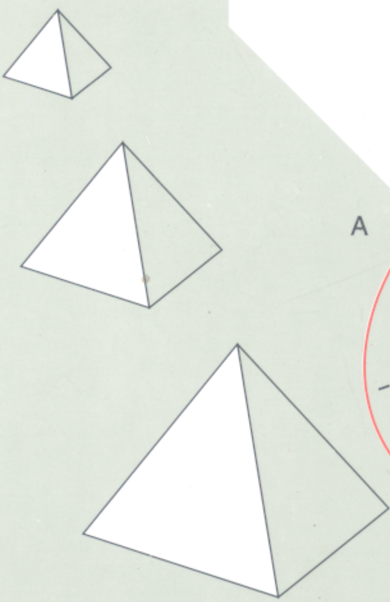
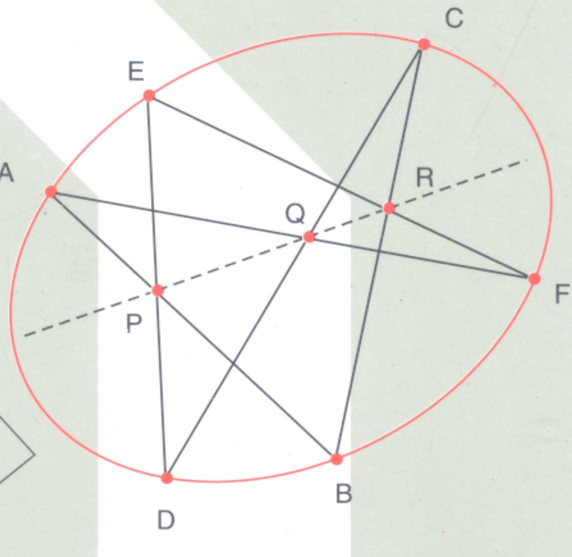
NGUYỄN MỘNG HY

HÌNH HỌC CAO CẤP





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN MỘNG HY

HÌNH HỌC
CAO CẤP

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này được viết lại từ các bài giảng mà tác giả đã trình bày cho sinh viên hệ chính quy ngành Toán ở các trường ĐHSP Vinh ,Đại học Huế, Đại học Cần Thơ và ĐHSP Thành phố Hồ Chí Minh từ năm 1976 đến nay.

Để tiếp thu giáo trình này ,người đọc cần có những hiểu biết về không gian vectơ ,không gian vectơ Ơclit và một số kiến thức cơ bản của môn Đại số tuyến tính .

Giáo trình này chủ yếu dành cho sinh viên khoa Toán các trường Đại học Sư phạm sau khi đã học xong nội dung chương trình của phần Đại cương .Ngoài ra giáo trình này có thể dùng cho sinh viên các hệ chuyên tu ,tại chức và hệ đại học hoá .Sinh viên các trường Cao đẳng Sư phạm ngành Toán cũng có thể dùng giáo trình này làm tài liệu tham khảo, đặc biệt các giáo viên Toán các trường trung học phổ thông có thể dùng giáo trình này để ôn tập và củng cố các kiến thức cần thiết cho việc giảng dạy của mình .

Giáo trình được viết với tinh thần tích cực góp phần tham gia phong trào đổi mới cách dạy và đổi mới cách học hiện nay của ngành giáo dục .Sau các phần lí thuyết ,chúng tôi có nêu một số thí dụ minh họa cần thiết , đồng thời nêu lên những điều chú ý hoặc nhận xét bổ ích nhằm giúp người học giảm bớt được những khó khăn không đáng có trong việc tự học , tự nghiên cứu để đi sâu nắm vững nội dung của môn học .

Nội dung cuốn sách gồm có 3 chương :

- *CHƯƠNG I* : Không gian afin và hình học afin;
- *CHƯƠNG II* : Không gian Ơclit và hình học Ơclit;
- *CHƯƠNG III* : Không gian xạ ảnh và hình học xạ ảnh.

Sau mỗi chương có phần bài tập nhưng chưa có lời giải. Sau giáo trình này chúng tôi hi vọng sẽ có cuốn sách bài tập có phần lời giải hoặc hướng dẫn .

Để cuốn sách này được ra mắt phục vụ đông đảo bạn đọc, chúng tôi xin chân thành cám ơn các cán bộ biên tập môn Toán và các đồng chí lãnh đạo Nhà Xuất bản Giáo dục đã động viên cổ vũ chúng tôi rất nhiều .

Cuốn sách mới được xuất bản lần đầu ,chắc còn có những sai sót .Chúng tôi rất mong nhận được ý kiến góp ý của bạn đọc.

Thành phố Hồ Chí Minh tháng 6 năm 1999

TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN

§1.KHÔNG GIAN AFIN

1.ĐỊNH NGHĨA

Cho tập hợp **A** khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là điểm, cho **V** là một không gian vectơ trên trường **K** và cho ánh xạ f : **A** × **A** → **V** được kí hiệu là f(M, N) = $\overrightarrow{MN}$ với các điểm M, N thuộc **A** và vectơ $\overrightarrow{MN}$ thuộc **V**.

Bộ ba (**A**, f, **V**) gọi là *không gian afin* nếu hai tiên đề sau đây được thoả mãn :

i) Với mọi điểm M thuộc **A** và mọi vectơ $\vec{u}$ thuộc **V** có duy nhất điểm N thuộc **A** sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

ii) Với mọi ba điểm M,N,P thuộc **A** ta luôn có

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Khi đó ta nói rằng không gian afin (**A**, f, **V**) *liên kết với không gian vectơ* **V** *trên trường* **K** và được gọi tắt là *không gian afin* **A** *trên trường* **K**. Không gian vectơ liên kết **V** còn được kí hiệu là $\bar{A}$, được gọi là *nền* của không gian afin **A**.

Nếu **V** là không gian vectơ thực nghĩa là **K** = **R** ta nói **A** là một *không gian afin thực*, nếu **V** là không gian vectơ phức nghĩa là **K** = **C** ta nói **A** là một *không gian afin phức*. Trong giáo trình này chủ yếu ta nói về không gian afin thực.

Không gian afin **A** gọi là *n chiều* nếu dim **V** = n và được kí hiệu dim **A** = n hay $\mathbf{A}^n$ (liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^n$).

2. CÁC THÍ DỤ

a) Không gian Ơclit hai chiều $\mathbf{E}^2$ và ba chiều $\mathbf{E}^3$ đã học ở trường phổ thông trung học là những không gian afin theo thứ tự liên kết với các không gian vectơ (tự do) hai chiều $\mathbf{V}^2$ và ba chiều $\mathbf{V}^3$ với định nghĩa vectơ, phép cộng vectơ, phép nhân vectơ với một số thực đã được trình bày trong sách giáo khoa phổ thông trung học.Khi đó rõ ràng ánh xạ f thoả mãn hai tiên đề i) và ii) nói trên.

b) Cho **V** là một không gian vectơ. Ta dùng **V** làm tập hợp **A**.Khi đó các vectơ của **V** được gọi là các điểm của **A**. Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thuộc **V** ta có ánh xạ f: $\mathbf{V}\times \mathbf{V}\to \mathbf{V}$ cho bởi :

$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}$ thuộc **V** (vectơ $\vec{b} - \vec{a}$ được hoàn toàn xác định).

Rõ ràng ánh xạ f được xác định như trên thoả mãn hai tiên đề i) và ii) nên **V** trở thành không gian afin liên kết với **V**.

c) Cho tập hợp $\mathbf{R}^n$ trong đó mỗi phần tử của nó là một bộ số thực có thứ tự mà ta sẽ gọi là những điểm và không gian vectơ $\mathbf{V}^n$ mà mỗi vectơ $\vec{x}$ của nó sẽ ứng với một bộ số thực $(x_1,x_2,...,x_n)$ với $x_i \in \mathbf{R}$. Ánh xạ f được xác định như sau : với hai điểm $A =(a_1,a_2,...,a_n)$ và $B = (b_1,b_2,...,b_n)$ của $\mathbf{R}^n$ ta cho đặt tương ứng với một vectơ $(b_1 - a_1,b_2 - a_2,..., b_n - a_n)$ của $\mathbf{V}^n$ thì ta dễ dàng chứng minh được $\mathbf{R}^n$ là một không gian afin n - chiều.

3.MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐƠN GIẢN CỦA KHÔNG GIAN AFIN

a) Với mọi điểm $M \in \mathbf{A}$ thì $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Thật vậy, theo tiên đề ii) ta có $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}$, do đó suy ra $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

b) Với mọi điểm M,N $\in$ **A** mà $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ thì M $\equiv$ N.

Thật vậy, nếu $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ và theo tính chất a) ta có $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$ Theo tiên đề i) ta suy ra N$\equiv$ M.

c) Với mọi cặp điểm M,N $\in$ **A** thì $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

Thật vậy, theo tiên đề ii) ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Do đó ta suy ra $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$.

d) Với A,B,C,D $\in$ **A** ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Thật vậy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

e) Với ba điểm bất kì O,A,B $\in$ **A** ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Thật vậy, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ theo tiên đề ii)

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

4.HỆ ĐIỂM ĐỘC LẬP

a)Định nghĩa. Hệ m+1 điểm $A_o, A_1, \ldots, A_m$ ($m \geq 1$) của không gian afin **A** gọi là *độc lập* nếu m vectơ $\overrightarrow{A_oA_1}, \overrightarrow{A_oA_2}, \ldots, \overrightarrow{A_oA_m}$ của không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính. Hệ gồm một điểm A_o bất kì (tức trường hợp m = 0) luôn được xem là độc lập.

b) Chú ý. Trong định nghĩa trên điểm A_o không đóng vai trò gì đặc biệt so với các điểm A_i khác. Thật vậy người ta có thể chứng minh rằng nếu các vectơ $\overrightarrow{A_oA_1}, \overrightarrow{A_oA_2}, \ldots, \overrightarrow{A_oA_m}$ độc lập tuyến tính thì đối với một i nào đó hệ m vectơ $\overrightarrow{A_iA_o}, \overrightarrow{A_iA_1}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_m}$ cũng độc lập tuyến tính. Phần chứng minh này dành cho bạn đọc.

c) Định lí. Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ luôn luôn có những hệ m điểm độc lập với $0 \leq m \leq n+1$, mọi hệ điểm nhiều hơn n+1 điểm đều không độc lập.

Chứng minh

Giả sử $\mathbf{V}^n$ là không gian vectơ liên kết với không gian afin $\mathbf{A}^n$ và $\{\overrightarrow{e_i}\}$ là một cơ sở nào đó của $\mathbf{V}^n$. Vì $\mathbf{V}^n$ không rỗng nên trong $\mathbf{A}^n$ ta có thể chọn một điểm A_o nào đó. Sau đó ta chọn các điểm A_i sao cho $\overrightarrow{A_oA_i} = \overrightarrow{e_i}$ với i = 1, 2, ..., n. Rõ ràng hệ n+1 điểm A_o, A_1,..., A_n là độc lập. Ngoài ra nếu ta lấy m bất kì của hệ đó thì ta được hệ m điểm độc lập với $0 \leq m \leq n+1$.

Nếu ta có một hệ gồm p điểm B_1,B_2, ...,B_p với p > n+1 thì p-1 vectơ $\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_3}, ..., \overrightarrow{B_1B_p}$ của $\mathbf{V}^n$ không độc lập tuyến tính vì $p-1 > n = \dim\mathbf{V}^n$. Do đó hệ p điểm đó không độc lập.

§2. TỌA ĐỘ AFIN VÀ MỤC TIÊU AFIN

1.MỤC TIÊU AFIN

Cho không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^n$. Một tập hợp có thứ tự gồm n+1 điểm độc lập $\{E_o, E_1, E_2, ..., E_n\}$ của $\mathbf{A}^n$ được gọi là *một mục tiêu afin của* $\mathbf{A}^n$. Điểm E_o gọi là *gốc của mục tiêu*, các đỉnh E_i gọi là các *đỉnh thứ i của mục tiêu*.

Ta kí hiệu mục tiêu afin nói trên là $\{E_o;E_i\}$ với i = 1,2, ..., n.

CHÚ Ý. Nếu trong không gian vectơ liên kết $\mathbf{V}^n$ của $\mathbf{A}^n$ ta lấy các vectơ $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{E_oE_i}$ với i = 1, 2, ..., n thì $\{\overrightarrow{e_i}\}$ là một cơ sở của $\mathbf{V}^n$ và cơ sở này được gọi là *nền* của mục tiêu $\{E_o; E_i\}$. Rõ ràng là một mục tiêu afin chỉ có một cơ sở nền duy nhất, nhưng ngược lại với một cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ của $\mathbf{V}^n$ có thể là nền của nhiều mục tiêu khác nhau trong $\mathbf{A}^n$. Nếu ta chọn điểm O là gốc của mục tiêu afin ứng với cơ sở nền $\{\overrightarrow{e_i}\}$, khi đó ta có thể kí hiệu mục tiêu afin tương ứng đó là $\{O;\overrightarrow{e_i}\}$ với i=1, 2, ..., n.

2. TỌA ĐỘ AFIN CỦA MỘT ĐIỂM

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho mục tiêu afin $\{O; \vec{e_i}\}$. Với mỗi điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ ta có vectơ $\overrightarrow{OX} \in \overrightarrow{A^n}$ và do đó có duy nhất n phần tử của trường **K** sao cho :

$$\overrightarrow{OX} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{e_n}.$$

Bộ n phần tử $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ có thứ tự đó được gọi là *tọa độ của điểm X đối với mục tiêu afin đã chọn.*

Như vậy tọa độ afin của một điểm X đối với mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ đã chọn là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{E_oX}$ đối với cơ sở nền $\{\vec{e_i}\}$.

Ta có $\overrightarrow{E_oX} = x_1\overrightarrow{E_oE_1} + x_2\overrightarrow{E_oE_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{E_oE_n}$

Rõ ràng là ứng với mỗi điểm cho trước, đối với một mục tiêu afin xác định nào đó, ta có một tọa độ afin xác định và ngược lại với mỗi bộ n phần tử có thứ tự của trường **K** là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được chọn làm tọa độ afin của một điểm X thì điểm X hoàn toàn được xác định.

Theo định nghĩa trên đối với mục tiêu afin$\{E_o; E_i\}$ điểm E_o có tọa độ afin là (0, 0, ..., 0) còn các điểm E_i có tọa độ afin là (0, ..., 0,1,0, ...,0) trong đó số 1 nằm ở vị trí thứ i, còn các số khác đều bằng 0.

Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tọa độ afin của một điểm X đối với mục tiêu afin $\{O; \vec{e_i}\}$ ta kí hiệu $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hay $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hoặc $X(x_i)$ hay $X = (x_i)$.

Chú ý rằng nếu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ thì :

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$$
$$= (y_1 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - x_2)\overrightarrow{e_2} + \ldots + (y_n - x_n)\overrightarrow{e_n}.$$

Vậy vectơ $\overrightarrow{XY}$ đối với cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ của không gian vectơ $\overrightarrow{A^n}$ có tọa độ là : $\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$.

3. ĐỔI MỤC TIÊU AFIN

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai mục tiêu afin $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E'_i\}$ lần lượt ứng với hai cơ sở nền là $\{\vec{e_i}\}$ và $\{\vec{e'_i}\}$ với $i = 1,2,...,n$. Giả sử các điểm E'_i có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ là :

$$E'_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \quad \text{với } i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Ta có ma trận chuyển C từ cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ là :

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{12} - a_{02} & \dots & a_{1n} - a_{0n} \\ a_{21} - a_{01} & a_{22} - a_{02} & \dots & a_{2n} - a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - a_{01} & a_{n2} - a_{02} & \dots & a_{nn} - a_{0n} \end{bmatrix}$$

Ma trận C cũng gọi là *ma trận chuyển* từ mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ sang mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$. Rõ ràng C là ma trận không suy biến vì $\det C \neq 0$.

Ta chú ý rằng nếu cho trước mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ thì ma trận C hoàn toàn được xác định. Ngược lại nếu cho trước ma trận chuyển C và tọa độ một điểm E'_i nào đó của mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ cho trước, thì tọa độ các điểm E'_i còn lại của mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ được hoàn toàn xác định.

Bây giờ giả sử X là một điểm nào đó của không gian afin $\mathbf{A}^n$ và lần lượt có tọa độ đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E'_i\}$ là $(x_1, x_2,..., x_n)$ và $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ .Ta hãy tìm sự liên hệ giữa các tọa độ (x_i) và (x'_i) nói trên của cùng một điểm X đối với hai mục tiêu khác nhau.

Ta có : $$\overrightarrow{E_oX} = \overrightarrow{E_oE'_o} + \overrightarrow{E'_oX} \qquad (1)$$

Nếu ta gọi $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{E'_oX}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ thì từ (1) ta suy ra :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ . \\ . \\ . \\ a_{0n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{x}_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Nếu gọi $[x]$, $[a_o]$, $[\overline{x}]$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{E_oX}, \overrightarrow{E_oE'_o}, \overrightarrow{E'_oX}$ đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\} = \{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ thì công thức (2) có thể viết gọn là :

$$[x] = [a_o] + [\overline{x}] \qquad (3)$$

Vì $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ và $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ là hai tọa độ của cùng một vectơ $\overrightarrow{E'_oX}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ và $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ nên theo công thức đổi cơ sở từ $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ sang $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ với $C = [c_{ij}]$ là ma trận chuyển ta có :

$$[\overline{x}] = C^*[x'] \qquad (4)$$

trong đó C^* là ma trận chuyển vị của ma trận C.

Kết hợp (3) và (4) ta có :

$$[x] = [a_o] + C^*[x'] \quad \text{hay} \quad \boxed{[x] = C^*[x'] + [a_o]} \qquad (5)$$

Ta chú ý rằng nếu C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ thì C^{-1} là ma trận chuyển từ $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ sang $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$. Do đó từ công thức (5) ta có :

$$\boxed{[x'] = C^{*-1}[x] - C^{*-1}[a_o]} \qquad (6)$$

. Các công thức (5) và (6) gọi là *công thức đổi mục tiêu* tọa độ.

§3. CÁC PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN AFIN

1.ĐỊNH NGHĨA

Cho không gian afin **A** liên kết với không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$. Gọi I là một điểm của **A** và $\vec{\alpha}$ là một không gian con của $\vec{\mathbf{A}}$. Khi đó tập hợp những điểm M thuộc **A** sao cho $\overrightarrow{IM}$ thuộc $\vec{\alpha}$ được gọi là *cái phẳng afin α đi qua điểm I và có phương là* $\vec{\alpha}$

$$\alpha = \left\{M \in \mathbf{A} \,\middle|\, \overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha}\right\}$$

Nếu $\vec{\alpha}$ có số chiều bằng m thì α gọi là cái phẳng m chiều (được gọi tắt là phẳng m chiều) hay còn gọi là *m- phẳng.*

Như vậy 0 - phẳng chính là *điểm*,1 - phẳng gọi là *đường thẳng*, 2 - phẳng là *mặt phẳng* còn n - phẳng của không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ chính là $\mathbf{A}^n$. Nếu dim **A** = n thì (n –1) -phẳng còn được gọi là *siêu phẳng* của không gian đó.

CHÚ Ý. Trong định nghĩa của cái phẳng nói trên, điểm I không đóng vai trò gì đặc biệt so với các điểm khác của phẳng.

Thật vậy giả sử α là cái phẳng qua I và K là một điểm nào đó của α. Điều đó có nghĩa là $\overrightarrow{IK} \in \vec{\alpha}$. Bây giờ điểm M $\in \alpha$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha}$ hay khi và chỉ khi $\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IK} \in \vec{\alpha}$ tức là khi và chỉ khi $\overrightarrow{KM} \in \vec{\alpha}$.

Điều đó chứng tỏ điểm K có thể đóng vai trò của điểm I.

2. ĐỊNH LÍ

Nếu α là m-phẳng của không gian afin**A** và có phương $\vec{\alpha}$ thì α là một không gian afin m chiều liên kết với không gian vectơ $\vec{\alpha}$.

Chứng minh

Giả sử α là m- phẳng đi qua điểm I và có phương $\vec{\alpha}$. Rõ ràng α không rỗng vì nó chứa điểm I. Với mọi cặp điểm M,N của α ta lấy vectơ $\overrightarrow{MN}$ thuộc $\vec{A}$. Ta có $\overrightarrow{MN} = f(M, N) \in \vec{A}$. Theo định nghĩa của α thì $\overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{IN} \in \vec{\alpha}$, từ đó suy ra $\overrightarrow{MN} \in \vec{\alpha}$. Vậy là với mọi cặp điểm có thứ tự M,N ta có một vectơ tương ứng $\overrightarrow{MN} \in \vec{\alpha}$. Ta có ánh xạ :

$$f' : \alpha \times \alpha \rightarrow \vec{\alpha}$$

Ánh xạ f' này thỏa mãn hai tiên đề i) và ii) của không gian afin. Tiên đề i) đúng vì được suy ra từ định nghĩa của phẳng, còn tiên đề ii) đúng vì nó đúng trên toàn bộ không gian afin **A**. Vậy $(\alpha, f', \vec{\alpha})$ là một không gian afin m - chiều liên kết với không gian vectơ $\vec{\alpha}$.

3. ĐỊNH LÍ

Qua m+1 điểm của không gian afin **A** có một và chỉ một m-phẳng ($m \geq 0$).

Chứng minh

Giả sử $A_0, A_1, \ldots, A_m$ là m+1 điểm độc lập của không gian afin **A** liên kết với không gian vectơ $\vec{A}$. Khi đó hệ $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}$ là hệ m vectơ độc lập tuyến tính. Gọi $\vec{\alpha}$ là không gian vectơ con của $\vec{A}$ nhận m vectơ đó là cơ sở. Bây giờ gọi α là cái phẳng đi qua A_0 có phương là $\vec{\alpha}$. Vì $\overrightarrow{A_0A_i} \in \vec{\alpha}$ nên $A_i \in \alpha$ với $i = 1, 2, \ldots, m$. Vậy α là cái phẳng đi qua m+1 điểm độc lập đã cho và ta dễ dàng chứng minh được cái phẳng đó là duy nhất.

Hệ quả. m+1 điểm của không gian afin **A** là độc lập khi và chỉ khi chúng không cùng thuộc một (m – 1) -phẳng ($m \geq 1$).

CHÚ Ý. Vì α là một không gian afin m - chiều liên kết với không gian vectơ con $\vec{\alpha}$ có số chiều bằng m nên ta có thể kí hiệu $\alpha = \mathbf{A}^m$ và $\vec{\alpha} = \mathbf{V}^m$.

4. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA m - PHẲNG

a) Lập phương trình. Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^n$ cho m - phẳng $\mathbf{A}^m$ xác định bởi m +1 điểm độc lập $A_o, A_1, \ldots, A_m$ cho trước. Giả sử đối với một mục tiêu đã chọn là $\{E_o; E_i\}$, các điểm $A_o, A_1, \ldots, A_m$ có tọa độ là :

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad \text{với } i = 0,1,2, \ldots, m.$$

Gọi $\mathbf{V}^m$ là phương của $\mathbf{A}^m$ nhận m vectơ $\overrightarrow{A_oA_1}, \overrightarrow{A_oA_2}, \ldots, \overrightarrow{A_oA_m}$ làm cơ sở. Do đó:

$$X \in \mathbf{A}^m \Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} \in \mathbf{V}^m.$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_oX} = t_1\overrightarrow{A_oA_1} + t_2\overrightarrow{A_oA_2} + \ldots + t_m\overrightarrow{A_oA_m} \quad (1)$$

với $t_1, t_2, \ldots, t_m$ thuộc trường $\mathbf{K}$.

Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tọa độ afin của điểm X thì phương trình (1) ở trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau :

$$[x] - [a_o] = t_1([a_1] - [a_o]) + t_2([a_2] - [a_o]) + \ldots + t_m([a_m] - [a_o]) \text{ hay}$$

$$\boxed{[x] = t_1([a_1] - [a_o]) + t_2([a_2] - [a_o]) + \ldots + t_m([a_m] - [a_o]) + [a_o]} \quad (2)$$

Phương trình (2) được viết dưới dạng tọa độ như sau :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_i = t_1(a_{1i} - a_{oi}) + t_2(a_{2i} - a_{oi}) + \ldots + t_m(a_{mi} - a_{oi}) + a_{oi} \\ \qquad \text{với } i = 1, 2, \ldots, n \end{array}} \quad (3)$$

Hệ phương trình (3) gồm có n phương trình được gọi là *phương trình tham số của m - phẳng* đã cho và các số $t_1, t_2, \ldots, t_m$ gọi là các *tham số*.

Với một bộ m số $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ta có một bộ n số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tọa độ của một điểm X nào đó thuộc m-phẳng $\mathbf{A}^m$ đã cho.

Ta cần chú ý rằng vì hệ m vectơ $\overrightarrow{A_oA_1}, \overrightarrow{A_oA_2}, \ldots, \overrightarrow{A_oA_m}$ độc lập tuyến tính nên từ các hệ số của phương trình (3) ta lập được ma trận M có n hàng, m cột và có hạng bằng m :

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{o1} & a_{21} - a_{o1} & \ldots & a_{m1} - a_{o1} \\ a_{12} - a_{o2} & a_{22} - a_{o2} & \ldots & a_{m2} - a_{o2} \\ .. & .. & \ldots & .. \\ a_{1n} - a_{on} & a_{2n} - a_{on} & \ldots & a_{mn} - a_{on} \end{bmatrix}$$

b)Định lí . Nếu cho hệ phương trình m tham số có dạng :

$$x_i = t_1 b_{1i} + t_2 b_{2i} + \ldots + t_m b_{mi} + b_{oi} \qquad (4)$$

với $i = 1, 2, \ldots, n$

trong đó ma trận $B = [b_{ji}]$ với $j = 1, 2, \ldots, m$

$i = 1, 2, \ldots, n$

có hạng m thì đối với một mục tiêu đã chọn $\{E_o; E_i\}$ của $\mathbf{A}^n$, hệ phương trình (4) là phương trình của một m-phẳng hoàn toàn xác định.

Chứng minh

Ta hãy xét m+1 điểm $B_o, B_1, B_2, \ldots, B_m$ có tọa độ như sau :

$B_o = (b_{o1}, b_{o2}, \ldots, b_{on})$

$B_1 = (b_{11} + b_{o1}, b_{12} + b_{o2}, \ldots, b_{1n} + b_{on})$

.. ..

$B_m = (b_{m1} + b_{o1}, b_{m2} + b_{o2}, \ldots, b_{mn} + b_{on})$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng khi đó hệ m vectơ $\overrightarrow{B_oB_1}, \overrightarrow{B_oB_2}, \ldots, \overrightarrow{B_oB_m}$ độc lập tuyến tính vì ma trận $B = [b_{ji}]$ nói trên có hạng bằng m.

Từ đó ta suy ra hệ m+1 điểm $B_o, B_1, B_2, \ldots, B_m$ độc lập. Nếu ta viết phương trình tham số của m - phẳng xác định bởi m+1 điểm $B_o, B_1, B_2, \ldots, B_m$ đó thì rõ ràng ta được hệ phương trình (4). Vậy hệ phương trình (4) là phương trình tham số của một m - phẳng afin của không gian afin $\mathbf{A}^n$.

c)Thí dụ. Với trường hợp m = 1 ta có hệ phương trình tham số của đường thẳng trong không gian afin n chiều là :

$$\begin{cases} x_1 = t(b_1 - a_1) + a_1 \\ x_2 = t(b_2 - a_2) + a_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = t(b_n - a_n) + a_n \end{cases}$$

Đó là phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A = (a_1, a_2,..., a_n)$ và $B = (b_1, b_2,..., b_n)$. Đường thẳng này đi qua điểm A và có phương là không gian vectơ một chiều sinh bởi vectơ $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2,..., b_n - a_n)$.

5.PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA m - PHẲNG TRONG A^n

a)Lập phương trình tổng quát. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho một m - phẳng có phương trình tham số dạng (4):

$$x_i = t_1b_{1i} + t_2b_{2i} + ... + t_mb_{mi} + b_{oi} \qquad (4)$$

với i = 1, 2,..., n và ma trận $B = [b_{ji}]$ có hạng m.

Ta hãy xem hệ (4) là hệ phương trình với các ẩn là $t_1, t_2,..., t_m$. Theo giả thiết ma trận hệ số của các ẩn là B có hạng m nên ta có thể chọn trong n phương trình của (4) m phương trình độc lập. Không làm mất tính chất tổng quát, ta có thể giả thiết m hàng đầu là độc lập. Khi đó chúng lập thành một hệ phương trình tuyến tính với m ẩn là $t_1, t_2,..., t_m$ có định thức hệ số khác 0, do đó nó có nghiệm duy nhất. Ta tìm được giá trị của các ẩn $t_1, t_2,..., t_m$ biểu thị bậc nhất đối với $x_1, x_2,..., x_m$ và thay thế các giá trị đó vào n-m phương trình còn lại của (4) ta được hệ phương trình có dạng bậc nhất đối với các biến $x_1,x_2,...,x_m, x_{m+1},...,x_n$ và có dạng :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + c_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,n-m} \quad (5)$$

Hạng của ma trận $[c_{ij}]$ bằng n – m vì trong hệ (5) các hệ số c_{ij} ứng với biến x_{m+1} ở hàng đầu bằng 1, với biến x_{m+2} ở hàng thứ hai bằng 1 ..., với biến x_n ở hàng thứ n – m cũng bằng 1. Ma trận hệ số của phương trình (5) có hạng bằng n – m vì có định thức con cấp n – m ứng với các biến $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ là :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Tóm lại ta đã chứng minh rằng : *Mỗi m - phẳng trong không gian afin* $\mathbf{A}^n$ *được biểu thị bằng một hệ phương trình tuyến tính với các biến* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *và có hạng bằng n – m.* Phương trình đó gọi là *phương trình tổng quát của m - phẳng.*

Ngược lại người ta chứng minh được rằng: *Mỗi hệ phương trình tuyến tính với các biến* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *và có hạng n – m đều biểu thị một m-phẳng hoàn toàn xác định của* $\mathbf{A}^n$.

b)Nhận xét. Mỗi siêu phẳng trong $\mathbf{A}^n$ (ứng với m = n –1) có phương trình tổng quát dạng :

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b = 0$ (vì n – m = n – n +1 =1) trong đó hạng của ma trận $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bằng 1 tức là có ít nhất một $a_i \neq 0$.

Mặt khác vì mỗi m - phẳng có phương trình tổng quát là một hệ gồm n – m phương trình tuyến tính có hạng bằng n – m nên ta suy ra :

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ mỗi m - phẳng đều có thể xem như là giao của n – m siêu phẳng (ở đây "giao " hiểu theo nghĩa của lí thuyết tập hợp).

c)Thí dụ. Trong không gian afin A^5 với một mục tiêu afin cho trước cho mặt phẳng α đi qua điểm $M_o(2,0,1,0,-1)$ có phương $\vec{\alpha}$ nhận $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ là hai vectơ cơ sở trong đó

$$\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3} + \vec{e_4} + \vec{e_5}\ ,\ \ \vec{b} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} - 2\vec{e_4} + 3\vec{e_5}$$

Hãy lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng α.

Giải

$$M(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 1 \\ x_4 - 0 \\ x_5 + 1 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + t_2 & (1) \\ x_2 = t_1 + 2t_2 & (2) \\ x_3 = 1 + 2t_1 + t_2 & (3) \\ x_4 = t_1 - 2t_2 & (4) \\ x_5 = -1 + t_1 + 3t_2 & (5) \end{cases}$$

Phương trình tham số của phẳng α là hệ gồm 5 phương trình nói trên.

Từ (1) và (2) ta tính được

$$t_1 = 2x_1 - x_2 - 4,\ t_2 = x_2 - x_1 + 2.$$

Thay các giá trị này vào ba phương trình cuối (3), (4), (5) và rút gọn ta được phương trình tổng quát của mặt phẳng α là :

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 5 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_4 - 8 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 - 1 = 0 \end{cases}$$

Mặt phẳng α là cái phẳng 2 chiều nên phương trình tổng quát của α là một hệ phương trình tuyến tính có hạng bằng

$$5 - 2 = 3.$$

CHÚ THÍCH. Do cách khử các tham số t_1, t_2 từ những cặp phương trình khác nhau nên phương trình tổng quát của phẳng α được biểu thị bằng những hệ 3 phương trình không giống nhau. Từ phương trình $\overrightarrow{M_0M} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ ta suy ra

$$\vec{x} \in \vec{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} \text{ hay } [x] = t_1[a] + t_2[b]$$

ta được phương trình của phương $\vec{\alpha}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cơ sở.

