TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT
KHOA TOÁN - TIN HỌC

TẠ LÊ LỢI - ĐỖ NGUYÊN SƠN

GIẢI TÍCH 3

(Giáo Trình)

-- *Lưu hành nội bộ* --

Đà Lạt 2008

Giải Tích 3

Tạ Lê Lợi - Đỗ Nguyên Sơn

Mục lục

I. Tích phân phụ thuộc tham số

1 Tích phân phụ thuộc tham số

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. *Xét hàm* $f(x,t) = f(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_m)$ *xác định trên miền* $X \times T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*. Giả sử* X *đo được (Jordan) và với mỗi giá trị của* $t \in T$ *cố định, hàm* $f(x,t)$ *khả tích theo* x *trên* X*. Khi đó tích phân*

$$I(t) = \int\limits_X f(x,t)dx \tag{1}$$

là hàm theo biến $t = (t_1,\ldots,t_m)$*, gọi là* **tích phân phụ thuộc tham số** *với* m *tham số* $t_1,\ldots,t_m$.

1.2 Tính liên tục

Định lý 1. *Nếu* $f(x,t)$ *liên tục trên* $X \times T \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*, ở đây* X, T *là các tập compact, thì tích phân*

$$I(t) = \int\limits_X f(x,t)dx$$

liên tục trên T.

Chứng minh. Cố định $t_0 \in T$. Ta sẽ chứng minh với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $t \in T$, $d(t,t_0) < \delta$ ta có $\mid I(t) - I(t_0) \mid < \epsilon$.
Từ định nghĩa suy ra

$$\mid I(t) - I(t_0) \mid = \left| \int\limits_X (f(x,t) - f(x,t_0))dx \right| \leq \int\limits_X \mid f(x,t) - f(x,t_0) \mid dx.$$

Do f liên tục trên compact nên liên tục đều trên đó, tức là tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\mid f(x',t') - f(x,t) \mid < \frac{\epsilon}{v(X)}$$

với mọi $(x,t),(x',t') \in X \times T$, $d((x',t'),(x,t)) < \delta$.
Từ đó, với $d(t,t_0) < \delta$ ta có

$$\mid I(t) - I(t_0) \mid < v(X)\frac{\epsilon}{v(X)} = \epsilon.$$

$\square$

Ví dụ. 1) Ta có $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}dx = \int\limits_{-1}^{1}|x|dx = 1$ vì hàm $\sqrt{x^2+t^2}$ liên tục trên $[-1,1]\times[-\epsilon,\epsilon]$.

2) Khảo sát tính liên tục tại điểm $(0,0)$ của hàm $f(x,t) = \begin{cases} xt^{-2}e^{-x^2t^{-2}} & \text{nếu } t \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$.

Nếu $f(x,t)$ liên tục tại $(0,0)$, thì $f(x,t)$ liên tục trên $[0,1]\times[-\epsilon,\epsilon]$. Khi đó, tích phân $I(t) = \int\limits_{0}^{1} f(x,t)dx$ liên tục trên $[-\epsilon,\epsilon]$. Nhưng ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} I(t) &= \lim_{t\to 0}\int\limits_{0}^{1} xt^{-2}e^{-x^2t^{-2}} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\int\limits_{0}^{1} e^{-x^2t^{-2}}d(-x^2t^{-2}) \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}(e^{-t^{-2}} - 1) = \frac{1}{2} \neq 0 = I(0).
\end{aligned}$$

Vậy, hàm $f(x,t)$ không liên tục tại $(0,0)$.

Sau đây chúng ta sẽ khảo sát một tổng quát hóa của Định lý 1 trong trường hợp $X = [a,b]$.

Định lý 2. *Cho $f(x,t)$ liên tục trên $[a,b]\times T$, với T là tập compact và $a(t), b(t)$ là hai hàm liên tục trên T sao cho $a(t), b(t) \in [a,b]$ với mọi $t \in T$. Khi đó, tích phân*

$$I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$$

liên tục trên T.

Chứng minh. Do f liên tục trên tập compact nên giới nội, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho $\mid f(x,y) \mid \leq M$ với mọi $(x,t) \in [a,b]\times T$. Cố định $t_0 \in T$ ta có:

$$\begin{aligned}
\mid I(t) - \ I(t_0) \mid &= \left| \int\limits_{a(t)}^{a(t_0)} f(x,t)dx + \int\limits_{b(t_0)}^{b(t)} f(x,t)dx + \int\limits_{a(t_0)}^{b(t_0)} [f(x,t) - f(x,t_0)]dx \right| \\
&\leq \left| \int\limits_{a(t)}^{a(t_0)} f(x,t)dx \right| + \left| \int\limits_{b(t_0)}^{b(t)} f(x,t)dx \right| + \left| \int\limits_{a(t_0)}^{b(t_0)} (f(x,t) - f(x,t_0))dx \right| \\
&\leq M \mid a(t) - a(t_0) \mid + M \mid b(t) - b(t_0) \mid + \int\limits_{a(t_0)}^{b(t_0)} \mid f(x,t) - f(x,t_0) \mid dx.
\end{aligned}$$

Khẳng định suy ra từ tính liên tục của $a(t), b(t)$ và Định lý 1. $\square$

Ví dụ. Do hàm $\dfrac{1}{1+x^2+t^2}$ liên tục trên $[0,1]\times[-\epsilon,\epsilon]$ và các hàm $\alpha(t)=t$, $\beta(t)=\cos t$ liên tục trên $[-\epsilon,\epsilon]$, ta có

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{t}^{\cos t}\frac{dx}{1+x^2+t^2}dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

1.3 Tính khả vi.

Định lý 3. *Nếu $f(x,t)$ và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)$, $i=1,\dots,m$, liên tục trên $X\times T\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, ở đây X,T là các tập compact, thì tích phân*

$$I(t)=\int\limits_{X} f(x,t)dx$$

khả vi trên $\overset{o}{T}$ và với mỗi i ta có:

$$\frac{\partial I}{\partial t_i}(t)=\int\limits_{X}\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)dx.$$

Chứng minh. Với mỗi $t_0\in\overset{o}{T}$ cố định ta có:

$$\frac{I(t_0+h_ie_i)-I(t_0)}{h_i}=\int\limits_{X}\frac{f(x,t_0+h_ie_i)-f(x,t_0)}{h_i}dx.$$

trong đó e_i là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^m$. Áp dụng định lý giá trị trung bình cho hàm 1 biến ta có:

$$f(x,t_0+h_ie_i)-f(x,t_0)=\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t_0+\theta_ih_ie_i)h_i,\qquad 0<\theta_i<1$$

Khi đó :

$$\left|\frac{I(t_0+h_ie_i)-I(t_0)}{h_i}-\int\limits_{X}\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t_0)dx\right|=\left|\int\limits_{X}[\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t_0+\theta_ih_ie_i)-\frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t_0)]dx\right|$$

Sử dụng tính liên tục của $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)$ trên compact $X \times T$ và lý luận như trong chứng minh Định lý 1 suy ra

$$\frac{\partial I}{\partial t_i}(t_0) = \lim_{h_i \to 0} \frac{I(t_0 + h_i e_i) - I(t_0)}{h_i} = \int\limits_X \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)dx.$$

Tính liên tục của $\dfrac{\partial I}{\partial t_i}(t)$ trên T suy ra từ Định lý 1 $\square$

Ví dụ. Xét $I(t) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\cos x} \ln \dfrac{1 + t\cos x}{1 - t\cos x} dx$, $t \in (-1, 1)$. Ta có các hàm

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} \ln \dfrac{1 + t\cos x}{1 - t\cos x} & \text{nếu } x \neq \pi/2 \\ 2t & \text{nếu } x = \pi/2 \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{2}{1 - t^2\cos^2 x},$$

liên tục trên $[0, \pi/2] \times [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$. Vậy, theo định lý trên

$$I'(t) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - t^2\cos^2 x} = 2\int\limits_0^{\infty} \frac{du}{1 - t^2 + u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Từ đó, $I(t) = \pi \arcsin t + C$. Vì $I(0) = 0$, nên $C = 0$. Vậy, $I(t) = \pi \arcsin t$.

Định lý 4. *Nếu $f(x,t)$ và các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)$, $i = 1, \ldots, m$, liên tục trên $[a,b] \times T$, ở đây T là tập compact trong $\mathbb{R}^m$, $\alpha(t), \beta(t)$ khả vi trên T và $\alpha(t), \beta(t) \in [a,b]$ với mọi $t \in T$, thì tích phân*

$$I(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$$

khả vi trên $\overset{o}{T}$ và với mỗi i ta có:

$$\frac{\partial I}{\partial t_i}(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)dx + f(\beta(t),t)\frac{\partial \beta}{\partial t_i}(t) - f(\alpha(t),t)\frac{\partial \alpha}{\partial t_i}(t).$$

Chứng minh. Xét hàm $m+2$ biến

$$F(t,u,v) = \int_u^v f(x,t)dx, \qquad (t,u,v) \in D = T \times [a,b] \times [a,b].$$

Ta sẽ chỉ ra rằng $F(t,u,v)$ là hàm khả vi. Với mỗi u, v cố định, từ Định lý 3, suy ra

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(t,u,v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)dx.$$

Vế phải của đẳng thức trên được xem như là tich phân phụ thuộc các tham số t,u,v. Hàm $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)$ xem như là hàm theo các biến x,t,u,v liên tục trên $[a,b] \times D$. Từ Định lý 2, với $a(t,u,v) = u$, $b(t,u,v) = v$, suy ra $\dfrac{\partial F}{\partial t_i}(t,u,v)$ là hàm liên tục trên D. Ngoài ra ta còn có

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t,u,v) = -f(u,t) \quad \text{và} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(t,u,v) = f(v,t)$$

đều là những hàm liên tục trên D. Vậy, hàm $F(t,u,v)$ khả vi.

Hàm $I(t)$ được xem như là hàm hợp $I(t) = F(t,\alpha(t),\beta(t))$. Từ đó , hàm $I(t)$ khả vi và

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial t_i}(t) &= \frac{\partial F}{\partial t_i}(t,\alpha(t),\beta(t)) + \frac{\partial F}{\partial u}(t,\alpha(t),\beta(t))\frac{\partial \alpha}{\partial t_i}(t) + \frac{\partial F}{\partial v}(t,\alpha(t),\beta(t))\frac{\partial \beta}{\partial t_i}(t)\\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(x,t)dx + f(\beta(t),t)\frac{\partial \beta}{\partial t_i}(t) - f(\alpha(t),t)\frac{\partial \alpha}{\partial t_i}(t).\end{aligned}$$

□

Ví dụ. Xét tích phân $I(t) = \int_t^{\sin t} e^{tx}dx$. Theo Định lý trên, hàm $I(t)$ khả vi và

$$I'(t) = \int_t^{\sin t} xe^{tx}dx + e^{t\sin t}\cos t - e^{t^2}.$$

2 Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

2.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 2. *Giả sử hàm $f(x,t)$ xác định trên $[a,\infty)\times T$, $T\subset\mathbb{R}$, sao cho với mỗi $t\in T$ cố định , hàm $f(x,t)$ khả tích trên $[a,b]$, với mọi $b>a$. Tích phân*

$$I(t)=\int\limits_a^\infty f(x,t)dx \qquad (1),$$

gọi là **tích phân suy rộng loại 1 phụ thuộc tham số**. *Tích phân* (1) *gọi là* **hội tụ tại** t_0 *nếuu tích phân* $\int\limits_a^\infty f(x,t_0)dx$ *hôi tụ, tức là tồn tại* $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x,t_0)dx=I(t_0)$ *hữu hạn.*
Tích phân (1) *gọi là* **hội tụ trên** T *nếuu hội tụ tại mọi điểm của* T*, tức là*

$$\forall\epsilon>0,\forall t\in T,\exists a_0(\epsilon,t)>a,\ \text{sao cho}\ \forall b\ge a_0\Longrightarrow\left|\int\limits_b^\infty f(x,t)\right|<\epsilon.$$

Tích phân (1) *gọi là* **hội tụ đều trên** T *nếuu*

$$\forall\epsilon>0,\exists a_0(\epsilon)>a,\ \text{sao cho}\ \forall b\ge a_0,\forall t\in T\Longrightarrow\left|\int\limits_b^\infty f(x,t)\right|<\epsilon.$$

Định nghĩa 3. *Giả sử hàm $f(x,t)$ xác định trên $[a,b)\times T$, $T\subset\mathbb{R}$, sao cho với mỗi $t\in T$ cố định , hàm $f(x,t)$ khả tích trên mỗi đoạn $[a,b-\eta]$, $\eta>0$. Tích phân*

$$J(t)=\int\limits_a^b f(x,t)dx=\lim_{\eta\to0^+}\int\limits_a^{b-\eta} f(x,t)dx, \qquad (2)$$

gọi là **tích phân suy rộng loại 2 phụ thuộc tham số**. *Tích phân* (2) *gọi là* **hội tụ tại** t_0 *nếuu tích phân* $\int\limits_a^b f(x,t_0)dx$ *hội tụ, tức là tồn tại* $\lim\limits_{\eta\to0}\int\limits_a^{b-\eta} f(x,t_0)dx=J(t_0)$ *hữu hạn.*
Tích phân (2) *gọi là* **hội tụ trên** T *nếuu hội tụ tại mọi điểm của* T*, tức là*

$$\forall\epsilon>0,\forall t\in T,\exists\delta(\epsilon,t)>0,\ \text{sao cho}\ 0<\forall\eta<\delta\Longrightarrow\left|\int\limits_{b-\eta}^b f(x,t)\right|<\epsilon.$$

Tích phân (2) *gọi là* **hội tụ đều trên** T *nếuu*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta_0(\epsilon) > 0, \text{ sao cho } 0 < \forall\eta < \delta, \forall t \in T \Longrightarrow \left|\int\limits_{b-\eta}^{b} f(x,t)\right| < \epsilon.$$

Chú ý. 1) Tương tự, ta định nghĩa

$$\begin{aligned} I(t) &= \int\limits_{-\infty}^{b} f(x,t)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x,t)f(x,t), \\ J(t) &= \int\limits_{a}^{b} f(x,t)dx = \lim_{\eta\to 0^+}\int\limits_{a+\eta}^{b} f(x,t)f(x,t), \end{aligned}$$

và cũng có khái niệm hội tụ, hội tụ đều tương ứng.
2) Việc khảo sát tích phân suy rộng phụ thuộc tham số loại 2 được thực hiện hoàn toàn tương tự như loại 1, từ định nghĩa các khái niệm đến các tính chất. Do đó, trong mục này, ta chỉ khảo sát tích phân suy rộng phụ thuộc tham số $I(t) = \int\limits_{a}^{\infty} f(x,t)dx$.

Ví dụ. Xét tích phân $I(t) = \int\limits_{0}^{\infty} te^{-xt}dx$. Khi đó
a) $I(t)$ hội tụ trên $(0,\infty)$ vì

$$\forall\epsilon > 0, \forall t \in T, \exists a_0 = \frac{\ln\epsilon}{-t}, \forall b > a_0 \Longrightarrow \left|\int\limits_{b}^{\infty} te^{-xt}\right| = e^{-bt} < \epsilon.$$

b) $I(t)$ không hội tụ đều trên $(0,\infty)$ vì với $\epsilon \in (0,1)$, với mọi $a_0 > 0$, nếu chọn $b = a_0$ và t từ bất đẳng thức $0 < t < \dfrac{\ln\epsilon}{-a_0}$, thì ta có $\left|\int\limits_{b}^{\infty} te^{-xt}\right| = e^{-bt} > \epsilon$.
c) $I(t)$ hội tụ đều trên $T_r = [r,\infty)$, với $r > 0$. Thật vậy, ta có

$$\forall\epsilon > 0, \exists a_0 = \frac{\ln\epsilon}{-r}, \forall b \geq a_0, \forall t \in T_r \Longrightarrow \left|\int\limits_{b}^{\infty} te^{-xt}\right| = e^{-bt} < e^{-a_0 r} < \epsilon.$$

2.2 Một số tiêu chuẩn hội tụ đều

Định lý 5. *(Tiêu chuẩn Cauchy)* *Tích phân* $I(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *hội tụ đều trên* T *khi và chỉ khi*

$$\forall \epsilon > 0, \exists a_0(\epsilon) > a, \text{ sao cho } \forall b_1, b_2 \geq a_0, \forall t \in T \Longrightarrow \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t) \right| < \epsilon. \qquad (*)$$

Chứng minh. Giả sử $I(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ hội tụ đều trên T. Khi đó, Điều kiện $(*)$ suy ra từ bất đẳng thức

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t) \right| \leq \left| \int\limits_{b_1}^{\infty} f(x,t) \right| + \left| \int\limits_{b_2}^{\infty} f(x,t) \right|$$

Ngược lại, với t cố định, điều kiện $(*)$ suy ra $I(t)$ hội tụ. Trong $(*)$, cho $b_2 \to 0$, suy ra $I(t$ hội tụ đều theo định nghĩa. □

Định lý 6. *(Tiêu chuẩn Weierstrass)* *Giả sử*
(1) tồn tại hàm $\varphi(x)$ *sao cho* $|f(x,t)| \leq \varphi(x)$, $\forall x \geq a$, $\forall t \in T$,
(2) tích phân $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ *hội tụ.*
Khi đó, tích phân $I(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *hội tụ đều trên* T.

Chứng minh. Theo tiêu chuẩn Cauchy đối với tích phân suy rộng hội tụ, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại a_0 sao cho

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \varphi(x) \right| < \epsilon, \ \forall b_1, b_2 \geq a_0.$$

Suy ra,

$$\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t) \right| \leq \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x,t)| \right| \leq \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} \varphi(x) \right| < \epsilon.$$

Theo Định lý 5, tích phân $I(t)$ hội tụ đều. □

Để khảo sát tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số hội tụ đều, chúng ta thiết lập mối quan hệ giữa nó và dãy hàm hội tụ đều.

