TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

GIÁO TRÌNH

CƠ HỌC

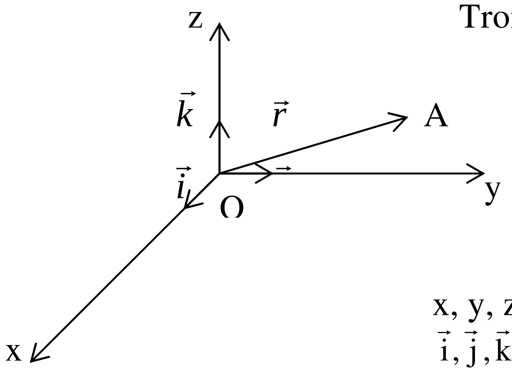
ĐOÀN TRỌNG THỨ

2002

MỤC LỤC

PHẦN I: TOÁN BỔ SUNG GIẢI TÍCH VECTOR

I. Hệ tọa độ Đề các (Descartes)



Trong hệ tọa độ Đề các, ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau.

Vector $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ có thể biểu diễn :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1)$$

Hay $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

x, y, z : thành phần của vector $\vec{r}$ trên ba trục;

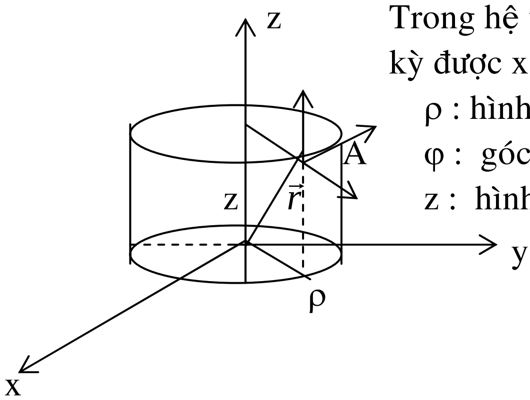
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: Các vector đơn vị.

Vậy có thể biểu diễn vector $\vec{r}$ dạng $\vec{r}$ (x,y,z).

Thể tích vi phân dv được tính :

$$dv = dx\, dy\, dz$$

II. Hệ tọa độ trụ



Trong hệ tọa độ trụ, vị trí của điểm A bất kỳ được xác định bởi ba tọa độ ρ, φ, z.

ρ : hình chiếu của $\vec{r}$ trên mặt phẳng xOy.

φ : góc giữa Ox và ρ.

z : hình chiếu của $\vec{r}$ trên trục Oz.

Vậy, vector bán kính $\vec{r}$ của điểm có thể được viết dưới dạng :

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \qquad (2)$$

Biết ba tọa độ trụ của một điểm ta có thể xác định được ba tọa độ Đề các của điểm ấy bằng phép biến đổi :

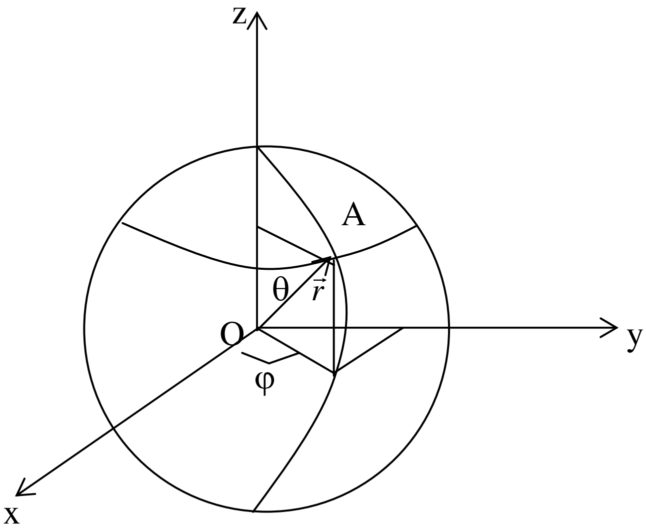
$$\overrightarrow{OA} = A_\rho\vec{e}_\rho + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \qquad (4)$$

$ds = \rho\, d\varphi\, dz$: diện tích vi phân

$dv = ds.\, d\rho = \rho\, d\varphi dz d\rho$: Thể tích vi phân.

III. Hệ tọa độ cầu



Trong hệ tọa độ cầu, vị trí của điểm A bất kỳ được xác định bằng tọa độ r, θ, φ.

Trong đó :

r : độ dài của vector bán kính $\vec{r}$

θ : góc giữa Oz và $\vec{r}$

φ : định nghĩa như trong hệ tọa độ trụ.

Các vector đơn vị trong hệ tọa độ cầu là : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ và $\vec{e}_\varphi$.

Trong đó :

$\vec{e}_r$: Vector đơn vị dọc theo trục $\vec{r}$.

$\vec{e}_\theta$: Vector đơn vị nằm trong mặt phẳng kinh tuyến đi qua A và vuông góc với $\vec{e}_r$, có chiều theo chiều tăng của θ.

$\vec{e}_\varphi$: Vector đơn vị được định nghĩa như trong hệ tọa độ trụ. Vậy, vector bán kính của điểm A có dạng : $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ (5)

Ta có sự liên hệ giữa ba tọa độ cầu với ba tọa độ Đề các của một điểm như sau :

$$\overrightarrow{OA} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi \qquad (6)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad (7) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi = arctg\dfrac{y}{x} \end{cases} \quad (8)$$

$$dS = r\sin\theta\, d\varphi r d\theta = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi r^2$$

$$dV = r^2\sin\theta d\theta d\varphi dz \Rightarrow \qquad V = \int_0^{r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Nhận xét :

1. Tùy theo tính chất của chuyển động, ta có thể chọn hệ tọa độ thích hợp để mô tả chuyển động. Thông thường, nếu chất điểm chuyển động theo một đường thẳng ta chọn hệ tọa độ Đề các, nếu chất điểm chuyển động quanh một trục ta chọn hệ tọa độ trụ, còn nếu chất điểm chuyển động quanh 1 tâm ta chọn hệ tọa độ cầu.

2. Trường hợp chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng ta thường xét trong mặt phẳng z = 0. Khi đó hệ tọa độ Đề các có 2 tọa độ x và y, còn các hệ tọa độ trụ và cầu suy biến thành hệ tọa độ cực, tức hệ có hai tọa độ là r và φ.

3. Các hệ tọa độ Đề các, trụ và cầu đều là các hệ tọa độ trực giao. Các vector đơn vị dọc theo các trục đều vuông góc với nhau từng đôi một.

IV. Các phép tính vector

IV.1. Phân tích một vector ra các thành phần trực giao

Thường một vector được xác định đối với một hệ tọa đo. Một vector có thể được phân tích ra các thành phần theo các biến số không gian của hệ tọa độ tương thích để tiện việc phân giải. Các hệ tọa độ thường dùng là hệ tọa độ Đề các, hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu.

Một vector $\vec{A}$ có thể viết dạng :

$$\vec{A} = A\vec{u}$$

$\vec{u}$ gọi là vector đơn vị trong hệ tọa độ Đề các Oxyz, $\vec{u}$ song song và cùng chiều $\vec{A}$ và $|\vec{u}| = 1$.

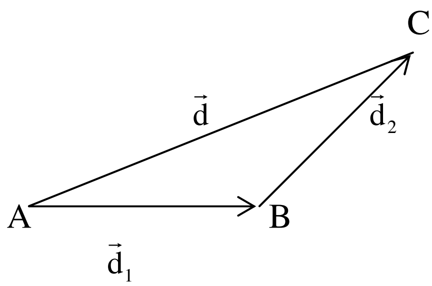
Các vector đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ hướng dọc theo 3 trục Ox, Oy, Oz. Có thể phân tích :

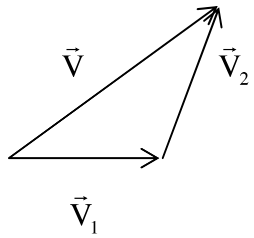
$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

IV.2. Phép cộng vector

Để xác định phép cộng vector, ta xét trường hợp dịch chuyển như sau :





Nếu một chất điểm đi từ A đến B được biểu diễn bởi $\vec{d}_1$ và sau đó chất điểm đi từ B $\rightarrow$ C được biểu diễn bởi $\vec{d}_2$. Vậy có thể xem điểm đã dịch chuyển một khoảng $\vec{d}$ để đi từ A $\rightarrow$ C. Có thể viết $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$.

Phép cộng vector có tính giao hoán :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

Ta có : $AC^2 = AD^2 + DC^2$

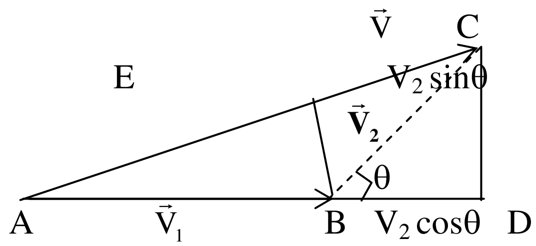
$$AD = AB + BD = V_1 + V_2 \cos\theta$$

Do vậy :

$$V^2 = (V_1 + V_2 \cos\theta)^2 + (V_2 \sin\theta)^2$$

$$= V_1^{\ 1} + V_2^{\ 2} + 2\, V_1 V_2 \cos\theta$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 V_1 V_2 \cos\theta} \qquad (8)$$



* Đặc biệt : $\vec{V}_1$ và $\vec{V}_2$ thẳng góc nhau $\rightarrow$ $\theta = \pi/2$

Khi đó : $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$

IV.3. Hiệu hai vector

Ta xem :

$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2)$$
$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2\,V_1\,V_2\cos(\pi - \theta)} \qquad (9)$$
$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2\,V_1V_2\cos\theta}$$

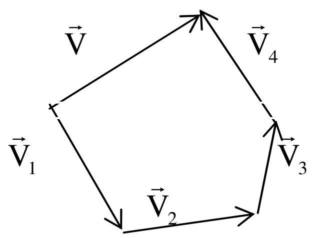
Phép trừ vector không có tính chất giao hoán.

IV.4. Cộng nhiều vector

Ta mở rộng cho trường hợp cộng hai vector $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \,.....$, dễ thấy rằng dùng phép tịnh tiến ta lần lượt sắp xếp sao cho mũi của vector này trùng với điểm đầu của vector kế tiếp, vector tổng sẽ là đoạn thẳng nối liền điểm đầu của vector đầu tiên đến điểm mũi của vector cuối cùng.

Đối với hình bên ta có :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$$



Xét vector tổng trong mặt phẳng xOy ta có :

$$\vec{V} = (V_{1x}\vec{i} + V_{1y}\vec{j}) + (V_{2x}\vec{i} + V_{2y}\vec{j}) + \ldots$$
$$= (V_{1x} + V_{1y} + \ldots)\vec{i} + (V_{2x} + V_{2y} + \ldots)\vec{j}$$
$$= V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

Trong đó : $V_x = V_{1x} + V_{2x} + \ldots = \sum_i V_{ix} = \sum_i V_i\cos\alpha_i$

$V_y = V_{1y} + V_{2y} + \ldots = \sum_i V_{iy} = \sum_i V_i\sin\alpha_i$

α_i là góc hợp bởi $\vec{V}_i$ và trục Ox.

$V_i\cos\alpha_I$, $V_i\sin\alpha_i$ lần lượt là thành phần của $\vec{V}_i$ theo hai trục Ox và Oy.

IV.5.Tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vector $\vec{A}$ và $\vec{B}$ kí hiệu $\vec{A}.\vec{B}$ (đọc là $\vec{A}$ chấm $\vec{B}$) được xác định là một số vô hướng như sau :

$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos\theta$ với θ là góc hợp bởi $(\vec{A}\,,\vec{B})$ (10)

Với định nghĩa trên chúng ta dễ dàng suy ra một số tính chất sau : Với

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \\ \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{A}.\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Nếu $\vec{A} \perp \vec{B}$ thì $\vec{A}.\vec{B} = 0$

Tích vô hướng có tính chất giao hoán : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

Tích vô hướng có tính chất phân phối : $\vec{A}.\left(\vec{B}.\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

Các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có tính chất :

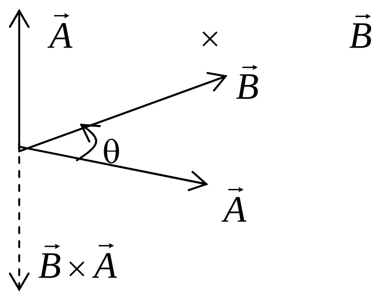
$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

IV.6. Tích vector

Cho hai vector $\vec{A}$ và $\vec{B}$. Tích vector $\vec{A}$ và $\vec{B}$ kí hiệu $\vec{A} \times \vec{B}$ (đọc $\vec{A}$ nhân $\vec{B}$) được xác định là một vector thẳng góc với mặt phẳng chứa $\vec{A}$ và $\vec{B}$, có chiều tuân theo qui tắc "vặn nút chai " và có độ lớn :

$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = A.B.\sin\theta$, θ : góc hợp bởi ($\vec{A}$, $\vec{B}$) (11)



Từ định nghĩa trên ta có các tính chất sau :

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \; ; \; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \; ; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Cho hai vector :

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

Hay $$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

IV.7. Vi phân vector

Cho hàm số vector $\vec{f}(s)$, tức vector $\vec{f}$ phụ thuộc vào biến số s.

$$\frac{d\vec{f}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{f}(s+ds)-\vec{f}(s)}{\Delta s} \quad : \text{ đạo hàm vector } \vec{f} \qquad (12)$$

Ta có một số tính chất sau :

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{A}\pm\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{ds}\pm\frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{ds}.\vec{B}+\frac{d\vec{B}}{ds}.\vec{A}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{ds}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\Phi\vec{A}\right)=\frac{d\Phi}{ds}\vec{A}+\Phi\frac{d\vec{A}}{ds} \qquad \text{(với } \phi \text{ vô hướng)}$$

Đạo hàm riêng phần : Cho $\vec{A}(x,y,z)$. Vi phân của $\vec{A}$ theo một biến số gọi là đạo hàm riêng phần :

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{A}(x+\Delta x,y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (13)$$

Tính chất : vi phân riêng phần có các tính chất giống vi phân vector nói trên.

V. Các toán tử đặc biệt thường dùng trong vật lý

V.1. Gradient

Cho một hàm vô hướng U(x, y, z), gradient của U được kí hiệu là gradU≡∇U, với :

$$\nabla U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (14)$$

V.2. Divergence

Cho hàm số vector $\vec{A}(x,y,z)$, divergence của $\vec{A}$ kí hiệu là $\mathrm{Div}\vec{A}\equiv\nabla\vec{A}$, với :

$$\nabla\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Trong đó $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ (15)

V.3. Rotationel (Curl)

Cho hàm số vector $\vec{A}(x,y,z)$, Curl của $\vec{A}$ kí hiệu là $\mathrm{Rot}\vec{A}\equiv\nabla\times\vec{A}$, với :

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (16)$$

PHẦN II: CƠ HỌC
CHƯƠNG I:ĐỘNG HỌC

1.1 Khái niệm

Trong chương này, mục tiêu là nghiên cứu sự chuyển động của vật thể dưới hình thức động học chất điểm, chúng ta chỉ giới hạn việc mô tả chuyển động mà chưa đề cập đến nguyên nhân gây ra chuyển động. Ta xét một vài khái niệm cơ bản :

1.1.1- Chuyển động cơ học

Chuyển động cơ học là sự thay đổi vị trí của vật này đối với vật khác hoặc của phần này đối với phần khác của cùng một vật.

Chuyển động của một vật có tính chất tương đối, khi nói đến chuyển động của một vật nào đó phải xem nó chuyển động đối với vật nào. Khi đó chuyển động của vật được xem là sự thay đổi tọa độ không gian theo thời gian so với vật được qui ước đứng yên. Khái niệm đứng yên cũng chỉ có tính chất tương đối, cho đến nay người ta chưa tìm được vật nào đứng yên tuyệt đối cả. Ngay mặt trời cũng chuyển động xung quanh tâm thiên hà của chúng ta và thiên hà này cũng chuyển động tương đối so với các thiên hà khác trong vũ trụ bao la.

1.1.2 Hệ qui chiếu

Chuyển động cơ học có tính chất tương đối, vậy khi xét chuyển động của một chất điểm cần xác định rõ điểm ấy chuyển động so với những vật nào được xem là đứng yên.

Hệ vật mà ta qui ước là đứng yên và dùng làm mốc để khảo sát, xác định vị trí của điểm chuyển động được gọi là hệ qui chiếu.

Khi khảo sát chuyển động ta có thể chọn hệ qui chiếu này hay hệ qui chiếu khác. Cần chọn hệ qui chiếu thích hợp sao cho việc mô tả và nghiên cứu tính chất chuyển động được đơn giản nhất.

Để mô tả chuyển động trong phạm vi không lớn trên bề mặt quả đất, thường ta chọn hệ quy chiếu là quả đất hay một hệ vật nào đó không chuyển động đối với trái đất. Ví dụ, để nghiên cứu chuyển động của một quả đạn pháo, có thể chọn hệ qui chiếu là mặt đất hay chính là khẩu pháo.

Trái đất chuyển động chung quanh mặt trời, do vậy trong một số trường hợp khi nghiên cứu các chuyển động trong thái dương hệ, tâm mặt trời được chọn là hệ qui chiếu. Đầu thế kỷ 17, nhờ sử dụng hệ qui chiếu mặt trời (hệ qui chiếu Copernic), Kepler mới tìm được qui luật đúng đắn mô tả chuyển động của của các hành tinh trong Thái dương hệ. Mặc dù được mô tả khác nhau trong các hệ qui chiếu khác nhau, nhưng nếu biết chuyển động tương đối của các hệ qui chiếu, có thể từ cách mô tả chuyển động đối với hệ qui chiếu này suy ra cách mô tả chuyển động đối với hệ qui chiếu khác. Ví dụ, biết chuyển động tròn của một điểm trên vành xe đạp đối với xe đạp, biết chuyển động của xe đạp đối với mặt đường, có thể xác định được chuyển động của một điểm trên vành xe đạp đối với mặt đường.

Trong cơ học, khi nghiên cứu chuyển động của vật thể đơn giản, nhiều lúc có thể bỏ qua ảnh hưởng do kích thước, hình dạng của vật và lực cản của môi trường. Lúc đó xem vật như là một chất điểm. Trong thực tế, tùy trường hợp cụ thể mà ta có thể xem vật là chất điểm hoặc cố thể.

Hệ qui chiếu chuyển động thẳng, đều gọi là hệ qui chiếu quán tính.

1.1.3 Không gian và thời gian

Khi chất điểm chuyển động thì vị trí tương đối của nó sẽ thay đổi trong không gian theo thời gian.

Thời gian trong cơ học cổ điển được xem là trôi đều đặn từ quá khứ đến tương lai, đồng nhất và không quan hệ đến chuyển động của vật chất. Không gian cũng được xem là trống rỗng, đồng nhất, đẳng hướng, có 3 chiều và tuân theo hình học Eudide, không liên quan đến chuyển của vật chất. Vật lý học hiện đại chỉ ra rằng thời gian và không gian là hai phạm trù vật chất liên quan nhau và chịu ảnh hưởng bởi chuyển động của vật chất. Tuy nhiên, khi nghiên cứu chuyển động của những vật vĩ mô với vận tốc rất bé so với vận tốc ánh sáng, các quan niệm của cơ học cổ điển được xem là gần đúng và có thể sử dụng để mô tả chuyển động. Lúc đó có thể xem các độ dài và khoảng thời gian là như nhau trong mọi phép đo.

1.2 Phương trình chuyển động và Phương trình quỹ đạo

1.2.1 Phương trình chuyển động

Trong chuyển động cơ học, vị trí của một chất điểm sẽ được xác định hoàn toàn nếu ta biết 3 giá trị về số đo của tọa độ. Vậy để xác định chuyển động của một chất điểm, ta cần biết vị trí của điểm ấy tại những thời điểm khác nhau, tức cần biết vector bán kính của chất điểm là hàm của thời gian :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.1)$$

Phương trình trên biểu diễn vị trí của chất điểm theo thời gian và gọi là phương trình chuyển động của chất điểm. Vậy, trong hệ tọa độ Đềcac ta có :

$$x = x(t) \;;\quad y = y(t) \;;\quad z = z(t) \qquad (1.2)$$

Tương tự trong hệ tọa độ trụ ta có :

$$\rho = \rho(t) \;;\quad \varphi = \varphi(t) \;;\quad z = z(t) \qquad (1.3)$$

Trong hệ tọa độ cầu ta có :

$$r = r(t) \;;\quad \theta = \theta(t) \;;\quad \varphi = \varphi(t) \qquad (1.4)$$

Ở mỗi thời điểm t, chất điểm có một vị trí xác định và khi t biến thiên thì chất điểm chuyển động một cách liên tục, vậy hàm $\vec{r}(t)$ là những hàm xác định, đơn trị và liên tục của t.

1.2..2 Phương trình quĩ đạo

Khi chuyển động vị trí của chất điểm luôn luôn thay đổi, vạch thành một đường liên tục trong không gian, đó là quĩ đạo của chất điểm chuyển động. Hay có thể xem quĩ đạo của chất điểm chuyển động là đường tạo bởi tập hợp tất cả các vị trí của nó trong không gian trong suốt quá trình chuyển động.

Biết hệ phương trình chuyển động có thể suy ra được phương trình quĩ đạo bằng cách khử t khỏi các phương trình đó. Chẳng hạn, trong hệ tọa độ Đềcac, khử t khỏi hệ phương trình (1.2) ta được :

$$f_1(x,y) = 0\ ; \quad f_2(y,z) = 0$$

$f_1(x,y) = 0$ là phương trình đường cong C_1 nào đó trong mặt phẳng (xOy), $f_2(y,z) = 0$ là phương trình đường cong C_2 nào đó trong mặt phẳng (yOz).

Vậy hệ phương trình mô tả quĩ đạo chuyển động của chất điểm gồm hai phương trình vô hướng độc lập, mỗi phương trình mô tả một mặt cong trong không gian. Quĩ đạo của chất điểm chính là đường cắt của hai mặt cong đó.

Trong các hệ tọa độ khác nhau, các phương trình quĩ đạo nói chung có dạng khác nhau, nhưng chúng cùng mô tả một quĩ đạo xác định.

Quĩ đạo là một trong những đặc trưng cơ bản của chuyển động. Tuy nhiên, trên cùng một quĩ đạo, chất điểm có thể chuyển động theo những qui luật khác nhau. Vì vậy, ngoài phương trình quĩ đạo chúng ta cần phải biết qui luật chuyển động của chất điểm trên quĩ đạo đó.

1.3 Vận tốc

1.3.1 Định nghĩa vận tốc

Ngoài vị trí, chuyển động của chất điểm còn được đặc trưng bằng vận tốc của nó. Để đặc trưng cho cả phương, chiều và độ nhanh chậm của chuyển động chất điểm, người ta đưa vào một vector gọi là vector vận tốc.

Trong chuyển động thẳng đều vận tốc được xác định bằng tỉ số giữa quãng đường dịch chuyển của chất điểm và khoảng thời gian mà chất điểm dịch chuyển hết quãng đường đó. Trong chuyển động thẳng không đều, vật chuyển động lúc nhanh lúc chậm và ở mỗi thời điểm chuyển động được đặc trưng bằng một vận tốc khác nhau.

*- Xét chuyển động của một chất điểm trên đường cong c :

Ta chọn một điểm O trên đường c làm gốc và chọn chiều dương là chiều chuyển động của chất điểm. Giả sử ở thời điểm t, chất điểm ở vị trí M xác định bởi hoành độ cong s(t), ở thời điểm $t + \Delta t$ chất điểm ở vị trí M' tương ứng với $s + \Delta s$. Vậy trong khoảng Δt chất điểm dịch chuyển được một quãng đường Δs.

Quãng đường trung bình chất điểm dịch chuyển được trong một đơn vị thời gian được định nghĩa là vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng Δt : $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Xét trường hợp hạt chỉ dịch chuyển theo phương Ox. Nếu trong khoảng thời gian vô cùng bé dt hạt dịch chuyển được một đoạn đường vô cùng bé dx thì trong khoảng thời gian ấy chuyển động có thể xem là đều và có thể xem vận tốc tại thời điểm t là :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Vậy vận tốc bằng đạo hàm của tọa độ theo thời gian và nói chung là hàm của thời gian $v = v(t)$.

Biết biểu thức vận tốc, có thể xác định được quãng đường đi của hạt trong khoảng thời gian cho trước. Nếu chọn gốc tọa độ tại x = 0 là vị trí của hạt ở thời điểm t=0 thì vị trí của hạt ở thời điểm t được xác định như sau :

$$dx = vdt \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t v(t)dt$$

Trong trường hợp tổng quát, khi chuyển động không đều và có phương thay đổi thì vận tốc của hạt được định nghĩa là một vector, bằng tỉ số của vector độ dời $d\vec{s}$ chia cho khoảng thời gian vô cùng bé dt để hạt đi được độ dời ấy. Gọi vector $\vec{v}$ là vector vận tốc, ta có :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

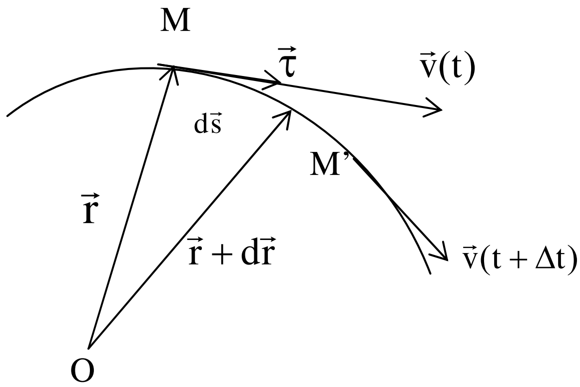
Nếu chọn tại thời điểm t = 0 chất điểm ở gốc 0 (s = 0), thì vị trí của chất điểm ở thời điểm t được xác định :

$$s = \int_0^t v(t)\,dt$$

Xét cả phương, chiều ta có :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Chiều của vector $\vec{v}$ trùng với vector độ dời $d\vec{s}$, tức ở mỗi thời điểm, vận tốc hướng theo phương tiếp tuyến với quĩ đạo và theo chiều chuyển động của hạt.



Hình 1.1

Vector vận tốc tại một vị trí M là một vector $\vec{v}$ có phương nằm trên tiếp tuyến với quĩ đạo tại M, có chiều theo chiều chuyển động và có giá trị bằng trị tuyệt đối của v.

Gọi $\vec{\tau}$ là vector đơn vị, tiếp tuyến với quĩ đạo tại điểm M và hướng theo chiều chuyển động của chất điểm, thì :

$$\vec{v} = v\vec{\tau} = \frac{d\vec{s}}{dt} \qquad (1.5)$$

Vậy vector vận tốc là tỉ số giữa vector dịch chuyển vô cùng bé $d\vec{s}$ của chất điểm với khoảng thời gian vô cùng bé dt để chất điểm đi được độ dời ds.

Bây giờ lấy hai vị trí vô cùng gần nhau của hạt, ứng với các vector bán kính $\vec{r}$ và $\vec{r}+d\vec{r}$. Rõ ràng là vi phân của vector bán kính $d\vec{r}$ bằng độ dời vô cùng bé $d\vec{s}$ của hạt :

$$d\vec{r} = d\vec{s}$$

Vậy có thể viết biểu thức vận tốc :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Vậy, vận tốc của chất điểm tại một điểm nào đó bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vector bán kính tại điểm đó.

Thứ nguyên của vận tốc là LT^{-1} và đơn vị là (m/s).

1.3.2 Biểu thức của vận tốc trong các hệ tọa độ

a) Trong hệ tọa độ Đềcac :

Độ dịch chuyển vi phân của chất điểm :

$$d\vec{s} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{bmatrix}$$

Theo (1.5) ta có :

$$\vec{v}=\frac{d\vec{s}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{e}_x+\frac{dy}{dt}\vec{e}_y+\frac{dz}{dt}\vec{e}_z \qquad (1.6)$$

Gọi v_x, v_y, v_z là thành phần của $\vec{v}$ trên các trục tọa độ :

$$\vec{v}=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y+v_z\vec{e}_z$$

Vậy :

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$
$$v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}$$
$$v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}$$

Chất điểm chuyển động bất kì trong không gian có thể xem đồng thời tham gia ba chuyển động thẳng trên ba trục tọa độ Đềcac với các vận tốc tương ứng v_x, v_y, v_z.

Độ lớn vector vận tốc :

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \qquad (1.7)$$

v cho biết chất điểm chuyển động nhanh hay chậm, còn chiều của nó xác định chiều chuyển động của chất điểm trên quĩ đạo.

$$\cos(Ox,\vec{v})=\frac{v_x}{v}\ ,\ \cos(Oy,\vec{v})=\frac{v_y}{v}\ ,\ \cos(Oz,\vec{v})=\frac{v_z}{v} \qquad (1.8)$$

b) Trong hệ tọa độ trụ

$$d\vec{s}=d\rho\,\vec{e}_\rho+\rho d\varphi\,\vec{e}_\varphi+dz\,\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow\quad \vec{v}=\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho+\rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi+\frac{dz}{dt}\vec{e}_z \qquad (1.9)$$

Các thành phần của vector vận tốc trong hệ tọa độ trụ :

$$v_\rho=\frac{d\rho}{dt}=\dot{\rho}$$

$$v_\varphi=\frac{d\varphi}{dt}=\rho\dot{\varphi}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Dựa trên tính chất trực giao của hệ tọa độ trụ, ta dễ dàng suy ra giá trị của vector vận tốc :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \qquad (1.10)$$

c) Trong hệ tọa độ cầu

$$d\vec{s} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi \qquad (1.11)$$

Các thành phần của vector vận tốc trong hệ tọa độ cầu :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\,\dot{\theta}$$

$$v_\varphi = r\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt} = r\sin\theta\,\dot{\varphi}$$

Dựa trên tính trực giao của hệ tọa độ cầu, suy ra được giá trị của vector vận tốc :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\varphi^2} \qquad (1.12)$$

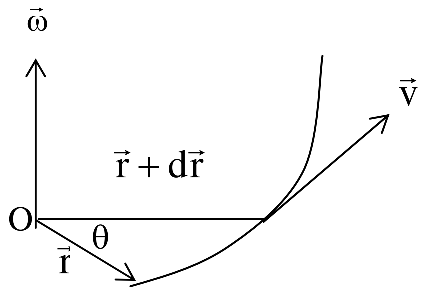
1.3.3 Vận tốc góc và vận tốc diện tích

a) Vận tốc góc

Trong phần trên chúng ta đã đưa vào các đại lượng đặc trưng cho sự thay đổi nhanh hay chậm của tọa độ góc theo thời gian là θ và φ, các đại lượng này được gọi là vận tốc góc. Để xác định được chiều của vận tốc góc, ta qui ước như sau :

Nếu vector bán kính $\vec{r}$ quay một góc θ theo chiều vặn đinh ốc thuận thì đinh ốc tiến theo chiều của vector vận tốc góc $\vec{\omega}$. Gọi $\vec{n}$ là vector đơn vị dọc theo $\vec{\omega}$, ta có :

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n} = \dot{\theta}\,\vec{n} \qquad (1.13)$$



Hình 1.2

Lúc đó vector vận tốc góc $\vec{\omega}$, vector bán kính $\vec{r}$ và vector vận tốc $\vec{v}$ của chất điểm chuyển động tạo thành một tam diện thuận, ta có hệ thức :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1.14)$$

b) Vận tốc diện tích

Vận tốc diện tích là một đại lượng có giá trị bằng diện tích mà bán kính vector quét được trong một đơn vị thời gian và có chiều cùng chiều với vận tốc góc :

$$\vec{v}_s = \frac{dS}{dt}\vec{n} \qquad (1.15)$$

Từ hình (1.2) ta có :

$$dS = \frac{1}{2}(r + dr)r\sin(\theta)$$

Bỏ qua các số hạng vô cùng bé bậc hai ta được :

$$dS = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

Vậy :

$$\vec{v}_s = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{n} = \frac{1}{2}r^2\,\dot{\theta}\vec{n}$$

$$\vec{v}_s = \frac{1}{2}r^2\,\vec{\omega}$$

Công thức trên có thể viết dưới dạng :

$$\vec{v}_s = \frac{1}{2}\vec{r} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

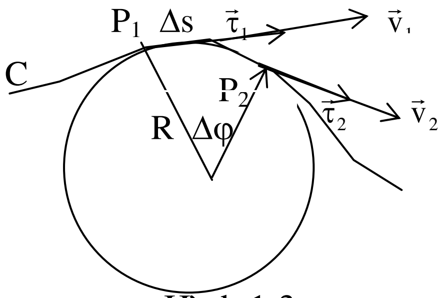
Kết hợp các công thức ta có :

$$\vec{v}_s = \frac{1}{2}\left[\vec{r} \times \vec{v}\right] \qquad (1.16)$$

1.4 Gia tốc

1.4.1 Độ cong và bán kính chính khúc

Xét chất điểm chuyển động trên đường cong C. Giả sử ở thời điểm t_1 chất điểm ở P_1. Sau đó, ở thời điểm $t_2 = t_1 + \Delta t$ chất điểm ở P_2. Xem $\overparen{P_1P_2}$ là một cung bé bất kì của C. Qua P_1, P_2 và một điểm bất kỳ P trên cung đó ta vẽ một vòng tròn thì cung $\overparen{P_1P_2}$ có thể xem gần đúng là một cung của vòng tròn ấy và càng đúng nếu P_1 và P_2 càng gần nhau, tức khi $\overparen{P_1P_2}$ càng bé. Qua hình vẽ ta thấy với cùng độ dài Δs, góc Δφ sẽ lớn khi đoạn Δs càng cong. Người ta định nghĩa độ cong trung bình $\overline{K}$ như sau :



Hình 1.3

$$\overline{K} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \qquad (1.17)$$

Khi P_2 tiến đến P_1 thì $\overline{K}$ đạt đến giá trị giới hạn gọi là độ cong của quĩ đạo.

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Lúc đó vòng tròn trên đến một vị trí giới hạn gọi là đường tròn mật tiếp với đường cong c tại P_1. Gọi R là bán kính của đường tròn mật tiếp ấy thì :

$$ds = R\, d\varphi$$

Vậy :

$$K = \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} \qquad (1.18)$$

Độ cong của quĩ đạo tại một điểm được xác định bởi nghịch đảo của bán kính vòng tròn mật tiếp tại điểm ấy.

Mặt phẳng chứa đường tròn mật tiếp với đường cong gọi là mặt phẳng mật tiếp với đường cong tại điểm tương ứng. Pháp tuyến với đường cong tại điểm ấy và nằm trong mặt phẳng mật tiếp được gọi là pháp tuyến chính và bán kính của đường tròn mật tiếp tương ứng gọi là bán kính chính khúc tại điểm đã cho.