6.VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA CÁC PHẲNG TRONG A^n

a)Định nghĩa. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho p-phẳng $\mathbf{A}^p$ có phương là $\mathbf{V}^p$ và q -phẳng $\mathbf{A}^q$ có phương là $\mathbf{V}^q$.Ta giả sử $p \le q$. Căn cứ vào phương chung $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q$ và điểm chung $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ ta có vị trí tương đối của hai cái phẳng đó như sau :

α) Nếu $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q = \{\vec{0}\}$:

- và nếu $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q \neq \varnothing$ thì $\mathbf{A}^p$, $\mathbf{A}^q$ *có 1 điểm chung duy nhất.*
- và nếu $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q = \varnothing$ thì $\mathbf{A}^p$, $\mathbf{A}^q$ gọi là *chéo nhau* (hoàn toàn).

β) Nếu $\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q = \mathbf{V}^r$ với $r > 0$, khi đó ta nói rằng hai cái phẳng $\mathbf{A}^p$, $\mathbf{A}^q$ *có r phương chung* (hay $\mathbf{A}^p$ *cùng phương với* $\mathbf{A}^q$).

- Nếu $r < p$ và nếu $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q \neq \varnothing$ ta có giao của chúng là một r - phẳng có phương $\mathbf{V}^r$ (là một định lí được xét sau).
- Nếu $r < p$ và nếu $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q = \varnothing$ ta nói rằng $\mathbf{A}^p$, $\mathbf{A}^q$ không có điểm chung và có phương chung (có thể xem chúng *chéo nhau không hoàn toàn*).

• Nếu r = p tức là $\mathbf{V}^p \subset \mathbf{V}^q$ ta nói rằng $\mathbf{A}^p$ *cùng phương* với $\mathbf{A}^q$ và nếu $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q \neq \varnothing$ ta nói rằng $\mathbf{A}^p$ bị chứa trong $\mathbf{A}^q$ ($\mathbf{A}^p \subset \mathbf{A}^q$) còn nếu $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q = \varnothing$ ta nói $\mathbf{A}^p$ *song song* với $\mathbf{A}^q$ và nếu p = q ta nói rằng $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$ *song song với nhau*.

Ta có bảng tóm tắt sau đây:

	$\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q = \mathbf{V}^r$, $r > 0$	$\mathbf{V}^p \cap \mathbf{V}^q = \{\vec{0}\}$
$\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q \neq \varnothing$	$r < p < q$: $\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ là cái phẳng có phương $\mathbf{V}^r$ $r = p < q$: $\mathbf{A}^p \subset \mathbf{A}^q$	$\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q$ = 1 điểm
$\mathbf{A}^p \cap \mathbf{A}^q = \varnothing$	$r = p < q$: $\mathbf{A}^p$ // với $\mathbf{A}^q$ $r = p = q$: $\mathbf{A}^p$ // $\mathbf{A}^q$ $r < p$: $\mathbf{A}^p$, $\mathbf{A}^q$ chéo nhau không hoàn toàn	$\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$ chéo nhau (hoàn toàn)

γ) Tổng $\mathbf{A}^p + \mathbf{A}^q$ là giao của tất cả các phẳng chứa $\mathbf{A}^p$ và $\mathbf{A}^q$. Cần lưu ý rằng khái niệm tổng của hai cái phẳng khác với khái niệm tổng hiểu theo nghĩa tập hợp.

b) Định lí. Giao của hai cái phẳng α và β hoặc là tập rỗng hoặc là một cái phẳng có phương là $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$.

Chứng minh :

Nếu $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ thì chúng có ít nhất một điểm chung I. Một điểm $M \in \alpha \cap \beta$ khi và chỉ khi $M \in \alpha$ và $M \in \beta$ tức $\overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha}$ và $\overrightarrow{IM} \in \vec{\beta}$. Do đó $\overrightarrow{IM} \in \vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$. Ta biết rằng $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$ là một không gian vectơ $\vec{\gamma}$ nào đó. Như vậy $\alpha \cap \beta$ là cái phẳng γ có phương là $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$.

Hệ quả : Tổng α + β của hai cái phẳng α và β là một cái phẳng.

c) Định lí. Hai cái phẳng α và β cắt nhau khi và chỉ khi với mọi điểm A $\in\alpha$ và mọi điểm B $\in \beta$ ta có $\overrightarrow{AB} \in \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Chứng minh

Nếu α và β cắt nhau và M là một điểm chung của chúng thì $\overrightarrow{AM} \in \vec{\alpha}$ và $\overrightarrow{MB} \in \vec{\beta}$. Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} \in \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB} \in \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ thì $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ trong đó $\vec{u} \in \vec{\alpha}, \vec{v} \in \vec{\beta}$. Trong α ta lấy M sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, trong β ta lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{BN} = -\vec{v}$ khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BN}$ tức $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} - \vec{v} = \vec{u} = \overrightarrow{AM}$. Vậy $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, ta suy ra hai điểm M và N trùng nhau và là điểm chung của α và β.

7. ĐỊNH LÍ VỀ SỐ CHIỀU CỦA TỔNG VÀ GIAO CỦA HAI CÁI PHẲNG

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai cái phẳng α và β lần lượt có phương là $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$:

a) Nếu α và β cắt nhau thì :

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \cap \beta)$$

b) Nếu α và β không cắt nhau thì:

$$\dim(\alpha + \beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}) + 1$$

Chứng minh

Nếu α và β cắt nhau thì giao $\alpha \cap \beta$ là cái phẳng có phương $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$. Ta lấy điểm I thuộc $\alpha \cap \beta$ và gọi γ là cái phẳng qua I và có phương là $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Cần chứng minh $\gamma = \alpha + \beta$. Giả sử có một phẳng γ' chứa α và β thì nó phải chứa điểm I và phương của nó phải chứa $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ tức chứa $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Nói cách khác γ' phải chứa γ. Từ đó ta suy ra γ là phẳng tổng $\alpha + \beta$. Vậy :

$$\begin{aligned}\dim(\alpha + \beta) &= \dim(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \dim\vec{\alpha} + \dim\vec{\beta} - \dim(\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}) \\ &= \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\alpha \cap \beta)\end{aligned}$$

Bây giờ giả sử α và β không cắt nhau. Theo định lí c ở mục 6 trên đây có một điểm $A \in \alpha$, có một điểm $B \in \beta$ sao cho

$\overrightarrow{AB} \notin \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Gọi $\vec{\delta}$ là không gian vectơ một chiều sinh ra bởi vectơ $\overrightarrow{AB}$. Ta lấy một điểm E nào đó của α và gọi γ là cái phẳng đi qua điểm E có phương là $\vec{\gamma} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \oplus \vec{\delta}$. Tất nhiên phẳng γ chứa α, chứa β và chứa đường thẳng qua A và B. Giả sử γ' là cái phẳng khác chứa α và chứa β thì γ' đi qua điểm E và phương $\vec{\gamma}'$ của nó phải chứa $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ và $\vec{\delta}$. Từ đó suy ra γ' chứa γ và ta chứng minh được $\gamma = \alpha + \beta$. Vậy :

$$\begin{aligned}\dim(\alpha + \beta) &= \dim[(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \oplus \vec{\delta}] = \dim(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \dim\vec{\delta}\\ &= \dim\vec{\alpha} + \dim\vec{\beta} - \dim(\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}) + 1\\ &= \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}) + 1\end{aligned}$$

Vậy định lí đã được chứng minh.

8. ĐỊNH LÍ

Một siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ và một m-phẳng $\mathbf{A}^m$ $(1 \le m \le n - 1)$ thì hoặc $\mathbf{A}^m$ cùng phương với $\mathbf{A}^{n-1}$ hoặc $\mathbf{A}^m$ cắt $\mathbf{A}^{n-1}$ theo một (m–1) - phẳng.

Chứng minh

Nếu $\mathbf{A}^{n-1}$ và $\mathbf{A}^m$ có điểm chung thì có thể xảy ra hai trường hợp :

a) $\mathbf{A}^m \subset \mathbf{A}^{n-1}$: khi đó $\mathbf{A}^m$ cùng phương với $\mathbf{A}^{n-1}$.

b) Nếu $\mathbf{A}^m \not\subset \mathbf{A}^{n-1}$ thì $\mathbf{A}^m + \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}^n$ và áp dụng công thức a) của định lí 7 ta có :

$n = m + n - 1 - \dim(\mathbf{A}^m \cap \mathbf{A}^{n-1})$

Do đó $\dim(\mathbf{A}^m \cap \mathbf{A}^{n-1}) = m-1$

Vậy $\mathbf{A}^{n-1}$ và $\mathbf{A}^m$ cắt nhau theo một (m–1) -phẳng.

Nếu $\mathbf{A}^{n-1}$ và $\mathbf{A}^m$ không có điểm chung thì áp dụng công thức b) của định lí 7 ta có :

$$n = m + n - 1 + 1 - \dim(\overrightarrow{A^m} \cap \overrightarrow{A^{n-1}})$$

Ta suy ra $\dim(\overrightarrow{A^m} \cap \overrightarrow{A^{n-1}}) = m$ tức là $\overrightarrow{A^m} \subset \overrightarrow{A^{n-1}}$

Vậy $\mathbf{A}^m$ cùng phương với $\mathbf{A}^{n-1}$.

§4.TÂM TỈ CỰ CỦA MỘT HỆ ĐIỂM

1.ĐỊNH LÍ

Cho hệ k điểm $P_1, P_2, ..., P_k$ của không gian afin **A** và k phần tử $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ thuộc trường **K** sao cho $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Khi đó có một và chỉ một điểm $G \in \mathbf{A}$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

Chứng minh

Lấy một điểm O tùy ý của không gian afin **A** thì điểm G xác định bởi:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\overrightarrow{OG}$$

Do đó : $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i}} \qquad (1)$$

Vậy điểm G tồn tại và được xác định duy nhất do biểu thức (1) ở trên.

2. ĐỊNH NGHĨA

Điểm G nói trong định lí trên đây được gọi là *tâm tỉ cự của hệ điểm P_i gắn với họ hệ số λ_i.*

Trường hợp đặc biệt nếu các λ_i bằng nhau, điểm G gọi là *trọng tâm* của hệ điểm $P_1, P_2,..., P_k$.

CHÚ Ý :

a) Nếu thay các hệ số $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ với $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \neq 0$ bởi $k\lambda_1$, $k\lambda_2,..., k\lambda_k$ với $k \in \mathbf{K} - \{0\}$ thì tâm tỉ cự G không thay đổi. Vậy trong trường hợp G là trọng tâm có thể lấy các $\lambda_i = 1$ và khi đó trọng tâm G của hệ điểm $P_1,P_2,..., P_k$ được xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{OP_i}$$

b) Khi k = 2 trọng tâm G của hai điểm P_1 và P_2 còn gọi là *trung điểm* của cặp điểm (P_1, P_2).

3. ĐỊNH LÍ

Tập hợp tất cả các tâm tỉ cự của hệ điểm $P_o, P_1,..., P_k$ với các họ hệ số khác nhau là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các điểm P_i ấy.

Chứng minh

Gọi α là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các điểm $P_o,P_1,...,P_k$. Khi đó các vectơ $\overrightarrow{P_oP_1}, \overrightarrow{P_oP_2},..., \overrightarrow{P_oP_k}$ thuộc phương $\vec{\alpha}$ của phẳng α.

Giả sử $\overrightarrow{P_oP_1}, \overrightarrow{P_oP_2},..., \overrightarrow{P_oP_s}$ với $s \leq k$ là hệ vectơ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ vectơ trên.Ta có $\dim\alpha = s$.

$$\text{Điểm } G \in \alpha \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{P_oG} \in \vec{\alpha} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oG} = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\overrightarrow{P_oP_i}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_oG} = \sum_{i=1}^{s}\lambda_i(\overrightarrow{GP_i} - \overrightarrow{GP_o})$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sum_{i=1}^{s}\lambda_i)\overrightarrow{GP_o} + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$$

Đẳng thức này chứng tỏ G là tâm tỉ cự của hệ điểm P_o, $P_1,\ldots,P_k$ với họ các hệ số là :$1-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$,$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s,0,\ldots,0$. Các hệ số này có tổng bằng 1.

Ngược lại nếu G là tâm tỉ cự của họ $P_o,P_1,\ldots,P_k$ gắn với họ hệ số $\lambda_o, \lambda_1,\ldots,\lambda_k$ thì:

$$\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\overrightarrow{GP_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k}\lambda_i(\overrightarrow{GP_o} + \overrightarrow{P_oP_i}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{i=0}^{k}\lambda_i)\overrightarrow{GP_o} + \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\overrightarrow{P_oP_i} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_oG} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{k}\lambda_i}\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\overrightarrow{P_oP_i}$$

Do đó $\overrightarrow{P_oG} \in \vec{\alpha}$ và suy ra G $\in\alpha$.Định lí đã được chứng minh.

Hệ quả: Cho m–phẳng α đi qua m+1 điểm độc lập $P_o,P_1,\ldots,P_m$. Khi đó α chính là tập hợp các tâm tỉ cự của hệ điểm đó gắn với các họ hệ số khác nhau.

4. ĐỊNH LÍ

Cho m -phẳng α đi qua m+1 điểm độc lập $P_o,P_1,\ldots,P_m$ và một điểm O tùy ý. Điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc α là :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\overrightarrow{OP_i} \quad \text{trong đó } \sum_{i=0}^{m}\lambda_i = 1$$

Chứng minh

Điểm $M \in \alpha \Leftrightarrow M$ là tâm tỉ cự của hệ điểm $P_0, P_1, \ldots, P_m$ gắn với họ các hệ số $\lambda'_0, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m$ nào đó nghĩa là với một điểm O tùy ý ta có:

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i \overrightarrow{MP_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{i=0}^{m} \lambda'_i)\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i \overrightarrow{OP_i}$$

Vì $\sum_{i=0}^{m} \lambda'_i \neq 0$ nên nếu đặt $\lambda_i = \dfrac{\lambda'_i}{\sum_{i=0}^{m} \lambda'_i}$ thì

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \quad \text{và} \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1.$$

§5.TẬP LỒI TRONG KHÔNG GIAN AFIN THỰC

1.ĐOẠN THẲNG

Cho hai điểm P và Q phân biệt của không gian afin thực **A**. Điểm M thuộc đường thẳng d đi qua P và Q khi và chỉ khi với điểm O tùy ý thì :

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ} \text{ với } \lambda + \mu = 1$$

hay là $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OQ}$ với $\lambda \in \mathbf{R}$.

Định nghĩa. Trong không gian afin thực **A** cho hai điểm P và Q phân biệt, tập hợp những điểm M sao cho với một điểm O tùy ý ta có :

$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OP} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OQ}$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ được gọi là *đoạn thẳng PQ*.

Khi $\lambda = 1$ ta có điểm P, khi $\lambda = 0$ ta có điểm Q, còn những điểm khác của đoạn thẳng PQ ứng với $0 < \lambda < 1$.

Hai điểm P, Q gọi là hai *mút* của đoạn thẳng PQ. Những điểm khác của đoạn thẳng PQ gọi là *ở giữa* P và Q.

2.TỈ SỐ ĐƠN CỦA HỆ BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Định nghĩa. Cho hai điểm P và Q phân biệt của không gian afin thực **A**. Điểm M thuộc đường thẳng d đi qua P và Q đồng thời $M \neq Q$ khi và chỉ khi có số $k \in \mathbf{R} - \{1\}$ để $\boxed{\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}}$, khi đó k gọi là *tỉ số đơn của hệ ba điểm M,P,Q thẳng hàng* lấy theo thứ tự đó và được kí hiệu k = (MPQ).Trung điểm M của đoạn thẳng PQ xác định bởi tỉ số đơn (MPQ) = – 1. Cần chú ý rằng (MPQ) = k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$. Nếu thay đổi thứ tự các điểm trong cách viết tỉ số đơn thì giá trị của tỉ số đơn đó thay đổi. Người ta chứng minh được các công thức sau đây:

$$(MPQ) = \frac{1}{(MQP)}, (PMQ) = \frac{(MPQ)}{(MPQ)-1}, (QPM) = 1 - (MPQ)$$

Đối với trường hợp có hai điểm trong ba điểm M,P,Q trùng nhau, ta quy ước :

$$(MMQ) = 0, \ (MPM) = \infty, \ (MPP) = 1.$$

3.TẬP LỒI

a) Định nghĩa. Một tập X trong không gian afin thực **A** gọi là một *tập lồi* nếu với mọi điểm P, Q thuộc X thì đoạn thẳng PQ nằm hoàn toàn trong X (H.1b).

a) Tập không lồi

b) Tập lồi

hình 1

b) Thí dụ . Mỗi m - phẳng α trong không gian afin thực **A** là tập lồi vì nếu P, Q là hai điểm phân biệt thuộc α thì toàn bộ đường thẳng PQ thuộc α.

Do đó đoạn thẳng PQ nằm hoàn toàn trong α. Vậy α là một tập lồi.

4. ĐƠN HÌNH m- CHIỀU

Trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ cho m+1 điểm độc lập $A_o, A_1, \dots, A_m$ $(0 \le m \le n)$. Giả sử đối với một mục tiêu afin cho trước các điểm A_i có tọa độ là :

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \text{ với } i = 0, 1, 2, \dots, m$$

Ta có phương trình tham số của m - phẳng $\mathbf{A}^m$ đi qua các điểm đó là :

$$\boxed{\begin{array}{c} x_i = a_{oi} + t_1(a_{1i} - a_{oi}) + t_2(a_{2i} - a_{oi}) + \dots + t_m(a_{mi} - a_{oi}) \\ \text{với } i = 1, 2, \dots, n. \end{array}} \quad (1)$$

Bây giờ trong phương trình trên nếu ta đặt

$t_o = 1 - t_1 - t_2 - \dots - t_m$

hay $\boxed{t_o + t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1}$ (2) thì ta có phương trình :

$$\boxed{\begin{array}{c} x_i = t_o a_{oi} + t_1 a_{1i} + t_2 a_{2i} + \dots + t_m a_{mi} \\ \text{với } i = 1, 2, \dots, n. \end{array}} \quad (3)$$

Phương trình (3) với điều kiện (2) tương đương với phương trình (1) là phương trình của một m - phẳng xác định bởi một hệ gồm m+1 điểm độc lập. Từ đó ta xây dựng được khái niệm *đơn hình* bằng định nghĩa sau đây :

a) Định nghĩa. Tập hợp các điểm X của $\mathbf{A}^n$ mà tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa mãn phương trình (3) có dạng :

$$x_i = t_o a_{oi} + t_1 a_{1i} + \dots + t_m a_{mi}$$

với điều kiện (2) là $t_o + t_1 + \dots + t_m = 1$ và điều kiện là các $t_i \ge 0$ với i=0,1,2,...,m được gọi là *đơn hình m chiều* hoặc *m-đơn hình*.

Các điểm $A_o, A_1, ..., A_m$ gọi là các *đỉnh* của đơn hình đó.

Như vậy một đơn hình hoàn toàn được xác định bởi các đỉnh của nó, các đỉnh này là một hệ điểm độc lập gồm các điểm $A_o, A_1, ..., A_m$ và được kí hiệu là đơn hình $S(A_o, A_1, ..., A_m)$.

Đơn hình 0 chiều là 1 điểm. Đơn hình 1 chiều, 2 chiều, 3 chiều lần lượt có tên gọi là *đoạn thẳng*, *tam giác*, *tứ diện*.

Các đỉnh A_i của đơn hình $S(A_o, A_1, ..., A_m)$ được xác định bởi các tham số $t_i = 1$ và các $t_j = 0$ với $j \neq i$.

b) Định lí. Đơn hình m chiều là một tập lồi

Chứng minh

Giả sử đơn hình $S(P_o, P_1, ..., P_m)$ xác định bởi m+1 điểm độc lập $P_o, P_1, ..., P_m$ trong không gian A^n. Với một điểm O nào đó và lấy hai điểm M, N thuộc đơn hình tức là :

$$M \in S(P_o, P_1, ..., P_m) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \text{ với } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \text{ và } \lambda_i \geq 0$$

$$N \in S(P_o, P_1, ..., P_m) \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \overrightarrow{OP_i} \text{ với } \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 1 \text{ và } \mu_i \geq 0$$

Nếu một điểm X thuộc đoạn thẳng MN thì :

$$\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{ON}$$

hay
$$\overrightarrow{OX} = \sum_{i=0}^{m} \left[t\lambda_i + (1-t)\mu_i\right] \overrightarrow{OP_i}$$

Rõ ràng là $\sum_{i=0}^{m} \left[t\lambda_i + (1-t)\mu_i\right] = t\sum_{i=0}^{m} \lambda_i + (1-t)\sum_{i=0}^{m} \mu_i$

$$= t + 1 - t = 1$$

và $t\lambda_i + (1-t)\mu_i \geq 0$ vì $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, $t \geq 0$, $1 - t \geq 0$.

Vậy điểm X thuộc đoạn thẳng MN thuộc đơn hình $S(P_o, P_1,...,P_m)$. Ta suy ra đơn hình m chiều đó là một tập lồi.

NHẬN XÉT. Ta có thể định nghĩa đơn hình m chiều $S(P_o, P_1,...,P_m)$ trong $\mathbf{A}^n$ xác định bởi m+1 điểm độc lập $P_o, P_1,...,P_m$ là tập hợp những điểm M sao cho với một điểm O nào đó ta có :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \text{ với } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \text{ và } \lambda_i \geq 0 \text{ với } i = 0,1,..., m.$$

5. HÌNH HỘP m CHIỀU

a) Định nghĩa. Cho m+1 điểm độc lập $P_o, P_1,...,P_m$ của không gian afin thực $\mathbf{A}^n$. Tập hợp những điểm M trong $\mathbf{A}^n$ sao cho :

$\overrightarrow{P_oM} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_oP_i}$ với $0 \leq \lambda_i \leq 1$ được gọi là *hình hộp m chiều* hay gọi tắt là *m hộp*. Các điểm P_i gọi là đỉnh của m - hộp.

b)Định lí. Hình hộp m chiều là một tập lồi.

Chứng minh

Thật vậy nếu M và N là hai điểm tùy ý thuộc hình hộp m chiều, ta có :

$$\overrightarrow{P_oM} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_oP_i} \qquad \text{với } 0 \leq \lambda_i \leq 1$$

$$\overrightarrow{P_oN} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \overrightarrow{P_oP_i} \qquad \text{với } 0 \leq \mu_i \leq 1$$

Khi đó điểm X thuộc đoạn MN khi và chỉ khi :

$$\overrightarrow{P_oX} = t\overrightarrow{P_oM} + (1-t)\overrightarrow{P_oN}$$

hay $$\overrightarrow{P_oX} = \sum_{i=1}^{m} [t\lambda_i + (1-t)\mu_i] \overrightarrow{P_oP_i}$$

Ta có $0 \leq t, \ \lambda_i \leq t$, vì $t, \lambda_i \geq 0$ và $t, \lambda_i \leq 1$ và

$0 \leq t\lambda_i + (1-t)\mu_i \leq 1 - t$ vì $0 \leq 1 - t, \ \mu_i \leq 1$

Vậy $0 \leq t\lambda_i + (1-t)\mu_i \leq t + 1 - t = 1$

Điều đó chứng tỏ X thuộc hình hộp m chiều.Vậy m-hộp là một tập lồi.

c) Chú ý. Người ta chứng minh được rằng giao của những tập lồi là tập lồi. Rõ ràng mỗi hình hộp có 2^m đỉnh khác nhau. Đỉnh P_o ứng với $\lambda_i = 0$ với mọi i. Đỉnh P_i ứng với $t_i = 1$, $t_j = 0$ nếu $j \neq i$.

Trong định nghĩa hình hộp điểm gốc P_o thực ra không đóng một vai trò gì đặc biệt, tức là mọi đỉnh khác của hình hộp đều có thể đóng vai trò điểm gốc.

Hình hộp 0 chiều là *1 điểm*, hình hộp 1 chiều là *một đoạn thẳng*, hình hộp 2 chiều là *một hình bình hành*, hình hộp 3 chiều là *hình hộp theo nghĩa thông thường*. Nếu trong định nghĩa của hình hộp ta cho p tham số nào đó bằng 0 thì ta được một *hình hộp m-p chiều* và hình hộp đó được gọi là *mặt bên m- p chiều* của hình hộp m chiều đã cho. Mặt bên 0 chiều chính là *đỉnh* còn mặt bên 1 chiều được gọi là *cạnh* của hình hộp.

Tóm lại một hình hộp m chiều xác định bởi m+1 điểm P_o, $P_1,\dots,P_m$ độc lập trong A^n và được kí hiệu là $H(P_o, P_1,\dots,P_m)$:

$$M \in \begin{matrix}\text{hình hộp m chiều}\\ H(P_o,\ P_1,\ \dots,\ P_m)\end{matrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oM} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_oP_i} \text{ với } 0 \le \lambda_i \le 1$$

§6. ÁNH XẠ AFIN CỦA CÁC KHÔNG GIAN AFIN VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI CỦA KHÔNG GIAN AFIN

1. ĐỊNH NGHĨA.

Cho **A** và **A**' là hai không gian afin trên trường **K** liên kết với hai không gian vectơ **V** và **V'**. Ánh xạ f :**A** → **A'** được gọi là *ánh xạ afin* nếu có ánh xạ tuyến tính φ : **V** → **V'** sao cho với mọi cặp điểm M,N∈**A** và ảnh **M'** = f(M), N' = f(N) ta có $\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$.

Ánh xạ tuyến tính φ : **V** → **V'** được gọi là *ánh xạ tuyến tính liên kết với ánh xạ afin f.*

CHÚ Ý : Người ta còn có thể kí hiệu ánh xạ tuyến tính

$$\varphi = \bar{f} : \vec{A} \to \overrightarrow{A'}$$

2. TÍNH CHẤT CỦA ÁNH XẠ AFIN

a) Mỗi ánh xạ afin f :**A** → **A'** chỉ có một ánh xạ tuyến tính liên kết duy nhất φ : **V** → **V'**.

Thật vậy giả sử f còn có ánh xạ tuyến tính khác là φ':**V** → **V'**. Khi đó với mọi cặp điểm M,N thuộc **A** ta có $\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$ và $\overrightarrow{M'N'} = \varphi'(\overrightarrow{MN})$. Do đó $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \varphi'(\overrightarrow{MN})$ hay φ = φ'.

b) Với mỗi ánh xạ tuyến tính φ : **V** → **V'** và với cặp điểm I∈ **A** và I'∈ **A'** xác định duy nhất một ánh xạ afin f :**A** → **A'** nhận φ là ánh xạ tuyến tính liên kết và có f(I) = I'.

Thật vậy, ta xác định ánh xạ f : **A** → **A'** biến mỗi điểm M ∈ **A** thành điểm M' ∈ **A'** sao cho $\varphi(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{I'M'}$. Khi đó f là ánh xạ afin liên kết với ánh xạ tuyến tính φ vì mọi M, N∈ **A** ta có :

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \varphi(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}) = \varphi(\overrightarrow{IN}) - \varphi(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{I'N'} - \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{M'N'} .$$

Rõ ràng f(I) = I' và ánh xạ f là duy nhất vì giả sử có ánh xạ afin f' : **A** → **A'** có ánh xạ tuyến tính liên kết là φ và f'(I) = I' thì với mọi điểm M ∈ **A** ta có :

$\overrightarrow{I'f'(M)} = \varphi(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{I'f(M)}$ nên f'(M) = f(M). Do đó f = f'.

c) Tích của hai ánh xạ afin f :**A** → **A'** và g :**A'** → **A''** là một ánh xạ afin và được kí hiệu là gof. Ánh xạ liên kết của tích gof này là tích của hai ánh xạ liên kết của hai ánh xạ f và g.

Tính chất này được suy ra từ định lí nói rằng tích của hai ánh xạ tuyến tính là một ánh xạ tuyến tính. Do đó ta suy ra ánh xạ liên kết của tích $g_o f$ cũng là một ánh xạ tuyến tính. Nếu gọi φ và ψ là hai ánh xạ liên kết của f và g, người ta dễ dàng chứng minh được rằng ánh xạ tích $\psi o \varphi$ là ánh xạ tuyến tính liên kết với ánh xạ afin $g_o f$.

d) Cho n+1 điểm độc lập $M_o, M_1, \ldots, M_n$ trong không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$ và cho n+1 điểm tuỳ ý $M'_o, M'_1, \ldots, M'_n$ trong không gian afin $\mathbf{A}'$. Khi đó có một và chỉ một ánh xạ afin duy nhất $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}'$ sao cho $f(M_i) = M'_i$ với i= 0,1, ..., n.

Chứng minh

Vì n+1 điểm $M_o, M_1, \ldots, M_n$ độc lập trong $\mathbf{A}^n$ nên hệ n vectơ $\overrightarrow{M_oM_1}, \overrightarrow{M_oM_2}, \ldots, \overrightarrow{M_oM_n}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\overrightarrow{A^n}$ liên kết với $\mathbf{A}^n$. Khi đó có một ánh xạ tuyến tính duy nhất

$\varphi : \overrightarrow{A^n} \to \overrightarrow{A'}$ sao cho $\varphi(\overrightarrow{M_oM_i}) = \overrightarrow{M'_oM'_i}$ với i = 0,1,..., n. Theo tính chất b) có một ánh xạ afin duy nhất $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}'$ sao cho $f(M_o) = M'_o$ và f có ánh xạ tuyến tính φ liên kết của f. Như vậy $f(M_i) = M'_i$ và f là duy nhất.

e) Ánh xạ afin $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ biến một m - phẳng của $\mathbf{A}$ thành một l - phẳng của $\mathbf{A}'$ với $l \leq m$.

Chứng minh

Gọi $\varphi : \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A'}$ là ánh xạ tuyến tính liên kết với ánh xạ afin f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ và $\mathbf{A}^m$ là m - phẳng của $\mathbf{A}$ có phương $\overrightarrow{A^m} \subset \overrightarrow{A}$. Khi đó $\varphi(\overrightarrow{A^m})$ là một không gian vectơ con l chiều nào đó của $\overrightarrow{A}$ mà $l \leq m$. Giả sử I là một điểm nào đó của $\mathbf{A}^m$ và I'= f(I). Gọi $\mathbf{A}'^l$ là l - phẳng afin đi qua I và có phương là $\overrightarrow{A^m}$.

Ta cần chứng minh $f(\mathbf{A}^m) = \mathbf{A}'^l$.

Thật vậy giả sử điểm $M' \in f(\mathbf{A}^m)$, gọi $M \in \mathbf{A}^m$ là tạo ảnh của M'.

Ta có $M' = f(M)$, khi đó $\overrightarrow{I'M'} = \varphi(\overrightarrow{IM}) \in \varphi(\overrightarrow{A^m}) = \overrightarrow{A'^l}$.

Do đó $M' \in \mathbf{A}'^l$.

Mặt khác nếu $M' \in \mathbf{A}'^l$ thì $\overrightarrow{A'M'} \in \overrightarrow{A'^l}$ cho nên nếu ta lấy $\vec{x}$ là tạo ảnh của $\overrightarrow{A'M'}$ thì $\overrightarrow{A'M'} = \varphi(\vec{x})$ rồi gọi M là điểm của $\mathbf{A}^m$ sao cho $\overrightarrow{AM} = \vec{x}$ thì $M' = f(M)$ tức là $M' \in f(\mathbf{A}^m)$.Vậy tính chất trên được chứng minh.

3. ĐẲNG CẤU AFIN

Nếu ánh xạ afin f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ là một song ánh thì nó gọi là *phép đẳng cấu afin* của không gian afin **A** lên không gian afin **A'**. Khi đó tất nhiên **A** và **A'** có cùng một số chiều và $\varphi(\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{A'}$ là phép đẳng cấu tuyến tính giữa hai không gian vectơ $\overrightarrow{A}$ và $\overrightarrow{A'}$.

Hệ quả . Trong $\mathbf{A}^n$ và $\mathbf{A}'^n$ lần lượt cho hai mục tiêu afin $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o; E'_i\}$ với i =1,2,...,n thì có duy nhất một phép đẳng cấu afin $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}'^n$ sao cho $f(E_i) = E'_i$ với i = 0,1, 2,..., n.

4. PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN

a) Định nghĩa. Phép đẳng cấu afin $f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ của không gian afin **A** lên chính nó được gọi là *phép biến đổi afin f* của không gian afin **A** và được gọi tắt là *phép afin*. Khi đó ánh xạ tuyến tính liên kết $\varphi: \overrightarrow{A} \to \overrightarrow{A}$ của f là một phép tự đẳng cấu tuyến tính và còn được gọi là phép biến đổi tuyến tính.