Mệnh đề 1. *Giả sử tích phân* $I(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *hội tụ đều trên* T *và* (a_n), *với* $a_n > a$. *là dãy số sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Khi đó, dãy hàm*

$$I_n(t) = \int\limits_a^{a_n} f(x,t)dx$$

hội tụ đều tới hàm số $I(t)$ *trên* T.

Chứng minh. Do $I(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ hội tụ trên T nên dãy hàm $(I_n(t))$ hội tụ tới $I(t)$ trên T. Vì $I(t)$ hội tụ đều nên với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại a_0 sao cho

$$\left| \int\limits_b^\infty f(x,t) \right| < \epsilon, \quad \forall b > a_0, \forall t \in T.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ nên tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $n \geq N$, ta có $a_n \geq b$. Vậy, ta có

$$|I_n(t) - I(t)| = \left| \int\limits_a^{a_n} f(x,t) - \int\limits_a^\infty f(x,t) \right| = \left| \int\limits_{a_n}^\infty f(x,t) \right| < \epsilon,$$

với mọi $n \geq N$, với mọi $t \in T$. Từ đó, $I_n(t)$ hội tụ đều tới $I(t)$ trên T. □

2.2.1 Tính liên tục

Định lý 7. *Nếu hàm* $f(x,t)$ *liên tục trên* $[a,\infty) \times [c,d]$ *và tích phân* $I(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *hội tụ trên trên* $[c,d]$, *thì* $I(t)$ *liên tục trên* $[c,d]$.

Chứng minh. Gọi (a_n), với $a_n > a$. là dãy số sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ và xét dãy hàm

$$I_n(t) = \int\limits_a^{a_n} f(x,t)dx, \ t \in [c,d].$$

Với mỗi n cố định, theo Định lý 1, hàm $I_n(t)$ liên tục trên $[c,d]$. Theo mệnh đề 1, dãy hàm $(I_n(t))$ hội tụ đều tới $I(t)$. Theo định lý về tính liên tục của dãy hàm hội tụ đều, $I(t)$ liên tục trên $[c,d]$. □

2.2.2 Tính khả vi

Định lý 8. *Giả sử*
(a) Hàm $f(x,t)$ *liên tục và có đạo hàm riêng* $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ *liên tục trên* $[a,\infty)\times[c,d]$.
(b) Tích phân $I(t)=\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *hội tụ trên* $[c,d]$.
(c) Tích phân $\int\limits_a^\infty \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ *hội tụ đều trên* $[c,d]$.
Khi đó, hàm $I(t)$ *khả vi trên* $[c,d]$ *và ta có công thức* $\quad I'(t)=\int\limits_a^\infty \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$

Chứng minh. Xét dãy hàm

$$I_n(t)=\int\limits_a^{a+n} f(x,t)dx,\ t\in[c,d].$$

Với mỗi n, theo Định lý 3, hàm $I_n(t)$ khả vi trên $[c,d]$ và

$$I_n'(t)=\int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,\ t\in[c,d].$$

Ta có $\lim I_n(t)=I(t)$ và $\lim I_n'(t)=\int\limits_a^\infty \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$. Theo mệnh đề 1, dãy hàm $I_n'(t)$ hội tụ đều trên $[c,d]$. Theo định lý về tính khả vi của dãy hàm hội tụ đều, $I(t)$ khả vi trên $[c,d]$ và

$$I'(t)=\big(\lim_{n\to\infty} I_n(t)\big)'=\lim_{n\to\infty} I_n'(t)=\int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

□

2.2.3 Tính khả tích

Định lý 9. *Giả sử hàm* $f(x,t)$ *liên tục trên* $[a,\infty)\times[c,d]$ *và tích phân* $I(t)=\int\limits_a^\infty f(x,t)dx$ *hội tụ đều trên* $[c,d]$. *Khi đó, hàm* $I(t)$ *khả tích trên* $[c,d]$ *và ta có công thức*

$$\int\limits_c^d I(t)dt=\int\limits_c^d\Big(\int\limits_a^\infty f(x,t)dx\Big)dt=\int\limits_a^\infty\Big(\int\limits_c^d f(x,t)dt\Big)dx$$

Chứng minh. Theo Định lý 7, $I(t)$ là hàm liên tục trên $[c,d]$, do đó khả tích. Xét dãy hàm

$$I_n(t) = \int_a^{a+n} f(x,t)dx,\ t \in [c,d].$$

Với mỗi n cố định, theo Định lý 1, hàm $I_n(t)$ liên tục trên $[c,d]$. Theo mệnh đề 1, dãy hàm $(I_n(t))$ hội tụ đều tới $I(t)$ trên $[c,d]$. Theo định lý về tính khả tích của dãy hàm hội tụ đều, ta có

$$\begin{aligned}
\int_c^d I(t)dt &= \int_c^d \big(\lim_{n\to\infty} I_n(t)\big)dt = \lim_{n\to\infty}\int_c^d I_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_c^d \left(\int_a^{a+n} f(x,t)dx\right)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_a^{a+n} \left(\int_c^d f(x,t)dx\right)dt = \int_a^{\infty}\left(\int_c^d f(x,t)dt\right).
\end{aligned}$$

□

3 Các tích phân Euler

3.1 Tích phân Euler loại 1

3.1.1 Định nghĩa

Tích phân Euler loại 1 hay hàm Beta là tích phân phụ thuộc 2 tham số dạng

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ p>0, q>0.$$

3.1.2 Các tính chất cuả hàm Beta

1) Sự hội tụ. Ta phân tích $B(p,q)$ thành hai tích phân

$$B(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B_1(p,q) + B_2(p,q).$$

Tích phân B_1 hội tụ nếu $p > 0$ và phân kỳ nếu $p \leq 0$. Điều này suy ra từ

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq M_q x^{p-1}, \quad M_q = \max_{0 \leq x \leq 1/2} (1-x)^{q-1}$$
$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \geq m_q x^{p-1}, \quad m_q = \min_{0 \leq x \leq 1/2} (1-x)^{q-1}.$$

Tương tự, tích phân B_2 hội tụ nếu $q > 0$ và phân kỳ nếu $q \leq 0$. Như vậy hàm $B(p, q)$ xác định với mọi $p > 0$, $q > 0$.

2) Sự hội tụ đều. Tích phân $B(p, q)$ hội tụ đều trên chữ nhật $[p_0, p_1] \times [q_0, q_1]$, trong đó, $0 < p_0 < p_1$, $0 < q_0 < q_1$. Điều này suy ra từ đánh giá

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}, \ \forall x \in (0, 1), \ p \geq p_0, \ q \geq q_0,$$

và sau đó sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass.

3) Tính liên tục. Hàm $B(p, q)$ liên tục trên miền xác định của nó. Thật vậy, với mọi (p, q), $p > 0$, $q > 0$, tích phân $B(p, q)$ hội đều trên $[p-\epsilon, p+\epsilon] \times [q-\epsilon, q+\epsilon]$, do đó liên tục trên miền này.

4) Tính đối xứng. Bằng cách đổi biến $x = 1 - t$, ta được $B(p, q) = B(q, p)$.

5) Công thức truy hồi. Bằng cách lấy tích phân từng phần từ tích phân $B(p, q)$ ta được

$$B(p+1, q+1) = \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \frac{q}{p+q+1} B(p, q+1).$$

Đặc biệt, nếu m, n là các số tự nhiên, thì áp dụng liên tiếp công thức trên, ta có

$$\begin{aligned}
B(1,1) &= 1 \\
B(p+1,1) &= \frac{1}{p+1} \\
B(p+1,n) &= \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)} \\
B(m,n) &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.
\end{aligned}$$

3.2 Tích phân Euler loại 2

3.2.1 Định nghĩa

Tích phân Euler loại 2 hay hàm Gamma là tích phân phụ thuộc tham số dạng

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \ p > 0.$$

3.2.2 Các tính chất cuả hàm Gamma

1) Sự hội tụ. Ta phân tích $B(p,q)$ thành hai tích phân

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p).$$

Tích phân $\Gamma_1(p)$ hội tụ khi $p > 0$. Điều này suy ra từ

$$x^{p-1}e^{-x} \le x^{p-1}, \ \forall x \in (0,1].$$

Tích phân $\Gamma_2(p)$ hội tụ khi $p > 0$. Điều này suy ra từ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{p+1}}} = \lim_{x\to\infty} = \frac{x^{2p}}{e^x} = 0, \text{ và } \int_1^\infty \frac{1}{x^{p+1}} < \infty.$$

Suy ra, tích phân $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ hội tụ khi $p > 0$.

2) Sự hội tụ đều. Tích phân $\Gamma_1(p)$ hội tụ đều trên mỗi đoạn $[p_0.p_1]$, với $p_1 > p_0 > 0$. Điều này suy ra từ

$$\begin{aligned} &x^{p-1}e^{-x} \le x^{p_0-1} \ (0 < x \le 1) && \int\limits_0^1 x^{p_0-1} < \infty, \\ &x^{p-1}e^{-x} \le x^{p_1-1}e^{-x}, \ (1 \le x < \infty), && \int\limits_1^\infty x^{p_0-1}e^{-x} < \infty. \end{aligned}$$

3) Tính liên tục. Từ tính hội tụ đều suy ra hàm $\Gamma(p)$ liên tục trên miền xác định của nó.

4) Công thức truy hồi. Bằng cách tích phân từng phần, ta có

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \left\{ x^p e^{-x} \Big|_0^b + p \int_0^b x^{p-1} e^{-x} dx \right\} = p\Gamma(p).$$

Nếu n là số tự nhiên, thì áp dụng liên tiếp công thức trên, ta có

$$\Gamma(p+n) = (n+p-1)(n+p-2)\cdots p\Gamma(p).$$

Nói riêng, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

5) Liên hệ với hàm Beta. Bằng phép đổi biến $x = ty$, $t > 0$, ta có

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^\infty y^{p-1} e^{-ty} dy.$$

Thay p bởi $p+q$ và t bởi $t+1$ ta được

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên với t^{p-1} rồi lấy tích phân theo t từ 0 đến ∞ ta được

$$\Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{p-1} e^{-ty} y^{p+q-1} e^{-y} dy \right) dt.$$

Đổi biến $x = \dfrac{t}{1+t}$, ta được $B(p,q) = \int_0^\infty \dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$. Mặt khác, có thể đổi thứ tự tích phân ở vế phải (hãy kiểm chứng điều này như bài tập). Từ đó

$$\begin{aligned}
\Gamma(p+q)B(p,q) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty t^{p-1} e^{-ty} y^{p+q-1} e^{-ty} dt \right) dy \\
&= \int_0^\infty \left(y^{p+q-1} e^{-y} \frac{\Gamma(p)}{y^p} \right) dy \\
&= \Gamma(a) \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} dy = \Gamma(p)\Gamma(q).
\end{aligned}$$

Vậy. ta có công thức

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

II. Tích phân hàm số trên đa tạp khả vi

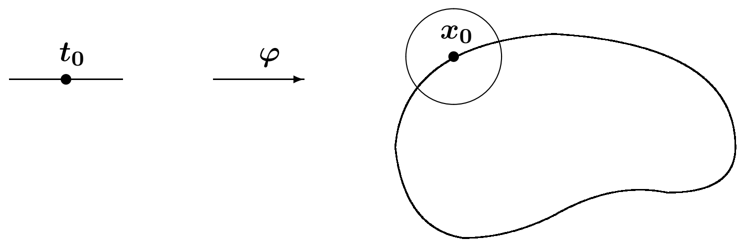
1. ĐA TẠP KHẢ VI TRONG $\mathbf{R}^n$

1.1 Đường cong. Tập con $C \subset \mathbf{R}^n$ được gọi là **đường cong trơn lớp** $C^p (p \geq 1)$ nếuu mọi $x \in C$, tồn tại lân cận mở $V \subset \mathbf{R}^n$ của x, khoảng mở $I \subset \mathbf{R}$, và $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$ thuộc lớp C^p, $\varphi(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, sao cho:

(1) $\varphi : I \to C \cap V$ là 1-1.

(2) $\varphi'(t) = (x_1'(t), \cdots, x_n'(t)) \neq 0$, với mọi $t \in I$.

Khi đó (φ, I) được gọi là một **tham số hoá của** C **tại** x.



Vector $\varphi'(t)$ gọi là **vector tiếp xúc của** C **tại** x. Ta có phương trình tham số của đường thẳng tiếp xúc với C tại $\varphi(t_0)$:

$$x = \varphi(t_0) + s\varphi'(t_0), \;\; s \in \mathbf{R}$$

Ví dụ. Trong $\mathbf{R}^2$.

a) Đường tròn có thể cho bởi tham số hoá: $x = a\cos t, y = a\sin t, \;\; t \in [0, 2\pi)$.

b) Tham số hoá: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, \;\; t \in (0, H)$, mô tả đường xoắn.

Bài tập: Viết cụ thể phương trình tiếp tuyến khi $n = 2$ hay $n = 3$.

Nhận xét. Điều kiện $\varphi'(t) \neq 0$ bảo đảm cho đường cong không có góc hay điểm lùi. Chẳng hạn, nếu $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ thì đường cong có điểm lùi tại $(0,0)$, còn $\varphi(t) = (t^3, |t|^3)$, thì đường cong có điểm góc tại $(0,0)$.

1.2 Mặt cong. Tập con $S \subset \mathbf{R}^n$ được gọi là **mặt cong trơn lớp** C^p $(p \geq 1)$ nếuu mọi $x \in S$, tồn tại lân cận mở $V \subset \mathbf{R}^n$ của x, tập mở $U \subset \mathbf{R}^2$, và $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ thuộc lớp C^p, $\varphi(u,v) = (x_1(u,v), \cdots, x_n(u,v))$, sao cho:

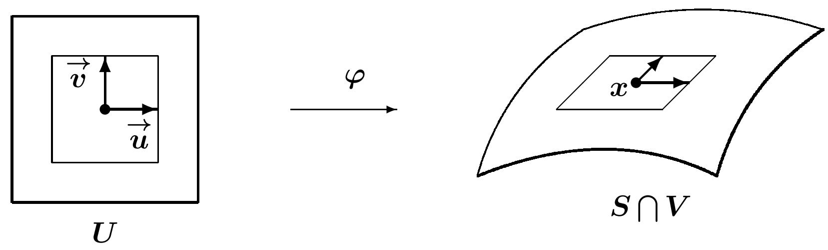
(1) $\varphi : U \to S \cap V$ là 1-1.

(2) $\operatorname{rank} \varphi'(u,v) = 2$, i.e. $D_1\varphi(u,v), D_2\varphi(u,v)$ độc lập tuyến tính, $\forall (u,v) \in U$.

Khi đó (φ, U) được gọi là một **tham số hoá của** S **tại** x.

Khi cố định một biến u hay v, φ cho các **đường cong tọa độ**. Các vector $D_1\varphi(u,v)$, $D_2\varphi(u,v)$ gọi là **các vector tiếp xúc của** S **tại** $\varphi(u,v)$. Ta có phương trình tham số của mặt phẳng tiếp xúc với S tại $\varphi(u_0, v_0)$:

$$x = \varphi(u_0, v_0) + sD_1\varphi'(u_0, v_0) + tD_2\varphi(u_0, v_0), \;\; (s,t) \in \mathbf{R}^2$$



Trường hợp $n = 3$, $N(u,v) = D_1\varphi(u,v) \times D_2\varphi(u,v) = (A(u,v), B(u,v), C(u,v))$, là vector vuông góc với S tại $\varphi(u,v)$. Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng tiếp xúc với S tại $\varphi(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$:

$$A(u_0,v_0)(x-x_0) \; + \; B(u_0,v_0)(y-y_0) \; + \; C(u_0,v_0)(z-z_0) = 0$$

Bài tập: Xác định tọa độ vector pháp qua các đạo hàm riêng của φ.

Ví dụ. Trong $\mathbf{R}^3$.
a) Tham số hoá mặt cầu:

$$x = a\cos\phi\sin\theta, y = a\sin\phi\sin\theta, z = a\cos\theta, \; (\phi,\theta) \in (0,2\pi)\times(0,\pi)$$

b) Tham số hoá mặt xuyến:

$$x = (a+b\cos\phi)\sin\theta, y = (a+b\sin\phi)\sin\theta, z = b\sin\phi, \; (\phi,\theta) \in (0,2\pi)\times(0,2\pi), \; (0<b<a)$$

Bài tập: Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với các mặt trên.

Bây giờ, ta tổng quát hoá các khái niệm trên.

1.3 Đa tạp. Tập con $M \subset \mathbf{R}^n$ được gọi là **đa tạp k chiều lớp** C^p $(p \geq 1)$ nếuu mọi $x \in M$, tồn tại lân cận mở $V \subset \mathbf{R}^n$ của x, tập mở $U \subset \mathbf{R}^k$, và $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ thuộc lớp C^p, sao cho:

(M1) $\varphi : U \to M \cap V$ là 1-1.

(M2) $\operatorname{rank}\varphi'(u) = k$, i.e. $D_1\varphi(u), \cdots, D_k\varphi(u)$ độc lập tuyến tính, với mọi $u \in U$.

