại x_0** được ký hiệu và định nghĩa

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad \text{trong đó} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Bài toán là khi nào thì $Tf(x) = f(x)$?

Có 3 khả năng xảy ra:

(1) $Tf(x)$ không hội tụ. Ví dụ chuỗi Taylor hàm $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 2^k x}{k!}$.

(2) $Tf(x)$ hội tụ nhưng $Tf(x) \neq f(x)$. Ví dụ hàm $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, khi $x \neq 0$, $f(0) = 0$, là hàm khả vi vô hạn và $f^{(k)}(0) = 0, \forall k$. Vậy $Tf(x) \equiv 0 \neq f(x)$.

(3) $Tf(x) = f(x), |x - x_0| < R$. Khi đó ta nói f là **hàm giải tích** trên $D = \{x : |x - x_0| < R\}$.

Mệnh đề. *Nếu f là hàm khả vi vô hạn và tồn tại C sao cho $|f^{(k)}(x)| \leq C, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, thì f là hàm giải tích trên khoảng đó.*

Chứng minh: Theo công thức Taylor, với mỗi $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$, tồn tại $\theta \in (0, 1)$, sao cho

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta R)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq \frac{CR^{n+1}}{(n+1)!}$$

Vế phải tiến về 0, khi $n \to \infty$, nên ta có $f(x) = Tf(x)$. □

3.4 Chuỗi Taylor của một số hàm. Từ khai triển Taylor và bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa ta có

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^+ \cdots + x^n + \cdots\ , && |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}xan + \cdots\ , && |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, && |x| < 1
\end{aligned}$$

Ví dụ. Dựa vào các chuỗi trên có thể biểu diễn thành chuỗi lũy thừa các hàm khác:
a) Hàm $\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ không là hàm sơ cấp. Để biểu diễn hàm này dưới dạng chuỗi lũy thừa ta dựa vào biểu diễn của e^x với $x = -t^2$:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2!}t^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} + \cdots$$

Tích phân từng từ ta có

$$\operatorname{erf}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2!5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}x^{2k+1} \quad x \in \mathbf{R}$$

b) Hàm $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ cũng không là hàm sơ cấp. Từ biểu diễn của hàm $\sin x$ ta có

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x (1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t62n + \cdots)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)}x^{2n+1}$$

Ví dụ. Công thức sau cho tính xấp xỉ $\ln 2$ với tốc độ nhanh hơn công thức ở ví dụ mục 4.3. Từ biểu diễn $\ln(1+x)$ suy ra

$$\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots\ , |x| < 1$$

Lấy $\ln(1+x) - \ln(1-x)$ ta có

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots),\ |x| < 1$$

Thay $x = \frac{1}{3}$,ta có

$$\ln 2 = 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}) + R_n$$

Trong đó sai số

$$R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}} < \frac{1}{3(2n+3)} \sum_{k>n} \frac{1}{9^k} = \frac{1}{3(2n+1)} \frac{(1/9)^n}{1-1/9} = o(\frac{1}{9^n})$$

4. CHUỖI LƯỢNG GIÁC

Có nhiều bài toán liên quan đến hàm tuần hoàn. Phần này ta xét đến việc biểu diễn hàm tuần hoàn dưới dạng chuỗi. Vì hàm sin và hàm cos là tuần hoàn, nên biểu diễn qua chúng tự nhiên và thuận tiện hơn qua hàm lũy thừa.

Một **chuỗi lượng giác** là chuỗi hàm dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Nhận xét. Khi hàm f có chu kỳ T, hàm $\varphi(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ có chu kỳ 2π. Như vậy, ta chỉ cần xét hàm có chu kỳ 2π, rồi sau đó đổi biến.

4.1 Tính trực giao. Trên không gian các hàm liên tục trên $[-\pi, \pi]$, ta định nghĩa **tích vô hướng** : $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \;\; f, g \in C[-\pi, \pi]$.

Khi đó hệ các hàm lượng giác $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ là hệ hàm **trực giao** theo nghĩa tích vô hướng của 2 hàm bất kỳ của hệ bằng 0. Cụ thể

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx &= 0 \qquad k \neq l \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx &= 0 \qquad k \neq l \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx &= 0 \qquad \forall k, l
\end{aligned}$$

Ngoài ra, ta có

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad \text{và} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi \qquad k = 1, 2, \cdots$$

4.2 Hệ số Fourier. Gỉa sử hàm f có thể biểu diễn thành chuỗi lượng giác

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \;\; x \in [-\pi, \pi]$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
f(x)\cos lx &= \frac{a_0}{2} \cos lx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cos lx + b_k \sin kx \cos lx) \\
f(x)\sin lx &= \frac{a_0}{2} \sin lx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \sin lx + b_k \sin kx \sin lx)
\end{aligned}$$

Lấy tích phân hình thức vào dấu tổng, từ tính trực giao nêu trên, ta có

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \qquad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

Các hệ số trên gọi là **hệ số Fourier của hàm** f.

4.3 Chuỗi Fourier. Cho f là hàm khả tích trên $[-\pi, \pi]$. Khi đó chuỗi lượng giác sau gọi là **chuỗi Fourier của** f

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trong đó a_k, b_k là hệ số Fourier của f được cho bởi công thức ở phần trên.

Nhận xét.

• Nếu f là hàm chẵn, i.e. $f(-x) = f(x)$, thì $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ nên $b_k = 0$, i.e. $Ff(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$.

• Nếu f là hàm lẻ, i.e. $f(-x) = -f(x)$, thì $f(x)\cos kx$ là hàm lẻ nên $a_k = 0$, i.e. $Ff(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

• Tính tuyến tính: $F(af + bg) = aFf + bFg$, với f, g là các hàm khả tích và $a, b \in \mathbf{R}$.

Ví dụ.

Hàm $f(x)$, $\lvert x\rvert \leq \pi$	Chuỗi Fourier $Ff(x)$
$\operatorname{sign} x$	$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$
x	$2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$
x^2	$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$
$Ax^2 + Bx + C$	$A\frac{\pi^2}{3} + C + 4A\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2} + 2B\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$

Bài toán đặt ra là khi nào $Ff(x) = f(x)$?

Cũng như chuỗi Taylor, ta cũng có 3 khả năng:
(1) $Ff(x)$ không hội tụ. Người ta đã xây dựng ví dụ hàm liên tục có chu kỳ 2π mà chuỗi Fourier không hội tụ tại một điểm.
(2) $Ff(x)$ hội tụ nhưng $Ff(x) \neq f(x)$. Định lý về hội tụ điểm sau sẽ thấy điều đó.
(3) $Ff(x) = f(x)$.

Phần sau đây ta sẽ xét các điều kiện để $Ff(x) = f(x)$. Hơn nữa, xét điều kiện để sự hội tụ là hội tụ đều.

4.4 Hội tụ điểm. Ký hiệu tổng riêng thứ n của chuỗi Fourier của f:

$$F_nf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Công thức cho tổng riêng F_nf. Để đánh giá sự hội tụ ta biến đổi

$$\begin{aligned}
F_nf(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)(\cos ku \cos kx + \sin ku \sin kx)du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]du
\end{aligned}$$

Để ý nếu g có chu kỳ T, thì $\displaystyle\int_a^{a+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt$. Áp dụng cho hàm lấy tích phân ở trên (sau khi đổi biến $t = u - x$) với $T = 2\pi$ và $a = -\pi - x$, ta có

$$F_nf(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$$

trong đó $D_n(t) = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]$ gọi là **nhân Dirac**.
Từ $2\sin\dfrac{t}{2}\cos kt = \sin(k+\dfrac{1}{2})t - \sin(k-\dfrac{1}{2})t$, thay vào tổng

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$$

Dễ thấy D_n là hàm chẵn, có chu kỳ 2π, và

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$$

Bổ đề Riemann. *Gỉa sử g là hàm khả tích Riemann trên $[a,b]$. Khi đó*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin\lambda t dt = 0$$

Chứng minh: Trường hợp g khả vi liên tục:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt = \left.\frac{g(t)\sin\lambda t}{\lambda}\right|_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\sin\lambda t dt$$

Do g' bị chặn nên biểu thức trên $\to 0$, khi $\lambda\to+\infty$.
Trường hợp g khả vi liên tục từng khúc: ta áp dụng chứng minh trên cho mỗi đoạn mà g' liên tục.
Trường hợp g khả tích: từ định nghĩa tích phân với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại hàm bậc thang s sao cho

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g-s| < \epsilon$$

Khi đó

$$\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt = \int_a^b (g(t)-s(t))\cos\lambda t dt + \int_a^b s(t)\cos\lambda t dt$$

Áp dụng kết qủa trên cho s, do $|\cos\lambda x|\leq 1$, ta có

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt\right| \leq \int_a^b |g(t)-s(t)|dt < \epsilon$$

Vậy $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt = 0$. Giới hạn thứ hai chứng minh tương tự. □

Hàm f gọi là **liên tục từng khúc** trên $[a,b]$ nếuu tồn tại hữu hạn điểm:
$a=a_0<a_1<\cdots<a_s=b$, sao cho f liên tục trên mỗi khoảng (a_{i-1},a_i) và tồn tại $\displaystyle\lim_{x\to a_i^+} f(x) = f(a_i^+)$, $\displaystyle\lim_{x\to a_i^-} f(x) = f(a_i^-)$, $i=0,\cdots,s$.
Khi đó đạo hàm phải và trái của f tại x, được ký hiệu và định nghĩa

$$f'_+(x) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x6+)}{t}, \qquad f'_-(x) = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x^-)}{t},$$

nếu giới hạn vế phải tồn tại.

Ví dụ.
Hàm $f(x)=|x|$, không khả vi tại 0, nhưng $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$.
Hàm $f(x)=\text{sign } x$, không liên tục tại 0, nhưng liên tục từng khúc với $f(0^+)=1, f(0^-)=-1$, còn $f'(0_+)=f'_-(0)=0$.

Định lý. *Gỉa sử hàm f có chu kỳ 2π, liên tục từng khúc trên $[-\pi,\pi]$ và $f'_+(x), f'_-(x)$ tồn tại hữu hạn. Khi đó $F_nf(x)$ hội tụ về giá trị trung bình cộng của f tại x, i.e.*

$$Ff(x) = \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$$

Đặc biệt, nếu f khả vi liên tục tại x, thì $Ff(x)=f(x)$

Chứng minh: Để cho gọn ký hiệu $A_f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Từ tính chất của D_n, ta có

$$\begin{aligned} F_nf(x) - A_f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - A_f(x))D_n(t)dt \\ &= 2\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A_f(x)\right]D_n(t)dt \\ &= 2\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt \end{aligned}$$

trong đó $g(t) = \dfrac{f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)}{t}\dfrac{t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$.

Do $f'_+(x), f'_-(x)$ tồn tại hữu hạn, $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = \dfrac{1}{\pi}(f'_+(x) - f'_-(x))$. Vậy g là hàm liên tục từng khúc (nên khả tích). Từ bổ đề Riemann, tích phân cuối tiến về 0 khi $n\to\infty$, i.e. $F_nf(x)\to A_f(x)$, khi $n\to\infty$. □

Ví dụ. Từ định lý trên và ví dụ ở mục 5. 3, ta có

a) $\operatorname{sign} x = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi}{2k+1}$, với $0<|x|<\pi$.

Khi $x = 0, -\pi, \pi$ chuỗi vế phải nhận gía trị $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sign}(x^+) + \operatorname{sign}(x^-)) = 0$.

Khi cho $x = \pi/2$, ta có $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

b) $1 - \dfrac{x^2}{\pi^2} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}$, với $|x|\le\pi$.

Để ý hàm vế trái nhận giá trị như nhau tại $x=\pm\pi$, nên có cùng trung bình cọng tại đó.

Khi cho $x = \pi$, ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Khi cho $x = 0$, ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Suy ra $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\right) = \frac{\pi^2}{8}$.

4.5 Hội tụ đều.

Bất dẳng thức Bessel. *Nếu f^2 khả tích trên $[\pi,\pi]$, thì*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Đặc biệt, chuỗi vế trái là chuỗi hội tụ. Chứng minh: Do tính trực giao nêu ở 5.1, tính tích phân ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - F_nf(x))F_nf(x)dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi}(F_nf(x))^2dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F_nf(x)+F_nf(x))^2dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F_nf(x))^2dx+\int_{-\pi}^{\pi}(F_nf(x))^2dx+2\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-F_nf(x))F_nf(x)dx\\ &= \int_{-\pi} 6\pi(f(x)-F_nf(x))^2dx+\pi(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2))\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leq\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$

Cho $n\to+\infty$ ta có bất dẳng thức cần tìm. Do chuỗi có số hạng dương nên tính bị chặn tương đương tính hội tụ. □

Định lý. *Giả sử hàm f có chu kỳ 2π, liên tục và f' liên tục từng khúc trên $[-\pi,\pi]$. Khi đó chuỗi Ff hội tụ đều về f trên $\mathbf{R}$.*

Chứng minh: Do định lý trên ta có $F_nf(x)$ hội tụ về $f(x)$. Ta chứng minh sự hội tụ đều theo M-test. Gọi a'_k, b'_k là các hệ số Fourier của f'. Tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx &= \frac{1}{\pi}\left(f(x)\frac{\sin kx}{k}|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kxdx\right)=-\frac{1}{k}b'_k\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx &= \frac{1}{\pi}\left(-f(x)\frac{\cos kx}{k}|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kxdx\right)=\frac{1}{k}a'_k\end{aligned}$$

Suy ra

$$|a_k\cos kx+b_k\sin kx|\leq|a_k|+|b_k|\leq\frac{1}{2}(b'^2_k+\frac{1}{k^2})+\frac{1}{2}(a'^2_k+\frac{1}{k^2})$$

Từ bất đẳng thức Bessel $\sum_{k=0}^{\infty}(a'^2_k+b'^2_k)$ hội tụ, và $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ hội tụ. Vậy chuỗi Ff hội tụ đều theo M-test. □

4.6 Khai triển Fourier.

• **Khai triển hàm $f(x)$ có chu kỳ T thành chuỗi hàm lượng giác**: Đổi biến $x=\dfrac{T}{2\pi}X$. Khi đó $f(x)=f(\dfrac{T}{2\pi}X)$ là hàm có chu kỳ 2π theo biến X. Chuỗi Fourier theo biến X có dạng

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\ a_k\cos kX+\ b_k\sin kX\ )$$

trong đó

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}X)\cos kXdX,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{T}{2\pi}X)\sin kXdX$$

Thay lại $X = \dfrac{2\pi}{T}x$, ta có chuỗi lượng giác dạng

$$\frac{a_0}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(\, a_k \cos\frac{2k\pi}{T}x \;+\; b_k \sin\frac{2k\pi}{T}x \,\right)$$

trong đó các hệ số Fourier của f là

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2k\pi}{T}tdt, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2k\pi}{T}tdt, \qquad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

• **Khai triển hàm** f **xác định trên** $[a, b]$ **thành chuỗi lượng giác**: Trước hết **thác triển** f thành hàm tuần hoàn $\tilde{f}$ xác định trên $\mathbf{R}$ và có chu kỳ $T \geq b - a$, i.e.

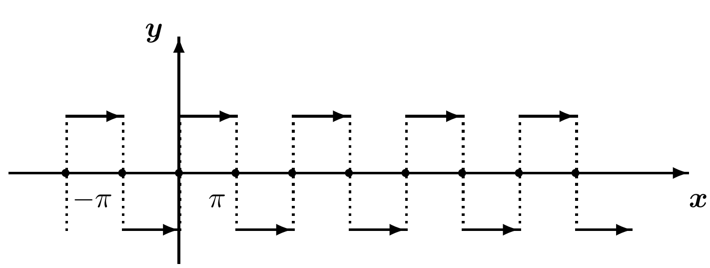
$$\tilde{f}(x + kT) = f(x), \; x \in [a, b], k \in \mathbf{Z}$$

Sau đó khai triển $\tilde{f}$ như cách đã nêu ở trên.

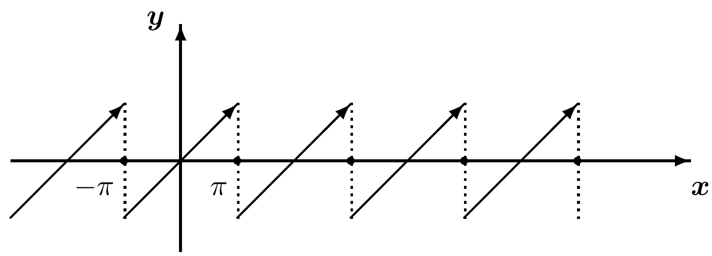
• **Khai triển chuỗi theo** $\cos$ **hay theo** $\sin$: Cho f xác định trên $[0, l]$. Khi đó:
- Muốn biểu diễn $f(x)$ dưới dạng chuỗi lượng giác chỉ có hàm $\cos$, ta thác triển f thành hàm chẵn trên $(-l, l]$ bằng cách xem $f(x) = f(-x)$, nếu $x \in (-l, 0)$. Sau đó khai triển Fourier hàm thác triển đó.
- Muốn biểu diễn $f(x)$ dưới dạng chuỗi lượng giác chỉ có hàm $\sin$, ta thác triển f thành hàm lẻ trên $(-l, l]$ bằng cách xem $f(x) = -f(-x)$, nếu $x \in (-l, 0)$. Sau đó khai triển Fourier hàm thác triển đó.

Ví dụ. Khai triển Fourier các hàm xác định trên $[-\pi, \pi]$, chu kỳ 2π:

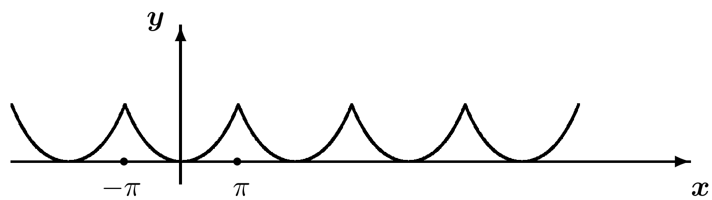
a) Khai triển hàm $f(x) = \mathrm{sign}x, \; x \in [-\pi, \pi]$: $Ff(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$



b) Khai triển hàm $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi]$: $Ff(x) = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$

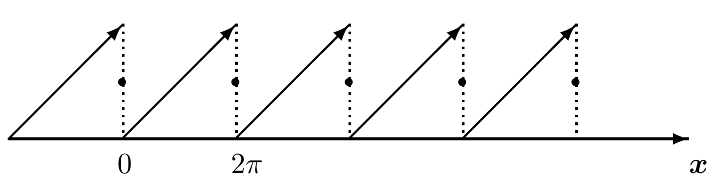


c) Khai triển hàm $f(x) = x^2, x \in [-\pi, \pi]$: $Ff(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \dfrac{\cos kx}{k^2}$

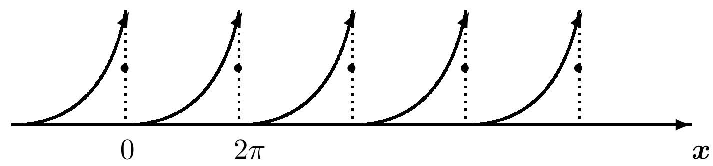


Ví dụ. Khai triển Fourier các hàm xác định trên $[0, 2\pi]$, chu kỳ 2π:

Hàm $f(x)$, $0 \le x < 2\pi$	Khai triển Fourier $Ff(x)$
x	$\pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$
x^2	$\dfrac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^2} - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}$
$Ax^2 + Bx + C$	$A\dfrac{4}{3}\pi^2 + B\pi + C + 4A\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^2} - (4\pi A - 2B)\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}$



$Ff(x) = x, 0 < x < 2\pi$

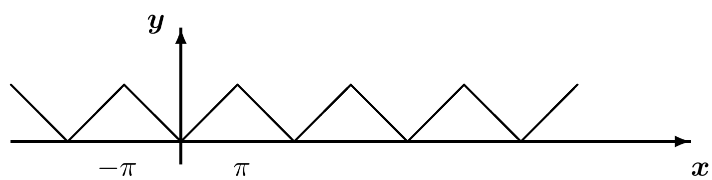


$Ff(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$

Nhận xét. Các hàm có cùng biểu thức $f(x)$ nhưng xác định trên các miền khác nhau hay chọn chu kỳ khác nhau, thì các hàm thác triển nói chung khác nhau. Chẳng hạn, thác triển của $f(x) = x, x \in [-\pi, \pi]$ và $f(x) = x, x \in [0, 2\pi]$ (với cùng chu kỳ 2π) là khác nhau. Vì vậy khai triển Fourier của chúng nói chung là khác nhau.

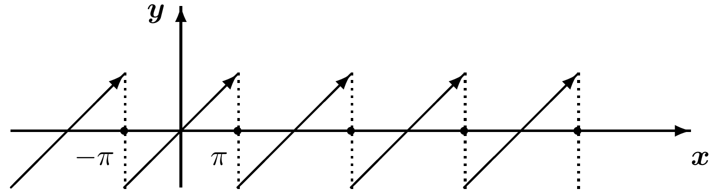
Ví dụ. Cho $f(x) = x,\ x \in [0, \pi]$.
a) Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi lượng giác chỉ có $\cos$. Thác triển f thành hàm chẵn, i.e. $f(x) = |x|,\ x \in [-\pi, \pi]$. Khai triển Fourier và do hàm f thỏa điều kiện của định lý về hội tụ ta có

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\ , \quad -\pi \le x \le \pi$$



b) Muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi lượng giác chỉ có $\sin$. Thác triển f thành hàm lẻ, i.e. $f(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi]$. Khai triển Fourier và do hàm f thỏa điều kiện của định lý về hội tụ ta có

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}\ , \quad -\pi < x < \pi$$



Ví dụ. Từ các ví dụ trên và tính hội tụ điểm, ta có các giá trị tổng

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} &= \frac{\pi - x}{2} && \text{với } 0 < x < 2\pi \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} &= \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi 62}{12} && \text{với } 0 < x < 2\pi \\
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} &= \frac{x}{2} && \text{với } |x| < \pi \\
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\cos kx}{k^2} &= \frac{\pi^2 - 3x^2}{12} && \text{với } |x| < \pi
\end{aligned}$$

Từ các công thức trên suy ra

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} &= \frac{\pi}{4} && \text{với } 0 < x < \pi \\
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} &= \frac{\pi^2 - 2\pi x}{8} && \text{với } 0 < x < 2\pi \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k} &= \frac{\pi - 2x}{4} && \text{với } 0 < x < \pi \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2} &= \frac{6x^2 - 6\pi x + \pi^2}{24} && \text{với } 0 < x < 2\pi
\end{aligned}$$

Với các gía trị x cụ thể các công thức trên suy ra

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

II. Không gian R^n

1. KHÔNG GIAN EUCLID R^n

1.1 Không gian vector $\mathbf{R}^n$. Trong $\mathbf{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \cdots, n\}$ có trang bị 2 phép toán:

$$x + y = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Với 2 phép toán trên $\mathbf{R}^n$ là không gian vector n-chiều trên $\mathbf{R}$.
Ta thường dùng cơ sở chính tắc: $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, \cdots, 0, 1)$.
Vậy $x = (x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Ta cũng ký hiệu vector không là $0 = (0, \cdots, 0)$.
Ngoài cấu trúc đại số, $\mathbf{R}^n$ còn có cấu trúc hình học xác định bởi tích vô hướng Euclid:

1.2 Tích vô hướng-Chuẩn-Metric. Cho $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

Tích vô hướng: $< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.
Chuẩn: $\|x\| = \sqrt{< x, x >} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
Metric: $d(x, y) = \|x - y\| = \{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Sau đây là các tính chất cơ bản của các ánh xạ trên:

Tính chất. *Cho $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ và $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.*
Tính chất của tích vô hướng:
$(S1)$ $< \alpha x + \beta y, z > \ = \ \alpha < x, y > + \beta < x, z >$.
$(S2)$ $< x, y > \ = \ < y, x >$.
$(S3)$ $< x, x > \ \geq \ 0$, *và* $< x, x >= 0$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.
Tính chất của chuẩn:
$(N1)$ $\|x\| \geq 0$, *và* $\|x\| = 0$ *khi và chỉ khi* $x = 0$.
$(N2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Tính chất của metric:
$(M1)$ $d(x, y) \geq 0$, *và* $d(x, y) = 0$ *khi và chỉ khi* $x = y$.
$(M2)$ $d(x, y) = d(y, x)$.
$(M3)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Chứng minh: Trước hết ta chứng minh **bất đẳng thức tam giác** $(N3)$.
Ta có **bất đẳng thức Cauchy-Schwarz**: $| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$.
Thực vậy, tam thức bậc 2: $\|tx + y\|^2 = \|x\|^2t^2 + 2 < x, y > t + \|y\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$.
Suy ra $\Delta =< x, y >^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \geq 0$, i.e. bất đẳng thức trên đúng.

Vậy $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$,
i.e ta có bất đẳng thức $(N3)$.
$(N3)$ suy ra $(M3)$. Còn các tính chất khác là rõ ràng. □

Bài tập: Chứng minh $| < x, y > | = \|x\|\|y\|$ khi và chỉ khi x, y tỉ lệ nhau.
Bài tập: Hãy chứng minh bất đẳng thức đáng chú ý sau:

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \ \leq\ \|x\| \ \leq\ \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

1.3 Tính đủ của $\mathbf{R}^n$.
Một dãy trong $X \subset \mathbf{R}^n$ là ánh xạ $x : \mathbf{N} \longrightarrow X$, $x(k) = x_k = (x_{k,1}, \cdots, x_{k,n})$.
Thường ký hiệu dãy bởi $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ hay ngắn gọn (x_k).
Dãy (x_k) gọi là **hội tụ về** $a \in \mathbf{R}^n$, ký hiệu $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, hay $x_k \to a$, nếuu[1]

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N : k \geq N \Longrightarrow\ d(x_k, a) < \epsilon.$$

Bài tập: Từ bất đẳng thức tam giác chứng minh giới hạn của dãy nếu có là duy nhất.
Từ bất đẳng thức ở bài tập mục 1.2, ta có nguyên lý đưa về một chiều:

Mệnh đề. *Cho dãy (x_k) và $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Khi đó*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \lim_{k\to\infty} x_{k,i} = a_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

Bài tập: Tính $\lim\limits_{k\to\infty} x_k$, trong đó

$$x_k = \left(\frac{1}{k^p},\ \frac{k^{100}}{e^k},\ \frac{\ln k}{k^p},\ \sqrt[k]{2},\ \sqrt[k]{k^p},\ \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\right) \qquad (p > 0).$$

Bài tập: Từ mệnh đề trên hãy phát biểu và chứng minh các tính chất hội tụ của dãy tổng, hiệu, tích vô hướng, chuẩn, ... của các dãy hội tụ.

Dãy (x_k) gọi là **dãy Cauchy** hay **dãy cơ bản** nếuu

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N : k, l \geq N \Longrightarrow\ d(x_k, x_l) < \epsilon.$$

Mệnh đề. *Một dãy trong $\mathbf{R}^n$ là hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Chứng minh: Trước hết nhắc lại là một dãy số trong $\mathbf{R}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy sau đó áp dụng mệnh đề trên suy ra kết qủa. □

[1] Trong giáo trình này qui ước: **nếuu = nếu và chỉ nếu** .