Thí dụ. Cho không gian afin **A** liên kết với không gian vectơ **V**. Cho vectơ $\vec{v}$ cố định trong **V** và xét ánh xạ f: $\mathbf{A} \to \mathbf{A}$ sao cho nếu $M' = f(M)$ thì $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$. Phép afin f như thế gọi là *phép tịnh tiến* theo vectơ $\vec{v}$ và được kí hiệu là $t_{\vec{v}}$. Vectơ $\vec{v}$ gọi là vectơ tịnh tiến.

Phép tịnh tiến $t_{\vec{v}}$ là một phép biến đổi afin với ánh xạ tuyến tính liên kết φ là phép đồng nhất $\overrightarrow{Id_V} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

Thật vậy với mọi M, N ∈ **A** ta có $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{Id_V}(\overrightarrow{MN}) =$
$= \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} + \overrightarrow{N'N} = \vec{v} + \overrightarrow{M'N'} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{M'N'}$

Ngược lại nếu f là một phép biến đổi afin mà ánh xạ tuyến tính liên kết $\varphi = \overrightarrow{Id_V}$ thì f là một phép tịnh tiến.

Thật vậy, lấy một điểm I cố định của **A** và đặt $I' = f(I)$. Khi đó :

$$\overrightarrow{M\varphi(M)} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{II'} + \varphi(\overrightarrow{IM})$$
$$= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{II'} \text{ vì } \overrightarrow{I'M'} = \overrightarrow{IM}.$$

b) Định lí . Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho hai hệ điểm độc lập là $A_o, A_1, \ldots, A_n$ và $A'_o, A'_1, \ldots, A'_n$. Khi đó có một phép biến đổi afin duy nhất $f: \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ sao cho $f(A_i) = A'_i$ với $i = 0, 1, \ldots, n$. Định lí này là hệ quả trực tiếp của tính chất d về sự xác định của ánh xạ afin với ánh xạ tuyến tính liên kết với f là phép biến đổi tuyến tính.

c) Định lí. Tích của hai phép afin là một phép afin có phép biến đổi tuyến tính liên kết là tích các phép biến đổi tuyến tính liên kết của hai phép afin đã cho. Đảo ngược của một phép afin là một phép afin có phép biến đổi tuyến tính liên kết là đảo ngược của phép biến đổi tuyến tính liên kết với phép afin đã cho.

Chứng minh

Cho hai phép afin f: **A** → **A** và g: **A** → **A** có các phép biến đổi tuyến tính liên kết lần lượt là $\varphi: \vec{\mathbf{A}} \to \vec{\mathbf{A}}$ và $\psi: \vec{\mathbf{A}} \to \vec{\mathbf{A}}$. Khi đó gọi M, N là một cặp điểm nào đó của **A** và M' = f(M), N' = f(N), M" = g(M') = g f (M), N" = g (N') = g f (N) thì ta có :

$\overrightarrow{M''N''} = \psi(\overrightarrow{M'N'}) = \psi.\varphi(\overrightarrow{MN})$. Như vậy tích gf : **A** → **A** là một ánh xạ afin có ánh xạ tuyến tính liên kết là $\psi.\varphi$. Vì φ và ψ là những phép biến đổi tuyến tính nên $\psi.\varphi$ cũng là một phép biến đổi tuyến tính. Do đó gf là phép biến đổi afin.

Đảo ngược của phép afin f là phép afin f^{-1} có phép biến đổi tuyến tính liên kết là φ^{-1}.

d) Định lí. Phép biến đổi afin biến một m - phẳng thành một m - phẳng.

Chứng minh

Giả sử f:**A** → **A** là một phép afin của không gian afin **A** và gọi $\mathbf{A}^m$ là một m-phẳng nào đó của **A**. Theo tính chất c) của ánh xạ afin §6 ta có $f(\mathbf{A}^m)$ là cái phẳng l chiều của **A** mà $l \le m$. Nhưng vì f^{-1}: **A** → **A** là một phép afin biến $f(\mathbf{A}^m)$ thành $\mathbf{A}^m$ nên $m \le l$. Từ đó ta suy ra $l = m$. Vậy $f(\mathbf{A}^m)$ là m-phẳng.

Hệ quả. Phép afin f : **A** → **A** biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

e) Định lí. Phép afin f : **A** → **A** bảo tồn tỉ số đơn của các hệ ba điểm thẳng hàng nghĩa là nếu P' = f (P), Q' = f (Q), R' = f (R) và P, Q, R thẳng hàng thì P',Q',R' thẳng hàng và (PQR) = (P'Q'R').

Chứng minh

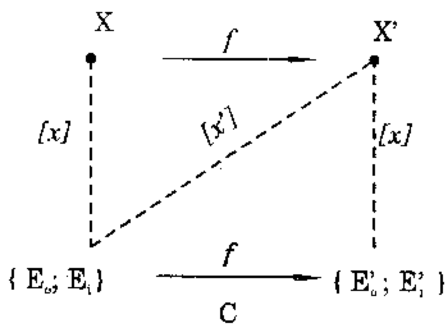
Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính liên kết với phép afin f và giả sử $\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{PR}$ thì $\overrightarrow{P'Q'} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) = \varphi(\lambda\overrightarrow{PR}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{PR}) =$

$= \lambda\overrightarrow{P'R'}$ .Từ đó ta suy ra nếu P, Q, R thẳng hàng thì P', Q', R' thẳng hàng và (PQR) = (P'Q'R') = λ.

5. PHƯƠNG TRÌNH CỦA PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN

Trong $\mathbf{A}^n$ cho một mục tiêu afin $\{E_o;E_i\}$. Gọi $f:\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ là một phép biến đổi afin. Muốn lập phương trình của phép biến đổi afin f ta hãy tìm hệ thức liên hệ giữa toạ độ $(x_1,x_2,...,x_n)$ của một điểm $X \in \mathbf{A}^n$ và tọa độ $(x'_1,x'_2,...,x'_n)$ của điểm f(X) đối với mục tiêu đã chọn.

Gọi $E'_i = f(E_i)$ với i = 0,1,...,n. Vì f là phép biến đổi afin nên n+1 điểm $E'_o, E'_1,...,E'_n$ độc lập và tạo nên một mục tiêu $\{E'_o; E'_i\}$. Giả sử C là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ sang mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ là tọa độ của điểm $E'_o = f(E_o)$ đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$. Ta cần chú ý rằng C cũng là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ với i = 1,2, ...,n.



hình 2

Gọi X' = f(X), theo định nghĩa của f ta có $\varphi(\overrightarrow{E_oX}) = \overrightarrow{E'_oX'}$. Nếu $(x_1,x_2,...,x_n)$ là tọa độ của X đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ thì :

$$\overrightarrow{E_oX} = x_1\overrightarrow{E_oE_1} + x_2\overrightarrow{E_oE_2} + ... + x_n\overrightarrow{E_oE_n}$$

Do đó $\overrightarrow{E'_oX'} = \varphi(\overrightarrow{E_oX}) = x_1\overrightarrow{E'_oE'_1} + x_2\overrightarrow{E'_oE'_2} + ... + x_n\overrightarrow{E'_oE'_n}$

Điều đó có nghĩa là điểm X' có tọa độ đối với mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ là $(x_1,x_2,...,x_n)$. Ta suy ra rằng sự liên hệ giữa các tọa độ (x_i) và (x'_i) là sự liên hệ giữa các tọa độ của cùng một điểm X' đối với hai mục tiêu khác nhau (H.2). Bởi vậy theo công thức đổi mục tiêu ở mục 3, §2, chương I ta có :

$$\boxed{[x'] = C^*[x] + [b]} \qquad (1)$$

trong đó [x'], [x] và [b] lần lượt là ma trận cột tọa độ của các điểm X, X' và E'_o đối với mục tiêu đã chọn $\{E_o;E_i\}$.

Ma trận C* không suy biến (là ma trận chuyển vị của ma trận chuyển C) được gọi là *ma trận của phép afin f* đã cho và phương trình (1) ở trên là phương trình của phép afin đó. Ta chú ý rằng đối với cơ sở $\{\vec{e_i}\} = \{\overrightarrow{E_oE_i}\}$, phép biến đổi tuyến tính φ (liên kết với phép afin f nói trên) có phương trình là :

$$\boxed{[x'] = C^*[x]}$$

Trong đó [x] và [x'] là ma trận cột tọa độ của các vectơ $\vec{x}$ và $\varphi(\vec{x})$ đối với cơ sở $\{\vec{e_i}\}$ của không gian vectơ $\vec{\mathbf{A}}$.

Ngược lại đối với một mục tiêu đã chọn $\{E_o;E_i\}$ mỗi phương trình có dạng [x'] = B[x] +[b'] trong đó B là một ma trận vuông cấp n không suy biến đều là phương trình của một phép biến đổi afin nào đó.Thật vậy, ta gọi ($b'_1, b'_2, ..., b'_n$) là tọa độ của điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E'_i\}$ là mục tiêu afin sao cho B* là ma trận chuyển từ $\{E_o;E_i\}$ sang $\{E'_o;E'_i\}$. Khi biết B^* và [b] thì mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ hoàn toàn được xác định.

Bây giờ gọi $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ là phép afin sao cho $f(E_i) = E'_i$ với i = 0,1,2,...,n thì dễ dàng thấy rằng phương trình của phép afin f đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ chính là phương trình [x'] = B[x] + [b] đã cho.

Thí dụ 1. Một phép tịnh tiến $t_{\vec{v}} : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ được xác định bởi phép đồng nhất trong $\mathbf{V}^n$ (là không gian vectơ liên kết của $\mathbf{A}^n$) nên ma trận của nó là ma trận đơn vị. Vậy phương trình của phép tịnh tiến có dạng :

$$\boxed{[x'] = [x] + [b]}$$

trong đó [b] là ma trận cột tọa độ của điểm $E'_o = t_{\vec{v}}(E_o)$ với $\overrightarrow{E_oE'_o} = \vec{v}$.

Thí dụ 2. Trong mặt phẳng afin A^2 đối với mục tiêu đã chọn, hãy lập phương trình của phép biến đổi afin f biến các điểm A(1,0), B(0,2), C(–3,0) lần lượt thành các điểm A'(2,3), B'(–1,4), C'(–2, –1).

Giải

Phương trình của phép afin f có dạng tổng quát là :

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + c_1 \\ x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + c_2 \end{cases} \text{ hay } \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Ta cần tìm các số $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ của phép afin f:

Ta có theo giả thiết A(1,0) $\rightarrow$ A'(2,3)

B(0,2) $\rightarrow$ B'(–1,4)

C(–3,0) $\rightarrow$ C'(–2, –1)

nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2 = a_1 + c_1 & (1) \\ 3 = b_1 + c_2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 2a_2 + c_1 & (3) \\ 4 = 2b_2 + c_2 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = -3a_1 + c_1 & (5) \\ -1 = -3b_1 + c_2 & (6) \end{cases}$$

Ta được một hệ gồm 6 phương trình, 6 ẩn. Giải hệ phương trình này ta được phương trình của phép afin cần tìm là :

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + 1 \\ x_2' = x_1 + x_2 + 2 \end{cases}$$

6. MỐI QUAN HỆ GIỮA PHƯƠNG TRÌNH CỦA MỘT PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN ĐỐI VỚI HAI MỤC TIÊU AFIN KHÁC NHAU

Giả sử đối với mục tiêu afin $\{E_o;E_i\}$ phép afin f : $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^n$ có phương trình là :

$$[x'] = B\,[x] + [b].$$

Bây giờ đối với một mục tiêu afin khác là $\{E'_o;E'_i\}$ phép afin f đó có phương trình là:

$$[x'] = B'[x] + [b'].$$

Vì B và B' cũng là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbf{V}^n \to \mathbf{V}^n$ liên kết của phép afin f đối với các cơ sở tương ứng là $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ và $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ với i = 1, 2,...,n. Từ đó ta suy ra sự liên hệ giữa B và B' bằng hệ thức :

$$\boxed{B' = (C^*)^{-1}.B.C^*}$$

trong đó C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$.

CHÚ Ý. Trong phương trình của phép biến đổi afin f đối với một mục tiêu afin $\{E_o;E_i\}$ cho trước có dạng $[x'] = B[x] + [b]$, nếu ta cho $[x] = [0]$ ta có $[x'] = [b]$. Điều đó có nghĩa là $(b_1, b_2,..., b_n)$ chính là tọa độ của điểm $f(E_o) = E'_o$.

Nhận xét này giúp ta rút ngắn được quá trình lập phương trình của phép biến đổi afin trong trường hợp giả thiết cho biết tọa độ của điểm $f(E_o)$ đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$.

7.ẢNH CỦA ĐƠN HÌNH m CHIỀU VÀ CỦA HÌNH HỘP m CHIỀU QUA PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN f

a) Định lí : Qua phép biến đổi afin một đơn hình m chiều biến thành một đơn hình m chiều.

Chứng minh

Giả sử đơn hình m chiều xác định bởi m+1 điểm $A_o,A_1,...,A_m$ độc lập.Đối với mục tiêu afin cho trước,các điểm A_i có tọa độ là :

$A_i = (a_{i1}, a_{i2},..., a_{in})$ với i = 0,1,2,...,m.

Nếu dùng cách viết ma trận thì tọa độ các điểm của đơn hình trên có dạng :

$$[x] = t_o[a_o] + t_1[a_1] + ... + t_m[a_m]$$
trong đó các $t_i \geq 0$ với $i = 0,1, ..., m$ và $t_o + t_1 + ... + t_m = 1$

Bây giờ giả sử phép afin f có phương trình là $[x'] = B[x] + [b]$ trong đó B là ma trận vuông cấp n không suy biến. Nếu $X(x_i)$ là điểm thuộc đơn hình $S(A_oA_1... A_m)$ và $X'(x'_i)$ là ảnh của điểm đó thì :

$$[x'] = B(t_o[a_o] + t_1[a_1] + ... + t_m[a_m]) + [b]$$

Chú ý đến điều kiện $t_o + t_1 + ... + t_m = 1$ ta sẽ có :

$$[x'] = t_o(B[a_o]+[b]) + t_1(B[a_1]+[b]) + ... + t_m(B[a_m]+[b]).$$

hay $\boxed{[x'] = t_o[a'_o] + t_1[a'_1] + ... + t_m[a'_m]}$

trong đó $[a'_i] = B[a_i] + [b]$ tức $[a'_i]$ là ma trận cột tọa độ của điểm $A'_i = f(A_i)$ với $i = 0,1,2,...,m$. Bởi vậy ta có điểm $X'(x'_i)$ thuộc đơn hình xác định bởi m+1 điểm $A'_o, A'_1, ..., A'_m$ độc lập.Các điểm này chính là ảnh của m + 1 điểm $A_o, A_1, ..., A_m$ qua phép afin f. Vậy đơn hình m chiều là một khái niệm afin. Ta có :

$$S(A'_o, A'_1, ..., A'_m) = f(S(A_o, A_1, ..., A_m))$$

b) Định lí. Qua phép biến đổi afin một m - hộp biến thành một m - hộp.

Chứng minh

Ta biết rằng tập hợp những điểm M trong A^n sao cho với m+1 điểm $P_o, P_1, ..., P_m$ độc lập ta có $\overrightarrow{PM} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P_oP_i}$ với $0 \leq \lambda_i \leq 1$ là một hình hộp m chiều.

Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính liên kết của phép afin

$f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$, ta có : $\varphi(\overrightarrow{PM}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi(\overrightarrow{P_oP_i}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P'_oP'_i}$

Các điểm $P'_o, P'_1, \ldots, P'_m$ là m + 1 điểm độc lập.

Do đó $\overrightarrow{P'M'} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{P'_oP'_i}$ với $0 \le \lambda_i \le 1$ trong đó $f(M) = M'$ và $f(P_i) = P'_i$ với $i = 0,1,\ldots,m$.

Vậy qua phép afin f, hình hộp m chiều $H(P_o,P_1,\ldots,P_m)$ biến thành hình hộp m chiều $H'(P'_o,P'_1,\ldots,P'_m)$.

§7. NHÓM CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN CỦA KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN

1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

a) *Không gian hình học* là một tập hợp M khác rỗng và mỗi phần tử của nó được gọi là một *điểm*. Mỗi tập hợp con H của M gọi là một *hình*. Một song ánh $f : M \to M$ của M lên chính nó được gọi là một *phép biến đổi* và tập hợp các phép biến đổi của M làm thành một *nhóm* đối với phép toán lấy tích các song ánh.

b) Một tập hợp F không rỗng gồm những phép biến đổi f nào đó của không gian M được gọi là một *nhóm các phép biến đổi* với phép toán là tích của hai phép biến đổi nếu có hai điều kiện sau đây :

– Nếu f và g là hai phép biến đổi bất kì thuộc tập hợp F thì tích g_of cũng là một phép biến đổi thuộc F.

– Nếu f là phép biến đổi thuộc F thì phép đảo ngược f^{-1} cũng thuộc F.

Với hai điều kiện trên ta dễ dàng chứng minh được tập hợp F chứa phép biến đổi đồng nhất $e = Id_M$. Thật vậy với $f \in F$ (f tồn tại vì F không rỗng) thì theo điều kiện thứ hai có $f^{-1} \in F$ và theo điều kiện thứ nhất thì $e = f_o f^{-1}$ thuộc F. Phép đồng nhất e đóng vai trò phần tử đơn vị trong nhóm F vì $e_o f = f_o e = f$ đối với mọi $f \in F$.

Ngoài ra ta còn thấy rằng tích các phép biến đổi có tính chất kết hợp nghĩa là đối với bất kì ba phép biến đổi f, g, h của không gian M ta đều có $f_o(g_o h) = (f_o g)_o h$.

Thí dụ 1. Gọi $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các phép afin của không gian afin **A** thì $\mathcal{A}$ là một nhóm biến đổi của không gian **A** và được gọi là *nhóm afin* của **A**.

Thí dụ 2. Tập hợp các phép tịnh tiến của **A** làm thành một nhóm, còn tập hợp các phép vị tự không lập thành một nhóm vì tích hai phép vị tự có thể không phải là một phép vị tự.

c) Gọi F là một nhóm biến đổi của không gian M và H_1, H_2 là hai hình nào đó của M. Khi đó hình *H_1 gọi là tương đương với hình H_2 đối với nhóm F* nếu có một phép biến đổi $f \in F$ biến hình H_1 thành hình H_2. Ta kí hiệu $f(H_1) = H_2$ hay $H_1 \overset{(F)}{\sim} H_2$.

Từ định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra :

– Một hình H bất kì của M luôn luôn tương đương với chính nó (đối với nhóm F). Thật vậy, vì ta có phép đồng nhất $e \in F$ và $e(H) = H$.

– Nếu $H_1 \overset{(F)}{\sim} H_2$ thì $H_2 \overset{(F)}{\sim} H_1$. Thật vậy, nếu có $f \in F$ sao cho $f(H_1) = H_2$ thì có $f^{-1} \in F$ để $f^{-1}(H_2) = H_1$.

– Nếu $H_1 \overset{(F)}{\sim} H_2$, $H_2 \overset{(F)}{\sim} H_3$ thì $H_1 \overset{(F)}{\sim} H_3$. Thật vậy, vì nếu có $f, g \in F$ sao cho $f(H_1) = H_2$ và $g(H_2) = H_3$ thì $g_o f(H_1) = H_3$ với $g_o f \in F$.

Như vậy tập hợp các hình của không gian M được chia thành các lớp F– tương đương sao cho hai hình thuộc cùng một lớp khi và chỉ khi có một phép $f \in F$ biến hình này thành hình kia. Thí dụ trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ các hình tam giác thuộc cùng một lớp vì hai tam giác ABC và A'B'C' bất kì trong mặt phẳng (là hai hệ ba điểm độc lập) sẽ xác định một phép afin duy nhất f sao cho : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

2. CÁC BẤT BIẾN ĐỐI VỚI NHÓM CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI AFIN

a)Định nghĩa.Một tính chất của hình H sẽ gọi là *bất biến đối với nhóm F* nếu nó không thay đổi khi ta dùng một phép biến đổi $f \in F$ để biến hình H thành một hình khác. Như vậy ta có thể nói một cách khác rằng : Một tính chất của hình H sẽ gọi là *bất biến đối với nhóm F* nếu mọi hình H_1 tương đương với H đối với nhóm F đều có tính chất đó.

Các tính chất bất biến đối với nhóm các phép biến đổi afin $\mathcal{A}$ trên không gian afin **A** được gọi là các *tính chất afin* hay các *bất biến afin*.

b) Các tính chất afin - Thí dụ về các khái niệm afin

– Tính chất độc lập hay không độc lập của một hệ điểm là tính chất afin vì phép biến đổi afin biến hệ điểm độc lập thành hệ điểm độc lập , biến hệ điểm không độc lập thành hệ điểm không độc lập.

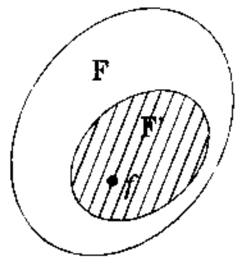
– Tính chất song song, cắt nhau hay chéo nhau của hai cái phẳng là tính chất afin vì các tính chất này không thay đổi qua các phép biến đổi afin. Giả sử phẳng α song song với phẳng β thì qua phép biến đổi afin f ta có phẳng $f(\alpha)$ cũng song song với phẳng $f(\beta)$ ....

– Các khái niệm được xây dựng từ các bất biến afin được gọi là các *khái niệm afin*.

Thí dụ: Hình tam giác, đường trung tuyến trong một tam giác, hình bình hành, m- phẳng, tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng, ... là những khái niệm afin ; còn hình vuông, hình tam giác đều, hình lập phương, đường tròn,...không phải là những khái niệm afin vì các hình này thay đổi qua phép biến đổi afin.

3. HÌNH HỌC AFIN

a) Hình học của một nhóm các phép biến đổi . Môn học nghiên cứu mọi bất biến đối với nhóm các phép biến đổi F của không gian M gọi là *hình học của nhóm F trên không gian M*. Nếu trên không gian M có nhiều nhóm các phép biến đổi khác nhau thì khi đó trên cùng một không gian M có thể có nhiều thứ hình học khác nhau. Giả sử F là một nhóm các phép biến đổi nào đó của không gian M và F' là nhóm con của nhóm F (H.3). Ta có $F' \subset F$. Khi đó nếu có một phép biến đổi $f \in F'$ thì $f \in F$. Do đó mọi bất biến của nhóm F' đều là bất biến của nhóm F. Nói cách khác hình học của nhóm F là một bộ phận của hình học của nhóm F'. Có thể nói rằng khi đó hình học của nhóm con F' phong phú hơn hình học của nhóm F.



hình 3

b) Hình học của nhóm các phép biến đổi afin. Áp dụng những điều trình bày trên đây đối với không gian afin **A**, ta có tập hợp các phép biến đổi afin của không gian afin **A** làm thành một nhóm.

Ta dùng kí hiệu $\mathcal{A}^n$ để chỉ nhóm các phép biến đổi afin của không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n$. Hai hình H_1 và H_2 của không gian afin $\mathbf{A}^n$ tương đương đối với nhóm $\mathcal{A}^n$ được gọi là *tương đương afin*. Mọi bất biến của nhóm afin là các *bất biến afin* và các khái niệm được định nghĩa thông qua các bất biến afin gọi là các *khái niệm afin*. Cuối cùng hình học của nhóm $\mathcal{A}^n$ trên không gian afin $\mathbf{A}^n$ được gọi là *hình học afin n chiều*. Sau đây ta hãy nêu thêm một số khái niệm afin được nghiên cứu trong hình học afin n chiều :

– Mục tiêu afin là một hệ gồm n+1 điểm độc lập.

– Đơn hình m chiều xác định bởi m+1 điểm độc lập, là sự mở rộng của khái niệm tứ diện trong không gian 3 chiều.

– Hình hộp m chiều là sự mở rộng của khái niệm hình hộp trong không gian 3 chiều.

CHÚ Ý . Các khái niệm hình học có liên quan đến độ dài đoạn thẳng và độ lớn của góc như đường cao của tam giác, đường trung trực của một đoạn thẳng, đường phân giác của một góc, hình tứ diện đều, hình cầu v.v... đều không phải là khái niệm afin nên không được nghiên cứu trong hình học afin. Tuy nhiên ta có thể nói rằng : hình vuông tương đương afin với một hình bình hành nào đó, hình tứ diện đều tương đương afin với một hình tứ diện bất kì, hình lập phương tương đương afin với một hình hộp xiên bất kì v.v .... Từ việc nhận ra các tính chất afin của một hình giúp ta có thể nhận ra bài toán nào là bài toán của hình học afin và do đó có thể sử dụng các công cụ thích hợp của hình học afin để giải các bài toán đó.

§8. CÁC SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG KHÔNG GIAN AFIN

1.ĐỊNH NGHĨA

Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ trên trường số thực với một mục tiêu afin $\{E_o; E_i\}$ cho trước, một siêu mặt bậc hai (S) là tập hợp tất cả những điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ có tọa độ $(x_1,x_2,...,x_n)$ đối với mục tiêu đã chọn thỏa mãn một phương trình bậc hai đối với các x_i có dạng :

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a_o = 0 \qquad (1)$$

trong đó các hệ số a_{ij}, a_i, a_o đều là số thực, các a_{ij} không đồng thời bằng 0 và $a_{ij} = a_{ji}$.

Như vậy (S) là siêu mặt bậc hai xác định bởi phương trình (1) và do đó phương trình (1) gọi là *phương trình của (S).*

Với n = 2 và n = 3 các siêu mặt bậc hai được gọi lần lượt là *đường bậc hai và mặt bậc hai*.

CHÚ Ý. Theo định nghĩa trên, tập hợp các điểm $X = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ đối với một mục tiêu cho trước có phương trình $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 1 = 0$ cũng là một siêu mặt bậc hai nhưng không chứa một điểm afin thực nào. Tuy vậy nếu xét trong không gian afin phức (khi đó tọa độ các điểm là những số phức) thì phương trình đó xác định một tập hợp không rỗng. Bởi vậy trong không gian afin thực ta sẽ gọi những siêu mặt bậc hai như thế là *siêu mặt bậc hai ảo.*

2.DẠNG MA TRẬN CỦA PHƯƠNG TRÌNH SIÊU MẶT BẬC HAI

Nếu ta gọi $A = [a_{ij}]$ là ma trận đối xứng và vuông cấp n mà phần tử ở hàng i cột j là hệ số a_{ij}. Vì $a_{ij} = a_{ji}$ nên $A = A^*$. Khi đó phương trình (1) của siêu mặt bậc hai (S) có thể viết :

$$[x]^* A[x] + 2[a]^* [x] + a_o = 0 \qquad (2)$$

trong đó :

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad [a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \text{và } A = A^* = [a_{ij}]$$

Vì các hệ số a_{ij} không đồng thời bằng 0 nên hạng của ma trận A lớn hơn hay bằng 1.

Thí dụ : trong $\mathbf{A}^3$ cho mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$$

Mặt bậc hai (S) còn có thể viết dưới dạng sau đây :

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 -$$
$$- 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$$

Phương trình của (S) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x_1\ x_2\ x_3].\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 2\ [-7\ -2\ 7].\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 16 = 0$$

3.ĐỊNH LÍ

Qua một phép biến đổi afin, một siêu mặt bậc hai biến thành một siêu mặt bậc hai.

Chứng minh

Giả sử ta có siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^* A[x] + 2\ [a]^*\ [x] + a_o = 0 \qquad (2)$$

và một phép biến đổi afin f có phương trình

$$[x] = B[x'] + [b] \ \ (\text{với } \det B \neq 0) \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có :

$$(B[x'] + [b])^*A(B[x'] + [b]) + 2[a]^*\ (B[x'] + [b]) + a_o = 0$$

Khai triển phương trình trên với chú ý rằng $[x']^*B^*A[b] = [b]^*AB[x']$ (vì hai vế của đẳng thức này là những ma trận vuông cấp 1 nên chuyển vị của nó bằng chính nó) ta sẽ có :

$$[x']^*A'[x'] + 2[a']^*[x'] + a'_o = 0 \qquad (4)$$

trong đó : $A' = B^*AB$

$$[a'] = B^* (A[b] + [a])$$

$$a'_o = [b]^*A[b] + 2 [a]^* [b] + a_o$$

Ta có $A' = A'^*$ vì $B^*AB = (B^*AB)^*$ và hạng của A' bằng hạng của B^*AB nghĩa là bằng hạng của A (≥ 1) do det $B \neq 0$.

Vậy (4) cũng là phương trình của một siêu mặt bậc hai (S'), đó chính là ảnh của siêu mặt bậc hai (S) qua phép afin f đã cho.

4. GIAO CỦA SIÊU MẶT BẬC HAI VỚI ĐƯỜNG THẲNG

Trong $\mathbf{A}^n$ cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0 \qquad (2)$$

và đường thẳng (d) đi qua điểm $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ có không gian chỉ phương một chiều sinh ra bởi vectơ $\vec{c}(c_1, c_2, ..., c_n)$. Khi đó ta có phương trình tham số của đường thẳng (d) là :

$$x_i = b_i + c_i\, t \quad \text{với } i = 1,2,..., n.$$

Viết phương trình (d) dưới dạng ma trận ta có :

$$[x] = [b] + [c]\, t \qquad (5)$$

Các giao điểm của siêu mặt bậc hai (S) với đường thẳng (d) sẽ có tọa độ thỏa mãn cả phương trình (2) và phương trình (5). Thay (5) vào (2) ta có :

$$([b] + [c]t)^*A([b] + [c]t) + 2[a]^* ([b] + [c]t) + a_o = 0$$

Khai triển đẳng thức này ta có :

$$\boxed{[c]^*A[c].t^2 + 2\,Pt + Q = 0} \qquad (6)$$

trong đó $P = [b]^*A[c] + [a]^*[c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_ic_j + \sum_{i=1}^{n} a_ic_i$

$$Q = [b]^*A[b] + 2[a]^*[b] + a_o = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_o$$

Nếu t_o là nghiệm của phương trình (6) thì bằng cách thay t_o vào (5), ta tìm được tọa độ của giao điểm. Ta xét các trường hợp sau :

*) Nếu $[c]^*A[c] \neq 0$ thì (6) là một phương trình bậc hai đối với t, khi đó nó có thể có hai nghiệm phân biệt hoặc một nghiệm kép hoặc vô nghiệm (xét trên trường số thực). Như vậy đường thẳng sẽ cắt siêu mặt bậc hai tại hai điểm phân biệt hoặc tại một điểm (mà ta sẽ gọi nó là điểm kép) hoặc không cắt. Trường hợp đường thẳng cắt siêu mặt bậc hai tại một điểm kép, đường thẳng đó trở thành tiếp tuyến của siêu mặt bậc hai tại điểm tiếp xúc là (điểm kép).

*) Nếu $[c]^*A[c] = 0$ và $P \neq 0$ thì phương trình (6) có nghiệm duy nhất, khi đó đường thẳng cắt siêu mặt bậc hai tại một điểm.

*) Nếu $[c]^*A[c] = 0$, $P = 0$, $Q \neq 0$ thì phương trình (6) vô nghiệm, tức là đường thẳng không cắt siêu mặt bậc hai (trên trường số thực).

*) Nếu $[c]^*A[c] = 0$, $P = 0$, $Q = 0$ thì phương trình (6) nghiệm với mọi giá trị của t. Khi đó toàn bộ đường thẳng (d) nằm trên siêu mặt bậc hai (S) và ta có $(d) \subset (S)$.

5.TÂM CỦA SIÊU MẶT BẬC HAI

a) Định nghĩa. Tâm của siêu mặt bậc hai (S) là một điểm mà khi ta chọn điểm đó làm gốc mục tiêu thì phương trình của (S) có dạng :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + a_o = 0$$

$$\Leftrightarrow \; [x]^*A[x] + a_o = 0 \quad \text{với} \quad A = [a_{ij}]$$

NHẬN XÉT. Từ định nghĩa trên ta suy ra nếu điểm M thuộc siêu mặt bậc hai (S) và (S) có tâm I thì điểm M' đối xứng của M đối với I cũng thuộc (S). Vậy nếu (S) ≠ ∅ thì tâm của nó chính là tâm đối xứng của tập (S) và tâm này là một điểm.

b) Định lí. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu đã chọn, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0 \qquad (2)$$

Điều kiện cần và đủ để (S) có tâm là det A ≠ 0 (hay hạng của ma trận vuông A bằng n). Nếu det A = 0 (hay hạng của A < n) thì (S) vô tâm (nghĩa là không có tâm hoặc vô số tâm).