Khi đó (φ, U) được gọi là một **tham số hoá của** M **tại** x.
Khi cố định $k-1$ biến trong các biến, φ cho các **đường cong tọa độ**. Các vector $D_1\varphi(u), \cdots, D_k\varphi(u)$ gọi là **các vector tiếp xúc của** M **tại** $\varphi(u)$. Ta có phương trình tham số của k- phẳng tiếp xúc với M tại $\varphi(u_0)$:

$$x = \varphi(u_0) + t_1D_1\varphi(u_0 + \cdots + t_kD_k\varphi(u_0), \; (t_1,\cdots,t_k) \in \mathbf{R}^k$$

1.4 Cho đa tạp bởi hệ phương trình. *Cho tập mở $V \subset \mathbf{R}^n$ và các hàm lớp C^p $F_1,\cdots,F_m : V \to \mathbf{R}$. Xét tập cho bởi hệ phương trình*

$$M = \{x \in V : F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0\}$$

Giả sử $\operatorname{rank}(DF_1, \cdots, DF_m)(x) = m, \forall x \in M$. *Khi đó M là đa tạp khả vi, $n-m$ chiều, lớp C^p.*

Chứng minh: Đặt $k = n - m$. Ký hiệu $x = (x', y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^n$, và $F = (F_1, \cdots, F_m)$.
Với mỗi $a \in M$, bằng phép hoán vị tọa độ, có thể giả thiết $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a) \neq 0$. Theo định lý hàm ẩn, ở lân cận V' của $a = (a', b)$, ta có

$$M \cap V' = \{(x', y) \in V' : F(x', y) = 0\} = \{(x', y) \in V' : y = g(x')\},$$

với g là hàm lớp C^p ở một lân cận U của a'. Vậy $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$, $\varphi(x') = (x', g(x'))$ là một tham số hoá của M tại a. $\square$

Ví dụ. Trong $\mathbf{R}^3$.
a) Mặt cầu S^2 cho bởi phương trình: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
Dễ kiểm tra $F'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ trên S^2. Vậy S^2 là đa tạp khả vi 2 chiều (= mặt cong trơn).
b) Đường tròn C cho bởi hệ phương trình sau là đa tạp 1 chiều

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= x + y + z &= 0 \end{cases}$$

Nhận xét. Nếu (ψ, W) là tham số hoá khác của M tại x, thì tồn tại các lân cận W', U' của $\psi^{-1}(x), \varphi^{-1}(x)$ tương ứng sao cho trên W' ta có $\psi = \varphi \circ h$, trong đó $h = \varphi^{-1} \circ \psi : W' \to U'$ là vi phôi, i.e. song ánh và h^{-1} khả vi.
Chứng minh: Rõ ràng $h = \varphi^{-1} \circ \psi$ là song ánh từ $\psi^{-1}(\psi(W) \cap \varphi(U))$ lên $\varphi^{-1}(\psi(W) \cap \varphi(U))$. Ta cần chứng minh h thuộc lớp C^p.
Do $\operatorname{rank} D\varphi = k$, hoán vị tọa độ, có thể giả thiết k dòng đầu của $D\varphi(u)$ là độc lập tuyến tính khi u thuộc một lân cận U' của điểm đang xét, i.e. $\dfrac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)}{D(u_1, \cdots, u_k)} \neq 0$ trên U'.
Ký hiệu $x = (x', y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$. Gọi $i : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ là phép nhúng $i(u) = (u, 0)$, và $p = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}^k$ là phép chiếu $p(x', y) = x'$.
Đặt $\Phi(u, y) = (\varphi(u), y)$. Từ giả thiết $\det D\Phi = \dfrac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)}{D(u_1, \cdots, u_k)} \neq 0$. Theo định lý hàm ngược, tồn tại $\Phi^{-1} \in C^p$ địa phương.
Ta có $h = \varphi^{-1} \circ \psi = (\Phi \circ i)^{-1} \circ \psi = p \circ \Phi^{-1} \circ \psi$. Các hàm thành phần là thuộc lớp C^p, nên h thuộc lớp C^p. $\square$

1.5 Không gian tiếp xúc. Cho $M \subset \mathbf{R}^n$ là đa tạp khả vi k chiều và $x_0 \in M$.
Cho $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ là đường cong lớp C^1 trên M, $\gamma(0) = x_0$. Khi đó $\gamma'(0)$ được gọi là **vector tiếp xúc với** M **tại** x_0. Tập mọi vector tiếp xúc với M tại x_0 được gọi là **không gian tiếp xúc với** M **tại** x_0 và ký hiệu $T_{x_0}M$.
Nếu (φ, U) là một tham số hoá của M tại $x_0 = \varphi(u_0)$, thì

$$T_{x_0}M = \{v \in \mathbf{R}^n : v = t_1 D_1\varphi(u_0) + \cdots + t_k D_k\varphi(u_0), t_1, \cdots, t_k \in \mathbf{R}\} = \operatorname{Im} D\varphi(u_0).$$

Nếu M cho bởi hệ phương trình $F_1 = \cdots = F_m = 0$, tại lân cận x_0, thì

$$T_{x_0}M = \{v \in \mathbf{R}^n : v \perp \operatorname{grad} F_i(x_0), i = 1, \cdots, m\}.$$

Viết một cách khác $T_{x_0}M$ cho bởi hệ phương trình

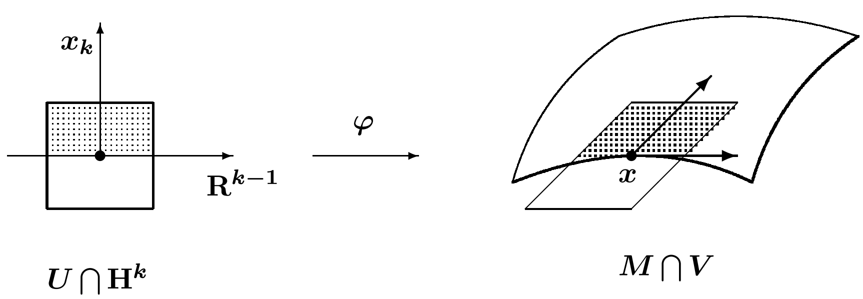
$$v \in \mathbf{R}^n : < \operatorname{grad} F_1(x_0), v >= \cdots =< \operatorname{grad} F_m(x_0), v >= 0$$

Bài tập: Tìm phương trình không gian tiếp xúc cho S^2 và C ở ví dụ trên.

1.6 Đa tạp có bờ. Ta sẽ dùng các ký hiệu:
$\mathbf{H}^k = \{x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbf{R}^k : x_k \geq 0\}$ và gọi là **nửa không gian** của $\mathbf{R}^k$,
$\partial\mathbf{H}^k = \{x \in \mathbf{H}^k : x_k = 0\} = \mathbf{R}^{k-1} \times 0$ và gọi là **bờ** của $\mathbf{H}^k$,
$\mathbf{H}^k_+ = \{x \in \mathbf{H}^k : x_k > 0\}$ và gọi là **phía trong của** $\mathbf{H}^k$.

Tập con $M \subset \mathbf{R}^n$ được gọi là **đa tạp k chiều lớp C^p có bờ** nếuu mọi $x \in M$, tồn tại lân cận mở $V \subset \mathbf{R}^n$ của x, tập mở $U \subset \mathbf{R}^k$, và $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ thuộc lớp C^p, sao cho:
(M1) $\varphi : U \cap \mathbf{H}^k \to M \cap V$ là 1-1.
(M2) $\operatorname{rank} \varphi'(u) = k$, với mọi $u \in U$.
Khi đó các điểm $x = \varphi(u), u \in U$, được phân thành 2 loại:
Điểm trong của M, nếu $u \in \mathbf{H}^k_+$.
Điểm bờ của M, nếu $u \in \partial\mathbf{H}^k$.
Ký hiệu $\partial M = \{x \in M : x$ là điểm bờ của $M\}$, và gọi là **bờ của** M.

Nhận xét. Định nghĩa điểm trong và điểm biên không phụ thuộc tham số hoá.



Mệnh đề. *Cho tập mở* $V \subset \mathbf{R}^n$ *và các hàm lớp* C^p, $F_1, \cdots, F_m, F_{m+1} : V \to \mathbf{R}$. *Xét các tập cho bởi hệ phương trình và bất phương trình*
$M = \{x \in V : F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0, F_{m+1}(x) \geq 0\}$
$\partial M = \{x \in V : F_1(x) = \cdots = F_m(x) = F_{m+1}(x) = 0\}$
Giả sử $\operatorname{rank}(DF_1, \cdots, DF_m)(x) = m, \forall x \in M$, *và* $\operatorname{rank}(DF_1, \cdots, DF_{m+1})(x) = m+1, \forall x \in \partial M$. *Khi đó M là đa tạp khả vi, $n-m$ chiều, lớp C^p, có bờ ∂M.*

Chứng minh: Tương tự 1.4 □

Ví dụ. Trong $\mathbf{R}^3$ hình cầu đóng B cho bởi bất phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, là đa tạp 3 chiều có bờ là mặt cầu ∂B cho bởi: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Mệnh đề. *Cho M là đa tạp khả vi k chiều. Khi đó:*
(1) *∂M là đa tạp khả vi $k-1$ chiều không bờ, i.e. $\partial(\partial M) = \emptyset$.*
(2) *Nếu $x \in \partial M$, thì $T_x\partial M$ là không gian con $k-1$ chiều của T_xM.*

Chứng minh: Gọi $i : \mathbf{R}^{k-1} \to \mathbf{R}^k, i(u_1, \cdots, u_{k-1}) = (u_1, \cdots, u_{k-1}, 0)$. Khi đó dễ thấy nếu (φ, U) là tham số hoá của M tại x và $x \in \partial M$, thì $(\varphi \circ i, i^{-1}(U))$ là tham số hoá của ∂M tại x. Với tham số hoá đó x là điểm trong của ∂M. Vậy $\partial(\partial M) = \emptyset$. Hơn nữa $T_x\partial M$ là không gian sinh bởi $D_1\varphi(u), \cdots, D_{k-1}\varphi(u)$ nên là không gian con $k-1$ chiều của T_xM. □

1.7 Ứng dụng vào bài toán cực trị điều kiện.
Cho $F = (F_1, \cdots, F_m) : V \to \mathbf{R}^m$, thuộc lớp C^1 trên tập mở $V \subset \mathbf{R}^n$.
Gọi $M = \{x \in V : F_1(x) = \cdots = F_m(x) = 0\}$, và giả thiết $\operatorname{rank} F'(x) = m, \forall x \in M$.
Cho $f : V \to \mathbf{R}$, thuộc lớp C^1.
Bài toán: Tìm cực trị của hàm hạn chế $f|_M$. Nói cách khác là tìm cực trị của f với điều kiện ràng buộc $F_1 = \cdots = F_m = 0$.

Nhận xét. Vì M là đa tạp, nên với mỗi $a \in M$ tồn tại tham số hoá (φ, U) của M tại a, với $a = \varphi(b)$.

Điều kiện cần. *Nếu f đạt cực trị với ràng buộc $F_1 = \cdots = F_m = 0$, tại a, thì* $\operatorname{grad} f(a) \perp T_aM$, *i.e. tồn tại $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}$, sao cho*

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda_1 \operatorname{grad} F_1(a) + \cdots + \lambda_m \operatorname{grad} F_m(a)$$

Chứng minh: Theo nhận xét trên, rõ ràng $f|_M$ đạt cực trị tại a tương đương với $f \circ \varphi$ đạt cực trị tại b.
Suy ra $(f \circ \varphi)'(b) = f'(a)\varphi'(b) = 0$. Vậy $< \operatorname{grad} f(a), v >= 0, \forall v \in \operatorname{Im}\varphi'(b) = T_aM$, i.e. $\operatorname{grad} f(a) \perp T_aM$. Do $\operatorname{rank}(\operatorname{grad} F_1(a), \cdots, \operatorname{grad} F_m(a)) = m = \operatorname{codim} T_aM$, nên $\operatorname{grad} f(a)$ thuộc không gian sinh bởi $\operatorname{grad} F_1(a), \cdots, \operatorname{grad} F_m(a)$. □

Phương pháp nhân tử hoá Lagrange. Từ kết qủa trên, để tìm điểm nghi ngờ cực trị của f với điều kiện $F_1 = \cdots = F_m = 0$, ta lập hàm Lagrange

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda_1 F_1(x) - \cdots - \lambda_m F_m(x), \quad x \in V, \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$$

Nếu a là cực trị điều kiện, thì tồn tại $\lambda \in \mathbf{R}^m$, sao cho (a, λ) là nghiệm hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) & = & 0 \\ F_1(x) & = & 0 \\ \vdots & & \\ F_m(x) & = & 0 \end{cases}$$

Ví dụ. Xét cực trị $f(x, y, z) = x + y + z$, với điều kiện $x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$.
Trước hết, ta thấy điều kiện ràng buộc xác định một đa tạp (Ellip E).

Lập hàm Lagrange $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x+y+z-\lambda_1(x^2+y^2-1)-\lambda_2(x+z-1)$.
Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1-2\lambda_1 x -\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1-2\lambda_1 y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 -\lambda_2 = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \\ x+z-1 = 0 \end{cases}$$

Ta có các điểm nghi ngờ cực trị là $(0,\pm 1,1)$. Do tập điều kiện compact, nên f phải đạt max, min trên tập đó. Hơn nữa, các điểm cực trị đó phải là một trong các điểm nghi ngờ cực trị. Vậy
$\max f|_E = \max\{f(0,1,1)=1, f(0,-1,1)=0\} = f(0,1,1)=1$,
$\min f|_E = \min\{f(0,1,1)=1, f(0,-1,1)=0\} = f(0,-1,1)=0$

Trong trường hợp tập điều kiện không compact, ta có thể sử dụng kết qủa sau:

Điều kiện đủ. *Giả sử $f, F_1, \cdots, F_m$ thuộc lớp C^2, và*

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda_1 \operatorname{grad} F_1(a) + \cdots + \lambda_m \operatorname{grad} F_m(a), \text{ i.e. } \frac{\partial L}{\partial x}(a,\lambda) = 0.$$

Đặt $H_xL(x,a)$ là Hessian của hàm Lagrange L theo biến x. Khi đó
Nếu $H_xL(a,\lambda)|_{T_aM}$ xác định dương, thì $f|_M$ đạt cực tiểu tại a.
Nếu $H_xL(a,\lambda)|_{T_aM}$ xác định âm, thì $f|_M$ đạt cực đại tại a.
Nếu $H_xL(a,\lambda)|_{T_aM}$ không xác định dấu, thì $f|_M$ không đạt cực trị tại a.

Chứng minh: Với các ký hiệu ở phần trên, bài toán tìm cực trị của $f|_M$ tương đương bài toán tìm cực trị của $f\circ\varphi$. Do $f'(a)\varphi'(b)=0$, tính đạo hàm cấp 2, ta có $H(f\circ\varphi)(a)(h) = Hf(a)(\varphi'(b)h)$ (Bài tập).
Do $F_i\circ\varphi = 0$, ta có $H(F_i\circ\varphi) = 0$ và theo tính toán trên $H(F_i\circ\varphi)(b)(h) = HF_i(a)(\varphi'(b)(h)$.
Suy ra $H_xL(a,\lambda)|_{T_aM} = H(f\circ\varphi)(b)|_{T_aM}$.
Từ điều kiện đủ của bài toán cực trị địa phương ta có kết qủa. . $\square$

Ví dụ. Cho $k\in\mathbf{N}$ và $a\in\mathbf{R}$. Tìm cực trị $f(x_1,\cdots,x_n) = x_1^k+\cdots+x_n^k$, với ràng buộc $x_1+\cdots+x_n = an$.

2. TÍCH PHÂN HÀM SỐ TRÊN ĐA TẠP

2.1 Độ dài, diện tích, thể tích trong $\mathbf{R}^3$. Trong $\mathbf{R}^3$, có trang bị tích vô hướng Euclid $<\cdot,\cdot>$, nên có khái niệm độ dài và vuông góc.
Độ dài vector $T=(x_t,y_t,z_t)$: $\|T\| = \sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}$

Diện tích hình bình hành tạo bởi $u = (x_u, y_u, z_u),\ v = (x_v, y_v, z_v)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dt}(u,v) &= \|u\|\|v^\perp\| = \|u \times v\| \\ &= \begin{vmatrix} \|u\|^2 & <u,v> \\ <v,u> & \|v\|^2 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - |<u,v>|^2}. \end{aligned}$$

trong đó $v = v' + v^\perp$ là phân tích: v' là hình chiếu vuông góc v lên u, $v^\perp \perp u$.

Chứng minh: Ta có $v' = \alpha u, <v^\perp, u> = 0$. Suy ra

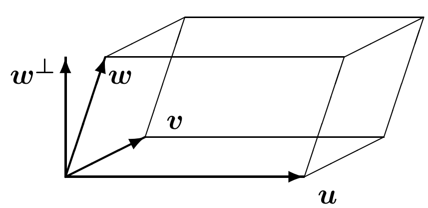
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} <u,u> & <u,v> \\ <v,u> & <v,v> \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} <u,u> & <u,v'> + <u,v^\perp> \\ <v,u> & <v,v'> + <v,v^\perp> \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} <u,u> & \alpha <u,u'> \\ <v,u> & \alpha <v,u'> \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} <u,u> & 0 \\ <v,u> & \|v^\perp\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \|u\|^2\|v^\perp\|^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra công thức trên □

Thể tích khối bình hành tạo bởi $u, v, w \in \mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{tt}(u,v,w) &= \mathrm{dt}(u,v)\|w^\perp\| \\ &= |<u \times v, w>| \ = \ |\det(u,v,w)| \\ &= \begin{vmatrix} <u,u> & <u,v> & <u,w> \\ <v,u> & <v,v> & <v,w> \\ <w,u> & <w,v> & <w,w> \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

trong đó $w = w' + w^\perp$ là phân tích: w' là hình chiếu vuông góc w lên mặt phẳng sinh bởi u, v.



Chứng minh: Tương tự công thức cho diện tích. (Bài tập) □

2.2 Thể tích k chiều trong $\mathbf{R}^n$. Trong $\mathbf{R}^n$ có trang bị tích vô hướng Euclid. **Thể tích k chiều** của hình bình hành tạo bởi $v_1, \cdots, v_k \in \mathbf{R}^n$, được định nghĩa qui nạp theo k:

$$V_1(v_1) = \|v_1\|,\ V_k(v_1, \cdots, v_k) = V_{k-1}(v_1, \cdots, v_{k-1})\|v_k^\perp\|$$

trong đó $v_k = v_k' + v_k^\perp$ là phân tích: v_k' là hình chiếu vuông góc của v_k lên không gian sinh bởi $v_1, \cdots, v_{k-1}$.