2. TOPO TRONG $\mathbf{R}^n$

2.1 Hình cầu. Cho $a \in \mathbf{R}^n$ và $r > 0$.
Hình cầu mở tâm a bán kính r, định nghĩa: $B(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x,a) < r\}$.
Hình cầu đóng tâm a bán kính r, định nghĩa: $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x,a) \leq r\}$.
Vậy hình cầu là khái quát hóa khái niệm khoảng, đĩa tròn, hình cầu trong không gian $1, 2, 3$ chiều tương ứng.
Cho $X \subset \mathbf{R}^n$ và $a \in \mathbf{R}^n$. Khi đó
a gọi là **điểm trong** của X nếuu $\exists r > 0 : B(a,r) \subset X$.
a gọi là **điểm biên** của X nếuu $\forall r > 0 : B(a,r) \cap X \neq \emptyset, B(a,r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.
Ví dụ. Đoạn $[\alpha, \beta]$ trong $\mathbf{R}$ có các điểm trong là x sao cho $\alpha < x < \beta$, hai điểm biên là α, β.
Bài tập: Xác định biên của tập $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$.

2.2 Tập mở. Tập $X \subset \mathbf{R}^n$ gọi là tập **mở** nếuu mọi điểm của X là điểm trong, i.e. $\forall a \in X, \exists r > 0 : B(a,r) \subset X$.
Ký hiệu $\operatorname{int} X$ hay $\overset{o}{X}$ = Tập mọi điểm trong của X, và gọi là **phần trong** của X.
Nhận xét. Rõ ràng, X mở khi và chỉ khi $X = \overset{o}{X}$.
Bài tập: Chứng minh khoảng mở trong $\mathbf{R}$, hình cầu mở là các tập mở. Tìm ví dụ tập không mở.

Mệnh đề. (i) *$\emptyset$ và $\mathbf{R}^n$ là các tập mở* (ii) *Hợp một họ tập mở là mở*
(iii) *Giao hữu hạn tập mở là mở.*

Chứng minh: (i) là rõ ràng. (ii) Giả sử $U_i, i \in I$ là các tập mở. Cho $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Khi đó tồn tại $i_0 \in I, x \in U_{i_0}$. Do tính mở, tồn tại cầu $B(x,r) \subset U_{i_0}$ $(\subset U)$. Vậy x là điểm trong của U, nên U mở. (iii) đợc chứng minh tương tự. $\square$

Nhận xét. Giao vô hạn tập mở nói chung không mở. Chẳng hạn, $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$.

2.3 Tập đóng. Tập con $X \subset \mathbf{R}^n$ gọi là **đóng** nếuu phần bù $\mathbf{R}^n \setminus X$ là mở.
Ví dụ. Các tập hữu hạn, các tập rời rạc như $\mathbf{Z}$, khoảng đóng $[a,b]$, hình cầu đóng là các tập đóng. Khoảng mở hay $\mathbf{Q}$ không là tập đóng. (tại sao?)
Từ Mệnh đề trên và qui tắc De Morgan suy ra

Mệnh đề. (i) *$\emptyset$ và $\mathbf{R}^n$ là các tập đóng* (ii) *Giao một họ tập đóng là đóng*
(iii) *Hợp hữu hạn tập đóng là đóng.*

Để hiểu các đặc trưng khác của tập đóng ta cần khái niệm:
$a \in \mathbf{R}^n$ gọi là **điểm tụ** hay **điểm giới hạn** của X nếuu $\forall r > 0, B(a,r) \cap X$ chứa một phần tử khác a (và do đó có vô số phần tử).
Ký hiệu $\operatorname{Cl} X$ hay $\overline{X} = X \cup$ tập mọi điểm giới hạn của X, gọi là **bao đóng** của X.

Bài tập: Trong $\mathbf{R}$ tìm các điểm giới hạn của: tập rời rạc, khoảng $[a,b)$, tập $\{1/k : k \in \mathbf{N}\}$, và $\mathbf{Q}$.

Mệnh đề. *Cho $X \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó các điều sau tương đương:*
(i) *X là tập đóng* (ii) $X = \overline{X}$ (iii) *X chứa mọi điểm giới hạn của nó*
(iv) *Mọi dãy (x_k) trong X hội tụ về x, thì $x \in X$.*

Chứng minh: (i) $\Rightarrow$ (ii): Giả sử x là điểm giới hạn của X. Khi đó $\forall r > 0, B(x,r) \cap X \neq \emptyset$, i.e. $\forall r > 0, B(x,r) \not\subset \mathbf{R}^n \setminus X$. Suy ra $x \notin$ int$(\mathbf{R}^n \setminus X) = \mathbf{R}^n \setminus X$ (do (i)). Vậy $x \in X$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Từ định nghĩa.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Giả sử $(x_k) \subset X$, $x_k \to x$. Nếu tập $\{x_k\}$ các phần tử của dãy là hữu hạn, thì tồn tại $k_0, x = x_{k_0}$, do vậy $x \in X$. Nếu tập $\{x_k\}$ vô hạn, thì x là điểm giới hạn của X, do (iii) $x \in X$.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Phản chứng, giả sử $\mathbf{R}^n \setminus X$ không mở. Khi đó tồn tại $x \in \mathbf{R}^n \setminus X$ không là điểm trong, i.e. $\forall r > 0, B(x,r) \cap X \neq \emptyset$. Vậy x là điểm giới hạn của X. Theo (iv) $x \in X$ vô lý. $\square$

3. TẬP COMPACT

3.1 Tập compact. Tập con $K \subset \mathbf{R}^n$ gọi là **compact** nếuu K đóng và giới nội, i.e. K đóng và tồn tại $R > 0 :\ K \subset B(0,R)$.
Ví dụ. Đoạn $[a,b]$ trong $\mathbf{R}$, tập hữu hạn, hình cầu đóng $\overline{B}(a,r)$, hình hộp đóng $[a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ trong $\mathbf{R}^n$ là các tập compact.

Để nêu các định nghĩa tương đương của tập compact, nhằm mục đích thuận tiện khi sử dụng, ta có khái niệm sau.

3.2 Phủ mở. Họ $\mathcal{P} = \{U_i, i \in I\}$ (I là tập chỉ số) gọi là **phủ mở** của tập con K của $\mathbf{R}^n$ nếuu mỗi $i \in I$, U_i là tập mở trong $\mathbf{R}^n$ và $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
Ví dụ. Họ các khoảng $(a - \dfrac{1}{k}, b + \dfrac{1}{k})$, $k \in \mathbf{N}$, là họ phủ mở của $[a,b]$. Họ $(a, a+1)$, $a \in \mathbf{R}$, là họ phủ mở của $\mathbf{R}$.

3.3 Định lý. *Cho K là tập con của $\mathbf{R}^n$. Khi đó các điều sau tương đương:*

(i) *K đóng và giới nội.*
(ii) *K thoả điều kiện* **Bolzano-Weierstrass***:*
Mọi dãy (x_k) trong K, tồn tại dãy con $(x_{\sigma(k)})$ hội tụ về x và $x \in K$.[2]
(iii) *K thoả điều kiện* **Heine-Borel***:*
Mọi phủ mở $\mathcal{P} = \{U_i, i \in I\}$ của K, tồn tại phủ con hữu hạn $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_s}\}$ của K.

Chứng minh: Ta chứng minh (ii) $\Leftrightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (iii).
(i) $\Rightarrow$ (ii): Giả sử $(x_k) \subset K$. Do tính giới nội, tồn tại $R > 0$, sao cho $\|x_k\| < R$. Vậy các dãy tọa độ tương ứng $(x_{k,i})_{k \in \mathbf{N}}$, $(i = 1, \cdots n)$ là các dãy số bị chặn. Vậy theo nguyên lý Weierstrass cho $\mathbf{R}$, $(x_{k,1})$ có dãy con $(x_{\sigma_1(k),1})$ hội tụ về a_1. Tương tự,

[2] Một dãy con của (x_k) có dạng $(x_{\sigma(k)})$, với $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ là một dãy tăng.

$(x_{\sigma_1(k),2})$ có dãy con $(x_{\sigma_2(k),2})$ hội tụ về a_2, $\cdots$, $(x_{\sigma_{n-1}(k),n})$ có dãy con $(x_{\sigma_n(k),n})$ hội tụ về a_n. Vậy dãy con $(x_{\sigma_n(k)})$ hội tụ về $a = (a_1, \cdots, a_n)$. Do K đóng $x \in K$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Giả sử x là điểm giới hạn của K. Vậy x là giới hạn của một dãy trong K. Từ (ii) suy ra $x \in K$. Vậy K đóng.
Nếu K không giới nội, thì tồn tại dãy $(x_k) \subset K, \|x_k\| > k$. Dễ thấy dãy này không thể có dãy con nào hội tụ.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Họ cầu mở $\{B(0,i), i \in \mathbf{N}\}$ phủ K, nên (iii) suy ra K có thể phủ bởi hữu hạn cầu $B(0,1), \cdots, B(0,s)$. Vậy K giới nội.
Để chứng minh K đóng, ta kiểm tra $\mathbf{R}^n \setminus K$ là mở. Cho $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$. Khi đó

$$K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{x\} = \mathbf{R}^n \setminus (\bigcap_{i \in \mathbf{N}} \overline{B}(x, 1/i)) = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} (\mathbf{R}^n \setminus \overline{B}(x, 1/i)).$$

Theo (iii) tồn tại N sao cho $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} (\mathbf{R}^n \setminus \overline{B}(x, 1/i)) = \mathbf{R}^n \setminus \overline{B}(x, 1/N)$, i.e. $B(x, 1/N) \subset \mathbf{R}^n \setminus K$. Vậy x là điểm trong của $\mathbf{R}^n \setminus K$.
(i) $\Rightarrow$ (iii): Phản chứng, giả sử $\mathcal{P} = \{U_i, i \in I\}$ là phủ mở của K mà mọi họ con hữu hạn của nó không thể phủ K.
Với $k = 1$, do K giới nội, tồn tại hữu hạn cầu bán kính 1 phủ K. Theo giả thiết, tồn tại cầu B_1 bán kính 1 sao cho $K \cap B_1$ không thể phủ bởi hữu hạn U_i.
Lập luận tương tự, với $k \in \mathbf{N}$, tồn tại cầu B_k bán kính $1/k$ sao cho $B_k \subset B_{k-1}$ và $K \cap B_k$ không thể phủ bởi hữu hạn U_i. Với mỗi k, chọn $x_k \in K \cap B_k$. Khi đó tồn tại $\lim x_k = a \in K$. Vậy tồn tại chỉ số i_0 sao cho $a \in U_{i_0}$. Do tính mở, tồn tại r, $B(a,r) \subset U_{i_0}$.
Mt khác, khi k đủ lớn, $B_k \subset B(a,r)$. Vậy $B_k \subset U_{i_0}$. Điều này mâu thuẫn với tính chất của dãy B_k. $\square$

Nhận xét. Họ $\{U_i, i \in [0,1]\}$ với $U_i = \{i\}$ là phủ tập compact $[0,1]$, không có phủ con hữu hạn. Để ý là U_i không mở.
Bài tập: Hợp, giao, tích các tập compact có compact?

4. TẬP LIÊN THÔNG

4.1 Định nghĩa. Tập con $C \subset \mathbf{R}^n$ gọi là **liên thông** nếuu nó không thể tách bởi 2 tập mở, i.e. không tồn tại cặp tập mở U, V sao cho:
$C \subset U \cup V$, $C \cap U \neq \emptyset \neq C \cap V$, và $C \cap U \cap V = \emptyset$.
Nói một cách khác, với mọi cặp tập mở U, V, sao cho $C \subset U \cup V$, $C \cap U \cap V = \emptyset$, thì $C \subset U$ hay $C \subset V$.

4.2 Phân loại tập liên thông trong R. *$C \subset \mathbf{R}$ liên thông khi và chỉ khi $\forall x, y \in C, x < y \Rightarrow [x,y] \subset C$.*
Nh vậy tập liên thông trong $\mathbf{R}$ có dạng một điểm hay khoảng $< a, b >$, trong đó dấu $<$ hay $>$ để ký hiệu $]$ hay $[$.

Chứng minh: ($\Rightarrow$) Phản chứng, giả sử $x, y \in C, x < y$ nhưng $(x,y) \not\subset C$, i.e. tồn tại $z \in (x,y), z \notin C$. Khi đó dễ thấy $U = (-\infty, z)$, $V = (z, +\infty)$ là các tập mở tách C.

($\Leftarrow$) Phản chứng, giả sử C không liên thông. Khi đó tồn tại các tập mở U, V tách C. Gọi $x \in U \cap C$, $y \in V \cap V$. Không mất tổng quát, giả sử $x < y$. Đt $z = \sup U \cap [x, y]$. Vì U mở, $x < z$ và $z \notin U$. Vì V mở, $z < y$ và $z \notin V$. Suy ra $(x, y) \not\subset C$. $\square$

Sau đây là một tiêu chuẩn trực quan để nhận biết một tập là liên thông.
Đoạn thẳng nối $a, b \in \mathbf{R}^n$ đợc định nghĩa là $[a, b] = \{x = a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$.
Một **đường gấp khúc nối** a, b là hợp hữu hạn đoạn: $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{p} [a_i, a_{i+1}]$, $a_0 = a, a_{p+1} = b$.

4.3 Mệnh đề. *Cho $C \subset \mathbf{R}^n$. Giả sử C là tập mở. Khi đó C liên thông khi và chỉ khi với mọi cặp điểm $a, b \in C$ tồn tại đường gấp khúc trong C nối a và b*

Chứng minh: Giả sử C liên thông. Cố định $a \in C$. Đt
$U = \{x \in C :$ tồn tại đường gấp khúc trong C nối a và $x\}$ và
$V = \{x \in C :$ không tồn tại đường gấp khúc trong C nối a và $x\}$.
Khi đó, có thể kiểm tra là nếu U, V khác trống, thì chúng là 2 tập mở, tách C. Do C liên thông và $U \neq \emptyset$, suy ra $V = \emptyset$. Vậy $C = U$= tập có tính chất đã nêu.
Ngược lại, giả sử C có tính chất nêu trên. Trước hết ta có khẳng định sau:

Nếu $L_i, i \in I$, là các tập liên thông và $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$, thì $\displaystyle\bigcup_{i \in I} L_i$ liên thông. (bài tập)

Do 4.2, một đoạn thẳng là liên thông. Từ khẳng định trên suy ra đường gấp khúc cũng liên thông, vì là hợp hữu hạn đoạn thẳng mà 2 đoạn kề nhau có điểm chung.
Bây giờ cố định $a \in C$. Mọi $x \in C$ gọi L_x là đường gấp khúc trong C nối a và x. Khi đó L_x liên thông và $\displaystyle\bigcap_{x \in C} L_x \neq \emptyset$, từ khẳng định trên suy ra $C = \displaystyle\bigcup_{x \in C} L_x$ là tập liên thông. $\square$

Ví dụ. Các tập sau là liên thông: $\mathbf{R}^n$, $B(a, r)$, $\overline{B}(a, r)$, $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

5. TỔNG QUÁT HOÁ

Nhiều kết qủa trong giáo trình này không chỉ đúng cho không gian $\mathbf{R}^n$, với tích vô hướng Euclid, mà còn đúng cho các không gian tổng quát hơn.

Không gian metric. Một **không gian metric** là một tập M trên đó có trang bị một ánh xạ $d : M \times M \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto d(x, y)$, thoả các tính chất *(M1)(M2)(M3)* ở 1.2.

Không gian định chuẩn. Một **không gian định chuẩn** là một không gian vector V trên trường $\mathbf{R}$, trên đó có trang bị một ánh xạ $\| \, \| : V \to \mathbf{R}, x \mapsto \|x\|$, thoả các tính chất *(N1)(N2)(N3)* ở 1.2.

Không gian có tích vô hướng. Một **không gian có tích vô hướng** là một không gian vector V trên trường $\mathbf{R}$, trên đó có trang bị một ánh xạ $< \, , \, >: V \times V \to \mathbf{R}, (x, y) \mapsto < x, y >$, thoả các tính chất *(S1)(S2)(S3)* ở 1.2.

Bài tập:
a) Nếu $< \, , \, >$ là tích vô hướng trên V, thì $\|x\| = < x, x >, \ x \in V$, xác định một chuẩn trên V.
b) Nếu $\| \ \|$ là chuẩn trên V, thì $d(x,y) = \|x-y\|, \ x, y \in V$ xác định một metric trên V.

Trên không gian metric, không gian định chuẩn hay không gian có tích vô hướng, các khái niệm dãy, dãy hội tụ, dãy Cauchy, hình cầu, tập mở, tập đóng, $\cdots$ được định nghĩa tương tự như trong $\mathbf{R}^n$. Một không gian metric mà mọi dãy Cauchy đều hội tụ gọi là **không gian metric đủ** . Một không gian định chuẩn đủ gọi là **không gian Banach**. Một không gian có tích vô hướng đủ gọi là **không gian Hilbert**.
Như vậy $\mathbf{R}^n$ là không gian metric đủ, chính xác hơn nó là không gian Hilbert hữu hạn chiều.

Ví dụ.
a) Trong $\mathbf{R}^n$ ngoài chuẩn Euclid, có thể xác định nhiều chuẩn khác nhau (và vì vậy có nhiều khoảng cách khác nhau), chẳng hạn:
$\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (chuẩn max), hay $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)$.
Ở chương sau ta sẽ chứng minh mọi chuẩn trong $\mathbf{R}^n$ đều cho khái niệm hội tụ như nhau.
b) Trong không gian $C[a,b]$ các hàm liên tục trên $[a,b]$,

$$d(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|, \quad f, g \in C[a,b],$$

xác định một metric (tương ứng khái niệm hội tụ đều).
c) Biểu thức sau xác định một tích vô hướng trong $C[a,b]$:

$$< f, g > = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C[a,b].$$

Sự hội tụ ứng với metric sinh bởi tích vô hướng trên gọi là sự hội tụ trung bình.

Bài tập: Hãy vẽ hình cầu trong $\mathbf{R}^2$ với các chuẩn cho ở ví dụ a).

III. Hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$

1. GIỚI HẠN HÀM

1.1 Định nghĩa. Cho X là tập con của $\mathbf{R}^n$. Ánh xạ

$$f : X \to \mathbf{R}^m,\ x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

được gọi là **ánh xạ (thực) của** n **biến (thực)** $x_1, \cdots, x_n$, với m hàm thành phần $f_i : X \to \mathbf{R}, i = 1, \cdots, m$.
Khi $m = 1$ ta gọi ánh xạ là **hàm** . Đôi lúc, do thói quen, ta dùng thuật ngữ "hàm" thay cho "ánh xạ" khi $m > 1$.
Khi $n = 1$ thường ký hiệu biến là x; khi $n = 2$ ký hiệu 2 biến là x, y; còn $n = 3$ ký hiệu 3 biến là x, y, z.
Cho f tương đương với việc cho **đồ thị của** f , i.e. tập

$$\text{graph}\, f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \ \subset\ \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m.$$

Do tính trực quan đồ thị có vai trò đặc biệt quan trọng trong các trường hợp mà $n + m \leq 3$, khi xét tính chất của ánh xạ.

Ví dụ.
a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ có đồ thị là nửa trên mặt cầu đơn vị trong $\mathbf{R}^3$.
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ có đồ thị là một mặt Paraboloid.
Bài tập: hãy tìm cách mô tả hình học cho $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1.2 Giới hạn hàm. Giả sử a là điểm giới hạn của $X \subset \mathbf{R}^n$ và $f : X \to \mathbf{R}^m$. Khi đó f gọi là **có giới hạn** $L \in \mathbf{R}^m$ **khi** x **tiến về** a , ký hiệu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$, khi $x \to a$; nếuu

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in X \setminus \{a\}, d(x, a) < \delta \Rightarrow\ d(f(x), L) < \epsilon.$$

Dễ thấy định nghĩa theo ngôn ngữ (ϵ, δ) của Cauchy ở trên hoàn toàn tương đương với định nghĩa theo dãy của Heine:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \text{ nếuu } \ \text{mọi dãy } (x_k) \subset X \setminus \{a\}, \lim_{k \to \infty} x_k = a \ \Rightarrow\ \lim_{k \to \infty} f(x_k) = L.$$

Để ý là về mặt hình thức định nghĩa trên hoàn toàn giống trường hợp hàm một biến, cùng với tính chất giới hạn dãy ta có

Mệnh đề. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = (L_1, \cdots, L_m) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f_i(x) = L_i, i = 1, \cdots, m.$

Bài tập: Từ mệnh đề trên phát biểu và chứng minh các tính chất về giới hạn của tổng, hiệu, tích vô hướng, chuẩn, hợp các ánh xạ,.. đồng thời tính bảo toàn quan hệ thứ tự $\leq$ khi qua giới hạn các hàm.

Ví dụ.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} = 0$,

vì $\left|\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}\dfrac{|x^2+y^2||x+y|}{|x^2+y^2|} \le |x+y| \to 0$, khi $(x,y)\to(0,0)$.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{xy}x = 1.0 = 0$.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$ không tồn tại. Để chứng minh điều này chỉ cần chọn 2 dữay, chẳng hạn $(x_k,y_k) = (\frac{1}{k},\frac{1}{k})$ và $(x'_k,y'_k) = (\frac{1}{k},0)$ đều tiến về $(0,0)$, nhng $f(x_k,y_k)\to 0$ còn $f(x'_k,y'_k)\to 1$.

1.3 Giới hạn lặp. Giới hạn trên còn gọi là giới hạn đồng thời để phân biệt với khái niệm **giới hạn lặp** sau đây. Cho $f(x,y)$ là hàm hai biến (hay tổng quát hơn, hàm hai bộ biến). Giả sử (x_0,y_0) là điểm giới hạn của miền xác định của f. Xét các giới hạn

$$a_{12} = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),\quad a_{21} = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\quad a = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

Vấn đề: Mối quan hệ giữa các giới hạn trên ?
Trả lời: lỏng lẻo, xét các ví dụ sau

Ví dụ. Với $x_0 = 0, y_0 = 0$.

a) $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$. Ta có a_{12}, a_{21} không tồn tại, $a = 0$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y}$. Ta có $a_{12} = 0, a_{21} = 1$, còn a không tồn tại.

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Ta có $a_{12} = a_{21} = 0$, còn a không tồn tại.

d) $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}$. Ta có $a_{12} = 0$, a_{21} không tồn tại, $a = 0$.

Bài tập: Tìm điều kiện để các giới hạn nêu trên tồn tại và $a = a_{12} = a_{21}$.
Một trong các điều kiện là:

Mệnh đề. *Cho $f : X\times Y \to \mathbf{R}^m$, x_0, y_0 là điểm tụ của X, Y tương ứng.*
Giả sử

(i) *Tồn tại* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x), \forall x\in X$.

(ii) *Tồn tại* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = h(y)$ *đều theo y, i.e.*

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0 : x\in X, d(x,x_0)<\epsilon \Rightarrow d(f(x,y),h(y))<\epsilon,\quad \forall y\in Y.$$

Khi đó các giới hạn sau tồn tại và

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

1.4 Giới hạn vô cùng - Giới hạn ở vô cùng. Ta còn xét các giới hạn khi x tiến ra "vô cùng" hay giới hạn "vô cùng", và có các khái niệm tương ứng cho các ký hiệu sau:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Bài tập: hãy nêu các định nghĩa sao cho phù hợp với các khái niệm tương ứng của hàm một biến. Có bao nhiêu "điểm vô cùng" trong $\mathbf{R}^n$? Hiểu thế nào là hình cầu hay lân cận của điểm vô cùng ?

1.5 Ký hiệu o và O. Cho $a \in \mathbf{R}^n$ hay $a = \infty$. Ký hiệu $F_a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ là không gian các hàm từ lân cận của a trong $\mathbf{R}^n$ vào $\mathbf{R}^m$.
Để so sánh các hàm trong lân cận a, người ta thường dùng các ký hiệu sau.
Cho $f, \psi \in F_a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Khi đó ký hiệu và định nghĩa:

$$f = o(\psi) \ \text{ khi } x \to a \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to a} \frac{\|f(x)\|}{\|\psi(x)\|} = 0.$$

Bài tập: Cho $f, g, \psi \in F_a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Chứng minh:
(1) Nếu $f = o(\psi)$ và $g = o(\psi)$ khi $x \to a$, thì $f + g = o(\psi)$ khi $x \to a$.
(2) Nếu $f = o(\psi)$ khi $x \to a$ và g bị chặn, thì $< f, g >= o(\psi)$ khi $x \to a$.

Cho $f, \psi \in F_a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, ký hiệu và định nghĩa:

$$f = O(\psi) \ \text{ khi } x \to a \ \Leftrightarrow \ \exists C > 0, r > 0 : \|f(x)\| \le C\|\psi(x)\|, \forall x \in B(a, r).$$

Bài tập: Cho $f, g, \psi \in F_a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Chứng minh:
(1) Nếu $f = O(\psi)$ và $g = O(\psi)$ khi $x \to a$, thì $f + g = O(\psi)$ khi $x \to a$.
(2) Nếu $f = O(\psi)$ khi $x \to a$ và g bị chặn, thì $< f, g >= O(\psi)$ khi $x \to a$.

Nhận xét. Như vậy ký hiệu $o(\psi), O(\psi)$ chỉ một lớp hàm chứ không phải một hàm cụ thể nào. Chẳng hạn, từ $f = o(\psi)$ và $g = o(\psi)$ *không thể* suy ra $f = g$.

Cho $f, g \in F_a(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, ký hiệu và định nghĩa:

$$f \ \sim \ g \ \text{ khi } x \to a \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Bài tập: Chứng minh quan hệ $\sim$ là quan hệ tương đương.

Ví dụ. Khi $n \to \infty$, ta có:

$$P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0 \ \sim \ a_p n^p \quad (a_p \neq 0)$$

$$1 + 2 + \cdots + n \ = \ \frac{n(n+1)}{2} \ = \ O(n^2)$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \ = \ \frac{n(2n+1)(n+2)}{6} \ = \ O(n^3)$$

$$n! \ \sim \ \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \ = \ O\left(\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Bài tập: So sánh $2^n,\ n^p,\ \ln^q n,\ n^p \ln^q n$ khi $n \to +\infty$.
Bài tập: Chứng minh với $p \in \mathbf{N}$, ta có: $1^p + 2^p + \cdots + n^p \ = \ O(n^{p+1})$ khi $n \to \infty$

2. TÍNH LIÊN TỤC

2.1 Định nghĩa. $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, gọi là **liên tục tại** $a \in X$ nếuu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Bài tập: viết định nghĩa liên tục theo ngôn ngữ (ϵ, δ), và theo ngôn ngữ dãy.
Từ định nghĩa dễ thấy f liên tục tại a tương đương với điều kiện hình học:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \quad B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\epsilon)$$

Bài tập: Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Chứng minh các điều sau tương đương
(i) f liên tục trên $\mathbf{R}^n$.
(ii) Mọi tập mở $V \subset \mathbf{R}^m$, $f^{-1}(V)$ là mở.
(iii) Mọi tập đóng $F \subset \mathbf{R}^m$, $f^{-1}(F)$ là đóng.

Ký hiệu $C(X, \mathbf{R}^m)$ không gian các hàm $f : X \to \mathbf{R}^m$ liên tục tại mọi điểm của X.
Hàm f gọi là **gián đoạn tại** a nếuu f không liên tục tại a.