Chứng minh

Giả sử O là một điểm có tọa độ là $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ đối với mục tiêu đã chọn. Ta hãy tịnh tiến mục tiêu đã chọn $\{E_o; E_i\}$ đến mục tiêu $\{O; E'_i\}$ tức là dùng công thức đổi mục tiêu :

$$[x] = [x'] + [x^o] \qquad (7)$$

trong đó $[x^o]$ là ma trận cột tọa độ của điểm O đối với $\{E_o; E_i\}$. Thay giá trị của [x] trong (7) vào phương trình của (S) ta có :

$$([x'] + [x^o])^*A([x'] + [x^o]) + 2[a]^*([x'] + [x^o]) + a_o = 0$$

hay $$[x']^*A[x'] + 2(A[x^o] + [a])[x'] + a'_o = 0$$

Điểm $O = (x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ là tâm của (S) khi và chỉ khi :

$$A[x^o] + [a] = 0$$

Như vậy tọa độ tâm của siêu mặt bậc hai (S) là nghiệm của hệ phương trình tổng quát gồm n phương trình và n nghiệm có dạng :

$$\boxed{A[x] + [a] = 0} \qquad (8)$$

trong đó A là ma trận vuông cấp n với $A = [a_{ij}]$ và [a] là ma trận cột tọa độ có trong phương trình của (S). Ta suy ra :

– Nếu det A $\neq 0$ hệ phương trình (8) nói trên có nghiệm duy nhất tức là (S) có tâm.

– Nếu det A = 0 hệ phương trình (8) vô nghiệm hoặc vô số nghiệm tức là (S) không có tâm. Nếu hạng của ma trận A bằng r thì tất cả nghiệm của (8), nếu có là các điểm thuộc một m - phẳng với m = n – r. Đây cũng là trường hợp phương trình (8) có vô số nghiệm nghĩa là (S) không có tâm.

c) Các thí dụ

α) Trong $\mathbf{A}^2$ hãy xác định tâm của đường bậc hai sau đây:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Giải

Ta có thể viết phương trình đã cho dưới dạng ma trận như sau :

$$[x\ y].\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2\,[1\ \ -2]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$$

với $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ và $[a] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Áp dụng công thức tìm tâm (8) ta có :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ -x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{8} \\ y = \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Vậy tâm của đường bậc hai (S) là điểm $O(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$.

Trong hình học giải tích ta biết đường bậc hai (S) là một đường elip nhận O làm tâm.

β)Trong $\mathbf{A}^2$ cho đường bậc hai (S) có phương trình :

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$$

Hãy tìm tâm của (S).

Giải

Ta có $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ và $[a] = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, chú ý rằng det A = 0.

Ta có phương trình tìm tâm là :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình này vô nghiệm nên đường cong (S) đã cho không có tâm. Đường cong này là đường parabol.

6. ĐIỂM KÌ DỊ CỦA SIÊU MẶT BẬC HAI

a) Định nghĩa. Một điểm I gọi là *điểm kì dị* của siêu mặt bậc hai (S) nếu I thuộc (S) và I đồng thời là tâm của (S).

b) Cách tìm điểm kì dị. Giả sử trong $\mathbf{A}^n$, siêu mặt bậc hai (S) có phương trình là:

$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0$$

Theo định nghĩa điểm kì dị có tọa độ thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} [x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0 \\ A[x] + [a] = 0 \end{cases}$$

Thí dụ trong không gian 3 chiều thông thường (cũng là một không gian afin $\mathbf{A}^3$) mặt nón tròn xoay là một mặt bậc hai có điểm kì dị là đỉnh của mặt nón đó.

Hệ quả: – Siêu mặt bậc hai có tâm là một khái niệm afin.

– Tâm của siêu mặt bậc hai cũng là một khái niệm afin.

– Điểm kì dị của siêu mặt bậc hai cũng là một khái niệm afin.

7.PHƯƠNG TIỆM CẬN VÀ ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA SIÊU MẶT BẬC HAI

a) Định nghĩa. Vectơ $\vec{c} \neq \vec{0}$ và có tọa độ $(c_1, c_2,..., c_n)$ gọi là *phương tiệm cận* của siêu mặt bậc hai (S) với phương trình (2) nếu :

$$[c]^*A[c] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = 0$$

Người ta còn gọi phương tiệm cận của siêu mặt bậc hai là *phương vô tận* của siêu mặt bậc hai đó. Đối với một siêu mặt bậc hai có tâm, một đường thẳng (t) đi qua tâm gọi là *đường tiệm cận* của siêu mặt bậc hai đó, nếu phương của nó là phương tiệm cận và nó không cắt siêu mặt bậc hai.

Ta dễ dàng chứng minh được phương tiệm cận và đường tiệm cận của siêu mặt bậc hai là những khái niệm afin tức là khái niệm bất biến qua nhóm các phép biến đổi afin.

b) Siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$

Định lí. Cho hai điểm M_1, M_2 thay đổi của một siêu mặt bậc hai (S) sao cho đường thẳng M_1M_2 có phương không đổi $\vec{c} \neq \vec{0}$ mà không phải là phương tiệm cận. Khi đó tập hợp trung điểm các đoạn thẳng M_1M_2 nằm trên một siêu phẳng (đi qua tâm nếu có của (S)). Siêu phẳng đó gọi là *siêu phẳng kính của (S) liên hợp với phương* $\vec{c}$. Ngược lại phương $\vec{c}$ cũng được gọi là *phương liên hợp* với siêu phẳng kính đó.

Chứng minh

Trong $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu đã chọn, giả sử siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

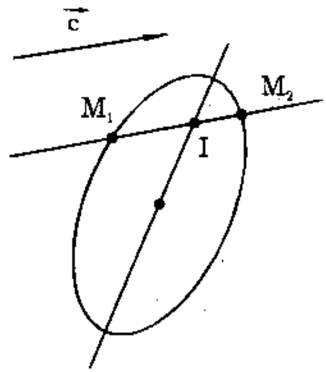
$$[x]^*A[x] + 2[a]^*[x] + a_0 = 0$$

Gọi M_1, M_2 là hai điểm thuộc (S) và $I = (b_1, b_2, ..., b_n)$ là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2. Đường thẳng M_1M_2 có phương trình tham số :

$$x_i = b_i + c_i t \quad \text{với} \quad i = 1,2, ..., n.$$

trong đó $(c_1, c_2, ..., c_n)$ là tọa độ của vectơ chỉ phương $\vec{c}$ (H.3). Để tìm tọa độ của giao điểm M_1 và M_2 ta giải phương trình (6) sau đây :

$$([c]^*A[c])t^2 + 2Pt + Q = 0 \quad (6)$$



hình 3

Gọi t_1, t_2 là nghiệm của phương trình (6) lần lượt ứng với các giao điểm M_1, M_2. Vì I là trung điểm của đoạn M_1M_2 nên :

$$\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad t_1\vec{c} + t_2\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (t_1 + t_2)\,\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \; t_1 + t_2 = 0 \qquad \text{vì } \vec{c} \neq \vec{0}.$$

Vậy P = 0 hay $[b]^*A[c] + [a]^*[c] = 0$

hay $[c]^*(A[b] + [a]) = 0$

Như vậy tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng M_1M_2 thoả mãn phương trình :

$$\boxed{[c]^*(A[x] + [a]) = 0} \qquad (9)$$

Trong phương trình đó $[c]^*A \neq 0$ vì nếu $[c]^*A = 0$ thì $[c]^*A[c] = 0$ tức $\vec{c}$ là phương tiệm cận của (S), điều này trái với giả thiết. Vậy phương trình (9) là phương trình của một siêu phẳng.

Vì tâm của (S) có tọa độ thoả mãn phương trình $A[x] + [a] = 0$ nên cũng thỏa mãn phương trình (9) nói trên.

Vậy nếu siêu mặt bậc hai (S) có tâm thì siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$ nào đó sẽ đi qua tâm của siêu mặt bậc hai đó.

c) Các thí dụ

Thí dụ 1 : Trong $\mathbf{A}^2$ hãy tìm phương tiệm cận của đường bậc hai (S') có phương trình đối với một mục tiêu afin cho trước là:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Giải

Muốn tìm phương tiệm cận của một siêu mặt bậc hai (S) ta chỉ việc cho phần bậc hai trong phương trình của (S) triệt tiêu. Ta có $[x]^*A[x] = 0$. Khi đó tập hợp tất cả những vectơ $\vec{x}$ có toạ độ nghiệm phương trình này là những vectơ chỉ phương tiệm cận của (S). Do đó :

Phương tiệm cận của đường bậc hai (S') có phương trình $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ được cho bởi phương trình $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$.

Đặt $k = \dfrac{y}{x}$ ta có $3k^2 - 2k + 3 = 0$. Phương trình này vô nghiệm. Vậy đường bậc hai (S') không có phương tiệm cận (S' là đường elip).

Thí dụ 2 : Trong $\mathbf{A}^2$ cho đường cong (G) có phương trình đối với mục tiêu afin cho trước là $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.

Tìm phương tiệm cận của G.

Giải

Phương tiệm cận của đường bậc hai (G) xác định bởi nghiệm của phương trình :

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

Đặt $\lambda = \frac{y}{x}$ ta có :

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Ta có 2 nghiệm $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Vậy đường bậc hai (G) có hai phương tiệm cận trùng nhau, hay nói cách khác đường cong G chỉ có 1 phương tiệm cận với vectơ chỉ phương $\vec{c} = (1,1)$.

Thí dụ 3. Trong $\mathbf{A}^3$ với một mục tiêu afin cho trước cho mặt bậc hai (. //) có phương trình $x^2 + 3y^2 - z^2 + 5x + 2y - 9 = 0$.

Tìm phương tiệm cận của mặt bậc hai (. //).

Giải

Phương tiệm cận của (. //) được xác định bởi phương trình:

$$x^2 + 3y^2 - z^2 = 0 \qquad (*)$$

Đây là phương trình của mặt nón bậc hai thực đỉnh O là gốc tọa độ. Siêu mặt bậc hai (. //) có vô số phương tiệm cận $\vec{c} = (x, y, z)$ mà tọa độ của vectơ đó thỏa mãn phương trình

$x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$. Thí dụ ta có thể chọn vectơ $\overrightarrow{c_1} = (1,1,2)$ làm vectơ chỉ phương cho 1 đường sinh của nón này. Các vectơ cộng tuyến với $\overrightarrow{c_1}$ có dạng $k\overrightarrow{c_1}$ với $k \neq 0$ đều là vectơ chỉ phương của đường sinh đó. Ngoài ra ta có thể chọn vô số vectơ $\overrightarrow{c_i}$ khác có tọa độ thỏa mãn phương trình (*) ở trên.

Thí dụ 4. Trong $\mathbf{A}^3$ cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình đối với một mục tiêu cho trước là :

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$$

và phương $\vec{c} = (1,2,3)$. Tìm siêu phẳng kính của (S) liên hợp với $\vec{c}$ đã cho.

Hãy chứng tỏ siêu phẳng này đi qua tâm của siêu mặt bậc hai (S).

Giải

Áp dụng công thức (9) ta có phương trình của siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c} = (1,2,3)$ đối với siêu mặt bậc hai cho trước là:

$$[1\ 2\ 3]\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta có phương trình siêu phẳng kính liên hợp với $\vec{c}$ là :

$$-7x - 8y - 5z + 10 = 0$$

hay $\quad 7x + 8y + 5z - 10 = 0$

Tâm của siêu mặt bậc hai (S) là điểm O có tọa độ (x,y,z) thỏa mãn hệ phương trình:

$A[x] + [a] = 0$, cụ thể là :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z - 7 = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 2 = 0 \\ -4x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ta nhận thấy tọa độ tâm O(1,1, −1) nghiệm phương trình của siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$, nghĩa là siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$ đi qua tâm O của (S).

8.DẠNG CHUẨN TẮC CỦA SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG A^n

a) Đặt vấn đề. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ một siêu mặt bậc hai (S) có phương trình tổng quát là :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0 \qquad (1)$$

Nếu phương trình đó có mặt đầy đủ mọi yếu tố thì ta thấy rằng :

– số lượng các hệ số a_{ij} là $\frac{n^2+n}{2}$

– số lượng các hệ số a_i là n

– số lượng số hạng tự do a_o là 1

Như vậy phương trình tổng quát của một siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^n$ có thể chứa $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ số, do đó việc nghiên cứu chúng sẽ gặp nhiều khó khăn. Bây giờ chúng ta hãy tìm một mục tiêu khác mà đối với nó phương trình của (S) sẽ đơn giản hơn.

b) Phép biến đổi. Gọi $\overrightarrow{\mathbf{A}^n}$ là không gian vectơ liên kết với $\mathbf{A}^n$ và $\{\overrightarrow{e_i}\} = \overrightarrow{E_oE_i}$ (i =1,2,...,n) là cơ sở của $\overrightarrow{\mathbf{A}^n}$. Ta biết rằng nếu $(x_1, x_2,..., x_n)$ là tọa độ của điểm $X \in \mathbf{A}^n$ đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ thì đó cũng là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{E_oX}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$. Khi đó $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ chính là một dạng toàn phương. Trong đại số tuyến tính ta biết rằng có thể tìm được một cơ sở $\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2},...,\overrightarrow{e'_n}\}$ trong không gian vectơ $\overrightarrow{\mathbf{A}^n}$ sao cho dạng toàn phương trên đối với cơ sở đó trở thành chuẩn tắc tức là có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \qquad \text{với } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ hoặc } \varepsilon_i = 0.$$

Như vậy là ta đã thực hiện phép đổi cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ thành cơ sở $\{\overrightarrow{e'_i}\}$ trong đó $\overrightarrow{E_oE'_i} = \overrightarrow{e'_i}$ với i = 1,2,..., n và ta có công thức:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j \qquad \text{với } i = 1,2,\ldots, n \qquad (2)$$

Trong $\mathbf{A}^n$ ta xem (2) như là một phép đổi mục tiêu (giữ nguyên gốc mục tiêu) và khi đó phương trình của (S) có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i + a'_o = 0 \qquad (3)$$

trong đó các $\varepsilon_i = \pm 1$ hoặc $\varepsilon_i = 0$. Vì các a_{ij} không đồng thời bằng 0 nên phải có những $\varepsilon_i \neq 0$. Ta giả sử rằng :

$\varepsilon_i \neq 0$ với $i = 1,2,\ldots,r \quad (1 \leq r \leq n)$

$\varepsilon_j = 0$ với $j = r+1, r+2, \ldots, n$

Ta luôn luôn có thể giả thiết như vậy vì nếu chẳng hạn $\varepsilon_1 = 0$ và $\varepsilon_{r+1} \neq 0$ thì ta chỉ cần dùng phép đổi tọa độ :

$x''_1 = x'_{r+1}$, $x''_{r+1} = x'_1$ còn $x''_i = x'_i$ với $i \neq 1$ và $i \neq r+1$.

Dùng phép đổi mục tiêu :

$$\begin{cases} X_i = x'_i + \varepsilon_i a_i & , i = 1,2,\ldots,r \\ X_j = x'_j & , j = r+1,\ldots, n \end{cases}$$

ta đưa phương trình (3) trở nên :

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 + 2\sum_{i=r+1}^{n} a'_i X_i + a''_0 = 0 \qquad (4)$$

$$\varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \leq r \leq n$$

i) Nếu trong phương trình (4) có $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \ldots = a'_n = 0$ và $a''_o \neq 0$ thì bằng cách đặt $\lambda_i = \frac{\varepsilon_i}{a''_o}$, $i = 1,2,\ldots,r$ ta được :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i^2 = 1\,, \qquad 1 \leq r \leq n \qquad (5)$$

Sau đó dùng phép đổi mục tiêu :

$$\begin{cases} X'_i = \sqrt{\lambda_i}\, X_i & \text{nếu} \quad \lambda_i > 0 \\ X'_j = \sqrt{-\lambda_j}\, X_j & \text{nếu} \quad \lambda_j < 0 \\ X'_k = X_k & \text{nếu} \quad r < k < n \end{cases}$$

Khi đó phương trình (5) có dạng :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i'^2 = 1} \qquad (6)$$

$\lambda_i = \pm 1$ và $1 \leq r \leq n$

ii) Nếu trong phương trình (4) có $a'_{r+1} = a'_{r+2} = \ldots = a'_n = 0$ và $a''_o = 0$ thì ta được phương trình của (S) là :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 = 0} \qquad (7)$$

$\varepsilon_i = \pm 1$, $1 \leq r \leq n$

iii) Nếu trong phương trình (4) có ít nhất một hệ số $a'_i \neq 0$ chẳng hạn $a'_{r+1} \neq 0$, ta dùng phép đổi mục tiêu :

$$\begin{cases} X'_{r+1} = -\sum_{j=r+1}^{n} a'_j X_j - \dfrac{b}{2} \\ X'_i = X_i & \text{với } i \neq r+1 \end{cases}$$

ta đưa phương trình (4) về dạng :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i'^2 = 2X'_{r+1}} \qquad \text{với } 1 \leq r \leq n-1 \quad (8)$$

Như vậy ta đưa phương trình của (S) về một trong ba dạng (6), (7), (8). Tóm lại ta đã chứng minh được định lí sau đây :

c) Định lí. Bằng cách chọn mục tiêu tọa độ thích hợp, mọi siêu mặt bậc hai (S) trong không gian $\mathbf{A}^n$ đều có phương trình thuộc một trong ba dạng sau đây :

$$\text{(I)} \;:\; \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x_i^2 = 1 \qquad , \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \le r \le n$$

$$\text{(II)} \;:\; \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x_i^2 = 0 \qquad , \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \le r \le n$$

$$\text{(III)} \;:\; \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i x_i^2 = 2x_{r+1} \qquad , \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \le r \le n-1$$

Ba dạng trên gọi là *phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai* trong $\mathbf{A}^n$. Các dạng chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai nêu trong định lí trên có thể viết cụ thể như sau :

$$\text{Dạng (I): } \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 1 \\ \text{với } 1 \le r \le n \text{ và } 0 \le k \le r \end{cases}$$

$$\text{Dạng (II): } \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 0 \\ \text{với } 1 \le r \le n \text{ và } 0 \le k \le \dfrac{r}{2} \end{cases}$$

Trong phương trình dạng II ta lấy $0 \le k \le \frac{r}{2}$ vì nếu $k > \frac{r}{2}$ thì bằng cách nhân hai vế của phương trình đó với -1 ta được một phương trình mà số các hệ số -1 bé hơn $\frac{r}{2}$

$$\text{Dạng (III): } \begin{cases} -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 2x_{r+1} \\ \text{với } 1 \le r \le n-1 \text{ và } 0 \le k \le \dfrac{r}{2} \end{cases}$$

Cùng một lí do tương tự như đối với phương trình dạng II nên trong phương trình dạng III ta lấy $0 \le k \le \frac{r}{2}$

9. SỰ PHÂN LOẠI AFIN CÁC SIÊU MẶT BẬC HAI

a) Định nghĩa. Hai siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^n$ gọi là *cùng loại* nếu phương trình chuẩn tắc của chúng có cùng một dạng (dạng I hoặc II hoặc III) cùng với một giá trị k và r như nhau.

Nói cách khác hai siêu mặt bậc hai gọi là *cùng loại* nếu phương trình chuẩn tắc của chúng hoàn toàn giống nhau.

b) Nhận xét. Muốn cho định nghĩa trên có cơ sở ta phải chứng minh rằng : một siêu mặt bậc hai (S) không thể thuộc hai loại khác nhau.

Thật vậy nếu siêu mặt bậc hai có phương trình dạng (I) thì tâm của (S) không thuộc (S) ; nếu (S) có phương trình dạng (II) thì mọi tâm của (S) đều thuộc (S) ; còn nếu (S) có dạng (III) thì (S) không có tâm. Bởi vậy phương trình của (S) chỉ là một trong ba dạng chuẩn tắc đó.

Bây giờ ta xét hai phương trình có cùng một dạng chuẩn tắc nhưng thuộc hai loại khác nhau, tức là chúng khác nhau bởi r hoặc k. Nhưng r chính là hạng, còn k là chỉ số âm quán tính của dạng toàn phương trong phương trình đó, nên chúng đều là những bất biến qua phép biến đổi tọa độ. Bởi vậy hai phương trình đó không thể là phương trình chuẩn tắc của cùng một siêu mặt bậc hai (S) được.

c) Định lí. Hai siêu mặt bậc hai gọi là *tương đương afin* (tức là có phép afin biến siêu mặt bậc hai này thành siêu mặt bậc hai kia) khi và chỉ khi chúng cùng thuộc một loại.

Nói cách khác, sự phân loại các siêu mặt bậc hai nêu trong định nghĩa nêu trên là một sự phân loại afin.

Chứng minh

Giả sử có hai siêu mặt bậc hai (S) và (S') cùng thuộc một loại. Điều đó có nghĩa là có hai mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E'_i\}$ sao cho phương trình của (S) đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và phương trình của (S') đối với mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ là những phương trình chuẩn tắc hoàn toàn giống nhau. Bây giờ gọi f là phép afin của $\mathbf{A}^n$ sao cho $f(E_i) = E'_i$ với $i = 0,1,2,...,n$ và phép biến đổi tuyến tính liên kết của nó là $\varphi : \overrightarrow{\mathbf{A}^n} \to \overrightarrow{\mathbf{A}^n}$ biến vectơ $\overrightarrow{E_oE_i}$ của cơ sở $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$ thành vectơ $\overrightarrow{E'_oE'_i}$ của cơ sở $\{\overrightarrow{E'_oE'_i}\}$ với i = 1,2,..., n. Từ đó suy ra f sẽ biến (S) thành siêu mặt bậc hai mà phương trình của f(S) đối với mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ giống như phương trình của (S) đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$. Vậy f biến (S) thành (S').

Ngược lại, giả sử có hai siêu mặt bậc hai (S) và (S') tương đương afin, tức là có phép afin f sao cho f(S) = (S'). Ta gọi $\{E_o;E_i\}$ là mục tiêu sao cho đối với nó, phương trình của (S) có dạng chuẩn tắc và gọi $E'_i = f(E_i)$ với i = 0,1,...,n. Khi đó phương trình của (S') đối với mục tiêu $\{E'_o;E'_i\}$ hoàn toàn giống phương trình chuẩn tắc của (S). Vậy (S) và (S') cùng loại và định lí đã được chứng minh.

d) Phân loại afin các siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^2$. Trong không gian afin $\mathbf{A}^2$ siêu mặt bậc hai còn được gọi là đường bậc hai và có phương trình tổng quát là :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_o = 0$$

Dựa vào phương trình chuẩn tắc của chúng ta có các loại đường bậc hai sau đây và tên gọi tương ứng :

1) $x_1^2 + x_2^2 = 1$: đường elip.
2) $-x_1^2 + x_2^2 = 1$: đường hypebol.
3) $-x_1^2 - x_2^2 = 1$: đường elip ảo.
4) $x_1^2 + x_2^2 = 0$: cặp đường thẳng ảo cắt nhau.
5) $-x_1^2 + x_2^2 = 0$: cặp đường thẳng cắt nhau.
6) $x_1^2 = 2x_2$: đường parabol
7) $x_1^2 = 1$: cặp đường thẳng song song
8) $-x_1^2 = 1$: cặp đường thẳng ảo song song
9) $x_1^2 = 0$: cặp đường thẳng trùng nhau.

Như vậy trong $\mathbf{A}^2$ có 9 loại đường bậc hai khác nhau.

e) Phân loại afin các siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^3$. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ các siêu mặt bậc hai còn được gọi là mặt bậc hai và có phương trình tổng quát là :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_1x_1 + + 2a_2x_2 + 2a_3x_3 + a_o = 0$$

Có 17 loại mặt bậc hai khác nhau sau đây cùng với phương trình chuẩn tắc và tên gọi tương ứng :

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$: mặt elipxoit.
2) $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$: mặt hypeboloit một tầng .
3) $-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1$: mặt hypeboloit hai tầng.
4) $-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$: mặt elipxoit ảo.
5) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$: mặt nón ảo.
6) $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$: mặt nón.
7) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$: mặt paraboloit eliptic.
8) $-x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$: mặt paraboloit hypebolic (hoặc mặt yên ngựa)
9) $x_1^2 + x_2^2 = 1$: mặt trụ eliptic.
10) $-x_1^2 + x_2^2 = 1$: mặt trụ hypebolic.
11) $-x_1^2 - x_2^2 = 1$: mặt trụ eliptic ảo.
12) $x_1^2 + x_2^2 = 0$: cặp mặt phẳng ảo cắt nhau.
13) $-x_1^2 + x_2^2 = 0$: cặp mặt phẳng cắt nhau.
14) $x_1^2 - 2x_2 = 0$: mặt trụ parabolic
15) $x_1^2 = 1$: cặp mặt phẳng song song
16) $-x_1^2 = 1$: cặp mặt phẳng ảo song song
17) $x_1^2 = 0$: cặp mặt phẳng trùng nhau.

10. MẶT KẺ BẬC HAI TRONG $\mathbf{A}^2$

a) Định nghĩa. Trong $\mathbf{A}^2$ một mặt bậc hai sẽ gọi là *mặt kẻ* nếu qua bất kì điểm nào cũng có ít nhất một đường thẳng nằm hoàn toàn trên mặt đó.

Như vậy mặt kẻ là mặt tạo nên bởi một tập hợp các đường thẳng. Mỗi đường thẳng của tập hợp ấy gọi là một *đường sinh* *thẳng* của mặt kẻ.

Từ định nghĩa trên ta thấy ngay rằng các mặt nón bậc hai, các mặt trụ bậc hai, các cặp mặt phẳng là những mặt kẻ bậc hai.

Ngoài ra người ta còn thấy rằng mặt hypeboloit một tầng mà phương trình chuẩn tắc là $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ và mặt paraboloit hypebolic (tức là mặt yên ngựa) với phương trình chuẩn tắc là $-x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ cũng là những mặt kẻ bậc hai. Đây là hai mặt kẻ bậc hai đặc biệt và ta sẽ nghiên cứu chi tiết về chúng. Cần chú ý rằng trong phương trình chuẩn tắc của hai mặt kẻ nói trên, vị trí và vai trò của các tọa độ x_1, x_2, x_3 có thể đổi chỗ cho nhau mà vẫn không làm thay đổi tính chất cơ bản của các mặt kẻ bậc hai đó.

b)Mặt kẻ hypeboloit một tầng

Mặt kẻ này có phương trình chuẩn tắc là :

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 = 1 - x_3^2$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = (1 + x_3)(1 - x_3)$$

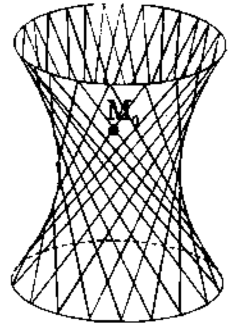
Ta hãy xét các đường thẳng d và d' có phương trình trong $\mathbf{A}^2$

$$d \begin{cases} p(x_2 + x_1) = q(1 + x_3) \\ q(x_2 - x_1) = p(1 - x_3) \end{cases} \qquad (2)$$

$$d' \begin{cases} p'(x_2 + x_1) = q'(1 - x_3) \\ q'(x_2 - x_1) = p'(1 + x_3) \end{cases} \qquad (3)$$

Nếu nhân hai phương trình xác định đường thẳng d hay d' thì ta được phương trình của mặt bậc hai hypeboloit một tầng với bất kì giá trị nào của p,q và p', q' không đồng thời bằng 0.Do đó nếu điểm M có các tọa độ (x_1,x_2,x_3) thỏa mãn phương trình của đường thẳng d hay của đường thẳng d' thì các toạ độ ấy cũng thỏa mãn phương trình của hypeboloit một tầng. Bởi vậy các đường thẳng d và d' nằm hoàn toàn trên hypeboloit một tầng (H.4).

Nếu cho các tham số p,q, p', q' lấy mọi giá trị có thể được thì ta nhận được tất cả các đường sinh thẳng của hypeboloit một tầng. Với cặp tham số (p,q) hoặc cặp tham số (p', q') sẽ cho ta một họ đường sinh thẳng.



hình 4

Thí dụ. Lập phương trình đường sinh thẳng của mặt hypeboloit một tầng đi qua điểm $M_o(1, -1, 1)$ thuộc mặt đó (H.4).

Giải

Ta xét họ các đường thẳng d và d' có phương trình (2) và (3) như trên. Muốn tìm p,q, p', q' ta thay tọa độ của M vào trong phương trình của d và d'. Thay tọa độ của $M_o(1, -1, 1)$ vào phương trình của d ta có :

$$\begin{cases} p(-1+1) = q(1+1) \\ q(-1-1) = p(1-1) \end{cases} \qquad \Rightarrow (p,q) = (1,0)$$

Chú ý rằng các hệ số p,q có thể xác định sai khác nhau một hệ số tỉ lệ. Thay các giá trị của p và q vào trong phương trình (2) ta được phương trình của đường thẳng d_o đi qua điểm M_o là :

$$d_o: \begin{cases} x_2 + x_1 = 0 \\ 1 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Thay tọa độ của $M_o(1, -1, 1)$ vào phương trình của d' ta có :

$$\begin{cases} p'(-1+1) = q'(1-1) \\ q'(-1-1) = p'(1+1) \end{cases} \qquad \Rightarrow (p', q') = (1, -1)$$

Thay giá trị của p' và q' vào trong phương trình (3) ta được phương trình của đường thẳng d'_o đi qua điểm M_o là :

$$d'_o \quad \begin{cases} x_2 + x_1 = -1 + x_3 \\ -x_2 + x_1 = 1 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

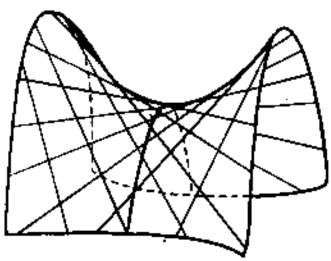
Vậy ta tìm được phương trình của hai đường sinh thẳng (mỗi đường thuộc một họ đường sinh thẳng) đi qua điểm $M_o(1, -1,1)$ là :

$$d_o: \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad d'_o: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

c)Mặt kẻ paraboloit hypebolic. Người ta còn gọi mặt bậc hai này là mặt yên ngựa vì hình dáng của nó giống chiếc yên ngựa (H.5). Mặt kẻ này có phương trình chuẩn tắc là :

$$-x_1^2 + x_2^2 = 2x_3 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = 2x_3$$



hình 5

Lập luận tương tự như đối với mặt hypeboloit một tầng, mặt này có hai họ đường sinh thẳng xác định bởi các hệ phương trình sau :

$$d: \begin{cases} p(x_2 + x_1) = q\,x_3 \\ q(x_2 - x_1) = 2p \end{cases} \qquad (5)$$

$$d' \begin{cases} p'(x_2 + x_1) = 2q' \\ q'(x_2 - x_1) = p'x_3 \end{cases} \qquad (6)$$

Thí dụ : Lập phương trình đường sinh thẳng của mặt paraboloit hypebolic $-x_1^2 + x_2^2 = 2x_3$ đi qua điểm $N_o(0,2,2)$ thuộc mặt đó.

Giải

Ta xét họ các đường thẳng d và d' có phương trình (5) và (6) như trên. Thay tọa độ của $N_o(0,2,2)$ vào phương trình của d ta có :

$$d : \begin{cases} p\,(2+0) = 2q \\ q\,(2-0) = 2p \end{cases} \Rightarrow (p,q) = (1,1)$$

Thay các giá trị của p và q vào trong phương trình (5) ta được phương trình của đường thẳng d_o đi qua điểm N_o là :

$$d_o : \begin{cases} x_2 + x_1 = x_3 \\ x_2 - x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Thay tọa độ của $N_o(0,2,2)$ vào phương trình của d' ta có :

$$d' : \begin{cases} p'(2+0) = 2q' \\ q'(2-0) = 2p' \end{cases} \Rightarrow (p', q') = (1,1)$$

Thay các giá trị của p' và q' vào phương trình (6) ta được phương trình của đường thẳng d'_o đi qua điểm N_o là :

$$d'_o : \begin{cases} x_2 + x_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy mặt kẻ paraboloit hypebolic đã cho có hai đường sinh thẳng đi qua điểm $N_o(0,2,2)$ có phương trình là :

$$d_o : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad d'_o : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Trong kĩ thuật xây dựng người ta đã sử dụng các kiến thức về các đường sinh thẳng của mặt hypeboloit để xây các tháp nước, tháp vô tuyến truyền hình hoặc giá đỡ các vật nặng.