Công thức tính. Gọi $G(v_1, \cdots, v_k) = (<v_i, v_j>)_{1 \le i,j \le k}$ là **ma trận Gramm**. Khi đó

$$V_k(v_1, \cdots, v_k) = \sqrt{\det G(v_1, \cdots, v_k)}$$

Chứng minh: Tương tự công thức cho diện tích (Bài tập). □

2.3 Phần tử độ dài - Độ dài đường cong. Cho $C \subset \mathbf{R}^3$ là đường cong cho bởi tham số hoá

$$\varphi : I \to \mathbf{R}^3, \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ta cần tính độ dài $l(C)$ của đường cong.
Phân hoạch I thành các đoạn con $I_i = [t_i, t_i + \Delta t_i]$. Khi đó $l(C) = \sum_i l(\varphi(I_i))$.
Khi Δt_i bé, thì $l(\varphi(I_i)) \sim l(\varphi'(t_i)\Delta t_i) = \|\varphi'(t_i)\|\Delta t_i$.
Định nghĩa **phần tử độ dài** : $dl = \|\varphi'(t)\|dt = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt$
Định nghĩa độ dài của C:

$$l(C) = \int_C dl = \int_I \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}dt$$

2.4 Phần tử diện tích - Diện tích mặt. Cho $S \subset \mathbf{R}^3$ là mặt cong cho bởi tham số hoá

$$\varphi : U \to \mathbf{R}^3, \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Ta cần tính diện tích của mặt S.
Gỉa sử U có thể phân hoạch bởi các hình chữ nhật bé $U_i = [u_i, u_i + \Delta u_i] \times [v_i, v_i + \Delta v_i]$.
Khi đó $\mathrm{dt}(S) = \sum_i \mathrm{dt}(\varphi(U_i))$.
Khi $\Delta u_i, \Delta v_i$ bé, thì $\mathrm{dt}(\varphi(U_i)) \sim \mathrm{dt}(D_1\varphi(u_i, v_i)\Delta u_i, D_2\varphi(u_i, v_i)\Delta v_i)$.
Định nghĩa **phần tử diện tích** :

$$dS = \mathrm{dt}(D_1\varphi, D_2\varphi)dudv = \sqrt{EG - F^2}dudv,$$

trong đó

$$\begin{array}{lllll} E & = & \|D_1\varphi\|^2 & = & {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2 \\ G & = & \|D_2\varphi\|^2 & = & {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2 \\ F & = & < D_1\varphi, D_2\varphi > & = & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \end{array}$$

Khi đó định nghĩa diện tích của S :

$$\mathrm{dt}(S) = \int_S dS = \int_U \sqrt{EG - F^2}dudv$$

2.5 Phần tử thể tích - Thể tích hình khối. Cho H là hình khối cho bởi tham số hoá

$$\varphi : A \to \mathbf{R}^3, \varphi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

Để tính thể tích H, bằng lập luận tương tự như các phần trên, ta có các định nghĩa:
Phần tử thể tích:

$$dV = \mathrm{tt}(D_1\varphi, D_2\varphi, D_3\varphi)dudvdw = |\det J\varphi|dudvdw$$

Thể tích H: $V(H) = \int_H dV = \int_A |\det J\varphi|dudvdw$.

Bây giờ ta tổng quát hoá các khái niệm trên.

2.6 Phần tử thể tích trên đa tạp. Cho $M \subset \mathbf{R}^n$ là đa tạp khả vi k chiều.
Phần tử thể tích trên M là ánh xạ

$$dV:\ M \ni x \mapsto dV(x) = \text{thể tích } k \text{ chiều hạn chế trên } T_xM.$$

Giả sử (φ, U) là một tham số hoá của M tại $x = \varphi(u_1, \cdots, u_k)$. Khi đó

$$dV(x)(D_1\varphi(x)\Delta u_1, \cdots, D_k\varphi(x)\Delta u_k) = V_k(D_1\varphi(x), \cdots, D_k\varphi(x))\Delta u_1 \cdots \Delta u_k$$

Vậy nếu đặt $G_\varphi = (< D_i\varphi, D_j\varphi >)_{1\leq i,j\leq k}$, thì qua tham số hóa

$$dV = \sqrt{\det G_\varphi}\, du_1 \cdots du_k$$

2.6 Tích phân hàm trên đa tạp. Cho $f: M \to \mathbf{R}$ là hàm trên đa tạp khả vi k chiều. Sau đây ta xây dựng tích phân của f trên M (còn gọi là tích phân loại 1) $\displaystyle\int_M f dV$
Nếu $M = \varphi(U)$ với (φ, U) là tham số hóa, thì định nghĩa

$$\int_M f dV = \int_U f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi}, \quad \text{trong đó } G_\varphi = (< D_i\varphi, D_j\varphi >)_{1\leq i,j\leq k}.$$

Khi $k = 1$ tích phân trên gọi là **tích phân đường** và ký hiệu $\displaystyle\int_M f dl$.
Khi $k = 2$ tích phân trên gọi là **tích phân mặt** và ký hiệu $\displaystyle\int_M f dS$.
Trường hợp tổng quát, khi M cho bởi nhiều tham số hóa, người ta dùng kỹ thuật phân hoạch đơn vị sau đây để 'dán' các tích phân trên từng tham số hoá.
Cho $\mathcal{O} = \{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ là họ các tham số hoá M. Họ $\Theta = \{\theta_i : i \in I\}$ gọi là **phân hoạch đơn vị của** M **phù hợp với họ** $\mathcal{O}$ nếuu các điều sau thỏa với mọi $i \in I$:

(P1) $\theta_i : M \to [0, 1]$ liên tục.
(P2) $\text{supp}\theta_i = \overline{\{x \in M : \theta(x) \neq 0\}}$ là tập compact.
(P3) $\text{supp}\theta_i \subset \varphi_i(U_i)$.
(P4) Mọi $x \in M$, tồn tại lân cận V của x, sao cho chỉ có hữu hạn chỉ số $i \in I$ $\theta_i \neq 0$ trên V.
(P5) $\sum_{i\in I} \theta_i(x) = 1, \forall x \in M$.

Tính chất (P4) gọi là tính **hữu hạn địa phương** của họ $\{\text{supp}\,\theta_i, i \in I\}$. Do tính chất này tổng ở (P5) là tổng hữu hạn với mọi x.

Định lý. *Với mọi họ $\mathcal{O}$ các tham số hoá của đa tạp M, tồn tại họ phân hoạch đơn vị phù hợp với $\mathcal{O}$.*

Chứng minh: Gỉa sử M compact, k chiều. Với mọi $x \in M$, tồn tại $(\varphi_x, U_x) \in \mathcal{O}$ là tham số hoá tại x. Gọi $B_x \supset U_x$ là một hình cầu tân $\varphi_x^{-1}(x)$. Gỉa sử $B_x = B(a, r)$. Hàm $g_x : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ được định nghĩa như sau

$$g_x(u) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2 - \|u-a\|^2}} & , \text{ nếu} \|u - a\| \leq r \\ 0 & , \text{ nếu } \|u - a\| > r. \end{cases}$$

Khi đó $g_x \in C^\infty$ (bài tập). Đặt $\tilde{g}_x(y) = g_x(\varphi_x^{-1}(y))$, nếu $y \in \varphi_x(U_x)$, và $\tilde{g}_x(y) = 0$, nếu $y \notin \varphi_x(U_x)$. Khi đó $\tilde{g}_x$ liên tục trên M. Vì M compact, tồn tại hữu hạn $x_1, \cdots, x_N \in M$, sao cho $\varphi_{x_1}(B_{x_1}), \cdots \varphi_{x_N}(B_{x_N})$ phủ M Đặt $\theta_i = \dfrac{\tilde{g}_{x_i}}{\tilde{g}_{x_1} + \cdots + \tilde{g}_{x_N}}$.
Khi đó họ $\{\theta_i : i = 1, \cdots N\}$ là phân hoạch đơn vị cần tìm.
Khi M không compact, tồn tại họ đếm được các tập $\varphi_x(B_x)$, hữu hạn địa phương phủ M. Lập luận tương tự như trên có thể xây dựng phân hoạch đơn vị trong trường hợp này. $\square$

Gỉa sử đa tạp M được tham số hoá bởi họ $\mathcal{O} = \{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$. Theo định lý trên ta có họ $\Theta = \{\theta_i : i \in I\}$ là phân hoạch đơn vị của M phù hợp với $\mathcal{O}$. Định nghĩa

$$\int_M f dV = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \theta_i f dV \ (= \sum_{i \in I} \int_{U_i} \theta_i f \circ \varphi_i \sqrt{\det G_{\varphi_i}}).$$

với gỉa thiết vế phải tồn tại. Chẳng hạn, khi M compact và f liên tục.

Nhận xét. Định nghĩa trên không phụ thuộc họ tham số và phân hoạch đơn vị.
Chứng minh: Khi hai tham số hoá của M thỏa $\varphi(U) = \psi(W)$. Khi đó $\psi = \varphi \circ h$, với h là vi phôi. Dễ kiểm tra các ma trận Gramm quan hệ với nhau theo công thức $G_\psi(w) = {}^t\!Jh(w) G_\varphi(h(w)) Jh(w)$. Theo công thức đổi biến, ta có

$$\begin{aligned} \int_U f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} &= \int_W f \circ \varphi \circ h |\det Jh| \sqrt{\det G_\varphi \circ h} \\ &= \int_W f \circ \psi \sqrt{\det \ {}^t\!Jh G_\varphi \circ h \det Jh} = \int_W f \circ \psi \sqrt{\det G_\psi}. \end{aligned}$$

Vậy định nghĩa không phụ thuộc tham số hoá.
Nếu $\Theta' = \{\theta'_j : j \in J\}$ là một phân hoạch đơn vị khác của M. Khi đó

$$\sum_j \int_M \theta'_j f = \sum_j \int_M (\sum_i \theta_i) \theta'_j f = \sum_{i,j} \int_M \theta_i \theta'_j f = \sum_{i,j} \int_M \theta'_j \theta_i f = \sum_i \int_M (\sum_j \theta'_j) \theta_i f.$$

Vậy định nghĩa cũng không phụ thuộc phân hoạch đơn vị. $\square$

Nhắc lại các công thức tính:

Khi $\varphi : I \to \mathbf{R}^n, \varphi(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ là tham số hoá đường cong C. Ta có

$$\int_C f dl = \int_I f \circ \varphi \, \|\varphi'\| = \int_I f(\varphi(t)) \sqrt{(x'_1)^2(t) + \cdots + (x'_n)^2(t)} dt.$$

Khi $\varphi : U \to \mathbf{R}^3, \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ là tham số hoá mặt S. Ta có

$$\int_S f dS = \int_U f \circ \varphi \sqrt{EG - F^2},$$

trong đó

$$\begin{aligned} E &= \|D_1\varphi\|^2 &&= {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2 \\ G &= \|D_2\varphi\|^2 &&= {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2 \\ F &= < D_1\varphi, D_2\varphi > &&= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \end{aligned}$$

Ví dụ.
a) Độ dài đường xoắn C: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, t \in [0, h]$, là

$$\int_C dl = \int_0^h \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}dt = h\sqrt{a^2 + b^2}$$

b) Để tính diện tích mặt cầu bán kính R, trước hết tham số hoá, chẳng hạn

$$\varphi(\phi, \theta) = (R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\theta),\ (\phi, \theta) \in U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

Khi đó các vector tiếp xúc của các đường tọa độ:
$D_1\varphi(\phi, \theta) = (-R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi\sin\theta, 0)$
$D_2\varphi(\phi, \theta) = (R\cos\phi\cos\theta, R\sin\phi\cos\theta, -R\sin\theta)$.
Suy ra $E = R^2\sin^2\theta,\ F = 0,\ G = R^2$.
Diện tích mặt cầu là

$$\int_S dS = \int_U \sqrt{EG - F^2}d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\theta d\phi d\theta = 4\pi R^2$$

c) Để tính thể tích hình cầu bán kính R, có thể dùng tham số hoá

$$\varphi(r, \phi, \theta) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),\ (r, \phi, \theta) \in U = (0, R) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$$

Khi đó
$D_1\varphi(r, \phi, \theta) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$
$D_2\varphi(r, \phi, \theta) = (-r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi\sin\theta, 0)$
$D_3\varphi(r, \phi, \theta) = (r\cos\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, -r\sin\theta)$.
Thể tích hình cầu là

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} dV &= \int_U \det(< D_i\varphi, D_j\varphi >)drd\phi d\theta \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & r^2\end{vmatrix}drd\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3\end{aligned}$$

III. Dạng vi phân

Khi tính tích phân trên đa tạp ta cần một đối tượng bất biến với phép tham số hoá. Ví dụ đơn giản nhất là khi tính tích phân trên $\mathbf{R}$, theo công thức đổi biến ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

trong đó φ là vi phôi từ (α, β) lên (a, b).
Người ta đưa vào khái niệm dạng vi phân bậc 1: $\omega = f(x)dx$
và phép đổi biến: $\varphi^*\omega = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
Khi đó công thức trên có thể viết lại là

$$\int_a^b \omega = \int_\alpha^\beta \varphi^*\omega$$

Ngoài ra dạng vi phân cũng là khái niệm thích hợp để tích phân trường vector trên đa tạp sẽ được đề cập đến ở chương sau.
Chương này xét đến các dạng vi phân và các phép toán trên chúng.

1. DẠNG k-TUYẾN TÍNH PHẢN ĐỐI XỨNG.

1.1. Định nghĩa. Cho V là không gian vector trên $\mathbf{R}$. Một **dạng k-tuyến tính phản đối xứng** trên V là một ánh xạ

$$\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ lần}} \to \mathbf{R}$$

thỏa các điều kiện sau với mọi $v_1, \cdots, v_k \in V$, $\alpha \in \mathbf{R}$ và $1 \leq i < j \leq k$:

(A1) $\omega(v_1, \cdots, v_i + v_i', \cdots, v_k) = \omega(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \omega(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$.

(A2) $\omega(v_1, \cdots, \alpha v_i, \cdots, v_k) = \alpha\omega(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$.

(A3) $\omega(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -\omega(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k)$.

Nhận xét. Điều kiện (A1)(A2) có nghĩa là ω tuyến tính theo từng biến
Nhận xét. Điều kiện (A3) tương đương với một trong các điều kiện sau:

(A3') $\omega(v_1, \cdots, v_i \cdots, v_j, \cdots, v_k) = 0$, nếu $v_i = v_j$, với mọi $i \neq j$.

(A3") $\omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma)\omega(v_1, \cdots, v_k)$,
với mọi hoán vị σ của $\{1, \cdots, k\}$, $\epsilon(\sigma)$ là ký số (= sign $\prod_{i<j}(\sigma(j) - \sigma(j))$).

Chứng minh: (A3) $\Rightarrow$ (A3'): Trong biểu thức của (A3) nếu $v_i = v_j$, thì $2\omega(v_1, \cdots, v_i \cdots, v_i, \cdots, v_k) = 0$. Suy ra (A3').
(A3') $\Rightarrow$ (A3): Trong biểu thức của (A3') nếu $v_i = v_j = v + w$, thì từ (A1) (A3') suy ra

$$\omega(v_1, \cdots, v, \cdots, w, \cdots, v_k) + \omega(v_1, \cdots, w, \cdots, v, \cdots, v_k) = 0.$$

(A3) $\Rightarrow$ (A3"): Áp dụng mọi phép hoán vị là hợp của các phép chuyển vị, ký số mỗi phép chuyển vị là -1, và ký số của hợp 2 hoán vị bằng tích ký số của 2 hoán vị đó.

(A3") $\Rightarrow$ (A3): Áp dụng (A3") với σ là chuyển vị i và j. $\square$

Ví dụ. Cho F là một vector trong $\mathbf{R}^3$. Khi đó:
a) $W_F(v) = < F, v >,\ v \in \mathbf{R}^3$, là dạng 1-tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$ (công của F dọc theo v)
b) $\omega_F(v_1, v_2) = < F, v_1 \times v_2 >,\ v_1, v_2 \in \mathbf{R}^3$, là dạng 2-tuyến tính phản đối xứng trên $\mathbf{R}^3$ (thông lượng của F qua hình bình hành tạo bởi v_1, v_2)
c) Định thức là dạng n-tuyến tính phản đối xứng trên $\mathbf{R}^n$. Giá trị $\det(v_1, \cdots, v_n)$ là thể tích có hướng của bình hành tạo bởi $v_1, \cdots, v_n \in \mathbf{R}^n$.

1.2 Không gian vector $\Lambda^k(V)$. Ký hiệu $\Lambda^k(V)$ là tập mọi dạng k-tuyến tính phản đối xứng trên V. Trên tập này ta định nghĩa 2 phép toán:

$$(\omega + \gamma)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(v_1, \cdots, v_k) + \gamma(v_1, \cdots, v_k)$$
$$(\alpha\omega)(v_1, \cdots, v_k) = \alpha\omega(v_1, \cdots, v_k)\ , \quad \text{với}\ \ \omega, \gamma \in \Lambda^k(V),\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Dễ thấy $(\Lambda^k(V), +, \cdot)$ là không gian vector trên $\mathbf{R}$.

Ví dụ.
a) $\Lambda^1(V)$ chính là không gian đối ngẫu của V, i.e. $\Lambda^1(V) = V^* = L(V, \mathbf{R})$.
b) Cho $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Định nghĩa dạng 2-tuyến tính: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 : V \times V \to \mathbf{R}$,

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_2(v_1)\varphi_1(v_2) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}$$

Về mặt hình học giá trị trên chính là diện tích có hướng của hình bình hành trong $\mathbf{R}^2$ tạo bởi $\varphi(v_1), \varphi(v_2)$, trong đó $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \to \mathbf{R}^2$.