Từ tính chất giới hạn dễ suy ra

Mệnh đề. *Tổng, hiệu, tích vô hướng, thương ($m = 1$ và mẫu khác không), hợp các hàm liên tục là liên tục.*

Ví dụ.
a) **Lớp các hàm sơ cấp** là các hàm được lập thành bởi các hàm sơ cấp cơ bản: hàm hằng, hàm chiếu $f(x_1, \cdots, x_n) = x_i\ (i = 1, \cdots, n)$, hàm exponent e^x, hàm logarithm $\ln x$, hàm sine $\sin x$ và hàm arcsine $\arcsin x$; bằng các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) và các phép hợp thành. Theo mệnh đề trên hàm sơ cấp là liên tục trên tập xác định của nó.

b) Hàm đa thức $f(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{0 \leq i_1 \cdots i_n \leq N} a_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$,
là liên tục trên $\mathbf{R}^n$ vì là tổng các tích các hàm liên tục: $x \mapsto x_i,\ x \mapsto a$.
c) Nhắc lại ánh xạ $T : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ gọi là **tuyến tính** nếuu

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),\ \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Khi cố định cơ sở chính tắc, T hoàn toàn xác định bởi ma trận m dòng n cột $(a_{ij})_{m \times n}$, trong đó $T(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i, \quad j = 1, \cdots, m.$

Nếu biểu diễn $y = Tx$ dưới dạng vector cột, ta có quan hệ theo qui tắc nhân ma trận:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Mỗi hàm thành phần là đa thức bậc 1, suy ra mọi ánh xạ tuyến tính là liên tục.
Bài tập: Cho T là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh

$$\exists M > 0 : \ \|Tx\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Ta sẽ ký hiệu

$$\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|Tx\| \ , \text{ gọi là } \textbf{chuẩn} \text{ cuả } T$$

2.2 Các định lý cơ bản của hàm liên tục trên tập compact.

Định lý (Weierstrass). *Cho $f : K \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Nếu f liên tục và K compact, thì $f(K)$ compact.*

Hệ qủa. *Nếu $f : K \to \mathbf{R}$ là hàm liên tục trên tập compact $K \subset \mathbf{R}^n$, thì f đạt được max, min trên K, i.e. tồn tại $a, b \in K$ sao cho $f(a) = \sup_{x \in K} f(x), \ f(b) = \inf_{x \in K} f(x)$.*

Chứng minh: Giả sử (y_k) là dãy trong $f(K)$. Gọi $x_k \in K$, $y_k = f(x_k)$. Do K compact, tồn tại dãy con $x_{\sigma(k)})$ hội tụ về $x \in K$. Do tính liên tục của f dãy con $(y_{\sigma(k)} = f(x_{\sigma(k)}))$ hội tụ về $f(x) \in f(K)$. Vậy $f(K)$ compact.
Khi $m = 1$, theo chứng minh trên $f(K)$ là đóng và giới nội. Từ tính giới nội, suy ra tồn tại $M = \sup f(K)$ và $m = \inf f(K)$. Từ $f(K)$ đóng, tồn tại $a, b \in K$, sao cho $f(a) = M, f(b) = m$. □

Định lý (Cantor). *Cho $f : K \longrightarrow \mathbf{R}^m$. Nếu f liên tục và K compact, thì f liên tục đều trên K, i.e.*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x, x' \in K, d(x, x') < \delta \implies d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Chứng minh: Phản chứng, giả sử f không liên tục đều, i.e.

$$\exists \epsilon > 0, \forall k \in \mathbf{N}, \exists x_k, x'_k \in K : d(x_k, x'_k) < \frac{1}{k}, \quad \text{nhưng} \quad d(f(x_k), f(x'_k)) \geq \epsilon.$$

Do K compact, tồn tại dãy con $(x_{\sigma(k)})$ của (x_k) hội tụ về $x \in K$. Từ bất đẳng thức $d(x_{\sigma(k)}, {x'}_{\sigma(k)})) < \dfrac{1}{\sigma(k)}$, suy ra dãy con $({x'}_{\sigma(k)})$ của (x'_k) cũng hội tụ về x. Từ tính liên tục của f suy ra $d(f(x_{\sigma(k)}), f({x'}_{\sigma(k)}))$ hội tụ về $d(f(x), f(x)) = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. □

Bài tập: Tìm ví dụ hàm liên tục nhưng không liên tục đều (HD: Chẳng hạn xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$.)

Ứng dụng. *Mọi không gian vector hữu hạn chiều E đều tồn tại chuẩn và mọi chuẩn trong E là tương đương.*

Trước hết ta nêu các định nghĩa. Cho E là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Ánh xạ $N : E \to \mathbf{R}$ gọi là chuẩn nếuu nó thoả các điều kiện $(N1)(N2)(N3)$ của tính chất I.1.3. Chẳng hạn, trong $\mathbf{R}^n$, $x \mapsto \max_{1\le i\le n} |x_i|$ hay $x \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$ là các chuẩn khác chuẩn Euclid $\|x\|$.
Nhận xét. Nếu một không gian có chuẩn, thì trên không gian đó có khái niệm hội tụ theo chuẩn đã cho.
Ta nói 2 chuẩn N_1, N_2 là tương đương nếuu tồn tại 2 số dương M, m sao cho

$$mN_1(x) \le N_2(x) \le M\ N_1(x),\ \forall x \in E.$$

Nhận xét. Như vậy 2 chuẩn tương đương cho hai khái niệm hội tụ như nhau, i.e. một dãy hội tụ theo chuẩn này thì cũng hội tụ theo chuẩn kia.
Để chứng minh sự tồn tại chuẩn trên E, cố định một cơ sở $f_1, \cdots, f_n$ của E. Khi đó đẳng cấu tuyến tính $T : E \to \mathbf{R}^n, x_1f_1 + \cdots + x_nf_n \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$, cảm sinh chuẩn $N_E = T^{-1} \circ N$ trên E từ chuẩn N trên $\mathbf{R}^n$.
Cũng từ đẳng cấu đó, để chứng minh mọi chuẩn trên E đều tương đương, ta chỉ cần chứng minh mọi chuẩn N trong $\mathbf{R}^n$ đều tương đương với chuẩn Euclid $\|\ \|$, như vậy mọi chuẩn trong $\mathbf{R}^n$ (và vì vậy trên E) là tương đương.
Gọi $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ là **mặt cầu đơn vị** . Khi đó vì N liên tục (tại sao?), và S^{n-1} compact (tại sao?), suy ra tồn tại $M = \max\limits_{x\in S^{n-1}} N(x)$, và $m = \min\limits_{x\in S^{n-1}} N(x)$. Rõ ràng $M, m > 0$. Với mọi $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, ta có $\dfrac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$. Từ tính chất $(N2)$ suy ra bất đẳng thức cần chứng minh $m\|x\| \le N(x) \le M\|x\|$. □

2.3 Định lý cơ bản của hàm liên tục trên tập liên thông.

Định lý (Cauchy). *Cho $f : C \to \mathbf{R}^m$. Nếu f liên tục và C liên thông, thì $f(C)$ liên thông.*

Hệ qủa 1. *Cho $f : C \to \mathbf{R}$. Nếu f liên tục và C liên thông, thì $f(C)$ là một khỏang. Suy ra, nếu $a, b \in C$ và $\mu \in \mathbf{R}$ mà $f(a) < \mu < f(b)$, thì tồn tại $c \in C : f(c) = \mu$.*

Hệ qủa 2. *Cho f là hàm liên tục trên tập liên thông C. Nếu $f(C)$ là tập rời rạc (chẳng hạn f chỉ nhận các giá trị nguyên), thì f là hàm hằng.*

Chứng minh: Phản chứng, giả sử $f(C)$ không liên thông, i.e. tồn tại các tập mở A, B tách $f(C)$. Từ tính liên tục của f suy ra tồn tại các tập mở U, V sao cho $f^{-1}(A) = C \cap U$ và $f^{-1}(B) = C \cap V$. Dễ kiểm tra U, V là các tập mở tách C. Vậy C không liên thông.
Do tập liên thông trong $\mathbf{R}^1$ là một khỏang và tập hợp rời rạc liên thông khi và chỉ khi nó là một điểm, suy ra các hệ qủa □

Bài tập: Cho $f : [a,b] \to [a,b]$ là hàm liên tục. Chứng minh tồn tại $x^* \in [a,b]$, sao cho $f(x^*) = x^*$.
Bài tập: Cho $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ liên tục và $f(b), f(a)$ trái dấu. Dùng phương pháp chia đôi đoạn, xây dựng dãy (x_k) hội tụ về một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

Ứng dụng. (Định lý Ulam-Borsuk) *Mọi hàm liên tục $f : S^n \longrightarrow \mathbf{R}, n \geq 1$, đều tồn tại $x_0 \in S^n$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$.*
(trong đó $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị.)
Để chứng minh, xét $g(x) = f(x) - f(-x)$. Khi đó g liên tục trên S^n là tập liên thông (tại sao?). Vậy $g(S^n)$ là khoảng trong $\mathbf{R}$. Mặt khác $g(x)g(-x) \leq 0$, nên $g(S^n)$ phải chứa 0. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

2.4 Nguyên lý ánh xạ co

Định lý (Banach). *Cho $M \subset \mathbf{R}^n$ là tập đóng. Giả sử $f : M \to M$ là ánh xạ co (theo metric d), i.e.*

$$\exists\theta, 0 < \theta < 1 : \ d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x,y), \ \forall x, y \in M.$$

Khi đó tồn tại duy nhất một điểm bất động của f, i.e. $\exists! x^* \in M : f(x^*) = x^*$.
Cụ thể, cho $x_0 \in M$ xây dựng dãy (x_k) với $x_1 = f(x_0)$, $x_{k+1} = f(x_k)$ $(k = 2, 3, \cdots)$.
Khi đó (x_k) hội tụ về điểm bất động x^* của f.

Chứng minh: Với dãy (x_k) được xây dựng nh trên, ta có

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1}) \leq \theta d(x_k, x_{k-1}) \leq \cdots \leq \theta^k d(x_1, x).$$

Từ đó suy ra với $m = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned} d(x_{k+m}, x_k) &\leq d(x_{k+m}, x_{k+m-1}) + \cdots + d(x_{k+1}, x_k) \leq (\theta^{k+m} + \cdots \theta^k) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\theta^k}{1-\theta} d(x_1, x) \to 0, \quad \text{khi} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Vậy (x_k) là dãy Cauchy, nên tồn tại $\lim x_k = x^*$. Do M đóng $x^* \in M$.
Dễ thấy f co thì f liên tục và từ cách xây dựng dãy suy ra $f(x^*) = x^*$.
Nếu $\bar{x} \in M$ là điểm bất động của f, i.e. $f(\bar{x}) = \bar{x}$, thì

$$d(\bar{x}, x^*) = d(f(\bar{x}), f(x^*)) \leq \theta d(\bar{x}, x^*).$$

Do $\theta < 1$, nên $d(\bar{x}, x^*) = 0$, i.e. $\bar{x} = x^*$. □

Ví dụ. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi. Gỉa sử tồn tại $0 < \theta < 1$ sao cho $|f'(x)| < \theta, \forall x$. Khi đó theo định lý Lagrange

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq \theta |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Vậy f là ánh xạ co.
Bài tập: Tìm ví dụ hàm $f : M \to M$ thỏa $d(f(x), f(y)) < d(x,y), \forall x, y \in M, x \neq y$,

nhưng không phải là ánh xạ co, và không có điểm bất động. (Hd: Xét $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, với $x \in M = [1, \infty)$).
Bài tập: Cho $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận biểu diễn là (t_{ij}). Chứng minh T là ánh xạ co (đối với metric tương ứng) nếu

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}^2 < 1 \quad \text{hay} \quad \sum_{i,j=1}^{n} |t_{ij}| < 1 \quad \text{hay} \quad n \max_{1 \le i,j \le n} |t_{ij}| < 1$$

3. SỰ HỘI TỤ ĐỀU

3.1 Định nghĩa. Cho dãy hàm $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$, trong đó $f_k : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$.
Dãy (f_k) gọi là **hội tụ (điểm)** về hàm f nếuu với mọi $x \in X$, $\lim f_k(x) = f(x)$.
Dãy (f_k) gọi là **hội tụ đều trên** X **về** f nếuu

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) : \; k \ge N \Rightarrow d(f_k(x), f(x)) \le \epsilon, \; \forall x \in X,$$

nói một cách khác, nếu đặt $M_k = \sup\limits_{x \in X} d(f_k(x), f(x))$, thì $\lim\limits_{k \to \infty} M_k = 0$.

Một **chuỗi hàm** trên X, là tổng hình thức dạng

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_k + \cdots, \quad \text{với } f_k : X \to \mathbf{R}^m$$

Xét dãy hàm tổng riêng thứ k $S_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_k$. Khi đó chuỗi gọi là hội tụ điểm (t.ư. hội tụ đều) trên X nếuu (S_k) hội tụ điểm (t.. hội tụ đều) trên X. Như vậy khái niệm chuỗi hàm xem là trường hợp riêng của dãy hàm.

Ví dụ.

a) Cho dãy hàm trên $\mathbf{R}$ xác định bởi $f_k(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{k}|x| & \text{nếu } |x| \le k, \\ 0 & \text{nếu } |x| > k. \end{cases}$

Khi đó (f_k) hội tụ về $f(x) \equiv 1$. Tuy nhiên sự hội tụ là không đều vì

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_k(x) - f(x)| = 1 \not\to 0, \text{ khi } k \to \infty.$$

b) Chuỗi hàm $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ hội tụ điểm về $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, trên $[-1, 1)$ và nếu $0 \le r < 1$, thì sự hội tụ là đều trên $[-r, r]$.

Để chứng minh, xét dãy hàm $S_k(x) = 1 + x + \cdots + x^k = \dfrac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$. Ta kiểm tra tính hội tụ đều trên $[-r, r]$:

$$\sup_{|x| \le r} |S_k(x) - f(x)| = \sup_{|x| \le r} \left| \frac{x^{k+1}}{1-x} \right| = \frac{r^{k+1}}{1-r} \to 0, \text{ khi } k \to \infty.$$

Vậy tính hội tụ đều được chứng minh.
Bài tập: Chứng minh chuỗi trên hội tụ điểm về f trên $(-1, 1)$, nhưng sự hội tụ là

không đều trên tập đó.

3.2 Mệnh đề. *Dãy (f_k) hội tụ đều trên X khi và chỉ khi nó thỏa điều kiện Cauchy*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : k, l > N \Rightarrow d(f_k(x), f_l(x)) \leq \epsilon, \ \forall x \in X.$$

Chứng minh: Xem như bài tập □

Nhiều hàm được định nghĩa qua dãy hàm hay chuỗi hàm.
Bài tập: Dựa vào mệnh đề trên, chứng minh các chuỗi hàm sau là hội tụ trên $\mathbf{R}$ và hội tụ đều trên mọi đoạn $[a, b]$.

a) $1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \cdots$ (định nghĩa hàm e^x)

b) $x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots$ (định nghĩa hàm $\sin x$)

c) $1 + \frac{1}{2!}x + \cdots + \frac{1}{2k!}x^{2k} + \cdots$ (định nghĩa hàm $\cos x$)

Ví dụ. Cho $f_k(x) = x^k, x \in [0, 1]$. Khi đó (f_k) là dãy các hàm liên tục, nhưng hàm giới hạn không liên tục.
Mệnh đề sau minh họa là điều kiện hội tụ đều bảo toàn một số tính chất giải tích của dãy.

3.3 Mệnh đề. *Cho (f_k) là dãy hàm. Nếu f_k liên tục với mọi k và (f_k) hội tụ đều về f, thì f liên tục.*

Chứng minh: Với mọi x_0 và $\epsilon > 0$, do tính hội tụ đều, tồn tại N sao cho khi $k > N$,

$$d(f(x), f_k(x)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{và} \quad d(f(x_0), f_k(x_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$

Cố định k. Do tính liên tục của f_k tại x_0, tồn tại $\delta > 0$, sao cho

$$d(f_k(x), f_k(x_0)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{khi} \quad d(x, x_0) < \delta.$$

Vậy $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_k(x_0)) + d(f_k(x_0), f(x_0)) < \epsilon$,
i.e. f liên tục tại x_0. □

3.4 Khoảng cách đều giữa các hàm. Ta có thể xem các hàm là các phần tử của một không gian hàm nào đó. Hơn nữa, có thể đo khoảng cách giữa các hàm nh đo khoảng các giữa các điểm trong $\mathbf{R}^n$. Tùy theo bài toán mà người ta định nghĩa khoảng cách tương ứng. Sau đây là khái niệm khoảng các tương ứng với sự hội tụ đều.

Cho $X \subset \mathbf{R}^n$. Ký hiệu $BF(X, \mathbf{R}^n)$ là không gian các hàm bị chặn $f : X \to \mathbf{R}^n$, i.e.

$$f \in BF(X, \mathbf{R}^m) \ \Leftrightarrow \ \exists M > 0 : \|f(x)\| \leq M, \forall x \in X.$$

Trên không gian này định nghĩa chuẩn $\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$.

Dễ dàng chứng minh các khẳng định sau:
(i) $BF(X, \mathbf{R}^m)$ là không gian định chuẩn với chuẩn đọc định nghĩa trên.
Như vậy, như trong $\mathbf{R}^n$, chuẩn trên cho phép đo khoảng cách giữa các hàm nhờ metric

$$d(f,g) = \|f-g\|,\ f,g \in BF(X, \mathbf{R}^m)$$

(ii) Cho $f, f_k \in BF(X, \mathbf{R}^m)$. Khi đó dãy hàm $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ hội tụ đều về f khi và chỉ khi $f_k \to f$ trong $BF(X, \mathbf{R}^m)$ theo metric nêu trên, i.e. $d(f_k, f) \to 0$, khi $k \to \infty$.
(iii) Nếu X compact, thì $C(X, \mathbf{R}^m)$ là không gian đủ, i.e. trong không gian này một dãy hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.
Khẳng định (iii) này suy từ mệnh đề 3.3, (iv) suy từ mệnh đề 3.2, với chú ý là điều kiện compact bảo đảm tính giới nội của hàm liên tục trên đó.

4. ĐỊNH LÝ STONE-WEIERSTRASS

Phần này ta nghiên cứu việc xấp xỉ đều hàm liên tục bởi hàm đơn giản, dễ xử lý (như hàm tuyến tính từng khúc, hàm bậc thang hay hàm đa thức).

4.1 Xấp xỉ bởi hàm tuyến tính từng khúc. Hàm liên tục $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ được gọi là **tuyến tính từng khúc** nếuu tồn tại phân hoạch $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, sao cho trên mỗi đoạn con g là hàm bậc nhất:

$$g(x) = A_i x + B_i, \quad x \in [a_{i-1}, a_i], \quad i = 1, \cdots, k$$

Do g liên tục các hệ số A_i, B_i phải thỏa hệ thức nào đó. Dễ thấy đồ thị g là một đường gấp khúc.
Bài tập: Cho $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ liên tục. Khi đó tồn tại dãy hàm tuyến tính từng khúc hội tụ đều về f.
Hd: Với mỗi phân hoạch đoạn $[a,b]$, xét hàm tuyến tính từng khúc mà đồ thị là đường gấp khúc nối các điểm thuộc đồ thị f ứng với các điểm chia. Dựa vào tính liên tục đều của f chứng tỏ khi phân hoạch càng mịn thì hàm tuyến tính đó càng gần đều hàm f.

4.2 Xấp xỉ bởi hàm bậc thang. Hàm $g : K \to \mathbf{R}$ gọi là **hàm bậc thang** nếuu tồn tại phân hoạch K thành hữu hạn tập $X_1, \cdots, X_k$ sao cho g là hằng trên mỗi tập đó.
Bài tập: Cho $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ liên tục. Khi đó tồn tại dãy hàm bậc thang hội tụ đều về f.
Hd: Với mỗi phân hoạch đoạn $[a,b]$, xét hàm bậc thang mà giá trị trên mỗi đoạn chia là một giá trị nào đó của f trên đoạn đó (chẳng hạn giá trị đầu mút hay $\max, \min$). Dựa vào tính liên tục đều của f chứng tỏ khi phân hoạch càng mịn thì hàm bậc thang đó càng gần đều hàm f.
Bài tập: Tổng quát bài tập trên cho hàm liên tục trên tập compact trong $\mathbf{R}^n$.

Phần sau ta xét đến việc xấp xỉ hàm bởi đa thức hay đa thức lượng giác.

4.3 Định lý (Weierstrass). *Với mọi hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$ tồn tại dãy hàm đa thức hội tụ đều về f.*

Chứng minh: Cách chứng minh sau của Bernstein (1912) có tính xây dựng dãy đa thức cụ thể hội tụ về f.
Bằng phép đổi biến $x = a + t(b-a)$, ta đưa về trường hợp $[a,b] = [0,1]$.
Dãy đa thức Bernstein đợc định nghĩa như sau là hội tụ đều về f:

$$B_k(x) = B_k f(x) = \sum_{p=0}^{k} C_k^p f(\frac{p}{k}) x^p (1-x)^{k-p}.$$

Để chứng minh, trước hết ta chuẩn bị một số đẳng thức.

Công thức nhị thức: $$(x+y)^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p x^p y^{k-p}.$$

Đạo hàm theo x và nhân x: $$kx(x+y)^{k-1} = \sum_{p=0}^{k} pC_k^p x^p y^{k-p}.$$

Đạo hàm lần nữa và nhân x^2: $$k(k-1)x^2(x+y)^{k-2} = \sum_{p=0}^{k} p(p-1)C_k^p x^p y^{k-p}.$$

Đặt $y = 1-x$ và $r_p(x) = C_k^p x^p (1-x)^{k-p}$, thay vào các đẳng thức trên

$$\sum_{p=0}^{k} r_p(x) = 1,\quad \sum_{p=0}^{k} pr_p(x) = kx,\quad \sum_{p=0}^{k} p(p-1)r_p(x) = k(k-1)x^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{k}(p-kx)^2 r_p(x) &= k^2x^2\sum_{p=0} r_p(x) - 2kx\sum_{p=0} pr_p(x) + \sum_{p=0} p^2 r_p(x) = kx \\ &= k^2x^2 - 2kx + (kx + k(k-1)x^2) = kx(1-x)\end{aligned}$$

Bây giờ đặt $M = \max_{|x|\le 1}|f(x)|$. Cho $\epsilon > 0$. Do tính liên tục đều tồn tại $\delta > 0$, sao cho, nếu $|x-y| < \delta$, thì $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Ta cần đánh gía

$$f(x) - B_k(x) = f(x) - \sum_{p=0}^{k} C_k^p f(\frac{p}{k}) x^p(1-x)^{k-p} = \sum_{p=0}^{k}(f(x) - f(\frac{p}{k}))r_p(x).$$

Chia tổng cuối chia thành 2 tổng:
$\sum_1$ gồm các $p : |\frac{p}{k} - x| < \delta$. Khi đó $|f(x) - f(\frac{p}{k})| < \epsilon$ và $r_p(x) \ge 0$, nên

$$|\sum_1| \le \epsilon \sum_{p=0}^{k} r_p(x) = \epsilon.$$

$\sum_2$ gồm các $p : |\frac{p}{k} - x| \geq \delta$. Khi đó $|\frac{p-kx}{k\delta}| \geq 1$, nên

$$\begin{aligned} |\sum\nolimits_2| &\leq 2M \sum_{|p-kx|\geq k\delta} r_p(x) \leq 2M \sum_{p=0}^{k} \left(\frac{p-kx}{k\delta}\right)^2 r_p(x) \\ &\leq \frac{2M}{k\delta^2} kx(1-x) \ \leq \ \frac{M}{2\delta^2 k}. \end{aligned}$$

Tóm lại, với $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho

$$|f(x) - B_k(x)| \leq |\sum\nolimits_1| + |\sum\nolimits_2| < \epsilon + \frac{M}{2\delta^2 k}$$

Vậy khi $k \geq M/2\delta^2\epsilon$, ta có: $\sup\limits_{|x|\leq 1} |f(x) - B_k(x)| < 2\epsilon$. □

Bài tập: Chứng minh giả thiết compact là cần thiết trong định lý Weierstrass.
(Hd: Chứng minh hàm $f(x) = e^x$ không thể xấp xỉ đều bởi đa thức trên $\mathbf{R}$.)

Bây giờ ta xét đến trường hợp tổng quát.

4.4 Định nghĩa. Tập $\mathcal{A}$ các hàm xác định trên $K \subset \mathbf{R}^n$ gọi là **đại số** nếuu

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbf{R}, \quad f + g,\ fg \ \text{ và } \ \alpha f \in \mathcal{A}.$$

Đại số hàm $\mathcal{A}$ gọi là **tách điểm** nếuu

$$\forall x, y \in K, x \neq y, \exists \varphi \in \mathcal{A} : \varphi(x) \neq \varphi(y).$$

Ví dụ.
a) Tập $\mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n]$ các đa thức n biến thực là đại số hàm trên $\mathbf{R}^n$.
b) Tập các đa thức lượng giác dạng

$$a_0 + \sum_{p=1}^{k} (a_p \sin px + b_p \cos px), \quad a_p, b_p \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N},$$

là một đại số hàm trên $\mathbf{R}$.
c) Cho $\varphi_1, \cdots, \varphi_s : K \to \mathbf{R}$. Lớp các hàm có dạng sau là một đại số hàm trên K

$$\sum_{p_1+\cdots+p_s=0}^{k} a_{p_1\cdots p_s} \varphi_1^{p_1}(x) \cdots \varphi^{p_s}(x), \quad \text{với} \quad a_{p_1\cdots p_s} \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}.$$

Bài tập: Chứng minh các đại số ở ví dụ a) và b) là tách điểm.

4.5 Định lý (Stone-Weierstrass) *Cho K là tập compact trong $\mathbf{R}^n$. Giả sử $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$ là một đại số các hàm liên tục trên K, tách điểm và chứa hàm hằng. Khi đó với mọi hàm hàm liên tục trên K có thể xấp xỉ đều bởi hàm trong $\mathcal{A}$, i.e.*

$$\forall f \in C(K), \exists g_k \in \mathcal{A} : \ (g_k)_{k\in\mathbf{N}} \quad \textit{hội tụ đều về} \quad f.$$

Chứng minh: (Stone-1948) Ta chuẩn bị một số bổ đề.

Bổ đề 1. *Đặt* $\overline{\mathcal{A}} = \{g : g$ *là giới hạn đều của dãy hàm thuộc* $\mathcal{A}\}$. *Khi đó* $\overline{\mathcal{A}} \subset C(K)$ *là đại số, tách điểm, chứa hàm hằng. Hơn nữa, nếu dãy hàm* $(h_k) \subset \overline{\mathcal{A}}$ *hội tụ đều về* h, *thì* $h \in \overline{\mathcal{A}}$, *i.e.* $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$.

Thực vậy, rõ ràng $\overline{\mathcal{A}}$ là đại số hàm liên tục, do Mệnh đề 3.3, và tách điểm chứa hàm hằng vì chứa $\mathcal{A}$. Hơn nữa, giả sử $(h_k) \subset \overline{\mathcal{A}}$ hội tụ đều về h. Khi đó, với mọi k, tồn tại dãy $(g_{k,i}) \subset \mathcal{A}$ hội tụ đều về h_k (khi $i \to \infty$). Theo qui tắc đường chéo (Bài tập: lập luận kiểu $\frac{\epsilon}{2}$) tồn tại dãy $(g_k = g_{\sigma(k),i(k)}) \subset \mathcal{A}$ hội tụ về h. Vậy $h \in \overline{\mathcal{A}}$.