1.4.2 Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến

Nói chung, vận tốc của một hạt luôn luôn biến đổi cả về độ lớn lẫn phương chiều. Đại lượng đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc theo thời gian gọi là gia tốc và được xác định bằng đạo hàm của vận tốc theo thời gian.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.19)$$

Vậy gia tốc của hạt bằng độ biến thiên của vận tốc trong một đơn vị thời gian.

Ta có : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}$

Nếu gọi $\vec{\tau}$ là vector đơn vị dọc theo phương tiếp tuyến của quĩ đạo chuyển động thì : $\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\,\vec{\tau}$ (1.20)

Thay (1.20) vào (1.19) ta có :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \qquad (1.21)$$

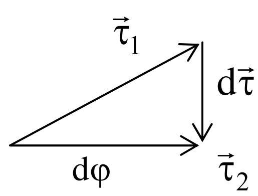
Ta có : $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{ds}{dt}$ (1.22)

Trong đó $\dfrac{ds}{dt} = v$ là vận tốc của hạt, $\dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{1}{R}$ với R là bán kính chính khúc của quĩ đạo tại điểm đang xét.

Vậy : $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{v}{R}\dfrac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$ (1.23)

Ta xác định phương, chiều và độ lớn của $\dfrac{d\vec{\tau}}{d\varphi}$. Gọi $\vec{\tau}_1$ và $\vec{\tau}_2$ là hai vector tiếp tuyến đơn vị ở rất gần nhau, ta có $d\vec{\tau} = \vec{\tau}(s+ds) - \vec{\tau}(s) = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$. Ta tịnh tiến $\vec{\tau}_1$ lại gần $\vec{\tau}_2$ sao cho chúng có chung một gốc.

Vì $d\vec{\tau}$ là vector vô cùng bé và $|\vec{\tau}_1| = |\vec{\tau}_2| = |\vec{\tau}| = 1$ nên ta có :



Hình 1.4

$$|d\vec{\tau}| = d\varphi \qquad (1.24)$$

Mặt khác vì bình phương vector $\vec{\tau}\,\vec{\tau} = (\vec{\tau})^2 = 1$ nên :

$$d(\vec{\tau})^2 = 2\,\vec{\tau}\,d\vec{\tau} = 0 \qquad (1.25)$$

Hệ thức trên chứng tỏ vector $d\vec{\tau}$ vuông góc với $\vec{\tau}$. Nếu gọi $\vec{n}$ là vector đơn vị vuông góc với tiếp tuyến và hướng vào tâm của đường tròn mật tiếp dọc theo bán kính chính khúc của quĩ đạo, ta có thể viết :

$$d\vec{\tau} = \vec{n}\,d\varphi \qquad (1.26)$$

Kết hợp công thức trên với (1.21) và (1.23) ta được :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \qquad (1.27)$$

Trong công thức trên thành phần :

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \qquad (1.28)$$

hướng theo tiếp tuyến gọi là gia tốc tiếp tuyến, còn thành phần :

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} \qquad (1.29)$$

hướng về tâm chính khúc của đường cong và vuông góc với phương của vector vận tốc, gọi là gia tốc pháp tuyến.

Vậy gia tốc $\vec{a}$ được phân tích thành hai thành phần :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (1.30)$$

Gia tốc tiếp tuyến $\vec{a}_\tau$ có thể âm hoặc dương tùy thuộc vào hướng của vector gia tốc. Nếu v = const thì gia tốc tiếp tuyến bằng không và ta có chuyển động đều. Nếu v tăng dần theo thời gian thì gia tốc tiếp tuyến lớn hơn 0 và $\vec{a}_\tau$ cùng hướng vector vận tốc. Nếu v giảm dần theo thời gian thì gia tốc tiếp tuyến âm và hướng ngược chiều vector vận tốc, chuyển động của chất điểm trong trường hợp này là chuyển động chậm dần. Vậy, gia tốc tiếp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi về độ lớn của vector vận tốc.

Gia tốc pháp tuyến $\vec{a}_n$ bao giờ cũng hướng về phía lõm của quĩ đạo, về phía tâm của vòng tròn mật tiếp tại điểm đang xét. Gia tốc pháp tuyến đặc trưng cho sự thay đổi về phương của vector vận tốc.

Trong trường hợp riêng là chuyển động thẳng, bán kính chính khúc R=∞, vậy $|\vec{a}_n| = 0$ và vector gia tốc chỉ còn một thành phần là $\vec{a}_\tau$ và hướng dọc theo phương của chuyển động thẳng. Khi hạt chuyển động tròn đều, độ lớn của vận tốc không đổi, gia tốc tiếp tuyến bằng không, gia tốc pháp tuyến sẽ có độ lớn không đổi, tỷ lệ nghịch với R và luôn luôn hướng vào tâm đường tròn. Vì vậy gia tốc pháp tuyến trong chuyển động tròn còn gọi là gia tốc hướng tâm.

1.5 Các dạng chuyển động đơn giản

1.5.1 Chuyển động thẳng

Quĩ đạo của hạt là một đường thẳng, vậy phương của $\vec{v}$ không thay đổi và $\vec{a}_n$ luôn bằng không. Ta có :

$$a_n = 0 \quad ; \quad a_\tau = a = \frac{dv}{dt}$$

Khi a > 0 chất điểm chuyển động thẳng nhanh dần, khi a < 0 chất điểm chuyển động chậm dần và khi $a = a_o$ = const chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều.

Trường hợp chuyển động thẳng biến đổi đều, ta có :

$$v = \int dv = \int a\,dt = at + C_1$$

$$s = \int ds = \int v\,dt = \int (at + C_1)dt = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2$$

Trong đó C_1 và C_2 là những hằng số tích phân được xác định từ điều kiện đầu.

Giả sử khi t = 0 thì $v = v_o = C_1$, $s = s_o = C_2$. Vậy :

$$v = v_o + at \qquad (1.31)$$

$$s = s_o + \frac{1}{2}at^2 + v_o t \qquad (1.32)$$

Khử t ta có hệ thức :

$$v^2 - v_o^2 = 2a(s - s_o) \qquad (1.33)$$

Nếu chọn gốc tọa độ lúc t = 0 có $s = s_o = 0$ thì :

$$v^2 - v_o^2 = 2as \qquad (1.34)$$

Khi a = 0, chất điểm chuyển động thẳng đều.

1.5.2 Chuyển động biến đổi đều

Trong chuyển động biến đổi đều, gia tốc tiếp tuyến a_τ luôn luôn có giá trị không thay đổi :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = a_o = \text{const} \qquad (1.35)$$

Chuyển động biến đổi đều có thể là chuyển động thẳng hay chuyển động cong bất kỳ, tức a_n có thể bằng không hoặt khác không.

Khi $a_\tau > 0$ chất điểm chuyển động nhanh dần đều.

Khi $a_\tau < 0$ chất điểm chuyển động chậm dần đều.

Các phương trình chuyển động biến đổi đều của chất điểm có dạng :

$$v = \int dv = \int a_\tau\, dt = a_\tau\, t + C_1$$

$$s = \int ds = \int v(t)\, dt = \int (a_\tau\, t + C_1) dt = \frac{1}{2} a_\tau\, t^2 + C_1 t + C_2$$

Giả sử ở thời điểm t = 0 chất điểm ở vị trí s_0 và có vận tốc v_0. Khi đó ta có $C_1 = v_0$, $C_2 = s_0$. Vận tốc của chất điểm chuyển động biến đổi đều ở thời điểm t :

$$v = v_0 + a_\tau t \qquad (1.36)$$

Phương trình chuyển động biến đổi đều của chất điểm có dạng

$$s = s_0 + \frac{1}{2} a_\tau\, t^2 + v_0 t \qquad (1.37)$$

Từ đó ta suy ra :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_\tau (s - s_0) \qquad (1.38)$$

Nếu chọn gốc tọa độ lúc t = 0 có $s = s_0 = 0$ thì :

$$v^2 - v_0^2 = 2a_\tau\, s \qquad (1.39)$$

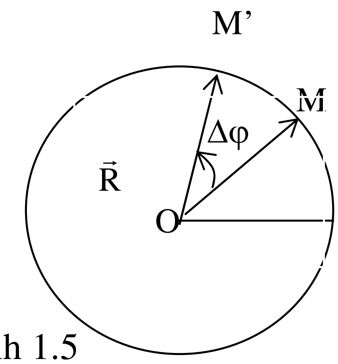
Khi $a_\tau = a_0$ = const, $a_n = \frac{v^2}{R}$ với R = const thì ta có chuyển động tròn biến đổi đều. Khi $a_\tau = 0$ thì chất điểm chuyển động tròn đều.

1.5.3 Chuyển động tròn

Xét một chất điểm chuyển động trên một đường tròn tâm O có bán kính R. Vị trí của chất điểm M trên đường tròn được xác định bởi bán kính vector $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$. Người ta thường dùng các đại lượng vận tốc góc và gia tốc góc để đặc trưng cho chuyển động ấy.

a) Vận tốc góc

Chuyển động của chất điểm M trên đường tròn được khảo sát như chuyển động quay của bán kính vector $\vec{R}$ xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn và qua tâm O. Trong khoảng $\Delta t = t' - t$ giả sử chất điểm đi được quãng đường $\Delta s = MM'$ ứng với góc quay $MOM' = \Delta\varphi$. Theo định nghĩa đại lượng $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ gọi là vận tốc góc trung bình trong khoảng Δt :



Hình 1.5

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1.40)$$

Giá trị của $\overline{\omega}$ biểu thị góc quay trung bình trong đơn vị thời gian. Nếu cho $\Delta t \to 0$ thì vận tốc góc của chất điểm tại thời điểm t là :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.41)$$

Vậy, vận tốc góc có giá trị bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của góc quay.

Đơn vị đo của ω là rad/s. Nói chung $\omega = \omega(t)$

Đối với chuyển động tròn đều thì ω = const, người ta định nghĩa chu kỳ là thời gian chất điểm đi được một vòng :

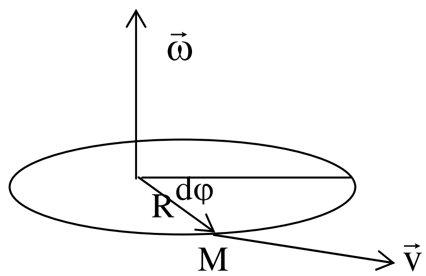
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{hay} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (1.42)$$

Tần số là số chu kì trong một đơn vị thời gian :

$$\gamma = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 2\pi\gamma \qquad (1.43)$$

Chuyển động quay được đặc trưng bằng trục quay, chiều quay và độ lớn của vận tốc góc.

Qui ước : Nếu bán kính vevtor $\vec{R}$ và $\vec{v}$ quay theo chiều vặn đinh ốc thuận thì đinh ốc tiến theo chiều $\vec{\omega}$.



Hình 1.6

Giả sử chất điểm dịch chuyển được cung ds trong khoảng dt, ta có :

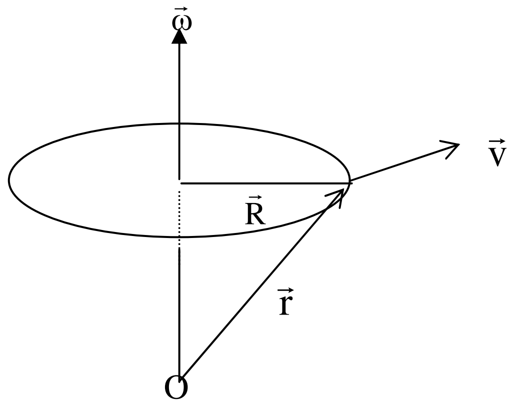
$$ds = R\,d\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega \qquad (1.44)$$

Vậy, từ định nghĩa tích hữu hướng của hai vector, ta có :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R} \qquad (1.45)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R.\omega^2 \qquad (1.46)$$



Hình 1.7

Khi gốc O của vector $\vec{R}$ trượt trên trục quay ta vẫn có :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (1.47)$$

b) Gia tốc góc

Để đặc trưng cho sự thay đổi của vector vận tốc góc, người ta đưa vào khái niệm gia tốc góc. Giả thiết trong khoảng thời gian $\Delta t = t' - t$ vận tốc góc của chuyển động tròn biến thiên một lượng $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Theo định nghĩa $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ gọi là gia tốc góc trung bình trong khoảng thời gian Δt và kí hiệu :

$$\overline{\beta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (1.48)$$

Nếu cho $\Delta t \to 0$ thì gia tốc góc của chất điểm tại thời điểm t là :

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad (1.49)$$

Vậy, gia tốc góc có giá trị bằng đạo hàm của vận tốc góc đối với thời gian và bằng đạo hàm bậc hai của góc quay đối với thời gian.

Đơn vị của gia tốc góc là rad/s^2.

Khi $\beta > 0$, ω tăng, chuyển động tròn nhanh dần.

$\beta < 0$, ω giảm, chuyển động tròn chậm dần

$\beta = 0$, ω = Const, chuyển động tròn đều.

Trường hợp β = Const, ta có chuyển động tròn biến đổi đều. Ta có thể chứng minh được các hệ thức :

$$\omega = \beta t + \omega_0 \qquad (1.50)$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \qquad (1.51)$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\varphi - \varphi_0) \qquad (1.52)$$

Nếu ta chọn gốc tọa độ khi t = 0 có $\varphi_0 = 0$ thì :

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta\,\varphi \qquad (1.53)$$

Thường người ta biểu diễn gia tốc góc bằng một vector gọi là vector gia tốc góc. Vector này có tính chất :

- Nằm trên trục của quĩ đạo tròn.
- Cùng chiều với $\vec{\omega}$ khi $\beta > 0$ (nhanh dần) và ngược chiều với $\vec{\omega}$ khi $\beta < 0$ (chậm dần).
- có giá trị bằng β.

Vậy có thể viết hệ thức vector sau :

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.54)$$

Vậy gia tốc góc bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vector vận tốc góc, xác định biến thiên vận tốc góc.

Lấy đạo hàm theo thời gian ta có :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}\times\frac{d\vec{R}}{dt}\right] \qquad (1.55)$$

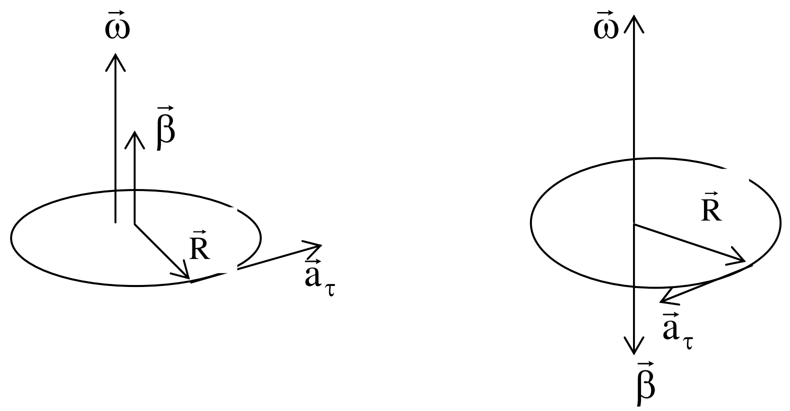
Ta có : $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$; $\vec{v} = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right]$

Ta có thể viết :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (1.56)$$

Trong đó : $\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta}\times\vec{R}\right]$, $a_\tau = \beta.R \qquad (1.57)$

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}\times\vec{v}\right] = \left[\vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right]\right],\ a_n = R\omega^2 \qquad (1.58)$$



ω tăng ω giảm

Hình 1.8

Thành phần $\vec{a}_\tau$ có phương của $\vec{v}$ gọi là gia tốc quay, thực chất là gia tốc tiếp tuyến trong chuyển động tròn của chất điểm trên đường tròn tâm O.

Thành phần $\vec{a}_n$ hướng vào trục quay, thực chất là gia tốc hướng tâm trong chuyển động tròn của chất điểm trên đường tròn tâm O, còn gọi là gia tốc hướng tâm.

CHƯƠNG II:
ĐỘNG LỰC HỌC

Trong chương trước, chúng đã nghiên cứu phương pháp mô tả chuyển động của chất điểm mà không xét đến nguyên nhân gây nên chuyển động. Động lực học chất điểm nghiên cứu đến tác nhân làm thay đổi chuyển động và các qui luật chi phối chuyển động.

Quan sát và nghiên cứu chuyển động các vật thể ta thấy các vật chỉ bắt đầu chuyển động hoặc thay đổi chuyển động khi chịu tác dụng của những vật khác.

Các định luật Động lực học xác định mối quan hệ giữa chuyển động và nguyên nhân gây ra hoặc làm thay đổi chuyển động. Các định luật Động lực học là những định luật về quan hệ giữa lực tác dụng lên vật và chuyển động của vật. Cơ sở của động lực học là ba định luật Newton và nguyên lý tương đối Galiléo.

Chúng ta sẽ nghiên cứu ba định luật này trong trường hợp chất điểm.

2.1 Định luật I Newton

2.1.1 Lực và chuyển động

Trong tự nhiên có nhiều loại lực : lực hấp dẫn, lực từ trường, lực hạt nhân ... trong chương này chúng ta đề cập chủ yếu đến lực cơ học. Lực (cơ học) là một đại lượng vật lý đặc trưng cho tương tác cơ học giữa các vật. Hay, lực cơ học là nguyên nhân vật lý làm biến dạng hoặc làm thay đổi trạng thái chuyển động của các vật.

Về mặt cơ học, ta có thể phân các lực làm hai loại, loại thứ nhất gồm các lực xuất hiện khi có tiếp cận giữa các vật tương tác như lực đàn hồi, lực ma sát... ; loại thứ hai gồm các lực xuất hiện khi các vật tương tác không tiếp cận với nhau, sự phân chia như vậy chỉ mang tính chất qui ước. Trong cơ học chúng ta chỉ chú ý xét trong từng trường hợp cụ thể có những lực nào xuất hiện, độ lớn của các lực đó và ảnh hưởng của chúng đối với chuyển động.

Tác dụng của lực được đặc trưng bởi bốn yếu tố : điểm đặt, phương, chiều và cường độ. Tác dụng đồng thời nhiều lực lên một chất điểm tương đương với tác dụng của một lực duy nhất bằng tổng hợp vector của các lực nói trên. Lực là một đại lượng vector, được biểu diễn bằng một vector và tuân theo các qui tắc biến đổi về vector.

Ngoại lực tác dụng vào một vật có ảnh hưởng đến tốc độ chuyển động của vật, nhưng nói rằng vận tốc của vật tỉ lệ với lực là không chính xác. Khi nghiên cứu quan hệ giữa lực tác dụng và chuyển động, Newton đã phát biểu ba định luật cơ bản sau đây của động lực học, phản ánh đầy đủ mối quan hệ giữa lực tác dụng và chuyển động.

2.1.2 Định luật I Newton

Khi nghiên cứu chuyển động của chất điểm, đầu tiên ta nghiên cứu chuyển động của chất điểm tự do (chất điểm cô lập). Quan sát định luật chuyển động của chất điểm tự do trong những hệ qui chiếu khác nhau là khác nhau. Tuy nhiên, vẫn tồn tại hệ qui chiếu mà trong đó chất điểm tự do hoặc đứng yên, hoặc chuyển động thẳng đều từ một vị trí ban đầu bất kì với một vận tốc nào đó, gọi là hệ qui chiếu quán tính. Hệ nhật tâm còn được gọi là hệ qui chiếu Copecnic, gốc ở tâm mặt trời và ba trục hướng về ba ngôi sao "cố định", với độ chính xác khá cao có thể được xem là hệ qui chiếu quán tính. Mọi hệ qui chiếu chuyển động thẳng đều tương đối với nhau đều là những hệ qui chiếu quán tính.

Định luật I Newton phát biểu : *"Trong hệ qui chiếu quán tính chất điểm không chịu tác dụng của ngoại lực sẽ giữ nguyên trạng thái đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều"*.

Định luật I Newton đúng cho mọi hệ qui chiếu chuyển động thẳng đều đối với hệ qui chiếu quán tính. Nói một cách khác, mọi hệ qui chiếu chuyển động thẳng đều đối với hệ qui chiếu quán tính đều là những hệ qui chiếu quán tính.

2.1.3 Hệ qui chiếu trái đất

Hệ qui chiếu Copecnic chỉ thuận tiện trong việc nghiên cứu chuyển động của thiên thể, hoặc của con tàu vũ trụ... mà không thích hợp cho việc nghiên cứu các chuyển động trên trái đất.

Đối với những chuyển động này, người ta thường dùng một hệ qui chiếu gắn với trái đất. Do trái đất quay quanh trục của nó và chuyển động chung quanh mặt trời, nên trái đất chuyển động có gia tốc, không phải là chuyển động thẳng đều. Vậy, nói thật chặt chẽ thì hệ qui chiếu gắn với trái đất mà chúng ta thường dùng không phải là hệ qui chiếu quán tính. Tuy vậy, chúng ta hãy khảo sát một hệ qui chiếu gắn với trái đất trong chừng mực nào thì có thể được xem là hệ qui chiếu quán tính.

Do sự quay của trái đất quanh trục của nó và sự chuyển động của nó quanh mặt trời, ở xích đạo gia tốc hướng tâm của một điểm trên mặt đất là :

$$a = \omega^2 \,.\, R = \left(\frac{2\pi}{86400\ \text{s}}\right)^2 .\ 6{,}4.10^8\ \text{cm} \ \cong 3{,}4\ \ {}^{\text{cm}}\!/_{\text{s}^2}$$

Gia tốc của trái đất chuyển động quanh mặt trời là :

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(30\ Km/s)^2}{1{,}5\ .\ 10^8\ Km} = 6.10^{-6}\ Km/s^2$$

Gia tốc này bé hơn rất nhiều so với gia tốc rơi tự do trên mặt đất, vì vậy có thể bỏ qua trong nhiều thí nghiệm, nhiều bài tính cơ học.

Các điểm khác nhau trên trái đất có vector vận tốc khác nhau và luôn biến đổi. Tuy nhiên sự biến đổi của vận tốc ấy, về độ lớn và về phương là nhỏ và chậm. Do đó, trong những chuyển động thông thường của vật, khi mà gia tốc cỡ 3,4 cm/s^2 có thể bỏ qua được và trong khoảng thời gian chuyển động của vật không quá vài giờ thì hệ qui chiếu gắn liền với trái đất gần đúng được coi là hệ qui chiếu quán tính.

2.2 Nguyên lý tương đương

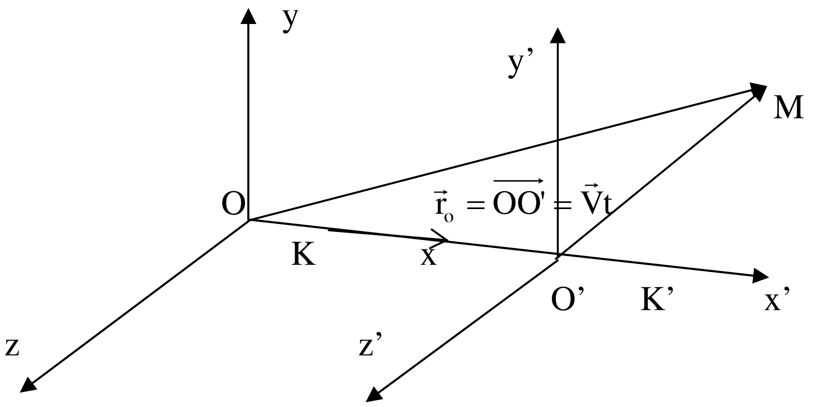
Mặc dù tọa độ và vận tốc của chất điểm tự do trong những hệ qui chiếu quán tính K và K' là khác nhau nhưng gia tốc của nó trong hệ K và K' đều bằng không :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = 0 \qquad (2.1)$$

Trong ý nghĩa này, ta nói rằng mọi hệ qui chiếu quán tính là tương đương với nhau đối với định luật chuyển động thẳng đều của chất điểm tự do. Mọi chuyển động cơ học, cũng như mọi hiện tượng vật lý và tự nhiên khác, đều xảy ra giống nhau, theo những qui luật như nhau trong những hệ qui chiếu quán tính khác nhau. Nói cách khác, không có một hiện tượng vật lý hay tự nhiên nào có thể cho chúng ta khả năng phân biệt được các hệ qui chiếu quán tính với nhau : chúng hoàn toàn tương đương, hoàn toàn bình đẳng. Đó là nội dung của nguyên lý tương đối chuyển động. Kết hợp với tiên đề về khoảng thời gian trôi qua trong mọi hệ qui chiếu quán tính là như nhau ($t=t'$) với nguyên lý tương đương ta có nguyên lý tương đối Galiléo : *Tất cả các định luật cơ học đều giống nhau trong mọi hệ qui chiếu quán tính.*

Xét hệ quán tính K' chuyển động thẳng đều đối với hệ quán tính K với vận tốc $\vec{V}$. Giả sử ban đầu hệ K' trùng với hệ K :

Hình 2.1



Vậy :
$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \\ t' = t \end{cases} \qquad (2.2)$$

Nếu K' chuyển động thẳng đều đối với K dọc theo trục x ; ta có :

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \qquad (2.3)$$

Các công thức (2.2) hay (2.3) gọi là các công thức biến đổi Galiléo. Chú ý $dt' = dt$ ta có :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \qquad (2.4)$$

Trong đó : $\vec{v}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$ và $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ lần lượt là vận tốc của chất điểm M đối với hệ qui chiếu quán tính K' và K.

Các phương trình mô tả một định luật cơ học trong hệ quán tính K và trong hệ quán tính K' là có dạng giống nhau. Vậy có thể phát biểu nguyên lý tương đối Galiléo một cách khác : *Các định luật cơ học cổ điển là bất biến đối với các phép biến đổi Galiléo*. Khi chuyển từ hệ quán tính K sang hệ quán tính K' các đại lượng sau đây là bất biến :

Gia tốc của chất điểm : $\vec{a}' = \dfrac{d\vec{v}'}{dt} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ (2.5)

Vị trí tương đối giữa hai chất điểm :

$$\vec{r}'_{12} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12} \qquad (2.6)$$

Vận tốc tương đối của hai chất điểm :

$$\vec{v}'_{12} = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_{12} \qquad (2.7)$$

2.3- Định luật II Newton

Định luật II Newton mô tả tác dụng của lực lên chuyển động của vật. Chúng ta khảo sát trong hệ qui chiếu quán tính :

2.3.1 Lực và gia tốc :

Khi chịu tác dụng của ngoại lực, chuyển động của vật thay đổi, nói cách khác vật nhận một gia tốc.

Thực nghiệm chứng tỏ rằng trong một hệ qui chiếu quán tính lực tác dụng lên một chất điểm làm thay đổi trạng thái chuyển động của chất điểm đó, nghiã là làm cho vector vận tốc của chất điểm thay đổi. Hay nói cách khác : *trong một hệ qui chiếu quán tính lực tác dụng lên một chất điểm làm cho chất điểm đó chuyển động có gia tốc*. Thực nghiệm chứng tỏ rằng : *Gia tốc mà một vật thu được tại từng thời điểm tỉ lệ với lực tác dụng lên vật tại chính thời điểm ấy.* Vậy nếu một lực tác dụng lên một chất điểm gây ra vector gia tốc $\vec{a}$ thì :

$$\vec{a} \sim \vec{F}$$

2.3.2 Khối lượng :

Thực nghiệm chứng tỏ rằng cùng một lực $\vec{F}$ khi tác dụng lên các chất điểm khác nhau sẽ gây ra những gia tốc tương ứng khác nhau. Vậy gia tốc chuyển động của chất điểm còn phụ thuộc vào một tính chất vật lý của bản thân chất điểm đó. Tính chất này được đặc trưng bởi một đại lượng m gọi là khối lượng của vật. Thực nghiệm cho ta kết quả : *Với một lực tác dụng xác định, gia tốc chuyển động của chất điểm tỉ lệ nghịch với khối lượng của nó*. Tức :

$$a \sim \frac{1}{m}$$

Vì gia tốc đặc trưng cho sự thay đổi trạng thái chuyển động, vậy khi khối lượng m của chất điểm càng lớn thì gia tốc *a* càng nhỏ nghiã là trạng thái chuyển động của chất điểm thay đổi càng ít. Khối lượng xác định theo gia tốc mà vật thu được dưới tác dụng của một lực là khối lượng quán tính. Hay khối lượng quán tính là một đại lượng động lực học đặc trưng cho khả năng thu gia tốc của vật. Người ta nhận thấy chỉ khi vật chuyển động với vận tốc (v) nhỏ so với vận tốc (c) của ánh sáng thì khối lượng của các vật thể là một đại lượng không đổi. Khi vật chuyển động với vận tốc rất lớn, so sánh được với vận tốc ánh sáng, thì khối lượng của vật phụ thuộc vào vận tốc :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2.8)$$

m_0 : khối lượng của vật khi vận tốc bằng không, gọi là khối lượng nghỉ.

Vận tốc có giá trị tương đối tùy thuộc hệ qui chiếu. Do khối lượng phụ thuộc vào vận tốc, nên đối với các hệ qui chiếu khác nhau giá trị cũng khác nhau.

TRONG CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ HỌC THƯỜNG GẶP TRONG KỸ THUẬT THÌ V << C. VẬY MỘT CÁCH GẦN ĐÚNG CÓ THỂ XEM KHỐI LƯỢNG LÀ TUYỆT ĐỐI KHÔNG PHỤ THUỘC HỆ QUI CHIẾU.

2.3.3 Định luật II Newton

TRONG MỘT HỆ QUI CHIẾU QUÁN TÍNH, VECTOR GIA TỐC CHUYỂN ĐỘNG CỦA MỘT CHẤT ĐIỂM TỈ LỆ VỚI LỰC TÁC DỤNG VÀ TỈ LỆ NGHỊCH VỚI KHỐI LƯỢNG CỦA CHẤT ĐIỂM ĐÓ.

$$\vec{a} = k\frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.9)$$

K LÀ HỆ SỐ TỈ LỆ PHỤ THUỘC VÀO ĐƠN VỊ DÙNG ĐỂ ĐO KHỐI LƯỢNG, GIA TỐC VÀ LỰC.

Trong hệ SI, đơn vị gia tốc là m/s^2, đơn vị khối lượng là Kg thì k = 1. Vậy công thức (2.9) trở thành :

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2.10)$$

CÔNG THỨC NÀY CÒN ĐƯỢC GỌI LÀ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC.

Lực là một đại lượng dẫn xuất, đơn vị đo lực là Newton (N). Newton là lực truyền cho vật có khối lượng 1kg nhận được gia tốc $1m/s^2$.

Trong trường hợp chất điểm chịu tác dụng đồng thời của nhiều lực, ta vẫn có phương trình dạng (2.10) trong đó $\vec{F}$ là tổng hợp các lực tác dụng lên chất điểm.

2.3.4 Dạng khái quát định luật II Newton

TRONG TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT, KHỐI LƯỢNG THAY ĐỔI THEO VẬN TỐC. DƯỚI TÁC DỤNG CỦA MỘT NGOẠI LỰC, KHÔNG NHỮNG VẬN TỐC CỦA CHẤT ĐIỂM THAY ĐỔI, MÀ DO VẬN TỐC THAY ĐỔI NÊN KHỐI LƯỢNG CŨNG THAY ĐỔI, TRẠNG THÁI CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM THAY ĐỔI. ĐỂ ĐẶC TRƯNG CHO TRẠNG THÁI

CHUYỂN ĐỘNG CƠ HỌC TRONG TRƯỜNG HỢP NÀY NGƯỜI TA DÙNG ĐẠI LƯỢNG ĐỘNG LƯỢNG. ĐỘNG LƯỢNG CỦA MỘT VẬT CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN LÀ MỘT ĐẠI LƯỢNG VECTOR VỀ TRỊ SỐ BẰNG TÍCH SỐ CỦA KHỐI LƯỢNG VỚI VẬN TỐC, CÓ PHƯƠNG VÀ CHIỀU TRÙNG VỚI PHƯƠNG VÀ CHIỀU CỦA VẬN TỐC.

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{2.11}$$

TRONG HỆ SI, ĐƠN VỊ ĐỘNG LƯỢNG LÀ KG.M/S.

TỔNG QUÁT :

$$\vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.12}$$

Khi v << c thì :

$$\vec{P} \approx m_0\vec{v} \tag{2.13}$$

Lấy đạo hàm hai vế (2.13) và chú ý rằng theo định luật II Newton $m_0\frac{d\vec{v}}{dt} = m_0\vec{a} = \vec{F}$ ta thu được :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{2.14}$$

VẬY, ĐẠO HÀM CỦA ĐỘNG LƯỢNG CỦA CHẤT ĐIỂM THEO THỜI GIAN BẰNG LỰC TÁC DỤNG LÊN NÓ.

Trong trường hợp tổng quát có thể viết :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{2.15}$$

Khi nói định luật II Newton, nếu biết dạng của hàm $\vec{F}$ biểu diễn tương tác giữa chất điểm và các vật thể xung quanh, và biết điều kiện đầu, tức vị trí và vận tốc của chất điểm ở thời điểm ban đầu, thì phương trình chuyển động sẽ cho phép xác định vị trí và vận tốc của chất điểm ở thời điểm t bất kỳ, nghiã là cho phép xác định qũi đạo của chuyển động.

Ta có : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\ dt = \frac{\vec{F}}{m}dt$

VẬY, VẬN TỐC CHẤT ĐIỂM Ở THỜI ĐIỂM T BẤT KÌ :

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{m}\int_0^t \vec{F}.dt + \vec{v}_0 \qquad (2.16)$$

Mà $d\vec{r} = \vec{v}.dt$, chúng ta xác định được $\vec{r}$ ở thời điểm t :

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}.dt + \vec{r}_0 \qquad (2.17)$$

2.4. Định luật III Newton

TRÊN ĐÂY CHÚNG TA CHỈ MỚI XÉT ĐẾN MỐI LIÊN HỆ GIỮA LỰC TÁC DỤNG VÀ GIA TỐC MÀ VẬT CHỊU TÁC DỤNG THU ĐƯỢC. THỰC RA KHI CÁC VẬT BÊN NGOÀI TÁC DỤNG LÊN CHẤT ĐIỂM THÌ CHẤT ĐIỂM CŨNG TÁC DỤNG LÊN VẬT NGOÀI. MỌI SỰ THAY ĐỔI TRẠNG THÁI CHUYỂN ĐỘNG TRONG CÁC HỆ QUI CHIẾU QUÁN TÍNH ĐỀU XẢY RA DO KẾT QUẢ TƯƠNG TÁC GIỮA CÁC VẬT.