1.3 Tích ngoại. Cho $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in V^*$. **Tích ngoại** của các dạng trên là một k-dạng $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k(V)$, được định nghĩa:

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k(v_1, \cdots, v_k) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\varphi_{\sigma(1)}(v_1) \cdots \varphi_{\sigma(k)}(v_k) = \det(\varphi_i(v_j)),\ v_1, \cdots, v_k \in V,$$

i.e. $$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(k)}.$$

Tính chất. *Với mọi* $\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \varphi'_i \in \Lambda^1(V),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *và* $i = 1, \cdots, k$,
(1) $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge (\alpha\varphi_i + \beta\varphi'_i) \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \alpha\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_k + \beta\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi'_i \wedge \cdots \wedge \varphi_k$.
(2) $\varphi_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \varphi_{\sigma(k)} = \epsilon(\sigma)\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$, *với σ là hoán vị.*

Chứng minh: Suy từ tính chất của định thức. $\square$

1.4 Biểu diễn dạng k-tuyến tính phản đối xứng. *Cho V là một không gian vector trên $\mathbf{R}$. Giả sử $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ là một cơ sở của V^*. Khi đó một cơ sở của $\Lambda^k(V)$ là hệ $\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$.*
Như vậy mọi $\omega \in \Lambda^k(V)$ có biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}$$

và $\dim \Lambda^k(V) = C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Chứng minh: Gọi $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{e_1, \cdots, e_n\}$, i.e. $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ (delta Kronecker).
Cho $\omega \in \Lambda^k(V)$. Cho $v_1, \cdots, v_k \in V$. Khi đó

$$v_1 = \sum_{i_1} \varphi_{i_1}(v_1)e_{i_1}, \ \cdots, v_k = \sum_{i_k} \varphi_{i_k}(v_k)e_{i_k},$$

$$\begin{aligned}
\omega(v_1, \cdots, v_k) &= \omega(\sum_{i_1} \varphi_{i_1}(v_1)e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_k} \varphi_{i_k}(v_k)e_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1, \cdots, i_k} \varphi_{i_1}(v_1) \cdots \varphi_{i_k}(v_k)\omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{\sigma} \varphi_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots \varphi_{i_{\sigma(k)}}(v_k)\epsilon(\sigma)\omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(v_1, \cdots, v_k)
\end{aligned}$$

Vậy hệ $\{\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ là hệ sinh. Để chứng minh tính độc lập tuyến tính, trước hết nhận xét là

$$\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad (i_1, \cdots, i_k) = (j_1, \cdots, j_k) \\ 0 & \text{nếu} \quad (i_1, \cdots, i_k) \neq (j_1, \cdots, j_k) \end{cases}$$

Suy ra nếu tổ hợp tuyến tính

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdot i_k} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k} = 0,$$

thì theo nhận xét trên $\omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k} = 0$. □

Đặc biệt: $\Lambda^k(V) = 0$, khi $k > n$, $\Lambda^n(V)$ có số chiều là $C_n^n = 1$, và mọi $\omega \in \Lambda^n(V)$ có biểu diễn $\omega = a\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, với $a \in \mathbf{R}$.

2. DẠNG VI PHÂN

2.1 Định nghĩa. Cho U là tập mở trong $\mathbf{R}^n$. Một **dạng vi phân bậc** k hay k-**dạng vi phân** trên U là một ánh xạ

$$\omega : U \to \Lambda^k(\mathbf{R}^n).$$

Dạng vi phân ω gọi là thuộc lớp C^p nếu ánh xạ trên thuộc lớp C^p.
Ký hiệu $\Omega_p^k(U)$ là tập mọi k-dạng vi phân lớp C^p trên U, và $\Omega^k(U) = \Omega_\infty^k(U)$.
Dễ thấy $\Omega_p^k(U)$ có cấu trúc không gian vector.
Ví dụ. Cho $U \subset \mathbf{R}^3$ và $F : U \to \mathbf{R}^3$ là một trường vector. Khi đó các dạng vi phân sau được dùng để đánh giá thông lượng của F dọc theo một đường hay qua một mặt
a) $W_F : U \to \Lambda^1(\mathbf{R}^3), W_F(x, y, z)(v) =< F(x, y, z), v >$
b) $\omega_F : U \to \Lambda^2(\mathbf{R}^3), \omega(x, y, z)(v_1, v_2) =< F(x, y, z), v_1 \times v_2 >$.

Cho $f : U \to \mathbf{R}$ là hàm lớp C^{p+1}. Khi đó với mọi $x \in U$, $f'(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ là dạng tuyến tính. Ta định nghĩa **vi phân** của f là 1-dạng vi phân

$$df : U \to \Lambda^1(\mathbf{R}^n),\ x \mapsto df(x) = f'(x).$$

Xét hàm tọa độ thứ i $x_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$. Ta có

$$dx_i(x)(v) = x_i'(x)v = v_i, \quad v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Vậy

$$\begin{aligned} df(x)(v) &= f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1(x)(v) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n(x)(v). \end{aligned}$$

Hay là $\quad df = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$

2.2 Biểu diễn dạng vi phân. Tích ngoại của các 1-vi phân $\varphi_1, \cdots, \varphi_k \in \Omega^1(U)$:

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(x) = \varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(x), \qquad x \in U,$$

là một k-dạng vi phân trên U. Do các 1-dạng $dx_1, \cdots, dx_n$ là một cơ sở của $\Omega^1(U)$, nên các k-dạng vi phân trên U có biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

trong đó $a_{i_1 \cdots i_k}$ là các hàm trên U và thuộc lớp C^p nếu ω là dạng lớp C^p.

Ví dụ. Nếu $U \subset \mathbf{R}^3$, thì ta thường ký hiệu các tọa độ là (x, y, z). Khi đó
Các 0-dạng vi phân chính là các hàm $f : U \to \mathbf{R}$.
Các 1-dạng vi phân còn gọi là **dạng Pfaff** và có biểu diễn $Pdx + Qdy + Rdz$.
Các 2-dạng vi phân có biểu diễn $Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdz \wedge dx$.
Các 3-dạng vi phân có biểu diễn $fdx \wedge dy \wedge dz$.

Bài tập: Cho $U \subset \mathbf{R}^3$ và $F : U \to \mathbf{R}^3$, $F = (P, Q, R)$. Chứng minh các dạng vi phân cho ở ví dụ 2.1 có biểu diễn
a) $W_F = Pdx + Qdy + Rdz$
b) $\omega_F = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

2.3 Toán tử đổi biến. Cho U, V là các tập mở trong $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ tương ứng. Giả sử $\varphi : U \to V,\ u = (u_1, \cdots, u_m) \mapsto x = (\varphi_1(u), \cdots, \varphi_n(u))$ là ánh xạ khả vi. Khi đó **toán tử đổi biến**

$$\varphi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U),\ \omega \mapsto \varphi^*\omega$$

được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \\ \varphi^*\omega(u) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k}(\varphi(u)) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}. \end{aligned}$$

Ví dụ.
a) Cho $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\varphi(t) = (x = \cos t, y = \sin t)$ và $\omega(x,y) = xdy - ydx$.
Khi đó $\varphi^*\omega(t) = \cos t d(\sin t) - \sin t d(\cos t) = dt$.
b) Cho $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\varphi(r,\theta) = (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ v... $\omega(x,y) = dx \wedge dy$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega(r,\theta) &= d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \\
&= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) \\
&= r dr \wedge d\theta \quad (\text{do } dr \wedge dr = d\theta \wedge d\theta = 0, d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta).
\end{aligned}$$

Tính chất.
(1) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2)$, $\quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(V)$.
(2) $\varphi^*(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_k) = \varphi^*(\gamma_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(\gamma_k)$, $\quad \gamma_1, \cdots, \gamma_k \in \Omega^1(V)$.
(3) $\varphi^*(dx_i) = d\varphi_i = \displaystyle\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} du_j$.

Chứng minh: Xem như bài tập. □

Bài tập: Cho $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ khả vi. Chứng minh

$$\varphi^*(f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = f(\varphi(u)) \det \varphi'(u) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.$$

Nhận xét. Có thể định nghĩa toán tử đổi biến không qua biểu diễn trên tọa độ (i.e. định nghĩa không phụ thuộc hệ tọa độ) như sau

$$\varphi^*\omega(u)(v_1, \cdots, v_k) = \omega(\varphi(u))(\varphi'(u)v_1, \cdots, \varphi'(u)v_k).$$

2.4 Toán tử vi phân. Với mỗi $k \in \mathbf{N}$, **toán tử vi phân** được định nghĩa như sau

$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U),$$

$$d\Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\Big) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} da_{i_1 \cdots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Ví dụ. Với $n = 2$, ký hiệu tọa độ là (x,y). Khi đó

$$\begin{aligned}
d\,(Pdx + Qdy) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

(để ý là $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, dy \wedge dx = -dx \wedge dy$).
Trong $\mathbf{R}^3$ cho dạng vi phân $\omega(x,y,z) = \sin xy dx + e^{x^2+y} dy + \mathrm{arctg} x dz$.

Khi đó

$$\begin{aligned} d\omega &= (d\sin xy)\wedge dx + d(e^{x^2+y})\wedge dy + d(\mathrm{arctg} x)\wedge dz \\ &= (y\cos xy dx + x\cos xy dy)\wedge dx + (2xe^{x^2+y}dx + e^{x^2+y}dy)\wedge dy + \frac{1}{1+x^2}dx\wedge dz \\ &= (2xe^{x^2+y} - x\cos xy)dx\wedge dy - \frac{1}{1+x^2}dz\wedge dx. \end{aligned}$$

Bài tập: Tính $d\left(P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\right)$,
và $d\left(P(x,y,z)dx\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + Q(x,y,z)dx\wedge dy\right)$.

Nhận xét. Nếu $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^n)$ với $k \geq n$, thì $d\omega = 0$.

Tính chất.
(1) $d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2, \quad \forall \omega_1,\omega_2 \in \Omega^k(U)$.
(2) $d(\gamma_1\wedge\gamma_2) = d\gamma_1\wedge\gamma_2 \ - \ \gamma_1\wedge d\gamma_2, \quad \forall\gamma_1,\gamma_2\in\Omega^1(U)$..
(3) $d(d\omega) = 0$, i.e. $d\circ d = 0$.
(4) $d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$, i.e. $d\varphi^* = \varphi^* d$.

Chứng minh: (1) là rõ ràng. Do (1) ta chỉ cần chứng minh (2) khi $\gamma_1 = adx_i,\ \gamma_2 = bdx_j$.
Ta có

$$\begin{aligned} d(\gamma_1\wedge\gamma_2) &= d(adx_i\wedge bdx_j) = d(abdx_i\wedge dx_j) \\ &= d(ab)\wedge dx_i\wedge dx_j = (bda + adb)\wedge dx_i\wedge dx_j \\ &= bda\wedge dx_i\wedge dx_j + adb\wedge dx_i\wedge dx_j = (da\wedge dx_i)\wedge bdx_j - adx_i\wedge db\wedge dx_j \\ &= d\gamma_1\wedge\gamma_2 \ - \ \gamma_1\wedge\gamma_2. \end{aligned}$$

Trước khi chứng minh (3) để ngắn gọn ta ký hiệu: $dx_I = dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$,
với $I = (i_1,\cdots,i_k)$ là một bộ k chỉ số thuộc $\{1,\cdots n\}$.
Do (1) chỉ cần chứng minh (3) khi $\omega = a_I dx_I$. Ta có

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(da_I\wedge dx_I) = d\left(\sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I\right) \\ &= \sum_i d\left(\frac{\partial a_I}{\partial x_i}\right)\wedge dx_i\wedge dx_I = \sum_i\left(\sum_j \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\right)\wedge dx_i\wedge dx_I \\ &= -\sum_i\sum_j \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j\wedge dx_I \qquad (\text{ do } dx_i\wedge dx_j = -dx_j\wedge dx_i) \\ &= -d(d\omega) \qquad (\text{thay đổi vai trò} i,j) \end{aligned}$$

Vậy $2d(d\omega) = 0$, suy ra (3).
Cũng vậy chỉ cần kiểm tra (4) khi $\omega = a_I dx_I \in \Omega^k(V)$. Ta có

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= d(a_I\circ\varphi d\varphi_I) = d(a_I\circ\varphi)\wedge d\varphi_I. \\ \varphi^*(d\omega) &= \varphi^*(da_I\wedge dx_I) = \varphi^*(da_I)\wedge\varphi^*(dy_I) = \varphi^*(da_I)\wedge d\varphi_I. \end{aligned}$$

Cần chứng minh $d(a_I\circ\varphi) = \varphi^*(da_I)$. Đẳng thức đúng là do:

$$\varphi^*(da_I) = \varphi^*\left(\sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x_j}dx_j\right) = \sum_j \frac{\partial a_I\circ\varphi}{\partial x_j}d\varphi_j = \sum_j \frac{\partial a_I\circ\varphi}{\partial x_j}\left(\sum_i \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_i}du_i\right) = d(a_I\circ\varphi).$$

Vậy các tính chất trên đã được chứng minh. □

Nhận xét. Do (4) toán tử d không phụ thuộc hệ tọa độ.

3. BỔ ĐỀ POINCARÉ

3.1 Dạng đó và dạng khớp. Cho dạng vi phân $\omega \in \Omega^k(U)$.
ω gọi là **đóng** trên U nếuu $d\omega = 0$ trên U.
ω gọi là **khớp** trên U nếuu tồn tại $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ sao cho $\omega = d\eta$.

Nhận xét. Nếu ω khớp, thì ω đóng vì $d(d\eta) = 0$.
Ví dụ sau chỉ ra dạng đóng nhưng không khớp: $\omega(x,y) = \dfrac{ydx - xdy}{x^2+y^2} \in \Omega^1(\mathbf{R}^2 \setminus 0)$.
Dạng ω là đóng, vì $d\omega = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx - \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0$.
Nhưng ω không khớp. Thật vậy, giả sử tồn tại hàm $f \in \Omega^0(\mathbf{R}^2 \setminus 0)$, $\omega = df$.
Gọi $\varphi(t) = (\sin t, \cos t)$. Khi đó

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(df) = d(\varphi^* f) = d(f \circ \varphi) = (f \circ \varphi)' dt.$$

Mặt khác $\varphi^*\omega = \dfrac{\cos t d(\sin t) - \sin t d(\cos t)}{\sin^2 t + \cos^2 t} = dt$. Vậy $(f \circ \varphi)'(t) \equiv 1$.
Suy ra $f \circ \varphi(t) = t+$ const. Điều này vô lý vì $f \circ \varphi$ là hàm có chu kỳ. 2π.

Khi một dạng Pfaff $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n \in \Omega^1(U)$, tồn tại hàm $f \in \Omega^0(U)$ thỏa $df = \omega$, thì f được gọi là một **tích phân đầu** của ω.
Nói một cách khác f thỏa hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp một

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \ \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = a_n.$$

Vậy nếu ω có tích phân đầu (= khả tích = khớp), thì $d\omega = 0$, i.e. các hàm $a_1, \cdots, a_n$ thỏa hệ thức

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \quad \text{với mọi } i, j = 1, \cdots, n.$$

Tính chất hình học của tập nhiều khi quyết định bài toán giãi tích. Một dạng đóng cũng là khớp trên U, khi tập U có tính chất hình học sau:

3.2 Tập co rút được. Tập con U trong $\mathbf{R}^n$ gọi là **co rút được về một điểm** $x_0 \in U$ nếuu tồn tại một ánh xạ lớp C^1

$$h : U \times [0,1] \to U, \ (x,t) \mapsto h(x,t)$$

sao cho: $h(x,0) = x_0$ và $h(x,1) = x, \ \forall x \in U$.

Ví dụ. Sau đây là một số lớp tập co rút quan trọng:

Tập lồi: tập U gọi là lồi nếuu $\forall x, y \in U$ đoạn $[x, y] = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} \subset U$. Chẳng hạn $\mathbf{R}^n$, hình cầu, hình hộp là các tập lồi.
Tập hình sao: tập U gọi là hình sao nếuu $\exists x_0 \in U : \forall x \in U,\ [x_0, x] \subset U$.
Trong các ví dụ trên ánh xạ $h(x, t) = x_0 + t(x - x_0)$ thỏa Định nghĩa 3.2.
Bài tập: Rõ ràng là tập lồi là tập hình sao. Tìm ví dụ tập hình sao không lồi, tập co rút được không hình sao.

3.3 Định lý (Bổ đề Poincaré). *Giả sử U là tập mở trong $\mathbf{R}^n$, và U co rút được. Khi đó mọi dạng đóng trên U là khớp, i.e.*

$$\omega \in \Omega^k(U), d\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \eta \in \Omega^{k-1}(U),\ \omega = d\eta.$$

Chứng minh: Gọi $J_t : U \to U \times [0, 1],\ J_t(x) = (x, t)$. Cho $k = 1, 2, \cdots$. Trước hết ta xây dựng ánh xạ tuyến tính $K : \Omega^k(U \times [0, 1]) \to \Omega^{k-1}(U)$, thoả

$$(*) \qquad Kd + dK = J_1^* - J_0^*$$

Mỗi phần tử của $\Omega^k(U \times [0, 1])$ là tổng các dạng có một trong hai dạng sau:
(1) $a(x, t)dx_I$ hay (2) $b(x, t)dt \wedge dx_J$, với $I = (i_1, \cdots, i_k), J = (j_1, \cdots, j_{k-1})$.
Vì vậy chỉ cần định nghĩa K cho từng dạng có dạng trên. Ta định nghĩa

$$\begin{array}{rcl} K(a(x,t)dx_I) & = & 0 \\ K(b(x,t)dt \wedge dx_J) & = & \left(\displaystyle\int_0^1 b(x,t)dt\right) dx_J \end{array}$$

Kiểm tra điều kiện $(*)$ với dạng (1):

$$\begin{array}{rcl} (Kd + dK)(adx_I) & = & K(da \wedge dx_I) + d(0) = (\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt)dx_I \\ & = & (a(x,1) - a(x,0)dx_I = (J_1^* - J_0^*)(adx_I). \end{array}$$

Kiểm tra điều kiện $(*)$ với dạng (2):

$$\begin{array}{rcl} (Kd + dK)(bdt \wedge dx_J) & = & K(db \wedge dt \wedge dx_J) + d((\displaystyle\int_0^1 bdt) \wedge dx_J) \\ & = & K(\displaystyle\sum_i \frac{\partial b}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_J) + d((\int_0^1 bdt) \wedge dx_J) \\ & = & -\displaystyle\int_0^1 (\sum_i \frac{\partial b}{\partial x_i})dt \wedge dx_i \wedge dx_J + d((\int_0^1 bdt) \wedge dx_J) \\ & = & -d((\displaystyle\int_0^1 bdt) \wedge dx_J) + d((\int_0^1 bdt) \wedge dx_J) = 0. \\ (J_1^* - J_0^*)(bdt \wedge dx_J) & = & b(x,1)d(1) \wedge dx_J - b(x,0)d(0) \wedge dx_J = 0. \end{array}$$

Bây giờ cho $h : U \times [0, 1] \to U$ là ánh xạ co rút về x_0. Giả sử $\omega \in \Omega^k(U)$ đóng, i.e. $d\omega = 0$. Ta chứng minh $\eta = Kh^*\omega$ là $(k - 1)$-dạng thoả $d\eta = \omega$.
Do $(*)$ ta có

$$\begin{array}{rrcl} & (Kd + dK)h^*\omega & = & (J_1^* - J_0^*)h^*\omega. \\ \Leftrightarrow & Kdh^*\omega + dKh^*\omega & = & (h \circ J_1)^*\omega - (h \circ J_0)^*\omega. \\ \Leftrightarrow & Kh^*d\omega + dKh^*\omega & = & (id_U)^*\omega - (x_0)^*\omega. \\ \Leftrightarrow & 0 + dKh^*\omega & = & \omega + 0. \end{array}$$

Vậy $\eta = Kh^*\omega$ là dạng cần tìm. $\square$

Hệ qủa. *Nếu U là tập mở co rút được, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(U)$, và $d\omega_1 = d\omega_2$, thì tồn tại $\eta \in \Omega^{k-1}$ sao cho $d\eta = \omega_1 - \omega_2$.*

Ví dụ. Tập $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ là không co rút được vì tồn tại dạng vi phân đóng mà không khớp trên đó (xem ví dụ ở 3.1).