Bổ đề 2. *Với mọi* $x, y \in K$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, *tồn tại hàm* $h \in \overline{\mathcal{A}}$, $h(x) = \alpha, h(y) = \beta$.

Để xây dựng h, do $\mathcal{A}$ tách điểm tồn tại $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Định nghĩa $h(z) = \alpha + (\beta - \alpha)\dfrac{\varphi(z) - \varphi(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)}$. Khi đó h là hàm cần tìm.

Bổ đề 3. *Nếu* $h_1, h_2 \in \overline{\mathcal{A}}$, *thì* $\max(h_1, h_2), \min(h_1, h_2) \in \overline{\mathcal{A}}$

Thật vậy, do $\max(h_1, h_2) = \dfrac{h_1 + h_2 + |h_1 - h_2|}{2}$ và $\min(h_1, h_2) = \dfrac{h_1 + h_2 - |h_1 - h_2|}{2}$, nên chỉ cần chứng minh rằng: $h \in \overline{\mathcal{A}} \Rightarrow |h| \in \overline{\mathcal{A}}$.
Để chứng minh điều đó, ta có h liên tục trên tập compact, nên tồn tại $M > 0$, sao cho $|h(x)| < M, \forall x \in K$. Theo định lý Weierstrass, tồn tại dãy đa thức (P_k) hội tụ đều về hàm $[-M, M] \ni t \mapsto |t|$. Đặt $g_k = P_k \circ h$. Khi đó (g_k) là dãy các hàm thuộc $\overline{\mathcal{A}}$ và hội tụ đều về $|h|$.

Bây giờ ta chứng minh định lý. Cho $f \in C(K)$. Từ Bổ đề 1, ta cần chứng minh:

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in \overline{\mathcal{A}} : \ d(f(x), g(x)) < \epsilon, \ \forall x \in K, i.e.$$

$$f(x) - \epsilon < g(x) < f(x) + \epsilon, \ \forall x \in K.$$

Với mọi $x, y \in K$, theo Bổ đề 2, tồn tại $h_{x,y} \in \overline{\mathcal{A}} : h_{x,y}(x) = f(x), h_{x,y}(y) = f(y)$.
Cố định x. Khi đó với mọi $y \in K$, do $h_{x,y}(y) = f(y)$, tồn tại cầu mở U_y tâm y sao cho $h_{x,y}(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in U_y \cap K$.
Họ $\mathcal{P}_x = \{U_y, y \in K\}$ là một phủ mở của K, do K compact, tồn tại hữu hạn tập mở $U_{y_1}, \cdots, U_{y_p}$ phủ K. Đặt $h_x = \min(h_{x,y_1}, \cdots, h_{x,y_p})$. Theo Bổ đề 3, $h_x \in \overline{\mathcal{A}}$ và

$$h_x(z) < f(z) + \epsilon, \forall z \in K.$$

Với mọi $x \in K$, do $h_x(x) = f(x)$ và tính liên tục, tồn tại cầu mở V_x tâm x sao cho $f(z) - \epsilon < h_x(z), \forall z \in V_x \cap K$.
Họ $\mathcal{P} = \{V_x, x \in K\}$ là phủ mở của K. Từ tính chất Heine-Borel, tồn tại hữu hạn tập $V_{x_1}, \cdots, V_{x_q}$ phủ K. Đặt $g = \max(h_{x_1}, \cdots, h_{x_q})$. Theo Bổ đề 3, $g \in \overline{\mathcal{A}}$ và

$$f(z) - \epsilon < g(z), \ z \in K.$$

Dễ thấy g là hàm cần tìm. $\square$

4.6 Hệ qủa. *Mọi hàm liên tục trên* $\mathbf{R}$ *và có chu kỳ* T *có thể xấp xỉ đều bởi dãy đa thức lượng giác* $P_k(x) = a_{k,0} + \sum_{p=1}^{N_k}(a_{k,p}\sin(\frac{2\pi px}{T}) + b_{k,p}\cos(\frac{2\pi px}{T}))$.

Chứng minh: Để ý là một hàm liên tục trên $\mathbf{R}$, có chu kỳ $T > 0$ là thác triển của một hàm thuộc $C[0,T]$. Vậy để chứng minh chỉ cần kiểm tra tập các đa thức lượng giác thỏa điều kiện định lý Stone-Weierstrass. $\square$

4.7 Hệ qủa. *Mọi hàm liên tục trên tập compact trong* $\mathbf{R}^n$ *đều có thể xấp xỉ đều bởi dãy hàm đa thức* n *biến.*

4.8 Hệ qủa. *Cho* $K_1 \subset \mathbf{R}^{n_1}$ *và* $K_2 \subset \mathbf{R}^{n_2}$ *là các tập compact,* $\mathcal{A}_1$ *và* $\mathcal{A}_2$ *là các đại số hàm trên* K_1, K_2 *tương ứng. Nếu* $\mathcal{A}_1$ *và* $\mathcal{A}_2$ *là tách điểm và chứa hàm hằng, thì mọi hàm* $f \in C(K_1 \times K_2)$ *đều có thể xấp xỉ đều bởi hàm có dạng* $\sum_{i=1}^{k} g_i(x)h_i(y)$ *, trong đó* $g_i \in \mathcal{A}_1, h_i \in \mathcal{A}_2, k \in \mathbf{N}$.

Chứng minh: Chỉ cần kiểm tra các hàm có dạng trên là đại số hàm liên tục trên $K_1 \times K_2$, tách điểm và chứa hàm hằng, rồi áp dụng định lý Stone-Weierstrass. $\square$

Nhận xét. Định lý Stone-Weierstrass tuy khẳng định khả năng xấp xỉ đều hàm liên tục trên tập compact bởi đa thức hay đa thức lượng giác, nhưng việc chứng minh không cho phép xây dựng tường minh dãy hàm xấp xỉ. Để tính toán cụ thể (xác định hệ số đa thức xấp xỉ) cần nhiều giả thiết hơn về hình học của tập hay về tính chất của hàm. Chẳng hạn, hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ có thể xấp xỉ bởi dãy đa thức Bernstein. Tổng quát hơn, nếu K là hình hộp trong $\mathbf{R}^n$, ta có
Bài tập: Cho $f \in C[0,1]^n$. **Đa thức Bernstein thứ** k của f được định nghĩa

$$B_k(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{0\le p_1,\cdots,p_n\le k} C_k^{p_1}\cdots C_k^{p_n} f(\frac{p_1}{k},\cdots,\frac{p_n}{k}) x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}(1-x_1)^{k-p_1}\cdots(1-x_n)^{k-p_n}.$$

Chứng minh dãy (B_k) hội tụ đều về f.

Một hướng phát triển khác là việc nghiên cứu lớp các hàm có thể biểu diễn một cách địa phương như chuỗi lũy thừa: lý thuyết hàm giải tích.

IV. Đạo hàm

1. ĐẠO HÀM

Trước khi đưa ra định nghĩa, ta có nhận xét sau:
Cho U là tập mở trong $\mathbf{R}$. Hàm $f : U \to \mathbf{R}$ là khả vi tại $a \in U$ nếu tồn tại số thực $f'(a)$, sao cho

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

i.e. $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$,
i.e. $f(x)$ có thể xấp xỉ bởi hàm bậc nhất $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, với x đủ gần a.

1.1 Định nghĩa. Cho U là tập con mở trong $\mathbf{R}^n$. Ánh xạ $f : U \to \mathbf{R}^m$ gọi là **khả vi tại** $a \in U$ nếuu tồn tại ánh xạ tuyến tính $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, sao cho

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} \to 0, \quad \text{khi} \quad h \to 0.$$

Khi đó, A gọi là **đạo hàm của** f **tại** a và ký hiệu $Df(a)$ hay $f'(a)$.
Nhận xét. Theo định nghĩa, nếu f khả vi tại a, ta có

$$f(a+h) \ = \ f(a) \ + Df(a)h \ + \ o(h),$$

trong đó $o(h)$ ký hiệu các hàm $\varphi(h)$ thỏa: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$
Như vậy f khả vi tại a khi và chỉ khi f có thể xấp xỉ bậc nhất ở lân cận a, bởi ánh xạ affin T. Khi đó

$$T(x) = f(a) + Df(a)(x-a)$$

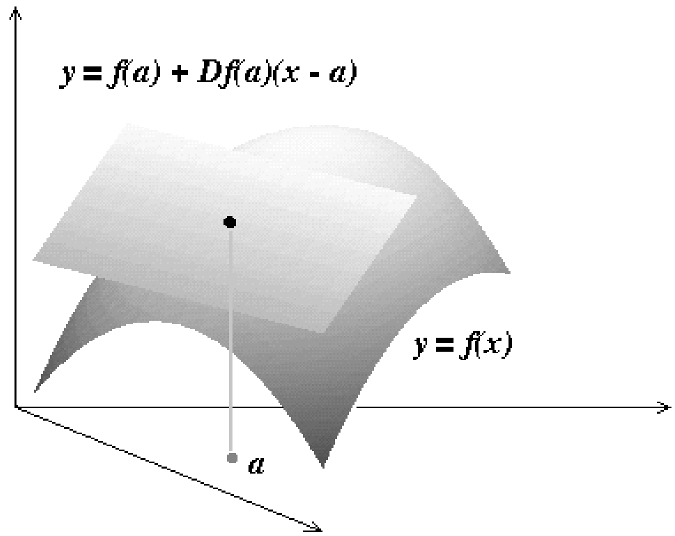
gọi là **ánh xạ tiếp xúc với** f **tại** a .
Về mặt hình học, tính khả vi của f tại a tương đương với sự tồn tại phẳng tiếp xúc với đồ thị tại $(a, f(a))$. Khi đó đồ thị của f

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m : y = f(x), x \in U\} \ ,$$

có phẳng tiếp xúc là đồ thị của ánh xạ tiếp xúc T

$$T_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m : y = T(x) = f(a) + Df(a)(x-a), x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Vì ta có $d((x, f(x)); T_a) \leq d(f(x), T(x)) = o(\|x-a\|)$, khi $x \to a$.



Mệnh đề.
(i) *Nếu f khả vi tại a thì ánh xạ tuyến tính $Df(a)$ là duy nhất.*
(ii) *Nếu f khả vi tại a, thì nó liên tục tại đó.*

Chứng minh: Nếu A, B là các ánh xạ tuyến tính thoả Định nghĩa 1.1, khi đó

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|A(h) - B(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Từ tính tuyến tính, suy ra với mọi $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, ta có

$$\frac{\|A(x) - B(x)\|}{\|x\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|A(tx) - B(tx)\|}{\|tx\|} = 0$$

Vậy $A(x) = B(x), \forall x \in \mathbf{R}^n$, i.e. $A = B$.
Nếu f có đạo hàm $Df(a)$, thì

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}(f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)) + \lim_{x\to a} Df(a)(x-a) = 0$$

Vậy f liên tục tại a. □

Ví dụ.
a) Đạo hàm của hàm hằng tại mọi điểm là ánh xạ tuyến tính 0.
b) Đạo hàm của ánh xạ tuyến tính T tại mọi điểm là chính nó, i.e. $DT(a) = T, \forall a$.

Bài tập: Tìm ví dụ các hàm số không khả vi.

Nhận xét. (i) Trường hợp hàm 1 biến, để ý là mọi ánh xạ tuyến tính $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, đều có dạng $h \mapsto < A, h >$, với $A \in \mathbf{R}^m$ nào đó. Như vậy trong trường hợp này đạo hàm được đồng nhất một cách tự nhiên với vector (hay ma trận cột) $A \in \mathbf{R}^m$.
Trong trường hợp này, đạo hàm hàm 1 biến được tính bởi $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(ii) *Không thể* tính đạo hàm bằng giới hạn nêu trên trong trường hợp số biến $n > 1$, vì nói chung phép chia $\dfrac{y}{h}$, với $y \in \mathbf{R}^m$, $h \in \mathbf{R}^n$, là không được định nghĩa.

Theo quan điểm tính toán: mọi ánh xạ tuyến tính $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ được đồng nhất với một ma trận cấp $m \times n$, khi ta cố định cơ sở trên $\mathbf{R}^n$ và $\mathbf{R}^m$. Vậy khi sử dụng cở sở chính tắc, ma trận $Jf(a)$ biểu diễn đạo hàm $Df(a)$ được xác định như thế nào ?
Trước hết để ý rằng với vector thứ j, $e_j \in \mathbf{R}^n$, trong cơ sở chính tắc (khi viết dới dạng ma trận cột), theo phép nhân ma trận, ta có

$$Jf(a)e_j = \text{ cột thứ } j \text{ của ma trận } Jf(a).$$

Từ định nghĩa đạo hàm tại a, ta có

$$Df(a)(te_j) = f(a + te_j) - f(a) + o(t).$$

Ta có định nghĩa:

1.2 Đạo hàm riêng. Đạo hàm riêng theo biến thứ j **của hàm** f **tại** a , ký hiệu $D_jf(a)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, là giới hạn (nếu tồn tại)

$$D_jf(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}.$$

Như vậy để tính $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ tại $a = (a_1, \cdots, a_n)$ ta cố định các biến $x_k = a_k$, với $k \neq j$, và lấy đạo hàm hàm một biến $x_j \mapsto f(a_1, \cdots, x_j, \cdots, a_n)$ tại a_j.
Tổng quát hơn, cho $e \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, ta định nghĩa **đạo hàm theo hướng** e **của hàm** f **tại** a, là giới hạn (nếu tồn tại)

$$D_ef(a) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}.$$

Nhận xét. Đạo hàm theo hướng đánh gía độ biến thiên của f theo hướng e tại a.

Ví dụ.
a) Cho $f(x, y) = x^y$. Từ công thức tính đạo hàm hàm một biến, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln y \quad (x, y > 0).$$

b) Cho $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Tính theo định nghĩa, ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, \quad \text{tương tự} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

1.3 Ma trận Jacobi. Cho $f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$.
Nếu f khả vi tại $a \in U$, thì ma trận biểu diễn $Df(a)$ trong cơ sở chính tắc gọi là **ma trận Jacobi của** f **tại** a , ký hiệu $Jf(a)$. Từ các nhận xét trên suy ra:

Mệnh đề. *Nếu f khả vi tại a, thì nó có mọi đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, m)$*, và ma trận Jacobi*

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Như vậy $Df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \mapsto dy = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = Jf(a)dx$$

Ta có cách viết vi phân cổ điển:

$$\begin{cases} df_1 & = & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)dx_n \\ \vdots & & \vdots \\ df_m & = & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a)dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)dx_n \end{cases}$$

Ví dụ.
a) Hàm $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, x + y, xy)$ là khả vi tại mọi $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, và ma trận Jacobi

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

b) Xét hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Hàm có hàm tiếp xúc tại (x_0, y_0) là $T(x, y) = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$.
Đồ thị hàm là paraboloid cho bởi phương trình $z = x^2 + y^2$, trong $\mathbf{R}^3$.
Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị tại (x_0, y_0, z_0) là đồ thị hàm T

$$z - z_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0).$$

Để ý là phương trình trên có thể suy từ vi phân $dz = 2x_0dx + 2y_0dy$.

1.4 Quan hệ giữa đạo hàm và đạo hàm riêng.
Nếu f có đạo hàm tại a, thì f có đạo hàm riêng theo mọi hướng tại a.
Nếu f có các đạo hàm riêng tại a, thì *không thể* suy ra f khả vi tại a.
Ví dụ hàm $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Nhưng $Df(0, 0)$ không tồn tại. Thật vậy, do f có các đạo hàm riêng, nên theo định nghĩa và mệnh đề trên, f khả vi tại $(0, 0)$ khi và chỉ khi

$$\frac{\left| f(h, k) - f(0, 0) - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0\ , \text{ khi } (h, k) \to (0, 0).$$

i.e. $\dfrac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$, khi $(h,k) \to (0,0)$, điều này không có.
Tuy nhiên, nếu thêm điều kiện, ta có

Mệnh đề. *Cho $f : U \to \mathbf{R}^m$, $U \subset \mathbf{R}^n$ mở. Nếu các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \cdots, n$, liên tục trên U, thì f khả vi tại mọi $x \in U$.*

Chứng minh: Chỉ cần chứng minh cho $m = 1$ (?). Với $h = (h_1, \cdots, h_n)$ gần 0,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} (f(x+v_j) - f(x+v_{j-1})), \quad \text{với} \quad v_j = (h_1, \cdots, h_j, 0, \cdots, 0).$$

Với mỗi j, áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm 1 biến $g_j(h_j) = f(x+v_j)$, ta có

$$f(x+v_j) - f(x+v_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(c_j)h_j, \quad \text{với} \quad c_j = v_{j-1} + \theta_j h_j e_j, \ 0 < \theta_j < 1.$$

Từ giả thiết liên tục của các đạo hàm riêng tại x suy ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} |f(x+h) - f(x) - \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)h_j| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} |\sum_j (\frac{\partial f}{\partial x_j}(c_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x))h_j| = 0,$$

i.e. hàm f khả vi tại x. □

2. CÁC QUI TẮC CƠ BẢN - ĐỊNH LÝ PHẦN GIA

Dựa vào định nghĩa đạo hàm, bằng phương pháp chứng minh như trường hợp một biến dễ dàng suy ra

2.1 Các qui tắc cơ bản.

Tổng : *Nếu f, g khả vi tại x, thì $f + g$ cũng khả vi tại x và*

$$D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$$

Tích : *Nếu f, g khả vi tại x và $m = 1$, thì fg khả vi tại x và*

$$D(fg)(x) = Df(x)g(x) + f(x)Dg(x)$$

Thương : *Nếu f, g khả vi tại x và $g(x) \neq 0$, thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi tại x và*

$$D(\frac{f}{g})(x) = \frac{Df(x)g(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}$$

Hợp : *Cho $f : U \longrightarrow V$ và $g : V \longrightarrow W$, U, V, W là các tập mở trong $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p$ tương ứng. Nếu f khả vi tại x, g khả vi tại $y = f(x)$, thì $g \circ f$ khả vi tại x và*

$$Dg \circ f(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Chứng minh: Ở đây chỉ trình bày chứng minh công thức đạo hàm hàm hợp.
Theo gỉa thiết, ta có $f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \varphi_1(h)$, với $\varphi_1(h) = o(\|h\|)$.
Tương tự, $g(f(x)+k) = g(f(x)) + Dg(f(x))k + \varphi_2(k)$, với $\varphi_2(k) = o(\|k\|)$.
Suy ra

$$\begin{aligned} g\circ f(x+h) &= g(f(x) + \underbrace{Df(x)h + \varphi_1(h)}_{k}) \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x))Df(x)h + Dg(f(x))\varphi_1(h) + \varphi_2(Df(x)h + \varphi_1(h)) \end{aligned}$$

Xét 2 hạng tử cuối của đẳng thức trên. Từ bài tập II.2.1 ta có

$$\|Dg(f(x))\varphi_1(h)\| \le \|Dg(f(x))\|\|\varphi_1(h)\| = o(\|h\|),$$

$$\|\varphi_2(Df(x)h + \varphi_1(h))\| = o(\|Df(x)\|\|h\| + \|\varphi_1(h)\|) = o(\|h\|).$$

Từ đó suy ra $g\circ f$ khả vi tại x và $D(g\circ f)(x) = D(g(fx))Df(x)$. □

Qui tắc dây chuyền: Trong thực hành công thức đạo hàm hàm hợp tương ứng phép nhân các ma trận Jacobi

$$Jh(x) = Jg(f(x))Jf(x)$$

Cụ thể, nếu ký hiệu
$f(x) = (f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$,
$g(y) = (g_1(y_1,\cdots,y_m),\cdots,g_p(y_1,\cdots,y_m))$,
và thay biến $y = f(x)$, ta có hàm hợp
$h(x) = g\circ f(x) = (h_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,h_p(x_1,\cdots,x_n))$,
thì phép nhân các ma trận trên là

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Suy ra qui tắc sau

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_j} + \cdots \frac{\partial g_i}{\partial y_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$$

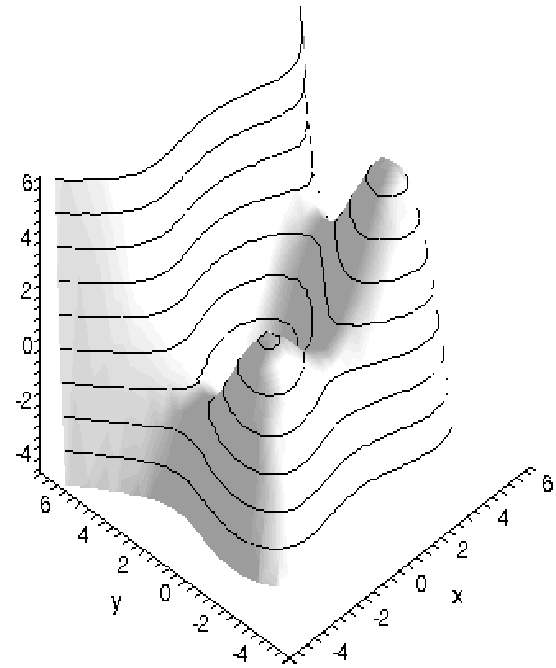
Ví dụ. Giả sử $f(x,y)$ là hàm khả vi theo 2 biến x,y. Nếu $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, đặt $h(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Khi đó

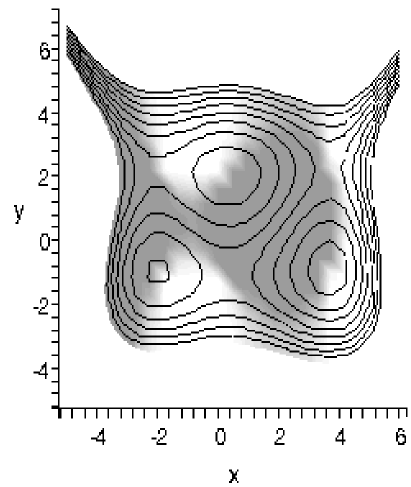
$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi, \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\varphi.$$

Gradient - Vector vận tốc. Cho $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ khả vi. Khi đó **gradient** của f tại x, được ký hiệu và định nghĩa là vector

$$\nabla f(x) = \text{ grad } f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)).$$

Với $c \in \mathbf{R}$, tập $M_c = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = c\} = f^{-1}(c)$ gọi là **mặt mức** (Để hình dung hãy vẽ đồ thị f và các mặt mức khi $n = 2$).





Cho $\gamma : (-1, 1) \longrightarrow \mathbf{R}^n$ khả vi. Khi đó ảnh của γ là một đường cong trơn trong $\mathbf{R}^n$ (hình dung nó mô tả qũy đạo của chuyển động nào đó theo thời gian t). Khi đó

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)}{\Delta t}.$$

Vì vậy $\gamma'(t)$ được gọi là **vector vận tốc của chuyển động** γ **tại thời điểm** t. Về mặt hình học, vector $\gamma'(t)$ là vector chỉ phương tiếp tuyến với đường cong γ tại $\gamma(t)$.
Nếu γ nằm trên mặt mức M_c, i.e. $\gamma(t) \in M_c, \forall t$, thì theo công thức đạo hàm hàm hợp

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) =< \text{ grad} f(\gamma(t)), \gamma'(t) >= 0.$$

Về mặt hình học vector grad $f(x)$ vuông góc với mặt mức của M_c tại x.
Vậy phương trình phẳng tiếp xúc với M_c tại $a = (a_1, \cdots, a_n)$ là

$$< \text{ grad} f(a), x - a >= 0 \quad \text{hay} \quad D_1 f(a)(x_1 - a_1) + \cdots + D_n f(a)(x_n - a_n) = 0.$$

Nhận xét. Cho $v \in \mathbf{R}^n$. Khi đó $f(a + tv) = f(a) + < \text{ grad} f(a), v > t + o(t)$.
Vậy $< \text{ grad} f(a), v >$ quyết định sự biến thiên của f ở lân cận a theo hướng v.
Theo bất đẳng thức Schwarz: $| < \text{ grad} f(a), v > | \leq \| \text{ grad} f(a) \| \|v\|$, và dấu $=$ xảy ra khi và chỉ khi $v = \lambda \text{ grad} f(a)$. Như vậy hướng $\pm$ grad $f(a)$ chính là hướng mà hàm f biến thiên nhanh nhất (cùng hướng thì tăng nhanh nhất, ngược hướng thì giảm nhanh nhất). Vì vậy, hướng gradient thường được chọn để tìm cực trị hàm f.

2.2 Hàm khả vi liên tục. Cho $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $U \subset \mathbf{R}^n$ mở. Ta nói f **khả vi liên tục trên** U hay f thuộc lớp C^1, nếuu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \cdots, n$, liên tục trên U.
Nói cách khác ánh xạ $Df : U \longrightarrow L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ là ánh xạ liên tục. (?)

2.3 Định lý phần gia.
Trong lý thuyết hàm một biến ta có
Định lý giá trị trung bình (Lagrange).*Cho* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ *liên tục. Giả sử* g *khả vi trên* (a, b)*. Khi đó*

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a), \quad \text{với } c \text{ nào đó mà } a < c < b.$$

Trường hợp hàm nhiều biến, i.e. $n > 1, m = 1$, ta có thể mở rộng định lý trên:
Mệnh đề. *Cho* $f : U \to \mathbf{R}$, $U \subset \mathbf{R}^n$ *mở. Giả sử* f *khả vi trên* U*. Khi đó, nếu đoạn* $[x, x+h] = \{x + th, t \in [0, 1]\} \subset U$*, thì*

$$f(x + h) - f(x) = Df(x + \theta h)h, \quad \text{với } 0 < \theta < 1.$$

Bài tập: Áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm 1 biến $g(t) = f(x + th)$ và công thức đạo hàm hợp, chứng minh mệnh đề trên.
Trường hợp ánh xạ, i.e. khi $m > 1$, không thể có dạng đẳng thức như định lý trên. Nói chung *không thể* tìm được giá trị trung bình để có được đẳng thức. Chẳng hạn, hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f(x) = (x^2, x^3)$. Khi đó phương trình sau là vô nghiệm

$$f(1) - f(0) = Df(c)(1 - 0) \quad \Leftrightarrow \quad (1, 1) - (0, 0) = (2c, 2c^2)$$

Bài tập: Cho $f(x, y) = (e^x \cos y, e^y \sin y)$. Khi đó đẳng thức cho định lý giá trị trung bình không thể có.
Tuy nhiên ta có dạng bất đẳng thức của định lý giá trị trung bình cho trường hợp tổng quát:

Định lý phần gia. *Cho* $f : U \to \mathbf{R}^m$*, là khả vi trên tập mở* $U \subset \mathbf{R}^n$*. Nếu đoạn* $[x, x+h] \subset U$*, thì*

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|Df(x + th)\| \|h\|.$$

Chứng minh: Trước khi chứng minh cần nhắc lại là ở Chương I, chuẩn của ánh xạ tuyến tính T được định nghĩa là

$$\|T\| = \sup_{\|h\|=1} \|Th\| \quad \text{và ta có} \quad \|Th\| \leq \|T\| \|h\|.$$

Để chứng minh định lý, xét $g(t) = f(x + th)$. Khi đó $g'(t) = Df(x + th)h$.
Theo định lý cơ bản của giải tích (hay công thức Newton-Liebniz), ta có

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 Df(x + th)hdt,$$

trong đó $\int_0^1 (\phi_1(t), \cdots, \phi_m(t))dt = (\int_0^1 \phi_1, \cdots, \int_0^1 \phi_m)$. Từ đó suy ra bất đẳng thức nêu trên. $\square$

Ví dụ. Nếu $f : U \to \mathbf{R}^m$ khả vi, U mở liên thông, và $Df(x) = 0, \forall x \in U$, thì $f \equiv$ const .