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN AFIN VÀ HÌNH HỌC AFIN

§1,§2.

1.1. Chứng minh rằng trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ một hệ m+1 điểm $A_o, A_1, \ldots, A_m$ là độc lập khi và chỉ khi với mọi điểm O bất kì, từ đẳng thức

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{OA}_i = \vec{0} \quad \text{và} \qquad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$$

ta suy ra $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

1.2. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ cho một hình hộp ABCDA'B'C'D' có AA'// BB'// CC'// DD'. Ta chọn mục tiêu afin $\{E_o;E_1,E_2,E_3\}$ như sau : $E_o \equiv A$, $E_1 \equiv A'$, $E_2 \equiv B$, $E_3 \equiv D$. Hãy tìm tọa độ afin của các đỉnh còn lại và tọa độ tâm của các mặt bên của hình hộp.

1.3. Tìm công thức đổi mục tiêu từ $\{E_o;E_i\}$ sang $\{E'_o;E'_i\}$ khi biết tọa độ của điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ là $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.4. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho hình bình hành ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Tìm công thức đổi mục tiêu khi chọn mục tiêu cũ là {A;B,D} và mục tiêu mới là {O;B,C}.

1.5. Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC có trọng tâm G. Tìm công thức đổi mục tiêu khi chọn mục tiêu cũ là {A;B,C} và mục tiêu mới là {G;B,C}. Áp dụng công thức đổi mục tiêu hãy tìm tọa độ mới của trung điểm các cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC.

1.6. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 thuộc một mặt phẳng afin là với một điểm P tuỳ ý ta có :

$$\alpha_1 \overrightarrow{PA}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{PA}_2 + \alpha_3 \overrightarrow{PA}_3 + \alpha_4 \overrightarrow{PA}_4 = \vec{0}$$

với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ trong đó ít ra có một $\alpha_i \neq 0$.

1.7. Trong mặt phẳng afin cho mục tiêu $R = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$. Đối với mục tiêu này cho các điểm O'(2, – 3), A(1,1), B(3, – 6), M(5, –1). Hãy tìm tọa độ của M đối với mục tiêu afin {O';A,B}.

1.8. Cho hình bình hành ABCD trong mặt phẳng với mục tiêu afin {A;B,D}. Đối với mục tiêu này giả sử cho điểm M có tọa độ là (α,β). Hãy tính tọa độ của điểm M đối với các mục tiêu sau :

a) {C;B,D}, b) {B;C,A}, c) {D;C,A}

§3

1.9. Chứng minh rằng có một và chỉ một (m+1)-phẳng đi qua một điểm cho trước và qua một m-phẳng cho trước và không chứa điểm đó.

1.10. Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của m-phẳng P đi qua các điểm E_o, E_1, ..., E_m (m< n) của mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và của phẳng Q xác định bởi các phẳng còn lại

của mục tiêu. Xét trường hợp m = n.

1.11. Cho mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ và gọi $(k_o, k_1, ..., k_m)$ là một tập hợp con của {0,1,2, ...,n} (m< n). Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của m–phẳng đi qua các điểm $E_{k_0}, E_{k_1}, ..., E_{k_m}$.

1.12. Trong $\mathbf{A}^4$ viết phương trình tổng quát của m-phẳng có số chiều bé nhất chứa điểm M(–1,0,2,2) và có phương chứa các vectơ $\vec{a}(2,1,4,4)$, $\vec{b}(0,0,7,7)$.

1.13. Trong $\mathbf{A}^4$ viết phương trình tổng quát của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các điểm $M_1(1,1,-3,-2)$, $M_2(-2,0,0,0)$, $M_3(1,2,0,-1)$,và có phương chứa các phương $\vec{a}(3,3,1,0)$, $\vec{b}(1,1,1,0)$.

1.14. Trong $\mathbf{A}^5$ viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của mặt phẳng P đi qua ba điểm (2, –1,3,4,0), (–1,1,0,1,5), (1, 2, 7, 6, 1) và viết phương trình tổng quát của mặt phẳng P' song song với P đồng thời đi qua điểm M(0,0,1,2,3).

1.15. Viết phương trình tham số của cái phẳng cho bởi phương trình tổng quát sau đây trong $\mathbf{A}^5$:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 - 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 - 6 = 0 \end{cases}$$

1.16. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 trong không gian afin $\mathbf{A}^4$. Đường thẳng d_1 đi qua $A(1,0,-2,1)$ có phương $\vec{a}(1,2,-1,-3)$ và đường thẳng d_2 đi qua $B(0,1,1,-1)$ có phương $\vec{b}(2,3,-2,-4)$.

Viết phương trình của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng đó.

1.17. Trong không gian $\mathbf{A}^4$:

a) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của cái phẳng có số chiều bé nhất chứa hai đường thẳng d_1, d_2 cho bởi phương trình của chúng sau đây :

$$d_1 : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 2 + t \\ x_3 = 3 + t \\ x_4 = 4 + t \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_4 - 3 = 0 \end{cases}$$

b) Cho hai điểm $A(1,3,-1,2)$, $B(-1,-2,1,3)$. Hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ.

1.18. Trong $\mathbf{A}^4$ xét vị trí tương đối của hai cái phẳng P và Q cho bởi phương trình của chúng sau đây :

$$P: \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 7 = 0 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$Q: \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 14 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10 = 0 \end{cases}$$

1.19. Trong $\mathbf{A}^5$ xét vị trí tương đối của hai cái phẳng P và Q sau đây :

$$P: x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

$$Q: \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

1.20. Cho tập $M = \{A_o, A_1, ..., A_m\}$ gồm m +1 điểm độc lập của không gian afin $\mathbf{A}^n$. Gọi N và N' là hai tập con không rỗng và không giao nhau của M. Chứng minh rằng có hai cái phẳng A và A' chéo nhau lần lượt chứa N và N'.

1.21. Chứng minh rằng nếu hai cái phẳng A^p và A^q song song với phẳng A^r thì giao $A^p \cap A^q$ nếu có là cái phẳng song song với A^r.

1.22. Cho hai siêu phẳng A và A' cắt nhau. Nếu $A \cap A'$ song song với siêu phẳng α thì $\alpha \cap A$ và $\alpha \cap A'$ (nếu có) sẽ song song với nhau.

1.23. Cho hai cái phẳng A^p và A^q $(p \leq q)$ của không gian afin $\mathbf{A}^n$ có hệ phương trình tổng quát là :

$$A^p: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0 \quad \text{với } i = 1,2,....,n - p$$

$$A^q: \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + d_i = 0 \quad \text{với } i = 1,2,....,n - q$$

Chứng minh rằng A^p cùng phương với A^q khi và chỉ khi hệ phương trình :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = 0 \quad \text{với } i = 1,2,...,n - p$$

là hệ quả của hệ phương trình :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad \text{với } i = 1,2,....,n - p$$

1.24. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$, với mục tiêu afin cho trước, hãy tìm giao điểm của đường thẳng AB với các siêu phẳng tọa độ, biết rằng :

a) $A(4,3,-1,2)$, $B(-1,-2,1,5)$

b) $A(1,-1,2,-2)$, $B(3,2,-3,1)$

1.25. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$ với mục tiêu afin đã chọn hãy xét vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD cho biết :

a) $A(4,0,-1,2)$, $B(0,3,2,1)$, $C(1,-1,-1,0)$, $D(2,-1,-4,-5)$

b) $A(-2,2,-2,2)$, $B(7,-1,7,-1)$, $C(-1,2,3,-4)$, $D(5,-1,-3,11)$

1.26. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho m-phẳng A^m và một điểm B không thuộc m–phẳng đó. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một m–phẳng chứa điểm B và song song với m–phẳng A^m đã cho.

§4,§5

1.27. Cho k điểm $M_1,M_2,\ldots,M_k$ của không gian afin $\mathbf{A}^n$ và $m_1, m_2,\ldots,m_k$ là k số thuộc trường **K** thỏa mãn điều kiện $m_1+m_2+\ldots+m_k \neq 0$.

Với một điểm S tùy ý của $\mathbf{A}^n$ ta xác định được một điểm G duy nhất gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1,M_2,\ldots,M_k$ ứng với họ hệ số $m_1,m_2,\ldots,m_k$ sao cho :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{m_1\overrightarrow{SM_1} + m_2\overrightarrow{SM_2} + \ldots + m_k\overrightarrow{SM_k}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$$

Chứng minh rằng khi đó ta có hệ thức :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + \ldots + m_k\overrightarrow{GM_k} = \vec{0}$$

1.28. Trong $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin đã chọn, giả sử k điểm $M_1,M_2,\ldots,M_k$ có tọa độ là :

$M_i = (x^i_1, x^i_2, \ldots\ldots, x^i_n)$ với $i = 1,2,\ldots,k$

và tâm tỉ cự G có tọa độ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ thỏa mãn hệ thức

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + \dots + m_k\overrightarrow{GM_k} = \vec{0}$$

với $\qquad m_1+m_2+\dots+m_k \neq 0$.

Chứng minh rằng:

$$X_j = \frac{m_1x_j^1 + m_2x_j^2 + \dots + m_kx_j^k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$$

1.29. Cho m–phẳng α xác định bởi m+1 điểm độc lập $P_0, P_1, \dots, P_m$. Chứng minh rằng α là tập hợp các tâm tỉ cự của hệ điểm đó gắn với họ các hệ số khác nhau.

1.30. Trong A^n giả sử hệ p điểm $M_1, M_2, \dots, M_p$ có G là tâm tỉ cự ứng với họ các hệ số $m_1, m_2, \dots, m_p$ với $m_1 + m_2 + \dots + m_p \neq 0$ và H là tâm tỉ cự của hệ điểm $M_1, M_2, \dots, M_k$ với $k < p$, là hệ con của hệ điểm đã cho, ứng với các hệ số $m_1, m_2, \dots, m_k$ với $m_1 + m_2 + \dots + m_k \neq 0$.

Chứng minh rằng tâm tỉ cự G nói trên trùng với tâm tỉ cự C của hệ điểm $(H, M_{k+1}, M_{k+2}, \dots, M_p)$ ứng với các hệ số

$$\left(\sum_{j=1}^{k} m_j, m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_p\right) \text{ với } \sum_{j=1}^{k} m_j + m_{k+1} + m_{k+2} + \dots + m_p \neq 0$$

1.31. Trong A^n cho G là tâm tỉ cự các hệ điểm $(P_1, P_2, \dots, P_k)$ gắn với họ các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

a) Chứng minh rằng nếu thay tất cả các hệ số λ_i bằng $k\lambda_i$ với $k \neq 0$ thì tâm tỉ cự G nói trên không đổi.

b) Trường hợp các hệ số $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ điểm G gọi là trọng tâm của hệ điểm $P_1, P_2, \dots, P_k$. Hãy tìm trọng tâm của đoạn thẳng AB và của tam giác ABC.

1.32. Chứng minh rằng với hai điểm P và Q phân biệt tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MQ}$ với $k < 0$ là một tập lồi.

1.33. Cho một hình lồi F chứa ba điểm A,B,C không thẳng hàng. Chứng minh rằng tam giác ABC thuộc F .

1.34. Cho tỉ số đơn (ABC) $=\lambda$ nghĩa là $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Hãy chứng minh :

a) $(ABC) = \dfrac{1}{(ACB)}$

b) $(BAC) = \dfrac{(ABC)}{(ABC)-1}$

c) $(CBA) = 1 - (ABC)$.

1.35. Cho ba m–phẳng P,Q,R song song của $\mathbf{A}^n$ lần lượt cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tại P_1,Q_1,R_1 và P_2,Q_2,R_2.

Chứng minh rằng :

a) $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$

b) $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (1-p)\overrightarrow{P_1P_2} + p\overrightarrow{R_1R_2}$ trong đó $p = (P_1Q_1R_1)$

1.36. Cho ba siêu phẳng P, Q, R của $\mathbf{A}^n$ cùng đi qua một (n–2)–phẳng. Chứng minh rằng nếu P,Q,R cùng cắt hai đường thẳng song song d_1 và d_2 lần lượt tại P_1,Q_1,R_1 và P_2,Q_2,R_2 thì $(P_1Q_1R_1) = (P_2Q_2R_2)$.

1.37. Trong $\mathbf{A}^n$ cho hai siêu phẳng α và α' có phương trình lần lượt là :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d = 0$$

a) Tìm điều kiện để α và α' cắt nhau, song song, trùng nhau .

b) Chứng minh rằng phương trình tổng quát của các siêu phẳng đi qua giao $\alpha \cap \alpha'$ (nếu có) hoặc song song với α và α' (nếu $\alpha \cap \alpha' = \varnothing$) có thể viết dưới dạng :

$$\lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b) + \mu(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d) = 0$$

với λ và μ không đồng thời bằng 0. Người ta gọi đó là **phương trình của chùm siêu phẳng** xác định bởi hai siêu phẳng α và α'.

§6

1.38. Chứng minh rằng trong $\mathbf{A}^3$ cho siêu phẳng α phép chiếu song song theo phương vectơ $\vec{m}$ không thuộc phương $\vec{\alpha}$ là một ánh xạ afin.

1.39.Cho không gian afin $\mathbf{A}^n$ với mục tiêu afin $\{O;\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$.Với mỗi điểm $X = (x_1,x_2, ...,x_n)$ ta đặt tương ứng điểm $X' = (0,x_2,x_3,...,x_n)$ ta được ánh xạ $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ mà $f(X) = X'$. Chứng minh rằng f là ánh xạ afin , nó liên kết với ánh xạ tuyến tính nào ? Ảnh $f(\mathbf{A}^n)$ là tập nào ?

Hãy minh họa phép chiếu song song này trong không gian afin ba chiều .

1.40. Cho hai không gian afin **A** và **A'**. Có phải mọi ánh xạ $f: \mathbf{A} \to \mathbf{A'}$ đều là ánh xạ afin hay không ? Nếu không, hãy đặt điều kiện để ánh xạ f trở thành ánh xạ afin.

1.41. Trong không gian $\mathbf{A}^n$ cho m–phẳng **P** có phương $\mathbf{V}^m$ và (n–m)–phẳng **Q** có phương $\mathbf{V}^{n-m}$ sao cho $\mathbf{V}^m \cap \mathbf{V}^{n-m} = \{\vec{0}\}$.

a) Chứng minh **P** và **Q** chỉ có một điểm chung duy nhất .

b) Gọi **M** là một điểm bất kì của $\mathbf{A}^n$, gọi **P'** là m–phẳng đi qua **M** và song song với **P**.Gọi **Q'** là (n–m)–phẳng đi qua M và song song với **Q** . Chứng minh rằng **P'** và **Q** chỉ cắt nhau tại 1 điểm ; **Q'** và **P** cũng cắt nhau tại 1 điểm và kí hiệu các điểm đó lần lượt là $\mathbf{M}_q$ và $\mathbf{M}_p$.

c) Xét ánh xạ p: $\mathbf{A}^n \to \mathbf{P}$ sao cho $p(M) = M_p$ và ánh xạ q: $\mathbf{A}^n \to \mathbf{Q}$ sao cho $q(M) = M_q$. Các ánh xạ đó lần lượt có tên là phép chiếu lên **P** theo phương $\mathbf{V}^{n-m}$ và phép chiếu lên **Q** theo phương $\mathbf{V}^m$. Chứng minh rằng p và q là những ánh xạ afin thỏa mãn các tính chất sau đây :

$p^2 = p$; $q^2 = q$; $pq = qp = 1$ trong đó 1 kí hiệu cho ánh xạ hằng .

d) Chứng minh rằng nếu có một điểm A thuộc **P** và điểm B thuộc **Q** thì luôn luôn có một điểm X duy nhất của $\mathbf{A}^n$ sao cho $p(X) = A$, $q(X) = B$.

1.42. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho phép afin f biến đổi các điểm như sau :

$$\begin{array}{lll} A(1,1) & \to & A'(1,1) \\ B(2,0) & \to & B'(2,0) \\ C(1,0) & \to & C'(2,2) \end{array}$$

Viết phương trình phép afin đó đối với mục tiêu đã chọn và đối với mục tiêu $\{A;B,C\}$.

1.43. Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ với mục tiêu đã chọn cho các điểm:

$$A_o = (1,1,1) \ ; \ A_1 = (2,0,0) \ ; \ A_2 = (1,0,0) \ ; \ A_3 = (1,1,0)$$
$$A'_o = (0,0,0) \ ; \ A'_1 = (0,1,0) \ ; \ A'_2 = (2,0,1) \ ; \ A'_3 = (1,0,1)$$

a) Chứng minh bốn điểm A_o ,A_1 ,A_2 ,A_3 và bốn điểm A'_o ,A'_1 ,A'_2 ,A'_3 đều độc lập .

b) Lập phương trình phép biến đổi afin f: $\mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$ sao cho $f(A_i) = A'_i$, $i = 0,1,2,3$ đối với mục tiêu đã chọn .

c) Tìm các điểm kép và phương bất biến của phép afin đó .

d) Viết phương trình phép afin f đó đối với mục tiêu $\{A_0; A_1, A_2, A_3\}$.

1.44.Trong không gian afin $\mathbf{A}^3$ cho một tứ diện ABCD.Lập phương trình phép biến đổi afin f đối với mục tiêu $\{A;B,C,D\}$ sao cho

$$f(A) = B \ , \ f(B) = A \ , \ f(C) = C \ , \ f(D) = D \ .$$

1.45. Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2$ cho phép biến đổi afin f đối với mục tiêu đã chọn :

$$f : \begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 3x_2 - 7 \\ x'_2 = 3x_1 - 5x_2 - 9 \end{cases}$$. Hãy tìm phép afin f^{-1}.

1.46. Trong $\mathbf{A}^2$ cho phép biến đổi afin f đối với mục tiêu đã chọn

$$f : \begin{cases} x'_1 = 3x_1 + 2x_2 - 2 \\ x'_2 = 2x_1 + 2x_2 - 1 \end{cases}$$

a) Tìm ảnh và tạo ảnh của điểm M(1,2) .

b) Tìm ảnh và tạo ảnh của đường thẳng có phương trình $3x_1 + 2x_2 - 6 = 0$

c) Tìm điểm kép (điểm bất động) của phép afin f .

1.47. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho công thức đổi mục tiêu :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + 1 \\ x_2 = \quad\quad y_2 + y_3 + \dots + y_n + 2 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 + \dots + y_n + 3 \\ \dots \\ x_n = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad y_n + n \end{cases}$$

trong đó $(x_1,x_2, \dots,x_n)$ là tọa độ của một điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ đối với mục tiêu thứ nhất và $(y_1,y_2, \dots,y_n)$ là tọa độ của điểm X đó đối với mục tiêu thứ hai. Lập phương trình phép biến đổi afin đối với mục tiêu thứ nhất và biến mục tiêu thứ nhất thành mục tiêu thứ hai. Tìm tọa độ các đỉnh của mục tiêu thứ hai đối với mục tiêu thứ nhất.

1.48. Chứng minh rằng trong $\mathbf{A}^n$ nếu một phép afin f có n +1 điểm kép độc lập thì f là phép đồng nhất .

1.49. Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ phép afin f: $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ là một phép *thấu xạ afin* nếu có một siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ sao cho mọi điểm M của siêu phẳng đó đều là điểm kép. Siêu phẳng $\mathbf{A}^{n-1}$ được gọi là *nền thấu xạ* . Hãy chọn một mục tiêu afin thích hợp và viết phương trình của phép thấu xạ afin đó . Sau đó chứng minh rằng nếu phép thấu xạ afin không phải là phép đồng nhất thì các đường thẳng nối một điểm với ảnh phân biệt của nó hoặc song song với nhau hoặc trùng nhau.

§7

1.50.Chứng minh rằng tập hợp các phép tịnh tiến trong không gian $\mathbf{A}^n$ làm thành một nhóm .

1.51.Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho tam giác ABC và các điểm P,Q,R lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba điểm P,Q,R thẳng hàng là :

$$(PBC) . (QCA) . (RAB) = 1$$ (định lí Ménélaus).

1.52.Trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ cho tam giác ABC và các điểm A',B',C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AA',BB',CC' đồng quy là :

$$(A'BC).(B'CA).(C'AB) = -1$$ (định lí Céva)

1.53.Cho đơn hình m-chiều $A_oA_1...A_m$.Điểm G gọi là trọng tâm của đơn hình đó nếu :

$$\sum_{i=0}^{m} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

a) Chứng tỏ trọng tâm của đơn hình là một khái niệm afin .

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để cho G là trọng tâm của đơn hình $A_oA_1 \ldots A_m$ là với mọi điểm O ta đều có :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\overrightarrow{OA_i}$$

c) Chứng minh rằng trong một đơn hình các đường thẳng nối hai trọng tâm của hai mặt bên đối diện luôn luôn đi qua một điểm. Phát biểu kết quả đối với trường hợp đơn hình hai chiều và ba chiều .

1.54. Chứng minh rằng ảnh của một tập lồi qua ánh xạ afin là một tập lồi .

1.55. Nhóm biến đổi lớn nhất của không gian afin **A** là nhóm nào ? Hình học những nhóm đó nghiên cứu những tính chất gì của không gian afin **A** .

1.56. Trong mặt phẳng afin hai hình bình hành bất kì có tương đương afin hay không ? Vì sao?

1.57.Tìm điều kiện để hai hình thang tương đương afin trong mặt phẳng afin.

1.58. Mặt phẳng Ơclit là mặt phẳng afin . Trong những định lí sau đây định lí nào thuộc hình học afin

a) Trong một tam giác ba đường trung tuyến đồng quy

b) Trong một tam giác ba đường phân giác trong đồng quy

c) Trong một hình bình hành , hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường .

d) Hai đường chéo của một hình thoi vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

§8

1.59. Trong không gian afin $\mathbf{A}^4$, với mục tiêu afin cho trước , hãy xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(0,0,3, –3), B(0,0,11, –11) và siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 4x_2x_4 + x_3 + x_4 = 0$$

1.60. Trong $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu đã chọn , cho đường bậc hai có phương trình :

$$x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

a) Tìm phương tiệm cận của đường bậc hai đã cho .

b) Tìm tâm của đường bậc hai đó .

1.61.Tìm giao của một siêu mặt bậc hai với một m–phẳng trong $\mathbf{A}^n$.

1.62. Trong $\mathbf{A}^2$ với mục tiêu đã chọn, cho đường bậc hai có phương trình :

$$25x_1^2 + 2x_1x_2 + 13x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 - 27 = 0$$

Tìm tâm và đường kính liên hợp với phương $\vec{c}(1, -1)$.

1.63. Một siêu mặt bậc hai (S) của không gian afin $\mathbf{A}^n$ gọi là một *siêu nón bậc hai* nếu có thể tìm được một mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ sao cho đối với nó (S) có phương trình :

$[x]^*A[x] = 0$ trong đó hạng của A là $\mathbf{r} > 0$.

Hạng của A cũng gọi là hạng của siêu nón (S) .

a) Chứng tỏ rằng siêu nón hạng r là một khái niệm afin.

b) Chứng minh rằng nếu điểm X thuộc (S) thì đường thẳng E_oX nằm hoàn toàn trên (S) . Đường thẳng đó gọi là đường sinh của siêu nón (S).

c) Chứng minh rằng với mọi siêu nón (S) luôn luôn có một m–phẳng P với $0 < m \le n - 1$, nằm trên (S) sao cho nếu M thuộc (S) thì phẳng đi qua P và M cũng nằm trên (S) . Ta gọi m–phẳng P là *đỉnh* của siêu nón (S) .

1.64. Một siêu mặt bậc hai (S) của không gian afin $\mathbf{A}^n$ gọi là một *siêu mặt trụ* nếu có thể chọn một mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ sao cho đối với nó phương trình của (S) có dạng :

$$f(x_1,x_2, ...,x_m) = 0 \text{ , } m < n \qquad (1)$$

trong đó f là một đa thức bậc hai đối với $x_1,x_2, ...,x_m$.

a) Chứng tỏ rằng siêu mặt trụ là một khái niệm afin.

b) Trong m–phẳng đi qua các điểm $E_o,E_1, ...,E_m$ ta chọn mục tiêu tọa độ là $\{E_o;E_1, ...,E_m\}$. Chứng tỏ rằng giao của (S) với m–phẳng nói trên là một siêu mặt bậc hai của không gian afin m chiều $\mathbf{A}^m$ mà phương trình của siêu mặt bậc hai đó chính là phương trình (1). Siêu mặt đó gọi là đáy của siêu mặt trụ (S) ta kí hiệu nó là (S').

c) Gọi $\mathbf{V}^{n-m}$ là không gian vectơ với cơ sở là $\{\overrightarrow{E_oE_i}\}$, $i = m+1,...,n$. Chứng minh rằng nếu điểm $M \in$ (S) thì mọi (n–m)–phẳng đi qua M có phương $\mathbf{V}^{n-m}$ đều nằm trên (S). Ta gọi (n– m)–phẳng đó là phẳng sinh của mặt trụ .

d) Chứng minh rằng nếu $p : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ là phép chiếu lên $\mathbf{A}^m$ theo phương $\mathbf{V}^{n-m}$ thì p(S) = (S').

1.65.Trong $\mathbf{A}^3$ tìm phương trình chuẩn tắc của một siêu mặt bậc hai (S) có phương trình đối với một hệ tọa độ afin đã cho là:

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_3x_1 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

1.66.Trong $\mathbf{A}^3$, tìm đường sinh thẳng của các mặt bậc hai :

a) $(S_1) : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 1$ đi qua điểm M(3,2,1)

b) $(S_2) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 2z$ đi qua điểm N(3, –4,0)

CHƯƠNG II

KHÔNG GIAN ƠCLIT VÀ HÌNH HỌC ƠCLIT

§1. BỔ SUNG VỀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN KHÔNG GIAN VECTƠ

1.TÍCH VÔ HƯỚNG

Cho V là không gian vectơ trên trường số thực trên đó xác định một phép toán f sao cho với mỗi cặp vectơ có thứ tự $\vec{a},\vec{b} \in \mathbf{V}$ ta đặt tương ứng với một số thực xác định gọi là *tích vô hướng của hai vectơ* $\vec{a},\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ hay $\vec{a}\,\vec{b}$ nếu nó thỏa mãn 4 tiên đề sau đây :

1) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ với $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbf{V}$

3) $(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$ với $\lambda \in \mathbf{R}$

4) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$,dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$

CHÚ Ý : Tương ứng f nói trên là một ánh xạ f: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ thỏa mãn 4 điều kiện nêu trên .Một không gian vectơ được trang bị thêm tích vô hướng đối với mọi hai vectơ bất kì của nó sẽ trở thành một *không gian vectơ Ơclit* . Không gian vectơ Ơclit n chiều được kí hiệu là $\mathbf{V}_E^n$ hoặc $\overline{\mathbf{E}^n}$.

2. CÁC ĐỊNH NGHĨA CÓ LIÊN QUAN ĐẾN TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

. $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

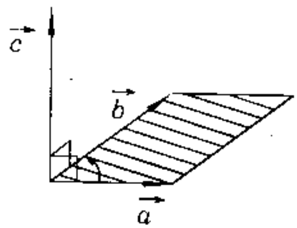
3. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG V_E^3

a) Định nghĩa. Trong V_E^3 *tích có hướng* của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *là một vectơ* $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây :

i) $\vec{c} \perp \vec{a}$ và $\vec{c} \perp \vec{b}$

ii) $|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ = dt hình bình hành dựng trên các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

iii) Tam diện tạo bởi ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là tam diện *thuận* (nếu vặn nút chai theo chiều từ $\vec{a}$ đến $\vec{b}$ thì nút chai chuyển động theo hướng của vectơ $\vec{c}$ – xem hình 6).



hình 6

Ta thường kí hiệu tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$$

b) Tính chất

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (phản giao hoán)

2) $p(\vec{a} \wedge \vec{b}) = p\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge p\vec{b}$ với $p \in \mathbf{R}$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

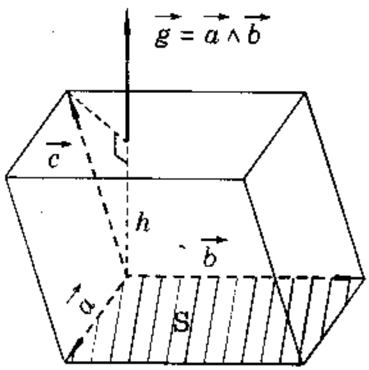
$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$.

4.TÍCH HỖN HỢP CỦA BA VECTƠ TRONG V_E^3

a) Định nghĩa . *Tích hỗn hợp* của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong V_E^3 là *một số* , bằng cách nhân có hướng hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta được $\vec{a} \wedge \vec{b}$ rồi nhân vô hướng vectơ ấy với $\vec{c}$ .Tích hỗn hợp của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ được kí hiệu như sau :

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\ \vec{c}$$

b) Ý nghĩa hình học của tích hỗn hợp



hình 7

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng (H.7)

Gọi V là thể tích của hình hộp dựng trên các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó V = S .h trong đó S là diện tích của hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ còn h là chiều cao của hình hộp . Đặt $\vec{g} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ thì theo định nghĩa tích có hướng , ta có $|\vec{g}|$ = S. Vectơ $\vec{g}$ vuông góc với mặt phẳng đáy tạo nên bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$,$\vec{g}$ tạo thành một tam diện thuận . Hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{g}$ có chung gốc và nằm về một phía đối với mặt phẳng đáy và gọi $\varphi = (\widehat{\vec{g}, \vec{c}})$.

- Giả sử $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ nghĩa là $\cos\varphi > 0$ nên ta có $h = |\vec{c}|\ \cos\varphi$.

Vậy $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = \vec{g}.\vec{c} = |\vec{g}||\vec{c}| \cos\varphi = S.h = V$.

Với $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ nghĩa là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tạo nên một tam diện thuận , khi đó :

$$\boxed{V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

.Với $\varphi > \frac{\pi}{2}$ nghĩa là ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tạo nên một tam diện nghịch ta có $\cos\varphi$ là một số âm , khi đó $h = -|\vec{c}|\cos\varphi$ và ta có

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -V}$$

Kết luận :Tích hỗn hợp của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng là một số, có trị số tuyệt đối bằng thể tích hình hộp dựng trên ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Số ấy dương nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tạo nên một tam diện thuận, âm nếu ba vectơ ấy tạo nên một tam diện nghịch .

CHÚ Ý : Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tạo nên một tam diện thuận (hoặc nghịch) thì ba vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ và ba vectơ $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ cũng tạo nên những tam diện thuận (hoặc nghịch) . Do đó :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}).\ \vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}).\vec{b}\ .$$

Từ ý nghĩa hình học của tích hỗn hợp của ba vectơ,ta suy ra:

Hệ quả : – Điều kiện cần và đủ để ba vectơ đồng phẳng là tích hỗn hợp của chúng bằng 0 .

– Điều kiện cần và đủ để ba vectơ phụ thuộc tuyến tính là tích hỗn hợp của chúng bằng 0 .

§2.KHÔNG GIAN ƠCLIT

1.ĐỊNH NGHĨA

Không gian Ơclit là một loại không gian afin liên kết với không gian vectơ Ơclit hữu hạn chiều . Không gian Ơclit thường được kí hiệu là **E** . Không gian vectơ Ơclit liên kết với nó được kí hiệu là $\mathbf{V}_E$ hoặc $\vec{E}$. Không gian Ơclit được gọi là *n chiều* kí hiệu là $\mathbf{E}^n$ nếu không gian vectơ Ơclit liên kết với nó có số chiều bằng n .

2. CÁC THÍ DỤ

a) Không gian Ơclit ba chiều thông thường được học trong chương trình toán ở bậc phổ thông được kí hiệu là $\mathbf{E}^3$. Trong không gian này, mặt phẳng Ơclit là không gian Ơclit hai chiều và được kí hiệu là $\mathbf{E}^2$. Các không gian $\overrightarrow{\mathbf{E}^3}$ và $\overrightarrow{\mathbf{E}^2}$ là không gian các vectơ tự do ba chiều và hai chiều.Tích vô hướng trong không gian $\overrightarrow{\mathbf{E}^3}$ và $\overrightarrow{\mathbf{E}^2}$ được định nghĩa như sau:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

trong đó $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ là độ dài các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ còn $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

b) Trong mô hình số thực của $\mathbf{V}^n$ nếu ta định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1,a_2,..., a_n)$ và $\vec{b} = (b_1,b_2,...,b_n)$ là số thực $a_1b_1+ a_2b_2+ .... +a_nb_n$ thì mô hình đó trở thành một không gian vectơ Ơclit n chiều . Khi đó không gian afin liên kết với không gian vectơ Ơclit $\mathbf{V}^n{}_E$ đó là không gian $\mathbf{E}^n$.

c) Nếu $\mathbf{E}^n$ là không gian Ơclit liên kết với không gian vectơ Ơclit $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ thì mỗi phẳng α của nó cũng là một không gian Ơclit liên kết với không gian vectơ Ơclit $\overrightarrow{\alpha_E}$ mà tích vô hướng trong $\overrightarrow{\alpha_E}$ được cảm sinh bởi tích vô hướng của $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$.