Nhận xét. Từ hệ qủa trên, ta thấy η thoả bổ đề Poincaré là không duy nhất.
Có thể dựa vào chứng minh của định lý để xây dựng η để $d\eta = \omega$: $\eta = Kh^*\omega$.

Ví dụ. Cho $\omega = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2zx)dy + (z^2 - 2xy)dz \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$.
Dễ kiểm tra $d\omega = 0$. Để tìm f sao cho $df = \omega$, như sau:
Cách 1: Vì $\mathbf{R}^3$ là tập co rút về 0 với $h(x,y,z,t) = (tx, ty, tz)$. Theo định nghĩa của các toán tử, ta có:

$$\begin{aligned}
h^*\omega &= t^2(x^2 - 2yz)(xdt + tdx) + t^2(y^2 - 2zx)(ydt + tdy) + t^2(z^2 - 2xy)(zdt + tdz).\\
Kh^*\omega &= \int_0^1 t^2(x^2 - 2yz)xdt + \int_0^1 t^2(y^2 - 2zx)ydt + \int_0^1 t^2(z^2 - 2xy)zdt.
\end{aligned}$$

Suy ra $f = Kh^*\omega = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz)$ là một tích phân đầu của ω, i.e. $df = \omega$.

Cách 2: Hàm f thoả $df = \omega$, có thể viết lại

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 - 2yz\\
(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} &= y^2 - 2zx\\
(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} &= z^2 - 2xy
\end{aligned}$$

Để tìm f, ta lần lượt tích phân theo từng biến:
Từ (1) suy ra $f = \dfrac{x^3}{3} - 2xyz + \varphi(y,z)$
Từ (2) suy ra $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = y^2$. Vậy $\varphi = \dfrac{y^3}{3} + \psi(z)$.
Từ (3) suy ra $\dfrac{\partial\psi}{\partial z} = z^2$. Vậy $\psi = \dfrac{z^3}{3} +$ const.
Suy ra $f = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz +$ const
(Cách 2 có thể làm cho các miền hình hộp).

IV. Tích phân dạng vi phân

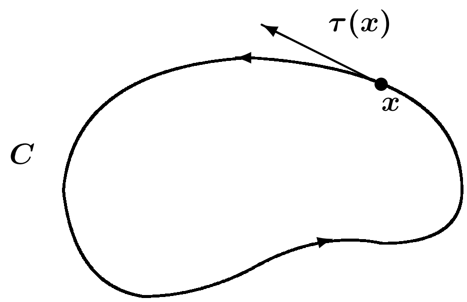
1. ĐỊNH HƯỚNG

1.1 Trường vector. Cho $M \subset \mathbf{R}^n$. Một **trường vector trên** M là ánh xạ

$$F : M \to \mathbf{R}^n, F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$$

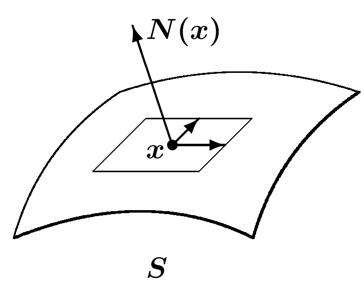
Về mặt hình học xem trường vector như họ vector $F(x)$ có điểm gốc đặt tại x.

1.2 Định hướng đường cong. Đường cong trơn $C \subset \mathbf{R}^3$, gọi là **định hướng** τ nếuu $\tau : C \to \mathbf{R}^3$ là trường vector liên tục và tiếp xúc với C, i.e. $\tau(x)$ tiếp xúc với C tại x, với mọi $x \in C$.



Ví dụ. Đường tròn đơn vị có thể tham số hoá bởi $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), t \in (0, 2\pi)$. Khi đó trường vector tiếp xúc $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ xác định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

1.3 Định hướng mặt. Cho $S \subset \mathbf{R}^3$ là mặt cong trơn. Ta nói S là **định hướng được** nếuu tồn tại trường vector pháp liên tục trên S, i.e. tồn tại $N : S \to \mathbf{R}^3$, liên tục và $N(x) \perp T_xS, \forall x \in S$.
Khi đó S gọi là **định hướng pháp** N.



Ví dụ.
a) Mặt cầu là định hướng được và có thể chọn một trong hai hướng: hướng pháp trong hay hướng pháp ngoài. Cụ thể khi tham số hoá mặt cầu bởi

$$\varphi(\phi,\theta) = (\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta),\ (\phi,\theta)\in(0,2\pi)\times(0,\pi).$$

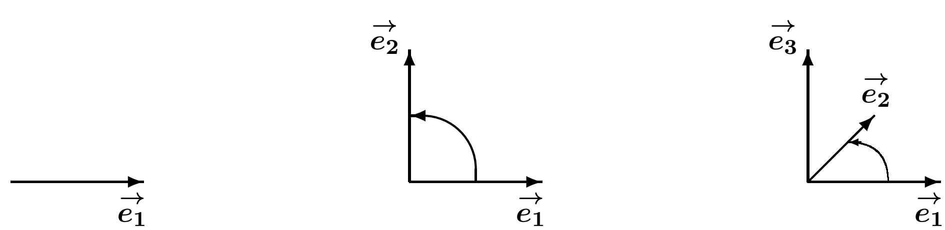
Với tham số hoá đó, các vector tiếp xúc với các đường tọa độ là

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = (-\sin\phi\sin\theta, \cos\phi\sin\theta, 0),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, -\sin\theta)$$

Dễ kiểm tra hướng pháp $N = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\phi}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ là hướng pháp trong.
b) Lá M̉obius cho ta một ví dụ về mặt không định hướng được.

1.4 Định hướng không gian vector.
Dựa vào trực quan: trên $\mathbf{R}$ có thể định hai hướng (dương nếu cùng hướng với chiều tăng, âm nếu ngược lại). Trong $\mathbf{R}^2$ có thể định hai hướng (thuận hay ngược chiều kim đồng hồ). Ta có định nghĩa sau.
Cho V là không gian vector k chiều trên $\mathbf{R}$. Trong Đại số tuyến tính ta đã biết là nếu $(v_1,\cdots,v_k)$ và $(w_1,\cdots,w_k)$ là các cơ sở của V, thì tồn tại ma trận chuyển cơ sở $P=(p_{ij})_{k\times k}$ sao cho $w_j=\sum_i p_{ij}v_i$.
Ta nói $(v_1,\cdots,v_k)$ và $(w_1,\cdots,w_k)$ **cùng hướng** nếuu $\det P>0$,
$(v_1,\cdots,v_k)$ và $(w_1,\cdots,w_k)$ **ngược hướng** nếuu $\det P<0$.
Như vậy trên tập các cơ sở của V được chia thành hai lớp tương đương, mỗi lớp gồm các cơ sở cùng hướng với nhau. Lớp cùnh hướng với $(v_1,\cdots,v_k)$ ký hiệu là $[v_1,\cdots,v_k]$, lớp các cơ sơ ngược hướng ký hiệu là $-[v_1,\cdots,v_k]$.
Không gian V gọi là **đã định hướng** μ nếu ta chọn một hướng $\mu=[v_1,\cdots,v_k]$.

Ví dụ. Trong $\mathbf{R}^k$ cơ sở chính tắc xác định **hướng chính tắc**. Theo ngôn ngữ trực quan, hướng chính tắc trong $\mathbf{R}$ là hướng dương, hướng chính tắc trong $\mathbf{R}^2$ là hướng ngược chiều kim đồng hồ, còn hướng chính tắc trong $\mathbf{R}^3$ là hướng tam diện thuận.



Hướng chính tắc của $\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$

1.5 Định hướng đa tạp. Cho $M\subset\mathbf{R}^n$ là đa tạp khả vi k chiều.
Một họ hướng $\mu=\{\mu_x : \mu_x$ là một hướng trên $T_xM, x\in M\}$ gọi là **tương thích** nếuu chúng biến đổi một cách liên tục theo nghĩa sau: với mọi $a\in M$, tồn tại tham số hoá (φ,U) tại a sao cho $[D_1\varphi(u),\cdots,D_k\varphi(u)]=\mu_{\varphi(u)}$, với mọi $u\in U$.

M gọi là **định hướng được** nếuu tồn tại một họ hướng tương thích trên M.
M gọi là **định hướng** μ nếuu M định hướng được và họ hướng tương thích μ được chọn. Khi đó một tham số hoá như trên gọi là **tham số hoá xác định hướng** μ.

Nhận xét. Đối với mặt cong trong $\mathbf{R}^3$, việc xác định hướng như định nghĩa trên tương đương với việc xác định trường vector pháp liên tục. Ta có $N = D_1\varphi \times D_2\varphi$ là trường pháp vector.

1.6. Hướng cảm sinh trên bờ.
Mệnh đề. *Cho M là đa tạp khả vi có bờ ∂M. Nếu M định hướng được, thì ∂M cũng định hướng được.*

Chứng minh: Gỉa sử $\mathcal{O}$ là họ tham số hoá của M xác định hướng μ.
Với mọi $(\varphi, U) \in \mathcal{O}$, gọi $i : \mathbf{R}^{k-1} \to \mathbf{R}^k$, $i(u_1, \cdots, u_{k-1}) = (u_1, \cdots, u_{k-1}, 0)$. Khi đó họ $\{(\varphi \circ i, i^{-1}(U)) : (\varphi, U) \in \mathcal{O}, U \bigcap \mathbf{H^k} \neq \emptyset\}$ là họ tham số hoá ∂M.
Với mỗi $x \in \partial M$, và $(\varphi, U) \in \mathcal{O}$ là họ tham số hoá tại x, định nghĩa

$$\epsilon_x = [D_1\varphi(u), \cdots, D_{k-1}\varphi(u)],\ x = \varphi(u).$$

Ta sẽ chứng minh ϵ_x không phụ thuộc tham số hoá $(\varphi, U) \in \mathcal{O}$, và do vậy họ ∂M, $\epsilon = \{\epsilon_x :\ x = \varphi(u) \in \partial M, (\varphi, U) \in \mathcal{O}\ \}$ là một họ hướng tương thích trên ∂M.
Nếu $(\varphi, U), (\psi, W) \in \mathcal{O}$ là các tham số hoá tại x, thì $\psi = \varphi \circ h$ với $\det h' > 0$. Tọa độ thứ k của h thoả:

$$h_k(w_1, \cdots, w_{k-1}, 0) = 0,\ \text{va}\ h_k(w_1, \cdots, w_{k-1}, w_k) > 0 \text{ khi } w_k > 0.$$

Suy ra với $w = (w_1, \cdots, w_{k-1}, 0)$, dòng cuối của ma trận $h'(w)$ là

$$(D_1 h_k(w) = 0 \quad \cdots \quad D_{k-1}h_k(w) = 0 \quad D_k h_k(w) > 0).$$

Do đó $\det h'(w) = \det(h \circ i)'(w_1, \cdots, w_{k-1}) D_k h_k(w) > 0$.
Vậy $\det(h \circ i)'(w_1, \cdots, w_{k-1}) > 0$. Mà $(h \circ i)'(w)$ chính là ma trận chuyển cơ sở $D_1\varphi(u), \cdots, D_{k-1}\varphi(u)$ sang cơ sở $D_1\psi(w), \cdots, D_{k-1}\psi(w)$ trong không gian $T_x\partial M$ $(x = \psi(w) = \varphi(u))$, nên

$$[D_1\psi(w), \cdots, D_{k-1}\psi(w)] = [D_1\varphi(u), \cdots, D_{k-1}\varphi(u)].$$

Do vậy ϵ_x được định nghĩa không phụ thuộc tham số hoá xác định hướng μ_x. □

Định nghĩa. Cho M là đa tạp định hướng μ. Khi đó trên ∂M ta xác định **hướng cảm sinh** $\partial \mu$ như sau:
Với mọi $x \in \partial M$, gọi (φ, U) là tham số hoá tại x của M xác định hướng μ, i.e. $\mu_x = [D_1\varphi(u), \cdots, D_k\varphi(u)]$. Khi đó định nghĩa

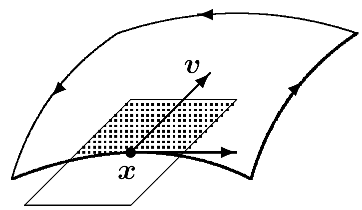
$$\partial\mu_x = (-1)^k [D_1\varphi(u), \cdots, D_{k-1}\varphi(u)].$$

(Dấu $(-1)^k$ để thuận tiện cho công thức Stokes sau này)

Nhận xét. Gọi φ là tham số hoá định hướng μ tại $x = \varphi(u)$. Vì $T_x\partial M$ là không gian

vector con của T_xM có đối chiều 1, nên với mỗi $v \in T_xM \setminus T_x\partial M$ xảy ra một trong hai trường hợp:
(1) v **hướng vào trong** M, nếu $v \in \varphi'(u)(\mathbf{H}^k_+)$
(2) v **hướng ra ngoài** M, nếu ngược lại trường hợp (1).
Về mặt trực quan, ta nhận biết hướng trên ∂M là hướng cảm sinh như sau:
Cho $v_1, \cdots, v_{k-1}$ là cơ sở $T_x\partial M$. Khi đó nếu $v \in T_xM$ là vector hướng vào trong M và xác định hướng $\mu = [v_1, \cdots, v_{k-1}, v]$, thì hướng cảm sinh trên bờ là

$$\partial\mu_x = (-1)^k[v_1, \cdots, v_{k-1}]$$



Chẳng hạn, nếu $\mathbf{H}^k$ định hướng chính tắc, thì hướng cảm sinh trên $\partial\mathbf{H}^k = \mathbf{R}^{k-1} \times 0$ trùng với hướng chính tắc trên $\mathbf{R}^{k-1}$ nếu k chẵn, và ngược với hướng chính tắc đó nếu k lẻ.

Ví dụ. Trực quan hơn nữa:
Nếu miền M trong $\mathbf{R}^2$ định hướng chính tắc hay là mặt cong trong $\mathbf{R}^3$ định hướng pháp N, thì hướng cảm sinh trên đường cong ∂M là hướng 'đi dọc theo đó miền ở phía trái'.
Nếu M là miền trong $\mathbf{R}^3$ định hướng chính tắc, thì hướng cảm sinh trên mặt cong ∂M là hướng 'pháp tuyến ngoài'.

2. TÍCH PHÂN DẠNG VI PHÂN

Trước hết là một vài gợi ý cho việc xây dựng tích phân của trường vector hay của dạng vi phân.
Cho $F = (F_1, F_2, F_3)$ là một trường vector trong $\mathbf{R}^3$.
• Với $v \in \mathbf{R}^3$ là vector gốc tại x, giá trị $W_F(x)(v) =< F(x), v >$, gọi là công của $F(x)$ dọc theo v.
Ta có 1-dạng vi phân tương ứng: $W_F = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$.
Cho C là một đường cong định hướng trong $\mathbf{R}^3$. Ta cần xây dựng tích phân của trường F dọc theo C, hay là tích phân của dạng vi phân W_F trên C:

$$\int_C W_F = \int_C F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3.$$

• Với $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^3$ là các vector gốc tại x, giá trị $\omega_F(x)(v_1, v_2) =< F(x), v_1 \times v_2 >$, gọi là thông lượng của $F(x)$ qua mặt bình hành ΔS tạo bởi v_1, v_2.
Ta có 2-dạng vi phân tương ứng $\omega_F = F_1dx_2 \wedge dx_3 + F_2dx_3 \wedge dx_1 + F_3dx_1 \wedge dx_2$.

Cho S là mặt định hướng trong $\mathbf{R}^3$. Ta cần khái niệm tích phân của trường vector F qua mặt S, hay là tích phân của dạng vi phân ω_F trên S:

$$\int_S \omega_F = \int_S F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2$$

2.1 Định nghĩa. Cho U là tập mở $\mathbf{R}^k$, và $\omega \in \Omega^k(U)$.
Khi đó $\omega = f(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$. Định nghĩa

$$\int_U \omega = \int_U f(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \int_U f(u)du_1 \cdots du_k.$$

nếu tích phân vế phải tồn tại.