Nhận xét. Nếu $f : U \to \mathbf{R}^n$, $U \subset \mathbf{R}^n$, là thuộc lớp C^1, và K là tập compact chứa trong U, thì tồn tại $L > 0$ sao cho f thoả **điều kiện Lipschitz** sau:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in K.$$

Đặc biệt, nếu $0 < L < 1$, và $f : K \to K$, thì f là ánh xạ co trên K.

3. ĐẠO HÀM CẤP CAO - CÔNG THỨC TAYLOR

Nhận xét: Giả sử $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^m$ khả vi trên tập mở $U \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó ta có **ánh xạ đạo hàm** $Df : U \to L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, trong đó $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ ký hiệu không gian mọi ánh xạ tuyến tính $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, nó đồng nhất với không gian các $m \times n$-ma trận, và do vậy với không gian vector $\mathbf{R}^{mn}$. Vậy có thể định nghĩa đạo hàm của hàm Df tại $a \in U$, và gọi là đạo hàm cấp 2. Đạo hàm cấp 2 tại a sẽ là ánh xạ tuyến tính $\mathbf{R}^n \longrightarrow L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \equiv \mathbf{R}^{mn}$. Tương tự, có thể định nghĩa qui nạp cho đạo hàm cấp cao. Tuy nhiên, định nghĩa như vậy đòi hỏi phải "leo" lên các không gian: $L(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m))$, $L(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m))), \cdots$ (!).

Ta sẽ định nghĩa đạo hàm cấp cao theo quan điểm tính toán, dễ tiếp cận hơn.

3.1 Đạo hàm riêng cấp cao. Giả sử tồn tại đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ trên U. Khi đó $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, nếu tồn tại, gọi là **đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f theo biến thứ (i, j), tại a** . Ký hiệu

$$D_j D_i f(a) \text{ hay } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Tương tự, có thể định nghĩa **đạo hàm riêng cấp k** $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a)$.

Ta nói f **khả vi liên tục cấp k trên U** hay f **thuộc lớp C^k trên U** , nếuu f có mọi đạo hàm riêng cấp $\leq k$ và chúng liên tục trên U.

Bài tập: Hàm $f(x, y) = yx^2 \cos y^2$ có $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \boxed{\ ?\ }$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \boxed{\ ?\ }$

Ví dụ sau chỉ ra $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, i.e. *nói chung đạo hàm cấp cao không có tính đối xứng.*

Xét $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ nếu $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.
Khi đó $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$, còn $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$ (?)
Tuy nhiên ta có

Mệnh đề (tính đối xứng của đạo hàm cấp cao). *Nếu f có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục tại x (đặc biệt khi f thuộc lớp C^2), thì*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x),\ \forall i,j.$$

Kết qủa có thể suy rộng cho $f \in C^k$ đối với các đạo hàm riêng cấp $\leq k$.

Chứng minh: Một chứng minh đơn giản là dựa vào công thức Fubini mà ta sẽ đề cập ở chương tích phân. (bài tập Chương IV). Ở dây chứng minh dựa vào sai phân. Chỉ cần lập luận cho hàm 2 biến. Xét

$$S_{h,k} = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y)$$

Đặt $g_k(u) = f(u, y+k) - f(u,y)$. Khi đó theo định lý gía trị trung bình ta có

$$\begin{aligned}
S_{h,k} &= g_k(x+h) - g_k(x) = g_k'(c)h, \quad \text{với } c \in (x, x+h) \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x}(c, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,y))h \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c,d)hk, \quad \text{với } d \in (y, y+k).
\end{aligned}$$

Hoán vị hai số hạng giữa của $S_{h,k}$. Đặt $g_h(v) = f(x+h, v) - f(x,v)$. Lập luận tương tự, ta có

$$S_{h,k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c', d')kh, \quad \text{với } \ c' \in (x, x+h), d' \in (y, y+k).$$

Từ tính liên tục của đạo hàm cấp 2, qua giới hạn $h, k \to 0$ của $S_{h,k}$, ta có kết qủa cần tìm. □

3.2 Công thức Taylor.
Nhắc lại công thức Taylor cho hàm 1 biến.
Cho $g : (a,b) \to \mathbf{R} \in C^k$. Khi đó nếu $x, x+h \in (a,b)$, thì tồn tại $\theta \in (0,1)$, sao cho

$$g(x+h) = g(x) + \frac{1}{1!}g'(x)h + \frac{1}{2!}g''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(x)h^{k-1} + \frac{1}{k!}g^k(x+\theta h)h^k.$$

Có thể chuyển công thức trên cho hàm nhiều biến $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, bằng cách đưa về xét hàm một biến $g(t) = f(x+th), \ \ t \in [0,1]$.
Để thuận tiện cho việc phát biểu công thức, trước hết ta đa vào các ký hiệu.

$$\nabla = (D_1, \cdots, D_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}).$$

Nếu $h = (h_1, \cdots, h_n)$, đặt

$$h\nabla = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$(h\nabla)^k = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

Ta xem các ký hiệu trên như là các "toán tử", khi tác động vào hàm f thì biểu thức hình thức sẽ có một nội dung rõ ràng, chẳng hạn

$$(h\nabla) f = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Tổng quát

$$(h\nabla)^k f = \sum_{i_1, \cdots, i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k} \quad \text{đa thức thuần nhất bậc } k \text{ theo } h_1, \cdots, h_n.$$

Với các ký hiệu nêu trên ta có

Định lý. *Cho $f : U \to \mathbf{R}$ là hàm lớp C^k trên tập mở $U \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó vớ mọi đoạn $[x, x+h] \subset U$, tồn tại $\theta \in (0,1)$, sao cho*

$$f(x+h) = f(x) + h\nabla f(x) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}(h\nabla)^{k-1} f(x) + \frac{1}{k!}(h\nabla)^k f(x+\theta h)$$

Chứng minh: Chỉ là việc áp dụng công thức Taylor cho hàm 1 biến $g(t) = f(x+th)$, với chú ý là theo công thức đạo hàm hợp dễ qui nạp

$$g^{(k)}(t) = (h\nabla)^k f(x+th). \qquad \square$$

Nhận xét: Công thức Taylor cho phép xấp xỉ hàm khả vi lớp C^k f tại lân cận mỗi điểm x bởi **đa thức Taylor bậc** k tại x:

$$T_x^k(h) = f(x) + h\nabla f(x) + \cdots + \frac{1}{k!}(h\nabla)^k f(x),$$

với phần dư

$$R_k(x,h) = \frac{1}{k!}\Big((h\nabla)^k f(x+\theta h) - (h\nabla)^k f(x)\Big), \quad 0 < \theta < 1.$$

Ta có $|f(x+h) - T_x^k(h)| = |R_k(x,h)| = o(\|h\|^k)$, do $f \in C^k$.

Chú ý: Nếu $f \in C^\infty$, thì ta có **chuỗi Taylor của** f **tại** x_0 là chuỗi lũy thừa

$$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}((x-x_0)\nabla)^k f(x_0).$$

Nói chung $Tf(x)$ không hội tụ, chẳng hạn $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}\cos k^2 x$.
Hơn nữa, ngay cả trong trường hợp $Tf(x)$ hội tụ không chắc ta có $Tf(x) = f(x)$. Chẳng hạn $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
Trong trường hợp chuỗi Taylor của f hội tụ về chính hàm f, ta nói f **giải tích tại** x_0.
Chẳng hạn, hàm số f thỏa $|f^{(k)}(x)| \leq M^k$, $\forall x \in (a,b)$, $\forall k \in \mathbf{N}$, là giải tích trên (a,b).

3.3 Ứng dụng vào bài toán cực trị. Cho $f : U \to \mathbf{R}$, $U \subset \mathbf{R}^n$ mở.
Hàm f gọi là đạt **cực đại** tại $a \in U$ nếuu $f(a) \geq f(x)$ với mọi x ở lân cận a.
Hàm f gọi là đạt **cực tiểu** tại $a \in U$ nếuu $f(a) \leq f(x)$ với mọi x ở lân cận a.
Hàm f gọi là đạt **cực trị** tại a nếuu f đạt cực tiểu hay cực đại tại đó.
Nếu f khả vi, thì a gọi là **điểm dừng** hay **điểm tới hạn** của f nếuu $Df(a) = 0$.
Chú ý: Hãy phân biệt $\max, \min$ (có tính toàn cục) và cực tiểu, cực đại (có tính địa phương).
Phần này ta áp dụng công thức Taylor để xét cực trị địa phương của f.

Điều kiện cần. *Giả f khả vi trên U. Nếu f đạt cực trị tại $a \in U$, thì $Df(a) = 0$, i.e. tập các điểm cực trị chứa trong tập các điểm dừng.*

Chứng minh: Với mỗi i hàm 1 biến $g_i(t) = f(a + te_i)$ đạt cực trị tại $t = 0$.
Suy ra $g_i'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Vậy $Df(a) = 0$. □

Nhận xét: (i) Điều kiện trên chỉ là điều kiện cần. Chẳng hạn, hàm có điểm uốn $f(x) = x^3$ hay hàm có điểm yên ngựa $f(x,y) = x^2 - y^2$.
(ii) Trong trường hợp 1 biến để xem điểm dừng có phải là cực trị hay không, ta có thể xét chiều biến thiên của f thông qua dấu của f'. Ngoài ra, khi f có đạo hàm cấp 2, nếu $f''(a) > 0$, thì f đạt cực tiểu tại a; còn nếu $f''(a) < 0$, thì hàm đạt cực đại tại đó.
(iii) Đối với f là dạng toàn phương 2 biến, ta có các dạng chính tắc:

$$x^2 + y^2,\ -x^2 - y^2,\ x^2 - y^2,\ x^2,\ -x^2,\ 0.$$

Hai dạng đầu $(0,0)$ là cực trị (điểm loại Parabol). Dạng thứ ba $(0,0)$ không là cực trị (điểm loại Hyperbol hay điểm yên ngựa). Các dạng còn lại suy biến.
Để xem điểm dừng có là cực trị không trong trường hợp tổng quát, ta cần phần bậc hai của khai triển Taylor.

Hess. Nếu f thuộc lớp C^2, thì **Hess của** f **tại** a, ký hiệu $Hf(a)$, là dạng toàn phương (sinh từ đạo hàm cấp 2):

$$\mathbf{R}^n \ni h \mapsto Hf(a)(h) = (h\nabla)^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \in \mathbf{R}.$$

Từ công thức Taylor suy ra

Điều kiện đủ. *Giả sử f thuộc lớp C^2 và $Df(a) = 0$. Khi đó*
Nếu $Hf(a)$ xác định dương, i.e $Hf(a)(h) > 0, \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, thì f đạt cực tiểu tại a.
Nếu $Hf(a)$ xác định âm, i.e. $Hf(a)(h) < 0, \forall h \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, thì f đạt cực đại tại a.
Nếu $Hf(a)$ không xác định dấu, thì f không đạt cực trị tại a.

Chứng minh: Theo công thức Taylor, ta có

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2}Hf(a)(h) + o(\|h\|^2)$$

Do $Df(a) = 0$, nếu $Hf(a) > 0$, thì tồn tại $m = \min\limits_{\|h\|=1} Hf(a)(h) > 0$. Suy ra $Hf(a)(h) \geq m\|h\|^2, \forall h \in \mathbf{R}^n$. Vậy f đạt cực tiểu tại a.
Các trường hợp khác chứng minh tương tự. □

Theo giáo trình Đại số tuyến tính, ta có phương pháp Lagrange để đưa một dạng toàn phương về dạng chính tắc. Từ đó (dựa vào chỉ số quán tính) suy ra tính xác định dấu của dạng toàn phương. Ngoài ra, ta còn có tiêu chuẩn sau

Tiêu chuẩn Sylvester. *Cho dạng toàn phương* $H(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j, \quad h \in \mathbf{R}^n$.
Xét dấu các định thức chính $D_k = \det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$. *Khi đó*
(i) *H xác định dương khi và chỉ khi $D_1 > 0, D_2 > 0, \cdots, D_n > 0$.*
(ii) *H xác định âm khi và chỉ khi $D_1 < 0, D_2 > 0, \cdots, (-1)^n D_n > 0$.*

Ví dụ. Xét cực trị hàm $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Điểm tới hạn của f là nghiệm hệ phương trình

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0.$$

Suy ra các nghiệm: $(0,0)$ hay $(1,1)$.
Ma trận Hess của f

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Tại $(0,0)$: $D_2 = -9 < 0$, i.e $Hf(0,0)$ không xác định dấu. Vậy $(0,0)$ không là cực trị.
Tại $(1,1)$: $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 27 > 0$, i.e. $Hf(1,1) > 0$. Vậy f đạt cực tiểu tại $(1,1)$.

Nhận xét: Nếu Hess suy biến, dựa vào công thức Taylor cần xét đến đạo hàm cấp cao hơn.
Bài tập: tìm điều kiện tổng quát cho bài toán cực trị đối với hàm 1 biến khả vi.

4. ĐỊNH LÝ HÀM NGƯỢC - ĐỊNH LÝ HÀM ẨN

Cho $f : U \to \mathbf{R}^m$. Nếu f khả vi liên tục, thì theo định nghĩa đạo hàm (và tính liên tục của nó), có thể đoán nhận là tính chất địa phương của f tại a, i.e. tính chất của f ở lân cận a, được xác định bởi ánh xạ tuyến tính $Df(a)$. Cụ thể:
(i) Nếu $Df(a)$ là đơn ánh, thì f đơn ánh trên một lận cận của a.
(ii) Nếu $Df(a)$ là toàn ánh, thì f ánh xạ một lận cận của a lên một lân cận của $f(a)$.
(iii) Nếu $Df(a)$ là song ánh, thì f song ánh từ một lận cận của a lên một lân cận của $f(a)$.
Các đoán nhận trên được khẳng định qua định lý rất quan trọng sau.

4.1 Ánh xạ ngược địa phương.

Nhận xét : Xét hệ phương trình tuyến tính: $Ax = y,\ A \in Mat(n,n)$.
Theo định lý Cramer, nếu $\det A \neq 0$, thì A khả nghịch và ta có thể giải $x = A^{-1}y$.
Có thể nói gì về hệ phương trình phi tuyến ? Có thể giải $x_1, \cdots, x_n$ từ hệ

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) & = & y_1 \\ \cdots & & \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) & = & y_n\ , \end{cases}$$

theo biến $y_1, \cdots, y_n$?
Cần chú ý thêm trong trường hợp hàm số 1 biến số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, nếu f khả vi liên tục và $f'(a) \neq 0$, thì tồn tại hàm ngược f^{-1} tại lân cận a, hơn nữa f^{-1} cũng thuộc lớp C^1. Với các nhận xét trên và ánh xạ khả vi được "xấp xỉ" bởi đạo hàm ta có

Định lý hàm ngược. *Cho $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $U \subset \mathbf{R}^n$ mở. Giả sử f thuộc lớp C^k $(k \geq 1)$, và tại $a \in U$, $\det Jf(a) \neq 0$. Khi đó tồn tại lân cận V của a, W cuả $f(a)$, sao cho $f : V \longrightarrow W$ có ánh xạ ngược $f^{-1} : W \longrightarrow V$. Hơn nữa, f^{-1} thuộc lớp C^k và*

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}, \quad y = f(x), x \in V.$$

Chứng minh: Trước hết ta có các nhận xét
Nhận xét 1: Bằng phép tịnh tiến và biến đổi tuyến tính khả nghịch $Df(a)^{-1}$, ta đưa việc chứng minh định lý về trường hợp $a = f(a) = 0$ và $Df(0) = I_n$ (ánh xạ đồng nhất trên $\mathbf{R}^n$). (?)
Nhận xét 2: Để xây dựng ánh xạ ngược địa phương cần giải x theo y từ phương trình $y = f(x)$ tại lân cận 0. Với mọi $y \in \mathbf{R}^n$ xét hàm $g_y(x) = y + x - f(x)$. Nếu g_y, ở lân cận 0, là ánh xạ co thì tồn tại duy nhất x sao cho $g_y(x) = x$, i.e. phương trình $f(x) = y$ có thể giải x theo y.

Từ các nhận xét trên ta tiến hành chứng minh định lý theo các bước sau (với giả thiết của nhận xét 1)
Bước 1: Dùng nguyên lý ánh xạ co để xây dựng ánh xạ ngược địa phương.
Xét $g(x) = x - f(x)$. Ta có $Dg(0) = 0$. Do $g \in C^1$, áp dụng định lý giá trị trung bình ta có $r > 0$ đủ bé sao cho

$$\|g(x) - g(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|, \quad x, x' \in \overline{B}(0,r).$$

Suy ra với $\|y\| \le r/2,\ g_y : \overline{B}(0,r) \longrightarrow \overline{B}(0,r)$, và thoả

$$\|g_y(x) - g_y(x')\| \le \frac{1}{2}\|x - x'\|.$$

Theo nguyên lý ánh xạ co, tồn tại duy nhất $x \in \overline{B}(0,r)$ là điểm bất động của g_y, i.e. f có ánh xạ ngược địa phương $f^{-1} : \overline{B}(0,r/2) \longrightarrow \overline{B}(0,r)$.
Bước 2: Chứng minh f^{-1} liên tục.
Cho $y, y' \in \overline{B}(0,r/2)$. Khi đó $x = f^{-1}(y), x' = f^{-1}(y') \in \overline{B}(0,r)$. Theo định nghĩa của g ta có

$$\|x - x'\| \le \|f(x) - f(x')\| + \|g(x) - g(x')\| \le \|f(x) - f(x')\| + \frac{1}{2}\|x - x'\|.$$

Suy ra $\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| \le 2\|y - y'\|$. Vậy f^{-1} liên tục.
Bước 3: Nếu $r > 0$ đủ bé, thì $f^{-1} \in C^k$.
Do tính liên tục của det, $f \in C^k$, và $\det Df(a) \ne 0$; suy ra với $r > 0$ đủ bé, tồn tại $(Df(x))^{-1}, \forall x \in B(0,r)$.
Với $y = f(x), y' = f(x'),\ x, x' \in B(0,r)$, ta có

$$\begin{aligned}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y') - (Df(x))^{-1}(y - y')\| &= \|x - x' - (Df(x))^{-1}(Df(x)(x - x') + \\ +o(\|x - x'\|)\| = \|(Df(x))^{-1}(o\|x - x'\|)\| &= o(\|y - y'\|) \quad \text{(do bước 2)} .\end{aligned}$$

Vậy $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$, với $y = f(x)$.
Cụ thể hơn $Jf^{-1}(y) = \dfrac{1}{\det Jf(x)}(A_{ij}(x))_{n\times n}$,
trong đó $A_{ij}(x)$ là phần phụ đại số cuả $Jf(x)$ = tổng các tích các đạo hàm riêng cuả f tại x. Do vậy các phần tử của ma trận Jf^{-1} là các hàm thuộc lớp C^{k-1}. Vậy f^{-1} thuộc lớp C^k. □

Vi phôi. Một ánh xạ $f : U \to V$ gọi là một **vi phôi lớp** C^k hay là một **phép biến đổi lớp** C^k nếuu f là song ánh và f, f^{-1} là thuộc lớp C^k.
Ánh xạ f gọi là **vi phôi địa phương tại** a nếuu f là một vi phôi từ một lân cận của a lên một lân cận của $f(a)$.

Ví dụ. Xét phương trình $u(x,y) = e^x \cos y,\quad v(x,y) = e^x \sin y$. Khi đó có thể giải x, y theo u, v một cách địa phương vì

$$\det J(u,v) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \ne 0.$$

Chú ý:
(i) Định lý trên chỉ khẳng định tính khả nghịch địa phương. Chẳng hạn ví dụ trên cho thấy $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ là khả nghịch địa phương tại mỗi (x,y) nhưng *không khả nghịch* (toàn cục), i.e. vi phôi địa phương mà không phải là vi phôi (toàn cục), dù $\det Jf(x,y) \ne 0, \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$. (Hãy kiểm tra)
(ii) Định lý trên chỉ cho điều kiện cần để ánh xạ là khả nghịch địa phương. Chẳng hạn, hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, có hàm ngược $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, nhng $f'(0) = 0$.

4.2 Hệ qủa. *Cho* $f : U \to \mathbf{R}^m$, $U \subset \mathbf{R}^n$ *là tập mở. Giả sử* f *thuộc lớp* C^1 *và* $a \in U$. *Khi đó*
(i) *Nếu* $n < m$ *và* $Df(a)$ *là đơn ánh, i.e.* $rankDf(a) = n$, *thì tồn tại một vi phôi địa phương* g *từ lân cận của* $f(a)$ *lên lân cận* 0 *trong* $\mathbf{R}^m$, *sao cho*

$$g \circ f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0) \quad \textit{(phép nhúng)}$$

(ii) *Nếu* $n > m$ *và* $Df(a)$ *là toàn ánh, i.e.* $rankDf(a) = m$, *thì tồn tại một vi phôi địa phương* h *từ lân cận của* 0 *lên lân cận* a *trong* $\mathbf{R}^n$, *sao cho*

$$f \circ h(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_m) \quad \textit{(phép chiếu)}$$

Chứng minh: (i) Giả sử $Df(a)$ là đơn ánh. Bằng phép hoán vị tọa độ, có thể giả thiết $Jf(a)$ có n dòng đầu độc lập tuyến tính. Xét ánh xạ

$$\Phi : U \times \mathbf{R}^{m-n} \to \mathbf{R}^m, \Phi(x, y_{n+1}, \cdots, y_m) = f(x) + (0, \cdots, 0, y_{n+1}, \cdots, y_m)$$

Khi đó dễ kiểm tra $\Phi \in C^1$ và $J\Phi(a, 0)$ khả nghịch. Theo định lý trên Φ là vi phôi địa phương tại $(a, 0)$. Ta có $f(x) = \Phi(x, 0)$. Vậy $g = \Phi^{-1}$ thỏa (i).
(ii) Giả sử $Df(a)$ là toàn ánh. Có thể giả thiết $Jf(a)$ có m cột đầu độc lập tuyến tính. Xét ánh xạ

$$\Psi : U \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}, \Psi(x) = (f(x) - f(a), x_{m+1} - a_{m+1}, \cdots, x_n - a_n).$$

Khi đó dễ kiểm tra $\Psi \in C^1$ và $J\Psi(a)$ khả nghịch. Theo định lý trên Ψ là vi phôi địa phương tại a. Từ cách xây dựng Ψ, ta có $f(x) = pr \circ (\Psi(x) - f(a))$, với pr là phép chiếu xuống m tọa độ đầu. Vậy $h = (\Psi - f(a))^{-1}$ thỏa (ii) □

4.3 Hàm ẩn. Khi xét hàm ẩn, i.e. phương trình $F(x, y) = 0$, ta cần xác định khi nào y có thể giải theo x, $y = g(x)$, và tính khả vi của g ?
Bài tập: Xét cụ thể $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Chứng minh:
Có thể giải $y = g(x)$ tại lân cận mỗi $x = a \in (-1, 1)$ và để ý khi đó $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ (grad$F$ không song song với $0x$).
Không thể giải y theo x tại mọi lân cận $a = \pm 1$.
Nhận xét: Trước hết xét hệ phương trình tuyến tính:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +\cdots & +a_{1n}x_n & +b_{11}y_1 & +\cdots & +b_{1m}y_m & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{m1}x_1 & +\cdots & +a_{mn}x_n & +b_{m1}y_1 & +\cdots & +b_{mn}y_m & = & 0 \end{array}\right.$$

Đặt $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times m}$. Khi đó, nếu $\det B \neq 0$, thì có thể giải y theo x: $y = -B^{-1}Ax$.
Đối với hệ phương trình phi tuyến

$$\left\{\begin{array}{ccc} F_1(x, y) & = & 0 \\ \cdots & & \\ F_m(x, y) & = & 0 \end{array}\right.$$

trong đó $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$. Khi nào có thể giải y theo x ?
Lại dựa vào ý nghĩa của đạo hàm và định lý ánh xạ ngược ta có

Định lý hàm ẩn. *Cho $F : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ là tập mở, $(a,b) \in A$. Giả sử F thuộc lớp C^k $(k \geq 1)$, $F(a,b) = 0$, và định thức đạo hàm F theo biến y*

$$\frac{D(F_1,\cdots,F_m)}{D(y_1,\cdots,y_m)}(a,b) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Khi đó tồn tại lân cận $U \subset \mathbf{R}^n$ của a, $V \subset \mathbf{R}^m$ của b, và ánh xạ duy nhất $g : U \to V$ thuộc lớp C^k, sao cho phương trình

$$F(x,y) = 0,\ (x,y) \in U \times V \iff y = g(x),\quad x \in U, y \in V.$$

Hơn nữa, ta có

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)),\ x \in U.$$

Chứng minh: Đặt $f(x,y) = (x, F(x,y))$, rồi áp dụng định lý ánh xạ ngược. Suy ra tồn tại $f^{-1}(x,z) = (x, G(x,z))$, (x,z) thuộc lân cận $(a,0)$.
Khi đó hàm $g(x) = G(x,0)$ thoả kết luận của định lý.
Công thức đạo hàm suy từ công thức đạo hàm hợp. (Các chi tiết xem nh bài tập) □

Nhận xét: Để tính đạo hàm hàm ẩn, thường ta không dùng phép nhân ma trận trên, mà tính trực tiếp như sau. Từ $F(x,g(x)) = 0, x \in U$, áp dụng qui tắc dây chuyền suy ra đạo hàm hàm ẩn Dg, từ hệ phương trình:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_j} \;=\; 0,\quad i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,k,$$

Ta cũng có thể dùng công thức vi phân cổ điển để tính Dg. Chẳng hạn, với $m = 1$, nếu $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, thì $y = g(x_1,\cdots,x_n)$ tại lân cận (a,b). Khi thay $y = g(x)$, ta có $F(x_1,\cdots,x_n,y) = 0, x \in U$, suy ra

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

Từ $\dfrac{\partial F}{\partial y}dg = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial x_n}dx_n\right)$,
suy ra các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial g}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial F/\partial x_j}{\partial F/\partial y}$, $j = 1,\cdots,n$.

Ví dụ. Các ví dụ sau yêu cầu chi tiết hóa
a) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} xu + yv^2 = 0 \\ xv^3 + y^2u^6 = 0 \end{cases}$$

Theo định lý hàm ẩn, có thể giải u, v theo x, y ở lân cận $x = 1, y = -1, u = 1, v = -1$.
Còn ở lân cận $x = 0, y = 1, u = 0, v = 0$ thì sao?
Tính $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ tại $x = 1, y = -1$, và tại $x = 0, y = 1$ (nếu tồn tại).
b) Khi nào thì từ phương trình $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, có thể giải $y = g(x)$. Tính đạo hàm g dựa vào công thức vi phân cổ điển.

Chú ý: Rõ ràng là từ phương trình $F(x, y) = x^3 - y^3 = 0$, có thể giải duy nhất $y = x$, nhưng $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$: điều kiện trong định lý hàm ẩn chỉ là điều cần.