Định luật III Newton xét đến sự tương tác giữa các vật :

Khi chất điểm A tác dụng lên chất điểm B một lực $\vec{F}_{AB}$ *thì chất điểm B cũng tác dụng lên chất điểm A một lực* $\vec{F}_{BA}$ *cùng phương, ngược chiều và cùng độ lớn.*

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (2.18)$$

ĐỊNH LUẬT III NEWTON KHÔNG CHỨA ĐẠI LƯỢNG NÀO MỚI, THỰC NGHIỆM XÁC NHẬN ĐẦY ĐỦ SỰ ĐÚNG ĐẮN CỦA ĐỊNH LUẬT NÀY. ĐÂY CŨNG LÀ ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC.

Trường hợp tổng quát : Xét một hệ chất điểm cô lập, nghĩa là một hệ không chịu tác dụng của các ngoại lực, trong hệ chỉ có các nội lực tương tác giữa các chất điểm của hệ.

Nếu xét từng đôi chất điểm của hệ thì tổng hai lực tương tác giữa chúng bằng không. Nếu lấy tổng của tất cả các lực đó, ta được : *Tổng hợp các nội lực của một hệ chất điểm cô lập (hệ kín) bằng không.*

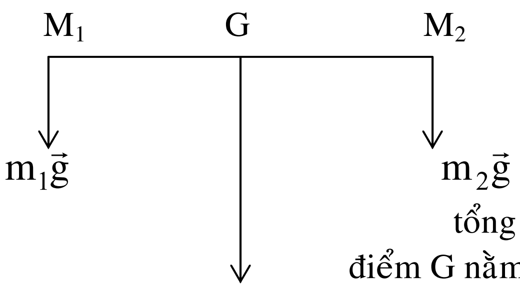
CHƯƠNG III

CƠ HỌC HỆ CHẤT ĐIỂM – CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN

3.1 Khối tâm

3.1.1 Định nghĩa

Giả sử có một hệ gồm hai chất điểm M_1 và M_2 khối lượng tương ứng là m_1 và m_2 đặt trong trọng trường đều. Trọng lực tác dụng lên các chất điểm M_1 và M_2 là hai vector $m_1\vec{g}$ và $m_2\vec{g}$ song song cùng chiều. Điểm đặt của tổng hợp hai trọng lực đó là một điểm G nằm trên M_1M_2 sao cho :



Hình 3.1

$$\frac{\overline{M_1G}}{\overline{M_2G}} = -\frac{m_2g}{m_1g} = -\frac{m_2}{m_1} \tag{3.1}$$

Hay : $$m_1\overline{M_1G} + m_2\overline{M_2G} = 0 \tag{3.2}$$

Có thể viết (3.2) dưới dạng vector :

$$m_1\overrightarrow{M_1G} + m_2\overrightarrow{M_2G} = 0 \tag{3.3}$$

Điểm G thỏa mãn (3.3) được gọi là khối tâm của hệ hai chất điểm M_1M_2.

Trường hợp tổng quát, ta định nghĩa khối tâm của hệ như sau :

Khối tâm của một hệ chất điểm $M_1, M_2, ..., M_n$ lần lượt có khối lượng $m_1, m_2, ..., m_n$ là một điểm G xác định bởi hệ thức :

$$m_1\overrightarrow{M_1G} + m_2\overrightarrow{M_2G} + ... + m_n\overrightarrow{M_nG} = 0 \tag{3.4}$$

Hay : $$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{M_iG} = 0 \tag{3.5}$$

Hãy xác định tọa độ khối tâm G đối với gốc tọa độ O nào đó ta có :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_iG} \tag{3.6}$$

Nhân hai vế (3.6) với m_i rồi cộng các phương trình nhận được vế với vế từ 1 đến n ta được :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{M_i G} \qquad (3.7)$$

Hay theo (3.5) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \,.\, \overrightarrow{OM_i}$$

Suy ra :
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \,.\, \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3.8)$$

Đặt $\overrightarrow{OG} = \vec{R}$ với ba tọa độ X, Y, Z ; $\overrightarrow{OM_i} = \vec{r}_i$ với ba tọa độ là x_i, y_i, z_i thì (3.8) trở thành :

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \,.\, \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3.9)$$

Nếu chiếu trên ba trục tọa độ :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \;;\; Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \;;\; Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3.10)$$

Các công thức (3.9) hay (3.10) cho phép ta tính tọa độ khối tâm của một hệ chất điểm.

3.1.2 Vận tốc của khối tâm

Vector vận tốc của khối tâm được xác định :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \qquad (3.11)$$

Hay theo (3.9) :

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3.12)$$

Trong đó : $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$: vector vận tốc của chất điểm M_i .

Vậy :

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i . \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3.13)$$

Mặt khác $\sum_i m_i . \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$ là tổng động lượng $\vec{P}$ của hệ, do đó vận tốc khối tâm là :

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_i m_i} \qquad (3.14)$$

Từ (3.14) suy ra : $\vec{P} = \left(\sum_i m_i\right)\vec{V}$ (3.15)

VẬY TỔNG ĐỘNG LƯỢNG CỦA HỆ BẰNG ĐỘNG LƯỢNG CỦA MỘT CHẤT ĐIỂM ĐẶT TẠI KHỐI TÂM CỦA HỆ, CÓ KHỐI LƯỢNG BẰNG TỔNG KHỐI LƯỢNG CỦA HỆ VÀ CÓ VẬN TỐC BẰNG VẬN TỐC KHỐI TÂM CỦA HỆ.

Đối với hệ chất điểm cô lập, tổng động lượng của hệ bảo toàn :

$$\vec{P} = \text{const}$$

Vậy theo (3.14) : $\vec{V} = \text{const}$

KHỐI TÂM CỦA MỘT HỆ CHẤT ĐIỂM CÔ LẬP CÓ VECTOR VẬN TỐC KHÔNG ĐỔI.

Thí dụ, xét một sao kép tức là một hệ hai sao chuyển động quanh khối tâm của chúng; nếu chúng ở khá xa các sao khác thì có thể coi như chúng hợp thành một hệ cô lập, do đó khối tâm của chúng hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều. Các quan sát thiên văn chứng tỏ có những sao kép như vậy.

3.1.3 Phương trình chuyển động của khối tâm

Giả thiết các chất điểm M_1, M_2, ..., M_n của hệ lần lượt chịu tác dụng của các lực : $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ và chuyển động với những vector gia tốc $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ thỏa mãn các phương trình :

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 ,\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 ,\ \ldots\ m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n \qquad (3.16)$$

Để tìm phương trình chuyển động của khối tâm, đạo hàm (3.13) theo t

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (3.17)$$

Hay : $$\left(\sum_i m_i\right)\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i \qquad (3.18)$$

Hay : $$\left(\sum_i m_i\right)\vec{\Gamma} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (3.19)$$

Trong đó $\vec{\Gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ là vector gia tốc của khối tâm. Từ (3.19) có thể kết luận : *Khối tâm của một hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng hợp ngoại lực tác dụng lên hệ*. Chuyển động khối tâm của hệ được xem là chuyển động toàn thể của hệ.

3.2 Chuyển động của vật rắn

Vật rắn là một hệ chất điểm trong đó khoảng cách giữa các chất điểm luôn luôn không đổi. Người ta chứng minh được rằng chuyển động của vật rắn bao giờ cũng có thể qui về tích của hai chuyển động cơ bản : Chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.

3.2.1 Chuyển động tịnh tiến

Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi chất điểm của nó chuyển động giống nhau; tại mỗi thời điểm, các chất điểm của vật rắn đều có cùng vector vận tốc và vector gia tốc. Giả thiết $\vec{a}$ là vector gia tốc chung của các chất điểm M_1, M_2, ..., M_n của vật rắn, lần lượt có khối lượng m_1, m_2, ..., m_n và lần lượt chịu tác dụng của những ngoại lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$.

Theo định luật II Newton ta có :

$$m_1\vec{a} = \vec{F}_1 \ ,$$
$$m_2\vec{a} = \vec{F}_2 \ , \qquad (3.20)$$
$$\ldots$$
$$m_n\vec{a} = \vec{F}_n$$

Các phương trình này chứng tỏ những ngoại lực tác dụng lên vật rắn $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... , $\vec{F}_n$ song song và cùng chiều, đây là điều kiện cần để một vật rắn chuyển động tịnh tiến.

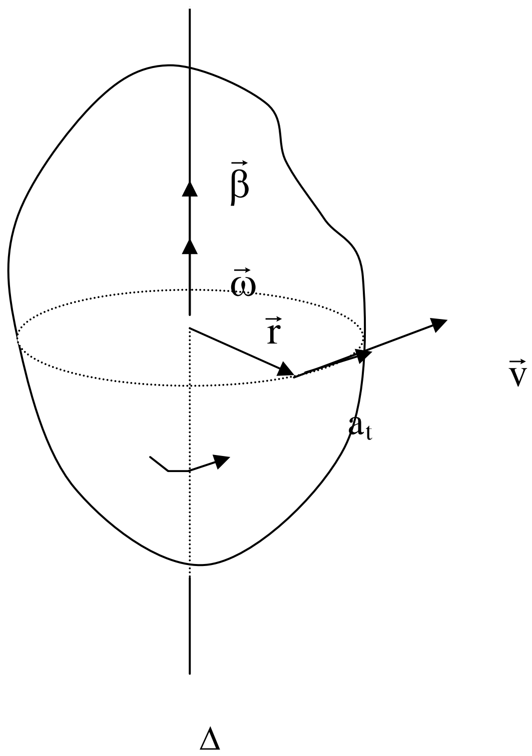
Từ (3.20) ta có :

$$\left(\sum_i m_i\right)\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (3.21)$$

Đó là phương trình chuyển động của vật rắn tịnh tiến; nó giống như phương trình chuyển động của một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng tổng cộng của vật rắn và chịu tác dụng một lực bằng tổng ngoại lực tác dụng lên vật rắn. Đây cũng là phương trình chuyển động của khối tâm vật rắn. Vậy, muốn khảo sát chuyển động tịnh tiến của một vật rắn ta chỉ cần xét chuyển động của khối tâm của nó.

3.2.2 Chuyển động quay

Khi một vật rắn chuyển động quay chung quanh một trục cố định Δ thì :



Hình 3.2

a/ Mọi điểm của vật rắn vạch những vòng tròn có cùng trục Δ.

b/ Trong cùng một khoảng thời gian mọi điểm của vật rắn đều quay được cùng một góc θ.

c/ Tại cùng một thời điểm, mọi điểm của vật rắn đều có cùng vận tốc góc $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ và cùng gia tốc góc $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

d/ Tại một thời điểm, vector vận tốc thẳng và vector gia tốc tiếp tuyến của một chất điểm bất kỳ của vật rắn cách trục quay một khoảng r được xác định bởi :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{3.22}$$

$$\vec{a}_t = \vec{\beta} \times \vec{r} \tag{3.23}$$

3.3 Định luật biến thiên và bảo toàn động lượng

3.3.1 Khái niệm

Hệ gồm nhiều chất điểm hoặc nhiều vật tương tác với nhau được gọi là một hệ chất điểm, hay một cơ hệ. Thí dụ, hệ mặt trời là một cơ hệ gồm mặt trời và các hành tinh tương tác với nhau bằng lực hấp dẫn.

Lực tương tác giữa các vật trong một cơ hệ được gọi là nội lực hay lực trong.

Lực tương tác giữa một vật trong cơ hệ và các vật ngoài cơ hệ được gọi là ngoại lực hay lực ngoài.

Hệ chỉ gồm các vật tương tác với nhau, được gọi là một hệ kín hay hệ cô lập. Mọi lực tương tác trong một hệ cô lập đều là nội lực.

3.3.2 Định luật bảo toàn động lượng của một cơ hệ

Ta biết động lượng của một chất điểm cô lập là bảo toàn.

Xét một hệ gồm nhiều chất điểm khối lượng m_1, m_2, m_3, ... có vận tốc lần lượt là $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$ Tổng các động lượng $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ của các chất điểm trong cơ hệ được gọi là động lượng toàn phần của cơ hệ :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots \tag{3.24}$$

<u>*- Ta chứng minh rằng, động lượng của một hệ cô lập là bảo toàn.</u>

Áp dụng định luật II Newton đối với từng chất điểm trong cơ hệ :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \ldots$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \ldots \qquad (3.25)$$
$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \frac{d}{dt}(m_3\vec{v}_3) = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + ..$$

Cộng vế với vế tất cả phương trình (3.25) :

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots) = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} \qquad (3.26)$$

Vế trái chính là đạo hàm theo thời gian của động lượng cơ hệ, vế phải là tổng các lực tác dụng trong hệ cô lập nên chúng bằng 0. Vậy :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Tức là :

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = \text{const} \qquad (3.27)$$

Động lượng toàn phần của một hệ cô lập là một vector không đổi. Hay : động lượng toàn phần của một hệ cô lập được bảo toàn.

Vì động lượng toàn phần là vector không đổi, nên các thành phần của động lượng theo các phương cũng không đổi.

$$\frac{d\vec{P}_x}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P}_x = \text{const}$$
$$\frac{d\vec{P}_y}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P}_y = \text{const} \qquad (3.28)$$
$$\frac{d\vec{P}_z}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P}_z = \text{const}$$

Đối với trường hợp hệ không cô lập, có phương trình :

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots) = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i^n \qquad (3.29)$$

Tổng các nội lực bằng không : $\sum_i \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} = 0$

Tổng các ngoại lực : $\sum_i \vec{F}_i^n = \vec{F}^n$

Vậy : $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^n \qquad (3.30)$$

Đạo hàm theo thời gian của động lượng toàn phần một cơ hệ, bằng tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ.

3.3.3 Xung lượng của ngoại lực

Ta có thể biểu diễn định luật II Newton dưới dạng :

$$d\vec{P} = \vec{F}dt \qquad (3.31)$$

$\vec{F}dt$ được gọi là xung lượng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian dt. Nó đặc trưng cho tác dụng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian dt.

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$$

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{A} \qquad (3.32)$$

$\vec{P}_2 - \vec{P}_1$ là độ biến thiên của động lượng trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2. Còn $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{A}$ là xung lượng của lực tác dụng trong khoảng thời gian từ t_1 → t_2. Có thể phát biểu :

<u>ĐỘ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG CỦA CHẤT ĐIỂM TRONG MỘT KHOẢNG THỜI GIAN BẰNG XUNG LƯỢNG CỦA LỰC TÁC DỤNG VÀO CHẤT ĐIỂM TRONG KHOẢNG THỜI GIAN ẤY.</u>

Đối với một cơ hệ, theo (3.30) :

$$d\vec{P} = \vec{F}^n dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^n\,dt \qquad (3.33)$$

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^n\,dt = \vec{A}$$

Vậy : *Độ biến thiên động lượng toàn phần của một cơ hệ trong một khoảng thời gian bằng tổng xung lượng của các ngoại lực tác dụng lên hệ trong khoảng thời gian ấy.*

3.4 Chuyển động của vật có khối lượng thay đổi

Thực tế ta thường gặp những hệ có khối lượng biến đổi theo thời gian : Khối lượng của tên lửa đang chuyển động, khối lượng các thiên thể khi tiếp nhận các thiên thạch ... Người ta thường dùng định luật III Newton và định luật bảo toàn động lượng để giải thích các chuyển động phản lực. Chúng ta hãy thiết lập phương trình chuyển động của tên lửa.

Giả thiết có một vật chứa một hỗn hợp khí nóng, ban đầu đứng yên. Nếu hỗn hợp khí được phụt ra phía sau thì vật sẽ tiến lên phía trước. Gọi khối lượng tổng cộng ban đầu của tên lửa là m_0. Trong quá trình chuyển động, tên lửa luôn phụt khí ra phía sau, khối lượng giảm dần và vận tốc tăng dần. Hãy tính vận tốc $\vec{v}$ của tên lửa khi khối lượng của nó là m. Động lượng của tên lửa lúc đó là $\vec{p}_1 = m\vec{v}$. Sau thời gian dt tên lửa phụt ra khối lượng khí dm. Xem vận tốc phụt khí đối với tên lửa luôn không đổi và bằng $\vec{u}$ thì vận tốc phụt khí đối với hệ qui chiếu đang quan sát bằng $\vec{u}+\vec{v}$ và động lượng của khí phụt ra là :

$$dm(\vec{u}+\vec{v})$$

Sau khi phụt khí, khối lượng tên lửa giảm đi còn (m – dm), vận tốc của nó tăng lên thành $(\vec{v}+d\vec{v})$, vậy động lượng tên lửa sau khi phụt khí là $(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v})$. Động lượng của hệ sau khi phụt khí là :

$$\vec{p}_2 = dm(\vec{u}+\vec{v})+(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v})$$

Giả sử không có thành phần lực tác dụng theo phương chuyển động, theo định luật bảo toàn động lượng : $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$. Vậy :

$$dm(\vec{u}+\vec{v})+(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v}) = m\vec{v} \qquad (3.34)$$

Bỏ qua số hạng vô cùng bé bậc hai $-dmd\vec{v}$, có :

$$md\vec{v} = -\vec{u}\,dm \qquad (3.35)$$

Vì các vector đều cùng phương nên về giá trị :

$$mdv = -\,udm$$

$$dv = -u\frac{dm}{m} \qquad (3.36)$$

Tích phân (3.36), chú ý đến điều kiện ban đầu, t = 0 có v = v_0 và $m=m_0$ ta thu được :

$$v - v_o = u\ln\frac{m_o}{m} \Rightarrow v = v_o + u\ln\frac{m_o}{m} \qquad (3.37)$$

Công thức này lần đầu tiên do K.E.Xiônkôpski lập nên. Vậy muốn vận tốc tên lửa lớn thì vận tốc phụt khí (đối với tên lửa) u phải lớn và tỉ số $\frac{m_0}{m}$ cũng phải lớn. Phương pháp được dùng hiện nay là xây dựng tên lửa nhiều tầng, loại bỏ dần những thiết bị đã làm xong nhiệm vụ để giảm nhanh hơn khối lượng còn lại m.

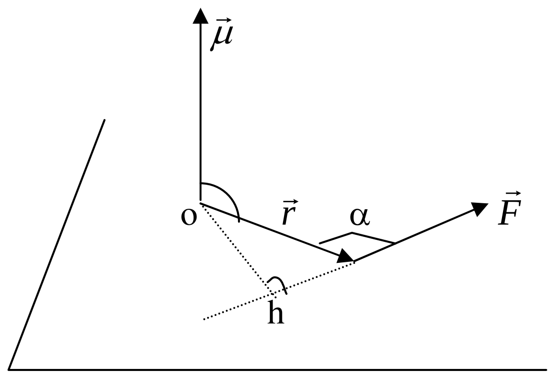
3.5 Momen lực và momen động lượng

3.5.1 Momen lực

Momen của một lực $\vec{F}$, đối với một góc O chọn trước, là một vector được xác định :

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.38)$$

Trong đó (r) là bán kính vector vạch từ O đến điểm đặt của $\vec{F}$. Phương và chiều của được xác định theo qui tắc vặn nút chai, độ lớn của $\vec{\mu}$ là :



Hình 3.3

$$\mu = rF\sin\alpha = hF \quad (3.39)$$

Trong đó α là góc tạo bởi $\vec{r}$ và $\vec{F}$; h là hình chiếu của $\vec{r}$ lên phương vuông góc với $\vec{F}$.

Từ (3.38) ta suy ra rằng momen của lực $\vec{F}$ không thay đổi khi điểm đặt A của lực dịch chuyển dọc theo phương tác dụng của lực.

Nếu $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... \vec{F}_n = \sum_i \vec{F}_i$ thì từ tính chất đã biết của tích vector, ta có :

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}\times\vec{F}_1) + (\vec{r}\times\vec{F}_2) + ... (\vec{r}\times\vec{F}_n)$$
$$= \sum_i (\vec{r}\times\vec{F}_i) = \sum_i \vec{\mu}_i \quad (3.40)$$

Vậy, momen đối với điểm O của nhiều lực tác dụng đồng thời bằng tổng hình học của các momen các lực thành phần đối với điểm đó.

Momen của lực $\vec{F}$, đối với một trục Oz nào đó, là thành phần μ_z trên trục Oz của vector momen lực $\vec{\mu}$ đối với một điểm O. Ta thấy rằng momen lực đối với một điểm là một vector, còn momen của cùng lực đó đối với một trục bất kỳ đi qua điểm trên là một vô hướng.

Người ta chứng minh được rằng : trong một hệ chất điểm hay vật rắn tổng momen của các nội lực $\vec{\mu}^t$ - còn được gọi là momen tổng hợp của các nội lực - đối với một điểm bất kì, luôn luôn bằng không.

3.5.2 Momen động lượng

Momen động lượng $\vec{L}$ của một chất điểm có khối lượng m, chuyển động với vận tốc $\vec{v}$, đối với điểm O nào đó, là một vector được xác định bằng biểu thức :

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Trong đó $\vec{r}$ là bán kính vector vạch từ O đến vị trí của chất điểm. $\vec{p} = m\vec{v}$ là động lượng chất điểm.

Momen động lượng, đối với một trục Oz nào đó, là thành phần L_z trên trục Oz của momen động lượng $\vec{L}$ đối với điểm O.

Momen động lượng toàn phần $\vec{L}$ của một hệ chất điểm hay vật rắn, đối với một điểm O nào đó, là tổng hình học các vector momen động lượng $\vec{L}$ đối với O của các chất điểm m_i trong hệ :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times m\vec{v}_i) \qquad (3.41)$$

*- Định luật biến thiên và bảo toàn momen động lượng :

- Đối với chất điểm :

Từ (3.41) ta có : $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\dfrac{d}{dt}\vec{r} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt}\right)$

Ta có : $\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) = (\vec{v} \times \vec{p}) = (\vec{v} \times m\vec{v}) = m(\vec{v} \times \vec{v}) = 0$

Và $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Trong đó $\vec{F}$ là lực tác dụng lên chất điểm, thì :

$$(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}) = (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{\mu}$$

Vậy : $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \qquad (3.42)$$

Đạo hàm theo thời gian của momen động lượng của chất điểm đối với một điểm cố định O bằng momen đối với O của lực tác dụng lên chất điểm.

Khi momen lực tác dụng lên chất điểm bằng 0 thì :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \qquad (3.43)$$

Nghĩa là $\vec{L}$ không đổi theo thời gian.

Vậy ta có định luật bảo toàn momen động lượng : *Momen động lượng của chất điểm đối với một chất điểm cố định, không thay đổi theo thời gian nếu momen lực đối với điểm ấy luôn luôn bằng không.*

Đối với hệ chất điểm hay vật rắn :

Ta có : $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \vec{\mu}_i$$

Trong đó $\vec{\mu}_i$ là momen lực tác dụng lên chất điểm thứ i.

Vậy, vế phải của phương trình trên là tổng các momen lực tác dụng lên cơ hệ, như ta biết là tổng momen của các ngoại lực tác dụng lên hệ, thì :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^n) = \vec{\mu} \qquad (3.45)$$

Trong đó $\vec{F}_i^n$ là tổng các ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ i và $\vec{\mu}$ là tổng các momen ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

Đạo hàm theo thời gian của tổng momen động lượng của một hệ chất điểm hay một vật rắn, đối với một điểm cố định O, bằng tổng các momen ngoại lực đối với O.

- Trường hợp riêng nếu $\vec{\mu} = 0$ thì :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \qquad (3.45)$$

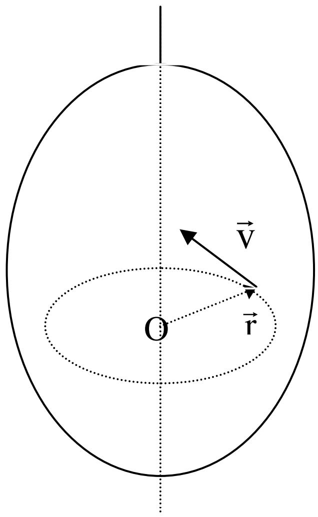
Ta có định luật bảo toàn momen động lượng đối với hệ chất điểm :

MOMEN ĐỘNG LƯỢNG CỦA MỘT HỆ CHẤT ĐIỂM HAY MỘT VẬT RẮN ĐỐI VỚI MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH O KHÔNG THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN, NẾU TỔNG MOMEN CÁC NGOẠI LỰC ĐỐI VỚI ĐIỂM O BẰNG KHÔNG.

Momen động lượng của một vật rắn quay quanh một trục cố định :

Trước hết ta hãy xét trường hợp của một hệ chất điểm, sau sẽ xét trường hợp riêng đặc biệt đó là trường hợp của vật rắn.

Xét chất điểm khối lượng m quay theo đường tròn tâm O bán kính r với vận tốc v, vậy momen động lượng của chất điểm đối với trục quay Δ vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo là : $\ell = mvr$



Hình 3.4

Nếu gọi ω là vận tốc góc thì :

$$v = \omega r \Rightarrow \ell = mr^2\omega$$

Mở rộng kết quả này cho trường hợp một hệ chất điểm, momen động lượng của hệ đối với trục Δ bằng :

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega \qquad (3.46)$$

Trong đó tổng được lấy theo mọi chất điểm của hệ. Do ω như nhau với mọi chất điểm. Vậy :

$$L = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \omega I \qquad (3.47)$$

Với $I = \sum_i m_i r_i^2$ gọi là momen quán tính của hệ đối với trục quay Δ.

Theo (3.47) thì momen động lượng của hệ đối với trục quay bằng momen quán tính của hệ đối với trục quay ấy nhân với vận tốc góc của hệ.

Có thể thấy : $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = \mu$ (3.48)

Vậy đạo hàm theo thời gian của momen động lượng của hệ bằng momen của ngoại lực đối với trục quay.

Trường hợp riêng nếu momen ngoại lực đối với trục quay bằng 0 thì momen động lượng bảo toàn.

Trường hợp vật rắn quay quanh một trục cố định, thì do vật rắn có thể xem là đối với điểm O một hệ chất điểm cố kết nên momen quán tính I của hệ là không đổi và phương trình (3.48) trở thành :

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mu \Rightarrow I\beta = \mu \qquad (3.49)$$

Xét về giá trị vector : $I\vec{\beta} = \vec{\mu}$

VẬY, **TÍCH CỦA MOMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN ĐỐI VỚI MỘT TRỤC QUAY CỐ ĐỊNH VỚI GIA TỐC GÓC BẰNG MOMEN CỦA NGOẠI LỰC ĐỐI VỚI TRỤC QUAY.**

Đây là định luật cơ bản về chuyển động quay của vật rắn quanh một trục quay.

CHƯƠNG IV: TRƯỜNG LỰC THẾ – TRƯỜNG HẤP DẪN

4.1 Khái niệm và tính chất của trường lực thế

Một chất điểm được gọi là chuyển động trong một *trường lực* nếu tại mỗi vị trí của chất điểm đều có một lực $\vec{F}$ tác dụng lên chất điểm ấy.

Lực $\vec{F}$ tác dụng lên chất điểm nói chung phụ thuộc vào vị trí của chất điểm, $\vec{F}$ là một hàm của tọa độ của chất điểm và cũng có thể là một hàm của thời gian **t.** Ở đây ta chỉ xét trường hợp $\vec{F}$ chỉ phụ thuộc vào vị trí của chất điểm mà không phụ thuộc vào thời gian.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) \qquad (4.1)$$

Khi chất điểm chuyển động trong trường lực từ vị trí M đến vị trí N bất kỳ thì công của lực $\vec{F}$ bằng :

$$A_{MN} = \int_{MN} \vec{F} d\vec{s}$$

Trong trường hợp công A_{MN} của lực $\vec{F}$ không phụ thuộc đường dịch chuyển MN mà chỉ phụ thuộc vị trí của điểm M và điểm N thì ta nói rằng : $\vec{F}$ là lực của một *trường thế*.

Ví dụ : trường tĩnh điện Coulomb; Trọng trường đều là những trường hợp của trường lực thế.

a) Xét trường hợp trường tĩnh điện Coulomb

Tại điểm O cố định, đặt một điện tích +q, điện tích này sẽ sinh ra một điện trường chung quanh nó. Một điện tích q_0 tại vị trí bất kỳ cách q một khoảng r. Điện tích q_0 sẽ chịu tác dụng một lực điện coulomb $\vec{F}$ có phương là đường thẳng nối qq_0, và có độ lớn :

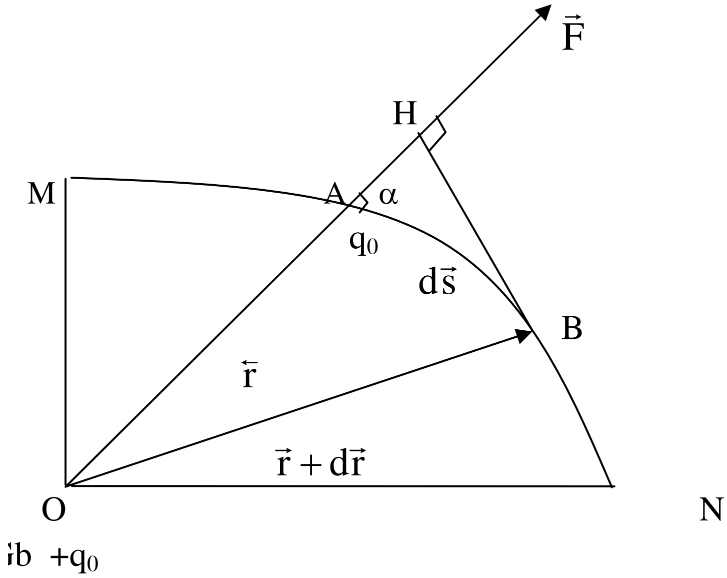
$$F = k\frac{qq_0}{\varepsilon r^2} \qquad (4.2)$$

Giả sử $q_0>0$: $\vec{F}$ sẽ là lực đẩy. Giả sử q_0 dịch chuyển từ M đến N, ta tính công của lực điện coulomb $\vec{F}$ trong dịch chuyển này.

Công vi phân trong chuyển dời nhỏ AB = ds là :

$$dA = \vec{F} d\vec{s} = F.AB.\cos\alpha = F.AH$$

AH là hình chiếu của AB lên phương của $\vec{F}$.



Hình 4.1

$$OA = r \quad ; \quad OB = r + dr \approx OH \; ;$$

$AH \approx OB - OA = dr$

$$dA = Fdr = \frac{kqq_0}{\varepsilon r^2} dr$$

Công của lực điện coulomb trong quá trình dịch chuyển của q_0 từ M đến N :

$$A_{MN} = A_{MN} = \int_M^N Fdr = \int_{r_M}^{r_N} k\frac{qq_0}{\varepsilon r^2} dr$$

$$A_{MN} = k\frac{qq_0}{\varepsilon r_M} - k\frac{qq_0}{\varepsilon r_N} = k\frac{qq_0}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N}\right) \qquad (4.3)$$

Ta thấy công A_{MN} chỉ phụ thuộc vị trí hai điểm đầu và cuối MN : Vậy *trường tĩnh điện Coulomb là một trường thế.*

b) Trường hợp chuyển động dưới tác dụng của một trọng trường đều

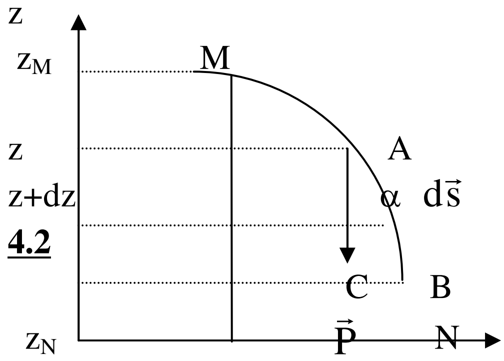
Xét một chất điểm m luôn luôn chịu tác dụng của trọng lực :

$$\vec{P} = m\vec{g} \qquad (4.3'')$$

Trong phạm vi không gian không lớn, $\vec{g}$ luôn luôn thẳng đứng hướng xuống và có độ lớn không đổi, lúc này ta có trọng trường đều.

Ta hãy tính công của trọng lực $\vec{P}$ khi chất điểm m chuyển động từ điểm M đến N :

$$A_{MN} = \int_M^N \vec{P}d\vec{s} \qquad (4.4)$$



Hình 4.2

Trong chuyển dời nhỏ $\overrightarrow{AB} = d\vec{s}$

Công vi phân :

$$dA = \vec{P}d\vec{s} = P.AB.\cos\alpha$$

$$dA = P.AC = -Pdz$$

$dz = z_B - z_A$ dấu trừ ở vế thứ hai có nghĩa khi dz<0 (độ cao giảm) thì dA>0.

Công của trọng lực khi dịch chuyển từ M đến N là :

$$A_{MN} = \int_M^N -Pdz = P(z_M - z_N)$$

$$A_{MN} = mg(Z_M - Z_N) \qquad (4.5)$$

Ta thấy công A_{MN} chỉ phụ thuộc Z_M và Z_N nghĩa là chỉ phụ thuộc vị trí của M, N mà không phụ thuộc đường dịch chuyển. Vậy *trọng lực đều là một trường lực thế.*

4.2- Thế năng và cơ năng của trường lực thế

Trong trường lực thế, khi một chất điểm dịch chuyển từ vị trí M sang vị trí N thì công A_{MN} của trường lực chỉ phụ thuộc vào vị trí của M, N. Lực tác dụng vào chất điểm trong trường hợp này chỉ phụ thuộc vào vị trí của chất điểm, ta gọi là *lực bảo toàn*. Công của lực bằng hiệu số giữa hai số hạng $E_p(x,y,z)$ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối. Một cách tổng quát ta viết :

$$A_{MN} = \int_M^N \vec{F}d\vec{r} = E_P(M) - E_P(N) \qquad (4.6)$$

Đại lượng $E_P(x,y,z)$ gọi là *thế năng* của chất điểm.

Thế năng của một chất điểm trong trường lực thế là một hàm $E_P(x,y,z)$ phụ thuộc vị trí của chất điểm sao cho :

$$A_{MN} = E_P(M) - E_P(N) \qquad (4.7)$$

Nói cách khác : Thế năng là một hàm số của tọa độ, sao cho hiệu số giá trị của nó ở vị trí đầu và vị trí cuối trong một trường lực thế bằng công của trường lực thực hiện khi làm dịch chuyển chất điểm từ vị trí đầu đến vị trí cuối.

Từ định nghĩa này ta thấy rằng nếu đồng thời cộng $E_P(M)$ và $E_P(N)$ với cùng một hằng số thì hệ thức (4.7) vẫn không đổi : Thế năng của một chất điểm tại một vị trí được định nghĩa sai khác một hằng số.