2.2 Tích phân dạng vi phân. Cho M là đa tạp khả vi k chiều định hướng μ trong $\mathbf{R}^n$. Cho $\omega \in \Omega^k(V)$, vơi V là tập mở chứa M. Sau đây ta xây dựng **tích phân của** dạng ω trên M (còn gọi là tích phân loại 2) $\displaystyle\int_M \omega$
Nếu $M = \varphi(U)$ với (φ, U) là một tham số hoá xác định hướng μ, thì định nghĩa

$$\int_M \omega = \int_U \varphi^* \omega.$$

Trường hợp tổng quát, khi M cho bởi một họ tham số hoá $\mathcal{O} = \{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ xác định hướng μ, ta dùng kỹ thuật phân hoạch đơn vị. Gọi $\Theta = \{\theta_i : i \in I\}$ là phân hoạch đơn vị của M phù hợp với $\mathcal{O}$. Định nghĩa

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} \theta_i \omega \quad \left(= \sum_{i \in I} \int_{U_i} \varphi_i^*(\theta_i \omega) \right) \quad ,$$

với giả thiết vế phải tồn tại. Chẳng hạn khi M compact và ω liên tục.
Khi $k = 1$, tích phân có dạng $\displaystyle\int_M \sum_i F_i dx_i$, và gọi là **tích phân đường**.
Khi $k = 2$, tích phân có dạng $\displaystyle\int_M \sum_{i<j} F_{ij} dx_i \wedge dx_j$, và gọi là **tích phân mặt.**

Nhận xét. Định nghĩa trên không phụ thuộc cách chọn họ tham số xác định hướng μ và phân hoạch đơn vị.
Chứng minh: Khi hai tham số hóa (φ, U) và (ψ, W), cùng xác định hướn μ, ta có $\psi = \varphi \circ h$, với h là vi phôi có $\det Jh > 0$. Nếu $\varphi^*\omega = f(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$, thì $h^*(f(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_k) = h^*\varphi^*\omega = (\varphi \circ h)^*\omega = \psi^*\omega$.
Theo công thức đổi biến, ta có

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_U f = \int_W f \circ \circ h \det Jh = \int_W h^*(f(u)du_1 \wedge \cdots \wedge du_k) = \int_W \psi^*\omega.$$

Vậy định nghĩa không phụ thuộc tham số hoá xác định cùng hướng.
Nếu $\Theta' = \{\theta'_j : j \in J\}$ là một phân hoạch đơn vị khác của M. Khi đó

$$\sum_j \int_M \theta'_j \omega = \sum_j \int_M (\sum_i \theta_i) \theta'_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \theta_i \theta'_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \theta'_j \theta_i \omega = \sum_i \int_M (\sum_j \theta'_j) \theta_i \omega \sum_i \int_M \theta_i \omega.$$

Vậy định nghĩa cũng không phụ thuộc phân hoạch đơn vị. □

2.3 Tính chất. *Cho M là đa tạp k chiều định hướng μ trong tập mở V. Khi đó*

(1) $\int_M : \Omega^k(V) \to \mathbf{R}$ *là tuyến tính.*

(2) $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$, *với ký hiệu $-M$ để chỉ M định hướng $-\mu$.*

Chứng minh: (1) suy từ tính tuyến tính của $\int_{U_i}$ và φ_i^*.
(2) Xét phép đổi biến $h(u_1, \cdots, u_k) = (-u_1, \cdots, u_k)$. Khi đó $\det h' = -1$. Nếu (φ, U) là tham số hoá xác định hướng μ, thì $(\varphi \circ h, h^{-1}(U))$ là tham số hoá xác định hướng$-\mu$. Từ đó suy ra với mọi phân hoạch đơn vị Θ phù hợp với họ tham số hoá, ta có

$$\int_{-M} \omega = \sum_{\theta \in \Theta} \int_{h^{-1}(U)} (\varphi \circ h)^* \theta\omega = \sum_{\theta \in \Theta} (-\int_U \varphi^* \theta\omega) = -\int_M \omega.$$

□

Ví dụ.
a) Cho C là đường cong trơn, cho bởi tham số hóa $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$, định hướng theo chiều tăng của tham số. Khi đó

$$\int_C \sum_i F_i dx_i = \int_I \sum_i F_i \circ \varphi d\varphi_i = \int_I (\sum_i F_i \circ \varphi(t)\varphi_i'(t))dt.$$

Chẳng hạn, nếu đường tròn đơn vị định hướng ngược chiều kim đồng hồ, thì

$$\int_{x^2+y^2=1} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t d(\cos t) - \cos t d(\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

b) Cho S là mặt cầu đơn vị định hướng pháp trong, thì với tham số hoá xác định hướng tương ứng, ta có

$$\begin{aligned}
\int_S x dy \wedge dz &= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \cos\phi \sin\theta d(\sin\phi \sin\theta) \wedge d(\cos\theta) \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \cos\phi \sin\theta (\cos\phi \sin\theta d\phi + \sin\phi \cos\theta d\theta) \wedge d(-\sin\theta d\theta) \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} -\cos^2\phi \sin^3\theta d\phi \wedge d\theta = ?
\end{aligned}$$

2.4 Quan hệ giữa tích phân loại 1 và loại 2.
Cho $F = (P, Q, R)$ là trường vector lớp C^1 trên một tập mở $V \subset \mathbf{R}^3$.
(1) *Cho $C \subset V$ là đường cong kín, định hướng bởi trường vector tiếp xúc đơn vị $T = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Khi đó*

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C < F, T > dl = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl.$$

(2) *Cho $S \subset V$ là mặt trơn, định hướng bởi trường pháp vector đơn vị $N = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Khi đó*

$$\int_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy = \int_S < F, N > dS = \int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$$

Chứng minh: Như phần gợi ý đầu tiết, ta có:
(1) Với mỗi $v \in \mathbf{R}^3$, gọi T là vector chỉ phương đơn vị của v. Khi đó 1-dạng $W_F(v) =< F, v >$, có
Biểu diễn 1: $W_F = Pdx + Qdy + Rdz$.
Biểu diễn 2: $W_F(v) =< F, T > \|v\| =< F, T > dl(v)$.
Vậy nếu C là đường cong trong $\mathbf{R}^3$ định hướng bởi trường vector tiếp xúc đơn vị T, thì

$$\int_C W_F = \int_C < F, T > dl.$$

Từ đó suy ra (1).
(2) Với $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^3$, gọi N là vector đơn vị chỉ phương $v_1 \times v_2$. Khi đó 2-dạng vi phân $\omega_F(v_1, v_2) =< F, v_1 \times v_2 >$, có
Biểu diễn 1: $\omega_F = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.
Biểu diễn 2: $\omega_F(v_1, v_2) =< F, N > \|v_1 \times v_2\| =< F, N > dS(v_1, v_2)$.
Vậy nếu S là mặt cong định hướng bởi trường vector pháp đơn vị N, thì

$$\int_S \omega_F = \int < F, N > dS.$$

Từ đó suy ra (2). □

3. CÔNG THỨC STOKES

3.1 Định lý (Công thức Stokes). *Cho M là đa tạp khả vi k chiều, định hướng, compact trong tập mở $V \subset \mathbf{R}^n$, với bờ ∂M định hướng cảm sinh. Khi đó*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad \forall \omega \in \Omega^{k-1}(V).$$

Chứng minh: Giả sử M định hướng μ và $\partial\mu$ là hướng cảm sinh trên ∂M. Cho $\{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ là tham số hoá định hướng μ của M. Không giảm tổng quát, giả sử U_i chứa trong một hình hộp A_i.
Gọi $\mathbf{i} : \mathbf{R}^{k-1} \to \mathbf{R}^k$, $\mathbf{i}(u_1, \cdots, u_{k-1}) = (u_1, \cdots, u_{k-1}, 0)$. Khi đó họ $\{(\varphi_i \circ \mathbf{i}, \mathbf{i}^{-1}(U_i)) : i \in I'\}$, với $I' = \{i \in I : U_i \cap \partial\mathbf{H}^k \neq \emptyset\}$, là họ tham số hoá ∂M định hướng $(-1)^k \partial\mu$. Nếu $\{\theta_i : i \in I\}$ là phân hoạch đơn vị phù hợp với họ đã cho, thì

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_M d(\sum_{i \in I} \theta_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i \cap \mathbf{H}^k)} d\theta_i \omega.\\ \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} (\sum_{i \in I'} \theta_i \omega) = \sum_{i \in I'} \int_{\varphi_i(U_i \cap \partial H^k)} \theta_i \omega.\end{aligned}$$

Để cho gọn, đặt $\varphi = \varphi_i, U = U_i, A = A_i = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_k, \beta_k]$. Ta cần chứng minh:
(1) Nếu $U \cap \partial\mathbf{H}^k = \emptyset$, i.e. $i \in I \setminus I'$, thì $\displaystyle\int_{\varphi(U)} d\omega = 0$.
(2) Nếu $U \cap \partial\mathbf{H}^k \neq \emptyset$, i.e. $i \in I'$, thì $\displaystyle\int_{\varphi(U \cap \mathbf{H}^k)} d\omega = (-1)^k \int_{\varphi(U \cap \partial H^k)} \omega$.

Gọi $\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^{k} a_j(u_1, \cdots, u_k) du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_j} \wedge \cdots \wedge du_k \in \Omega^{k-1}(U)$.
Khi đó xem $\varphi^*\omega \in \Omega^{k-1}(A)$ bằng cách đặt $a_j(u) = 0$ khi $u \notin U$. Ta có

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \mathbf{i})^*\omega &= a_k(u_1, \cdots, u_{k-1}, 0) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{k-1}. \\
\varphi^*(d\omega) &= \sum_{j=1}^{k} da_j \wedge du_1 \wedge \cdots \widehat{du_j} \cdots \wedge du_k \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.
\end{aligned}$$

Đối với trường hợp (1), ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(U)} d\omega &= \int_U \varphi^*(d\omega) = \int_A \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \\
&= \sum_j \int_{\prod_{l \neq j}[\alpha_l, \beta_l]} (a_j(\cdots, \beta_j, \cdots) - a_j(\cdots, \alpha_j, \cdots)) du_1 \cdots \widehat{du_j} \cdots du_k \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(Đẳng thức thứ ba suy từ công thức Fubini và công thức Newton-Leibniz, đẳng thức cuối là do $(u_1, \cdots, \beta_j, \cdots, u_k)$, $(u_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, u_k) \notin U$ nên các giá trị của a_j tại đó triệt tiêu).
Đối với trường hợp (2), ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(U \cap \mathbf{H}^k)} d\omega &= \int_{U \cap \mathbf{H}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \\
&= \int_{A \cap \mathbf{H}^k} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k \\
&= \sum_j (-1)^{j-1} (\int_{[\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [0, \beta_k]} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k).
\end{aligned}$$

Khi $j \neq k$, $\displaystyle\int_{[\alpha_j, \beta_j]} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_j = a_j(u_1, \cdots, \beta_j, \cdots, u_k) - a_j(u_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, u_k) = 0.$
Khi $j = k$, $\displaystyle\int_{[0, \beta_k]} \frac{\partial a_k}{\partial u_k} du_k = a_k(u_1, \cdots, \beta_k) - a_k(u_1, \cdots, 0) = -a_k(u_1, \cdots, 0).$
Vậy theo công thức Fubini, ta có

$$\int_{\varphi(U \cap \mathbf{H}^k)} d\omega = (-1)^k \int_{\prod_{j \neq k}[\alpha_j, \beta_j]} a_k(u_1, \cdots, 0) du_1 \cdots du_{k-1}.$$

Mặt khác
$$\int_{\varphi(U \cap \partial \mathbf{H}^k)} \omega = \int_{A \cap \mathbf{R}^{k-1} \times 0} a_k(u_1, \cdots, 0) du_1 \cdots du_{k-1}.$$

Từ đó suy ra công thức cần chứng minh. □

Chú ý. Nếu M không compact công thức không đúng. Chẳng hạn, M là khoảng mở trong $\mathbf{R}$, $\omega(x) = xdx$.

3.2 Các công thức cổ điển. Sau đây là các hệ qủa của định lý trên:

Công thức Newton-Leibniz. *Cho V là tập mở trong $\mathbf{R}^n$, $F : V \to \mathbf{R}$ thuộc lớp C^1 và $\varphi : [a, b] \to V$ là tham số hoá đường cong trơn. Khi đó*

$$\int_{\varphi([a,b])} dF = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Công thức Green. *Cho $D \subset \mathbf{R}^2$ là miền compact, có bờ $C = \partial D$ định hướng ngược chiều kim đồng hồ. Cho P, Q là các hàm lớp C^1 trên tập mở chứa D. Khi đó*

$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \int_C Pdx + Qdy.$$

Công thức Stokes cổ điển. *Cho $S \subset \mathbf{R}^3$ là mặt cong trơn định hướng pháp N, có bờ $\partial S = C$ là đường cong kín định hướng sao cho miền phía trái. Cho P, Q, R các hàm lớp C^1 trên một tập mở chứa S. Khi đó*

$$\int_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) dz \wedge dx = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

Công thức Gauss-Ostrogradski. *Cho $V \subset \mathbf{R}^3$ là miền compact, có bỡ $\partial V = S$ là mặt trơn định hướng pháp ngoài. Cho P, Q, R là các hàm lớp C^1 trên một miền mở chứa V. Khi đó*

$$\int_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dxdydz = \int_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

Ví dụ.
a) Diện tích miền D giới hạn bởi đường cong kín C trong $\mathbf{R}^2$:

$$\int_D dxdy = \int_C xdy = -\int_C ydx = \frac{1}{2} \int_C (xdy - ydx).$$

b) Thể tích miền V giới hạn bởi mặt cong kín S trong $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} \int_V dxdydz &= \int_S xdy \wedge dz = \int_S ydz \wedge dx = \int_S zdx \wedge dy \\ &= \frac{1}{3} (\int_S xdy \wedge dz + \int_S ydz \wedge dx + \int_S zdx \wedge dy) \end{aligned}$$

3.3 Mệnh đề. *Gỉa sử U là tập mở, co rút được trong $\mathbf{R}^n$. Cho $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \in \Omega^1(U)$.*

Khi đó các điều sau tương đương:
(1) *ω là khớp, i.e. tồn tại $f \in C^1(U)$, sao cho $df = \omega$.*
(2) *ω là đóng, i.e. $d\omega = 0$.*

(3) $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_i} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}$, *với mọi* i, j.

(4) $\displaystyle\int_C \omega = 0$, *với mọi đường cong kín* $C \subset U$.

Chứng minh: Suy từ bổ đề Poincaré và công thức Stokes. (Bài tập) □

Ví dụ. Tập $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ không co rút được vì trên đó có dạng $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ đóng, nhưng tích phân trên đường tròn là $2\pi \neq 0$.
Bài tập: Chứng minh $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ không co rút được bằng cách xét dạng

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x_i}{\|x\|^{n/2}} dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_i} \cdots \wedge dx_n.$$

(trong đó ký hiệu $\widehat{dx_i}$ để chỉ dx_i không có mặt trong biểu thức.)

3.4 Ứng dụng vào giải tích vector.

Các toán tử grad, rot, div: Trong $\mathbf{R}^3$ với cơ sở chính tắc e_1, e_2, e_3 và U là tập mở trong $\mathbf{R}^3$.
Ký hiệu $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2} e_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3} e_3$, gọi là **toán tử nabla**.
Cho $f : U \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi. Trường **gradient** của f, được định nghĩa:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} e_3.$$

Cho $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ là trường vector khả vi trên U. Trường **xoắn** của F, được ký hiệu và định nghĩa

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Hàm nguồn của trường F, được ký hiệu và định nghĩa:

$$\operatorname{div} F = < \nabla, F > = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Quan hệ với toán tử vi phân. Định nghĩa các đẳng cấu:

$h_1 : \mathcal{X}(U) \to \Omega^1(U), h_2(F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3) = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3.$

$h_2 : \mathcal{X}(U) \to \Omega^2(U), h_2(F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3) = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$

$h_3 : C^\infty(U) \to \Omega^3(U), h_3(f) = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$

Khi đó biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(U) & \stackrel{\text{grad}}{\to} & \mathcal{X}(U) & \stackrel{\text{rot}}{\to} & \mathcal{X}(U) & \stackrel{\text{div}}{\to} & C^\infty(U) \\ \downarrow id & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 \\ \Omega^0(U) & \stackrel{d}{\to} & \Omega^1(U) & \stackrel{d}{\to} & \Omega^2(U) & \stackrel{d}{\to} & \Omega^3(U) \end{array}$$

nghĩa là ta có: $h_1 \circ \text{grad} = d \circ id,\ h_2 \circ \text{rot} = d \circ h_1,\ h_3 \circ \text{div} = d \circ h_2$.

Chứng minh: Xem như bài tập □

Hệ qủa. Từ $d \circ d = 0$, suy ra $\text{rot} \circ \text{grad} = 0, \quad \text{div} \circ \text{rot} = 0$.

3.5 Công thức Stokes cho tích phân loại 1. *Cho F là một trường vector khả vi trong $\mathbf{R}^3$.*
(1) *Giả sử S là mặt cong compact trong $\mathbf{R}^3$, định hướng bởi trường vector pháp đơn vị N, có bờ $\partial S = C$ là đường cong định hướng cảm sinh bởi trường vector tiếp xúc đơn vị T sao cho miền S nằm phía trái. Khi đó*

$$\int_C < F, T > dl = \int_S < \text{rot}\, F, N > dS.$$

(2) *Giả sử V là miền giới nội trong $\mathbf{R}^3$ có bờ $\partial V = S$ là mặt cong định hướng bởi trường vector pháp đơn vị N hướng ra phía ngoài. Khi đó*

$$\int_S < F, N > dS = \int_V \text{div}\, F dV.$$

Chứng minh: Suy từ công thức Stokes và mối quan hệ giữa tích phân loại 1 và loại 2. □

Bài tập giải tích 3

1 Bài tập tich phân phụ thuộc tham số

1. Tính các giới hạn

$$1)\lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}dx \quad 2)\lim_{t\to 0}\int_{t}^{1+t}\frac{dx}{1+x^2+t^2} \quad 3)\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+(1+x/n)^n}$$
$$4)\lim_{t\to 0}\int_{t}^{1+t}\frac{\ln(x+|t|)}{\ln(x^2+|t^2|}\quad 5)\lim_{t\to 0}\int_{0}^{1}\frac{x}{t^2}e^{-x^2/t^2}dx \quad 6)\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{\pi/2}e^{-t\sin x}dx.$$

2. Khảo sát tính liên tục của hàm $I(t)=\int_0^1\frac{tf(x)}{x^2+t^2}$, trong đó hàm $f(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0,1]$.