CHÚ Ý. Theo định nghĩa, không gian Ơclit cũng là một không gian afin nên trong không gian Ơclit vẫn có các khái niệm và các tính chất của không gian afin. Mặt khác trong không gian Ơclit còn có các tính chất và khái niệm không có trong không gian afin, như sự vuông góc của các phẳng, độ dài các đoạn thẳng, độ lớn của góc v.v... Các khái niệm, tính chất này có liên quan mật thiết đến khái niệm và tính chất của tích vô hướng được trang bị thêm trong không gian vectơ Ơclit liên kết với không gian afin đó .

§3. MỤC TIÊU TRỰC CHUẨN – TỌA ĐỘ TRỰC CHUẨN

1. MỤC TIÊU TRỰC CHUẨN

Mục tiêu afin $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ của không gian Ơclit n chiều $\mathbf{E}^n$ được gọi là *mục tiêu trực chuẩn* (hay còn gọi là hệ tọa độ Đề-các vuông góc) nếu cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ của không gian vectơ Ơclit $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ là cơ sở trực chuẩn nghĩa là :

$$\vec{e}_i . \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad i \neq j \\ 1 & \text{khi} \quad i = j \end{cases} \quad \text{với } i, j = 1,2, \ldots, n$$

2. TỌA ĐỘ TRỰC CHUẨN

Tọa độ của một điểm thuộc E^n đối với một mục tiêu trực chuẩn gọi là *tọa độ trực chuẩn* của điểm đó đối với mục tiêu đã cho (hay còn gọi là tọa độ Đề - các vuông góc của điểm đó).

Ta biết rằng mọi không gian vectơ Ơclit n chiều với $n \geq 1$ đều có cơ sở trực chuẩn, do đó ta suy ra trong không gian Ơclit n chiều E^n luôn luôn có thể tìm thấy những mục tiêu trực chuẩn.

3. ĐỔI MỤC TIÊU TRỰC CHUẨN

Cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ và $\{O'; \overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\}$ của không gian Ơclit n chiều E^n. Gọi C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, ..., \overrightarrow{e'_n}\}$. Các cơ sở đó đều là cơ sở trực chuẩn nên C là ma trận trực giao cấp n . Khi đó công thức đổi mục tiêu trực chuẩn là :

$$\boxed{[x] = C * [x'] + [a_o]}$$

trong đó C* là ma trận chuyển vị của C , $[a_o]$ là ma trận cột tọa độ của gốc O' đối với mục tiêu $\{O; \overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}\}$ còn [x] và [x'] là hai ma trận cột tọa độ của cùng một điểm đối với mục tiêu $\{O;\overrightarrow{e_i}\}$ và mục tiêu $\{O'; \overrightarrow{e'_i}\}$.

4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM

Cho hai điểm M,N của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$. Khoảng cách giữa hai điểm đó kí hiệu là d(M,N) được định nghĩa là số :

$$\boxed{d(M,N) = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2}}$$

Như vậy dựa vào tích vô hướng, ta định nghĩa được khái niệm khoảng cách giữa hai điểm hay độ dài của một đoạn thẳng hay mô-đun của một vectơ . Do đó :

a) $d(M,N) = d(N,M)$

b) $d(M,N) \geq 0$ và $d(M,N) = 0 \Leftrightarrow M \equiv N$

c) $d(M,N) + d(N,P) \geq d(M,P)$ với mọi ba điểm bất kì M,N,P .

d) Nếu M,N,P là ba điểm phân biệt thì điểm N thuộc đoạn thẳng MP khi và chỉ khi $d(M,N) + d(N,P) = d(M,P)$.

e) Nếu trong $\mathbf{E}^n$ với một mục tiêu trực chuẩn cho trước , cho biết tọa độ trực chuẩn của các điểm $M = (x_1,x_2,...,x_n)$ và điểm $N = (y_1,y_2,...,y_n)$ thì :

$$\boxed{d(M,N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}}$$

5. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG $\mathbf{V}_E^n$

a) Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước , giả sử : $\vec{a} = (a_1, a_2 , ... , a_n)$,

$$\vec{b} = (b_1 , b_2 ,........, b_n)$$

Ta có : $$\vec{a}.\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e_i} . \sum_{j=1}^{n} b_j \vec{e_j} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

b) Hệ quả

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \quad , \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

6.BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH CÓ HƯỚNG TRONG V_E^3

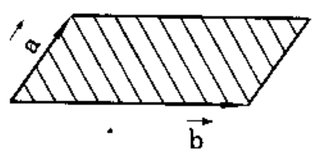
a) Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ và $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$. Hãy tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$. Ta dễ dàng tính được tọa độ của vectơ $\vec{c}$ như sau:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

b) Hệ quả • Nếu φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ ta có công thức :

$$\sin\varphi = \pm \frac{\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

• Gọi S là diện tích hình bình hành được dựng trên các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ (H.8) .



hình 8

$$S = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}$$

7.BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH HỖN HỢP TRONG V_E^n

Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc, cho ba vectơ không đồng phẳng :

$$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3) \text{ , } \vec{b} = (b_1,b_2,b_3) \text{ , } \vec{c} = (c_1,c_2,c_3) \text{ .}$$

Gọi V là thể tích của hình hộp dựng trên các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thì $\pm V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

Vậy $$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \pm V}$$

§4. CÁC PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN ƠCLIT

Giả sử $\mathbf{E}^n$ là không gian Ơclit n chiều liên kết với không gian vectơ Ơclit $\mathbf{V}_E^n$.Vì không gian Ơclit cũng là một loại không gian afin, nên trong không gian Ơclit các phẳng cũng có các tính chất giống như tính chất của các phẳng trong không gian afin.Chúng ta cũng sẽ gặp các vấn đề như cách xác định, cách lập phương trình và xét vị trí tương đối của các phẳng như đã được nghiên cứu trong không gian afin. Những vấn đề mới mà chúng ta sẽ xét sau đây đối với các phẳng Ơclit là những vấn đề có liên quan tới tích vô hướng được trang bị trong không gian vectơ liên kết với $\mathbf{E}^n$ đó.

1.VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA CÁC PHẲNG TRONG E^n

Ngoài những vấn đề về vị trí tương đối của các phẳng đã được xét như trong không gian afin , đối với các phẳng trong không gian Ơclit còn có thêm quan hệ vuông góc và tìm khoảng cách giữa hai cái phẳng nào đó .

a)Định nghĩa. Trong $\mathbf{E}^n$ cho phẳng α có phương $\vec{\alpha}$ và phẳng β có phương $\vec{\beta}$.

- Hai phẳng α và β gọi là *vuông góc với nhau* ,kí hiệu $\alpha \perp \beta$ nếu hai không gian vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ trực giao với nhau (mọi vectơ thuộc $\vec{\alpha}$ đều trực giao với mọi vectơ thuộc $\vec{\beta}$).Ta cũng kí hiệu $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

- Hai phẳng α và β gọi là *bù vuông góc với nhau* nếu $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ bù trực giao với nhau trong $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ nghĩa là

$$\vec{\alpha} \oplus \vec{\beta} = \overrightarrow{\mathbf{E}^n} \ (\dim\vec{\alpha} + \dim\vec{\beta} = n).$$

b)Định lí. Hai phẳng vuông góc với nhau có không quá một điểm chung . Hai phẳng bù vuông góc có một điểm chung duy nhất .

Chứng minh

Trong $\mathbf{E}^n$ giả sử ta có hai cái phẳng vuông góc với nhau là $\alpha \perp \beta$. Nếu có hai điểm M,N thuộc giao $\alpha \cap \beta$ thì vectơ $\overrightarrow{MN} \in \vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$ nghĩa là $\overrightarrow{MN} \in \vec{\alpha}$ và $\overrightarrow{MN} \in \vec{\beta}$. Vì $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ nên $\overrightarrow{MN} . \overrightarrow{MN} = 0$ .Theo tính chất của tích vô hướng ta có $M \equiv N$.

Nếu α và β bù vuông góc thì $\overrightarrow{\mathbf{E}^n} = \vec{\alpha} \oplus \vec{\beta}$. Do đó nếu giả sử $\alpha \cap \beta = \varnothing$ thì :

$\dim(\alpha+\beta) = \dim\alpha + \dim\beta - \dim(\vec{\alpha} \cap \vec{\beta}) + 1$. Ta suy ra :

$\dim(\alpha+\beta) = n+1$ là điều vô lí . Vậy α và β phải có điểm chung và theo phần trên của định lí thì điểm chung đó là duy nhất .

Hệ quả 1. Nếu α và β bù vuông góc với nhau thì tổng của chúng là $\mathbf{E}^n$.

Hệ quả 2. Trong $\mathbf{E}^n$ qua một điểm đã cho có một và chỉ một phẳng bù vuông góc với phẳng đã cho (nghĩa là phương trình của phẳng này hoàn toàn được xác định).

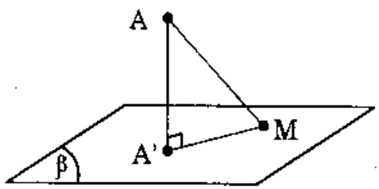
c) Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$ cho một điểm A và một phẳng β không chứa A . Khi đó trong β có một điểm A' duy nhất sao cho

$$d(A,A') \leq d(A,M) \text{ với mọi } M \in \beta .$$

Số d(A,A') gọi là *khoảng cách từ A tới phẳng β* và được kí hiệu là $d(A, \beta)$.

Chứng minh

Qua điểm A ta có một phẳng α duy nhất bù vuông góc với β .



hình 9

Khi đó α và β có một giao điểm duy nhất là A' . Với mọi điểm $M \in \beta$ ta có $\overrightarrow{A'M} \in \vec{\beta}$ và $\overrightarrow{AA'} \in \vec{\alpha}$ (H.9). Vì $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ nên $\overrightarrow{A'M} \perp \overrightarrow{AA'}$. Ta có :

$d(A,M) = |\overrightarrow{AM}|$, $d(A,A') = |\overrightarrow{AA'}|$

$d(A',M) = |\overrightarrow{A'M}|$. Vì $\overrightarrow{A'M} \perp \overrightarrow{AA'}$ nên theo định lí Pitago :

$$\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{A'M}^2 .$$

Từ đó suy ra $\quad (d(A,M))^2 = (d(A,A'))^2 + (d(A',M))^2$

hay $\quad d(A,A') \leq d(A,M)$

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $\overrightarrow{A'M}^2 = 0$ tức $M \equiv A'$. Vậy điểm A' là duy nhất.

Hệ quả . Nếu điểm $A \in \beta$ thì ta có $d(A, \beta) = 0$.

d)Định lí . Nếu phẳng α vuông góc với phẳng β và phẳng bù vuông góc với phẳng β thì α cùng phương với γ .

Chứng minh

Gọi $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ lần lượt là phương của các phẳng α,β,γ .Vì α vuông góc với $\vec{\beta}$ còn $\vec{\gamma}$ là phần bù trực giao của $\vec{\beta}$ trong $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ nên ta suy ra $\vec{\alpha} \subset \vec{\gamma}$.

Vậy α cùng phương với γ.

Hệ quả. Hai phẳng phân biệt cùng bù vuông góc với phẳng thứ ba thì song song với nhau và có cùng số chiều .

CHÚ Ý. Khái niệm vuông góc của hai mặt phẳng trong $\mathbf{E}^3$ dùng ở trường phổ thông không thỏa mãn định nghĩa nói về sự vuông góc của hai cái phẳng đã nêu ở phần trên vì đó là sự vuông góc không hoàn toàn.

2.KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI CÁI PHẲNG

a) Định nghĩa. Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$, khoảng cách giữa hai cái phẳng α và β là số inf d(M,N) với $M \in \alpha$ và $N \in \beta$.

$$\boxed{d(\alpha,\beta) = \inf d(M,N) \text{ với } M \in \alpha \text{ , } N \in \beta}$$

CHÚ Ý : Theo định nghĩa nếu $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ thì $d(\alpha,\beta) = 0$, còn nếu $\alpha \cap \beta = \varnothing$ thì $d(\alpha,\beta) > 0$.

b)Đường vuông góc chung của hai cái phẳng. Đường thẳng Δ gọi là đường vuông góc chung của hai phẳng α và β nếu Δ vuông góc với cả α và β, đồng thời Δ cắt cả α và β .

Thí dụ trong $\mathbf{E}^3$ ta có đường vuông góc chung Δ duy nhất của hai đường thẳng chéo nhau α và β; hoặc vô số đường vuông góc chung của đường thẳng α song song với mặt phẳng β .

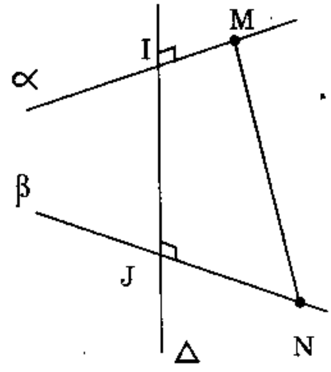
c)Định lí. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai cái phẳng α và β.Nếu Δ cắt α và β lần lượt tại I và J thì $d(\alpha,\beta) = d(I,J)$.

Chứng minh

Giả sử đường vuông góc chung Δ cắt α và β lần lượt tại I và J. Với mọi $M \in \alpha$, mọi $N \in \beta$ (H.10) ta có :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN} =$$
$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}) + \overrightarrow{IJ}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}\right|^2 + \left|\overrightarrow{IJ}\right|^2 +$$
$$+ 2\overrightarrow{IJ}.(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}).$$



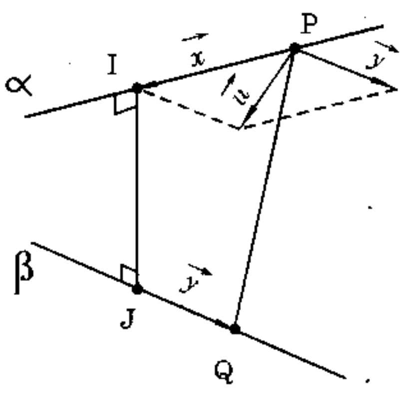
hình 10

Vì $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MI} = 0$ và $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JN} = 0$ nên :

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}\right|^2 + \left|\overrightarrow{IJ}\right|^2 \quad \text{hay} \quad \left|\overrightarrow{MN}\right|^2 \geq \left|\overrightarrow{IJ}\right|^2$$

Vậy $d(M,N) \geq d(I,J)$ hay $d(\alpha,\beta) = d(I,J)$.

d) Định lí. Nếu hai cái phẳng α và β chéo nhau (nghĩa là không có điểm chung và không có phương chung) thì chúng có đường vuông góc chung duy nhất .



hình 11

Chứng minh

Theo giả thiết ta có $\alpha \cap \beta = \varnothing$ và $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \{\vec{0}\}$(H.11). Xét tổng $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ và gọi $\vec{\gamma}$ là không gian con bù trực giao với tổng $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ trong $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Lấy $P \in \alpha$ và $Q \in \beta$ thì vectơ $\overrightarrow{PQ}$ được phân tích một cách duy nhất dưới dạng :

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{u} + \vec{v} \text{ với } \vec{u} \in \vec{\alpha} + \vec{\beta} \text{ và } \vec{v} \in \vec{\gamma}.$$

Giả sử $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$ với $\vec{x} \in \vec{\alpha}$ và $\vec{y} \in \vec{\beta}$. Lấy các điểm I và J lần lượt trên α và β sao cho $\overrightarrow{PI} = \vec{x}$ và $\overrightarrow{JQ} = \vec{y}$ thì $I \in \alpha$ và $J \in \beta$.

Vì $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QJ} = -\vec{x} + \overrightarrow{PQ} - \vec{y}$

$$\text{hay} \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{IJ} + \vec{x} + \vec{y}.$$

Do đó $\overrightarrow{IJ} = \vec{v} \in \vec{\gamma}$ nghĩa là $\overrightarrow{IJ} \perp \vec{\alpha}$ và $\overrightarrow{IJ} \perp \vec{\beta}$. Vì α và β không có điểm chung nên I không trùng với J. Vậy đường thẳng Δ đi qua I và J là đường vuông góc chung của hai cái phẳng α và β.

Nếu ngoài Δ còn có Δ' là đường vuông góc chung của α và β lần lượt cắt α và β tại I' và J' thì :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'J'} + \overrightarrow{J'J} = \overrightarrow{I'J'} + (\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J})$$

Do đó $|\overrightarrow{IJ}|^2 = |\overrightarrow{I'J'}|^2 + |\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J}|^2$ vì $\overrightarrow{I'J'} \perp (\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J})$.

Theo định lí ở mục c-2-§4 ta có $d(\alpha,\beta) = |\overrightarrow{IJ}|$ và $d(\alpha,\beta) = |\overrightarrow{I'J'}|$. Do đó $\overrightarrow{II'} + \overrightarrow{J'J} = \vec{0}$ tức là $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{JJ'}$. Vậy $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{JJ'} \in \vec{\alpha} \cap \vec{\beta}$. Từ đó suy ra Δ trùng với Δ' khi và chỉ khi $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \{\vec{0}\}$ và định lí được chứng minh.

Hệ quả 1 : Nếu điểm I không thuộc phẳng β thì qua I có đường thẳng duy nhất vuông góc với β và cắt β tại J. Giao điểm J đó gọi là *hình chiếu vuông góc* của điểm I trên phẳng β. Khi đó ta có $d(I,\beta) = d(I,J)$.

Hệ quả 2. Nếu α song song với β nghĩa là $\alpha \cap \beta = \varnothing$ và $\vec{\alpha} \subset \vec{\beta}$ thì với $I \in \alpha$ đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với β sẽ là đường vuông góc chung của α và β. Ta có $d(\alpha,\beta) = d(I,\beta)$ với bất kì $I \in \alpha$. Trong trường hợp này qua mỗi điểm $I \in \alpha$ có một đường vuông góc chung và như vậy ta sẽ có vô số đường vuông góc chung của α và β.

3.KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT SIÊU PHẲNG

a)Vectơ pháp tuyến của siêu phẳng. Trong $\mathbf{E}^n$ giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn cho trước siêu phẳng α có phương trình

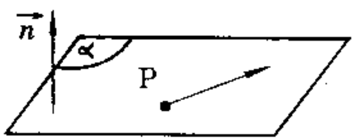
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$$

Gọi $\vec{\alpha}$ là phương của siêu phẳng α.Ta xét vectơ $\vec{n} = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và nhận thấy rằng vectơ $\vec{n}$ trực giao với $\vec{\alpha}$. Thực vậy với một điểm bất kì P thuộc siêu phẳng α và giả sử P có tọa độ $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i p_i + a_o = 0 \qquad (1)$$

Với mọi điểm $M(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \alpha$ ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0 \qquad (2)$$



hình 12

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - p_i) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{PM} = 0$ với $\overrightarrow{PM}$ bất kì thuộc $\vec{\alpha}$.

Ta gọi $\vec{n}$ là *vectơ pháp tuyến của siêu phẳng* α (H.12).

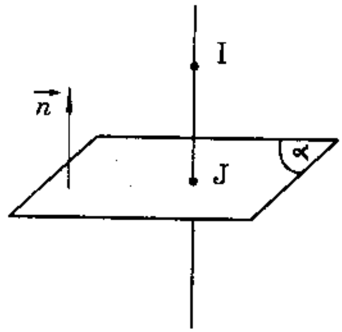
b)Tìm khoảng cách từ một điểm đến một siêu phẳng

Bây giờ cho điểm $I(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ không thuộc siêu phẳng α . Gọi J là hình chiếu vuông góc của I trên α . Khi đó khoảng cách từ I đến α bằng độ dài vectơ $\overrightarrow{IJ}$ .Do $\overrightarrow{IJ} \perp \vec{\alpha}$ nên $\overrightarrow{IJ} = t\vec{n}$ với $t \in R$.

Đường thẳng IJ có phương trình

$$x_i = x_i^o + a_i t \text{ với } i = 1,2,\ldots,n.$$

Tọa độ giao điểm J của đường thẳng IJ với siêu phẳng α thỏa mãn hệ phương trình :



$$\begin{cases} x_i = x_i^o + a_i t \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0 \end{cases}$$

Ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i^o + a_i t) + a_o = 0 \quad \text{(H.13)}$$

hay $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^o + a_o + (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)t = 0$$

hình 13

Ta suy ra $t = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^o + a_o}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ và $|\vec{n}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.

Vì $\overrightarrow{IJ} = t\vec{n}$ nên $|\overrightarrow{IJ}| = |t|.|\vec{n}|$

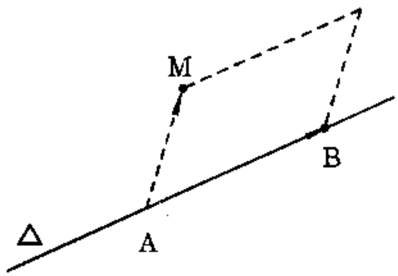
Do đó $$\boxed{|\overrightarrow{IJ}| = d(I, \alpha) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^o + a_o\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}}$$

Từ biểu thức trên ta suy ra nếu $I \in \alpha$ thì $d(I,\alpha) = 0$

Khi n = 2 hoặc n = 3 ta tìm lại được các công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc từ một điểm đến một mặt phẳng đã học ở trường phổ thông .

4.CÁC THÍ DỤ

a)Thí dụ 1. Trong không gian $\mathbf{E}^3$ với một mục tiêu trực chuẩn cho trước , hãy tìm khoảng cách từ điểm M(1, –2,3) đến đường thẳng Δ đi qua hai điểm A(2,0,1) và B(3, –1,2).



hình 14

Giải

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-1, -2, 2)$ (H.14).

Khoảng từ M đến đường thẳng Δ là đường cao của hình bình hành dựng trên các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$. Gọi $S_{\square}$ là diện tích hình bình hành này ta có

$$S_{\square} = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\right| \text{ hay :}$$

$$S_{\square} = \sqrt{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

Ta lại có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Vậy $d(M, \Delta) = \dfrac{S_{\square}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

NHẬN XÉT. Ta có thể lập phương trình mặt phẳng α đi qua M và vuông góc với Δ và tìm giao điểm I của α với Δ.

Ta có $d(M,\Delta) = \left|\overrightarrow{MI}\right|$

b)Thí dụ 2. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2 trong $\mathbf{E}^3$. Giả sử đối với một mục tiêu trực chuẩn cho trước Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là :

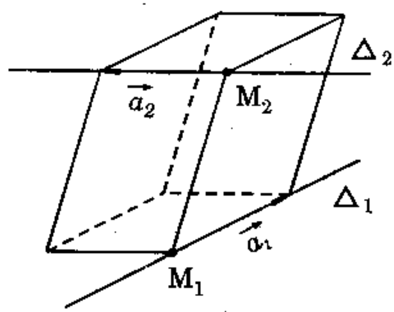
$$(\Delta_1) : \frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$$

$$(\Delta_2) : x = y = z - 1$$

Giải

Ta dễ dàng nhận thấy rằng đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M_1(0,4,3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1} = (1, -3, -2)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M_2(0,0,1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (1,1,1)$.



hình 15

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (0, -4, -2)$. Ta có hình hộp được dựng dựa trên các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$ (H.15). Gọi hai mặt của hình hộp chứa Δ_1 và song song với Δ_2 hoặc chứa Δ_2 và song song với Δ_1 là hai mặt đáy của nó. Gọi V là thể tích của hình hộp và S là diện tích đáy của nó ta có :

$$V = |(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{M_1M_2})| = |(\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}).\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$S = |\overrightarrow{a_1} \wedge \overrightarrow{a_2}|$$

Khoảng cách $d(\Delta_1, \Delta_2)$ chính là chiều cao h của hình hộp. Ta có : $h = \dfrac{V}{S}$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$$

Vậy khoảng cách $d(\Delta_1, \Delta_2) = \dfrac{V}{S} = \dfrac{4}{\sqrt{26}} = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$

c)Thí dụ 3. Trong không gian $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho phẳng α có phương trình tổng quát là :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2 = 0 \end{cases}$$

Hãy tìm khoảng cách từ điểm M(2, –1,3,1) đến phẳng α.

Giải

Lấy điểm P (p_1,p_2,p_3,p_4) thuộc phẳng α ta có :

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 - p_4 + 1 = 0 \\ 2\,p_1 + p_2 - 2\,p_3 + p_4 + 2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Với một điểm $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ thuộc α, theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta nhận thấy các vectơ $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1,-1)$, $\overrightarrow{n_2} = (2,1,-2,1)$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{PX}$ thuộc phương của α vì ta có:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{PX} = 0 \quad , \overrightarrow{n_2}.\overrightarrow{PX} = 0.$$

Gọi β là phẳng đi qua M(2, –1,3,1) và bù vuông góc của α . Ta nhận thấy β là 2–phẳng vì α là 2–phẳng ($\dim\alpha + \dim\beta = 4$).

Do đó $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\}$ trở thành một cơ sở của $\vec{\beta}$ (bù vuông góc với $\vec{\alpha}$).

Ta lập phương trình tham số của phẳng β :

$$\overrightarrow{MX} \in \vec{\beta} \Leftrightarrow X \in \beta .$$

$$\overrightarrow{MX} \in \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 + 1 \\ x_3 - 3 \\ x_4 - 1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 + 2t_2 & (a) \\ x_2 = -1 + t_1 + t_2 & (b) \\ x_3 = 3 + t_1 - 2t_2 & (c) \\ x_4 = 1 - t_1 + t_2 & (d) \end{cases}$$

Từ (a) và (b) ta tính được $t_2 = x_1 - x_2 - 3$,

$$t_1 = -x_1 + 2x_2 + 4.$$

Thay các giá trị này vào (c) và (d) và rút gọn ta được phương trình tổng quát của phẳng β đi qua $M(2, -1,3,1)$ và bù vuông góc với phẳng α cho trước là :

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 13 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 - 6 = 0 \end{cases}$$

Ta biết rằng hai phẳng α và β bù vuông góc với nhau có một điểm chung duy nhất , đó là điểm M_o có tọa độ nghiệm hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 13 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 - 6 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này gồm 4 phương trình 4 ẩn , ta tính được tọa độ điểm M_o là : $M_o = (1, -2,2,2)$.

Điểm M_o là hình chiếu vuông góc của điểm M đã cho trên phẳng α . Ta có $MM_o \perp \alpha$ và $\overrightarrow{MM_o} = (-1, -1, -1,1)$.

Vậy $d(M,\alpha) = |\overrightarrow{MM_o}| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$

CHÚ Ý : Hai cái phẳng hai chiều α và β trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^4$ chỉ có một điểm chung duy nhất khi α và β bù vuông góc với nhau , đây là điều không xảy ra đối với không gian Ơclit ba chiều thông thường . Cần lưu ý rằng trong $\mathbf{E}^4$ có thể có trường hợp một đường thẳng và một mặt phẳng chéo nhau (khi chúng không có phương chung và không có điểm chung).

§5.GÓC TRONG E^n

1.GÓC GIỮA HAI VECTƠ.

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ đều khác $\vec{0}$. Ta gọi góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ đó là số φ mà :

$$\boxed{0 \le \varphi \le \pi \quad \text{và} \quad \cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}}$$

Từ định nghĩa trên ta suy ra :

a) Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ phụ thuộc tuyến tính thì $\varphi = 0$ hoặc $\varphi = \pi$.

Thật vậy nếu $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ta có :

$$\cos\varphi = \frac{\lambda\vec{u}^2}{|\lambda|.|\vec{u}|^2} = \pm 1$$

b) Nếu $\vec{u} \perp \vec{v}$ thì $\varphi = \frac{\pi}{2}$

c) Đối với ba điểm A,B,C bất kì ta có công thức :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB.AC\cos\hat{A}\ .$$

Trong đó $\hat{A}$ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Thật vậy $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Do đó $\quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB.AC\cos\hat{A}$.

2.GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương là $\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}'$. Gọi $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ khác vectơ $\vec{0}$ lần lượt lấy trên $\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}'$.

Ta gọi *góc φ giữa hai đường thẳng nói trên* là số φ mà :

$$\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad \cos\varphi = \frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}}$$

Ta nhận thấy rằng định nghĩa nêu ở trên không phụ thuộc vào việc chọn các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ trên **V** và **V'** nghĩa là ta có thể thay $\vec{a}$ bằng $\vec{a'} = \lambda\vec{a}$ với $\lambda \neq 0$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{b'} = \mu\vec{b}$ với $\mu \neq 0$.

– Nếu Δ // Δ' thì $\varphi = 0$

– Nếu $\Delta \perp \Delta'$ thì $\varphi = \frac{\pi}{2}$

3. GÓC GIỮA HAI SIÊU PHẲNG

Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai siêu phẳng α và β .Gọi a,b lần lượt là các đường thẳng trực giao với α và β .Khi đó góc giữa hai đường thẳng a và b được gọi là *góc giữa hai siêu phẳng α và β* . Cần chú ý rằng định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn cụ thể hai đường thẳng a và b lần lượt trực giao với α và β nghĩa là ta có thể chọn $a' \perp \alpha$ thay cho a và $b' \perp \beta$ thay cho b .

4. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ SIÊU PHẲNG

Trong $\mathbf{E}^n$ cho đường thẳng a và siêu phẳng β . Nếu $a \perp \beta$ ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và siêu phẳng β là góc vuông . Nếu a không vuông góc với β thì ta lấy đường $a' \perp \beta$ và ta gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a và a' . Khi đó góc giữa a và β được xác định là góc θ mà $\theta \ge 0$ và $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Nếu đối với một mục tiêu trực chuẩn cho vectơ chỉ phương của đường thẳng a là vectơ $\vec{u}$ và biết vectơ pháp tuyến của β là $\vec{n}$ thì ta có :

$$\sin\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}$$

Do đó $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{(\vec{u}.\vec{n})^2}{\vec{u}^2\vec{n}^2}}$

§6.ÁNH XẠ ĐẲNG CỰ VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẲNG CỰ

1.ÁNH XẠ ĐẲNG CỰ

a) Định nghĩa. Ánh xạ f: $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ của các không gian Ơclit **E** và **E**' gọi là *ánh xạ đẳng cự* nếu f là một ánh xạ afin mà ánh xạ tuyến tính liên kết $\varphi : \vec{\mathbf{E}} \to \vec{\mathbf{E}'}$ là một ánh xạ tuyến tính trực giao của hai không gian vectơ $\vec{\mathbf{E}}$ và $\vec{\mathbf{E}'}$.

Từ định nghĩa, ta dễ dàng suy ra đối với mọi cặp điểm M, N thuộc **E** và ảnh của chúng M' = f(M), N' = f(N) ta có d(M,N) = = d(M',N'). Nói cách khác phép đẳng cự bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm bất kì .Ngược lại ta có :

b) Định lí : Mọi ánh xạ f:$\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ giữa các không gian Ơclit có tính chất bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm bất kì tức là với mọi M,N $\in$**E** ta có d(f(M),f(N)) = d(M,N) là một ánh xạ đẳng cự.

Chứng minh

Lấy điểm I thuộc **E** và I' = f(I) . Xét ánh xạ $\varphi : \vec{\mathbf{E}} \to \vec{\mathbf{E}'}$ xác định như sau :

Giả sử $\vec{u} \in \vec{\mathbf{E}}$ ta lấy điểm M $\in$ **E** sao cho $\overrightarrow{IM} = \vec{u}$ và đặt $\varphi(\vec{u}) = \overrightarrow{I'M'}$ với M' = f(M). Ta chứng minh φ không thay đổi tích vô hướng của hai vectơ bất kì của $\vec{\mathbf{E}}$. Lấy thêm $\vec{v}$ bất kì thuộc $\vec{\mathbf{E}}$ và lấy điểm N thuộc **E** sao cho $\overrightarrow{IN} = \vec{v}$, khi đó

$\varphi(\vec{v}) = \overrightarrow{I'N'}$ với N' = f(N) .