Ví dụ : Trong trọng trường đều, dựa vào biểu thức (4.5) ta suy ra biểu thức thế năng của chất điểm tại vị trí có độ cao z :

$$E_P(z) = mgz + C$$

Trong điện trường coulomb dựa vào biểu thức (4.3) ta suy ra biểu thức thế năng của điện tích q_0 tại vị trí cách q một khoảng r :

$$E_P(r) = k\frac{q_0 q}{\varepsilon r} + C$$

Vậy thế năng tại một vị trí được xác định sai khác một hằng số cộng nhưng hiệu thế năng giữa hai vị trí thì hoàn toàn xác định. Giữa công của trường lực và thế năng có hệ thức sau :

$$A_{MN} = \int_{MN} \vec{F}d\vec{s} = E_P(M) - E_P(N)$$

Nếu cho chất điểm dịch chuyển theo một vòng tròn kín (điểm M trùng với N) thì hệ thức trên trở thành :

$$A_{MN} = \int_{MN} \vec{F}d\vec{s} = \oint \vec{F}d\vec{s} = 0 \qquad (4.8)$$

*- Ý nghĩa của thế năng :

Thế năng là một dạng năng lượng đặc trưng cho *tương tác*, ví dụ dạng thế năng của chất điểm trong trọng trường của Quả đất là năng lượng đặc trưng cho tương tác giữa Quả đất với chất điểm. Thế năng của điện tích q_0 trong điện trường coulomb của điện tích q là thế năng tương tác giữa q và q_0.

4.2.1 Định luật bảo toàn cơ năng trong trường lực thế

Khi một chất điểm khối lượng m chuyển động từ vị trí M đến vị trí N trong một trường lực thế, thì công của trường lực là (theo 4.7) :

$$A_{MN} = E_P(M) - E_P(N)$$

Nếu chất điểm chỉ chịu tác dụng của trường lực thế, ta có :

$$A_{MN} = E_k(N) - E_k(M)$$

Với M là điểm đầu, N là điểm cuối của quá trình dịch chuyển.

Vậy :

$$E_P(M) - E_P(N) = E_k(N) - E_k(M)$$

Hay $$E_P(M) + E_k(M) = E_k(N) + E_P(N)$$

$$(E_P + E_k)_M = (E_P + E_k)_N \qquad (4.9)$$

Với $(E_p + E_k)_M$ là tổng thế năng và động năng của chất điểm tại vị trí M trong trường lực.

Đại lượng $(E_p + E_k)$ được gọi là *cơ năng* của chất điểm bằng tổng động năng và thế năng của chất điểm tại vị trí đang xét, ký hiệu E :

$$E = (E_P + E_k) = E_P(x,y,z) + mv^2/2 \qquad (4.10)$$

Từ (4.9) ta có thể phát biểu :

"Khi một chất điểm chuyển động trong một trường thế (mà không chịu tác dụng của một lực nào khác) thì cơ năng của chất điểm là một đại lượng bảo toàn".

Ví dụ trong trường hợp chất điểm rơi tự do trong trọng trường đều, cơ năng của chất điểm m tại độ cao z là :

$$E = mgz + mv^2/2 \qquad (4.11)$$

Tại vị trí z_0 giả sử vận tốc ban đầu của chất điểm bằng không, tại một vị trí có độ cao z ta có theo (4.11) :

$$Mgz_0 = mgz + mv^2/2$$

Hay : $$v^2 = 2g(z_0 - z) = 2gh$$

<u>TRONG TRƯỜNG HỢP CHẤT ĐIỂM CHUYỂN ĐỘNG THẲNG, THẾ NĂNG CHỈ PHỤ THUỘC MỘT BIẾN SỐ TỌA ĐỘ TRONG TRƯỜNG LỰC. TA XÉT TỌA ĐỘ X CHẲNG HẠN, CƠ NĂNG BÂY GIỜ VIẾT THEO (4.10) :</u>

$$E = mv^2/2 + E_P(x) \qquad (4.12)$$

Với E là cơ năng, là một hằng số. Trong chuyển động thẳng v=dx/dt, (4.12) được viết :

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_P(x)$$

Suy ra : $$\frac{dx}{dt} = \left\{ \frac{2}{m} \left[E - E_P(x) \right] \right\}^{1/2} \qquad (4.12')$$

Phương trình này cho phép ta thu được hệ thức liên hệ giữa tọa độ x và thời gian t :

$$\int \frac{dx}{\left\{ \frac{2}{m} \left[E - E_P(x) \right] \right\}^{1/2}} = \int_0^t dt = t \qquad (4.13)$$

4.2.2 Sơ đồ thế năng

Thế năng E_P của một chất điểm trong trường lực thế là hàm của tọa độ được biểu diễn : $E_P(x,y,z)$.

Trong trường hợp thế năng chỉ phụ thuộc vào một tọa độ (x chẳng hạn) thì :

$$E_P = E_P(x)$$

Ta có thể vẽ đồ thị của hàm $E_P(x)$ theo x; đồ thị đó là sơ đồ thế năng.

Khảo sát sơ đồ thế năng của chất điểm trong trường lực thế ta có thể suy ra một số kết luận định tính về chuyển động của chất điểm đó.

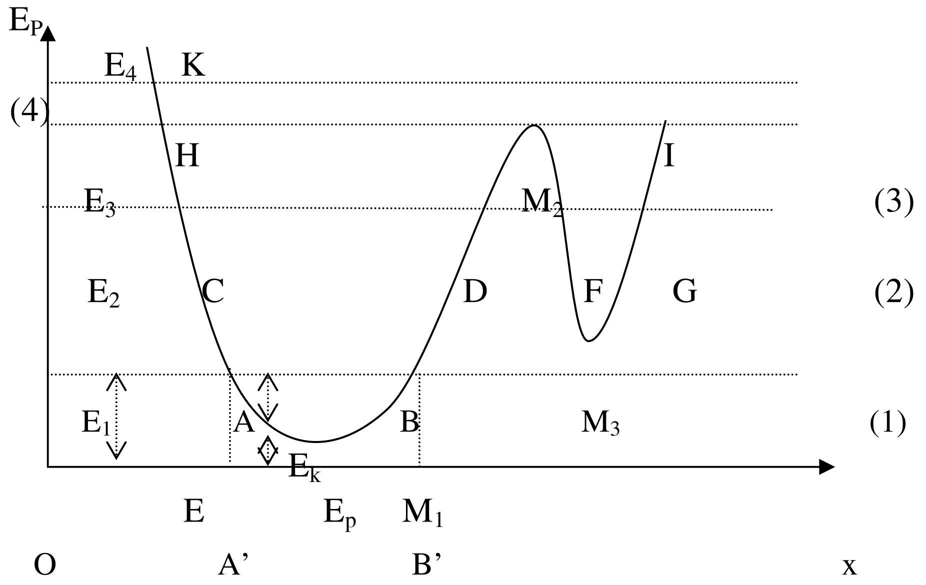
Trước hết ta xác định giới hạn của chất điểm, giả thuyết cơ năng của chất điểm trong trường lực thế có một trị số xác định bằng E :

$$mv^2/2 + E_P(x) = E = \text{const} \qquad (4.14)$$

Vì $mv^2/2 \geq 0$ nên ta có điều kiện $E_P(x) \leq E$ (4.15).

Bất đẳng thức (4.15) có nghĩa là trong quá trình chuyển động, chất điểm chỉ đi qua những vị trí mà tại đó thế năng của chất điểm không vượt quá cơ năng của nó. (4.15) xác định giới hạn của chuyển động.

Xét trường hợp đường cong thế năng $E_P = E_P(x)$ có dạng như hình vẽ :



Hình 4.3

Tại bất kỳ vị trí của chất điểm, ta có $E_k = E - E_p$ là động năng của chất điểm. Trên sơ đồ các đường nằm ngang biểu diễn cơ năng E, ta lần lượt xét các cơ năng có giá trị tại E_1, E_2, E_3, E_4.

Trường hợp cơ năng của chất điểm $E=E_1$, đường thẳng E_1 cắt đường biểu diễn của thế năng tại hai điểm A và B. Tại hai vùng trên, đường thế năng bên trái của A và bên phải của B ta có $E_k = E_t - E_p < 0$; nhưng vì $E_k=mv^2/2 > 0$ do đó chất điểm chỉ dao động trong vùng có tọa độ A’ và B’. Tại các điểm x=A’ và x=B’ vận tốc triệt tiêu. Các điểm này gọi là điểm lùi.

Trường hợp $E=E_2$ ta thấy có hai vùng chất điểm có thể chuyển động đó là vùng CD và FG. Lưu ý rằng chất điểm không thể di chuyển từ vùng này sang vùng kia, vì như thế chất điểm sẽ vượt qua vùng DF, tại đây động năng có giá trị âm là vùng bị cấm. Ta nói hai vùng CD và FG bị phân ly bởi một hàng rào thế năng tương hợp $E=E_3$.

<u>* Chất điểm dao động trong vùng HI :</u>

Nếu $E=E_4$ chất điểm không còn dao động mà chuyển động từ điểm k đến vô cùng.

Trên sơ đồ các điểm M_1, M_2, M_3 thế năng có giá trị cực đại hoặc cực tiểu, tại đó $dE_p/dx=0$, do đó F=0 chính là những vị trí cân bằng của chất điểm. Tại các điểm M_1 và M_3 thế năng có giá trị cực tiểu, các vị trí đó là những điểm cân bằng bền. Tại M_2 thế năng có giá trị cực đại, là điểm cân bằng không bền.

4.3 Trường hấp dẫn

Nhiều hiện tượng tự nhiên chứng tỏ rằng các vật có khối lượng luôn luôn tương tác lên nhau những lực hút. Trọng lực là lực hút của Quả đất đối với các vật chung quanh nó. Quả đất quay chung quanh Mặt trời là do lực hút của Mặt trời; Mặt trăng quay chung quanh Quả đất là do lực hút của Quả đất. Mọi vật trong vũ trụ đều hút lẫn nhau, gọi là *lực hấp dẫn vạn vật*.

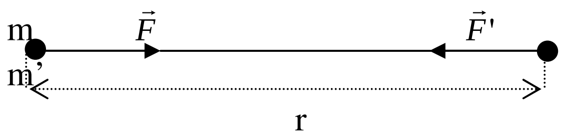
Newton là người đầu tiên nêu lên định luật cơ bản về lực hấp dẫn vạn vật, với định luật này đã giải thích được ba định luật Kepler, ba định luật này đưa ra sau khi phân tích nhiều số liệu đo đạc thiên văn trong Thái dương hệ. Ba định luật Kepler :

I- Quỹ đạo của các hành tinh là những elipse, mà Mặt trời là một tiêu điểm.

II- Diện tích quét bởi bán kính vector vẽ từ Mặt trời đến hành tinh là bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau (còn gọi là định luật diện tích).

III- Bình phương chu kỳ quay của hành tinh tỷ lệ với tam thừa bán kính trục lớn của quỹ đạo.

4.3.1 : Định luật hấp dẫn vạn vật :



hình 4.4

Hai chất điểm có khối lượng m và m' đặt cách nhau một khoảng r sẽ hút nhau bằng những lực có phương là đường thẳng nối liền hai điểm đó, có cường độ tỷ lệ thuận với tích hai khối lượng m và m' và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách r :

$$F = F' = G\frac{mm'}{r^2} \qquad (4.16)$$

G là một hằng số tỉ lệ, phụ thuộc vào các đơn vị, gọi là *hằng số hấp dẫn vạn vật.*

Trong hệ SI, thực nghiệm cho ta giá trị:

$$G = 6{,}67.10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \approx \frac{1}{15}\,10^{-9}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2.$$

Công thức (4.16) chỉ áp dụng cho trường hợp những chất điểm. Muốn tính lực hấp dẫn vạn vật giữa các vật có kích thước, ta phải dùng phương pháp tích phân. Người ta đã chứng minh được rằng vì lý do đối xứng, nên công thức (4.16) cũng áp dụng được cho hai quả cầu đồng chất, khi đó r là khoảng cách giữa hai tâm của hai quả cầu đó.

Nhiều thí nghiệm đã tiến hành nhằm kiểm chứng sự đúng đắn của định luật sau khi Newton công bố định luật này vào năm 1687. Thí nghiệm kiểm chứng đầu tiên được tiến hành ở phòng thí nghiệm do Cavendish thực hiện. Ngày nay, định luật hấp dẫn vạn vật là công cụ hết sức quan trọng trong thiên văn học, vũ trụ học và giải thích nhiều hiện tượng cũng như tính toán các đặc trưng của các hành tinh.

Các định luật của Kepler về chuyển động của các hành tinh trong Thái Dương Hệ được chứng minh một cách dễ dàng thông qua lực hấp dẫn vạn vật.

- Vài ứng dụng :

a) Sự thay đổi gia tốc trọng trường theo độ cao :

Xét một vật có khối lượng m trên mặt đất, giả sử Quả đất hình cầu bán kính r và kích thước của vật không lớn lắm so với bán kính r của Quả đất. Lực do Quả đất tác dụng vào vật là :

$F = GmM/R^2$ (M : khối lượng trái đất) (4.17).

Lực hấp dẫn này chính là lực trọng trường đặt lên vật m :

$$F = P = mg_0 \qquad (4.18)$$

Với g_0 gọi là gia tốc trọng trường ở mặt đất. Từ (4.17) và (4.18) ta có:

$$g_0 = GM/R^2 \qquad (4.19)$$

Giá trị g_0 được đo bằng thực nghiệm, phụ thuộc vĩ độ của nơi đo, nếu lấy giá trị trung bình $g_0 = 9{,}8 m/s^2$, bán kính Quả đất $R = 6{,}37.10^6 m$. $G=6{,}67.10^{-11} m^3kg^{-1}s^{-1}$ (hay Nm^2kg^{-2}) ta tính được khối lượng của Quả đất :

Từ (4.19) ta có :

$$M = g_0 r^2/G \approx 5{,}98.10^{24} kg$$

Tại một điểm cách mặt đất độ cao h, lực trọng trường tác dụng lên vật khối lượng m tính bởi :

$$P = GmM/(R+h)^2 = mg \qquad (4.20)$$

Suy ra gia tốc trọng trường tại độ cao h :

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \qquad (4.21)$$

(4.19) và (4.21) cho :

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = g_0\left(\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right)^2 = g_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} \qquad (4.22)$$

Do h<<r, suy ra h/r<<1; do đó $(1+h/r)^{-2} \approx 1 - 2h/r$, (4.22) trở thành :

$$g = g_0(1 - 2h/R) \qquad (4.23)$$

Công thức (4.23) cho thấy càng lên cao, g càng giảm. Công thức này chỉ đúng khi h<<R.

b) Tính khối lượng của thiên thể :

Ta có thể tính khối lượng của Mặt Trời thông qua lực hấp dẫn. Gọi R là khoảng cách từ tâm Quả đất đến tâm Mặt Trời, giả sử trái đất quay quanh Mặt Trời theo quỹ đạo tròn, gọi M là khối lượng Trái Đất, M_0 là khối lượng Mặt Trời. Trái đất quay quanh Mặt Trời do lực hấp dẫn của Mặt Trời lên Trái Đất, lực hấp dẫn ấy là :

$$F = GMM_0/R^2 \qquad (4.24)$$

Lực này đóng vai trò là lực hướng tâm. Trong chuyển động tròn đều ta đã biết lực hướng tâm là :

$$F = MV^2/R \qquad (4.25)$$

V : là vận tốc của Quả đất trên quỹ đạo, liên hệ với chu kỳ quay T của Quả đất :

$$V = 2\pi R/T \qquad (4.26)$$

Suy ra : $GMM_0/R^2 = M(2\pi R)^2/RT^2$ (4.27)

Suy ra khối lượng Mặt Trời :

$$M_0 = 4\pi^2.R^3/T^2G$$

Tính cụ thể bằng số ta được $M_0 \approx 2.10^{30}$kg.

4.3.2 Trường hấp dẫn

Để giải thích lực hấp dẫn, người ta cho rằng chung quanh một vật có khối lượng tồn tại *một trường hấp dẫn*, tương tự chung quanh một vật mang điện tích tồn tại *điện trường*.

Bất kỳ một vật nào có khối lượng đặt tại một vị trí trong không gian của một trường hấp dẫn một vật khác, đều chịu tác dụng của lực hấp dẫn. Trường hấp dẫn của Quả đất chính là trọng trường của nó.

Đại lượng đặc trưng cho trường hấp dẫn là *cường độ trường hấp dẫn* tại một điểm trong không gian. Xét một chất điểm khối lượng m, cường độ hấp dẫn tại một điểm trong không gian cách chất điểm m một khoảng r được xác định như sau :

Hình 4.5

Đặt vào trường hấp dẫn của m một chất điểm khối lượng m' cách m một khoảng r. lực hấp dẫn do m tác dụng lên m' là :

$$\vec{F} = -G\frac{mm'}{r^2}\vec{u}_r$$

$\vec{U}_r$ là vector đơn vị có phương trùng với đường thẳng nối mm' và chiều hướng ra xa m.

Cường độ trường hấp dẫn tại điểm P nơi đặt m' ký hiệu $\vec{H}$, có độ lớn:

$$H = F/m' = Gm/r^2 \qquad (4.28)$$

Biểu diễn bằng vector :

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m'} = -G\frac{m}{r^2}\vec{u}_r \qquad (4.29)$$

Biểu thức (4.29) là vector cường độ trường hấp dẫn tại điểm P do m gây ra. Biết được $\vec{H}$ ta có thể xác định được lực hấp dẫn $\vec{F}$ tác dụng lên m' tại một vị trí r cách m :

$$\vec{F} = m'\vec{H} \qquad (4.30)$$

Đơn vị của H là N/kg hoặc m/s^2 có cùng thứ nguyên với gia tốc.

Tại một điểm P trong không gian, nếu có nhiều trường hấp dẫn do nhiều chất điểm gây ra thì cường độ trường hấp dẫn tổng cộng bằng tổng vector cường độ trường hấp dẫn do từng chất điểm tạo nên :

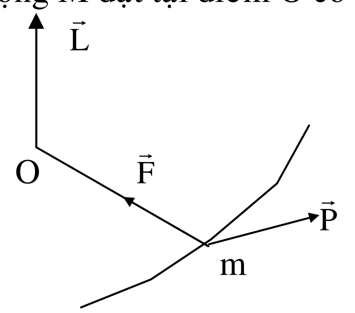
$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + ... + \vec{H}_n = -G\sum_i \frac{m_i'}{r_i^2}\vec{u}_i \qquad (4.31)$$

Do đó lực hấp dẫn tổng cộng sẽ là :

$$\vec{F} = m'\vec{H}_1 + m'\vec{H}_2 + ... + m'\vec{H}_n = m'\vec{H} \qquad (4.32)$$

a) Bảo toàn moment động lượng trong trường hấp dẫn :

Xét một chất điểm khối lượng m đặt trong trường hấp dẫn của một chất điểm khối lượng M đặt tại điểm O cố định là gốc tọa độ :



Hình 4.6

Áp dụng định lý moment động lượng áp dụng cho chất điểm m đối với điểm O, ta có :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad (4.33)$$

Lực $\vec{F}$ luôn luôn hướng tâm do đó $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad (4.34)$

Suy ra $\vec{L}$ không đổi.

Vậy khi một chất điểm m chuyển động trong trường hấp dẫn của một chất điểm M thì moment động lượng của m là một *đại lượng bảo toàn*, tức là giá trị của moment động lượng không đổi và vector $\vec{L}$ có phương, chiều cũng không đổi trong không gian. Chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng, mặt phẳng đó thẳng góc với vector $\vec{L}$.

Quả đất chuyển động chung quanh Mặt trời dưới tác dụng của lực hấp dẫn của Mặt trời nên quỹ đạo của Quả đất là một quỹ đạo phẳng. Biểu thức moment động lượng của Quả đất cho bởi :

$$L = mr^2\omega = \text{const} \qquad (4.35)$$

Chứng tỏ khi chuyển động gần mặt trời (r giảm), vận tốc góc ω càng lớn và ngược lại.

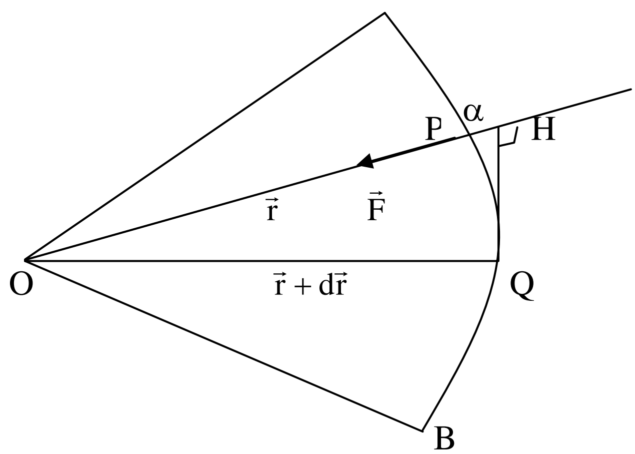
b) Thế năng hấp dẫn

Ta biết rằng lực hấp dẫn thuộc loại lực xuyên tâm, chỉ phụ thuộc khoảng cách, vì vậy thế năng hấp dẫn được xác định qua biểu thức :

$$\vec{F} = -\frac{\partial Ep}{\partial r}\vec{u}_r \qquad (4.36)$$

Với $\vec{U}_r$ là vector đơn vị có chiều ngược chiều với $\vec{F}$.

Xét một chất điểm m chuyển động trong trường hấp dẫn do M tạo ra, di chuyển từ A đến B như hình vẽ :



Công của lực $\vec{F}$ trong chuyển dời vi phân $d\vec{S} = \vec{PQ}$

$$dA = \vec{F}\, d\vec{S} = \vec{F}.\overrightarrow{PQ} = F.PQ.\cos\alpha$$

Từ hình vẽ ta có : PQ.cosα = - $\overline{PH}$; ($\overline{PH}$ là độ dài đại số, chiều dương O→ P).

Vậy $\qquad dA = - F.PH \qquad (4.37)$

Đặt $\overline{OP} = r$, $\overline{OH} \approx \overline{OQ} = r + dr$

Và $\overline{PH} = \overline{OH} - \overline{OP} = r + dr - r = dr$

$$dA = - Fdr = - G\frac{Mm}{r^2}dr$$

Công của lực F trong chuyển dời m từ A đến B :

$$A_{AB} = -\int_{r_A}^{r_B} Fdr = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$A_{AB} = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A}$$

$$A_{AB} = -G\frac{Mm}{r_A} - (-G\frac{Mm}{r_B}) \qquad (4.38)$$

Công của lực hấp dẫn F chỉ phụ thuộc vị trí điểm đầu A và điểm cuối B. vậy trường hấp dẫn của M *là một trường thế*.

Theo định nghĩa của thế năng, ta có thể xác định thế năng của chất điểm m trong trường hấp dẫn của M tại vị trí A :

$$E_p(A) = - G\frac{Mm}{r_A} + C \qquad (4.39)$$

Tại B :

$$E_p(B) = - G\frac{Mm}{r_B} + C \qquad (4.40)$$

Thỏa mãn hệ thức :

$$A_{BA} = E_p(A) - E_p(B)$$

Tổng quát, thế năng của m tại một vị trí cách O một khoảng r :

$$E_p(r) = -G\frac{Mm}{r} + C \qquad (4.41)$$

C là hằng số tùy ý, có giá trị bằng thế năng tại vô cùng :

$$E_p(\infty) = C$$

Trường hấp dẫn là một trường thế, do đó khi m chuyển động, cơ năng bảo toàn :

$$E = E_p + E_k$$

$$E = - G\frac{Mm}{r} + \frac{mv^2}{2} = \text{const} \text{ , chọn } C = 0 \qquad (4.42)$$

4.4 Chuyển động trong trường hấp dẫn

Ta biết rằng, trường hấp dẫn là một trường thế. Do đó, cơ năng bảo toàn theo (4.42). ta có cơ năng của chất điểm m chuyển động trong trường thế gây bởi chất điểm M là :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \qquad (4.42')$$

Nếu m chuyển động với quỹ đạo tròn thì lực hướng tâm sẽ là :

$F=mv^2/r$, với r : khoảng cách từ m đến M.

Ta có : $\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$

Do đó : $\frac{mv^2}{2} = G\frac{Mm}{2r}$

(4.42) trở thành :

$$E = -GMm/2r \qquad (4.43)$$

(4.43) chứng tỏ rằng cơ năng có giá trị âm. Tổng quát, các chuyển động trong trường hấp dẫn với quỹ đạo là elipse thì cơ năng có giá trị âm. Trong trường hợp cơ năng E>0 : Trường hợp này $E_k>E_p$.

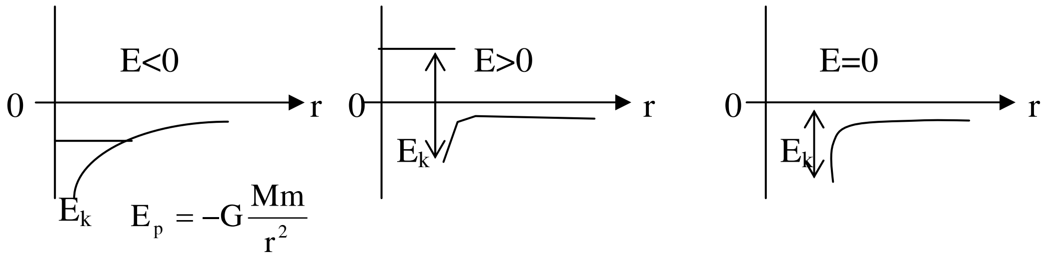
xét khi r tiến đến vô cùng. Lúc này từ (4.42) ta có :

$$E = mv^2_\infty/2$$

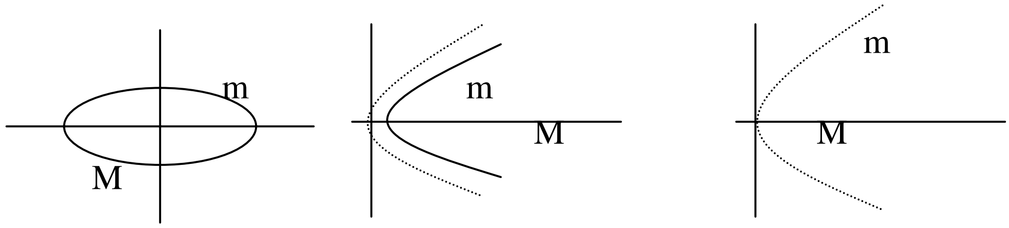
Hay $v_\infty = \sqrt{2E/m}$ (4.44)

Quỹ đạo của m bây giờ là một hypecbol.

Trong trường hợp E = 0 : trường hợp này, tại vô cùng, chất điểm m có vận tốc triệt tiêu (v_∞=0) quỹ đạo của m là một parabol (xem hình).



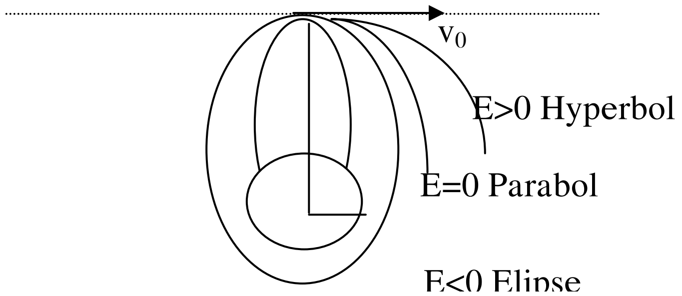
Hình 4.8



Elipse Hyperbol Parabol

Trường hợp đặc biệt đối với việc phóng vệ tinh ở Quả đất : tại một điểm ở độ cao h so với mặt đất, vệ tinh được phóng ra với vận tốc ban đầu v_0 vuông góc với đường thẳng đứng. Tùy thuộc vào cơ năng E của vệ tinh mà nó sẽ có quỹ đạo elipse, hyperbol hay parabol, trong đó tâm Quả đất là một tiêu điểm của quỹ đạo. Gọi v_0 là vận tốc ban đầu cơ năng của vệ tinh sẽ là, theo (4.42) :

$$E = mv_0^2/2 + \left(-G\frac{Mm}{R+h}\right)$$



Hình 4.9

<u>* Vận tốc vũ trụ cấp I :</u>

Giả sử vệ tinh được phóng ở một độ cao không lớn so với bán kính Quả đất h << R (với R có giá trị trung bình cỡ : 6378km) ta có thể xem bán kính qũy đạo của vệ tinh bằng bán kính R của Quả đất. Vận tốc v_I của vệ tinh trong chuyển động tròn có liên hệ với gia tốc hướng tâm :

$$a_0 = g_0 = v^2/R \qquad (4.45)$$

suy ra $v_I = \sqrt{g_0 R}$; lấy $g_0 = 9{,}8 m/s^2$

Thay số ta thu được :

$$v_I = 7{,}9 \text{ km/s} \approx 28.440 \text{ km/h}$$

Nếu vận tốc ban đầu $v_0 < v_I$ vệ tinh sẽ rơi xuống Quả đất.

Nếu $v_0 > 7{,}9$ km/s (nhưng nhỏ hơn vận tốc cấp hai v_{II}) thì vệ tinh sẽ chuyển động xung quanh Quả đất theo qũy đạo elipse.

<u>* Vận tốc vũ trụ cấp II :</u>

Trong trường hợp này cơ năng của vệ tinh $E \geq 0$; vẫn giả sử rằng vệ tinh xuất phát tại nơi cách tâm Quả đất một khoảng R bằng bán kính Quả đất, ta có :

$$mV_0^2/2 + (-GMm/R) = mV_\infty^2/2 + (-GMm/\infty)$$

Vì $GMm/\infty = 0$; $mV_\infty^2/2 \geq 0$, do đó :

$$mV_0^2/2 \geq GMm/R$$

Theo (4.19) : $g_0 = GM/R^2$

Do đó : $V_0 \geq \sqrt{2Rg_0}$ (4.46)

Giá trị tối thiểu của V_0 chính là vận tốc vũ trụ cấp II.

$$V_{II} = \sqrt{2g_0R} \qquad (4.47)$$

Giá trị cụ thể :

$$V_{II} = 11{,}2 \text{ km/s} \approx 40.320 \text{ km/h}.$$

CHƯƠNG V CƠ HỌC CHẤT LƯU

5.1 Đại cương về cơ học chất lưu

CHẤT LƯU BAO GỒM CÁC CHẤT LỎNG VÀ CHẤT KHÍ. VỀ MẶT CƠ HỌC, MỘT CHẤT LƯU CÓ THỂ QUAN NIỆM LÀ MỘT MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC TẠO THÀNH CÁC CHẤT ĐIỂM LIÊN KẾT VỚI NHAU BẰNG NHỮNG NỘI LỰC TƯƠNG TÁC. CÁC CHẤT LƯU CÓ NHỮNG TÍNH CHẤT TỔNG QUÁT SAU :

1. Chúng không có hình dạng nhất định như một vật rắn.
2. Các chất lưu bao gồm các chất lưu dễ nén (chất khí) vá các chất lưu khó nén (chất lỏng).
3. Khi một chất lưu chuyển động, các lớp của nó chuyển động với những vận tốc khác nhau, nên giữa chúng có những lực tương tác gọi là lực nội ma sát hay lực nhớt.

Chất lưu lý tưởng : một chất lưu gọi là lý tưởng khi chất ấy hòan tòan không nén được và trong chất ấy không có các lực nhớt.

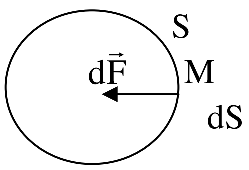
Một chất lưu không lý tưởng gọi là chất lưu thực.

Theo định nghĩa trên đây, mọi chất lưu đều là chất lưu thực. Tuy nhiên một chất lỏng rất lưu động (không nhớt) có thể tạm coi như một chất lưu lý tưởng.

5.2 Tĩnh học chất lưu

5.2.1 Áp suất

Xét trong lòng chất lưu một khối chất lưu được bao quanh bởi một mặt kín S (mặt S có tính chất tưởng tượng), gọi dS là một diện tích vi phân bao quanh một điểm bất kỳ trên mặt S.



Hình 5.1

Thực nghiệm chứng tỏ rằng phần chất lưu bên ngoài mặt S tác dụng lên dS một lực $d\vec{F}$ gọi là áp lực (lực nén) trên dS. Trong trường hợp chất lưu nằm yên, $d\vec{F}$ vuông góc với dS ta có thể định nghĩa áp suất tại điểm M.

$$p = \frac{dF}{dS} \qquad (5.1)$$

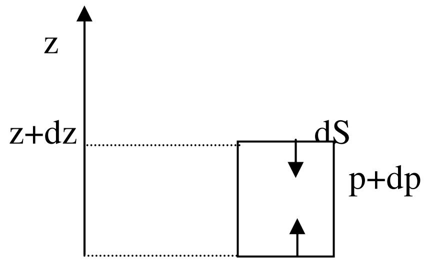
Thực nghiệm cũng chứng tỏ rằng với chất lưu lý tưởng, áp suất p tại M là một đại lượng xác định (chỉ phụ thuộc vị trí điểm M) không phụ thuộc hướng của $d\vec{F}$.

5.2.2 Công thức cơ bản của tĩnh học chất lưu

Xét một chất lưu nằm yên trong trọng trường. Lấy một khối chất lưu nằm trong hình trụ thẳng đứng có độ cao dz đáy là dS.

Gọi áp suất ở đáy dưới là p, ở đáy trên là p + dp. Tổng áp lực nén vào hai đáy khối chất lưu là :

$$pdS - (p + dp)dS \qquad (5.2)$$



Hình 5.2

Đó cũng là áp lực của chất lưu nén vào hình trụ (vì tổng áp lực nén vào mặt bên triệt tiêu nhau) khi chất lưu nằm cân bằng, tổng áp lực nén vào khối chất lưu phải cân bằng với trọng lực của chất lưu. Gọi dm là khối lượng chất lưu của khối chất lưu hình trụ :

$$(dm)g = (\rho dS.dz)g$$

Trong đó ρ là khối lượng riêng của chất lưu; dS.dz là thể tích của khối chất lưu có chiều cao dz và mặt đáy dS. Ta có phương trình :

$$pdS - (p + dp)dS = \rho dSdz.g \qquad (5.3)$$

$$dp = -\rho gdz \qquad (5.4)$$

(5.4) là công thức cơ bản của tĩnh học chất lưu.