Ứng dụng. Xét đa thức bậc n, phụ thuộc tham số $u = (u_0, \cdots, u_{n-1})$:

$$P_u(x) = x^n + u_{n-1}x^{n-1} + \cdots + u_1 x + u_0$$

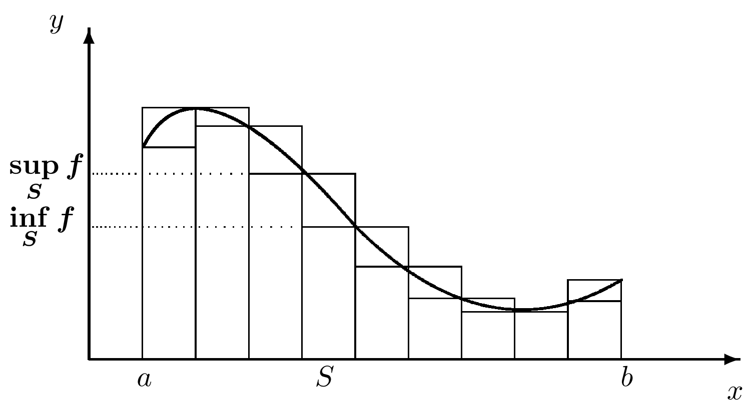
Giả sử khi $u = a$, x_0 là nghiệm đơn của P_a, i.e. $P_a(x_0) = 0, P_a'(x_0) \neq 0$.
Khi đó, theo định lý hàm ẩn, tồn tại lân cận U của a và V của x_0, sao cho với mọi $u \in U$, tồn tại duy nhất nghiệm $x(u) \in V$ của $P_u(x) = 0$.
Vậy các nghiệm đơn của đa thức về mặt địa phương là các hàm lớp C^∞ của tham số.
Cụ thể, xét phương trình bậc 3: $x^3 + px + q = 0$, với p, q là tham số.
Khi xét số nghiệm và nghiệm đơn đa đến biệt thức $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.
Trên miền $\Delta > 0$: có 1 nghiện đơn $x_*(p, q)$.
Trên miền $\Delta < 0$: có 3 nghiện đơn $x_-(p, q) < x_0(p, q) < x_+(p, q)$.
Trên nhánh $\Delta = 0, q > 0$: có 1 nghiện đơn $x_-(p, q) < 0$ và 1 nghiệm kép $x_{0+}(p, q)$.
Trên nhánh $\Delta = 0, q < 0$: có 1 nghiện kép $x_{0-}(p, q) < 0$ và 1 nghiệm đơn $x_+ > 0$.
Tại gốc $(p, q) = (0, 0)$: có 1 nghiệm bội ba $x = 0$.
Hơn nữa, x_* là hàm lớp C^∞ trên miền đầu, x_-, x_0, x_+ là các hàm lớp C^∞ trên miền thứ nhì.

Nhận xét: Định lý hàm ẩn và hàm ngược thuộc loại định lý tồn tại. Ta có thể dùng phương pháp ánh xạ co trong chứng minh để xây dựng dãy hàm hội tụ về hàm cần tìm.

V. Tích phân Riemann

1. TÍCH PHÂN

Xuất pháp từ bài toán trực quan về việc tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm dương trên một đoạn, ta xây dựng khái niệm tích phân Riemann sau.



1.1 Tích phân trên hình hộp.
Một **hình hộp** trong $\mathbf{R}^n$ là tập con dạng $A = [a_1, b_1] \times \cdots [a_n, b_n]$.
Thể tích hình hộp A là giá trị $v(A) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.
Một **phân hoạch** P của hình hộp A là việc chia các đoạn $[a_i, b_i], i = 1, \cdots, n$, bởi các điểm $a_i = c_{i0} < c_{i1} < \cdots < c_{im_i} = b_i$, rồi lập $m_1 m_2 \cdots m_n$ hình hộp con cuả A:

$$S = [c_{1i_1}, c_{1i_{1+1}}] \times \cdots \times [c_{ni_n}, c_{ni_{n+1}}].$$

Khi đó, lạm dụng ký hiệu, ta thường viết $S \in P$.
Bây giờ giả sử $f : A \to \mathbf{R}$ là hàm giới nội, P là một phân hoạch A. Ta định nghĩa

Tổng Darboux dưới: $L(f,P) = \sum\limits_{S \in P} \inf\limits_{x \in S} f(x)\ v(S)$

Tổng Darboux trên: $U(f,P) = \sum\limits_{S \in P} \sup\limits_{x \in S} f(x)\ v(S)$

Nhận xét: Rõ ràng $L(f,P) \leq U(f,P)$. Hơn nữa, nếu P' là phân hoạch **mịn hơn** P, i.e. mọi điểm chia của P' đều là điểm chia của P, thì mọi hộp của P' đều chứa trong hộp nào đó của P, nên ta có

$$L(f,P) \leq L(f,P') \ \text{ và } \ U(f,P') \leq U(f,P).$$

Vậy $$\underline{I}(f) = \sup_P L(f,P) \leq \inf_P U(f,P) = \overline{I}(f)$$

Định nghĩa. f gọi là **khả tích (Riemann) trên** A , nếuu $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.
Khi đó giá trị trên gọi là **tích phân của** f **trên** A , và ký hiệu:

$$\int_A f \quad \text{hay} \quad \int_A f(x)dx \quad \text{hay} \quad \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Từ định nghĩa suy ra

1.2 Tiêu chuẩn Riemann. *Các điều sau tương đương:*
(i) *Hàm f khả tích trên A.*
(ii) *Với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại phân hoạch P tập A, sao cho* $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.

Ví dụ.
a) Nếu $f \equiv c$ (const), thì $U(f,P) = L(f,P) = cv(A)$, với mọi phân hoạch P.
Vậy f khả tích trên A và $\displaystyle\int_A f = cv(A)$.
b) Hàm Dirichlet

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 1 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$$

là không khả tích Riemann trên $[0,1]$, vì với mọi phân hoạch P

$$L(\mathcal{D},P) = 0, \quad U(\mathcal{D},P) = 1.$$

Bây giờ ta liên hệ việc xây dựng tích phân với tổng Riemann.
Cho P là phân hoạch hình hộp A và họ các điểm $\xi_P = (\xi_S, S \in P)$ với $\xi_S \in S$.
Định nghĩa

Tổng Riemann: $\displaystyle S(f,P,\xi_P) = \sum_{S\in P} f(\xi_S)\, v(S)$
Ký hiệu $|P|$ là chiều dài lớn nhất của các cạnh hình hộp con $S \in P$.

Bài tập: mô tả hình học giá trị tổng trên, tổng dưới, tổng Riemann của hàm một và hai biến dương (Bài toán tính diện tích và thể tích)

1.3 Tiêu chuẩn Darboux. *Cho $f : A \to \mathbf{R}$ là hàm giới nội trên hình hộp $A \subset \mathbf{R}^n$. Khi đó các điều sau tương đương*
(i) *Hàm f khả tích trên A và $\displaystyle\int_A f = I$.*
(ii) $\displaystyle\lim_{|P|\to 0} S(f,P,\xi_P) = I$, $\forall \xi_P$, *theo nghĩa sau: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho với mọi phân hoạch P của A mà $|P| < \delta$, ta có*

$$|S(f,P,\xi_P) - I| < \epsilon \quad \forall\, \xi_P$$

Chứng minh: Trước hết ta có:
Bổ đề. *Cho P_0 là phân hoạch A. Khi đó với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho nếu P là phân hoạch A mà $|P| < \delta$, thì tổng thể tích các hộp của P mà không chứa trong mọi hình hộp của P là $< \epsilon$.*
Ta chứng minh bổ đề trên qui nạp theo n.
Khi $n = 1$, $A = [a,b]$. Gỉa sử P_0 có N điểm chia. Chọn $\delta = \epsilon/N$. Gọi P là phân hoạch mà $|P| < \delta$. Khi đó độ dài các đoạn của P không chứa trong mọi đoạn của P_0 là $\leq$ (số cực đại các đoạn như vậy)$\times$(chiều dài cực đại mỗi đoạn) $\leq N \times \delta = \epsilon$.

Khi $n > 1$, gọi các hộp của P_0 là $V_1, \cdots, V_k$. Gọi T là tổng "diện tích" các mặt giữa 2 hộp kề nhau. Chọn $\delta = \epsilon/T$. Cho P là phân hoạch A mà $|P| < \delta$. Khi đó nếu $S \in P$ mà $S \not\subset V_i, i = 1, \cdots, k$, thì S giao với các mặt của một số hộp thuộc P_0. Dễ thấy $v(S) \leq \delta D$, với D là tổng diện tích các mặt (của các hộp $V_1, \cdots, V_k$) giao với S. Vậy

$$\sum_{S\in P, S\not\subset V_i, \forall i} v(S) < \delta T = \epsilon$$

Chứng minh (i) $\Rightarrow$ (ii): Gỉa sử $|f(x)| < M, \forall x \in A$. Theo tiêu chuẩn Riemann, tồn tại phân hoạch P_0 sao cho

$$U(f, P_0) - I < \epsilon/2 \quad , \quad I - L(f, P_0) < \epsilon/2$$

Áp dụng bổ đề, với $\epsilon := \epsilon/2M$, tồn tại $\delta > 0$ thỏa kết luận bổ đề. Cho P là phân hoạch mà $|P| < \delta$. Gọi P_1 là các hộp của P mà chứa trong một hộp nào đó của P_0. còn P_2 là các hộp của P mà không chứa trong hộp nào của P_0. Khi đó với mọi họ điểm ξ_P, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{S\in P} f(\xi_S)\ v(S) &\leq \sum_{S\in P_1} f(\xi_S)\ v(S) + \sum_{S\in P_2} f(\xi_S)\ v(S) \\ &\leq U(f, P_0)\ +\ M\epsilon/M\ <\ I + \epsilon\end{aligned}$$

Lập luận tương tự ta có

$$\sum_{S\in P} f(\xi_S)\ v(S) \geq\ L(f, P_0) - \epsilon/2\ >\ I - \epsilon$$

Vậy $|S(f, P, \xi_P) - I| < \epsilon$.
Chứng minh (ii) $\Rightarrow$ (i): Với $\epsilon > 0$. Gọi $\delta > 0$ và P thỏa (ii). Gọi N là số hộp của P. Với mỗi $S \in P$, chọn $\xi_S \in S$: $|f(\xi_S) - \sup_S f| < \epsilon/v(S)N$. Khi đó

$$|U(f, P) - I| \leq |U(f, P) - \sum_{S\in P} f(\xi_S)v(S)| + |\sum_{S\in P} f(\xi_S)v(S)_I|$$

Do tổng thứ nhất ở vế phải $< \sum_{S\in P} \epsilon v(S)/v(S)N = \epsilon$, suy ra $U(f, P) - I| < 2\epsilon$.
Lập luận tương tự $|L(f, P) - I| < 2\epsilon$. Suy ra $|U(f, P) - L(f, P)| < 4\epsilon$. Theo tiêu chuẩn Riemann f khả tích trên A. □

Ví dụ. Cho $f : A = [a_1, b_1] \times [a_n, b_n] \to \mathbf{R}$ là hàm khả tích.
Gọi P_N là phân hoạch đều các đoạn $[a_i, b_i], i = 1, \cdots, n$, bởi $N + 1$ điểm chia: $c_{ik} = a_i + \dfrac{k(b_i - a_i)}{N}$, $k = 0, \cdots, N$. Theo tiêu chuẩn trên, khi $N \to \infty$, ta có

$$\frac{(b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n)}{N^n} \sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{N} f(c_{1k_1}, \cdots, c_{nk_n}) \longrightarrow \int_A f.$$

Vậy có thể tính gần đúng tích phân bởi tổng Riemann nêu trên (**công thức hình chữ nhật**).

Chẳng hạn $\int_0^1 x dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}.$

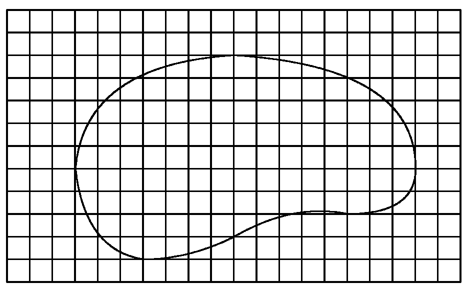
1.4 Tập đo được Jordan. Cho $C \subset \mathbf{R}^n$ là tập giới nội. **Hàm đặc trưng của** C định nghĩa bởi

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in C \\ 0 & \text{nếu} \quad x \notin C \end{cases}$$

Gọi A là hộp chứa C. Khi đó C gọi là **đo được (Jordan)** nếuu χ_C khả tích trên A và gọi **thể tích của** C là

$$v(C) = \int_A \chi_C.$$

Chú ý là định nghĩa trên không phụ thuộc hộp A chứa C.
Từ "thể tích" được thay bởi từ "độ dài", "diện tích" khi $n = 1, n = 2$ tương ứng.
Về mặt hình học $U(\chi_C, P)$ là tổng thể tích các hộp thuộc P có giao với C (thể tích ngoài); còn $L(\chi_C, P)$ là tổng thể tích các hộp thuộc P chứa trong C (thể tích trong).



Bài tập: Gọi C là hình giới hạn bởi đường cong và A là hình chữ nhật cho ở hình trên. Phân hoạch A thành các hình chữ nhật bằng nhau. Tìm mối quan hệ giữa tổng trên, tổng dưới và số hình chữ nhật có giao với C hay nằm trọn trong C. Từ đó suy ra cách tính gần đúng diện tích một hình trên mặt phẳng hay trên màn hình.

1.5 Tích phân trên tập giới nội. Cho $C \subset \mathbf{R}^n$ là tập giới nội, đo được, và $f : A \to \mathbf{R}$ là hàm giới nội trên hình hộp A chứa C. Khi đó f gọi là **khả tích trên** C nếuu $f\chi_C$ khả tích trên A và định nghĩa **tích phân của** f **trên** C

$$\int_C f = \int_A f\chi_C.$$

Ký hiệu $\mathcal{R}(C)$ tập mọi hàm khả tích Riemann trên C.

2. LỚP HÀM KHẢ TÍCH RIEMANN

Lớp các hàm khả tích Riemann được hoàn toàn xác định dựa trên khái niệm sau (được Lebesgue đa ra vào khoảng 1890).

2.1 Độ đo không. Tập $B \subset \mathbf{R}^n$ gọi là **có độ đo không**, ký hiệu $\mu(B) = 0$ hay $\mu_n(B) = 0$, nếuu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại hữu hạn hay đếm được các hình hộp $S_1, S_2, \cdots$ phủ B, i.e. $B \subset \cup_i S_i$, và $\sum_i v(S_i) < \epsilon$.

Ví dụ. Tập $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ là có độ đo không (?). Đường thẳng $\mathbf{R}$ khi xem như tập con của $\mathbf{R}^2$ là có độ đo không. (?)
Bài tập: Chứng minh nếu $\mu(B) = 0$ và $f : B \to \mathbf{R}^m$ thoả điều kiện Lipschitz, thì $\mu(f(B)) = 0$.

Mệnh đề. *Nếu* $\mu(B_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots$ *, thì* $\mu(\cup_i B_i) = 0$.
Chứng minh: Cho $\epsilon > 0$. Khi đó với mỗi i, tồn tại các hộp $S_{i1}, S_{i2}, \cdots$ phủ B_i sao cho $\sum_j v(S_{ij}) < \epsilon/2^i$. Vậy họ hình hộp $\{S_{ij}\}$ phủ $\cup_i B_i$ và có tổng thể tích $\sum_{ij} v(S_{ij}) < \epsilon \sum_i \dfrac{1}{2^i} < \epsilon$ □
Ví dụ. Tập đếm được trong $\mathbf{R}^n$ là có độ đo không.

Việc xây dựng tích phân đòi hỏi các hàm "tốt", chẳng hạn hàm liên tục, phải khả tích. Hàm khả tích Riemann khi và chỉ khi nó liên tục "hầu khắp nơi". Một cách chính xác ta có

2.2 Định lý (Lebesgue). *Hàm* $f : A \to \mathbf{R}$ *giới nội trên hình hộp* $A \subset \mathbf{R}^n$ *là khả tích Riemann khi và chỉ khi tập điểm gián đoạn của* f *có độ đo không.*

Chứng minh: Để đo độ gián đoạn của hàm f tại một điểm, ta có khái niệm:
Dao động của f **trên tập** S là số $o(f, S) = \sup\limits_{x\in S} f(x) - \inf\limits_{x\in S} f(x)$.
Dao động của f **tại** a được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$o(f, a) = \lim_{r\to 0^+} o(f, B(a, r)).$$

Giới hạn trên là tồn tại do tính đơn điệu theo r. (Bài tập)
Từ định nghĩa, ta có: $o(f, a) = 0$ khi và chỉ khi f liên tục tại a. (Bài tập)
Đặt $B = \{x : o(f, x) > 0\}$ là tập các điểm gián đoạn của f.

($\Rightarrow$) Giả sử $\mu(B) = 0$. Với $\epsilon > 0$, đặt $B_\epsilon = \{x : o(f, x) \geq \epsilon\}$. Do $B_\epsilon \subset B$, nên $\mu(B_\epsilon) = 0$. Vì B_ϵ đóng và giới nội nên nó compact (bài tập). Vậy tồn tại hữu hạn hộp $S_1, \cdots, S_N$ phủ B_ϵ có tổng thể tích $\sum\limits_{i=1}^{N} v(S_i) < \epsilon$.
Gọi P là phân hoạch A sao cho nếu $S \in P$ thì hoặc $S \cap B_\epsilon = \emptyset$ hoặc $S \subset S_i$ với $i \in \{1, \cdots, N\}$ nào đó.
Đặt $P_1 = \{S \in P : S \cap B_\epsilon = \emptyset\}$ còn $P_2 = \{S \in P : \exists i\ S \subset S_i\}$.
Nếu $S \in P_1$, thì $o(f, x) < \epsilon, x \in S$. Do S compact có thể làm mịn P sao cho khi $S' \in P_1$, thì $\sup_{S'} f - \inf_{S'} f \leq 2\epsilon$

Vậy
$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \Big(\sum_{S\in P_1} + \sum_{S\in P_2}\Big)\left((\sup_S f - \inf_S f) v(S)\right) \\ &\leq \sum_{S\in P_1} 2\epsilon v(S) + \sum_{S\in P_2} M v(S), \quad (M = \sup_A f - \inf_A f) \\ &\leq 2\epsilon v(A) + M \sum_{i=1}^{N} v(S_i) < (2v(A) + M)\epsilon. \end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn Riemann f khả tích trên A.
($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử f khả tích trên A. Ta có $B = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_{\frac{1}{k}}$. Theo mệnh đề 2.1 chỉ cần chứng minh $\mu(B_{\frac{1}{k}}) = 0, \forall k \in \mathbf{N}$. Cố định k.
Với $\epsilon > 0$, tồn tại phân hoạch $P : U(f,P) - L(f,P) = \sum_{S\in P}(\sup_S f - \inf_S f)v(S) < \frac{\epsilon}{k}$.
Suy ra $\displaystyle\sum_{S\cap B_{\frac{1}{k}}\neq\emptyset} \frac{1}{k}v(S) \leq \sum_{S\cap B_{\frac{1}{k}}\neq\emptyset}(\sup_S f - \inf_S f)v(S) < \frac{\epsilon}{k}$.
Vì $\{S \in P : S\cap B_{\frac{1}{k}} \neq \emptyset\}$ phủ $B_{\frac{1}{k}}$ và $\displaystyle\sum_{S\cap B_{\frac{1}{k}}\neq\emptyset} v(S) < \epsilon$, nên $\mu(B_{\frac{1}{k}}) = 0$. □

Hệ quả 1. *Tập giới nội $C \subset \mathbf{R}^n$ là đo được khi và chỉ khi $\mu(\partial C) = 0$.*
Hệ qủa 2. *Cho $C \subset \mathbf{R}^n$ đo được. Nếu $f : C \longrightarrow \mathbf{R}$ có hữu hạn hay đếm được điểm gián đoạn, thì f khả tích trên C.*
Hệ qủa 3. *Nếu $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ là hàm đơn điệu, thì f khả tích.*

Chứng minh: C đo được khi và chỉ khi χ_C khả tích. Tập điểm gián đoạn của χ_C chính là biên ∂C. Vậy từ định lý suy ra hệ qủa 1.
Hệ qủa 2 suy từ định lý và mệnh đề 2.1.
Để chứng minh hệ qủa 3, nhận xét là do tính đơn điệu, nên với mỗi $k \in \mathbf{N}$ tập $D_k = \{x \in [a,b] : o(f,x) \geq |f(a) - f(b)|/k\}$ không thể có quá k phần tử. Suy ra tập các điểm gián đoạn của f là $B = \bigcup_k D_k$ không quá đếm được. Vậy f khả tích. □

Ví dụ.
a) Hàm $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nếu $x \neq 0$, $f(0) = 0$ là khả tích trên $[-1,1]$.
b) Hàm $f(x,y) = x^2 + \sin\frac{1}{y}$ nếu $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$ là khả tích trên $A = \{x^2+y^2 \leq 1\}$.

2.3 Tính chất. *Cho A là tập đo được trong $\mathbf{R}^n$, và f,g là các hàm khả tích trên A. Khi đó ta có*
Tính tuyến tính: *Với mọi $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, hàm $\alpha f + \beta g$ là khả tích trên A và*

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_A f + \beta\int_A g$$

Tính phân đoạn: *Nếu $A_1, A_2 \subset A$ là các tập đo được, thì f khả tích trên A_1, A_2 và*

$$\int_{A_1\cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f - \int_{A_1\cap A_2} f.$$

Tính liên tục: *Nếu $f \leq g$ trên A, thì $\int_A f \leq \int_A g$.*
Đặc biệt, hàm $|f|$ khả tích trên A và $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

Định lý giá trị trung bình: *Nếu f liên tục và A liên thông , thì tồn tại $c \in A$ sao cho $\int_A f = f(c)v(A)$.*

Chứng minh: Các tính chất đầu suy từ định nghĩa và định lý Lebesgue.
Từ tính liên tục suy ra $\inf_A fv(A) \leq \int_A f \leq \sup_A fv(A)$, rồi áp dụng định lý về hàm liên tục trên tập liên thông suy ra tính chất cuối. (Bài tập: Hãy nêu chứng minh chi tiết) □

Ví dụ.
a) Nếu A, B đo được, thì $A \cup B$ đo được, và $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$.
b) Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$, thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

3. CÁC CÔNG THỨC TÍNH TÍCH PHÂN

Trước hết, là các công thức tích phân hàm 1 biến:

3.1 Định lý cơ bản. *Giả sử $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ liên tục. Khi đó ta có mối quan hệ giữa tích phân và đạo hàm*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f,\ x \in [a, b].$$

Từ định lý trên suy ra các công thức tính tích phân cho hàm một biến:
Công thức Newton-Leibniz: Nếu F là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$, i.e.
$F'(x) = f(x), x \in [a, b]$, thì

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Công thức đổi biến: Giả sử $g : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ khả vi liên tục, f liên tục trên $g([a, b])$. Khi đó

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b f \circ g\ g'.$$

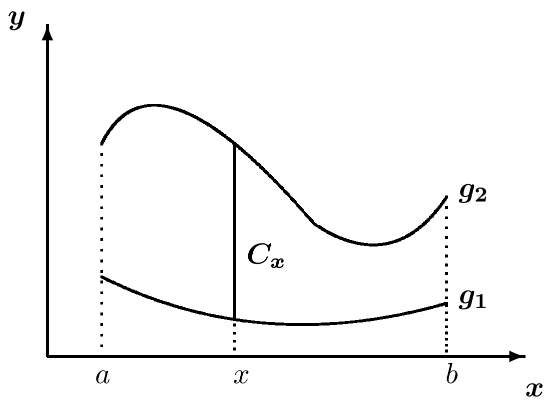
Công thức tích phân từng phần: Giả sử u, v là hai hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$. Khi đó

$$\int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v.$$

Để tính tích phân hàm nhiều biến có 2 phương pháp cơ bản:

- Chuyển tích phân bội về tích phân lặp các hàm 1 biến.
- Đổi biến.

Phương pháp đầu dựa trên gợi ý hình học sau:



Cho C là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm g_1, g_2 trên $[a,b]$, với $g_1 \leq g_2$. Để tính diện tích C, với mỗi $x \in [a,b]$, gọi $d(x)$ là độ dài của đoạn thẳng $C_x = x \times \mathbf{R} \cap C = x \times [g_1(x), g_2(x)]$. Khi đó, ta có thể đưa tích phân 2 lớp về lặp các tích phân 1 lớp:

$$\mathrm{dt}(C) = \iint_C dxdy = \int_a^b d(x)dx = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy)dx$$

Tương tự, đối với việc tính thể tích. Cho f là hàm liên tục, dương trên $[a,b] \times [c,d]$. Xét khối giới hạn bởi đồ thị f trên $[a,b] \times [c,d]$, $V = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$. Với mỗi $x \in [a,b]$, ta có

$$S(x) = \text{diện tích hình thang } \{(y,z) : c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x,y)\} = \int_c^d f(x,y)dy$$

Theo cách xây dựng tích phân, ta có thể đưa tích phân 3 lớp về lặp các tích phân 1 lớp:

$$\mathrm{tt}(V) = \iiint_V dxdydz = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx$$

Tổng quát, ta có công thức:

3.2 Công thức Fubini. *Cho $C \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ đo được, $f : C \to \mathbf{R}$ khả tích.*
Gọi $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in \mathbf{R}^m, (x,y) \in C\}$ là hình chiếu của C lên $\mathbf{R}^n$,
$C_x = \{y \in \mathbf{R}^m : (x,y) \in C\}$ nhát cắt của C tại x.
Giả sử tồn tại $\displaystyle\int_{C_x} f(x,y)dy$ với mọi $x \in \Omega$. Khi đó ta có

$$\int_C f(x,y)dxdy = \int_\Omega (\int_{C_x} f(x,y)dy)dx.$$

Chứng minh: Trước hết chứng minh cho $C = A \times B$, với A, B là các hộp trong $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ tương ứng.
Giả sử P, P' là các phân hoạch A, B tương ứng. Khi đó $P \times P'$ là phân hoạch $A \times B$

thành các hình hộp $S \times S', S \in P, S' \in P'$. Ta có

$$\begin{aligned}
L(f, P \times P') &= \sum_{S \times S' \in P \times P'} \inf\{f(x,y); x \in S, y \in S'\} v(S \times S') \\
&= \sum_{S \in P} (\sum_{S' \in P'} \inf\{f(x,y); x \in S, y \in S'\} v(S')) v(S) \\
&\leq \sum_{S \in P} \inf\{ \sum_{S' \in P'} \inf\{f(x,y); y \in S'\} v(S); x \in S\} v(S) \\
&\leq \sum_{S \in P} \inf_{x \in S} (\int_B f(x,y) dy) v(S) \\
&\leq L(\int_B f(x,y) dy, P).
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$L(f, P \times P') \leq L(\int_B f(x,y)dy, P) \leq U(\int_B f(x,y)dy, P) \leq U(f, P \times P').$$

Từ đó suy ra $\displaystyle\int_{A \times B} f = \int_A (\int_B f(x,y)dy)dx.$

Với C bất kỳ, tồn tại các hộp A, B sao cho $C \subset A \times B$. Thác triển f lên toàn bộ $A \times B$ bởi giá trị 0 ngoài C, rồi áp dụng trên ta có công thức. □

Ví dụ.

a) Giả sử $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbf{R}$ là các hàm liên tục, và $g_1 \leq g_2$.

Đặt $C = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Cho f là hàm liên tục trên C. Khi đó C là tập đo được (bài tập) và

$$\int_C f(x,y) dx dy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy) dx$$

b) Giả sử $h_1, h_2 : \Omega \to \mathbf{R}$ liên tục, giới nội trên tập đo được $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, và $h_1 \leq h_2$.