3.
1) Tìm đạo hàm của các tích phân eliptic

$$E(t)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-t^2\sin^2 x}dx \quad F(t)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-t^2\sin^2 x}}dx.$$

2) Hãy biểu diễn E', F' qua các hàm E, F.
3) Chứng minh rằnh E thỏa phương trình vi phân

$$E''(t)+\frac{1}{t}E'(t)+\frac{1}{1-t^2}E(t)=0.$$

4. Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục. Tính $I'(t)$ nếu

$$1)\ I(t)=\int_0^t f(x+t,x-t)dx \qquad 2)\ I(t)=\int_0^{t^2}\left(\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy\right)dx.$$

5. Chứng minh rằng hàm Bessel với các chỉ số nguyên

$$I_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx-t\sin x)dx,$$

thỏa mãn phương trình Bessel

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0.$$

6. Cho hàm $\varphi(x)$ thuộc lớp C^1) trên đoạn $[0, a]$ và $I(t) = \int\limits_0^t \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{t-x}}$. Chứng minh rằng, với mọi $t \in (0, a)$ ta có

$$I'(t) = \int\limits_0^t \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{t-x}} + \frac{\varphi(0)}{\sqrt{t}}.$$

7. Bằng cách lấy đạo hàm theo tham số, hãy tính

1) $I(t) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(t^2\sin^2 x + \cos^2 x)dx$ 2) $I(t) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2t\cos x + t^2)dx.$

8. Chứng tỏ rằng, hàm $I(t) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+t)^2}dx$. khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$.

9. Chứng minh công thức Frulanhi

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}, \ (a > 0, b > 0),$$

trong đó $f(x)$ là hàm liên tục và tích phân $\int\limits_a^{\infty} \frac{f(x)}{x}$ có nghĩa với mọi $a > 0$.

10. Xét tích phân Dirichlet $D(t) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{x}dx$. Chứng minh rằng

1) $D(t)$ hội tụ đều trên mỗi đoạn $[a, b]$ không chứa 0.
2) $D(t)$ hội tụ không đều trên mỗi đoạn $[a, b]$ chứa 0.

11. Xét tích phân $I(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$. Chứng minh rằng

1) $I(t)$ liên tục trên $[0, \infty)$
2) $I(t)$ khả vi và $I'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.
3) $I(t) = -\arctan(t) + \frac{\pi}{2}$.
4) $D(1) = I(0) = \lim\limits_{t\to 0} I(t) = \frac{\pi}{2}$, trong đó $D(t)$ là tích phân Dirichlet.

12. Chứng minh rằng $D(t) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin(tx)}{x} dx = \frac{\pi}{2}\text{sgn}t.$

13. Bằng cách lấy đạo hàm theo tham số, hãy tính

$$1) I(t) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-tx^2} - e^{-sx^2}}{x} dx, (t, s > 0) \quad 2)\ I(t) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-tx} - e^{-sx}}{x}\right)^2 dx, (t, s > 0)$$

$$3) I(t) = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - t^2x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx, (|t| \le 1) \quad 4) I(t) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin tx dx,\ (a, b > 0).$$

14. Sử dụng tích phân Dirichlet và công thức Frulanhi để tìm giá trị của các tích phân sau

$$1) \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx \quad 2) \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} dx \quad 3) \int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 ax}{x^2}$$

$$4) \int\limits_0^1 \frac{\sin^3 ax}{x} dx, (|t| \le 1) \quad 5) \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx \quad 6) \int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 ax - \sin^4 bx}{x} dx.$$

15. Sử dụng các tích phân Euler để tính các tích phân sau

$$1) \int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} dx, (a > 0) \quad 2) \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1 + x)^2} dx \quad 3) \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3}$$

$$4) \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} dx, (n > 1) \quad 5) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx \quad 6) \int\limits_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx.$$

16. Hãy biểu diễn các tích phân sau qua các tích phân Euler

$$1) \int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1 + x^n}\ (n > 0) \quad 2) \int\limits_0^\infty \frac{x^m}{(a + bx^n)^p} dx\ (a, b, n > 0) \quad 3) \int\limits_0^\infty \frac{x^m}{e^{-x^n}} dx$$

$$4) \int\limits_0^{\pi/2} \tan^n x dx \quad 5) \int\limits_0^\infty x^p e^{-ax} \ln x dx\ (a > 0) \quad 6) \int\limits_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1 + x^4} dx.$$

17. Chứng minh các công thức Euler $(\lambda > 0, p > 0, -\pi/2 < \alpha < \pi/2)$.

1) $\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-\lambda x \cos\alpha} \cos(\lambda x \sin\alpha) dx = \frac{\Gamma(p)}{\lambda^p} \cos\alpha p.$

2) $\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-\lambda x \cos\alpha} \sin(\lambda x \sin\alpha) dx = \frac{\Gamma(p)}{\lambda^p} \sin\alpha p.$

II. Tích phân hàm trên đa tạp

1. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Chứng minh f khả vi lớp C^p khi và chỉ khi đồ thị f là đa tạp khả vi lớp C^p trong $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$.

2. Cho $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ là ánh xạ khả vi. Gọi M là tập con của $\mathbf{R}^m$ cho bởi hệ phương trình $F(x) = 0$. Chứng minh nếu $\operatorname{rank} F'(x) = m$ với mọi $x \in M$, thì M là đa tạp khả vi $n - m$ chiều.

3. Cho $\alpha : (a,b) \to \mathbf{R}^2$ là tham số hoá đường cong trơn, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ và $y(t) > 0$. Chứng minh **mặt tròn xoay** cho bởi tham số hoá:
   $\phi(t,\theta) = (x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta),\ (t,\theta) \in (a,b) \times (0, 2\pi),$
   là một đa tạp khả vi trong $\mathbf{R}^3$.
   Chứng minh các đường cong tọa độ là vuông góc với nhau. Tìm vector pháp và mặt phẳng tiếp xúc.
   Áp dụng: hãy tham số hoá mặt trụ, cầu, xuyến.

4. Cho $\alpha : (a,b) \to \mathbf{R}^2$ là tham số hoá một đường cong trơn và $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3$ với $p_3 \neq 0$. Chứng minh **mặt nón** cho bởi tham số hoá:
   $\phi(t,s) = (1-s)p + s(\alpha(t), 0),\ (t,s) \in (a,b) \times (0,1),$
   là đa tạp khả vi trong $\mathbf{R}^3$. Xác định các đường cong tọa độ, vector pháp, mặt phẳng tiếp xúc.

5. Kiểm tra các tập cho bởi các phương trình hay tham số sau là đa tạp không.
   Trong $\mathbf{R}^2$: a) $x = a(1 - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ b) $x = t^2, y = t^3$.
   Trong $\mathbf{R}^3$: a) $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ (a, b là cá hằng số dương)
   b) $x = \sqrt{2}\cos 2t, y = \sin 2t, z = \sin 2t$
   c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1$ e) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - z = 1$
   f) $x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi, z = a\sin\theta$
   g) $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & z^2 \\ y^2 & = & ax \end{array}\right.$ h) $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & a^2 \\ x + y + z & = & 0 \end{array}\right.$
   Tìm phương trình đường thẳng hay mặt phẳng tiếp xúc cho các đa tạp trên.

6. Kiểm tra các phương trình và bất phương trình sau xác định đa tạp có bờ trong $\mathbf{R}^3$:
   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ b) $x^2 + y^2 \leq a^2, x + y + z = 0$
   c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x + z = 0$ d) $z^2 \leq y^2 + x^2, z = a$.

7. Chứng minh trong $\mathbf{R}^3$, mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ không thể cho bởi một tham số hoá, nhưng có thể cho bởi hai tham số hoá.

8. Xác định phương trình của không gian tiếp xúc tại $(x_0, f(x_0))$ cho đa tạp ở bài tập 1.

9. Phác họa các mặt, rồi xác định các đường cong tọa độ, vector pháp, không gian tiếp xúc của các mặt cho bởi tham số hoá::
a) $\varphi(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$. (mặt Helicoid).
b) $\varphi(t,\theta) = ((1+t\cos\frac{\theta}{2})\cos\theta, (1+t\cos\frac{\theta}{2})\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}),\ |t| < \dfrac{1}{4}, \theta \in (0, 2\pi)$.
(lá M̊obius)

10. Xét đa tạp M cho ở bài tập 2. Gọi $F = (F_1, \cdots, F_m)$.
a) Chứng minh khi đó không gian tiếp xúc của M là

$$T_xM = \ker F'(x) = \{v \in \mathbf{R}^n : < \mathrm{grad}\, F_1(x), v >= \cdots =< \mathrm{grad}\, F_m(x), v >= 0\ \}.$$

b) Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Chứng minh nếu f đạt cực trị với điều kiện $x \in M = \{x : g(x) = 0\}$ tại a, thì tồn tại $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{R}$, sao cho

$$\mathrm{grad}\, f(a) = \lambda_1 \mathrm{grad}\, F_1(a) + \cdots + \lambda_m \mathrm{grad}\, F_m(a).$$

11. Xét cực trị hàm:
a) $f(x,y) = ax + by$, với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.
b) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, với điều kiện $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\ \ (a > b > c > 0)$.
d) $f(x,y,z) = xyz$, với các điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.
e) $f(x,y,z) = x + y + z$, với các điều kiện: $x^2 + y^2 = 2, x + z = 1$.

12. Xét cực trị các hàm:
a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, với điều kiện $x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 0$.
b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

13. Tìm thể tích lớn nhất của các hình hộp chữ nhật với điều kiện diện tích mặt là $10\mathrm{m}^2$.

14. Chứng minh trung bình hình học không lớn hơn trung bình số học, i.e.

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n), \qquad (a_1, \cdots, a_n > 0)$$

15. Chứng minh bất đẳng thức $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leq \dfrac{x^n + y^n}{2}$, $(x, y > 0, n \in \mathbf{N})$.
(HD: Xét cực trị $f(x,y) = \dfrac{x^n + y^n}{2}$, với điều kiện $x + y = s$).

16. Chứng minh bất đẳng thức H ̊older:

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n x_i^q)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{nếu } x_i, a_i > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ (p, q > 0).$$

Suy ra bất đẳng thức Milkovski:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q)^{\frac{1}{q}}$$

HD: $|a+x|^p=|a+x||a+x|^{\frac{p}{q}}\leq|a||a+x|^{\frac{1}{q}}+|x||a+x|^{\frac{p}{q}}$.

17. Chứng minh cực trị hàm $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$, với điều kiện $x^2+y^2=1$, đạt tại các vector riêng của ma trận $\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$.

18. Tổng quát bài tập trên. Cho A là ma trận thực, đối xứng cấp n. Định nghĩa $f(x)=<Ax,x>={}^txAx, x\in\mathbf{R}^n$. Chứng minh nếu $v\in\mathbf{R}^n,\|v\|=1$: $f(v)=\max\{f(x):\|x\|=1\}$, thì $Av=\lambda v$. Suy ra mọi matrận đối xứng đều có giá trị riêng thực.

19. Cho $u,v\in\mathbf{R}^3$. Chứng minh

$$\|u\times v\|=(\|u\|^2\|v\|^2-<u,v>)^{\frac{1}{2}}=\text{ diện tích hình bình hành tạo bởi } u,v$$

Suy ra các tọa độ của $u\times v$ theo các tọa độ của u,v.

20. Cho $h:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n, h(x)=\lambda x$, và P là hình bình hành k chiều trong $\mathbf{R}^n$. Tìm mối quan hệ giữa các thể tích k chiều $V_k(P)$ và $V_k(h(P))$.

21. Tính các tích phân đường:

a) $\int_C y^2dl$, C là cung cycloid $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leq t\leq 2\pi$.

b) $\int_C xdl$, C là phần đường loga có phương trình trong tọa độ cực: $r=a^{k\varphi}, r\leq a$.

c) $\int_C zdl$, C là cung xoắn $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\leq t\leq T$.

d) $\int_C x^2dl$, C là cung tròn $x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0$

(HD: Dựa vào tính đối xứng của các biến)

22. Tính các tích phân mặt:

a) $\int_S zdS$, S là mặt $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0<u<a, 0<v<2\pi$.

b) $\int_S zdS$, S là phần mặt nón $z=\sqrt{x^2+y^2}$ giới hạn bởi trụ $x^2+z^2\leq 2az$.

c) $\int_S (x+y+z)dS$, S là nửa mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0$.

23. Chứng minh công thức Poisson

$$\int_{x^2+y^2+z^2=1}f(ax+by+cz)dS=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

(HD: Dùng phép quay và để ý phép quay bảo toàn điện tích)

24. Tính độ dài các đường cong tham số hoá:
a) $\alpha(t) = (a\cos bt, a\sin bt, ct),\ t \in [0, h]$
b) $\alpha(t) = (t\cos bt, t\sin bt, ct),\ t \in [0, h]$

25. Cho $f : U \to \mathbf{R}$ là hàm khả vi trên tập mở $U \subset \mathbf{R}^n$. Chứng minh công thức tính thể tích n chiều

$$V_n(\mathrm{graphf}) = \int_{\mathrm{U}} \left(1 + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} (\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x_i}})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Áp dụng tính độ dài Ellip và diện tích mặt Ellipsoid.

26. Chứng minh công thức tính điện tích cho mặt tròn xoay ở bài tập 3:

$$S_\phi = 2\pi \int_a^b y(t)(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt$$

Áp dụng tính diện tích mặt Ellipsoid và mặt xuyến.

27. Viết công thức tính diện tích mặt nón cho ở bài tập 4. Nêu một ví dụ cụ thể.

III. Dạng vi phân.

1. Cho $(x, y) = f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Tính $f^*(dx),\ f^*(dy),\ f^*(dx \wedge dy)$.

2. Cho $(x, y, z) = f(r, \varphi, \theta) = (\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$. Tính

$f^*(dx),\ f^*(dy),\ f^*(dz),\ f^*(dx\wedge dy),\ f^*(dy\wedge dz),\ f^*(dz\wedge dx),\ f^*(dx\wedge dy\wedge dz)$.

3. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ v... $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ là các ánh xạ khả vi. Chứng minh $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

4. Cho $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ khả vi và rank $f'(x) < k$ với mọi $x \in \mathbf{R}^n$. Chứng minh khi đó $f^*\omega = 0$ với mọi $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^m)$.

5. Tính $d\omega$ các dạng vi phân trong trong $\mathbf{R}^3$ sau
a) $\omega = xdx + ydz$ b) $\omega = \sin xdx + ydy + e^{xy}dz$ c) $\omega = e^{xy}dx \wedge dz$
d) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

6. Tìm $(n-1)$-dạng vi phân ω trong $\mathbf{R}^n$ sao cho $d\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

7. Giả sử ω_1 v... ω_2 là các 1-dạng đóng. Chứng minh $\omega_1 \wedge \omega_2$ là dạng đóng.

8. Chứng minh dạng $\omega(x, y, z) = \dfrac{1}{r^3}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$,
với $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, là đóng nhưng không khớp trong $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$.

9. Cho dạng vi phân $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ trong cầu mở tâm a của $\mathbf{R}^n$. Giả sử ω đóng. Chứng minh để tìm hàm f sao cho $df = \omega$ có thể dùng các công thức sau:
   a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 a_i(a + t(x-a))dt \right) x_i$.
   b) $f(x) = \int_{\alpha_1}^{x_1} a_1(x_1, \cdots, x_n)dx_1 + \int_{\alpha_2}^{x_2} a_2(\alpha_1, x_2, \cdots, x_n)dx_2 + \cdots + \int_{\alpha_n}^{x_n} a_n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, x_n)dx_n$.
   trong đó $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$

10. Kiểm tra tính đóng của dạng ω, rồi tìm tích phân đầu khi
    a) $\omega = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ b) $\omega = (x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy$
    c) $\omega = e^x \cos y dx - e^x \sin y dy$ d) $\omega = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$
    e) $\omega = a(x)dx + b(y)dy + c(z)dz$, trong đó a, b, c là các hàm khả vi trên $\mathbf{R}$.
    f) $\omega = a(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy + zdz)$, trong đó a là hàm khả vi trên $\mathbf{R}$.

11. Xác định α để dạng vi phân sau là đóng, rồi tìm tích phân đầu
$$\omega = \frac{x^3 - 3xy^2}{(x^2+y^2)^\alpha}dx + \frac{3x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}dy.$$

12. Xác định hàm $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\varphi(0) = 0$, sao cho dạng sau là đóng
$$\omega = (1 + x^2)\varphi(x)dx - 2xy\varphi(x)dy - 3zdz.$$
    Tìm tích phân đầu.

IV. Tích phân dạng vi phân

1. Chứng minh một đường hay mặt liên thông định hướng được, thì có thể định đúng 2 hướng. Một đường hay mặt có d thành phần liên thông định hướng được, thì có thể định bao nhiêu hướng?

2. Nêu ví dụ đa tạp có bờ không định hướng được, nhưng bờ định hướng được.

3. Tính $\int_C ydx + zdy + xdz$, với C là đường xoắn $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$, định hướng $(a, 0, 0)$ đến $(a, 0, 2\pi b)$.

4. Tính $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, khi:
   a) C là đường tròn đơn vị định hướng ngược chiều kim đồng hồ.
   b) C đường cong kín không qua $(0, 0)$.