<u>** Hệ quả*</u> : nếu trong chất lưu cân bằng có hai điểm ở độ cao z_0 và z. Hai điểm ấy có áp suất liên hệ nhau bởi phương trình :

$$p(z) - p(z_0) = -\int_{z_0}^{z} \rho gdz \qquad (5.5)$$

Nếu chất lưu hoàn toàn không nén được (ρ không đổi) và gia tốc trọng trường không đổi ta có :

$$p(z) - p(z_0) = -\rho g(z - z_0)$$

Hay $\quad p(z) = p(z_0) - \rho g\Delta z \qquad (5.6)$

Hay $\quad p(z) + \rho gz = p(z_0) + \rho gz_0 \qquad (5.7)$

Như vậy những điểm nào càng ở dưới áp suất càng lớn.

<u>* Từ (5.7) suy ra :</u>

a- Hai điểm trong chất lưu trên cùng một mặt phẳng ngang ($z = z_0$) thì áp suất tương ứng bằng nhau (mặt đẳng áp).

b- Mặt thoáng (p = hằng số) của một chất lỏng nằm yên phải là mặt phẳng ngang (z = hằng số) (nguyên tắc bình thông nhau). Tuy nhiên kết quả này chỉ đúng với mặt thoáng có diện tích không lớn (mặt thoáng của đại dương uốn cong theo hình dạng quả đất) mặt thoáng của các chất lưu đựng trong các ống nhỏ, do hiện tượng mao dẫn cũng không có cùng chiều cao.

5.3 động học chất lưu lý tưởng

53.1 Định luật bảo toàn dòng

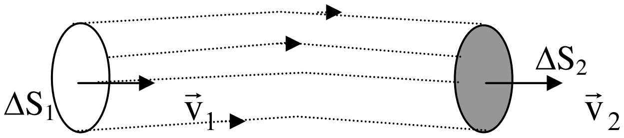
Khi khảo sát chuyển động của một chất lưu quan niệm như một môi trường liên tục, ta có thể xét theo hai cách :

a- Theo dõi từng chất điểm của khối chất lưu : nghiên cứu qũy đạo, vận tốc, gia tốc của từng chất điểm ấy, phương pháp này được tiến hành bởi J.Lagrange.

b- Lấy một điểm M ở một vị trí xác định trong chất lưu, xét các chất điểm khác nhau đi qua điểm M tại những thời điểm khác nhau tại mỗi thời điểm t, vận tốc của khối lưu chất đi qua M là $\vec{v} = \vec{v}(M,t)$.

Nếu $\vec{v}$ chỉ phụ thuộc M mà không phụ thuộc t ta có chất lưu chuyển động dừng. Trong chương này ta chỉ xét chuyển động dừng của chất lưu.

Qũy đạo của các chất điểm của chất lưu chuyển động được gọi là đường dòng. Đó là những đường cong mà tiếp tuyến tại mỗi điểm có cùng phương với vectơ vận tốc của chất điểm của chất lưu tại điểm ấy. Các đường cong tựa trên một đường cong kín tạo thành một ống dòng.



Hình 5.3

Xét một chất lưu chuyển động trong một ống dòng rất nhỏ : gọi ΔS_1 và ΔS_2 là hai tiết diện thẳng bất kỳ của ống dòng. Trong một đơn vị thời gian, lượng chất lưu chảy qua ΔS_1 và ΔS_2 (lưu lượng) là $\Delta S_1 V_1$ và $\Delta S_2 V_2$, với V_1, V_2 lần lượt là vận tốc chuyển động của lưu chất tại vị trí ΔS_1 và ΔS_2 vì chất lưu lý tưởng, nghĩa là hoàn toàn không nén được nên ta có :

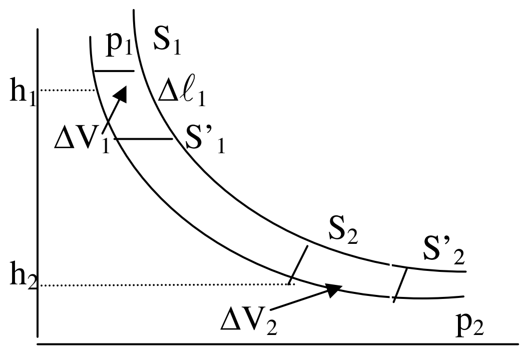
$$V_1 \Delta S_1 = V_2 \Delta S_2 \qquad (5.8)$$

CÔNG THỨC TRÊN BIỂU THỊ ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN DÒNG CHẤT LƯU.

* *Hệ quả* : ΔS càng nhỏ thì vận tốc dòng chảy v càng lớn.

5.3.2 Định luật Bernoulli

Trong chất lưu lý tưởng, ở chế độ dừng, xét một ống dòng có tiết diện khá nhỏ như hình vẽ.



Hình 5.4

Xét thể tích lưu chất chạy qua tiết diện S_1 và S_2 trong một khoảng thời gian Δt, thể tích lưu chất này đi qua ống dòng tiết diện S_1 sẽ di chuyển đến S'_1 và S_2 di chuyển đến S'_2 trong khoảng thời gian Δt với các đoạn dịch chuyển lần lượt là $\Delta \ell_1$ và $\Delta \ell_2$. Do chất lưu lý tưởng nên thể tích chất lưu đi qua S_1 và S_2 trong khoảng thời gian Δt phải bằng nhau :

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V \qquad (5.9)$$

Trong trọng trường, các hạt trong lưu chất có cơ năng bằng tổng động năng và thế năng trọng trường, giả sử ống dòng và $\Delta\ell$ đủ nhỏ sao cho mọi chất điểm đi qua đọan $\Delta\ell$ có vận tốc là như nhau.

Gọi h_1, h_2 lần lượt là độ cao của ΔV_1 và ΔV_2

v_1, v_2 lần lượt là vận tốc chất lưu trong ΔV_1, ΔV_2.

Độ tăng cơ năng của khối lưu chất từ ΔV_1 đến ΔV_2 là :

$$\Delta E=(\rho\,\Delta V.v_2^2/2+\rho\,\Delta V g h_2)-(\rho\,\Delta V.v_1^2/2+\rho\,\Delta V g h_1) \qquad (5.10)$$

Trong đó ρ là khối lượng riêng của lưu chất.

Trong chất lưu lý tưởng không có lực ma sát, do đó độ tăng cơ năng ΔE phải bằng công của áp lực ở hai thể tích ΔV_1, ΔV_2.

Áp lực ở hai bên thành ống dòng vuông góc với đường dịch chuyển của chất lưu nên áp lực này không sinh công.

Theo định luật bảo toàn cơ năng ta có $A = \Delta E$. Vậy công tạo bởi áp lực ở hai đầu tiết diện S_1 và S_2 là :

$$A= p_1S_1\Delta\ell_1 - p_2S_2\ell_2 = (p_1 - p_2)\Delta V \qquad (5.11)$$

Từ (5.10) và (5.11) sau khi khử ΔV và sắp xếp lại ta có :

$$\rho\, v_1^2/2 + \rho\, g h_1 + p_1 = \rho\, v_2^2/2 + \rho\, g h_2 + p_2 \qquad (5.12)$$

Do S_1, S_2 được chọn bất kỳ do đó ta có thể viết tổng quát phương trình (5-12) :

$$\rho v^2/2 + \rho gh + p = \text{không đổi} \qquad (5.13)$$

Phương trình (5.13) được gọi là định luật Bernouilli của một chất lưu lí tưởng chuyển động trong trọng trường đều.

* Vài hệ quả của phương trình Bernouilli :

a) Trường hợp chất lưu chảy trong một ống nằm ngang

$h_1 = h_2$ phương trình (5.12) cho ta.

$$\rho v_1^2/2 + p_1 = \rho v_2^2/2 + p_2 \qquad (5.14)$$

Gọi tiết diện của ống ở hai vị trí (1) và (2) lần lượt bằng S_1 và S_2. Lưu lượng của lưu chất không đổi và bằng :

$$Q = v_1S_1 = v_2S_2$$

Phương trình (5.14) có thể viết :

$$\rho Q^2/2S_1^2 + p_1 = \rho Q^2/2S_2^2 + p_2 \qquad (5.15)$$

Nếu $S_1 > S_2$ thì $p_1 > p_2$.

Vậy khi chất lưu chảy trong ống nằm ngang có tiết diện thay đổi thì chỗ nào có tiết diện lớn, áp suất cũng lớn và ngược lại (hiện tượng Venturi).

b) Công thức Torricelli

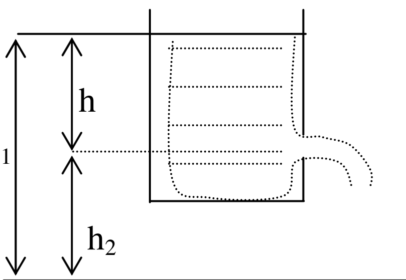
Xét một bình đựng lưu chất, gần đáy bình có một lỗ nhỏ, tại đó chất lỏng chảy ra, ở đây ống dòng một đầu là mặt thoáng và một đầu là lỗ nhỏ nơi lưu chất chảy ra với vận tốc v. Vận tốc của các hạt trong lưu chất trên mặt thoáng xem như bằng không. Phương trình (5.12) trở thành :

$$\rho gh_1 = \rho\frac{v^2}{2} + \rho gh_2 \qquad (5.16)$$

Ta bỏ qua $p_1 = p_2$ vì áp suất khí quyển bằng nhau nếu chiều cao của bình không lớn lắm. Đặt $h = h_1 - h_2$ là chiều cao từ lỗ nhỏ đến mặt thoáng, ước lượt số hạng ρ, ta có :

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (5.17)$$

Công thức (5.17) gọi là công thức Torricelli.



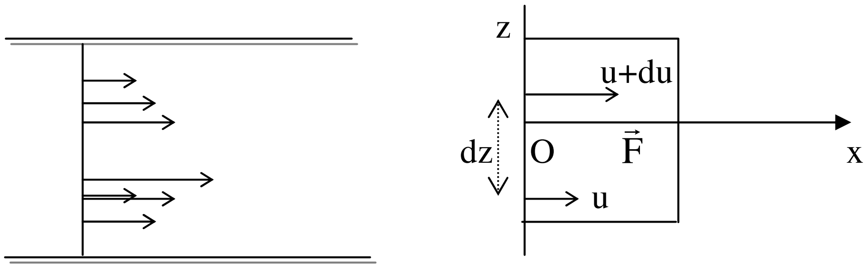
Hình 5.5

Công thức này trùng với công thức của vật rơi tự do trong chân không. Do đó, vận tốc của dòng chảy thoát ra từ một lỗ của bình có độ cao h tính từ mặt thoáng bằng vận tốc của một vật rơi tự do trong chân không dưới tác dụng của trọng lực, có cùng chiều cao h. Điều này chỉ đúng nếu chất lưu lý tưởng. Trong thực tế với chất *lưu thực còn có hiện tượng ma sát nhớt nên vận tốc thu được sẽ nhỏ thua vận tốc ở (5.17).*

5.4 Hiện tượng nội ma sát (nhớt)

5.4.1 Hiện tượng nội ma sát và định luật newton

Trong mục này ta xét trường hợp chất lưu thực. Giả sử một dòng lưu chất chuyển động trong một ống hình trụ có tiết diện đều. Song song với trục Ox như hình vẽ.



Hình 5.6

Trục Oz hướng vuông góc với thành ống. Vận tốc định hướng của lưu chất trong ống thực nghiệm cho thấy, các phần tử càng gần trục của ống có vận tốc lớn hơn các phần tử của lưu chất gần thành ống. Như vậy, hình thành những lớp lưu chất có vận tốc khác nhau, chúng trượt lên nhau, xảy ra hiện tượng ma sát nội giữa các lớp đó làm ngăn cản chuyển động của lưu chất trong ống. Lực ma sát nội này nằm theo phương tiếp tuyến của mặt tiếp xúc giữa hai lớp.

Thực nghiệm chứng tỏ rằng lực ma sát nội F giữa hai lớp chất lưu :

- Vuông góc với Oz.
- Cường độ tỉ lệ với độ biến thiên vận tốc định hướng theo phương z, (du/dz).
- Tỉ lệ với diện tích tiếp xúc ΔS giữa hai lớp.
- Phụ thuộc bản chất của lưu chất.

$$\Delta F = \eta \frac{du}{dz} \Delta S \qquad (5.18)$$

η : là hệ số tỉ lệ gọi là hệ số ma sát nội hay hệ số ma sát nhớt. Trong hệ đơn vị SI, η tính ra $N.s/m^2$ = Kg/m.s hay Pa.s (đọc là Pascal-giây). Công thức (5.18) gọi là định luật Newton.

<u>* -Sự chảy thành lớp và sự chảy hỗn loạn :</u>

Trong lưu chất khi chuyển động nếu các lớp lưu chất di chuyển không trộn lẫn vào nhau, chúng chảy thành từng lớp, các ống dòng có hình dạng nhất định, các phần tử của lưu chất có qũy đạo là những đường cong không cắt nhau ta có chế độ chảy thành lớp. Ngược lại khi vận tốc lưu chất đủ lớn hay tiết diện dòng chảy thay đổi đột ngột về độ lớn, trong lưu chất xuất hiện hiện tượng chảy hỗn loạn, trong lưu chất không còn các lớp di chuyển ổn định, qũy đạo các phần tử của lưu chất hình thành những "xoáy rối". Lưu chất không còn ở chế độ dừng.

Để xác định trạng thái của lưu chất theo chế độ chảy thành lớp hay chảy hỗn lọan, Reynolds đưa ra đại lượng gọi là số Reynolds.

Khi lưu chất có số Reynolds nhỏ sự chảy thành lớp là chủ yếu, bắt đầu từ một giá trị nào đó của số Reynolds thì xuất hiện sự chảy hỗn loạn. Số Reynolds được xác định như sau :

$$R_e = \rho v\ell/\eta \qquad (5.19)$$

ρ : Khối lượng riêng của lưu chất.

v : Vận tốc trung bình của dòng chảy.

ℓ : Độ dài đặc trưng của tiết diện ngang, với tiết diện có dạng đường tròn bán kính R thì $\ell = R$.

η : Hệ số nhớt của lưu chất.

Hai đại lượng phụ thuộc bản chất của lưu chất ρ và η có thể gộp thành tỉ số :

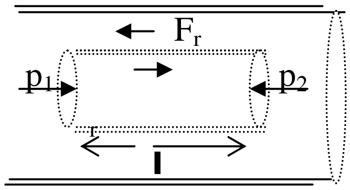
$$\nu = \eta/\rho \qquad (5.20)$$

gọi là độ nhớt động, (5.19) trở thành :

$$R_e = v\ell/\nu \qquad (5.21)$$

5.4.2 Sự chảy của lưu chất trong một ống trụ

Xét một ống hình trụ bán kính R, trong đó có một lưu chất đang chảy ở chế độ chảy thành lớp. Ta hãy tính sự phân bố của vận tốc theo vị trí kể từ tâm ống đến thành ống.



Hình 5.7

Ta hãy xét một thể tích chất lưu hình trụ nằm trong lưu chất bán kính r < R, chiều dài ℓ; p_1, p_2 là áp suất ở hai đầu ống. Lực tác dụng vào lưu chất :

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2 \qquad (5.22)$$

Lực tổng hợp này nằm dọc theo phương của dòng chảy.

Lực ma sát nội, tác dụng lên lưu chất trong hình trụ theo (5.18) là :

$$\eta\left|\frac{dv}{dr}\right|2\pi r\ell \qquad (5.23)$$

Theo điều kiện của chế độ chảy dừng ta phải có :

$$(p_1 - p_2)\,\pi r^2 = \eta\left|\frac{dv}{dr}\right| 2\pi r\ell \qquad (5.24)$$

Vì vận tốc giảm khi r tăng từ trục ống ra thành ống do đó :

$\left|\dfrac{dv}{dr}\right| = -\dfrac{dv}{dr}$. Từ (5.24) ta có :

$$-\frac{dv}{dr} = (p_1 - p_2)r/2\eta\ell \qquad (5.25)$$

Hay $\quad dv = -(p_1 - p_2)rdr/2\eta\ell \qquad (5.26)$

Tích phân (5.26) ta được :

$$v = -(p_1 - p_2)r^2/2\eta\ell + C \qquad (5.27)$$

Hằng số C được xác định bởi khi r = R thì v = 0 với R là bán kính của ống.

$$C = (p_1 - p_2)R^2/4\eta\ell \qquad (5.28)$$

Phương trình (5.27) trở thành :

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell}R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (5.29)$$

Vận tốc của lưu chất ở trục của ống là :

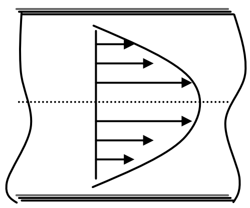
$$v_0 = v(o) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell}R^2 \qquad (5.30)$$

Đưa v_0 vào (5.29) ta thu được phương trình phân bố vận tốc

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (5.31)$$

Ta thấy với chế độ chảy thành lớp vận tốc của dòng chảy thay đổi khi tăng khoảng cách từ trục của ống theo đường Parabol.

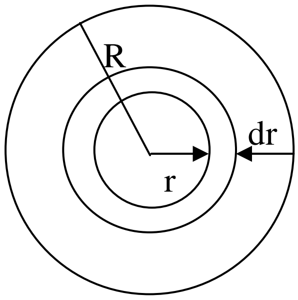
Hình 5.8



<u>Lưu lượng của lưu chất trong ống trụ. Công thức Poiseuille</u>

Xét trường hợp chế độ chảy thành lớp, ta hãy tính lượng lưu chất đi qua tiết diện của ống trong một đơn vị thời gian, lượng lưu chất đó gọi là lưu lượng của lưu chất Q . Giả sử ống trụ có bán kính R ta xét một diện tích vi phân dS của tiết diện, tiết diện vi phân có dạng một hình vành khăn bán kính nhỏ là r, bán kính lớn r + dr như hình vẽ.

Hình 5.9



Diện tích vi phân $dS = 2\pi rdr$

Vận tốc của lưu chất tại vị trí r theo (5.31) là :

$$v(r) = v_0(1-r^2/R^2)$$

Do đó lưu lượng $dQ = vdS$

$$dQ = v_0(1- r^2/R^2)2\pi rdr \qquad (5.32)$$

Lưu lượng của lưu chất :

$$Q = \int_0^R dQ = \int_0^R v_0(1-\frac{r^2}{R^2})\,2\pi rdr$$

$$Q = \frac{1}{2}\pi R^2 v_0 = \frac{1}{2}Sv_0 \qquad (5.33)$$

Từ phương trình (5.33) ta thấy vận tốc trung bình của lưu chất bằng một nửa vận tốc cực đại của dòng chảy tại tâm ống.

Kết hợp (5.33) và (5.30) ta đi đến công thức của lưu lượng chất lưu.

$$Q = (p_1 - p_2)\,\pi R^4/8\eta\ell \qquad (5.34)$$

Công thức này gọi là công thức Poiseuille. Theo công thức này ta thấy lưu lượng của lưu chất trong ống tỉ lệ bậc bốn với bán kính của ống; tỉ lệ nghịch với chiều dài của ống và tỉ lệ nghịch với hệ số nhớt của lưu chất. Cần lưu ý rằng công thức này chỉ đúng khi lưu chất ở chế độ chảy thành lớp. Công thức (5.34) dùng để xác định hệ số nhớt của một lưu chất xác định.

$$\eta = (p_1 - p_2)\pi R^4/8Q\ell \qquad (5.35)$$

Trong đó các đại lượng Q, ℓ, R và áp suất p_1, p_2 đều có thể xác định bằng thực nghiệm.

CHƯƠNG VI CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

6.1. Tính bất biến của vận tốc ánh sáng

Trong một thời gian dài, cơ học Newton hay cơ học cổ điển đã chiếm mọi vị trí thống trị trong sự phát triển của khoa học. Trên cơ sở cơ học Newton đã hình thành những quan niệm về không gian, thời gian và vật chất. Theo những quan niệm đó thì không gian, thời gian và vật chất không phụ thuộc chuyển động, nghĩa là khoảng thời gian của một hiện tượng xảy ra, kích thước của một vật và khối lượng của nó đều như nhau trong mọi hệ quy chiếu đứng yên hay chuyển động.

Nhưng đến cuối thế kỷ 19 đầu thế kỷ 20, khoa học và kỹ thuật phát triển rất mạnh, đã có thể tiếp cận với những vận tốc cỡ vận tốc ánh sáng. Khi đó xuất hiện sự mâu thuẫn với các quan điểm của cơ học Newton, cụ thể là: không gian, thời gian, khối lượng đều phụ thuộc vào chuyển động. Những khó khăn đó cơ học Newton không giải quyết được. Từ đó rút ra kết luận là: Cơ học Newton chỉ áp dụng được cho những vật chuyển động với vận tốc nhỏ so với vận tốc ánh sáng ($v \ll c$).

Như vậy, cần phải xây dựng một môn cơ học tổng quát hơn áp dụng được cho tất cả vật chuyển động với vận tốc v vào cỡ c và coi các trường hợp các vật chuyển động với vận tốc $v \ll c$ như một trường hợp giới hạn. Đó là môn cơ học tương đối tính hay còn gọi là thuyết tương đối hẹp Einstein.

Các tiên đề Einstein:

Để xây dựng nên thuyết tương đối, năm 1905 Einstein đã đưa ra hai nguyên lý sau:

6.1.1 Nguyên lý tương đối

Mọi định luật vật lý đều như nhau trong các hệ quy chiếu quán tính.

6.1.2 Nguyên lý về sự bất biến của vận tốc ánh sáng

Vận tốc ánh sáng trong chân không đều bằng nhau đối với mọi hệ quán tính. Nó có giá trị $c \approx 3.10^8$m/s và là giá trị vận tốc lớn nhất trong tự nhiên.

Ở đây cần phân biệt với nguyên lí tương đối Galilê trong cơ học cổ điển. Theo nguyên lí này chỉ các định luật cơ học là bất biến khi chuyển từ hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác. Điều đó có nghĩa là phương trình mô tả một định luật cơ học nào đó, biểu diễn qua tọa độ và thời gian sẽ giữ nguyên dạng trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Như vậy, nguyên lí tương đối Einstein đã mở rộng nguyên lí tương đối Galilê từ các hoạt động cơ học sang các hoạt động vật lý nói chung.

Trong cơ học cổ điển Newton, tương tác được mô tả dựa vào thế năng tương tác. Đó là một hàm của tọa độ những hạt tương tác, từ đó suy ra các lực tương tác giữa một chất điểm nào đó với các chất điểm còn lại, tại một thời điểm chỉ phụ thuộc vào vị trí của các chất điểm tại cùng một thời điểm đó. Sự thay đổi vị trí của một chất điểm nào đó trong hệ chất điểm, tương tác sẽ ảnh hưởng ngay tức thời đến các điểm khác tại cùng thời điểm. Như vậy tương tác truyền đi tức thời, hay nói cách khác vận tốc truyền tương tác là vô hạn.

Tuy nhiên, thực nghiệm đã chứng tỏ, trong tự nhiên không tồn tại những tương tác tức thời. Nếu tại một chất điểm nào đó của hệ có xảy ra một sự thay đổi nào đó, thì sự thay đổi này chỉ ảnh hưởng đến một chất điểm khác sau một khoảng thời gian $\Delta t \neq 0$ nào đó. Như vậy vận tốc truyền tương tác là hữu hạn. Theo thuyết tương đối của Einstein vận tốc truyền tương tác là như nhau trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Nó là một hằng số phổ biến. Thực nghiệm chứng tỏ vận tốc không đổi này là cực đại và bằng vận tốc ánh sáng truyền trong chân không ($c \approx 3.10^8$m/s). Trong thực tế hàng ngày, ta thường gặp các vận tốc rất nhỏ so với vận tốc ánh sáng ($v << c$). Do đó, trong cơ học cổ điển ta có thể coi vận tốc truyền tương tác là vô hạn mà vẫn thu được những kết quả đủ chính xác. Như vậy, về mặt hình thức có thể chuyển từ thuyết tương đối Einstein sang cơ học cổ điển bằng cách cho $c \to \infty$ trong các công thức cơ học tương đối tính.

6.2. Động học tương đối tính – phép biến đổi Lorentz

6.2.1 Sự mâu thuẫn của phép biến đổi Galilê với thuyết tương đối Einstein

Theo phép biến đổi Galilê, thời gian diễn biến của một quá trình vật lý trong các hệ quy chiếu quán tính K và K' đều như nhau:

$$t = t'$$

KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM 1 VÀ 2 NÀO ĐÓ TRONG CÁC HỆ K VÀ K' ĐỀU NHƯ NHAU:

$$\Delta \ell = x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$$

(CÁC ĐẠI LƯỢNG CÓ DẤU PHẨY ĐỀU ĐƯỢC XÉT TRONG HỆ K').

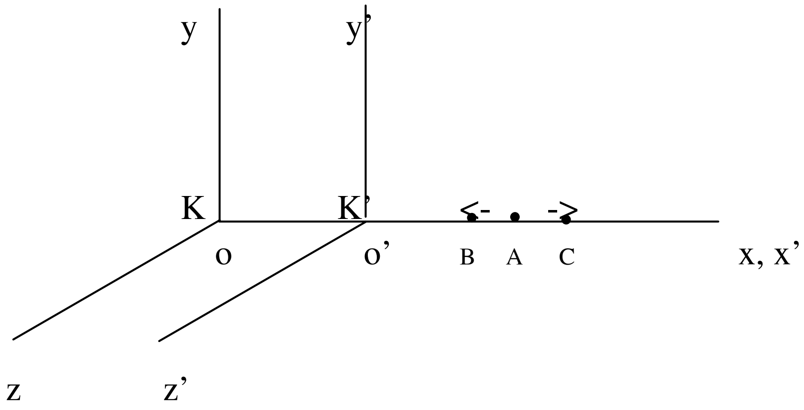
Vận tốc tuyệt đối của chất điểm bằng tổng vectơ các vận tốc tương đối v' và vận tốc V của hệ quán tính K' đối với hệ K:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \qquad (6.1)$$

Tất cả những kết quả đó đều đúng với các chuyển động chậm ($v << c$) nhưng chúng mâu thuẫn với các tiên đề của thuyết tương đối Einstein.

Thực vậy, theo thuyết tương đối thời gian không có tính chất tuyệt đối, khoảng thời gian diễn biến của một quá trình vật lý phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Đặc biệt hiện tượng xảy ra đồng thời trong hệ quán tính này sẽ không xảy ra đồng thời ở hệ quán tính khác. Để minh họa ta xét ví dụ sau:

Giả sử có hai hệ quán tính K và K' với các trục tọa độ tương ứng (x,y,z) và (x',y',z') hệ K' chuyển động thẳng đều với vận tốc V so với hệ K theo phương x:



Từ một điểm A bất kỳ, trên trục x' có đặt một bóng đèn phát tín hiệu sáng theo hai phía ngược nhau của trục x. Đối với hệ K' bóng đèn là đứng yên vì nó có cùng chuyển động với K'. Do vận tốc tín hiệu sáng truyền theo mọi phương đều bằng c, nên ở trong hệ K các tín hiệu sáng sẽ đến các điểm B và C ở cách đều A cùng một lúc. Nhưng các tín hiệu sáng sẽ đến B và C sẽ xảy ra không đồng thời ở trong hệ K. Thực vậy, theo nguyên lí tương đối Einstein vận tốc của tín hiệu sáng trong hệ K' vẫn bằng c; nhưng vì đối với hệ K, chuyển động gặp tín hiệu sáng gửi từ A đến B còn điểm C chuyển động ra xa từ tín hiệu gửi từ A đến C. Do đó ở trong hệ K tín hiệu sáng sẽ tới điểm B sớm hơn.

Định luật cộng vận tốc (6.1) hệ quả của nguyên lí tương đối Galilê cũng không áp dụng được ở đây. Thực vậy, theo nguyên lí này vận tốc truyền ánh sáng theo chiều dương của trục x sẽ là c + v và theo chiều âm của trục x sẽ là c – v điều đó mâu thuẫn với thuyết tương đối Einstein.

6.2.2. Phép biến đổi Lorentz

QUA TRÊN TA NHẬN THẤY, PHÉP BIẾN ĐỔI GALILÊ KHÔNG THỎA MÃN CÁC YÊU CẦU CỦA THUYẾT TƯƠNG ĐỐI. PHÉP BIẾN ĐỔI CÁC TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN VÀ THỜI GIAN KHI CHUYỂN TỪ HỆ QUÁN TÍNH NÀY SANG HỆ QUÁN TÍNH KHÁC, THỎA MÃN CÁC YÊU CẦU THUYẾT TƯƠNG ĐỐI EINSTEIN, DO LORENTZ TÌM RA ĐƯỢC MANG TÊN ÔNG.

Xét hai hệ quy chiếu quán tính K và K' nói trên. Giả sử ban đầu O và O' trùng nhau. Hệ K' chuyển động so với K với vận tốc V theo phương x. Gọi (x, y, z, t) và (x', y', z', t') là các tọa độ không gian và thời gian lần lượt xét trong các hệ K và K'. Vì theo thuyết tương đối thời gian không có tính chất tuyệt đối, trái lại phụ thuộc vào hệ quy chiếu nên thời gian trôi đi trong hai hệ là khác nhau.

$$t = t'$$

Giả sử tọa độ x' liên hệ với x và t theo phương trình.

$$x' = f(x,t) \qquad (6.2)$$

ĐỂ TÌM DẠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH F(X,T) CHÚNG TA VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC GỐC TỌA ĐỘ O VÀ O' TRONG HAI HỆ K VÀ K'. ĐỐI VỚI HỆ K, GỐC O' CHUYỂN ĐỘNG VỚI VẬN TỐC V TA CÓ:

$$x - Vt = 0 \qquad (6.3)$$

Trong đó x là tọa độ của O' xét với hệ K. Còn đối với hệ K' gốc O' là đứng yên. Tọa độ x' của nó trong hệ K' bao giờ cũng bằng không. Ta có

$$x' = 0$$

MUỐN CHO PHƯƠNG TRÌNH (6.2) ÁP DỤNG ĐÚNG CHO HỆ K', NGHĨA LÀ KHI THAY X'= 0 VÀO (6.2) TA PHẢI THU ĐƯỢC (6.3), THÌ F(X,T) CHỈ CÓ THỂ KHÁC (X – VT) MỘT SỐ NHÂN α NÀO ĐÓ.

$$x' = \alpha (x - Vt) \qquad (6.4)$$

Đối với hệ K' gốc O chuyển động với vận tốc –V. nhưng đối với hệ K gốc O đứng yên lập luận tương tự như trên ta có.

$$v = \beta (x' + Vt') \qquad (6.5)$$

TRONG ĐÓ β LÀ HỆ SỐ NHÂN.

Theo tiên đề thứ nhất của Einstein, mọi hệ quán tính đều tương đương nhau, nghĩa là từ (6.4) ta có thể suy ra (6.5) và ngược lại bằng cách thay thế $V \rightarrow -V$, $x' \Leftrightarrow x$, $t' \Leftrightarrow t$. Ta dễ dàng rút ra: $\alpha = \beta$.

Theo tiên đề thứ hai, ta có trong hệ K và K':

Nếu x = ct thì x' = ct', thay vào (6.4) và (6.5) ta thu được:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad (6.6)$$

Như vậy ta có:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad , \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

VÌ K' CHUYỂN ĐỘNG DỌC THEO X NÊN Y = Y', Z = Z'. TÓM LẠI, TA THU ĐƯỢC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI LORENTZ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI TỪ HỆ k SANG HỆ k':

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Y = Y' (6.8)

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Các phép biến đổi (6.7), (6.8) được gọi là phép biến đổi Lorentz.

Qua đó ta thấy được mối liên hệ mật thiết giữa không gian và thời gian.

Từ các kết quả trên ta nhận thấy rằng khi $c \to \infty$ hay khi $\frac{V}{c} \to 0$ thì các công thức trên trở thành:

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt & \qquad x &= x' + Vt \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= t & t &= t' \end{aligned}$$

Nghĩa là chuyển vế các công thức của phép biến đổi Galilê. Điều kiện $c \to \infty$ tương ứng với quan niệm tương tác tức thời, điều kiện thứ hai $V/c \to 0$ tương ứng với sự gần đúng cổ điển.

Khi V >c trong các công thức trên các tọa độ x, t trở nên ảo, điều đó chứng tỏ không thể có các chuyển động với vận tốc lớn hơn vận tốc của ánh sáng. Không thể dùng hệ quy chiếu chuyển động với vận tốc bằng vận tốc ánh sáng. Vì khi đó mẫu số trong các công thức (6.7), (6.8) sẽ bằng không.

6.2.3. Các hệ quả của phép biến đổi Lorentz

a/ Khái niệm về tính đồng thời và quan hệ nhân quả

Giả sử rằng trong hệ quán tính K có hai hiện tượng (biến cố) hiện tượng $A_1(x_1y_1z_1t_1)$ và hiện tượng $A_2(x_2y_2z_2t_2)$ với $x_1 \neq x_2$ chúng ta hãy tìm khoảng thời gian $t_2 - t_1$ giữa hai hiện tượng đó trong hệ K' chuyển động với vận tốc V dọc theo trục x. Từ các công thức biến đổi Lorentz ta được.

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \dfrac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \qquad (6.9)$$

Từ đó suy ra rằng các hiện tượng xảy ra đồng thời trong hệ K ($t_1 = t_2$) thì sẽ không đồng thời ở hệ K' và $t_2' - t_1' \neq 0$. Chỉ có một trường hợp ngoại lệ là khi cả hai biến cố xảy ra đồng thời tại những điểm có cùng giá trị x (tọa độ y có thể khác nhau).

Như vậy khái niệm đồng thời chỉ là một khái niệm tương đối, hai biến cố có thể đồng thời trong một hệ quy chiếu này nói chung có thể không đồng thời trong một hệ quy chiếu khác.

Công thức (6.9) cũng chứng tỏ rằng đối với các biến cố đồng thời trong hệ, dấu của $t_2' - t_1'$ được xác định bởi dấu của biểu thức $(x_2 - x_1)V$. Do đó trong các hệ quán tính khác nhau (với các giá trị khác nhau của V), hiệu $t_2' - t_1'$ không những khác nhau về độ lớn mà còn khác nhau về dấu. Điều đó có nghĩa là thứ tự các biến cố A_1 và A_2 có thể bất kỳ (A_1 có thể xảy ra trước A_2 hay ngược lại).