Vì f bảo tồn khoảng cách giữa hai điểm nên d(M,N) = = d(M',N'). Do đó :

$$\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{M'N'}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM})^2 = (\overrightarrow{I'N'} - \overrightarrow{I'M'})^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IN}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{I'N'}^2 + \overrightarrow{I'M'}^2 - 2.\overrightarrow{I'N'}.\overrightarrow{I'M'}$$

Ta có $\overrightarrow{IN}^2 = \overrightarrow{I'N'}^2, \overrightarrow{IM}^2 = \overrightarrow{I'M'}^2$ nên ta suy ra

$\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{I'N'}.\overrightarrow{I'M'}$ tức là : $\vec{u}.\vec{v} = \varphi(\vec{u}).\varphi(\vec{v})$

Vì φ bảo tồn tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ bất kì nên φ là ánh xạ tuyến tính trực giao và rõ ràng φ là liên kết của f . Vậy f là ánh xạ đẳng cự .

Hệ quả : Ánh xạ đẳng cự bảo tồn số chiều của các phẳng , tính vuông góc của các phẳng , khoảng cách giữa các phẳng , góc giữa các phẳng .

2.BIẾN ĐỔI ĐẲNG CỰ

a) Định nghĩa. Ánh xạ đẳng cự f: **E** $\to$ **E** từ không gian Ơclit **E** vào chính nó thì vì f là đơn ánh nên nó là một song ánh (do $\vec{E}$ hữu hạn chiều) và ánh xạ ngược f^{-1} cũng là một ánh xạ đẳng cự . Khi đó ta gọi nó là một *phép biến đổi đẳng cự* hay là một phép dời hình của không gian Ơclit **E** . Ánh xạ φ liên kết với f là một phép biến đổi tuyến tính trực giao của không gian vectơ $\vec{\mathbf{E}}$.

b) Nhận xét. Rõ ràng tập hợp các phép biến đổi đẳng cự của $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi afin của $\mathbf{E}^n$.

Các phép tịnh tiến hiển nhiên là phép đẳng cự , chúng làm thành nhóm $T(\mathbf{E}^n)$ là nhóm con của nhóm các phép biến đổi đẳng cự (bảo toàn khoảng cách).

3.PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHƯƠNG TRÌNH CỦA PHÉP DỜI HÌNH

Với mục tiêu trực chuẩn $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$trong $\mathbf{E}^n$, cho phép biến đổi afin $f:\mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ có phương trình là :

$$[x'] = A[x] + [b]$$

Khi đó A cũng là ma trận của phép đẳng cấu tuyến tính φ (liên kết với f) đối với cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_n}\}$.

Bởi vậy phép biến đổi afin f trở thành phép biến đổi đẳng cự hay là phép dời hình khi và chỉ khi A là ma trận trực giao tức là $A^*A = I$ (ma trận đơn vị).

Vì A là ma trận trực giao nên $\det A = \pm 1$

– Nếu A là ma trận trực giao và $\det A = 1$ thì f gọi là *phép dời hình loại 1* hay *phép dời hình thuận* .

– Nếu A là ma trận trực giao và $\det A = -1$ thì f gọi là *phép dời hình loại 2* hay *phép dời hình nghịch* .

Rõ ràng tập hợp các phép dời hình của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm gọi là *nhóm dời* và được kí hiệu là $\mathcal{D}^n$.Từ những điều đã biết về phương trình của phép afin và phép biến đổi tuyến tính trực giao ta có :

Định lí. Phương trình của phép dời hình trong $\mathbf{E}^n$ đối với một mục tiêu trực chuẩn cho trước, có dạng :

$$\boxed{[x'] = A[x] + [b]}$$

trong đó A là ma trận trực giao cấp n .

Ngược lại : Mỗi phương trình có dạng $[x'] = A[x] + [b]$ trong đó A là ma trận trực giao cấp n đều là phương trình của phép dời hình trong $\mathbf{E}^n$ đối với một mục tiêu trực chuẩn đã chọn .

CHÚ THÍCH. Ma trận A của phương trình phép dời hình f trong $\mathbf{E}^n$ cũng chính là ma trận của phép biến đổi tuyến tính trực giao liên kết φ của phép dời hình đó trong $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$. Do đó ta luôn luôn có thể tìm được một mục tiêu trực chuẩn của $\mathbf{E}^n$ sao cho ma trận A của phép dời hình f có dạng sau đây dựa vào kết quả trong Đại số tuyến tính :

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & & & & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \boxed{A_k} & & & & & \\ & & & & \pm 1 & & & & \\ & & & & & \pm 1 & & & \\ & 0 & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \pm 1 \end{bmatrix}$$

trong đó : $\quad A_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix}$ với $i = 1,2,\ldots,k$

Ta nhận thấy rằng phép biến đổi tuyến tính trực giao φ sinh ra trên mỗi không gian con bất biến một phép biến đổi tuyến tính trực giao. Nếu ta gọi W_i là các không gian con bất biến hai chiều và V_j là các không gian con bất biến một chiều , các W_i và V_j đôi một vuông góc với nhau , ta có :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}^n} = \mathbf{V}_E^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$$

Nếu gọi A_i là ma trận của phép biến đổi φ/W_i và B_j là ma trận của phép biến đổi φ/V_j thì A_i là các ma trận trực giao , vuông cấp 2 và B_j là các ma trận trực giao chỉ có một hàng một cột .

4.PHÂN LOẠI CÁC PHÉP DỜI HÌNH TRONG E^2

Nếu chọn được một mục tiêu trực chuẩn thích hợp thì ma trận A của một phép dời hình trong $\mathbf{E}^2$ sẽ có một trong ba dạng sau đây :

$$1)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\qquad 2)\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\qquad 3)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

Trường hợp 1. Ma trận A có dạng 1) tức là khi phương trình phép dời hình có dạng :

$$\begin{cases}x_1' = x_1 + b_1\\ x_2' = x_2 + b_2\end{cases}$$

Đó chính là phương trình của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{b} = (b_1, b_2)$

Trường hợp 2. Ma trận A có dạng 2) khi đó phương trình phép dời hình có dạng :

$$\begin{cases}x_1' = x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi + b_1\\ x_2' = x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi + b_2\end{cases}$$

với $0 < \varphi \leq \pi$ (nếu $\varphi = 0$ ta có trường hợp 1)

Trong trường hợp này phép dời hình có một điểm kép (hay điểm bất động) duy nhất. Muốn tìm điểm kép ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x_1 = \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 + b_1\\ x_2 = \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 + b_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(1-\cos\varphi)x_1 + \sin\varphi\, x_2 = b_1\\ -\sin\varphi\, x_1 + (1-\cos\varphi)x_2 = b_2\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1-\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & 1-\cos\varphi\end{vmatrix} = (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2(1-\cos\varphi)$$

Vì $0 < \varphi \le \pi$ nên $\cos\varphi < 1$, do đó $2(1-\cos\varphi) \neq 0$ và hệ phương trình trên có một nghiệm duy nhất là tọa độ của điểm kép.

Nếu ta tịnh tiến mục tiêu sao cho gốc của nó trùng với điểm kép đó thì đối với mục tiêu này phương trình phép dời hình có dạng :

$$\begin{cases} X'_1 = X_1\cos\varphi - X_2\sin\varphi \\ X'_2 = X_1\sin\varphi + X_2\cos\varphi . \end{cases}$$

Đó là phép quay quanh điểm kép O và góc quay φ .

Thực vậy gọi M' là ảnh của M qua phép dời hình ta có :

$$\overrightarrow{OM'}^2 = X_1'^2 + X_2'^2 = X_1^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + X_2^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

$$= X_1^2 + X_2^2 = \overrightarrow{OM}^2$$

Vậy $d(O,M) = d(O,M')$

Mặt khác $\cos(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}}{|\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{OM'}|} = \dfrac{X_1X'_1 + X_2X'_2}{X_1^2 + X_2^2}$

$$= \frac{X_1(X_1\cos\varphi - X_2\sin\varphi) + X_2(X_1\sin\varphi + X_2\cos\varphi)}{X_1^2 + X_2^2}$$

$$= \frac{(X_1^2 + X_2^2)\cos\varphi}{X_1^2 + X_2^2} = \cos\varphi \qquad \text{với } 0 < \varphi \le \pi$$

Vậy $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = \varphi$. Điều đó chứng tỏ phép dời hình là phép quay tâm O với góc quay φ . Như vậy phép dời hình này là tích của một phép tịnh tiến với một phép quay .

Trường hợp 3. Ma trận A của phép dời hình có dạng 3) khi đó phép dời hình có phương trình dạng :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + b_1 \\ x'_2 = -x_2 + b_2 \end{cases}$$

a)Nếu $b_1 = b_2 = 0$:phép dời hình là phép đối xứng qua đường thẳng $x_2 = 0$.

b) Nếu $b_1 = 0$ ta dùng phép biến đổi tọa độ trực chuẩn :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_2 = x_2 - \dfrac{b_2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} X'_1 = x'_1 \\ X'_2 = x'_2 - \dfrac{b_2}{2} \end{cases}$$

ta đưa phương trình phép dời hình về dạng :

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 \\ X'_2 = -X_2 \end{cases}$$

Đây là phép đối xứng đối với đường thẳng có phương trình $x_2 - \dfrac{b_2}{2} = 0.$

c) Nếu $b_1 \neq 0$ ta phân tích phép dời đã cho thành hai phép sau đây :

$$\begin{cases} x''_1 = x_1 \\ x''_2 = -x_2 + b_2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x'_1 = x''_1 + b_1 \\ x'_2 = x''_2 \end{cases}$$

Phép thứ nhất là phép đối xứng qua đường thẳng $x_2 - \dfrac{b_2}{2} = 0.$

Phép thứ hai là phép tịnh tiến theo vectơ có tọa độ $(b_1, 0)$, vectơ này cùng phương với đường thẳng $x_2 - \dfrac{b_2}{2} = 0.$

Tóm lại trường hợp 1 và 2 là phép dời hình loại 1 và trường hợp 3 là phép dời hình loại 2 . Ta có :

Định lí

–Mọi phép dời hình loại 1 trong $\mathbf{E}^2$ là một phép tịnh tiến hoặc một phép quay hoặc tích của một phép tịnh tiến và một phép quay.

– Mọi phép dời hình loại 2 là một phép đối xứng qua một đường thẳng hoặc là tích của một phép đối xứng qua một đường thẳng và một phép tịnh tiến theo một vectơ thuộc phương của đường thẳng đó .

§7.HÌNH HỌC ƠCLIT

Không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ cũng là một không gian afin nên trong đó có các phép biến đổi afin . Các phép biến đổi afin này cùng với phép toán lấy tích các ánh xạ làm thành một nhóm . Các phép dời hình của $\mathbf{E}^n$ là các phép afin đặc biệt có tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì . Bởi vậy tập hợp các phép dời hình là một bộ phận của tập hợp các phép biến đổi afin . Ta đã biết hình học afin của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ là môn học nghiên cứu mọi bất biến afin của không gian đó . Gọi $\mathcal{A}^n$ là nhóm các phép biến đổi afin của $\mathbf{E}^n$ và gọi $\mathcal{D}^n$ là nhóm các phép dời hình của $\mathbf{E}^n$. Ta có $\mathcal{D}^n \subset \mathcal{A}^n$ và có định nghĩa về hình học Ơclit n chiều như sau :

1.ĐỊNH NGHĨA

Hình học của nhóm các phép dời hình $\mathcal{D}^n$ của $\mathbf{E}^n$ gọi là *hình học Ơclit n chiều* . Trong hình học Ơclit hai hình gọi là *tương đương Ơclit* nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia . Hai hình ứng với nhau qua tích một số phép dời hình sẽ gọi là *bằng nhau* .

Theo định nghĩa trên , hình học Ơclit n chiều nghiên cứu những tính chất không thay đổi qua các phép dời hình của nhóm $\mathcal{D}^n$ tức là những tính chất nếu có ở một hình này thì cũng có ở những hình bằng nó .

2.MỐI QUAN HỆ GIỮA HÌNH HỌC AFIN VÀ HÌNH HỌC ƠCLIT TRONG $\mathbf{E}^n$

Vì trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ có nhóm afin $\mathcal{A}^n$, do đó ta cũng có hình học afin trên $\mathbf{E}^n$. Vì $\mathcal{D}^n$ là nhóm con của nhóm $\mathcal{A}^n$ nên *hình học afin là một bộ phận của hình học Ơclit* . Điều đó có nghĩa là các tính chất afin (là những tính chất không thay đổi qua các phép biến đổi afin) cũng là các tính chất Ơclit và được nghiên cứu trong hình học Ơclit, nhưng điều ngược lại không đúng vì các tính chất bất biến qua nhóm dời $\mathscr{D}^n$ chưa hẳn là các tính chất bất biến afin, thí dụ như tính vuông góc của các phẳng, số đo khoảng cách, số đo góc v.v... Vì vậy hình học Ơclit trên $\mathbf{E}^n$ rộng hơn, phong phú hơn hình học afin trên $\mathbf{E}^n$. Khi nghiên cứu về hình học Ơclit, việc phân biệt một tính chất (hoặc khái niệm) xem nó là tính chất afin hay tính chất Ơclit là một điều quan trọng. Giả sử một hình H nào đó của $\mathbf{E}^n$ có tính chất α. Nếu α là tính chất afin thì những hình tương đương afin với H cũng có tính chất α. Còn nếu α là tính chất Ơclit thì chỉ có thể nói những hình bằng hình H mới có tính chất đó mà thôi . Chẳng hạn tính chất "trong tam giác đều đường cao là đường trung tuyến" không thể áp dụng cho mọi tam giác bất kì vì qua một phép afin một tam giác đều có thể biến thành một tam giác có hình dạng tùy ý. Ngược lại tính chất " ba đường trung tuyến của một tam giác đồng quy " đều có thể áp dụng cho mọi tam giác vì tính chất trung tuyến của tam giác, tính chất đồng quy của các đường thẳng đều là những tính chất afin.

3.PHƯƠNG PHÁP DÙNG HÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG AFIN ĐỂ GIẢI TOÁN

Vì hình học afin là một bộ phận của hình học Ơclit , nên khi nghiên cứu hình học afin ta có thể dùng các phương tiện của hình học Ơclit . Phương pháp này có thể tóm tắt như sau :

Giả sử cần chứng minh một hình H nào đó có tính chất α mà α là một tính chất afin . Khi đó ta có thể chứng minh tính chất α đó đối với một hình H' nào đó tương đương afin với H . Bởi vậy ta có thể chọn trong lớp tương đương afin với H một hình H' đặc biệt mà tính chất α dễ chứng minh hơn . Ta hãy lấy một thí dụ để làm sáng tỏ vấn đề này.

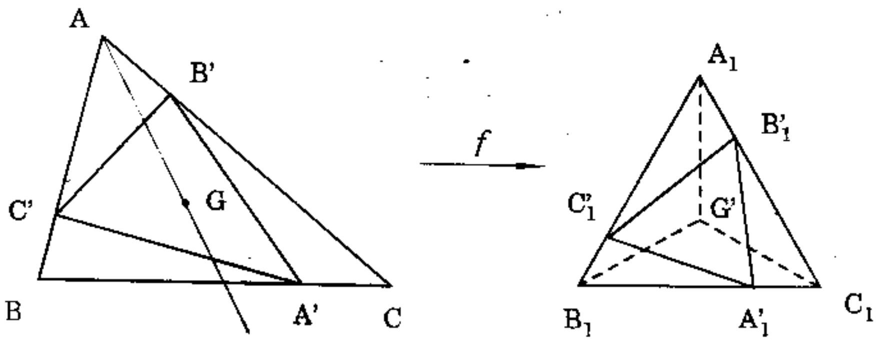
Bài toán : Cho tam giác ABC . Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho :

$$(BCA') = (CAB') = (ABC') = \frac{4}{3}$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Giải

Đây là một bài toán afin vì các khái niệm tam giác, tỉ số đơn , trọng tâm của tam giác, đều là những khái niệm afin .Ta hãy chọn trong tập hợp các tam giác tương đương afin với tam giác ABC một tam giác đều $A_1B_1C_1$. Đối với hình học Ơclit thì tam giác đều là một loại tam giác đặc biệt đối với các tam giác bất kì khác , nhưng đối với hình học afin thì tam giác đều tương đương afin với mọi tam giác bất kì khác .



hình 16

Nói cách khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ xác định một phép afin f trong $\mathbf{E}^2$ sao cho $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$. Gọi $A_1' = f(A')$, $B_1' = f(B')$, $C_1' = f(C')$.Tất nhiên ta cũng có $(B_1C_1A_1') = (C_1A_1B_1') = (A_1B_1C_1') = \frac{4}{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có $G' = f(G)$ là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Ta giải bài toán đã cho với tam giác đều $A_1B_1C_1$ bằng phương pháp Ơclit như sau (H.16) :

Với phép quay góc 120° quanh trọng tâm G' của tam giác

$A_1B_1C_1$ ta có $A_1 \to B_1$, $B_1 \to C_1$, $C_1 \to A_1$ nghĩa là tam giác $A_1B_1C_1$ thành chính nó , khi đó $C_1' \to A_1'$, $A_1' \to B_1'$, $B_1' \to C_1'$ và điểm G' cũng là trọng tâm của tam giác $A_1'B_1'C_1'$ .Thực hiện phép afin f^{-1} ta chứng minh được $G = f^{-1}(G')$ là trọng tâm của tam giác A'B'C' . Vậy hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm G .

§8. HÌNH HỌC ĐỒNG DẠNG

1.ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH ĐỒNG DẠNG

a)Định nghĩa : Ánh xạ tuyến tính $\varphi : \vec{E} \to \overrightarrow{E'}$ của các không gian vectơ Ơclit $\vec{E}$ và $\overrightarrow{E'}$ gọi là một *ánh xạ tuyến tính đồng dạng* nếu có số thực $k \neq 0$ để :

$$\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y}) = k.\vec{x}.\vec{y} \quad \text{với mọi } \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}.$$

b)Tính chất

• Số thực $k > 0$ (khi $\dim \vec{E} > 0$) vì với $\vec{x} = \vec{y} \neq \vec{0}$ thì $[\varphi(\vec{x})]^2 = k\vec{x}^2$

• Mọi ánh xạ tuyến tính trực giao đều là ánh xạ tuyến tính đồng dạng (với k = 1) .

• Tích những ánh xạ tuyến tính đồng dạng là một ánh xạ tuyến tính đồng dạng .

c)Định lí. Một ánh xạ $\varphi : \vec{E} \to \vec{E}$ của không gian vectơ Ơclit vào chính nó là một phép biến đổi tuyến tính nếu có một số thực $k \neq 0$ sao cho với mọi vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ của $\vec{E}$ ta có :

$$\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y}) = k.\vec{x}.\vec{y}$$

Phép biến đổi tuyến tính này biến một cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực giao .

Chứng minh

Gọi $\{\overrightarrow{e_i}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\vec{\mathbf{E}}$. Qua ánh xạ φ ta có $\varphi(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{e_i'}$ với i=1,2,...,n . Vì $\varphi(\overrightarrow{e_i}).\varphi(\overrightarrow{e_j}) = k.\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j}$ với $i \neq j$ nên $\{\overrightarrow{e_i'}\}$ là một hệ n vectơ trực giao và $\overrightarrow{e_i'} = \sqrt{k}\ \overrightarrow{e_i}$ (với $k > 0$) . Vì hệ vectơ trực giao là một hệ vectơ độc lập tuyến tính nên ta có thể dùng hệ $\{\overrightarrow{e_i'}\}$ làm một cơ sở của $\vec{\mathbf{E}}$.

Gọi Ψ là phép biến đổi tuyến tính xác định bởi hai cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$ và $\{\overrightarrow{e_i'}\}$. Ta sẽ chứng minh φ trùng với Ψ .

Với vectơ $\vec{x}$ bất kì thuộc $\vec{\mathbf{E}}$ ta có : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i' \overrightarrow{e_i'}$$

$$\text{Còn } \Psi(\vec{x}) = \Psi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i'}$$

Theo tính chất của φ ta có : $\varphi(\vec{x}).\overrightarrow{e_i'} = \varphi(\vec{x}).\varphi(\overrightarrow{e_i}) = k.\ \vec{x}.\overrightarrow{e_i}$

$$= k\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}\Big).\overrightarrow{e_i} = k.x_i \qquad (1)$$

Mặt khác ta có $\Psi(\vec{x}).\overrightarrow{e_i'} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i'}\Big).\overrightarrow{e_i'} = k\ x_i \qquad (2)$

và $\qquad \varphi(\vec{x}).\overrightarrow{e_i'} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i' \overrightarrow{e_i'}\Big).\overrightarrow{e_i'} = x_i' \overrightarrow{e_i'}^2 = k.x_i' \qquad (3)$

Từ (1) và (3) ta rút ra $x_i = x_i'$ với mọi vectơ $\vec{x} \in \vec{\mathbf{E}}$. Mặt khác từ (2) và (3) ta kết luận $\varphi(\vec{x}) \equiv \Psi(\vec{x})$ với mọi $\vec{x} \in \vec{\mathbf{E}}$. Vậy ánh xạ φ có tính chất $\varphi(\vec{x}).\varphi(\vec{y}) = k.\vec{x}.\vec{y}$ với mọi $\vec{x}, \vec{y}$ thuộc $\vec{\mathbf{E}}$ là một phép biến đổi tuyến tính và do đó ta suy ra ánh xạ φ là một ánh xạ tuyến tính đồng dạng .

2.PHÉP ĐỒNG DẠNG

a)Định nghĩa. Phép biến đổi f: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ gọi là *phép đồng dạng* nếu với hai điểm bất kì M,N của $\mathbf{E}^n$ và ảnh của chúng là M' = f(M) , N' = f(N) ta luôn có :

$$d(M',N') = k \, . \, d(M,N)$$

trong đó k là một số dương cố định được gọi là *tỉ số đồng dạng* của phép đồng dạng f . Do đó :

- Với k = 1 ta được phép đồng dạng f là phép dời hình .
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|\mathbf{k}|$

b) Định lí. Phép đồng dạng là một phép afin .

Chứng minh

Giả sử f : $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ là phép đồng dạng tỉ số k. Lấy một điểm O thuộc $\mathbf{E}^n$, gọi O' = f(O). Ta định nghĩa ánh xạ φ: $\overrightarrow{\mathbf{E}^n} \to \overrightarrow{\mathbf{E}^n}$ như sau :

Nếu $\vec{x}$ là một vectơ thuộc $\overrightarrow{\mathbf{E}^n}$, gọi M là điểm sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$. Sau đó lấy M' = f(M) và đặt $\varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{O'M'}$. Ta cần chứng minh φ là ánh xạ tuyến tính . Thật vậy với mọi điểm M,N thuộc $\mathbf{E}^n$ ta có :

$$d^2(M,N) = \left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right)^2 = \overrightarrow{ON}^2 + \overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM}$$
$$= d^2(O,N) + d^2(O,M) - 2\,\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM} \qquad (1)$$

Nếu M' = f(M) , N' = f(N) thì ta có :

$$d^2(M',N') = (\overrightarrow{O'N'} - \overrightarrow{O'M'})^2 = \overrightarrow{O'N'}^2 + \overrightarrow{O'M'}^2 - 2\overrightarrow{O'N'}.\overrightarrow{O'M'}$$
$$= d^2(O',N') + d^2(O',M') - 2.\overrightarrow{O'N'}.\overrightarrow{O'M'} \qquad (2)$$

Mặt khác vì f là phép đồng dạng nên ta có :

$$d^2(M',N') = k^2\, d^2(M,N)$$

$$d^2(O',N') = k^2\, d^2(O,N)$$

$$d^2(O',M') = k^2\, d^2(O,M)$$

Do đó từ (1) và (2) ta suy ra $\overrightarrow{O'M'}.\overrightarrow{O'N'} = k^2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$

hay $\varphi(\overrightarrow{OM}).\varphi(\overrightarrow{ON}) = k^2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$.

Vậy theo định lí ở mục c,1,§8 ta có ánh xạ φ là một ánh xạ tuyến tính (φ còn là một phép biến đổi tuyến tính của $\overrightarrow{\mathbf{E}}$).

Từ định nghĩa của φ ta thấy rằng φ là phép biến đổi tuyến tính liên kết với phép đồng dạng f ,nên phép đồng dạng f là một phép afin .

Hệ quả. Phép biến đổi afin $f : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{E}^n$ là một phép đồng dạng tỉ số k khi và chỉ khi phép biến đổi tuyến tính φ liên kết với f có tính chất :

$$|\varphi(\vec{x})| = k\,|\vec{x}| \text{ với mọi } \vec{x} \in \overrightarrow{\mathbf{E}^n} .$$

c)Định lí .Tập hợp các phép biến đổi đồng dạng của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ làm thành một nhóm gọi là *nhóm đồng dạng* được kí hiệu là $\mathscr{S}^n$ .Nó là nhóm con của nhóm afin và chứa nhóm dời hình .Ta có :

$$\mathscr{D}^n \subset \mathscr{S}^n \subset \mathscr{A}^n.$$

Chứng minh

Nếu phép đồng dạng f của $\mathbf{E}^n$ biến các điểm M,N thành M',N' thì d(M',N') = k d(M,N) trong đó k là tỉ số đồng dạng của f. Khi đó phép đảo ngược của f là f^{-1} sẽ biến các điểm M',N' thành M,N và ta có $d(M,N) = \frac{1}{k} d(M',N')$ nên f^{-1} cũng là phép đồng dạng với tỉ số $\frac{1}{k}$.

Nếu f và g là hai phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ có tỉ số lần lượt là k_1 và k_2 thì với hai điểm bất kì của $\mathbf{E}^n$ là M,N ta đặt :

$$M' = f(M)\ ,\ N' = f(N)$$

$$M'' = g(M') = (g_\circ f)(M)\ ,\ N'' = g(N') = (g_\circ f)(N).$$

thì $d(M'',N'') = k_2\, d(M',N') = k_2 k_1\, d(M,N)$.

Vậy tích $g_\circ f$ là phép đồng dạng với tỉ số $k_2.k_1$ .Do đó tập hợp các phép biến đổi đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ là nhóm con của nhóm afin .Rõ ràng nhóm đồng dạng này chứa nhóm các phép dời .

d)Hình học đồng dạng. Hai hình tương ứng với nhau qua một phép đồng dạng gọi là *hai hình đồng dạng với nhau.* Hình học của nhóm đồng dạng gọi là *hình học đồng dạng* . Hình học đồng dạng nghiên cứu những bất biến của nhóm đồng dạng $\mathscr{S}^n$ tức là những tính chất không thay đổi qua phép đồng dạng .

Vì $\mathscr{D}^n \subset \mathscr{S}^n \subset \mathscr{A}^n$ nên hình học afin là một bộ phận của hình học đồng dạng và hình học đồng dạng là một bộ phận của hình học Ơclit. Như vậy trong hình học đồng dạng có mọi khái niệm và tính chất afin , nhưng có một số khái niệm ,tính chất của hình học Ơclit không phải là các khái niệm ,tính chất của hình học đồng dạng như độ dài đoạn thẳng ,khoảng cách từ một điểm đến một m - phẳng ,diện tích các hình phẳng ,thể tích các hình không gian v.v ...

CHÚ Ý. Độ dài đoạn thẳng không phải là một bất biến đồng dạng ,nhưng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng là một bất biến đồng dạng .Ngoài ra ta còn có số đo góc của hai đường thẳng cũng là một bất biến đồng dạng. Từ đó ta suy ra định lí Pitago là một định lí của hình học đồng dạng và rất nhiều những khái niệm như hình vuông, hình tam giác đều, đường tròn, đều là những khái niệm của hình học đồng dạng .

§9. SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG E^n

1.DẠNG CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG TRÌNH SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG E^n

Trong không gian Ơclit E^n với mục tiêu trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ giả sử cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^* A[x] + 2[a]^* [x] + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Vì A là một ma trận vuông cấp n đối xứng nên ta luôn luôn có thể tìm được một ma trận trực giao B sao cho B^*AB có dạng chéo .Ta dùng phép biến đổi tọa độ trực chuẩn : $[x] = B[x']$, thì đối với mục tiêu mới ,phương trình của (S) có dạng :

$$[x']^* B^*AB[x'] + 2[a]^*B[x'] + a_0 = 0 \qquad (2)$$

Vì B^*AB có dạng chéo nên phương trình (2) có dạng :

$$\sum_{i=1}^{r} b_i {x'_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{r} c_i x'_i + d = 0 \qquad (3)$$

trong đó $1 \le r \le n$, các $b_i \neq 0$ với $i = 1,2,....,r$.

Ta chú ý rằng vì B là ma trận trực giao nên mục tiêu mới cũng trực chuẩn . Như vậy bước thứ nhất ta đã chứng minh được rằng luôn luôn có thể tìm được một mục tiêu trực chuẩn sao cho phương trình của (S) đối với mục tiêu đó có dạng (3) tức là vắng mặt các số hạng chữ nhật $x_i x_j$ với $i \neq j$.

Bây giờ dùng phép dời mục tiêu trực chuẩn :

$$\begin{cases} x''_i = x'_i + \dfrac{c_i}{b_i} & \text{với } i = 1,2,....,r \\ x''_j = x'_j & \text{với } j = r+1,....,n \end{cases} \qquad (4)$$

thì phương trình (3) trở thành :

$$\sum_{i=1}^{r} b_i x_i^{''2} + 2\sum_{j=r+1}^{n} c_j x_j^{''} + d' = 0 \qquad (5)$$

Chú ý rằng việc chuyển mục tiêu theo công thức (4) là một phép tịnh tiến mục tiêu nên kết quả ta vẫn được một mục tiêu trực chuẩn .

• Nếu $c_j = 0$ với $j = r+1, \ldots, n$ và $d' \neq 0$ thì phương trình (5) của (S) sẽ có dạng :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^{''2} = 1 \qquad , 1 \leq r \leq n} \qquad (\mathrm{I})$$

• Nếu $c_j = 0$, $j = r+1, \ldots, n$ và $d = 0$ thì phương trình của (S) có dạng :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^{''2} = 0 \qquad , 1 \leq r \leq n} \qquad (\mathrm{II})$$

• Cuối cùng nếu $r < n$ và có ít nhất một số $c_j \neq 0$ giả sử $c_{r+1} \neq 0$. Trong trường hợp này ở phương trình (5) của (S) ta luôn luôn có thể giả thiết $d' = 0$, bởi vì nếu $d' \neq 0$ thì dùng phép tịnh tiến mục tiêu :

$$\begin{cases} x_{r+1}^{'''} = x_{r+1}^{''} + \dfrac{d'}{c_{r+1}} \\ x_i^{'''} = x_i^{''} \qquad \text{với } i \neq r+1 \end{cases} \qquad (6)$$

ta sẽ được phương trình không còn hệ số tự do đã được xét ở dạng II . Bởi vậy ta xét phương trình (5) trong đó $d' = 0$.

Đặt $m = \sqrt{\sum_{j=r+1}^{n} c_j^2}$ và $c_j' = \dfrac{c_j}{m}$ với $j = r+1, r+2, \ldots, n$

thì phương trình (5) có dạng :

$$\sum_{i=1}^{r} b_i x_i^{''2} + 2m\sum_{j=r+1}^{n} c_j' x_j^{''} = 0 \qquad (7)$$

trong đó các c'_j thỏa mãn điều kiện $\sum_{j=r+1}^{n} c_j'^2 = 1$

Bây giờ dùng phép đổi mục tiêu sau đây :

$$\begin{cases} X_i = x_i'' & \text{với} \quad i = 1,2,\dots,r \\ X_{r+1} = \sum_{j=r+1}^{n} c_j' x_j'' & \\ X_k = \sum_{j=r+1}^{r} \gamma_{kj} x_j'' & ,k = r+2,\dots,n \end{cases} \tag{8}$$

Ta có thể chọn các số γ_{kj} sao cho ma trận của phép biến đổi (8) ở trên là ma trận trực giao. Khi đó mục tiêu mới nhận được là mục tiêu trực chuẩn. Đối với mục tiêu mới này phương trình (7) của (S) có dạng :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} b_i X_i^2 + 2mX_{r+1} = 0 \qquad ,1 \le r < n} \tag{III}$$

Ba dạng (I) , (II) , (III) tìm được ở trên là ba dạng chính tắc của phương trình siêu mặt bậc hai (S) . Do đó ta có định lí :

Định lí . Đối với mọi siêu mặt bậc hai (S) trong $\mathbf{E}^n$, ta luôn luôn tìm được một mục tiêu trực chuẩn sao cho phương trình của (S) đối với mục tiêu đó có một trong ba dạng chính tắc (I) , (II) , (III) ở trên .

Hệ quả. Hai siêu mặt bậc hai gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng có phương trình chính tắc giống nhau .