Đặt $C = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega, h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$. Cho f là hàm liên tục trên C. Khi đó C là tập đo được và

$$\int_C f(x,y,z) dx dy dz = \int_\Omega (\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) dz) dx dy$$

c) Để tính diện tích Ellip $E = \{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, áp dụng công thức Fubini ta có:

Hình chiếu E lên Ox là $[-a, a]$, nhát cắt $C_x = \{y : -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\}$.

Vậy diện tích

$$\begin{aligned}
v(E) &= \int_{-a}^{a} (\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy) dx = \int_{-a}^{a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx \\
&= 2ab(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x^2}{a}\sqrt{a^2 - x^2})|_{-a}^{a} = \pi ab.
\end{aligned}$$

Công thức đổi biến nêu mối quan hệ của sự thay đổi thể tích của một hình A khi qua phép biến hình g (phép đổi biến). Về mặt địa phương độ co dãn hình chính là định thức của đạo hàm Dg. Cụ thể, ta có:

3.3 Công thức đổi biến. *Cho $g : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$ thuộc lớp C^1 trên tập mở $U \subset \mathbf{R}^n$. Giả sử A là tập đo được có bao đóng $\overline{A} \subset U$, sao cho g là 1-1 và $\det Dg \neq 0$ trên $\overline{A}$. Khi đó nếu $f : g(A) \longrightarrow \mathbf{R}$ khả tích, thì $f \circ g|\det Dg|$ khả tích trên A và*

$$\int_{g(A)} f = \int_A f \circ g|\det Dg|.$$

Chứng minh: Vì $g \in C^1$ nên thoả điều kiện Lipschitz trên $\overline{A}$. Vậy $g(A)$ đo được (xem 2.1). Ngoài ra, theo định lý Lebesgue $f \circ g|\det Dg|$ khả tích trên A.
Để chứng minh công thức, ta dựa vào bổ đề khai triển:
Bước 1 (Bổ đề khai triển): Nếu $g \in C^1$ và $\det Dg(a) \neq 0$, thì tồn tại lân cận (hộp) U_a của a sao cho trên đó

$$g = (\Phi_n \circ T_n) \circ \cdots \circ (\Phi_1 \circ T_1),$$

trong đó $T_i(x) = a + \sigma_i(x - a)$, σ_i là phép hoán vị toạ độ, còn $\Phi_i(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, \phi_i(x), \cdots, x_n)$ $(i = 1 \cdots, n)$.
Thực vậy, do $\det Dg(a) \neq 0$ nên tồn tại i, $\dfrac{\partial g_n}{\partial x_i}(a) \neq 0$.
Gọi $B(x) = a + \sigma(x - a)$, với σ là hoán vị n với i.
Đặt $h = g \circ B$. Khi đó $\dfrac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) = \dfrac{\partial g_n}{\partial x_i}(a) \neq 0$.
Đặt $\Phi(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n(x))$. Ta có $\Phi \in C^1$ và $\det D\Phi(a) = \dfrac{\partial h_n}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Theo định lý ánh xạ ngược, tồn tại lân cận U của a trên đó Φ có ánh xạ ngược $\Phi^{-1} \in C^1$.
Ta có $g = h \circ B^{-1} = G \circ \Phi \circ T$,
với $T = B^{-1} = a + \sigma^{-1}(x - a)$, $G(x) = (h_1(x), \cdots, h_{n-1}(x), x_n)$.
Tiếp tục lập luận tương tự cho G ta có biểu diễn cần tìm.
Bước 2: Công thức đúng cho $g(x) := T(x) = a + \sigma(x - a)$, σ là hoán vị.
Để chứng minh chỉ cần áp dụng công thức Fubini với chú ý là $|\det T| = 1$. (?)
Bước 3: Công thức đúng trên U_a cho $g(x) := \Phi_i(x) = (x_1, \cdots, \phi_i(x), \cdots, x_n)$.
Ta chứng minh trường hợp $i = n$, trường hợp khác hoàn toàn tương tự. Giả sử $U_a = S \times [a_n.b_n]$, S là hộp trong $\mathbf{R}^{n-1}$.
Khi đó $\Phi(U) = S \times \phi_n(U)$, và $\det D\Phi = \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_n}$.
Theo công thức Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi(U)} f &= \int_S \Big(\int_{\phi_n(x_1,\cdots,x_{n-1},[a_n,b_n])} f(x)dx_n\Big)dx_1\cdots dx_{n-1}. \\
&= \int_S \Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\cdots,\phi_n(x))\Big|\frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}\Big|dx_n\Big)dx_1\cdots dx_{n-1} \quad \text{(công thức đổi biến 1 biến)} \\
&= \int_U f \circ \Phi|\det D\Phi|.
\end{aligned}$$

Bước 4: Nếu công thức đúng cho T và Φ, thì cũng đúng cho $\Phi \circ T$.

Thực vậy,
$$\begin{aligned}\int_{\Phi\circ T(C)} f &= \int_{T(C)} f\circ\Phi|\det D\Phi| \\ &= \int_C f\circ\Phi\circ T|\det(D\Phi)\circ T||\det DT| \\ &= \int_C f\circ(\Phi\circ T)|\det D(\Phi\circ T)|.\end{aligned}$$

Kết thúc chứng minh công thức: Do $\overline{A}$ compact nên $\overline{A}$ chứa trong hình hộp nào đó. Tồn tại phân hoạch P hộp đó sao cho với mọi $S\in P$ mà $S\cap A\neq\emptyset$ thì g có khai triển nh bước 1 trên S. Suy ra:

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset}} \int_{g(A\cap S)} f = \sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset}} \int_{A\cap S} f\circ g|\det Dg| = \int_A f\circ g|\det Dg|. \quad \square$$

Trong ứng dụng có thể cần áp dụng dạng tổng quát hơn sau:

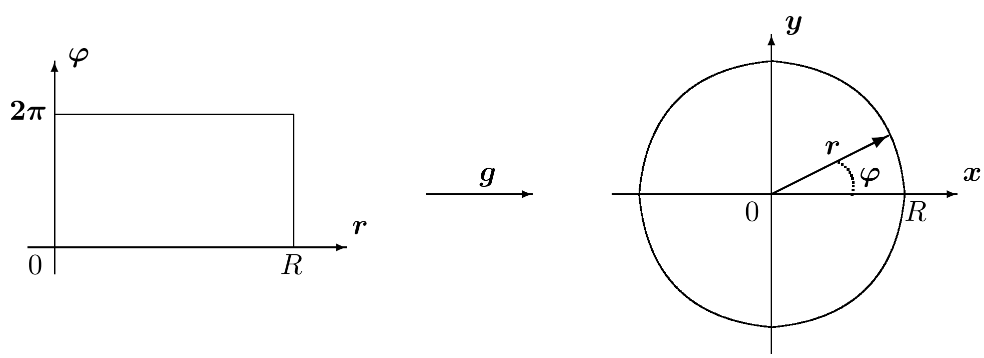
Định lý. *Cho $g: U \longrightarrow \mathbf{R}^n, U$ mở trong $\mathbf{R}^n$. Giả sử A đo được $\overline{A}\subset U$, g là 1-1 trên phần trong $\mathrm{int}A$. Khi đó nếu f khả tích trên $g(A)$, thì $f\circ g|\det Dg|$ khả tích trên A và*

$$\int_{g(A)} f = \int_A f\circ g|\det g|.$$

Việc chứng minh dựa vào bổ đề Sard: $\mu\{x : \det Dg(x) = 0\} = 0$. Với chú ý $\overline{A} = \mathrm{int}A\cup\partial A$, $\partial g(A)\subset g(\partial A)$. Các chi tiết xem như bài tập.

Ví dụ. Sau dây là các phép đổi biến hay dùng:
• **Tọa độ cực:** $g:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2$ cho bởi $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

$$|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}| = |\det Dg(r,\varphi)| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$



Nếu $A\subset\mathbf{R}^2$ đo được, g song ánh trên $intA$ và f khả tích trên A, thì

$$\int_{g(A)} f(x,y)dxdy = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Chẳng hạn có thể chuyển việc lấy tích phân trên hình tròn thành việc tích phân trên hình chữ nhật như ví dụ sau

$$\int_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2}rdrd\varphi = \pi(1-e^{-R^2}).$$

Bài tập: Áp dụng công thức Fubini và cho $R \to +\infty$ suy ra $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

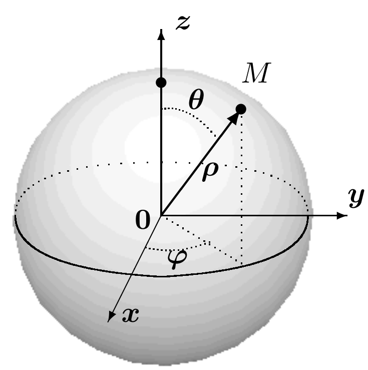
• **Tọa độ trụ:** $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.
Ta cũng có $|\det g(r, \varphi, z)| = r$, và nếu $A \subset \mathbf{R}^2$ đo được, g song ánh trên $intA$ và f khả tích trên A, thì

$$\int_{g(A)} f(x, y, z)dxdydz = \int_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz$$

Phép biến đổi này hay được sử dụng khi miền có dạng hình trụ. Chẳng hạn, với trụ $A = \{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, ta có

$$\int_A \frac{z}{1 + x^2 + y^2}dxdydz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{z}{1 + r^2}rdrd\varphi dz = \int_0^1 zdz\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \frac{r}{1 + r^2}dr = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

• **Tọa độ cầu:** $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $(\rho, \varphi, \theta) \mapsto (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$.
Định thức Jacobi: $|\det Dg(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2\sin\theta$. (?)



Ta có

$$\int_{g(A)} f(x, y, z)dxdydz = \int_A f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta,$$

trong đó A đo được, g song ánh trên $intA$ và f khả tích.
Phép đổi biến này thuận tiện khi miền tích phân có dạng hình cầu. Chẳng hạn

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^3\sin\theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^R \rho^3 d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = \frac{R^4}{4}2\pi.2.\end{aligned}$$

Ví dụ. Qua phép vị tự thể tích thay đổi thế nào?
Gọi A là tập đo được trong $\mathbf{R}^n$. Cho $\lambda \in \mathbf{R}$. Xét phép vị tự $\lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \lambda(x) = \lambda x$.
Khi đó với phép đổi biến $(y_1, \cdots, y_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$, ta có

$$v(\lambda(A)) = \int_{\lambda(A)} dy = \int_A \lambda^n dx = \lambda^n v(A)$$

Bài tập: Chứng minh tính chất hình học sau của định thức:
Xét **hình bình hành** tạo bởi $v_1, \cdots, v_n \in \mathbf{R}^n$

$$A = \{y \in \mathbf{R}^n : y = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, 0 \leq x_1, \cdots, x_n \leq 1\}$$

Khi đó thể tích

$$v(A) = |\det(v_1, \cdots, v_n)| = |\det(v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}|$$

trong đó $v_i = (v_{i1}, \cdots, v_{in})$

Bài tập Giải Tích 2

I. Dãy hàm - Chuỗi hàm

Chuỗi lũy thừa - Chuỗi Taylor

1. Lập luận sau của Euler tại sao sai? "Ta có $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.
   Vậy $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \cdots = \dfrac{1}{x(1-1/x)} = \dfrac{1}{x-1}$.
   Cộng lại suy ra $\cdots + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 0$, khi $x \neq 0, 1$."

2. Xác định bán kính hội tụ và miền của các chuỗi lũy thừa sau:
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}(x-1)^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{\ln k}$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} x^k$
   f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^{2k+1}$ g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

3. Dựa vào phép lấy tích phân hay đạo hàm qua dấu tổng, tính các tổng sau:
   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+2k-2)x^k$
   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k^2+1}{k!} x^k$

4. Đúng hay sai: nếu f khả vi vô hạn trên (a, b), thì chuỗi Taylor của f tại $c \in (a, b)$ luôn hội tụ.

5. Đúng hay sai: chuỗi Taylor của một hàm nếu hội tụ, thì hội tụ về chính hàm đó.

6. Cho hàm $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} (x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Chứng minh f khả vi vô hạn lần. Chuỗi Taylor của f ?

7. Khai triển thành chuỗi Taylor tại 0 các hàm sau:
   a) $f(x) = \sin^3 x$ b) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n}$
   d) $f(x) = \sqrt{a+x}$ e) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

8. Định nghĩa hàm sai số: $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
   Biểu diễn hàm dưới dạng chuỗi lũy thừa, viết 5 số hạng đầu của chuỗi đó. Dựa vào chuỗi trên tính xấp xỉ giá trị $\operatorname{erf}(1)$.

9. Định nghĩa hàm: $\operatorname{Si}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.
   Biểu diễn hàm dưới dạng chuỗi lũy thừa. Dựa vào chuỗi trên tính xấp xỉ giá trị $\operatorname{Si}(1)$.

Chuỗi Fourier

1. Chứng minh nếu f có chu kỳ T, thì $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \forall a$.

2. Cho f là hàm khả vi liên tục trên $[-\pi, \pi]$. Gọi a_k, b_k và a'_k, b'_k là các hệ số Fourier của f và f'. Bằng cách tích phân từng phần chứng minh
$a'_k = kb_k,\ b'_k = -ka_k$.

3. Viết chuỗi Fourier các hàm sau:
a) $f(x) = 0$, nếu $-\pi \le x \le 0$; $f(x) = 1$, nếu $0 < x \le \pi$.
b) $f(x) = |x|,\ -\pi \le x \le \pi$.

4. Xét sự hội tụ và hội tụ đều của chuỗi Fourier của các hàm cho ở bài tập trên. Suy ra

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{va} \quad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Tại $x := 0, \pm\pi$ chuỗi Fourier có gía trị bằng $f(x)$?

5. Cho $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, và hàm $f_t(x) = \cos tx,\ |x| \le \pi$.
a) Khai triển Fourier $f_t(x)$.
b) Suy ra $\text{cotan}\, t\pi = \dfrac{1}{t\pi} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2t}{\pi(t^2 - k^2)}$.
c) Đạo hàm từng từ suy ra $\dfrac{\pi^2}{\sin^t \pi} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(t-k)^2}$.
d) Tích phân từng từ suy ra $\dfrac{\sin t\pi}{t\pi} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{t^2}{1})(1 - \frac{t^2}{2}) \cdots (1 - \frac{t^2}{n^2})$

6. Khai triển Fourier các hàm:
a) $f(x) = e^x,\ x \in [0, 2\pi]$ b) $f(x) = 0$, nếu $x \in [0, l]$; $f(x) = 1$, nếu $x \in (l, 2l)$.
c) $f(x) = x,\ x \in (-2, 2)$.

7. Biểu diễn các hàm sau thành chuỗi lượng giác chỉ có $\cos$, bằng cách thác triển chúng thành hàm lẻ:
a) $f(x) = 1$, nếu $x \in [0, \pi/2]$; $f(x) = 0$, nếu $x \in (\pi/2, \pi]$.
b) $f(x) = x(\pi - x),\ x \in [0, \pi]$.

8. Biểu diễn các hàm ở bài trên thành chuỗi lượng giác chỉ có $\sin$, bằng cách thác triển chúng thành hàm chẵn.

9. Biết khai triển Fourier

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \quad -\pi < x < pi$$

Bằng các lấy tích phân suy ra khai triển Fourier của x^2, x^3, x^4, khi $-\pi < x < \pi$. Tại sao có thể tích phân vào dấu tổng?

II. Không gian R^n.

1. Chứng minh $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$.

2. Xác định $m, M, a, b > 0$, sao cho với mọi $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

   a) $m \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \|x\| \leq M \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

   b) $a\|x\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leq b\|x\|$.

3. Tìm điều kiện cần và đủ cho $x, y \in \mathbf{R}^n$ để có các đẳng thức
$$| < x, y > | = \|x\|\|y\|, \quad \text{và} \quad \|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

4. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh
$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}.$$

5. Cho $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh tồn tại M sao cho $\|T(h)\| \leq M\|h\|,\ \forall h \in \mathbf{R}^n$.

6. Xác định phần trong, phần ngoài và biên các tập sau trong $\mathbf{R}^n$:
$\{x : \|x\| \leq 1\},\ \{x : \|x\| = 1\},\ \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbf{Q}, i = 1, \cdots, n\}$.

7. Cho $a \in \mathbf{R}$ v... $x_1 = a, x_k = x_{k-1}^2 - x_{k-1} + 1$. Với a nào thì:
a) (x_k) đơn điệu. b) (x_k) bị chặn. c) (x_k) hội tụ. Khi đó tìm giới hạn.

8. Cho dãy số dương (x_k).
a) Chứng minh nếu $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{k+1}}{x_k} = L > 0$, thì $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = L$.
(HD: chứng minh $\forall\epsilon > 0, \exists A, B > 0, N \in \mathbf{N} : k \geq N \Rightarrow A(L-\epsilon)^k < x_k < B(L+\epsilon)^k$.)
b) Áp dụng a), tìm giới hạn dãy $x_k = \dfrac{k^k}{k!}$, suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{(k!)^{1/k}} = e$.

9. Chứng minh nếu $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = M$, thì giới hạn của dãy trung bình cộng của (x_k) là $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k) = M$.

10. Cho $0 < x_k < y_k,\ x_{k+1} = (x_k y_k)^{\frac{1}{2}}$ và $y_{k+1} = \dfrac{1}{2}(x_k + y_k)$. Chứng minh $x_k < y_k$. Suy ra $(x_k), (y_k)$ hội tụ về cùng giới hạn.

11. Cho dãy (x_k) trong $\mathbf{R}^n$. Giả sử $\|x_{k+1} - x_k\| < \dfrac{1}{k^2 + k}, \forall k$. Chứng minh (x_k) là dãy Cauchy nên hội tụ.

12. Dùng tiêu chuẩn Cauchy, chứng minh dãy số $x_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbf{N})$ là không hội tụ.

13. Nêu chứng minh chi tiết: trong $\mathbf{R}$ tập $[a, b]$ đóng, (a, b) mở, và $(a, b]$ không đóng không mở.

14. Chứng minh hình cầu mở $B(a,r)$ là mở trong $\mathbf{R}^n$.

15. Cho A là tập con của $\mathbf{R}$, chứa mọi điểm hữu tỉ thuộc $[0,1]$. Chứng minh nếu A đóng, thì A chứa $[0,1]$.

16. Cho U_k ($k \in \mathbf{N}$) là các tập mở trong $\mathbf{R}^n$. Đúng hay sai

    a) $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} U_k$ là mở. b) $\bigcap_{k\in\mathbf{N}} U_k$ là mở.
    c) $\bigcap_{k\in\mathbf{N}} (\mathbf{R}^n \setminus U_k)$ là đóng. d) $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} (\mathbf{R}^n \setminus U_k)$ là đóng.

17. Chứng minh:

    a) Nếu $X \subset Y$, thì $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

    b) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

    c) $\partial(X \cup Y) \subset \partial X \cup \partial Y$, $\partial(X \cap Y) \subset \partial X \cap \partial Y$, v... $\partial(X \times Y) = \partial X \times \overline{Y} \cup \overline{X} \times \partial Y$.

18. Cho X là tập vô hạn và giới nội trong $\mathbf{R}^n$. Chứng minh X có điểm tụ.

19. Chứng minh các tập sau không compact bằng cách chỉ ra một phủ mở của nó mà không có phủ con hữu hạn:
    a) $\mathbf{Z}$ tập các số nguyên trong $\mathbf{R}$. b) $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < 1\}$.

20. Hợp, giao, tích các tập compact có compact?

21. a) Chứng minh nếu X đóng và $x \notin X$, thì tồn tại $d_x > 0$ sao cho
    $d(x,y) \geq d_x, \ \forall y \in X$.

    b) Chứng minh nếu X đóng, K compact, và $X \cap K = \emptyset$, thì tồn tại $d > 0$ sao cho
    $d(x,y) \geq d, \ \forall x \in K, \forall y \in X$.

    c) Tìm ví dụ X, K đóng và $X \cap K = \emptyset$, nhưng không tồ tại $d > 0$ để bất đẳng thức ở b) thoả.

22. Cho dãy tập hợp (F_k) trong $\mathbf{R}^n$ là **dãy compact lồng nhau thắt lại** , i.e. với mọi $k \in \mathbf{N}$, F_k compact, $F_k \supset F_{k+1}$, và $\mathrm{diam}(F_k) = \sup\{d(x,y) : x, y \in F_k\} \to 0$, khi $k \to \infty$. Chứng minh $\bigcap_{k\in\mathbf{N}} F_k$ có duy nhất một phần tử.
    Giả thiết compact không thể bỏ, chẳng hạn dãy $I_k = (0, \dfrac{1}{k}), k \in \mathbf{N}$, có $\bigcap_k I_k = \emptyset$.

23. Các tập sau compact? liên thông?
    a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1\}$. b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$.
    c) $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq r\}$. d) $\{x \in \mathbf{R}^n : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$. e) $\{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$.
    f) Tập hữu hạn. g) Tập các số nguyên $\mathbf{Z}$. h) Tập các số hữu tỉ trong $[0,1]$.

24. Các mệnh đề sau đúng hay sai:
    a) Nếu K là tập compact trong $\mathbf{R}^n$, thì $\mathbf{R}^n \setminus K$ compact.
    b) Nếu K là tập liên thông trong $\mathbf{R}^n$, thì $\mathbf{R}^n \setminus K$ liên thông.

25. Chứng minh: Nếu $L_i, i \in I$, là các tập liên thông, và $L_i \bigcap L_j \neq \emptyset$ với mọi i, j, thì $\bigcup_{i\in I} L_i$ liên thông.

26. Chứng minh nếu C liên thông, thì bao đóng $\overline{C}$ liên thông.

27. Cho $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y \leq x^2, x \neq 0\} \cup \{(0,0)\}$. Chứng minh C liên thông, nhưng không tồn tại đường gấp khúc trong C nối $(0,0)$ với một điểm khác thuộc C.

28. Cho $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0\} \cup \{(0,y) : |y| \leq 1\}$. Chứng minh C liên thông nhưng không liên thông đường, i.e. tồn tại 2 điểm thuộc C không thể nối nhau bằng đường cong trong C.

29. **Tập Cantor** C được xây dựng như sau: $F_0 = [0,1]$.
$F_1 = [0, \dfrac{1}{3}] \cup [\dfrac{2}{3}, 1]$, là tập từ F_0 bỏ đi một phần ba khoảng mở giữa.
$F_2 = [0, \dfrac{1}{9}] \cup [= \dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{3}] \cup [\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{9}] \cup [\dfrac{8}{9}, 1]$, là tập từ F_1 bỏ đi một phần ba khoảng mở giữa của các đoạn.
Tổng quát, F_k là tập lập từ F_{k-1} bỏ đi một phần ba khoảng mở giữa của các đoạn.
Để ý F_k là hợp 2^k đoạn dạng $[\dfrac{k}{3^k}, \dfrac{k+1}{3^k}]$. Đặt $C = \bigcap_k F_k$. Chứng minh:
a) Mọi $x \in C$, có biểu diễn duy nhất $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, vơi $a_k \in \{0,2\}$.
b) C là vô hạn không đếm được. c) C compact d) $\mathrm{int}(C) = \emptyset$.
Để ý C có 'độ dài' bằng không, theo nghĩa: phần bù của C có độ dài là $\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{9} + \cdots + 2^{k-1}/3^k + \cdots = 1$

III. Liên tục

1. Xét các giới hạn lặp, giới hạn tại $(0,0)$ của hàm $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

2. Tìm ví dụ hàm hai biến có giới hạn lặp tồn tại nhưng khác nhau.

3. Chứng minh khi $n \to +\infty$, ta có

$$n^2+n \sim n^2,\ \ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{2},\ \ (-1)^n n^2 = O(n^2),\ \ n^2+2 = o(n^3),\ \ \sin n = O(1)$$

4. Chứng minh khi $x \to 0$, ta có

$$\begin{array}{lcllcl}
(1+x)^\alpha & = & 1+\alpha x + o(x) & \text{hay} \quad (1+x)^\alpha & \sim & 1+\alpha x \\
e^x & = & 1+x+o(x) & e^x & \sim & 1+x \\
\ln(1+x) & = & x+o(x) & \ln(1+x) & \sim & x \\
\sin x & = & x+o(x) & \sin x & \sim & x \\
\cos x & = & 1-\frac{1}{2}x^2+o(x) & \cos x & \sim & 1-\frac{1}{2}x^2
\end{array}$$

5. Khi $x \to \infty$, hãy dùng ký hiệu o, O để so sánh:

$$x^\alpha,\ x^\beta,\ a^x,\ b^x,\ \log_c x,\ \log_d x \quad (\alpha,\beta,a,b,c,d > 0)$$

6. Xét tính liên tục các hàm:

   a) $f(x,y) = \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$, nếu $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

   b) $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{2xy}$, nếu $xy \neq 0$; $f(x,y) = 0$, nếu $xy = 0$.

   c) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x}$, nếu $x \neq 0$; $f((0,y) = y$.

7. Tìm ví dụ hàm liên tục theo từng biến nhưng không liên tục..

   (HD: Xét $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$)

8. Tìm ví dụ hàm $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ liên tục khi hạn chế trên mỗi đường thẳng qua $(0,0)$, nhưng không liên tục tại đó.

   (HD: Xét $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ nếu $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$)

9. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, thoả $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$. Chứng minh nếu f liên tục tại 0, thì f liên tục.

10. Cho $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, thoả $g(x+y) = g(x)g(y), \forall x, y \in \mathbf{R}$. Chứng minh nếu g liên tục tại 0, thì g liên tục.

11. Cho $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f(x) = \dfrac{1}{q}$, nếu $x = \dfrac{p}{q}$ là phân số tối giản; $f(x) = 0$, nếu x vô tỉ. Chứng minh f chỉ liên tục tại các điểm vô tỉ

12. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Chứng minh các điều sau tương đương

    (i) f liên tục trên $\mathbf{R}^n$.

    (ii) $f^{-1}(V)$ là mở. với mọi tập mở $V \subset \mathbf{R}^m$.

    (iii) $f^{-1}(F)$ là đóng, với mọi tập đóng $F \subset \mathbf{R}^m$.

13. Chứng minh nếu $U \subset \mathbf{R}$ là tập mở, thì $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in U\}$ là tập mở.

14. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ liên tục. Chứng minh tập $\{x \in \mathbf{R}^n : 0 \leq f(x) \leq 1\}$ là tập đóng.

15. Tìm ví dụ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục và $U \subset \mathbf{R}$ là tập mơ (t.ư. đóng) nhưng $f(U)$ không mở (t.ư. không đóng).

16. Chứng minh tập các ma trận khả nghịch $\{A \in Mat(n,n) : \det A \neq 0\}$ là mở trong không gian $\mathrm{Mat}(n,n)$ các ma trận vuông cấp n trên $\mathbf{R}$.

17. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ liên tục. Các tập sau mở, đóng, compact, liên thông?
    $\{x : f(x) = 0\}$ $\{x : f(x) > 1\}$ $\{f(x) : x \geq 0\}$ $\{f(x) : 0 \leq x \leq 1\}$

18. Cho $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ liên tục. Chứng minh $\{f(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$ là một đoạn.