Tuy nhiên điều vừa trình bày không được xét cho các biến cố có liên hệ nhân quả với nhau. Liên hệ nhân quả là một mối liên hệ giữa nguyên nhân và kết quả. Nguyên nhân bao giờ cũng xảy ra trước kết quả, quyết định sự ra đời của kết quả. Thí dụ viên đạn được bắn ra (nguyên nhân), viên đạn trúng đích (kết quả). Thứ tự các biến cố có quan hệ nhân quả bao giờ cũng được đảm bảo trong mọi hệ quán tính. Nguyên nhân xảy ra trước, kết quả xảy ra sau. Ta xét chi tiết hơn ví dụ vừa nêu. Gọi A_1 $(x_1; t_1)$ là biến cố viên đạn được bắn ra và $A_2(x_2; t_2)$ là biến cố viên đạn trúng đích. Coi hai biến cố đều xảy ra ở trục x. Trong hệ K, $t_2 > t_1$ gọi v là vận tốc viên đạn và giả sử $x_2>x_1$, ta có:

$$x_1 = vt_1 \ , \ x_2 = vt_2$$

THAY BIỂU THỨC NÀY VÀO (6.9) TA ĐƯỢC.

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{Vv}{c^2}\right]}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Ta luôn luôn có v < c, do đó nếu $t_2 > t_1$ thì cũng có $t_2' > t_1'$ nghĩa là trong cả hai hệ K và K' bao giờ biến cố viên đạn trúng đích cũng xảy ra sau biến cố viên đạn được bắn ra. Thứ tự nhân quả bao giờ cũng được tôn trọng.

b/ Sự co ngắn Lorentz

Bây giờ ta dựa vào các công thức (6.7) hoặc (6.8) để so sánh độ dài của một vật và khoảng thời gian của một quá trình trong hai hệ K và K'.

Giả sử có một thanh đứng yên trong hệ K' đặt dọc theo trục x', độ dài của nó trong hệ K' bằng:

$$\ell_0 = x_2' - x_1'$$

Gọi ℓ là độ dài của thanh trong hệ K. Muốn vậy ta phải xác định vị trí các đầu mút của thanh trong hệ K tại cùng thời điểm. Từ phép biến đổi Lorentz ta viết được:

$$x_2' = \frac{x_2 - \frac{V}{c^2}t_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad x_1' = \frac{x_1 - \frac{V}{c^2}t_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Trừ hai đẳng thức trên vế theo vế, chú ý rằng $t_1 = t_2$ ta được:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

SUY RA:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (6.10)$$

VẬY: "ĐỘ DÀI (DỌC THEO PHƯƠNG CHUYỂN ĐỘNG) CỦA THANH TRONG HỆ QUY CHIẾU MÀ THANH CHUYỂN ĐỘNG NGẮN HƠN ĐỘ DÀI THANH Ở TRONG HỆ MÀ THANH ĐỨNG YÊN".

Nói một cách khác, khi vật chuyển động, kích thước của nó bị co ngắn lại theo phương chuyển động.

THÍ DỤ QUẢ ĐẤT CHUYỂN ĐỘNG QUANH MẶT TRỜI VỚI VẬN TỐC KHOẢNG V=30KM/S, ĐƯỜNG KÍNH CỦA NÓ (SẮP XỈ KHOẢNG 12.700KM) CHỈ CO NGẮN 6,5CM. NHƯNG NẾU MỘT VẬT CÓ VẬN TỐC V=260000KM/S THÌ:

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \approx 0,5$$

Khi đó $\ell' = 0,5 l_0$, kích thước của vật sẽ co ngắn đi một nửa. Nếu quan sát một vật hình hộp vuông chuyển động với vận tốc V lớn, ta sẽ thấy nó có dạng một hình hộp chữ nhật, một khối cầu chuyển động nhanh như vậy ta sẽ thấy nó có dạng một elipsoide tròn xoay. Như vậy kích thước của vật sẽ khác nhau tùy thuộc vào chỗ ta quan sát nó trong hệ đứng yên hay chuyển động. Không gian có tính chất tương đối, phụ thuộc vào chuyển động.

Cũng từ các công thức phép biến đổi Lorentz, chúng ta tìm được khoảng thời gian của một quá trình trong hai hệ K và K'. Giả sử có một đồng hồ đứng yên trong hệ K'. Ta xét hai biến cố xảy ra tại cùng một điểm A có các tọa độ (x', y', z') trong hệ K'. Khoảng thời gian giữa hai biến cố trên trong K' bằng $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Bây giờ chúng ta tìm khoảng thời gian giữa hai biến cố cùng trên hệ K.

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Do $x_2' = x_1'$ nên:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Hay $\quad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < \Delta t \qquad (6.11)$

KẾT QUẢ ĐÓ ĐƯỢC PHÁT BIỂU NHƯ SAU: "*KHOẢNG THỜI GIAN ΔT' CỦA MỘT QUÁ TRÌNH TRONG HỆ k' CHUYỂN ĐỘNG BAO GIỜ CŨNG NHỎ HƠN KHOẢNG THỜI GIAN ΔT XẢY RA CÙNG QUÁ TRÌNH ĐÓ TRONG HỆ k ĐỨNG YÊN*". NẾU TRONG HỆ k' CHUYỂN ĐỘNG CÓ

GẮN MỘT ĐỒNG HỒ VÀ TRONG HỆ k CŨNG CÓ GẮN MỘT ĐỒNG HỒ THÌ KHOẢNG THỜI GIAN CỦA CÙNG MỘT QUÁ TRÌNH XẢY RA ĐƯỢC GHI TRÊN ĐỒNG HỒ CỦA HỆ k' SẼ NHỎ HƠN KHOẢNG THỜI GIAN GHI TRÊN ĐỒNG HỒ CỦA HỆ k. TA CÓ THỂ NÓI "ĐỒNG HỒ CHUYỂN ĐỘNG CHẠY CHẬM HƠN ĐỒNG HỒ ĐỨNG YÊN". NHƯ VẬY KHOẢNG THỜI GIAN ĐỂ XẢY RA MỘT QUÁ TRÌNH SẼ KHÁC NHAU TUY THUỘC VÀO CHỖ TA QUAN SÁT QUÁ TRÌNH ĐÓ TRONG HỆ ĐỨNG YÊN HAY CHUYỂN ĐỘNG.

Nếu V = 260.000km/s thì $\Delta t' = \Delta t/2$ khoảng thời gian để xảy ra một quá trình nếu tính trong hệ con tàu đang chuyển động là 5 năm, thì trong hệ quy chiếu gắn liền với mặt đất là 10 năm. Đặc biệt nếu nhà du hành vũ trụ ngồi trên con tàu chuyển động với vận tốc rất gần với vận tốc ánh sáng V=299.960km/s khi đó $\sqrt{1-\frac{V}{c^2}} \approx 10^{-2}$ trong mười năm để đến hành tinh rất xa thì trên Trái đất đã 1.000 năm trôi qua và nếu nhà du hành quay trở về đến Trái đất, thì người đó mới già thêm 20 tuổi nhưng trên Trái đất đã 2.000 năm trôi qua.

c/ Định lý tổng hợp vận tốc

Giả sử u là vận tốc của một chất điểm đối với hệ O.

u' là vận tốc của chất điểm đó đối với hệ O'. Ta hãy tìm định lý tổng hợp vận tốc liên hệ giữa u và u'.

Từ (6.7) ta có:

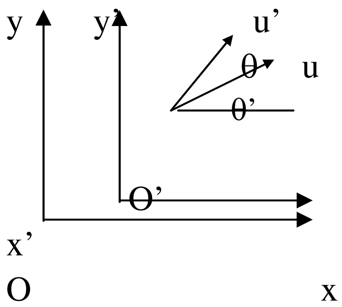
$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad dt' = \frac{dt - \frac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Vậy: $$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} = \frac{u_x - V}{1-\frac{V}{c^2}u_x} \qquad (6.12)$$

TƯƠNG TỰ TA CÓ:

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c}}}{1-\frac{V}{c^2}u_y} \quad ; \quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{V}{c^2}u_x} \qquad (6.13)$$

Các công thức (6.12) và (6.13) chính là các công thức biểu diễn định lý tổng hợp vận tốc trong thuyết tương đối. Từ các công thức này ta có thể suy ra tính bất biến của vận tốc ánh sáng trong chân không đối với hệ quán tính. Thực vậy nếu $u_x = c$ thì từ (6-12) ta tìm được.



$$u'_x = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c^2}c} = c$$

Ta hãy tìm công thức cho biết sự thay đổi hướng vận tốc khi chuyển từ hệ này sang hệ khác. Ta hãy chọn các trục tọa độ sao cho lúc đang xét vận tốc của chất điểm nằm trong mặt phẳng xy. Theo hình vẽ ta có.

$$u_x = u\cos\theta \qquad u_x' = u'\cos\theta'$$

$$u_y = u\mathrm{Sin}\theta \qquad u_y' = u'\sin\theta'$$

<u>TỪ (6.12) VÀ (6.13) TA RÚT RA CÁC BIỂU THỨC.</u>

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{u'.\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\mathrm{Sin}\theta'}{u'.\mathrm{Cos}\theta + V} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{u'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\mathrm{Sin}\theta'}{u(1 + \frac{V}{c^2}u'.\mathrm{Cos}\theta')} \qquad (6.14)$$

<u>CÁC CÔNG THỨC NÀY CHO BIẾT SỰ THAY ĐỔI HƯỚNG CỦA VẬN TỐC KHI CHUYỂN HỆ QUY CHIẾU.</u>

<u>6.2.3 Động lực học tương đối tính</u>

a/ Phương trình cơ bản của chuyển động chất điểm:

<u>THEO THUYẾT TƯƠNG ĐỐI, PHƯƠNG TRÌNH BIỂU DIỄN ĐỊNH LUẬT NEWTON HAI:</u>

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ không thể mô tả chuyển động của chất điểm với vận tốc lớn. Để mô tả chuyển động, cần phải có phương trình khác tổng quát hơn. Theo thuyết tương đối, phương trình đó có dạng:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \qquad (6.15)$$

<u>TRONG ĐÓ M LÀ KHỐI LƯỢNG CỦA CHẤT ĐIỂM:</u>

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6.16)$$

m là khối lượng chất điểm đó trong hệ mà nó chuyển động với vận tốc V được gọi là khối lượng tương đối; m_0 là khối lượng cũng của chất điểm đó trong hệ mà nó đứng yên (V = 0) được gọi là khối lượng nghỉ.

TA THẤY RẰNG THEO THUYẾT TƯƠNG ĐỐI, KHỐI LƯỢNG CỦA MỘT VẬT KHÔNG CÒN LÀ HẰNG SỐ NỮA, NÓ TĂNG KHI VẬT CHUYỂN ĐỘNG; GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT KHI NÓ ĐỨNG YÊN. CŨNG CÓ THỂ NÓI RẰNG: *KHỐI LƯỢNG CÓ TÍNH TƯƠNG ĐỐI; NÓ PHỤ THUỘC HỆ QUY CHIẾU.*

PHƯƠNG TRÌNH (6.15) BẤT BIẾN VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI LORENTZ VÀ TRONG TRƯỜNG HỢP V<< C NÓ TRỞ THÀNH PHƯƠNG TRÌNH BIỂU DIỄN ĐỊNH LUẬT THỨ HAI CỦA NEWTON.

b/ Động lượng và năng lượng.

Theo (6.16) động lượng của một vật bằng:

$$\vec{P} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6.17)$$

Khi V<<c ta thu được phương trình cổ điển $\vec{p} = m_0\vec{v}$. Như vậy phương trình cơ bản (6.15) có thể viết:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

TA HÃY TÍNH NĂNG LƯỢNG CỦA VẬT. THEO ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG, ĐỘ TĂNG NĂNG LƯỢNG CỦA VẬT BẰNG CÔNG CỦA NGOẠI LỰC TÁC DỤNG LÊN VẬT :

$$dW = dA$$

Để đơn giản, ta sử dụng $\vec{F}$ cùng phương với chuyển dời $d\vec{s}$.

$$dW = dA = \vec{F}\,d\vec{s} = Fds$$

THEO (6.15) TA CÓ:

$$dw = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]ds$$

$$dw = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dv}{dt} + \frac{m_0 v^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\frac{dv}{dt}\right]ds$$

Nhưng $\frac{dv}{dt}ds = dv\frac{ds}{dt} = vdv$

DO ĐÓ:

$$dw = \frac{m_0 vdv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[1+\frac{v^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})}\right] = \frac{m_0 vdv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}$$

Mặt khác (6.16) ta có:

$$dm = \frac{m_0 vdv}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}$$

SO SÁNH HAI BIỂU THỨC TRÊN TA RÚT RA:

$$dW = c^2 dm$$

Hay $W = mc^2 + C$

Trong đó C là một hằng số tích phân. Do điều kiện m = 0 thì W = 0 ta rút ra C = 0. Vậy: $W = mc^2$ (6.18)

Hệ thức này thường gọi là hệ thức Einstein.

c/ Các hệ quả

- Từ hệ thức Einstein ta tìm được năng lượng nghỉ của vật. Nghĩa là năng lượng lúc vật đứng yên ($m = m_0$):

$$W = m_0 c^2$$

Lúc vật chuyển động, vật có thêm động năng E_k.

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] \qquad (6.19)$$

BIỂU THỨC NÀY KHÁC VỚI BIỂU THỨC ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT THƯỜNG GẶP TRONG CƠ HỌC CỔ ĐIỂN. KHI V << C:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

DO ĐÓ:

$$E_k \approx m_0c^2(1+\frac{v^2}{2c^2} - 1) \approx \frac{m_0v^2}{2}$$

Ta lại tìm được biểu thức động năng trong cơ học cổ điển.

- Bình phương biểu thức (6.18) ta được :

$$m^2{}_0c^4 = W(1-\frac{v^2}{c^2}) = W - \frac{W.v^2}{c^2}$$

Thay $W = mc^2$ vào biểu thức trên, và chú ý $\vec{p} = m\vec{v}$ ta có:

$$W^2 = m_0{}^2c^4 + p^2c^2 \qquad (6.20)$$

Đó là biểu thức liên hệ giữa năng lượng và động lượng của vật.

- Ta hãy ứng dụng các kết quả trên vào hiện tượng phân rã hạt nhân:

Giả sử một hạt nhân phân rã thành hai hạt nhân thành phần. Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$W = W_1 + W_2$$

Với W là năng lượng của hạt nhân trước khi phân rã. W_1 và W_2 là năng lượng của hai hạt thành phần.

Thay (6.18) vào biểu thức trên ta sẽ được:

$$mc^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \qquad (6.21)$$

Trong đó, ta đã xem hạt nhân như không chuyển động trước khi phân rã, còn m_1, m_2, m là khối lượng nghỉ của các hạt, vì:

$$\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} > m_1c^2 \quad \text{và} \quad \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} > m_2c^2$$ nên từ (6.21) ta rút ra:

$$m > m_1 + m_2$$

Nghĩa là khối lượng của hạt nhân trước khi phân rã lớn hơn tổng khối lượng của các hạt nhân thành phần.

Theo công thức Einstein phần năng lượng ứng với độ hụt của khối lượng này bằng:

$$W = (m - (m_1 + m_2))c^2 = \Delta mc^2$$

Phần năng lượng này thường được tỏa ra dưới dạng nhiệt và bức xạ.

*- *Ý nghĩa triết học của hệ thức Einstein:**

Như chúng ta đã biết, vật chất tồn tại khách quan, khối lượng và năng lượng chỉ là hai đại lượng vật lý đặc trưng cho quán tính và mức độ vận động của vật chất. Không có gì chứng tỏ vật chất mất đi mà tính chất của nó vẫn tồn tại. Do đó, điều khẳng định vật chất biến thành năng lượng là vô căn cứ. Hệ thức Einstein không phải nối liền vật chất với năng lượng mà nối liền hai tính chất của vật chất: *quán tính và mức độ vận động*. Hệ thức cho ta thấy rõ, trong điều kiện nhất định, một vật có khối lượng nhất định thì cũng có năng lượng nhất định tương ứng với khối lượng đó.

Thuyết tương đối hẹp của Einstein đã đưa khoa học vật lý tiến thêm một bước mới. Về sau, năm 1915 Einstein đã phát triển sâu thêm một bước nữa của thuyết tương đối và đưa ra thuyết tương đối rộng. Thuyết tương đối rộng áp dụng cho các hệ qui chiếu chuyển động có gia tốc, giúp ta nghiên cứu trường hấp dẫn. Thuyết tương đối rộng giúp ta hiểu biết một cách sâu sắc hơn sự liên hệ giữa không gian và thời gian với vật chất trong trường hấp dẫn gây ra bởi một vật có khối lượng lớn, không gian "bị cong" đi. Các vật chuyển động theo quán tính trong không gian này không còn chuyển động thẳng nữa mà chuyển động theo đường cong. Thời gian ở nơi trường hấp dẫn mạnh thì trôi chậm hơn so với thời gian ở nơi trường hấp dẫn yếu. Nhờ có thuyết tương đối rộng, trong thiên văn người ta giải thích được nhiều sự kiện quan trọng trong vũ trụ.

6.3 Lực quán tính

6.3.1- Không gian và thời gian trong hệ quy chiếu không quán tính

Hệ quy chiếu không quán tính là hệ quy chiếu chuyển động có gia tốc so với hệ quy chiếu quán tính. Các dạng đơn giản nhất của hệ quy chiếu không quán là hệ quy chiếu chuyển động thẳng có gia tốc và hệ quy chiếu chuyển động quay.

Để mô tả các định luật cơ học trong hệ quy chiếu không quán tính, chúng ta phải làm rõ các tính chất không gian và thời gian trong hệ này. Không gian và thời gian trong hệ quy chiếu quán tính là đồng nhất, đơn vị thời gian và đơn vị độ dài là bằng nhau ở khắp mọi nơi. Còn ở trong hệ quy chiếu không quán tính, vấn đề lại khác hẳn. Theo thuyết tương đối, khoảng thời gian và độ dài của vật thể phụ thuộc vào tốc độ chuyển động nên đơn vị thời gian và đơn độ dài trong hệ quy chiếu không quán tính nói chung phụ thuộc vào tọa độ và thời gian (ví dụ trong hệ quy chiếu quay các đơn vị này phụ thuộc vào khoảng cách từ điểm quan sát đến tâm quay). Ta gọi không gian và thời gian trong hệ quy chiếu không quán tính là không đồng nhất vì vậy vấn đề đo lường thời gian và không gian trong hệ quy chiếu không quán tính gặp phải những khó khăn về mặt nguyên tắc.

Để khắc phục trình trạng này, người ta chỉ tiến hành đo lường các đại lượng vật lý nói chung và đo lường không gian và thời gian nói riêng tại từng miền vô cùng nhỏ của hệ quy chiếu không quán tính và sau đó phát triển chúng sang các miền hữu hạn. Cách này phải sử dụng đến các công cụ toán học phức tạp mà ở đây chúng ta sẽ không xét đến. Cách thứ hai là giả thuyết tốc độ và gia tốc của hệ quy chiếu không quán tính đủ nhỏ sao cho ta có thể bỏ qua các hiệu ứng của thuyết tương đối. Cách này cho phép ta dễ dàng mô tả các định luật cơ học, nhưng phải mở rộng khái niệm về lực, bên cạnh lực tương tác giữa các vật thể chúng ta phải đưa thêm vào lực quán tính do chuyển động có gia tốc của hệ gây ra.

6.3.2- Lực quán tính

Ở TRONG HỆ QUY CHIẾU QUÁN TÍNH, NGUYÊN NHÂN DUY NHẤT ĐỂ VẬT THỂ CHUYỂN ĐỘNG CÓ GIA TỐC LÀ DO VẬT THỂ KHÁC TÁC ĐỘNG LÊN NÓ MỘT LỰC NÀO ĐÓ. NHƯ VẬY GIA TỐC VÀ LỰC LÀ KẾT QUẢ CỦA SỰ TƯƠNG TÁC GIỮA CÁC VẬT THỂ.

Ở trong các hệ không quán tính, các vật thể có thể nhận được một gia tốc nào đó mà không cần chịu tác dụng của một lực nào cả, ví dụ đối với một toa tàu bắt đầu chuyển động thì tất cả các vật thể trong vũ trụ đều nhận được một gia tốc tương ứng so với con tàu. Rõ ràng là ở đây không có một vật cụ thể nào tác động lên các vật trong vũ trụ đó cả. Như vậy gia tốc mà các vật thể nhận được ở trong hệ quy chiếu không quán tính khi chúng không bị tác động bởi một vật nào khác thì chỉ được xác định bởi chính tính chất của hệ quy chiếu. Gia tốc này ứng với một lực đặc biệt gọi là lực quán tính.

Như vậy trong các hệ quy chiếu không quán tính định luật thứ nhất và thứ ba của Newton không còn thích hợp nữa. Định luật thứ hai có thể phát biểu như sau:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_q \qquad (6.22)$$

Nghĩa là gia tốc của vật thể trong hệ quy chiếu không quán tính $\vec{a}'$ được xác định bởi lực tương tác $\vec{F}'$ và lực quán tính $\vec{F}_q$.

Khi lực quán tính bằng không, hệ trở thành quán tính, thì gia tốc của vật thể chỉ chịu tác dụng của lực tương tác:

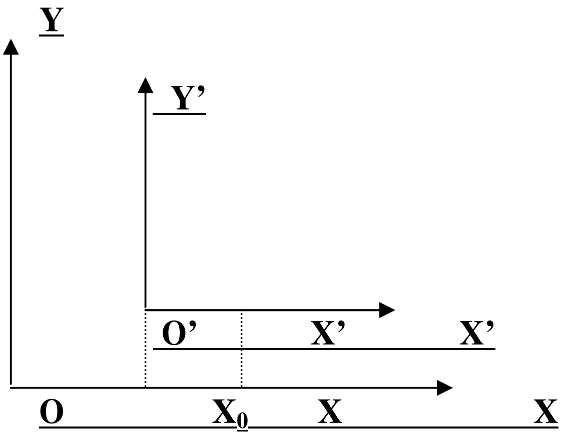
$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (6.23)$$

Từ các công thức (5.78) và (5.79) ta suy ra biểu thức của lực quán tính:

$$\vec{F}_q = m(\vec{a}' - \vec{a}) \qquad (6.24)$$

<u>6.3.3- Lực quán tính trong hệ quy chiếu chuyển động thẳng có gia tốc</u>

<u>GỌI K LÀ HỆ QUY CHIẾU QUÁN TÍNH, K' LÀ HỆ CHUYỂN ĐỘNG CÓ GIA TỐC DỌC THEO TRỤC X CỦA HỆ K (HÌNH 6.3) THEO PHÉP BIẾN ĐỔI GALILEO:</u>



<u>HÌNH 6.3</u>

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + x' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{array}\right\} \qquad (6.25)$$

Trong đó x, y, z và t là tọa độ và thời gian của một chất điểm trong hệ K', còn x_0 là tọa độ của điểm gốc O' trong hệ K. Lấy đạo hàm (6.25) theo thời gian ta được:

$$v = v_0 + v' \qquad (6.25')$$

Trong đó các đại lượng :

$$v = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_0 = \frac{dx_0}{dt} \quad ; \quad v' = \frac{dx'}{dt}$$

TƯƠNG ỨNG ĐƯỢC GỌI LÀ VẬN TỐC TUYỆT ĐỐI, VẬN TỐC KÉO THEO VÀ VẬN TỐC TƯƠNG ĐỐI. DỄ DÀNG NHẬN THẤY RẰNG TỐC ĐỘ TUYỆT ĐỐI LÀ TỐC ĐỘ CỦA CHẤT ĐIỂM ĐỐI VỚI HỆ QUÁN TÍNH K, TỐC ĐỘ TƯƠNG ĐỐI LÀ TỐC ĐỘ CŨNG CỦA CHẤT ĐIỂM ĐỐI VỚI HỆ KHÔNG QUÁN TÍNH K', CÒN TỐC ĐỘ KÉO THEO LÀ TỐC ĐỘ CỦA HỆ K' ĐỐI VỚI HỆ K.

Tiếp tục lấy đạo hàm (6.25) theo thời gian ta được:

$$a = a_0 + a' \qquad (6.26)$$

Trong đó các đại lượng :

$$a = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a_0 = \frac{dv_0}{dt} \quad ; \quad a' = \frac{dv'}{dt}$$

tương ứng được gọi là gia tốc tuyệt đối, gia tốc kéo theo và gia tốc tương đối. Thay (6.26) vào (6.24) ta được:

$$F_q = - ma_0$$

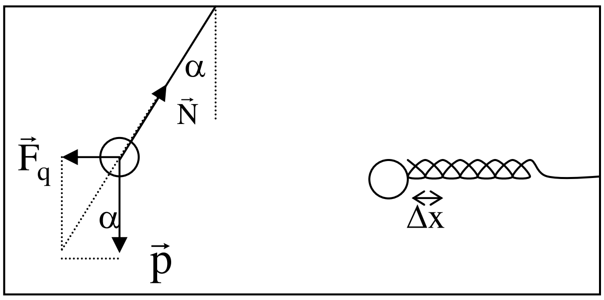
Hay là dưới dạng véctơ:

$$\vec{F}_q = -m\vec{a}_0 \qquad (6.27)$$

Tức là lực quán tính hướng ngược chiều với gia tốc kéo theo của hệ quy chiếu không quán tính.

Sau đây chúng ta xét một vài ví dụ minh họa lực quán tính này.

Một toa tàu chuyển động thẳng nhanh dần đều với gia tốc a_0 đối với Trái đất, Trái đất tạm thời được xem là một hệ quy chiếu quán tính, toa tàu là một hệ quy chiếu không quán tính.



Hình 6.4

Giả sử ban đầu toa tàu đứng yên, mọi người cũng đứng yên trên toa tàu, lúc đó toa tàu chuyển động nhanh dần, mọi người phải bám chắc vào toa tàu để được đứng yên đối với toa tàu, nếu không thì bị đẩy lùi ngược hướng với chiều chuyển động nhanh dần của toa tàu. Thật vậy, khi toa tàu là một hệ quy chiếu không quán tính, mỗi người đều chịu tác dụng của một lực quán tính $\vec{F}_q = -m\vec{a}_0$, trong đó m là khối lượng của người. Chính lực quán tính đẩy người lùi ngược hướng gia tốc. Khi người bám chắc vào toa tàu, toa tàu tác dụng lên người một lực thật $\vec{F}$ sao cho $\vec{F} + \vec{F}_q = 0$ khi đó theo (6.21) gia tốc của người đối với toa tàu $a_0 = 0$ và người đứng yên đối với toa tàu.

Một vật nặng khối lượng m, treo ở đầu một sợi dây móc trên trần toa tàu. Lúc toa tàu chuyển động có gia tốc $\vec{a}$, vị trí cân bằng của sợi dây treo vật lệch một góc α so với phương thẳng đứng trong toa tàu (hình 6.4).

Đối với hệ quy chiếu không quán tính là toa tàu, vật nặng chịu tác dụng của 3 lực: trong lực $\vec{P}$ của vật, lực căng $\vec{N}$ của sợi dây và lực quán tính $\vec{F}_q$, vật ở thế cân bằng khi tổng hợp của ba lực này bằng không $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_q = \vec{0}$ lúc ấy:

$$F_q \cong P\text{tg}\alpha \quad ; \qquad \alpha = \text{arctg}\frac{F_q}{P} = \text{-arctg}\frac{a_0}{g} \qquad (6.28)$$

Gia tốc của toa tàu a_0 càng lớn, muốn giữ được thế cân bằng góc α càng phải lớn, nghĩa là dây treo vật càng bị lệch khỏi phương thẳng đứng.

Xét một vật khối lượng m đặt ở đầu một lò xo nằm dọc theo phương chuyển động. Khi lò xo dãn một đoạn Δx, lò xo tác động vào vật một lực F=kΔx ở đây k là hệ số đàn hồi của lò xo (hình 6.4):

Khi toa tàu chuyển động với gia tốc a_0, lò xo dãn ra một đoạn Δx. Bây giờ vật nặng ở trạng thái cân bằng vì chịu tác dụng của hai lực: lực đàn hồi $\vec{F}$ và lực quán tính $\vec{F}_q$ khi đó $\vec{F} + \vec{F}_q = 0$ và:

$$\Delta x = \frac{ma_0}{k} \qquad (6.29)$$

Độ dãn của lò xo tỉ lệ với gia tốc của con tàu. Dựa theo nguyên tắc trên người ta đã chế tạo một kiểu máy đo gia tốc.

6.3.4- Lực quán tính trong hệ quy chiếu chuyển động quay:

GỌI K LÀ HỆ QUY CHIẾU QUÁN TÍNH (HỆ ĐỨNG YÊN) VÀ K' LÀ HỆ QUY CHIẾU CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH TRỤC OZ CỦA HỆ K VỚI TỐC ĐỘ ω. NHƯ VẬY TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỰC, TA CÓ PHÉP BIẾN ĐỔI TỌA ĐỘ CỦA HỆ NHƯ SAU:

$$r = r' \quad , \varphi = \varphi' + \omega t' \quad , t = t' \qquad (6.30)$$

TRONG ĐÓ R', φ', T' LÀ TỌA ĐỘ VÀ THỜI GIAN CỦA MỘT CHẤT ĐIỂM NÀO ĐÓ TRONG HỆ K' ; R, φ, T LÀ TỌA ĐỘ VÀ THỜI GIAN CŨNG CỦA CHẤT ĐIỂM ẤY TRONG HỆ K.

Lấy đạo hàm (6.30) theo thời gian ta được:

$$\dot{r} = \dot{r}' \qquad ; \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}' + \omega \qquad (6.31)$$

Để tính véctơ tốc độ của chất điểm trong hệ K, chúng ta phải lấy đạo hàm của véctơ bán kính theo thời gian. Vì $\vec{r}$ là hàm của các tọa độ r, φ nên:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \qquad (6.32)$$

Chú ý rằng:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r\vec{e}_\varphi \qquad (6.33)$$

Ta có thể viết (6.32) dưới dạng sau:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad (6.34)$$

Trong đó $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ là vận tốc của chất điểm đã cho trong hệ K.

Để biểu diễn $\vec{v}$ qua $\vec{v}'$ tức là qua vận tốc của chất điểm trong hệ K' chúng ta làm như sau. Thay (6.31) vào (6.34) ta được:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}'\vec{e}_r + \dot{r}\,\varphi'\vec{e}_\varphi + r\omega\vec{e}_\varphi$$

Chú ý rằng: $\vec{v}' = \dot{r}'\vec{e}_{r'} + r'\dot{\varphi}'\vec{e}_{\varphi'} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}'\vec{e}_\varphi$

Ta có: $\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}\times\vec{r}]$ (6.35)

Trong đó v' là vận tốc của chất điểm đã cho trong hệ K', còn $[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \omega r\vec{e}_\varphi$ chính là vận tốc của hệ K' so với K tại điểm r.

Tiếp tục lấy đạo hàm (6.35) theo thời gian ta được:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\times\vec{r}] \qquad (6.36)$$

Nếu giả thiết ω=const, tức là hệ K' quay đều so với hệ K, ta được:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + [\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}] \qquad (6.37)$$

<u>LÀM TƯƠNG TỰ NHƯ CÁCH TÍNH CÔNG THỨC (6.35) TA ĐƯỢC:</u>

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}' + [\vec{\omega}\times\vec{v}] \qquad (6.38)$$

Trong đó:

$$\vec{a}' = (\ddot{r} - \dot{r}\,\varphi^2)\vec{e}_r + (\ddot{r}\,\varphi - \dot{r}\,\dot{\varphi}')\vec{e}_\varphi \qquad (6.39)$$

Là gia tốc của chất điểm trong hệ K' hay còn gọi là gia tốc tương đối của chất điểm đó.

Thay (5.95) và (5.92) vào (5.94) ta được:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_h + \vec{a}_c \qquad (6.40)$$

Trong đó vec tơ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ là gia tốc của chất điểm đã cho trong hệ K hay còn gọi là gia tốc tuyệt đối của chất điểm đó. Véctơ:

$$\vec{a}_h = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] = -\omega^2 \vec{r} \qquad (6.41)$$

Hướng vào tâm quay và được gọi là gia tốc hướng tâm. Véctơ:

$$\vec{a}_c = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] \qquad (6.42)$$

Hướng vuông góc với vận tốc của chất điểm và được gọi là gia tốc Côriôlit.

Thay (6.40) vào (6.23) ta được lực quán tính tác dụng lên chất điểm đã cho trong hệ K'.

$$\vec{F}_q = -m\vec{a}_h - m\vec{a}_c \qquad (6.43)$$

Trong đó lực:

$$\vec{F}_l = -m\vec{a}_h = m\omega^2 \vec{r} \qquad (6.44)$$

Tác dụng lên chất điểm và hướng từ tâm quay ra ngoài, được gọi là lực quán tính ly tâm (hay gọi tắt là lực ly tâm). Lực:

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m[\omega \times \vec{v}'] \qquad (6.45)$$

Được gọi là lực quán tính Côriôlit (hay lực Côriôlit).

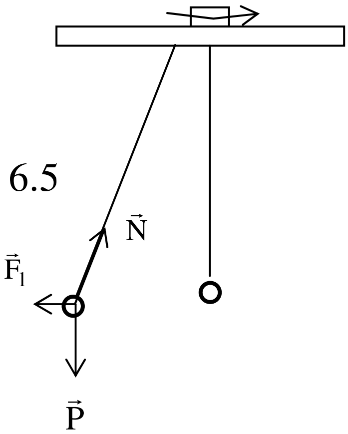
*** SAU ĐÂY TA XÉT MỘT VÀI VÍ DỤ MINH HỌA CÁC LỰC QUÁN TÍNH NÀY.**

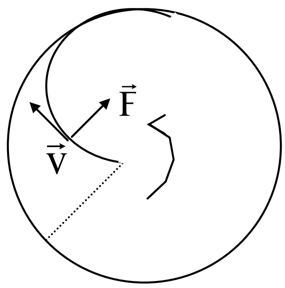
Ta hình dung hệ quy chiếu quay là một đĩa phẳng nằm ngang. Trên đĩa dọc theo một bán kính có treo những quả cầu có khối lượng như nhau. Khi đĩa quay với vận tốc ω=const thì ở trong hệ quy chiếu đứng yên ta thấy quả cầu treo đúng ở tâm đĩa vẫn đứng yên còn tất cả các quả cầu khác chuyển động tròn đều, vạch trên những đường tròn có tâm trên trục quay và quả cầu nào càng xa tâm thì dây treo của nó càng lệch so với phương thẳng đứng ban đầu, ta giải thích chuyển động tròn này là do có lực hướng tâm tác động lên mỗi quả cầu. Lực hướng tâm này là tổng hợp lực của trọng lực quả cầu và lực căng của dây treo.

Song đối với người quan sát đứng trong đĩa quay thì tất cả các quả cầu đều đứng yên. Sở dĩ như vậy vì trong hệ quy chiếu không quán tính gắn với đĩa quay có xuất hiện lực quán tính ly tâm $\vec{F}_1$, lực này cân bằng với trọng lực của quả cầu $\vec{P}$ và lực căng của dây treo $\vec{N}$ (hình 6.5).

Nếu bây giờ ta đặt một quả cầu trên một mặt đĩa quay, giả sử ta không đặt tại chính tâm quay và ma sát giữa quả cầu và đĩa quay là không đáng kể. Trong trường hợp đó quả cầu chỉ bị tác dụng một lực quán tính ly tâm như ta đã biết và nó bắt đầu chuyển động văng ra ngoài. Nhưng sau đó lại không tiếp tục chuyển động dọc theo bán kính mà vạch nên một quỹ đạo cong trên đĩa quay. Như vậy chứng tỏ rằng bên cạnh lực quán tính ly tâm còn có một lực khác tác dụng lên vật và vuông góc với tốc độ $\vec{V}$ của nó, lực này chính là lực quán tính Côriôlit $\vec{F}_c$ (hình 6.6)

Hình 6.5



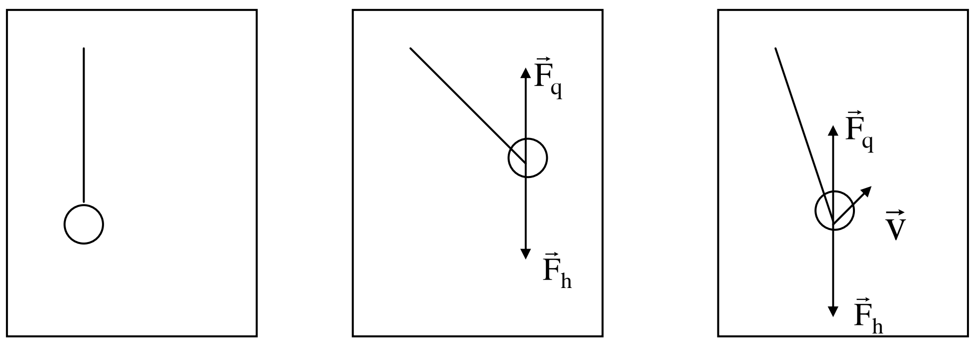


Hình 6.6

6.4 Nguyên lý tương đương

6.4.1 Trạng thái không trọng lượng

ĐỂ MÔ TẢ TRẠNG THÁI KHÔNG TRỌNG LƯỢNG TA XÉT MỘT HỆ GỒM MỘT BUỒNG KÍN, TRONG ĐÓ CÓ TREO MỘT CON LẮC GỌI LÀ CON LẮC LIUBIMOV.



A) B) C)

Hình 6.7

Thí nghiệm với con lắc Liubimov được tiến hành như sau. Khi buồng đứng yên so với mặt đất, con lắc thực hiện dao động riêng xung quanh vị trí cân bằng (hình 6.7a). Khi buồng rơi tự do thì chuyển động phụ thuộc vào pha của dao động tại thời điểm buồng bắt đầu rơi. Nếu buồng bắt đầu rơi tại thời điểm con lắc đạt được độ lệch cực đại (hình 6.7b) thì vị trí đó sẽ không thay đổi trong suốt quá trình buồng rơi. Nếu buồng bắt đầu rơi ở thời điểm con lắc không ở vị trí lệch cực đại. Ví dụ khi nó vừa ra khỏi vị trí cân bằng (hình 6.7c) thì con lắc tiếp tục chuyển động tròn đều xung quanh điểm treo.

Thí nghiệm trên có thể giải thích như sau: Khi buồng rơi tự do, lực quán tính tác dụng lên con lắc cân bằng với lực hút của Trái đất, kết quả hai lực này cân bằng với nhau. Bây gời chỉ có lực căng của dây treo đóng vai trò lực hướng tâm giữ con lắc chuyển động tròn đều quanh tâm là điểm treo của con lắc, lực này bằng mv^2/R, trong đó R là độ dài của dây treo và v là vận tốc của con lắc so với buồng. Vận tốc này bằng vận tốc của con lắc khi buồng bắt đầu rơi. Trong trường hợp hình 6.7b vận tốc này bằng không nên con lắc đứng yên so với buồng, tức là luôn luôn ở vị trí lệch cực đại trong suốt quá trình buồng rơi.

Trong thí nghiệm trên, lực quán tính và lực hút của Trái đất cân bằng nhau, kết quả là con lắc ở trạng thái không trọng lượng. Trạng thái này rất giống trạng thái của vật thể trong các con tàu vệ tinh của Trái đất. Trong các con tàu này, mỗi vật chịu tác dụng của hai lực là lực hút của Trái đất và lực quán tính ly tâm. Hai lực này cần bằng nhau và các vật thể trong con tàu ở trạng thái không trọng lượng. Các nhà du hành vũ trụ nếu không bám chắc lấy con tàu sẽ bị lơ lửng trong con tàu.

6.4.2 Nguyên lý tương đương

TRONG CÁC THÍ NGHIỆM VỚI CON LẮC LIUBIMOV, VÀ VỚI CÁC CON TÀU VỆ TINH CỦA TRÁI ĐẤT, CHÚNG TA THẤY RẰNG LỰC QUÁN TÍNH VÀ LỰC HẤP DẪN BẰNG NHAU VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ NGƯỢC CHIỀU NHAU:

$$\vec{F}_q + \vec{F}_h = 0 \tag{6.46}$$

Vì rằng khối lượng quán tính và khối lượng hấp dẫn được giả thiết là bằng nhau nên từ đó suy ra gia tốc quán tính và gia tốc hấp dẫn cũng phải bằng nhau về độ lớn và ngược chiều nhau:

$$\vec{a}_q + \vec{a}_h = 0 \tag{6.47}$$

KẾT QUẢ LÀ HỆ QUY CHIẾU TRỞ THÀNH QUÁN TÍNH VÀ VẬT THỂ TRONG HỆ Ở TRẠNG THÁI KHÔNG TRỌNG LƯỢNG.

Lập luận trên cũng chứng tỏ rằng, nếu ta chọn hệ quy chiếu sao cho gia tốc của nó bằng gia tốc của trường hấp dẫn thì mọi hiện tượng xảy ra trong hệ giống như trong trường hấp dẫn. Nói một cách khác, trường quán tính xuất hiện trong hệ sẽ tương đương với trường hấp dẫn đã cho.

Sự tương đương giữa trường quán tính và trường hấp dẫn về mặt cơ học là hiển nhiên. Tổng quát hóa điều khẳng định đó đối với mọi hiện tượng vật lý gọi là *nguyên lý tương đương*. Như vậy nguyên lý tương đương khẳng định rằng trong một hệ quy chiếu bằng các thí nghiệm vật lý không thể phân biệt được trường hấp dẫn và trường quán tính.

Trong thực tế trường hấp dẫn thường không đồng nhất. Vì vậy nói chung ta không thể chọn được một hệ quy chiếu có trường quán tính tương đương. Tuy nhiên điều đó có thể làm được đối với một vùng nhỏ bé của không gian, trong đó trường hấp dẫn được xem là đồng nhất. Ví dụ tại một điạ điểm nào đó của Trái đất (trong thí nghiệm với con lắc Liubimov) hoặc trên một quỹ đạo nào đó (trong thí nghiệm với con tàu vệ tinh). Vì lý do đó nguyên lý tương đương giữa trường hấp dẫn và trường quán tính chỉ có tính chất điạ phương và người ta thường gọi nó là nguyên lý tương đương định xứ.

6.4.3 Lý thuyết tương đối rộng

CÔNG CUỘC TÌM KIẾM CÁC HỆ QUẢ TOÁN HỌC CỦA NGUYÊN LÝ TƯƠNG ĐƯƠNG ĐÃ DẪN ĐẾN SỰ RA ĐỜI CỦA MỘT HỌC THUYẾT MỚI: LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG. LÝ THUYẾT NÀY ĐƯỢC EINSTEIN PHÁT MINH RA NĂM 1916 VÀ CHỦ YẾU DÙNG ĐỂ GIẢI THÍCH CÁC HIỆN TƯỢNG HẤP DẪN VŨ TRỤ. SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ HIỆU ỨNG MÀ LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG CÓ ƯU THẾ HƠN HẲN SO VỚI LÝ THUYẾT HẤP DẪN NEWTON:

- Hiệu ứng thứ nhất là sự dịch chuyển điểm cận nhật của sao Thủy trong trường hấp dẫn của Mặt trời. Những quan sát thiên văn từ giữa thế kỷ 19 cho thấy rằng chuyển động của các hành tinh xung quanh Mặt trời không phải là một đường elip khép kín hoàn hảo mà là một đường elip hở. Điểm cận nhật của quỹ đạo các hành tinh luôn luôn chuyển động lướt về phía trước, do đó trục chính của quỹ đạo không cố định mà có tham gia một chuyển động quay. Đối với sao Thủy là sao gần Mặt trời nhất, chuyển động quay này nhanh hơn cả, cứ 100 năm trục chính của nó lại quay được một góc α = 43''. Đối với các hành tinh khác góc quay này nhỏ hơn nhiều. Ví dụ, đối với Trái đất góc quay này là α= 3,8''. Cơ học Newton không thể giải thích được sự quay này mặc dù đã cố gắng xét đến tất cả các nhiễu loạn do các hành tinh khác gây ra. Lý thuyết hấp dẫn Einstein cho các kết quả trùng với thực nghiệm khá tốt: đối với sao Thủy α= 42,6''; đối với Trái đất α = 4''.

- Hiệu ứng thứ hai là sự lệch của ánh sáng trong trường hấp dẫn của Mặt trời. Theo nguyên lý hấp dẫn Einstein, không gian xung quanh vật chất bị cong đi, vật chất càng lớn không gian càng cong nhiều. Tia sáng truyền trong không gian gần vật chất cũng bị cong theo. Ngay từ năm 1915 Einstein đã tính được rằng ánh sáng của các ngôi sao ở rất xa đến Trái đất khi đi qua gần Mặt trời bị lệch đi một góc β = 1,75''. Đo lường tiến hành vào năm 1919 và sau đó khoảng mười lần nữa vào các năm sau đó đã xác nhận kết quả trên. Ví dụ, các số liệu đo vào thời kỳ nhật thực năm 1952 cho kết quả độ lệch này là β = 1,7''. Trong khi đó theo cơ học Newton các tia sáng này phải truyền theo đường thẳng.

- Hiệu ứng thứ ba là "sự dịch chuyển đỏ". Nội dung như sau: các vạch quang phổ của ánh sáng phát ra từ các ngôi sao nặng bị dịch chuyển về phía đỏ tức là về phía có bước sóng dài hơn so với các bước sóng của các nguyên tử vật chất phát ra trong điều kiện Trái đất. Hiệu ứng ngày được kiểm tra trước tiên đối với sao Thiên lang B (sao này có mật độ gấp hàng chục nghìn lần mật độ của nước và có trường hấp dẫn trên bề mặt lớn gấp hai mươi lần trường hấp dẫn trên Mặt trời) và sau đó đối với nhiều ngôi sao khác. Các kết quả thu được đều xác nhận các tính toán theo lý thuyết hấp dẫn của Einstein, như đối với sao Thiên lang B độ dịch chuyển tương đối của tần số là $\frac{\Delta\nu}{\nu} = -5{,}9.10^{-5}$ theo tính toán, trong khi đó đo lường cho kết quả là $-6{,}6.10^{-5}$.

Từ năm 1959 người ta cũng đã tiến hành các thí nghiệm kiểm tra hiệu ứng dịch chuyển đỏ ngay trong phạm vi phòng thí nghiệm trên Trái đất. Các thí nghiệm này một lần nữa lại xác nhận lý thuyết hấp dẫn của Einstein.

Ngoài các hiệu ứng trên, lý thuyết tương đối suy rộng của Einstein còn mở đầu cho một thời kỳ mới, thời kỳ nghiên cứu sự hình thành và tiến triển của vũ trụ một cách khoa học.

6.5 chuyển động quay của Trái đất

6.5.1 Gia tốc trọng trường

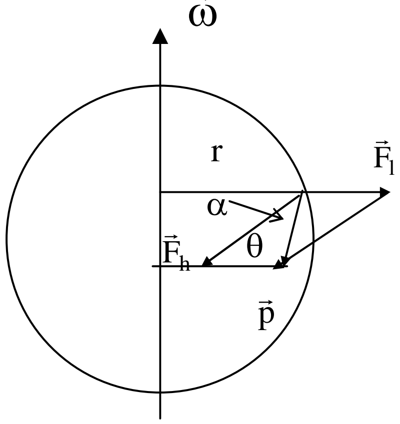
MỘT VẬT ĐỨNG YÊN GẦN MẶT ĐẤT CHỊU TÁC DỤNG CỦA LỰC HẤP HẪN HƯỚNG VÀO TÂM CỦA TRÁI ĐẤT VÀ BẰNG:

$$\vec{F}_h = -k\frac{Mm}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = m\vec{g}$$

Trong đó k là hằng số hấp dẫn, M và m là khối lượng của Trái đất và của vật, R là bán kính của Trái đất. Đại lượng:

$$\vec{g} = -k\frac{M}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}$$

Gọi là gia tốc hấp dẫn hay cường độ của trường hấp dẫn. Dấu trừ trước các công thức trên chứng tỏ rằng gia tốc và lực hấp dẫn hướng vào tâm của Trái đất.



Hình 6.8

Ngoài lực hấp dẫn do Trái đất quay, vật còn chịu tác dụng của lực quán tính ly tâm:

$$\vec{F}_l = m\omega^2\vec{r}$$

Trong đó ω là tốc độ góc của Trái đất, r là khoảng cách từ vật tới trục quay (hình 6.8).

Vì trọng lượng của một vật là tổng của các lực mà Trái đất tác dụng lên vật đó, nên:

$$\vec{P} = \vec{F}_h + \vec{F}_l \qquad (6.48)$$

Dựa vào hình 6.8 ta có thể tính được cả độ lớn lẫn hướng của đại lượng này.

Lực quán tính ly tâm cực đại ở xích đạo và giảm đến không ở hai địa cực. Gọi A là tỉ số giữa lực ly tâm cực đại F_{01} và lực hấp dẫn F_h ta được:

$$A = \frac{F_{ol}}{F_h} = \frac{\omega^2 R}{kM} \qquad (6.49)$$

Thay các giá trị:

$\omega = 2\pi/8,64.10^4$s , $R = 6,378.10^{-6}$m , $k = 6,67.10^{-11}$m^3/kg.s^2 ,

$M = 5,98.10^{24}$kg

Vào biểu thức trên ta được: $A \approx 3,5.10^{-3}$

Như vậy lực quán tính ly tâm cực đại bằng 0,35% lực hấp dẫn và một cách gần đúng có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực này và xem trọng lượng của vật bằng chính lực hấp dẫn tác dụng lên nó. Tuy nhiên trong nhiều thí nghiệm chính xác, ta không thể bỏ qua ảnh hưởng của lực quán tính ly tâm này. Đặt:

$$P = mg_\theta \qquad \mathbf{(6.50)}$$

Trong đó: g_θ là gia tốc trọng trường tại vĩ độ θ , $g_\theta = \frac{1}{m}\frac{F_h - F_l\cos\theta}{\cos\alpha}$;

α là góc giữa lực hấp dẫn F_h và trọng lực P (hình 6.8)

Kết hợp công thức trên với (6.50) ta được:

$$g_\theta = g\frac{1 - A\cos^2\theta}{\cos\alpha} \qquad (6.51)$$

Mặt khác ta có:

$$\sin\alpha = \frac{F_l\sin\theta}{F_h} = \frac{A\sin 2\theta}{2} \qquad (6.52)$$

Kết hợp công thức trên với (6.50) và bỏ qua các số hạng nhỏ bậc hai đối với A ta được:

$$g_\theta = g(1 - A\cos^2\theta) \qquad (6.53)$$

Các công thức (6.52) và (6.53) cho ta phương và độ lớn của gia tốc trọng trường phụ thuộc vào vĩ độ θ, tại xích đạo θ = 0 gia tốc trọng trường có giá trị bé nhất $g_0 \approx 978cm/s^2$. Khi vĩ độ tăng, gia tốc trọng trường tăng theo. Ở địa cực $g_{90} \approx 981cm/s^2$. Ở vĩ độ $\theta = 45^0$gia tốc trọng trường có giá trị chuẩn $g_{45} = 980cm/s^2$.

Trên đây chúng ta xem Trái đất có dạng hình cầu, trong thực tế Trái đất hơi dẹt ở hai đầu. Bán kính ở xích đạo $R_x = 6378km$, trong khi bán kính ở địa cực $R_đ = 6357km$. Vì vậy bản thân lực hấp dẫn cũng tăng theo vĩ độ. Kết quả là gia tốc trọng trường tăng theo quỹ độ nhanh hơn theo công thức (6.53). ở địa cực gia tốc này là $g_{90^0} = 983cm/s^2$.

GIÁ TRỊ CỦA GIA TỐC TRỌNG TRƯỜNG NÓI TRÊN LÀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH. TRONG THỰC TẾ DO CẤU TẠO KHÔNG ĐỒNG ĐỀU CỦA CÁC LỚP ĐẤT ĐÁ TRONG VỎ TRÁI ĐẤT NÊN GIA TỐC TRỌNG TRƯỜNG CHỊU NHỮNG THĂNG GIÁNG CÓ TÍNH CHẤT ĐỊA PHƯƠNG. SỰ THĂNG GIÁNG NÀY ĐƯỢC XEM LÀ CÁC SỐ LIỆU QUAN TRỌNG ĐỂ ĐÓN NHẬN VỀ CẤU TẠO CÁC LỚP ĐẤT ĐÁ TẠI ĐỊA PHƯƠNG ẤY.

Ngoài chuyển động quay ngày đêm, Trái đất còn tham gia chuyển động quay quanh Mặt trời, lực quán tính ly tâm do chuyển động này gây ra vào khoảng 0,2 lần lực quán tính ly tâm do chuyển động quay ngày đêm tạo ra và tại mỗi địa phương lực quán tính này thay đổi hướng so với lực hấp dẫn tùy theo giờ trong ngày. Vì vậy những phép đo g_θ với độ chính xác cao cần lưu ý đến sự thay đổi này của g_θ.

6.5.2 Lực Côriôlit

BÊN CẠNH LỰC QUÁN TÍNH LY TÂM, TRONG HỆ QUY CHIẾU TRÁI ĐẤT QUAY CÒN CÓ LỰC CÔRIÔLIT, LỰC NÀY TÁC DỤNG LÊN CÁC VẬT THỂ CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI SO VỚI TRÁI ĐẤT.

Để nghiên cứu lực Côriôlit chúng ta phân tích vận tốc góc của Trái đất $\vec{\omega}$ và vận tốc của vật thể chuyển động $\vec{v}$ ra các thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt đất (hình 6.9).

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_t \ ; \qquad \vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_t \qquad (6.54)$$

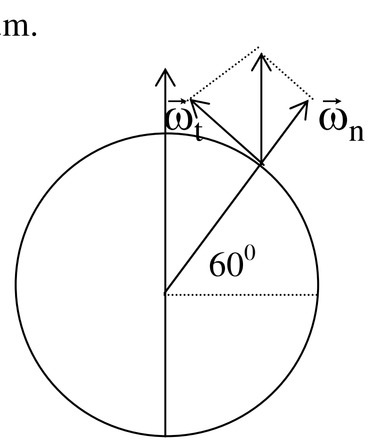
Thay (6.54) vào biểu thức của lực Coriôlit:

$$\vec{F}_c = -2m[\vec{\omega}_n \times \vec{v}_n]$$

Và chú ý rằng $[\vec{\omega} \times \vec{v}] = 0$ ta được:

$$\vec{F}_c = -2m[\vec{\omega}_n \times \vec{v}_t] - 2m[\vec{\omega}_t \times \vec{v}_n] - 2m[\vec{\omega}_t \times \vec{v}_t]$$

Thành phần thứ nhất của lực Coriôlit: $-2m[\vec{\omega}_n \times \vec{v}_t]$ có phương tiếp tuyến với mặt đất. Nếu nhìn theo phương của tốc độ $\vec{v}_t$ thì ở Bắc bán cầu, lực này luôn hướng về phía bên phải, còn ở Nam bán cầu lực này luôn hướng về phía bên trái. Vì lý do đó nên các dòng sông ở Bắc bán cầu làm lở mòn bờ phải, còn các dòng sông ở Nam bán cầu làm lở mòn bờ trái. Hiện tượng mòn vẹt các đường ray xe lửa một chiều và sự lệch đi của các dòng nước biển (hải lưu) cũng được giải thích tương tự. Chiều của gió mùa cũng do thành phần $-2m[\vec{\omega}_n \times \vec{v}_t]$ của lực Côriôlit tác động. Vùng xích đạo bị đốt nóng, không khí nóng bốc lên các lớp cao của khí quyển và đi về phía các địa cực. Bị lạnh ở tầng cao nó đi xuống ở khoảng các vĩ độ $25^0 - 30^0$, rồi lại từ đó thổi về xích đạo. Ở Bắc bán cầu, dưới tác dụng của lực này luồng gió bị lệch về phía tây và như vậy thổi từ đông bắc lại. Tương tự ở Nam bán cầu có gió đông nam.



Hình 6.9

Thành phần thứ hai của lực Côriôlit: $-2m[\vec{\omega}_t \times \vec{v}_n]$ cũng hướng theo phương nằm ngang. Nếu vật chuyển động lên cao thì lực này hướng về phía tây, còn nếu vật rơi xuống mặt đất thì lực này hướng về phía đông. Vì vậy những vật thể rơi tự do đều lệch về hướng đông. Khi vật rơi từ độ cao 100m ở vĩ độ 60^0 thì lệch khoảng 1cm.

Thành phần thức ba của lực Côriôlit: $-2m[\vec{\omega}_t \times \vec{v}_t]$ hướng theo phương thẳng đứng, có chiều từ trên xuống hoặc từ dưới lên tuỳ thuộc vào chiều của ω_t và v_t. Lực này cần chú ý đến khi nghiên cứu các vật thể chuyển động với khoảng cách xa, ví dụ như chuyển động của tên lửa mặt đất.

Cuối cùng lực Côriôlit còn liên quan đến chuyển động của con lắc Fucô, bằng chứng về sự quay của Trái đất.

6.5.3 Con lắc Fucô

THÍ NGHIỆM CON LẮC FUCÔ ĐƯỢC THỰC HIỆN LẦN ĐẦU VÀO NĂM 1851 TẠI PARI ĐỂ CHỨNG MINH SỰ TỰ QUAY CỦA TRÁI ĐẤT. THIẾT BỊ GỒM MỘT VẬT NẶNG 28KG TREO Ở ĐẦU MỘT SỢI DÂY DÀI 70M. ĐẦU TRÊN SỢI DÂY ĐƯỢC TREO SAO CHO CON LẮC CÓ THỂ DAO ĐỘNG TỰ DO THEO PHƯƠNG BẤT KỲ.

Theo dõi sự dao động tự do của con lắc trong một thời gian dài người ta nhận thấy phương của con lắc quay theo chiều kim đồng hồ và quay được một vòng sau 32 giờ.

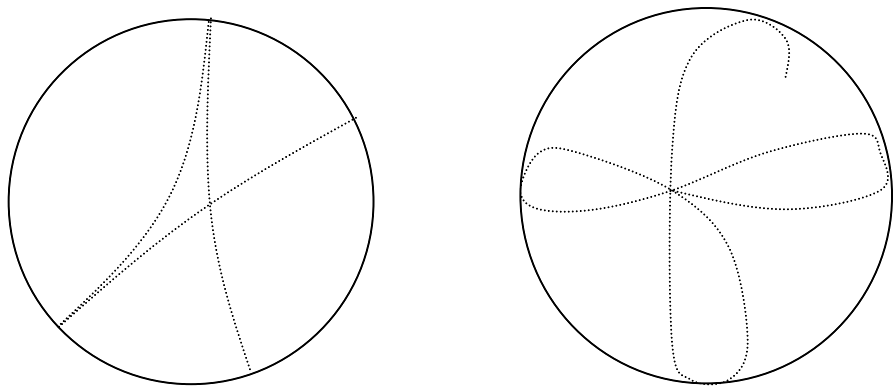
Sự quay mặt phẳng dao động của con lắc được giải thích như sau:

Giả thiết thí nghiệm Fucô được tiến hành ở bắc cực. Điểm treo con lắc nằm trên trục quay của Trái đất. Ta xét thí nghiệm này trong hệ quy chiếu quán tính ứng với các ngôi sao đứng yên. Trong hệ quy chiếu quán tính này mặt phẳng dao động của con lắc là không đổi, còn Trái đất quay từ tây sang đông với chu kỳ quay là T=24giờ. Nếu bây giờ ta lại xét thí nghiệm trong hệ quy chiếu Trái đất, coi Trái đất là đứng yên thì rõ ràng mặt phẳng dao động của con lắc quay so với Trái đất từ đông sang tây với chu kỳ T=24giờ. Trong hệ quy chiếu Trái đất, sự quay mặt phẳng dao động của con lắc được giải thích là do tác dụng của lực Côriôlit. Rõ ràng lực này phải hướng theo phương nằm ngang, và vì tốc độ của con lắc cùng hướng theo phương nằm ngang (do dây treo dài và dao động với biên độ nhỏ) nên theo mục trên ta có lực tác dụng lên con lắc là:

$$\vec{F} = -2m[\vec{\omega}_n \times \vec{v}_t] = -2m[\vec{\omega}_n \times \vec{v}\ \ ]$$

Lực này ở Bắc cực làm mặt phẳng dao động của con lắc quay với tốc độ góc $\omega_n = \omega$ và do đó chu kỳ quay là 24 giờ. Nếu thí nghiệm được tiến hành ở vĩ độ θ thì lực trên làm mặt phẳng dao động của con lắc quay với tốc độ $\omega_n = \omega\sin\theta$ (hình 6.9) ứng với chu kỳ quay là $T = \dfrac{24}{\sin\theta}$ giờ. Ở Pari có vĩ độ $\theta = 48^0 51'$ nên $T \approx 32$ giờ phù hợp với thực nghiệm.

Mặc dù với tốc độ góc và chu kỳ quay như đã xác định, quỹ đạo chuyển động của con lắc Fucô có thể khác nhau phụ thuộc vào trạng thái ban đầu của nó. Tuỳ theo các trạng thái ban đầu mà con lắc có thể có những quỹ đạo khác nhau (hình 6.10a, b). Sự khác nhau đó được giải thích như sau:



a) b)

Hình 6.10

Nếu con lắc được đưa ra khỏi vị trí cân bằng và buông ra với tốc độ ban đầu bằng không, thì nó sẽ bắt đầu chuyển động về phía vị trí cân bằng. Tuy nhiên lực Côriôlit làm lệch nó về bên phải và do đó nó không đi qua tâm cân bằng. Kết quả là quỹ đạo con lắc có dạng như hình 6.10a.

Nếu ở điểm cân bằng ta truyền cho con lắc tốc độ ban đầu thì khi đi ra khỏi tâm cân bằng lực Coriôlit làm lệch nó về bên phải. Ở vị trí lệch cực đại tốc độ dọc theo bán kính bằng không nhưng tốc độ vuông góc với bán kính lại lớn nhất. Kết quả là quỹ đạo của con lắc tiếp xúc với vòng tròn có tâm là tâm cân bằng và bán kính là độ lệch cực đại của con lắc. Khi đó quỹ đạo của con lắc được mô tả trên hình 6.10b.

CHƯƠNG VII
DAO ĐỘNG VÀ SÓNG

7.1 Dao động điều hòa

7.1.1 Hiện tượng tuần hoàn

Trong tự nhiên, đời sống và kỹ thuật, chúng ta thường gặp nhiều hiện tượng lặp đi lặp lại một cách tuần hoàn, sau một khoảng thời gian xác định, hiện tượng lặp lại như cũ : ngày và đêm, bốn mùa Xuân – Hạ – Thu – Đông lặp đi lặp lại năm này qua năm khác, kim đồng hồ quay hết một vòng lại quay về vị trí cũ v.v...

Từ đó, ta có thể định nghĩa : *"Hiện tượng tuần hoàn là hiện tượng cứ sau những khoảng thời gian xác định, lặp lại đúng như cũ".*

Khoảng thời gian T nhỏ nhất mà sau đó hiện tượng lặp lại như cũ, gọi là chu kỳ của hiện tượng tuần hoàn. Số chu kỳ trong một đơn vị thời gian (1 giây) gọi là tần số :

$$\gamma = \frac{1}{T} \qquad (7.1)$$

γ có đơn vị là Hertz (Hz) hay s^{-1}.

Ta gọi đại lượng biến thiên tuần hoàn là x, thì :

$$x = f(t) = f\,(t + nT) \qquad (7.2)$$

Trong đó n là số nguyên.

7.1.2 Dao động điều hoà

Trong số những dao động tuần hoàn thì dao động điều hòa đơn giản và rất quan trọng.

"Dao động điều hoà là một dao động tuần hoàn trong đó đại lượng x biến thiên theo thời gian theo quy luật hình sin (cosin)" :

$$x = a\sin(\omega t - \varphi) \qquad \text{hay} \qquad x = a\cos(\omega t-\varphi) \qquad (7.3)$$

Trong đó : a là biên độ cực đại của dao động;

x là biên độ ở thời điểm t;

ω là tần số góc;

$(\omega t-\varphi)$ là pha của dao động.

Từ (7.2) và (7.3) thay đối số t bởi t+T , ta suy ra mối liên hệ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (7.4)$$

$$\omega = 2\pi\gamma \qquad (7.5)$$

Xét một chất điểm M chuyển động trên đường tròn tâm O, bán kính a, vận tốc góc ω. Xét hình chiếu N của điểm M trên trục Ox ta thấy dao động của N khi M chuyển động trên đường tròn là một dao động điều hòa. Tọa độ của điểm N : x = ON = OM.cosθ = a.cos(ωt-φ).

Trong đó θ = (ωt-φ) là góc hợp bởi $\overrightarrow{OM}$ và Ox.

Tương tự, có thể thấy hình chiếu của M trên trục Oy cũng là một dao động điều hòa biểu diễn bởi : $y = a.\sin(\omega t-\varphi)$

7.1.3 Biểu thức toán học của dao động điều hòa :

Dao động điều hòa được biểu diễn bằng biểu thức (7.3). Ngoài dạng trên, đôi khi còn được biểu diễn dưới các dạng khác. Dưới đây là một vài dạng thường gặp :

$$x = a.\sin(\omega t-\varphi) = a.\sin\omega t.\cos\varphi - a.\cos\omega t\sin\varphi$$

Đặt : A = a.cosφ và B = -a.sinφ thì dao động điều hòa có thể biểu diễn dưới dạng :

$$x = A.\sin\omega t + B.\cos\omega t \qquad (7.6)$$

Ngược lại, cho một dao động có biểu thức dạng (7.6) thì bằng cách đặt :

$$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{B}{A}$$

và $a = \sqrt{A^2 + B^2}$

Ta có thể đưa (7.6) về dạng (7.3) quen thuộc.

Trong thực tế, để thuận tiện cho tính toán, người ta còn biểu diễn dao động điều hòa dưới dạng phức.

Từ công thức Ơle : $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta$

Ta thấy rằng các hàm điều hòa (7.3) :

$$x_1 = a.\cos(\omega t-\varphi) \text{ và } x_2 = a.\sin(\omega t-\varphi)$$

Chính là phần thực và phần ảo của hàm phức :

$$x = a.e^{i(\omega t-\varphi)} \qquad (7.7)$$

Ta còn có thể biểu diễn (7.7) dưới dạng :

$$x = C.e^{i\omega t} \qquad (7.8)$$

Trong đó C = $a.e^{-i\varphi}$ chứa cả biên độ thực a và pha ban đầu φ, được gọi là biên độ phức.

Biểu diễn dao động điều hòa dưới dạng biên độ phức (7.8) thuận lợi khi tính toán, muốn trở về dạng hàm thực (7.3) của dao động điều hòa thì có thể tính biên độ thực a theo biên độ phức C bằng cách nhân biên độ phức C với liên hợp phức C* của nó, ta có :

$$C.C^* = a.e^{-i\varphi}ae^{i\varphi} = a^2 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{C.C^*}$$

7.1.4 Phương trình của dao động điều hòa

Giả sử ta có chất điểm M khối lượng m dao động theo quy luật :

$$x = a.\sin(\omega t-\varphi)$$

Để xác định phương trình dao động M, ta xét :

Vận tốc của điểm M :

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = a\omega\cos(\omega t - \varphi)$$

Gia tốc của điểm M :

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -a\omega^2\sin(\omega t - \varphi) = -\omega^2 x$$

Theo phương trình cơ bản của động lực học, lực $\vec{F}$ tác dụng vào M làm cho nó chuyển động :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = -m\omega^2\vec{x}$$

Phương trình này chứng tỏ lực tác dụng $\vec{F}$ tỉ lệ với độ lệch x của dao động và hướng ngược chiều với $\vec{x}$ tức là luôn luôn hướng về vị trí cân bằng của dao động.

Phương trình dao động (7.9) còn được biểu diễn dưới dạng :

$$F + kx = 0$$

Hay : $$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad (7.10)$$

Trong đó $k = +m\omega^2$ (k>0)

(7.10) chính là phương trình dao động điều hòa dưới dạng tổng quát. Nghiệm của (7.10) có dạng :

$x = a\sin(\omega t - \varphi)$ (hoặc $x = a\cos(\omega t - \varphi)$);

Trong đó tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Với a, φ là các hằng số xác định từ các điều kiện ban đầu.

7.1.5 Năng lượng của dao động điều hòa

Chất điểm M dao động quanh điểm 0 có cơ năng nhất định gồm tổng động năng $W_đ$ và thế năng W_t tại thời điểm t đang xét.

Giả sử chất điểm dao động theo quy luật :

$$x = a\sin(\omega t - \varphi)$$

Sẽ có động năng :

$$W_đ = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2(\omega t - \varphi)$$

Theo định nghĩa, độ giảm thế năng của M, khi M dịch chuyển từ 0 đến vị trí x, bằng công của lực tác dụng lên M trên đoạn đường ấy, tức :

$$W_t(0) - W_t(x) = \int_0^x Fdx = -\int_0^x m\omega^2 xdx = -m\omega^2\frac{x^2}{2}$$

$$W_t(x) = W_t(0) + m\omega^2\frac{x^2}{2} = W_t(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

Quy ước chọn thế năng ở vị trí cân bằng 0 bằng không, tức $W_t(0)=0$. Vậy :

$$W_t(x) = m\omega^2\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t - \varphi)$$

Cơ năng của chất điểm M là :

$$W = W_đ + W_t = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2(\omega t - \varphi)$$

$$W = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

Vậy : *"Năng lượng dao động của một chất điểm tỉ lệ với bình phương biên độ cực đại".*

Ta qui ước gọi cơ năng của chất điểm dao động là năng lượng dao động và thừa nhận rằng năng lượng của mọi dao động điều hòa tỉ lệ với bình phương biên độ cực đại.