19. Cho $X \subset \mathbf{R}^n$. Định nghĩa $d(x,X) = \inf\limits_{y \in X} d(x,y)$.

    a) Chứng minh hàm $\mathbf{R}^n \ni x \mapsto d(x,X)$ là hàm liên tục. (HD: Chứng minh $|d(x,X) - d(x',X)| \leq d(x,x')$)

b) Chứng minh: $x \in \overline{X}$ khi và chỉ khi $d(x, X) = 0$.

c) Cho X, Y là các tập đóng rời nhau. Xét hàm $f(x) = \dfrac{d(x,X)}{d(x,X)+d(x,Y)}$.
Chứng minh f liên tục và $f^{-1}(1) = Y,\ f^{-1}(0) = X$. Suy ra tồn tại các tập mở U, V rời nhau và $X \subset U,\ Y \subset V$.
(Ta nói: trong $\mathbf{R}^n$, hai tập đóng rời nhau có thể tách bởi hai tập mở).

20. Định nghĩa khoảng các giữa 2 tập con X, Y của $\mathbf{R}^n$: $d(X,Y) = \inf\limits_{x\in X, y\in Y} d(x,y)$.
Cho $K \subset \mathbf{R}^n$ compact, X đóng. Từ tính liên tụcỏua hàm $K \ni x \mapsto d(x, X)$, chứng minh tồn tại $x_0 \in K, y_0 \in X$ sao cho $d(x_0, y_0) = d(K, X)$.
Tìm ví dụ điều kiện K compact không thể thiếu.

21. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ liên tục. Chứng minh nếu $B \subset \mathbf{R}^n$ là tập giới nội, thì $f(B)$ là tập giới nội.

22. Đúng hay sai: nếu $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ liên tục và K compact (t.ư. liên thông), thì $f^{-1}(K)$ compact (t.ư. liên thông).

23. Cho ví dụ hàm f liên tục, giới nội nhưng không đạt max, min.

24. Cho $f : K \to \mathbf{R}$ liên tục, K compact. Chứng minh tập $M = \{x : f(x) = \max\limits_K f\}$ là compact.

25. Đúng hay sai: không tồn tại toàn ánh liên tục từ $[0, 1]$ lên $(0, 1)$.

26. Cho $f : K \longrightarrow f(K)$ là 1-1 liên tục. Chứng minh nếu K compact, thì f^{-1} liên tục. Nếu K không compact thì sao?

27. Chứng minh hàm $g(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ liên tục và giới nội, nhưng không liên tục đều trên $(0, +\infty)$.

28. Cho $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Ta nói f thoả **điều kiện Lipschitz** nếuu

$$\exists L > 0 : \ \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\|,\ \forall x, y \in A$$

a) Chứng minh nếu f thoả điều kiện Lipschitz, thì f liên tục đều..
b) Xét xem tổng, tích các hàm thoả điều kiện Lipschitz có thoả điều kiện Lipschitz không?

29. Chứng minh nếu $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ liên tục, thì đồ thị G_f là tập đóng và liên thông.

30. Cho $f : C \to \mathbf{R}$ liên tục, C liên thông. Chứng minh nếu $f(x) \neq 0, \forall x \in C$, thì $f(x)$ luôn dương hay luôn âm với mọi $x \in C$.

31. Chứng minh mọi đa thức bậc lẻ hệ số thực luôn cóít nhất một nghiệm thực.

32. Chứng minh phương trình $x^4 + 7x^3 - 9 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực.

33. Chứng minh phương trình: $\operatorname{tg} x = x$ có vô số nghiệm.

34. Cho $f : [a, b] \to [a, b]$ liên tục. Chứng minh f có ít nhất một điểm bất động, i.e. điểm $x_0 : f(x_0) = x_0$.

35. Cho f là hàm liên tục trên $[0, 2\pi]$ và $f(0) = f(2\pi)$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 2\pi)$, $f(c) = f(c + \pi)$.

36. Cho $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ liên tục, $f(a)f(b) < 0$. Nêu phương pháp xấp xỉ tìm nghiệm phương trình $f(x) = 0$. Áp dụng tính gần đúng $\sqrt{2}$ với sai số $< \frac{1}{10}$, bằng cách tìm nghiệm $x^2 - 2 = 0$ trên $[0, 2]$

37. Với các giá trị nào của $\alpha \in \mathbf{R}$, thì hàm $f(x) = \alpha x,\ x \in \mathbf{R}$ là ánh xạ co?

38. Cho $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

    a) Chứng minh nếu $a, b, c, d > 0$, thì A xác định một ánh xạ: $\mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}^2_+$, với $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.
    b) Với điều kiện của a) định nghĩa $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, \frac{\pi}{2}]$, bởi

    $$A \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \lambda(\varphi) \begin{pmatrix} \cos f(\varphi) \\ \sin f(\varphi) \end{pmatrix}$$

    Chứng minh f liên tục. Từ đó suy ra A có một vector riêng thuộc $\mathbf{R}^2_+$.
    c) f có là ánh xạ co?

39. Cho $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, là ánh xạ tuyến tính $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Tìm điều kiện của cho a, b, c, d để f là ánh xạ co trên không gian Euclid $\mathbf{R}^2$.
    Tổng quát bài tập trên khi $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f(x) = Ax$, trong đó $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n.

40. Cho $f : [0, r] \to [0, r], f(x) = x^2$. Định r để f là ánh xạ co.

41. Cho $f : X \to X$, thoả: $d(f(x), f(y)) < d(x, y), \forall x, y \in X, x \neq y$.
    a) Tìm ví dụ hàm f thoả bất đẳng thức trên nhưng không có điểm bất động.
    b) Chứng minh $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \sin x$, thỏa bất đẳng thức trên nhưng không là ánh xạ co.

42. Cho $f : K \to K$ là ánh xạ co trên tập compact. K. Ký hiệu $f_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ ln}}$.
    Chứng minh $\cap_{n \in \mathbf{N}} f_n(K)$ là tập chỉ có duy nhất một điểm.

43. Tìm các ví dụ:

    Dãy hàm liên tục hội tụ về một hàm liên tục, nhưng sự hội tụ là không đều.

    Dãy hàm không liên tục hội tụ đều về hàm liên tục.

44. Đúng hay sai: Nếu dãy hàm (f_k) hội tụ đều về f và dãy số (x_k) hội tụ về x, thì dãy $(f_k(x_k))$ hội tụ về $f(x)$.

45. Cho dãy đa thức $P_k(x) = 1 + x + \cdots + x^k$, $k \in \mathbf{N}$, và hàm $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.
    Chứng minh với mọi $0 < c < 1$, (P_k) hội tụ đều về f trên $[0, c]$, nhưng không hội tụ đều về f trên $(0, 1)$.

46. Ta nói g là **hàm tuyến tính từng khúc** trên $[a, b]$ nếuu tồn tại các điểm:
    $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, sao cho $g(x) = A_k x + B_k, x \in [a_{k-1}, a_k],\ k =$

$1, \cdots, n$.
Tìm các hệ thức mà các hệ số A_k, B_k phải thỏa để g liên tục.
Chứng minh mọi hàm liên tục trên $[a, b]$ là giới hạn đều của dãy hàm tuyến tính từng khúc.

47. Viết đa thức Berstein $B_k(f)$, của hàm $f(x) = x^2$, với $x \in [0, 1]$. Tìm k sao cho $\|B_k(f) - f\| = \sup_{x\in[0,1]} (|B_k(f)(x) - x^2|) < \dfrac{1}{1000}$.

48. Viết đa thức Berstein $B_k(f)$, của hàm $f(x) = x^3, x \in [0, 1]$. Chứng minh $(B_k(f))$ hội tụ đều về f.

49. Chứng minh hàm $f(x) = e^x, x \in \mathbf{R}$, không là giới hạn đều của dãy hàm đa thức. (Định lý Weierstrass không đúng cho khoảng mở).

50. Cho $\mathcal{A}$ là tập cá hàm có dạng: $h(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i e^{b_i x}, \quad n \in \mathbf{N}, a_i, b_i \in \mathbf{R}$.
Khi đó mỗi $f \in C[0, 1]$, có là giới hạn đều của dãy hàm thuộc $\mathcal{A}$ hay không?

51. Nếu có một dãy đa thức hội tụ đều về f trên $[a, b]$, thì f có khả vi?

52. Cho dãy đa thức (P_k): $P_0(x) = 0,\ P_{k+1}(x) = P_k(x) + \dfrac{1}{2}(x - P_k(x)^2)$.
Chứng minh qui nà: $0 \le \sqrt{x} - P_k(x) \le \dfrac{2\sqrt{x}}{1 + k\sqrt{x}}$, nên $0 \le \sqrt{x} - P_k(x) \le \dfrac{2}{k}$.
Từ đó suy ra (P_k) hội tụ về hàm $[0, 1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$.
(Đây là một chứng minh khác cho điều: hàm $f(t) = |t| = \sqrt{t^2}, t \in [-1, 1]$, là giới hạn đều của dãy hàm đa thức).

53. Cho $f \in C[0, 1]$. Giả sử với mọi $k = 0, 1, \cdots$ $\int_0^1 f(x)x^k dx = 0$. Chứng minh $f \equiv 0$. (HD: Chứng minh tích phân của tích f với mọi đa thức đều bằng không. Sau đó áp dụng định lý Weierstrass chứng minh $\int_0^1 f^2 = 0$).

54. Cho $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ không là đa thức. Giả sử (P_k) là dãy hàm đa thức hội tụ đều về f trên $[0, 1]$. Chứng minh bậc của các P_k không bị chặn.
(HD: Một đa thức $P(x)$, bậc $\le n$, được xác định một cách duy nhất bởi giá trị tại $n + 1$ điểm $x_0, \cdots, x_n$ và có biểu diễn qua **công thức nội suy Lagrange**

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)\pi_i(x), \qquad \pi_i(x) = \frac{\prod_{j\ne i}(x - x_j)}{\prod_{j\ne i}(x_i - x_j)} \quad)$$

IV. Đạo hàm

1. Cho $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ thoả: $\exists M$ sao cho $\|f(x)\| \le M\|x\|^2$. Chứng minh f khả vi tại 0 và $Df(0) = 0$.
Nếu $\|f(x)\| < M\|x\|$, thì f có khả vi?

2. Viết ma trận Jaconi của:
a) $f(x,y) = (xy, y/x)$.
b) $f(x,y,z) = (x^4y, xe^z)$.
c) $f(x,y,z) = (z^{xy}, x^2, \text{tg}xyz)$.
d) $f(x,y,z) = (e^z \sin x, xyz)$.

3. Tính $\text{grad}\, f$ của các hàm:
a) $f(x,y,z) = x\sin y/z$.
b) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$.

4. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc của các mặt cho bởi phương trình:
a) $z = x^3 + y^4$, tại $x = 1, y = 3, z = 82$.
b) $x^2 - y^2 + xyz = 1$, tại $(1,0,1)$.
c) $z = \sqrt{x^2 + 2xy - y^2 + 1}$, tại $(1,1,\sqrt{3})$.
d) $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, tại (x_0, y_0, z_0).

5. Tính góc tạo bởi hai mặt cong sau tại $(2,-1,2)$:
$$S_1:\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{và} \quad S_2:\ z = x^2 + y^2 - 3.$$

6. Trong $\mathbf{R}^3$ cho hai mặt cong xác định bởi các phương trình:
$$S_1:\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{và} \quad S_2:\ x^3 + y^3 + z^3 = 3.$$
Chứng minh S_1, S_2 tiếp xúc với nhau tại $(1,1,1)$.

7. Trong $\mathbf{R}^3$ cho hai mặt cong xác định bởi các phương trình:
$$S_1:\ ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad \text{và} \quad S_2:\ xyz = 1.$$
Tìm các tham số a, b, c sao cho S_1, S_2 vuông góc với nhau tại các giao điểm.

8. Tìm vector tiếp xúc với các đường cong tham số hoá:
a) $c(t) = (3t^2, e^t, t + t^2)$, tại điểm ứng với $t = 1$.
b) $c(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$, tại điểm ứng với $t = \pi/2$.

9. Tìm hướng mà $f(x,y,z) = x^2y\sin z$, tăng nhanh nhất tại lân cận $(3,2,0)$.

10. Tìm hướng mà $f(x,y) = e^{x^2}y$, giảm nhanh nhất tại lân cận $(0,0)$. Vẽ các đường mức.

11. Đúng hay sai: Một hàm f xác định trên (a,b), khả vi tại c, và $f'(c) > 0$, (HD: Xét hàm: $f(x) = x$ nếu x hữu tỉ, $f(x) = \sin x$ nếu x vô tỉ. Chứng minh $f'(0) > 0$, nhưng f không đơn điệu ở lân cận 0)

12. Chứng minh tính chất Darboux: Nếu f khả vi trên $[a,b]$, thì f' nhận mọi giá trị nằm giữa $f'(a), f'(b)$.
(HD: Cho γ là một giá trị nằm giữa $f'(a)$ và $f'(b)$. Chứng minh $g(x) = f(x) - \gamma x$ đạt cực trị tại $c \in (a,b)$).

13. Cho $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ nếu $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Chứng minh f khả vi, nhưng f' không liên tục.

14. Chứng minh hàm số sau có các đạo hàm riêng tại $(0,0)$ nhưng không liên tục

$$f(x,y) = \frac{x}{y}, \text{ nếu } y \neq 0; f(x,y) = 0, \text{ nếu } y = 0.$$

15. Hàm f gọi là **khả vi theo hướng** $v \in \mathbf{R}^n$ **tại** a nếuu tồn tại

$$D_v(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

a) Chứng minh nếu f khả vi tại a, thì f có đạo hàm theo mọi hướng tại a, và

$$D_v f(a) = < \operatorname{grad} f(a), v >$$

b) Chứng minh f có đạo hàm theo mọi hướng chưa chắc f khả vi.
(HD: Xét hàm $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y}$ nếu $x^2 \neq -y$, $f(x,y) = 0$ nếu $x^2 = -y$.
Hay hàm $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ nếu $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

16. Xét tính khả vi của các hàm
a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$.
b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nếu $x,y \neq 0$, $f(0,0) = 0$.
c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$ nếu $x,y \neq 0$, $f(0,0) = 0$.
d) $f(x,y) = |x| + |y|$.

17. Kiểm tra công thức đạo hàm hàm hợp:
a) $f(u,v,w) = u^2v + v^2w$, với $u = xy, v = \sin x, w = e^x$.
b) $f(u,v) = u^2 + v\sin u$, với $u = xe^u, v = yz\sin x$.

18. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ và $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ là các hàm khả vi. Giả sử $F(x, f(x)) \equiv 0$, và $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Chứng minh $f' = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$, với $y = f(x)$.

19. Xét phép đổi biến tọa độ cực: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.
Cho $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ khả vi, và $F(r,\varphi) = f(x,y)$. Chứng minh

$$(D_1F(r,\varphi))^2 + \frac{1}{r^2}(D_2F(r,\varphi))^2 = (D_1f(x,y))^2 + (D_2f(x,y))^2$$

20. Qua phép quay góc θ, tọa độ cũ (x,y) và mới (u,v) có quan hệ sau

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \ y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

Cho $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ khả vi, và $F(u,v) = f(x,y)$. Chứng minh

$$(D_1F(u,v))^2 + (D_2F(u,v))^2 = (D_1f(x,y))^2 + (D_2f(x,y))^2$$

21. Cho f là hàm khả vi. Chứng minh
a) $F(x,y) = f(x^2+y^2)$, thoả $x\dfrac{\partial F}{\partial y} - y\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$
b) $F(x,y) = f(xy)$, thoả $x\dfrac{\partial F}{\partial x} - y\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$
c) $F(x,y) = f(ax+by)$, thoả $a\dfrac{\partial F}{\partial y} - b\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.

22. Cho $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^2.
a) Với $c \in \mathbf{R}$,đặt $u(x,y) = f(x+cy) - g(x-cy)$. Chứng minh u thoả **phương trình sóng**::
$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
b) Cho $v(x,y) = f(3x+2y) + g(x-2y)$. Chứng minh
$$4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

23. Cho $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ khả vi liên tục và thoả **điều kiện Cauchy-Riemann**
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$
a) Chứng minh: $\det Jf(x,y) = 0$ nếu và chỉ nếu $Df(x,y) = 0$.
b) Chứng minh nếu f khả nghịch thì ánh xạ ngược cũng thoả điều kiện Cauchy-Riemann.

24. Hàm $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ gọi là **thuần nhất bậc** m nếuu $f(tx) = t^m f(x), \forall x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}_+$. Giả sử f khả vi. Chứng minh
$$f \text{ thuần nhất bậc } m \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = mf(x), \ \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

25. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^k $(k > 1)$. Chứng minh
$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)x_i, \quad g_i \in C^{k-1}(\mathbf{R}^n).$$

26. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ khả vi. Giả sử $|f'(x)| \leq L, \forall x$. Chứng minh f thoả điều kiện Lipschitz: $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
Suy ra điều kiện để hàm khả vi $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ là ánh xạ co. Tìm ví dụ.

27. Cho $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi. Giả sử $0 < m < f'(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$, và $f(a) < 0 < f(b)$. Sau đây là một phương pháp tìm nghiệm của f.
a) Chứng minh $g(x) = x - \frac{1}{M}f(x)$ xác định một ánh xạ co trên $[a,b]$.
b) Cho $x_0 \in [a,b]$ và $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{M}f(x_k), k \in \mathbf{N}$. Chứng minh dãy (x_k) hội tụ về nghiệm duy nhất x^* của f.
c) Chứng minh sai số: $|x_{k+1} - x^*| \leq \dfrac{|f(x_0)|}{m}\left(1 - \dfrac{m}{M}\right)^k$

28. Giả sử $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ khả vi liên tục, $f(a)=b$, và $f'(a)\neq 0$. Gọi δ là số dương: nếu $|x-a|<\delta$, thì $|f'(x)-f'(a)|\leq \dfrac{1}{2}|f'(a)|$. Đặt $\eta=\frac{\delta}{2}|f'(a)|$. Chứng minh nếu $|\bar{y}-b|<\eta$, thì dãy

$$x_0=a, x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)-\bar{y}}{f'(a)} \quad (k\in\mathbf{N})$$

hội tụ về nghiệm duy nhất của phương trình: $f(x)=\bar{y}, x\in[a-\delta,a+\delta]$.

29. Áp dụng tính chất của đạo hàm, rút gọn biểu thức:

$$f(x,y)=\operatorname{arctg} x+\ \operatorname{arctg} y-\ \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

30. Giả sử $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, có đạo hàm $Df(x)=A,\forall x$, trong đó A là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh f là ánh xạ affin, i.e. $f(x)=Ax+$ const.

31. Cho $f:U\to\mathbf{R}$ là hàm khả vi trên hình cầu $U\subset\mathbf{R}^n$. Chứng minh nếu $D_1f(x)=0,\forall x\in U$, thì f không phụ thuộc biến thứ nhất, i.e.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1',x_2,\cdots,x_n),\forall(x_1,\cdots,x_n),(x_1',\cdots,x_n)\in U$$

32. Cho $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ nếu $x,y\neq 0$, $f(0,0)=0$. Chứng minh

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

33. Khai triển Taylor đến cấp 2 các hàm:
a) $f(x,y)=x^2+y^2$, tại $(0,0)$; và tại $(1,2)$.
b) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\cos xy$, tại $(0,0)$.
c) $f(x,y)=e^{(x-1)^2}\cos y$, tại $(1,0)$

34. Khai triển Taylor tại 0 hàm: $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ nếu $x\neq 0$, $f(0)=0$.
Chuỗi Taylor có hội tụ về f hay không? Hàm f có là hàm giải tích không?

35. Xét phép biến đổi lớp C^1

$$\begin{aligned} u &= f_1(x,y)\\ v &= f_2(x,y)\end{aligned}$$

Chứng minh biến đổi trên là khả nghịch địa phương tại (x_0,y_0) nếu

$$\Delta=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

khác 0 tại (x_0,y_0), và khi đó phép biến đổi ngược $x=x(u,v),y=y(u,v)$ có các đạo hàm riêng thoả

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

36. Cho $f(x,y) = (\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2})$. Xét tính khả nghịch địa phương của f tại $(0,1)$.

37. Xét tính khả nghịc địa phương của các phép biến đổi

    a) **Tọa độ cực:** $\mathbf{R}^2 \ni (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbf{R}^2$.

    b) **Tọa độ cầu:** $\mathbf{R}^3 \ni (\rho,\varphi,\theta) \mapsto (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta) \in \mathbf{R}^3$.
    Mô tả hình học và tìm các miền màcác phép biến đổi trên là song ánh.

38. Cho $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.

    a) Chứng minh $\det Df(x,y) \neq 0, \forall (x,y)$, nhưng f không khả nghịch trên $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

    b) Chứng minh f là đơn ánh trên $A = \{(x,y) : x > 0\}$. Tìm $f(A)$.

    c) Tính $Dg(1,0)$,trong đó g là ánh xã ngược địa phương của f.

39. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f(x) = \|x\|^2\, x$. Chứng minh $f \in C^\infty$, và là song ánh từ hình cầu đơn vị lên chính nó, nhưng f^{-1} không khả vi.

40. Cho $f(x) = \dfrac{x}{2} + x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ nếu $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Chứng minh f khả vi và $f'(0) \neq 0$, nhưng f không khả nghịc địa phương tại 0.
    Điều này có mâu thuẫn gì với định lý hàm ngược không?

41. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ thuộc lớp C^1 và $\|f'(x)\| \leq c < 1, \forall x$ Đặt $g(x) = x + f(x)$. Chứng minh g là song ánh. (HD: Hãy chứng minh $g_y(x) = y - f(x)$ là ánh xạ co, rồi dùng nguyên lý điểm bất động.)

42. Cho $f : \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n$ là hàm lớp C^1. Giả sử $f(a) = 0$ và $Df(a)$ có hạng n Chứng minh với mọi c đủ gần 0, phương trình $f(x) = c$ luôn có nghiệm.

43. Cho $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1. Xét phép biến đổi

    $$\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= -y + xf(x) \end{aligned}$$

    Chứng minh nếu $f'(x_0) \neq 0$, thì biến đổi trên khả nghịc địa phương tại $x_0, y_0)$ và biến đổi ngược có dạng $x = f^{-1}(u)$, $y = -v + uf^{-1}(u)$.

44. Tại những giá trị nào của x mà từ phương trình $F(x,y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$, có thể giải $y = y(x)$ là hàm khả vi tại lân cận điểm đó. Trong trường hợp đó hãy tính $\dfrac{dy}{dx}$.

45. Cho (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm của hệ:

    $$z^2 + xy - a = 0, \quad z^2 + x^2 - y^2 - b = 0.$$

    Tìm điều kiện để có thể giải tại lân cận nghiệm trên $x = f(z), y = g(z)$ là các hàm khả vi. Trong trường hợp đó hãy tính $f'(z), g'(z)$.

46. Cho $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ là các hàm khả vi. Xét $F(x,y) = f(x,y,g(x,y))$.

    a) Tính $DF(x,y)$ theo các đạo hàm riêng của f và g.

    b) Nếu $F(x,y) = 0$ với mọi x,y, tính D_1g, D_2g theo các đạo hàm riêng của f.

47. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^4+y^4)/x & = & u \\ \sin x + \cos y & = & v \end{cases}$$
Khi nào có thể giải x, y như các hàm khả vi của u, v tại lân cận $x = \pi/2, y = \pi/2$. Tính $\dfrac{\partial x}{\partial u}(\pi^3/4, 1)$.

48. Có thể giải x, y, z theo u, v, w tại lân cận $(0,0,0)$ từ hệ phương trình sau?
$$\begin{cases} u(x,y,z) & = & x + xyz \\ v(x,y,z) & = & y + xy \\ w(x,y,z) & = & z + 2x + 3z^2 \end{cases}$$

49. Chứnh minh từ hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 & = & 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 & = & 0 \end{cases}$$
có thể giải u, v theo x, y tại lân cận $x = 2, y = -1$ thoả $u(2,-1) = 2, v(2,-1) = 1$. Tính các đạo hàm riêng của các nghiệm u, v tại đó.

50. Xét tính giải được của u, v theo x, y từ hệ phương trình
$$\begin{cases} xu & + & yv^2 & = & 0 \\ xv^3 & + & y^2u^6 & = & 0 \end{cases}$$
tại lân cận $x = 1, y = -1, u = 1, v = -1$. Tính các đạo hàm riêng của các nghiệm $u = u(x,y), v = v(x,y)$ tại đó.

51. Xét tíng giải được của u, v, w theo x, y, z từ hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 & = & 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 & = & 0 \\ x + z + u^2 + w + 2 & = & 0 \end{cases}$$
tại lân cận $x = 0, y = 0, z = 0, u = 0, v = 0, w = -2$. Tính các đạo hàm riêng của các nghiệm $u = u(x,y,z), v = v(x,y,z), w = w(x,y,z)$ tại đó.

52. Chứng minh phương trình $\sin tx + \cos tx = t, |t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tồn tại duy nhất nghiệm $x = \varphi(t)$, với φ là hàm khả vi vô hạn.
Hãy viết khai triển Taylor đến cấp 2 của φ tại 0.

53. Cho dạng toàn phương $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ $(a \neq 0)$. Chứng minh:
a) Q xác định dương khi và chỉ khi $a > 0$ và $ac - b^2 > 0$.
b) Q xác định âm khi và cỉ khi $a < 0$ và $ac - b^2 > 0$.
c) Q không xác định dấu khi và chỉ khi $ac - b^2 < 0$.

54. Xét cực trị các hàm:
a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$.
b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. (đồ thị hàm này có dạng 'lưng khỉ').

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$.

e) $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$, $(x,y,z > 0$ và $a > 0)$.

f) $f(x,y,z) = \cos 2x \sin y + z^2$.

55. Cho $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$. Xác định x sao cho $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$ đạt min.

56. **Bài toán xấp xỉ bậc n, bình phương bé nhất**: Cho hai đại lượng x, y mà quan hệ giữa chúng được cho bởi bảng dữ liệu sau (nhờ quan trắc thực nghiệm chẳng hạn)

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

a) Tìm đa thức bậc n, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, sao cho

$$Q(a_0, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{m}(p(x_i) - y_i)^2 \to \min$$

b) Chứng minh đa thức $p(x) = a_0 + a_1x$ xấp xỉ bình phương bé nhất cho bộ dữ liệu trên thoả

$$\begin{cases} a_1\sum_i x_i^2 + a_0\sum_i x_i &= \sum_i x_iy_i \\ a_1\sum_i x_i + na_0 &= \sum_i y_i \end{cases}$$

c) Áp dụng tìm xấp xỉ bậc 1 hay bậc 2, khi các dữ liệu là

x	0	3	6
y	1	4	5

x	-2	-1	1	2
y	2	1	1	2

Vẽ đồ thị các hàm tìm được. So sánh với đa thức nội suy Lagrange.

57. Cho $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ta muốn tìm A, B, C sao cho

$$\int_0^1 (f(x) - Ax^2 - Bx - C)^2 dx \text{ đạt } \min$$

Chứng minh A, B, C là nghiệm hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} \frac{1}{5}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{3}C &= \int_0^1 x^2 f(x)dx \\ \frac{1}{4}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}C &= \int_0^1 xf(x)dx \\ \frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B + C &= \int_0^1 f(x)dx \end{cases}$$

Đa thức $Ax^2 + Bx + C$ gọi là **xấp xỉ bậc** 2 **trung bình bình phương bé nhất** của f. Tổng quát hoá cho xấp xỉ bậc n, trung bình bình phương bé nhất cho hàm liên tục trện $[a,b]$.