7.2 Ví dụ áp dụng

7.2.1 Dao động của một quả nặng treo ở đầu một lò xo

Giả sử có một lò xo, một đầu được cố định còn đầu kia treo một quả nặng khối lượng m (hình 7.1). Gọi ℓ_o là chiều dài của lò xo khi không bị biến dạng và ℓ là chiều dài của nó khi biến dạng (bị nén hoặc kéo). Khi lò xo biến dạng thì xuất hiện lực đàn hồi $\vec{F}$ có xu hướng kéo nó về vị trí cân bằng (không biến dạng).

Nếu độ biến dạng $x = \ell - \ell_o$ nhỏ thì lực đàn hồi $\vec{F}$ tỉ lệ với độ biến dạng x, tức là :

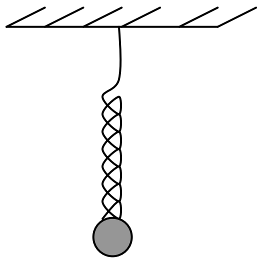
$$\vec{F} = -k\vec{x} \text{ (định luật Hooke)}$$

k gọi là hệ số đàn hồi.

Khi đó phương trình chuyển động của vật sẽ là :

$$m\ddot{x} = -kx \qquad (7.12)$$

Cần chú ý rằng khi dẫn ra phương trình trên chúng ta chưa kể đến tác dụng của trọng lực của vật. Tuy nhiên có thể thấy rằng trọng lực không làm thay đổi dạng của phương trình dao động (7.12). Thật vậy, nếu ta ký hiệu X là độ giãn của lò xo, tức là $X = \ell - \ell_o$ thì khi đó phương trình chuyển động của hệ (gồm lò xo và quả nặng) là :



Hình 7.1

Gọi X_o là độ giãn của lò xo ở vị trí cân bằng (tức là độ dài của lò xo khi treo quả nặng m) thì khi đó ta có :

$$-kX_0 + mg = 0$$

Hay $mg = kX_0$ thay giá trị này của mg vào phương trình chuyển động của hệ ta có phương trình :

$$m\ddot{X} = -k(X - X_0)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu $x = X - X_o$ thì phương trình chuyển động của hệ lại trở về dạng (7.12).

Trở lại phương trình (7.12), nếu ta đặt $k = m\omega^2$ thì (7.12) trở thành :

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

Nghiệm của (7.13) như đã biết có dạng (7.3). Vậy quả nặng treo ở đầu lò xo sẽ thực hiện một dao động điều hoà :

$$x = a.\sin(\omega t\text{-}\varphi)$$

Trong đó tần số góc ω xác định bởi biểu thức :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

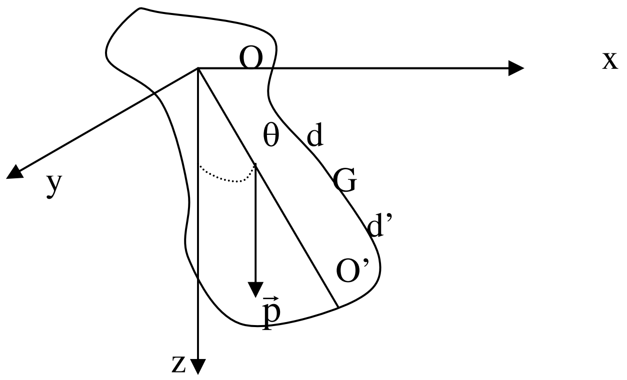
Còn chu kỳ của dao động theo (7.4) :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Biên độ cực đại a và pha ban đầu φ được xác định từ những điều kiện ban đầu.

7.2.2 Con lắc vật lý

Con lắc vật lý là một vật rắn có thể dao động quanh một trục nằm ngang cố định, dưới tác dụng của trọng lực (hình 7.2).



Hình 7.2

Gọi O là trục dao động của con lắc, G là khối tâm của nó, $\vec{P} = m\vec{g}$ là trọng lượng con lắc, d là khoảng cách từ khối tâm đến trục quay O, I là mômen quán tính của con lắc đối với trục quay, θ là góc lệch của con lắc so với phương thẳng đứng.

Con lắc chịu tác dụng của hai lực : trọng lượng $\vec{P} = m\vec{g}$ đặt tại trọng tâm G và phản lực $\vec{R}$ của trục quay. Mômen của $\vec{R}$ đối với O triệt tiêu (vì $\vec{R}$ đi qua O), còn mômen của trọng lực $\vec{P}$ đối với O là : – mgdsinθ.

Phương trình chuyển động của con lắc là :

$$I = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta$$

Nếu dao động có biên độ nhỏ (θ nhỏ) thì ta có thể thay sinθ bằng θ và phương trình chuyển động trở thành :

$$I\ddot{\theta} = -mgd\theta$$

Hay : $$\ddot{\theta} + \frac{mgd\theta}{I} = 0$$

Phương trình này có dạng hoàn toàn giống (7.13), do đó có thể thấy ngay nghiệm của nó có dạng :

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Trong đó tần số góc dao động :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (7.14)$$

θ_0 và φ là hai hằng số xác định từ điều kiện ban đầu. Chu kỳ của dao động :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (7.15)$$

Nếu chu kỳ dao động của con lắc không phụ thuộc vào biên độ thì dao động đó được gọi là đẳng thời. Chúng ta thấy rằng với góc lệch θ cỡ vài độ thì dao động của con lắc vật lý là đẳng thời. Dựa trên tính chất này người ta có thể dùng con lắc vật lý làm đồng hồ.

Trường hợp riêng của con lắc vật lý là con lắc toán học hay gọi là con lắc đơn. Con lắc toán học là con lắc mà toàn bộ khối lượng của nó tập trung tại một điểm – đó là khối tâm G của con lắc. Trong thực tế, con lắc toán học là một quả cầu nhỏ treo ở đầu một sợi chỉ chiều dài ℓ. Trong trường hợp này, ta có : $d = \ell$, $I = m\ell^2$. Công thức (7.15) trở thành :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (7.16)$$

So sánh (7.15) và (7.16) ta thấy con lắc vật lý sẽ dao động như con lắc toán học có chiều dài :

$$\ell = \frac{I}{md} \qquad (7.17)$$

ℓ được gọi là chiều dài rút gọn của con lắc vật lý.

Trên đường OG (hình 7.2) ta lấy một điểm O' sao cho OO' = ℓ là chiều dài rút gọn của con lắc vật lý. Điểm O' được gọi là tâm dao động của con lắc vật lý. Đó là điểm mà phải tập trung toàn bộ khối lượng của con lắc để cho chu kỳ dao động của nó không thay đổi.

Theo định lý Huyghen- Stene ta có :

$$I = I_G + md^2$$

Trong đó I_G là mô men quán tính của con lắc đối với trục đi qua khối tâm G của nó. Thay biểu thức của I vào (7.17) ta có :

$$\ell = d + \frac{I_G}{md} \qquad (7.18)$$

Từ (7.18) ta có thể rút ra hai hệ quả. Thứ nhất là ℓ>d, do đó hai điểm 0 và 0' phải nằm về hai phía đối với tâm G. Thứ hai có thể treo con lắc tại các điểm khác nhau mà chu kỳ dao động của con lắc không thay đổi miễn sao các điểm treo này phải cách đều khối tâm G của con lắc.

Điểm treo 0 và tâm dao động 0' là các điểm liên hợp theo ý nghĩa sau : *nếu treo con lắc ở điểm 0' thì chu kỳ dao động của nó vẫn giữ nguyên và điểm treo ban đầu 0 bây giờ sẽ trở thành tâm dao động*. Đó là nội dung của định lý Huyghen.

Để chứng minh định lý này, ta treo con lắc ở điểm 0'. Gọi khoảng cách 0'G = d'. Khi đó độ dài rút gọn của con lắc theo (7.18) sẽ là :

$$\ell' = d' + \frac{I_G}{md'}$$

Nhưng theo hình vẽ ta có d'= ℓ-d và kết hợp với (7.18) ta suy ra :

$$d' = \ell - d = \frac{I_G}{md}$$

Thay biểu thức này vào biểu thức ℓ', ta thu được :

$$\ell' = \frac{I_G}{md} + d$$

So sánh với(7.18) ta có $\ell'=\ell$, nghĩa là chu kỳ dao động của con lắc giữ nguyên không đổi như khi treo nó tại điểm 0.

7.3 Tổng hợp dao động

Một vật đồng thời có thể tham gia vào nhiều dao động khác nhau, chẳng hạn một vật nặng treo vào ba điểm cố định bằng ba lò xo ống sẽ có dao động điều hoà bằng tổng hợp của ba dao động do ba lò xo riêng biệt gây ra. Vấn đề đặt ra ở đây là dao động tổng hợp sẽ như thế nào nếu biết các dao động thành phần.

7.3.1 Nguyên lý chồng chất

Để nghiên cứu sự tổng hợp các dao động, ta biểu diễn dao động bằng một vectơ, gốc là chất điểm dao động, môđun bằng biên độ cực đại của dao động, phương của vectơ là phương dao động và chiều của vectơ ứng với biên độ cực đại dương. Trong trường hợp các dao động thành phần là nhỏ ta thừa nhận dao động tổng hợp tuân theo một nguyên lý sau gọi là nguyên lý chồng chất.

Nếu một chất điểm tham gia vào nhiều dao động biểu diễn bởi các vectơ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ *thì chất điểm sẽ có một dao động tổng hợp biểu diễn bởi một vectơ là tổng hình học của các vectơ trên, nghĩa là :*

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + ... + \vec{v}_n \qquad (7.19)$$

Nói cách khác việc tổng hợp dao động phải thực hiện theo nguyên lý cộng vectơ. Phép cộng vectơ sẽ thu về phép cộng đại số khi các vectơ $\vec{v}$ có cùng phương hoặc khi đại lượng biến thiên trong dao động điều hoà là một lượng vô hướng (ví dụ áp suất chất khí trong dao động âm thanh).

7.3.2 Tổng hợp hai dao động cùng phương và cùng chu kỳ

Ta xét trường hợp hai dao động v_1 và v_2 có cùng phương và cùng tần số (hoặc cùng chu kỳ T), khi đó phép cộng vectơ thu về phép cộng đại số.

Giả sử hai dao động thành phần là :

$$x_1 = a_1\cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$x_2 = a_2\cos(\omega t - \varphi_2)$$

Dao động tổng hợp sẽ là :

$$x = x_1 + x_2 = a_1\cos(\omega t - \varphi_1) + a_2\cos(\omega t - \varphi_2)$$

$$= a_1\cos\omega t\cos\varphi_1 + a_1\sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$+ a_2\cos\omega t\cos\varphi_2 + a_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$= (a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2)\cos\omega t + (a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

Biểu thức này có dạng :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (7.20)$$

Trong đó :

$$A = a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 \quad ; \qquad B = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2$$

Biểu thức (7.20) chứng tỏ rằng dao động tổng hợp cũng là một dao động điều hoà với tần số ω như tần số dao động thành phần, nghĩa là :

$$x = a\cos(\omega t-\varphi)$$

Trong đó biên độ cực đại a và góc lệch pha ban đầu φ Xác định được theo các biểu thức sau :

$$a^2 = A^2 + B^2 = (a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2)^2$$

$$+ (a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2)^2$$

$$= a_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) + a_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)$$

$$+ 2a_1a_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 2a_1a_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (7.21)$$

$$\text{Và : } \operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A} = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2} \qquad (7.22)$$

Ta cũng có thể thu được các kết quả trên bằng phương pháp đồ thị (phương pháp Frênen).

Ta vẽ hai vectơ $\overrightarrow{OV_1}$ và $\overrightarrow{OV_2}$ có môđun bằng a_1 và a_2 và làm với trục Ox những góc $(\omega t-\varphi_1)$ và $(\omega t-\varphi_2)$ (hình 7-3). Hai vectơ $\overrightarrow{OV_1}$ và $\overrightarrow{OV_2}$ cùng quay quanh O với vận tốc góc ω, do đó góc giữa chúng không thay đổi theo thời gian. Nói cách khác hình bình hành OV_1VV_2 cũng quay quanh O với vận tốc góc là ω có nghĩa là OV cũng quay quanh O với vận tốc góc là ω : dao động tổng hợp cũng có tần số ω như các dao động thành phần.

Biên độ của dao động tổng hợp có thể tính được theo các công thức lượng giác áp dụng cho tam giác OV_2V :

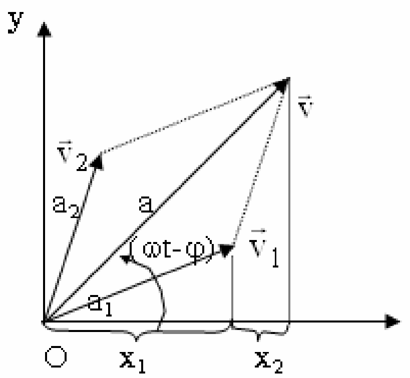
$$a^2 = OV^2 = OV_1^2 + OV_2^2 + 2OV_1OV_2\cos(V_1, V_2)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos[(\omega t - \varphi_1) - (\omega t - \varphi_2)$$

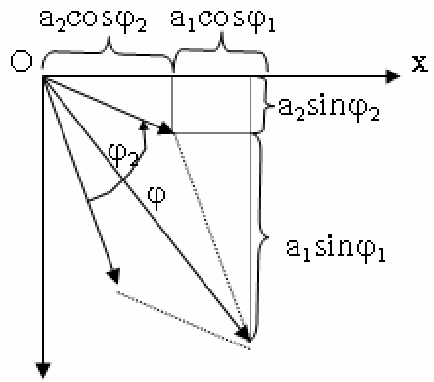
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Ta lại thu được công thức (7.21).

Muốn tính góc lệch pha ban đầu φ của dao động tổng hợp ta xét vị trí của ba vectơ $\overrightarrow{OV}_1$, $\overrightarrow{OV_2}$ và $\overrightarrow{OV}$ ở thời điểm t = 0 (xem hình 7.4)



Hình 7.3



Hình 7.4

Tại thời điểm t = 0, các vectơ $\overrightarrow{OV}_1$, $\overrightarrow{OV_2}$ và $\overrightarrow{OV}$ tạo với trục 0x các góc lần lượt là $-\varphi_1$, $-\varphi_2$ và $-\varphi$. Từ hình vẽ ta thấy ngay :

$$tg\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$$

Ta lại thu được (7.22).

Tóm lại bằng phương pháp đồ thị chúng ta lại tìm được dễ dàng và trực quan hơn các kết quả ở trên. Chính vì vậy phương pháp đồ thị thường được ứng dụng khi tổ hợp nhiều dao động cùng chu kỳ và cùng phương.

Trở lại (7.21), ta thấy biên độ của dao động tổng hợp không những phụ thuộc vào biên độ cực đại của các dao động thành phần mà còn phụ thuộc vào pha ban đầu của chúng.

- Khi $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, ta nói hai dao động thành phần cùng pha. Khi đó biên độ cực đại của hai dao động tổng hợp đạt giá trị cực đại và bằng :

$$a = a_1 + a_2$$

- khi $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, ta nói hai dao động thành phần ngược pha. Khi đó biên độ cực đại của hai dao động tổng hợp đạt giá trị cực tiểu và bằng :

$$a = |a_1 - a_2|$$

- khi $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi/2$, ta nói hai dao động thành phần có pha vuông góc với nhau. Khi đó biên độ dao động tổng hợp :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tóm lại tùy theo hiệu số pha ban đầu của các dao động thành phần mà biên độ dao động tổng hợp nhận các giá trị nằm trong khoảng $|a_1 - a_2|$ đến $(a_1 + a_2)$.

7.4 Tổng hợp hai dao động có chu kỳ khác nhau chút ít – Hiện tượng phách

Ta xét trường hợp chất điểm tham gia hai hoạt động cùng phương, nhưng có các tần số ω_1 , ω_2 khác nhau chút ít :

$$x_1 = a_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = a_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Trong đó $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 << \omega_1\omega_2$

Dao động tổng hợp :

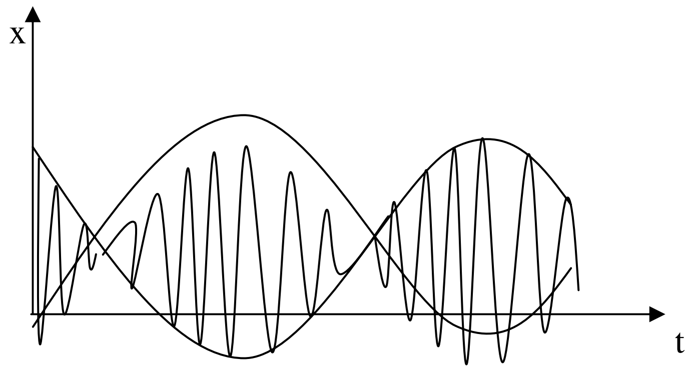
$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 = a_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2)\\
&= a_1[\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \cos(\omega_2 t - \varphi_2)] + (a_2 - a_1)\cos(\omega_2 t - \varphi_2)\\
&= 2a_1\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \qquad (7.23)\\
&\quad + (a_2 - a_1)\cos(\omega_2 t - \varphi_2)\\
&= 2a_1\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos(\omega t - \varphi) + (a_2 - a_1)\cos(\omega_2 t - \varphi_2)
\end{aligned}$$

Trong đó $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ và $\varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$

Biểu thức (7.23) chứng tỏ rằng dao động tổng hợp gồm hai dao động. Dao động thứ nhất biểu diễn bởi số hạng đầu ở vế phải của(7.23) không phải là dao động điều hoà vì nó là tích của hai dao động điều hòa có tần số là $\Delta\omega/2$ và ω . Tuy nhiên do ω_1 và ω_2 khác nhau rất ít nên ω rất gần ω_1 và ω_2 và đồng thời $\Delta\omega/2$ rất nhỏ so với ω_1 , ω_2 nên dao động thứ nhất này có thể xem như một dao động gần điều hoà với tần số ω rất gần với ω_1 hoặc ω_2 và có biên độ là $2a_1\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ thay đổi rất chậm theo thời gian. Số hạng thứ hai của (7.23) biểu diễn một dao động điều hòa tần số ω_2.

Hình (7.5) biểu diễn sự thay đổi theo thời gian của số hạng thứ hai của (7.23). Nó là dao động với tần số ω nhưng có biên độ biến thiên một cách tuần hoàn theo thời gian với tần số $\Delta\omega/2 \ll \omega$.

"Hiện tượng biên độ cực đại của dao động biến thiên một cách tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ lớn hơn nhiều so với chu kỳ của dao động gọi là hiện tượng phách".



Hình 7.5

Số hạng thứ nhất của (7.23) biểu diễn hiện tượng phách thuần túy còn (7.23) biểu diễn phách nói chung (thông thường).

Đặt biệt khi hai dao động x_1 và x_2 có biên độ bằng nhau ($a_1 = a_2$) thì số hạng thứ hai của (7.23) triệt tiêu và ta có phách thuần túy.

Trở lại với hiện tượng phách thông thường biểu diễn bởi (7.23). Ta thấy dao động tổng hợp x cũng có thể viết dưới dạng khác :

$$x = (a_1 - a_2)\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2) + a_2\cos(\omega_1 t - \varphi_1)$$

$$x = 2a_2\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right) + (a_1-a_2)\cos(\omega_1 t-\varphi_1)$$

Cộng (7.23) và (7.24) với nhau rồi chia cho 2 ta được :

$$x=(a_1+a_2)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(a_1-a_2)[\cos(\omega_1 t-\varphi_1)-\cos(\omega_2 t-\varphi_2)]$$

$$=(a_1+a_2)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos(\omega t-\varphi)+(a_2-a_1)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\sin(\omega t-\varphi)$$

Như đã biết, rõ ràng dao động tổng hợp không phải là một dao động điều hòa. Tuy nhiên theo giả thiết do $\Delta\omega$ rất nhỏ so với ω , thì khi đó trong một khoảng thời gian rất nhỏ chừng vài chu kỳ $T=\frac{2\pi}{\omega}$ ta có thể coi $\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ là không thay đổi và do vậy ta thấy dao động tổng hợp x cũng có dạng :

$$x = A\sin(\omega t-\varphi)+B\cos(\omega t-\varphi)$$

Trong đó :

$$A = (a_2-a_1)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$B = (a_1+a_2)\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Biên độ cực đại của dao động tổng hợp :

$$a=\sqrt{A^2+B^2} \text{ hay là } a^2 = A^2+B^2$$

$$a^2=a_1^2\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)+a_2^2\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)-2a_1a_2\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$+a_1^2\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)+a_2^2\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right)+2a_1a_2\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \qquad (7.26)$$

$$=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\Delta\omega t-\Delta\varphi)$$

Hai biểu thức (7.25) và (7.26) cho thấy rằng dao động tổng hợp là một dao động gần điều hòa với tần số góc :

$$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

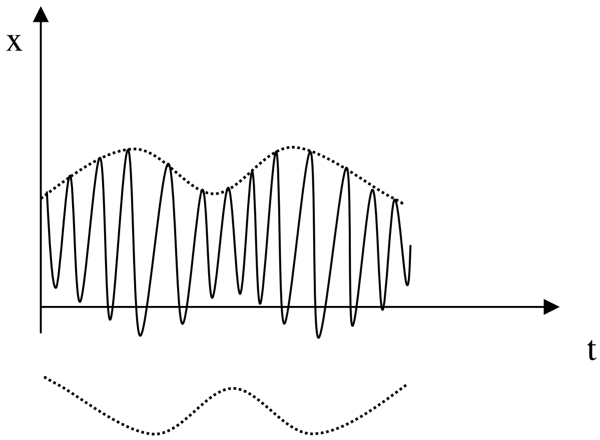
Và có biên độ cực đại a biến thiên tuần hoàn theo thời gian với tần số góc $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, giữa hai trị số cực đại $(a_1 + a_2)$ và cực tiểu $(a_1 - a_2)$.

Chu kỳ biến thiên τ của biên độ a là :

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \qquad (7.27)$$

Vì T_1 và T_2 khác nhau rất ít nên τ lớn hơn T_1, T_2 rất nhiều : biên độ cực đại của dao động tổng hợp biến thiên rất chậm theo thời gian. Đường biểu diễn dao động tổng hợp trong hiện tượng phách thông thường được trình bày trên hình (7.6).



Hình 7.6

Trên hình vẽ các dao động thành phần có tần số :

$$\gamma_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 13\text{Hz} \ , \ \gamma_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 11\text{Hz}$$

Dao động tổng hợp có tần số :

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 12\text{Hz}$$

Và phách có tần số :

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = 2\text{Hz} \cdot$$

Hiện tượng phách được ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật vô tuyến điện. Nó là cơ sở của phương pháp đổi đổi tần.

7.5 Tổng hợp hai dao động có phương vuông góc

7.5.1 Tổng hợp hai dao động có phương vuông góc và cùng tần số

Trong trường hợp này ta chọn 0 là góc tọa độ và hướng các trục Ox, Oy theo phương các vectơ $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ là các vectơ biểu diễn các dao động thành phần.

Để thuận tiện, ta có thể chọn gốc thời gian sao cho góc lệch pha ban đầu φ_1 của dao động thứ nhất bằng không, còn góc lệch pha ban đầu của dao động thứ hai là φ.

Khi đó các dao động thành phần sẽ là :

$$x = a\cos\omega t \;\; ; \; y = b\cos(\omega t - \varphi)$$

Hệ phương trình (7.28) chính là phương trình quĩ đạo của dao động tổng hợp cho dưới dạng tham số. Để đưa về dạng thông thường, ta phải khử t trong hai phương trình trên. Muốn vậy, ta biến đổi các phương trình của (7.28) về dạng : $\frac{x}{a} = \cos\omega t$, $\frac{y}{b} = \cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi$ tiếp tục biến đổi :

$$\begin{cases} \frac{x}{a}\sin\varphi = \cos\omega t\sin\varphi \\ \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi = \sin\omega t\sin\varphi \end{cases}$$

Bình phương hai vế của hai phương trình trên rồi cộng chúng lại từng vế, ta được :

$$\frac{x^2}{a^2}\sin^2\varphi + \frac{x^2}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

Hay : $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi \qquad (7.29)$$

Đây là phương trình của một elipse tâm 0, nội tiếp trong một hình chữ nhật mà hai cạnh là 2a và 2b (hình 7.7e,g)

"Vậy quĩ đạo của dao động tổng hợp V là một hình elipse và do đó dao động tổng hợp gọi là dao động elipse"

Hình dạng của elipse phụ thuộc vào hiệu số pha φ của hai dao động thành phần. Ta xét các trường hợp riêng :

a) φ = 2nπ (n là số nguyên dương hoặc âm). Khi đó φ=0 và cosφ =1 và (7.29) trở thành :

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$$

Hay là : $$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$

Hình elipse suy biến thành đường chéo thứ nhất của hình chữ nhật (hình 7.10a) và dao động tổng hợp là dao động thẳng có biên độ $\sqrt{a^2+b^2}$.

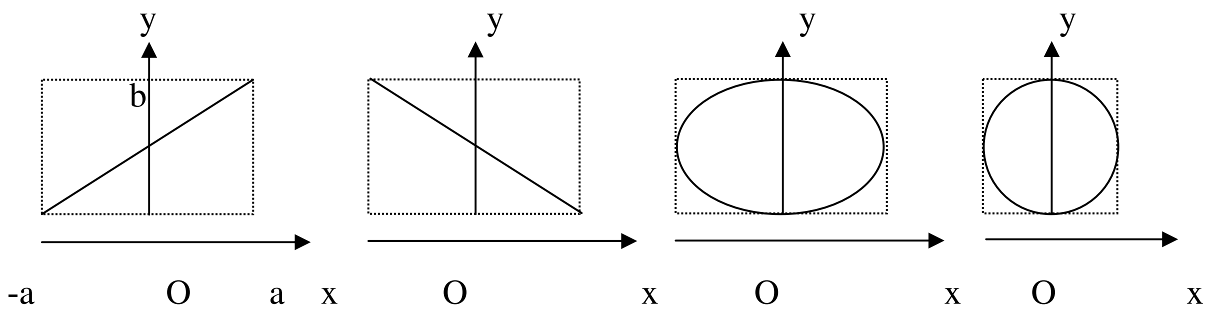
b) φ = (2n+1)π. Khi đó sinφ = 0 và cosφ = -1, phương trình (7.29) trở thành :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0$$

Hay là : $$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$$

Dao động tổng hợp cũng là một dao động thẳng cũng có biên độ $\sqrt{a^2+b^2}$, nhưng hướng theo đường chéo thứ 2 của hình chữ nhật (hình 7.7b).

Các kết quả ở trên được tóm tắt ở hình (7.7).



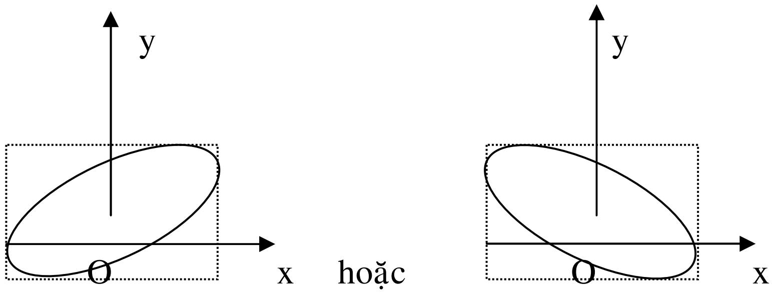
a) φ = 2kπ

b) φ = (2k+1)π

c) φ = kπ + π/2

d) φ = kπ + π/2

a ≠ b a = b



φ bất kỳ φ bất kỳ

c) $\varphi = (2n+1)\pi/2$. Khi đó $\sin^2\varphi = 1$ và $\cos\varphi = 0$, phương trình (7.20) trở thành:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dao động tổng hợp là một elip có 2 trục song song với các cạnh của hình chữ nhật. Nếu a = b, elip sẽ biến thành đường tròn (xem hình 7.7c, d).

7.5.2. Tổng hợp hai dao động vuông góc và có tần số khác nhau

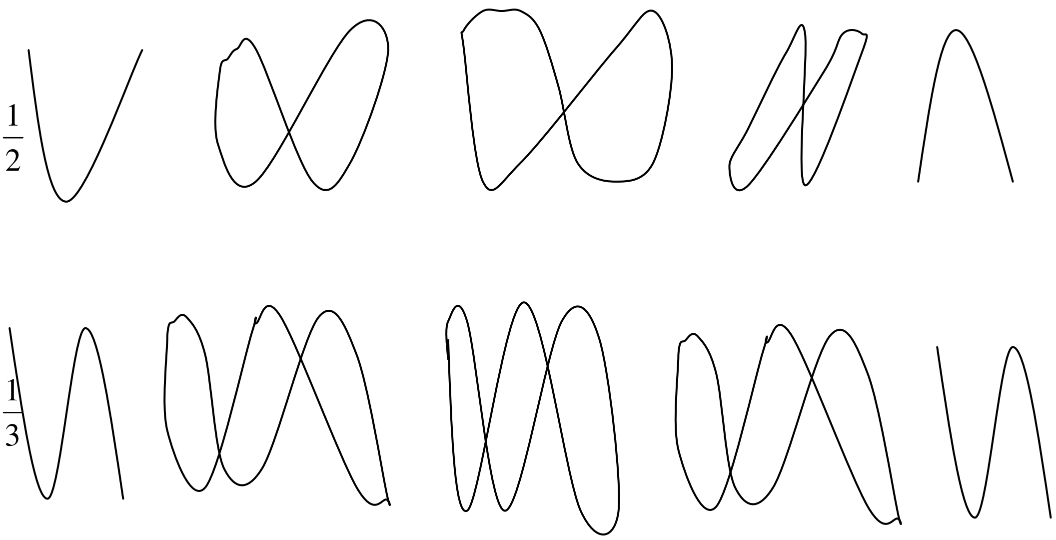
Ta cũng chọn gốc thời gian như ở phần trên, tức là $\varphi_1 = 0$ và $\varphi_2 = \varphi$. Các dao động thành phần sẽ là:

$$x = a\cos\omega_1 t \qquad ; \qquad y = b\cos(\omega_2 t - \varphi)$$

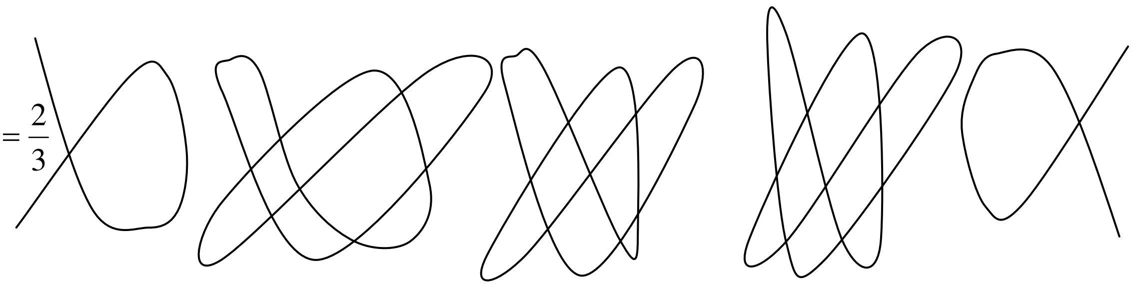
Trong trường hợp tổng quát φ, ω_1 và ω_2 có giá trị bất kỳ thì quỹ đạo của chất điểm là một đường cong phức tạp, không khép kín nhưng vẫn nội tiếp trong hình chữ nhật tâm O và các cạnh là 2a và 2b. Trường hợp riêng, đáng chú ý có nhiều ứng dụng trong thực tiễn là trường hợp tỉ số ω_1/ω_2 là những phân số đơn giản (nghĩa là tử và mẫu số đều là những số nguyên nhỏ hơn 10). Li-xa-ju đã khảo sát trường hợp này và nêu ra một số kết luận tổng quát sau đây:

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{2}$

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{3}$



$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2}{3}$



a) Khi tỉ số ω_1/ω_2 là một số đơn giản, thì quỹ đạo của chất điểm là một đường cong kín, có nhiều múi (múi là điểm tiếp xúc của đường quỹ đạo chất điểm và 2 cạnh của hình chữ nhật). Tỉ số số múi trên 2 cạnh song song với trục Ox và Oy đúng bằng tỉ số 2 tần số góc, tức là ω_1/ω_2.

b) Dạng của đường cong phụ thuộc rõ vào số pha φ. Khi $\varphi = \pi/2$ đường cong nhận điểm O làm tâm đối xứng. Khi $\varphi = n\pi$ thì hai nửa đường cong nhập làm một.

Trên hình (7.8) vẽ một số đường cong ứng với một vào giá trị của ω_1/ω_2 và φ. Những đường cong đó gọi là những đường Li-xa-ju. Hình elip thu được khi $\omega_1=\omega_2$ cũng là một đường Li-xa-ju đặc biệt.

Ta có thể quan sát được các đường Li-xa-ju trên màn hình quang của một máy hiện sóng. Dựa trên hình dạng của đường Li-xa-ju ta dễ dàng xác định được 1 trong 2 tần số ω_1 ,ω_2 khi biết tần số kia và xác định được hiệu số của 2 dao động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1- Lương Duyên Bình, Vật lý đại cương. Nhà xuất bản giáo dục, 1998.

2- M. Alonso & E. J. Finn, Fundamental University Physics, Addition-wesley, Publishing company, 1973

3- I. V. Savelyev, Physics a general course, Mir Publishes Moscow, 1980

4- Phạm Viết Trinh – Nguyễn Đình Noãn, Giáo trình Thiên Văn, Nhà xuất bản giáo dục, 1986

5- K. W. Ford, Classical and modern Physics, Xerox Corporation, 1972

6- Cơ học – Nguyễn Hữu Mình – Nxb giáo dục, 1998

7- Cơ học – Nguyễn Hữu Xý – Trương Quang Nghĩa – Nguyễn Văn Thỏa – Nxb ĐH và THCN, 1985

8- Vật lý đại cương – Ngô Phú An, Lương Duyên Bình, Đỗ Khắc Chung, Lê Văn Nghĩa – Nxb ĐH và THCN , 1978

9- Giáo trình vật lý đại cương A1 – Nguyễn Hữu Thắng, Đoàn Trọng Thứ – Đại học Đà Lạt, 1998