2. THÍ DỤ

Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$x^2_1 + x^2_2 + 4x^2_3 + 2\,x_1x_2 + 4\,x_1x_3 + 4\,x_2x_3 - 6\,x_3 + 1 = 0$$

Hãy tìm mục tiêu trực chuẩn sao cho (S) có dạng chính tắc và viết phương trình chính tắc đó .

Giải

Ma trận A của siêu mặt bậc hai (S) đối với mục tiêu cho trước là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là :

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^2(\lambda - 6)$$

Vậy A có hai giá trị riêng là $\lambda_{1,2} = 0$ và $\lambda_3 = 6$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ các vectơ riêng có tọa độ thỏa mãn phương trình $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, tức có dạng :

$\vec{a} = (\alpha, \beta, -\dfrac{\alpha+\beta}{2})$ .Ta lấy một trong các vectơ đó: $\overrightarrow{a_1} = (1,-1, 0)$

Vectơ thứ hai là $\overrightarrow{a_2}$ ta chọn vuông góc với $\overrightarrow{a_1}$ và cũng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 0$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{a_2}$ này phải thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & (\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_1} = 0 \text{ để } \overrightarrow{a_2} \perp \overrightarrow{a_1}) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & (\text{ứng với giá trị riêng } \lambda_2 = 0). \end{cases}$$

Ta có thể chọn $\overrightarrow{a_2} = (1,1, -1)$ có tọa độ thỏa mãn các điều kiện trên. Vectơ $\overrightarrow{a_3}$ được chọn phải vuông góc với $\overrightarrow{a_1}$ và $\overrightarrow{a_2}$ đồng thời thỏa mãn phương trình ứng với giá trị riêng $\lambda_3 = 6$ tức là :

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ta có thể chọn $\overrightarrow{a_3} = (1,1,2)$ có tọa độ thỏa mãn các điều kiện trên. Như vậy ba vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ vuông góc với nhau từng đôi một. Ta hãy chuẩn hóa ba vectơ đó như sau (để cho các vectơ đó có độ dài bằng 1) :

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{a_1}}{\left|\overrightarrow{a_1}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{a_2}}{\left|\overrightarrow{a_2}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{u_3} = \frac{\overrightarrow{a_3}}{\left|\overrightarrow{a_3}\right|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Vậy ta có cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$mà ma trận chuyển cơ sở là B trong phép biến đổi tọa độ trực chuẩn [x] = B [x'] . Ta có :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Qua phép biến đổi [x] = B [x'] ma trận A của (S) trở nên ma trận B* AB có dạng chéo như sau :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Cũng qua phép biến đổi [x] = B[x'], phần bậc nhất $-6x_3 + 1$ trong phương trình đã cho của (S) trở nên :

$$-6\left(-\frac{x'_2}{\sqrt{3}} + \frac{2x'_3}{\sqrt{6}}\right) + 1$$

Vậy đối với mục tiêu mới, ứng với cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ phương trình của (S) là :

$$6{x'_3}^2 + \frac{6x'_2}{\sqrt{3}} - \frac{12x'_3}{\sqrt{6}} + 1 = 0$$

Dùng phép biến đổi mục tiêu trực chuẩn :

$$\begin{cases} X_1 = x'_1 \\ X_2 = x'_2 \\ X_3 = x'_3 - \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

thì trong mục tiêu trực chuẩn mới này (S) có phương trình :

$$6X_3^2 + \frac{6X_2}{\sqrt{3}} = 0$$

hay $$\sqrt{3}\,X_3^2 + X_2 = 0$$

Đây là mặt trụ parabolic .

3. PHƯƠNG CHÍNH CỦA SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG E^n

a)Định nghĩa. Trong không gian Ơclit E^n với mục tiêu trực chuẩn cho trước , cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình :

$$[x]^* A\,[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0$$

Vectơ $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq \vec{0}$ gọi là *phương chính* của (S) nếu $A[c] = \lambda\,[c]$ tức là $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = \lambda c_i$ với i=1,2 , ..., n

• Nói cách khác vectơ $\vec{c}$ là phương chính của (S) nếu $\vec{c}$ là vectơ riêng của ma trận A .

b) Tính chất

• Phương chính không phải là phương tiệm cận khi và chỉ khi giá trị riêng tương ứng $\lambda \neq 0$.

Thật vậy vectơ $\vec{c}$ là phương chính của siêu mặt bậc hai (S) khi và chỉ khi $A[c] = \lambda [c]$. Từ đó ta suy ra $[c]^*A[c] = \lambda [c]^*[c]$.

Do $\vec{c} \neq \vec{0}$ nên $[c]^*[c] \neq 0$.Vậy $[c]^*A[c] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ (vectơ $\vec{c} \neq \vec{0}$ gọi là phương tiệm cận của (S) nếu $[c]^*A[c] = 0$)

• Siêu phẳng kính liên hợp với phương chính $\vec{c}$ thì có phương vuông góc với $\vec{c}$.

Thật vậy nếu $\vec{c}$ không phải là phương tiệm cận của (S) nghĩa là $[c]^*A[c] \neq 0$ thì siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$ có phương trình :

$$[x]^*A[c] + [a]^*[c] = 0$$

Vì $\vec{c}$ là phương chính của (S) nên $A[c] = \lambda[c]$ .Do đó $\vec{c}$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng kính có phương trình trên .

• *Siêu phẳng kính chính.* Siêu phẳng kính liên hợp với một phương chính gọi là siêu phẳng kính chính .Vì $\vec{c}$ là phương chính của (S) và đồng thời $\vec{c}$ là vectơ pháp tuyến của siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{c}$ nên ta suy ra phép đối xứng qua siêu phẳng kính chính của (S) sẽ biến (S) thành chính nó .

c)Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$ đối với một hệ tọa độ trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$, nếu phương trình của siêu mặt bậc hai (S) có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0$$

thì các vectơ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ đều là những phương chính của (S) .

Chứng minh

Theo giả thiết , ma trận A của (S) là :

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ & b_2 & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & b_n \end{bmatrix}$$

nên các vectơ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}$ là các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng $b_1, b_2, ..., b_n$.

§10. SIÊU CẦU TRONG E^n

1.ĐỊNH NGHĨA

Trong không gian $\mathbf{E}^n$ cho một điểm I cố định , tập hợp tất cả những điểm M thuộc $\mathbf{E}^n$ sao cho $d(I,M) = r$ với số thực $r > 0$ cho trước gọi là siêu cầu (thực) tâm I , bán kính r.

Ta kí hiệu siêu cầu $S(I,r) = \{M \in \mathbf{E}^n \mid d(I,M) = r\}$.

Trong $\mathbf{E}^2$ siêu cầu là đường tròn còn trong $\mathbf{E}^3$ siêu cầu là mặt cầu.

2.PHƯƠNG TRÌNH CỦA SIÊU CẦU THỰC

Giả sử đối với một mục tiêu trực chuẩn, điểm I có tọa độ trực chuẩn là $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và gọi tọa độ trực chuẩn của điểm M là $(x_1, x_2, ... , x_n)$, khi đó điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên siêu cầu (thực) tâm I bán kính r là :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2} = r \quad \text{hay} \quad \boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 = r^2}$$

Phương trình siêu cầu S (I,r) còn có thể viết dưới dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - r^2 = 0 \qquad (1)$$

Vậy siêu cầu thực S (I,r) là một siêu mặt bậc hai .

3.SIÊU CẦU TỔNG QUÁT

Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$, với mục tiêu trực chuẩn cho trước một siêu mặt bậc hai (S) gọi là *siêu cầu tổng quát* nếu nó xác định bởi phương trình dạng :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0} \qquad (2)$$

hay $$\sum_{i=1}^{n}(x_i + a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o \qquad (2')$$

a) Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o > 0$ thì (2') là phương trình của một *siêu cầu thực* , tâm I ($-a_1$, $-a_2$,..., $-a_n$), bán kính $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o}$

b) Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o = 0$ thì siêu cầu (S) gọi là *siêu cầu điểm* tâm I,bán kính r =0

c) Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - a_o < 0$ thì siêu cầu (S) được gọi là *siêu cầu ảo* tâm I vì nó không chứa điểm thực nào .

4.MIỀN TRONG VÀ MIỀN NGOÀI CỦA SIÊU CẦU THỰC

Cho siêu cầu thực S(I,r) trong $\mathbf{E}^n$. *Miền trong* của siêu cầu S(I,r) là tập hợp các điểm T thuộc $\mathbf{E}^n$ mà d(I,T) < r, còn *miền ngoài* của siêu cầu đó là tập hợp các điểm N thuộc $\mathbf{E}^n$ mà d(I,N) > r . Miền trong của siêu cầu là một tập lồi còn đoạn thẳng nối một điểm thuộc miền trong với một điểm thuộc miền ngoài phải cắt mặt cầu S(I,r) tại một điểm .

Thật vậy , mọi điểm M thuộc đoạn thẳng PQ xác định bởi :

$$\overrightarrow{IM} = t\,\overrightarrow{IP} + (1-t)\,\overrightarrow{IQ} \quad , 0 \le t \le 1$$

Do đó $\overrightarrow{IM}^2 = t^2\,\overrightarrow{IP}^2 + (1-t)^2\,\overrightarrow{IQ}^2 + 2t(1-t)\,\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ}$

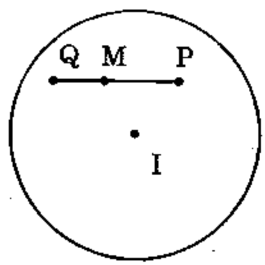
•Nếu P,Q thuộc miền trong thì :

$$\overrightarrow{IP}^2 < r^2 , \ \overrightarrow{IQ}^2 < r^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} \le |\overrightarrow{IP}|.|\overrightarrow{IQ}| < r^2$$

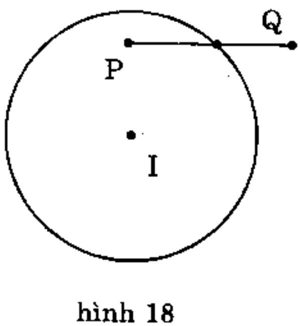
nên $\overrightarrow{IM}^2 < r^2[t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)] = r^2$

Vậy M là một điểm thuộc miền trong (H.17).



hình 17

•Nếu P thuộc miền trong , Q thuộc miền ngoài thì hàm số :



hình 18

$$f(t) = t^2\,\overrightarrow{IP}^2 + (1-t)^2\,\overrightarrow{IQ}^2 + 2t(1-t)\,\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} \text{ với } 0 \le t \le 1$$

$$f(0) = \overrightarrow{IQ}^2 > r^2$$

$$f(1) = \overrightarrow{IP}^2 < r^2$$

Vậy có t với 0 < t < 1 để f(t) = r^2, tức đoạn thẳng PQ cắt siêu cầu S(I,r) tại một điểm (H.18).

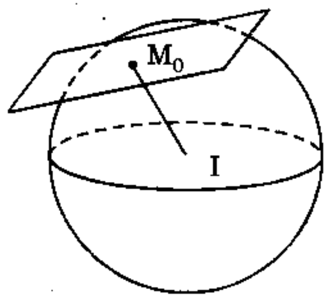
5.PHƯƠNG CHÍNH VÀ SIÊU PHẲNG KÍNH CHÍNH CỦA SIÊU CẦU

• Đối với siêu cầu tổng quát mọi vectơ $\vec{c} \neq \vec{0}$ (thực) đều không phải là phương tiệm cận và luôn luôn là *phương chính* . Thật vậy vì ma trận A của phương trình siêu cầu tổng quát là ma trận đơn vị nên mọi $\vec{c} \neq \vec{0}$ đều là phương chính .

• Mọi siêu phẳng đi qua tâm $I(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ của siêu cầu tổng quát đều có phương trình dạng $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i + a_i) = 0$

Vậy đó là phương trình siêu phẳng kính liên hợp với phương $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, nhưng theo chứng minh trên $\vec{\alpha}$ là phương chính , nên siêu phẳng đó là *siêu phẳng kính chính*.

• Siêu phẳng đi qua điểm M_o thuộc siêu cầu S(I,r) và vuông góc với đường thẳng IM_o gọi là *siêu tiếp diện* của siêu cầu đó tại điểm $M_o(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$.



hình 19

Vectơ $\overrightarrow{IM_o}(x_1^o + a_1, x_2^o + a_2, \dots, x_n^o + a_n)$ là vectơ pháp tuyến của siêu tiếp diện (H.19). Đường thẳng qua tâm I của siêu cầu được gọi là *đường kính* của nó .

6.PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI SIÊU CẦU

a)Định nghĩa. Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước , cho siêu cầu (S) có phương trình :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o = 0$$

Với mỗi điểm M_o thuộc $\mathbf{E}^n$ có tọa độ trực chuẩn bằng $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$, giá trị

$$f(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{o^2} + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^o + a_o$$

được gọi là *phương tích của điểm M_o đối với siêu cầu (S)* và kí hiệu là $\mathscr{P}(M_o)/(S)$.

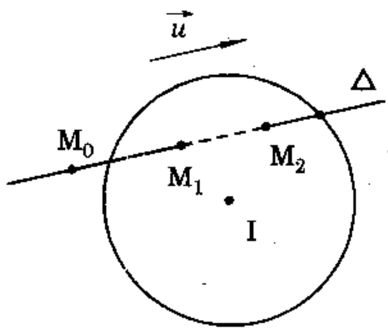
Ta có $\mathscr{P}(M_o)/(S) = f(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$

b)Định lí : Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu cầu (S) tâm I bán kính r và một đường thẳng Δ đi qua điểm M_o cắt siêu cầu (S) tại hai điểm M_1 và M_2 thì khi đó :

$$\mathscr{P}(M_o)/(S) = \overrightarrow{M_oM_1} . \overrightarrow{M_oM_2}$$

Chứng minh

Giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, điểm M_o có tọa độ $(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$ và vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ có tọa độ là :



hình 20

$$\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$$

Khi đó đường thẳng Δ có phương trình :

$$x_i = x^o_i + \lambda u_i \text{ với } i = 1,2, ...,n.$$

Để tìm các giao điểm M_1, M_2 của đường thẳng Δ (H.20) với mặt cầu (S) ta phải giải phương trình sau :

$$([x^o] + [\lambda u])^* ([x^o] + [\lambda u]) + 2 [a]^* ([x^o] + [\lambda u]) + a_o = 0$$

hay $([u]^*[u])\lambda^2 + 2([u]^*[x^o] + [a]^*[u])\lambda + [x^o]^*[x^o] + 2[a]^*[x^o] + a_o = 0$

Đây là một phương trình bậc hai đối với λ . Gọi λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình trên , ứng với hai giao điểm M_1, M_2 . Ta có :

$$\lambda_1.\lambda_2 = \frac{[x^o]^*[x^o] + 2[a]^*[x] + a_o}{[u]^*.[u]} = \frac{f(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)}{[u]^*.[u]}$$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{M_oM_1} = \lambda_1 \vec{u}$

$$\overrightarrow{M_oM_2} = \lambda_2 \vec{u}$$

Do đó : $\overrightarrow{M_oM_1} . \overrightarrow{M_oM_2} = \lambda_1.\lambda_2 \ \vec{u}^2 = \lambda_1.\lambda_2 [u]^*.[u]$

$$= f(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o) = \mathscr{P}(M_o)/(S)$$

7.SIÊU PHẲNG ĐẲNG PHƯƠNG

a)Định lí. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai siêu cầu (S_1) và (S_2) có tâm không trùng nhau. Khi đó tập hợp những điểm M có cùng phương tích đối với (S_1) và (S_2) sẽ nằm trên một siêu phẳng. Siêu phẳng này vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai siêu cầu đã cho.

Chứng minh

Trong $\mathbf{E}^n$ giả sử đối với mục tiêu trực chuẩn cho trước , cho hai siêu cầu có tâm không trùng nhau lần lượt có phương trình là :

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = [x]^*[x] + 2[a]^*[x] + a_o = 0 \quad (S_1)$$

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = [x]^*[x] + 2[b]^*[x] + b_o = 0 \quad (S_2)$$

Những điểm $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ có cùng phương tích đối với (S_1) và (S_2) phải có tọa độ thỏa mãn điều kiện :

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$$

hay $$2([a] - [b])^* [x] + a_o - b_o = 0 \qquad (1)$$

Siêu cầu (S_1) có tâm $I_1 = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$

Siêu cầu (S_2) có tâm $I_2 = (-b_1, -b_2, \dots, -b_n)$

Vì $I_1 \neq I_2$ nên $[a] \neq [b]$ nên (1) là phương trình của một siêu phẳng. Siêu phẳng này nhận vectơ $\vec{n} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$ làm vectơ pháp tuyến nên nó vuông góc với đường thẳng nối hai tâm I_1 và I_2 của (S_1) và (S_2) đã cho.

b) Định nghĩa. Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai siêu cầu (S_1) và (S_2) không đồng tâm là một siêu phẳng. Siêu phẳng này gọi là *siêu phẳng đẳng phương* của hai siêu cầu đã cho. Siêu phẳng đẳng phương luôn luôn vuông góc với đường thẳng nối hai tâm của hai siêu cầu cho trước.

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN ƠCLIT VÀ HÌNH HỌC ƠCLIT

§1, §2, §3

2.1. Trong không gian vectơ Ơclit V_E^n ta thành lập ma trận Gram từ hệ vectơ $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}\}$ như sau:

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a_1}^2 & \vec{a_1}.\vec{a_2} & \dots & \vec{a_1}.\vec{a_n} \\ \vec{a_2}.\vec{a_1} & \vec{a_2}^2 & \dots & \vec{a_2}.\vec{a_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{a_n}.\vec{a_1} & \vec{a_n}.\vec{a_2} & \dots & \vec{a_n}^2 \end{bmatrix}$$

a) Chứng minh hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det G > 0$.

b) Hãy tính $\det G$ trong V_E^2 với tích vô hướng được định nghĩa theo cách hiểu thông thường:

$\vec{a_1}.\vec{a_2} = |\vec{a_1}|.|\vec{a_2}|.\cos(\vec{a_1}, \vec{a_2})$

2.2. Trong V_E^4 đối với cơ sở trực chuẩn cho trước cho các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có tọa độ là :

$$\vec{a} = (1,1,1,2)$$
$$\vec{b} = (1,2,3,-3)$$

a) Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$

b) Hãy bổ sung vào $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ hai vectơ nữa để được một cơ sở trực giao.

2.3. Tính diện tích hình bình hành dựng trên hai vectơ $\vec{a} = (8,4,1)$, $\vec{b} = (2,-3,1)$ đối với một cơ sở trực chuẩn .

2.4. Đối với một cơ sở trực chuẩn cho ba vectơ

$\vec{a} = (3,1,2)$, $\vec{b} = (2,7,4)$, $\vec{c} = (1,2,1)$. Tính tích hỗn hợp $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$.

2.5. Tính khoảng cách từ một điểm M_1 đến đường thẳng d cho biết các tọa độ trực chuẩn của điểm M_1 là (x_1,x_2,x_3), của điểm M_o thuộc d là (x_1^o, x_2^o, x_3^o) và đường thẳng d có phương $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$.

2.6. Với hệ tọa độ trực chuẩn $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ cho hai điểm A(2, –1, 3) và B(1, 1, 5). Hình vuông ABCD và điểm $M_o(\frac{5}{2}, -3, 0)$ thuộc mặt phẳng (ABC) . Hãy tìm tọa độ điểm C và D .

2.7. Chứng minh rằng :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 + (\vec{a} . \vec{b})^2 = \vec{a}^2 . \vec{b}^2$$

2.8. Trong không gian vectơ Ơclit V_E^4 đối với cơ sở trực chuẩn cho trước cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có tọa độ lần lượt là $\vec{a} = (1, 1, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 3, -3)$, $\vec{c} = (-7, 5, 0, 1)$. Chứng minh $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$ và hãy bổ sung vào hệ $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ hai vectơ nữa để được một cơ sở trực giao.

2.9.Cho $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c}$ với $\vec{c} \neq \vec{0}$. Có thể suy ra $\vec{a} = \vec{b}$ hay không?

2.10.Với hệ tọa độ trực chuẩn trong $\mathbf{E}^3$, cho ba điểm $A(3,4,-1)$, $B(2,0,3)$, $C(-3,5,4)$. Hãy chứng tỏ ba điểm đó không thẳng hàng và hãy tính diện tích của tam giác ABC đó.

2.11.Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho các vectơ:

$$\vec{a} = (3,0,-1),\ \vec{b} = (2,4,3)$$
$$\vec{c} = (-1,3,2),\ \vec{d} = (2,0,1)$$

Hãy tính $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}$ và $(\vec{a} \wedge \vec{c}).(\vec{b} \wedge \vec{d})$.

2.12.Trong không gian vectơ Ơclit n chiều V_E^n cho một hệ vectơ độc lập tuyến tính $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$. Chứng minh rằng tồn tại một hệ vectơ duy nhất $\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_n}\}$ sao cho:

$$\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{b_j} = \delta_{ij} \quad \text{với } i,j = 1,2,\dots,n$$

Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{x}$ có tọa độ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{a_i}\}$ còn vectơ $\vec{y}$ có tọa độ $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{b_i}\}$ thì:

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

2.13.Giả sử trong V_E^n đã chọn một cơ sở $\{\overrightarrow{e_i}\}$.Đối với mỗi vectơ đơn vị $\vec{e}$ ta đặt $\alpha_i = \varphi(\vec{e}, \overrightarrow{e_i})$. Chứng minh rằng:

$$\vec{e} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i} \cos\alpha_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$$

2.14.Cho hai đoạn thẳng AB và CD có độ dài không đổi lần lượt nằm trên hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 trong không gian $\mathbf{E}^3$.Chứng minh rằng thể tích của tứ diện ABCD không phụ thuộc vào vị trí của các đoạn thẳng AB và CD trên d_1 và d_2 .

2.15.Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^3$ cho bốn điểm A,B,C,D tùy ý . Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 .$$

Từ đẳng thức trên hãy suy ra một vài mệnh đề quen biết trong hình học .

2.16.Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A,B,C,D của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ ta đều có :

$$d(AB) + d(CD) + d(AC) + d(BD) \geq d(AD) + d(BC)$$

§4 , §5

2.17. Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước , cho siêu phẳng P có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$$

a) Chứng minh rằng vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, ... , a_n)$ vuông góc với phương của P. Vectơ $\vec{a}$ đó được gọi là *vectơ pháp tuyến* của siêu phẳng P.

b) Viết phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm M_o ($x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o$) và vuông góc với siêu phẳng P.

2.18.Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước cho m-phẳng P có phương trình :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0 \qquad , i = 1,2, . . ., n - m.$$

a) Chứng tỏ rằng n–m vectơ $\overrightarrow{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ với i =1,2, ..., n–m độc lập và tạo nên cơ sở của phương bù vuông góc với phương của phẳng P.

b) Viết phương trình tham số của cái phẳng Q đi qua điểm $C(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ và bù vuông góc với m– phẳng P đã cho .

2.19. Trong $\mathbf{E}^5$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước :

a) Lập phương trình tổng quát của phẳng P có số chiều bé nhất chứa các điểm A(1,3, −1,4,5) , B(2,3, −1,4,5) và chứa phương $\vec{p}(0,1,0,0,0)$.

b) Lập phương trình tổng quát của phẳng Q đi qua điểm A đã cho và bù vuông góc với phẳng P.

2.20. Trong $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn đã cho , xét vị trí tương đối của hai cái phẳng P và Q lần lượt cho bởi phương trình tham số của chúng như sau :

$$P: \begin{cases} x_1 = 2 + v \\ x_2 = 1 + 4v + 3u \\ x_3 = \quad 3v + u \\ x_4 = 5 + 11v + 3u \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 + 3t \\ x_4 = 2 - t \end{cases}$$

2.21. Trong $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước xét vị trí tương đối của hai cái phẳng R và S lần lượt cho bởi phương trình tổng quát của chúng như sau:

$$R : x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3 = 0$$

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2.22. Trong $\mathbf{E}^3$ viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d có phương trình :

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

và vuông góc với mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$

2.23. Hãy tìm công thức tính khoảng cách giữa hai siêu phẳng song song trong $\mathbf{E}^n$,sau đó hãy áp dụng công thức vừa tìm được để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nhau trong $\mathbf{E}^3$ và lần lượt có phương trình .

$$P : 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 = 0$$

$$P' : 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 21 = 0.$$

2.24. Trong $\mathbf{E}^3$ tìm điểm đối xứng của điểm (1,2,3) đối với :

a) mặt phẳng $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 68 = 0$

b) đường thẳng $x_1 - 8 = \dfrac{x_2 - 11}{3} = - x_3 + 4.$

2.25. Trong $\mathbf{E}^3$ cho một tứ diện ABCD. Các đỉnh có tọa độ trực chuẩn là :

$$A = (0,0,2)\ ,\ B = (3,0,5)\ ,\ C = (1,1,0)\ ,\ D = (4,1,2).$$

Tính chiều cao của tứ diện hạ từ đỉnh D tới mặt ABC.

2.26. Trong $\mathbf{E}^3$ tìm khoảng cách từ điểm (1,3,5) tới đường thẳng có phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

2.27. Trong $\mathbf{E}^3$ tìm khoảng cách giữa các cặp đường thẳng lần lượt có phương trình :

a) $d_1: \begin{cases} x_1 = 3 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 2 - 2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x_1 = - u \\ x_2 = 2 + 3u \\ x_3 = 3u \end{cases}$

b) $m_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0 \end{cases}$ và $m_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 9 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

2.28. Trong $\mathbf{E}^4$ với mục tiêu trực chuẩn đã cho ,cho mặt phẳng P đi qua ba điểm : A(1,1,1,1) , B(2,2,0,0) , C(1,2,0,1) và đường thẳng d đi qua hai điểm D(1,1,1,2) , E(1,1,2,1).

a)Chứng minh P và d chéo nhau.

b)Viết phương trình đường vuông góc chung và tính độ dài đoạn vuông góc chung .

2.29. Trong $\mathbf{E}^n$ hãy tìm quỹ tích :

a)những điểm cách đều hai điểm A, B phân biệt cho trước

b)những điểm cách đều ba điểm A, B, C độc lập cho trước.

2.30. Hãy tìm độ dài đường chéo của hình "lập phương n chiều" cạnh a trong không gian $\mathbf{E}^n$.

2.31. Trong $\mathbf{E}^n$ cho siêu phẳng đi qua các điểm :

$$A_1 = (a_1, 0, \dots, 0)$$
$$A_2 = (0, a_2, \dots, 0)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots$$
$$A_n = (0, 0, \dots, a_n)$$

Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ tới siêu phẳng đó .

2.32. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E_i\}$.

Chứng minh rằng đường thẳng $E_oE'_o$ vuông góc với siêu phẳng chứa đơn hình $(E_1,E_2,\dots,E_n)$ tại trọng tâm của đơn hình và tính tọa độ điểm E'_o đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$.

2.33. Trong $\mathbf{E}^n$ cho mục tiêu trực chuẩn$\{E_o;E_i\}$, i =1,2, ... ,n .Trên các đường thẳng E_oE_i ta lấy các điểm A_i không trùng với gốc mục tiêu E_o .

a)Chứng minh hệ n điểm $A_1,A_2,\dots,A_n$ độc lập và lập phương trình siêu phẳng P xác định bởi n điểm A_i độc lập đó.

b)Gọi h là khoảng cách từ E_o tới siêu phẳng P và gọi a_i là các khoảng cách $d(E_oA_i)$, i = 1,2, ... ,n .Chứng minh hệ thức :

$$\frac{1}{h^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}$$

2.34. Viết phương trình đường vuông góc chung của đường thẳng AB và mặt phẳng PQR cho trước trong $\mathbf{E}^4$ biết rằng tọa độ các điểm đó lần lượt là : A(1,1,1,1) , B(−2, −1,1,3) và P(2,1, −1,0) , Q(3,1,0, −1) ,R(0,0, −1,1) .

2.35. Trong $\mathbf{E}^n$ cho đường thẳng d vuông góc với siêu phẳng α và cắt siêu phẳng đó tại điểm M .Gọi A là một điểm tùy ý thuộc d và B là một điểm tuỳ ý trên α .Chứng minh :

$$d(M,A)^2 + d(M,B)^2 = d(A,B)^2 \text{ (định lí Pitago).}$$

2.36. Trong $\mathbf{E}^n$ cho m- phẳng α và k-phẳng β vuông góc với nhau .Chứng minh rằng α và β bù vuông góc với nhau khi và chỉ khi n = m + k .

2.37. Trong $\mathbf{E}^n$ cho hai cái phẳng α và β . Chứng minh rằng :

a)Nếu α song song với β và dimα ≤ dimβ thì với mọi điểm A thuộc α ta đều có d(A,β) = d(α,β) .

b)Nếu α và β chéo nhau hoàn toàn ($\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \vec{0}$) thì có một điểm duy nhất A ∈ α và một điểm duy nhất B ∈ β sao cho đường thẳng AB vừa vuông góc với α vừa vuông góc với β và d(A,B) = d(α,β).

2.38. Trong $\mathbf{E}^n$ cho một điểm I và m− phẳng α không chứa I với m< n đi qua điểm S có phương $\vec{\alpha}$ nhận m vectơ $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_m}\right\}$ làm cơ sở . Gọi J là hình chiếu vuông góc của I xuống α .

Chứng minh : $d^2(I, \alpha) = \overrightarrow{JI}^2 = \dfrac{\left|G_r(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{SI})\right|}{\left|G_r(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_m})\right|}$

2.39. Trong $\mathbf{E}^n$ ($n > 1$) cho hai cái phẳng α và β chéo nhau ($\alpha \cap \beta = \phi$ và $\vec{\alpha} \cap \vec{\beta} = \vec{0}$) .Gọi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_m}\}$ là cơ sở của

không gian vectơ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ và lấy điểm $A \in \alpha$,điểm $B \in \beta$. Chứng minh rằng

$$d^2(\alpha,\beta) = \frac{\left|G_r(\vec{AB}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_m})\right|}{\left|G_r(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_m})\right|}$$

2.40. Trong $\mathbf{E}^n$ tìm tập hợp các điểm M cách đều một siêu phẳng α cho trước một khoảng cách h cho trước .

2.41. Cho không gian afin thực n chiều $\mathbf{A}^n$ với $n \geq 1$ và một hệ tọa độ afin $\{O; \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$ của $\mathbf{A}^n$.

Chứng tỏ rằng có thể biến $\mathbf{A}^n$ trở thành một không gian Ơclit n chiều mà hệ tọa độ đã cho trở thành hệ tọa độ trực chuẩn của không gian Ơclit .

§6,§7,§8

2.42.Trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^2$ xét tính chất của phép biến đổi có phương trình sau đây đối với một mục tiêu trực chuẩn :

a) $$\begin{cases} x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + 1 \\ x_2' = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 6 \\ x_2' = \quad\quad x_2 \end{cases}$$

2.43.Trong E^n cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{E_o;E_i\}$ và $\{E'_o;E_i\}$. Lập phương trình phép đẳng cự (phép dời hình) f đối với mục tiêu $\{E_o;E_i\}$, biến mục tiêu $\{E_o;E_i\}$ thành mục tiêu $\{E'_o;E_i\}$ sao cho $f(E_o) = E_o'$ và $f(E_i) = E_i$ với $i = 1,2,...,n$.

2.44. Trong E^n với hệ mục tiêu trực chuẩn cho vectơ $\vec{v} = (v_1,v_2,...,v_n)$. Hãy viết phương trình phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ đã cho và tìm ảnh của điểm M có tọa độ là (1,2,3,... ,n) qua phép tịnh tiến đó. Chứng tỏ phép tịnh tiến là phép dời hình loại một .

2.45.Trong E^n , đối với một mục tiêu trực chuẩn đã chọn , cho phép biến đổi f có phương trình như sau :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ \dots \quad \dots \\ x'_m = x_m \\ x'_{m+1} = -x_{m+1} \\ \dots \quad \dots \\ x'_n = -x_n \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng f là một phép đẳng cự (phép dời hình)

b) Với những điều kiện nào của m và của n thì phép biến đổi f là phép dời hình loại một hoặc loại hai.

c) Hãy mô tả phép đẳng cự đó cùng với những tính chất của nó nếu $m = n - 1$.

2.46. Trong E^n với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, cho siêu phẳng α có phương trình :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + a_o = 0 \quad \text{với} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$$

Hãy viết biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua siêu phẳng đó và qua đó chứng tỏ rằng siêu phẳng α chứa toàn điểm kép.

2.47. Trong $\mathbf{E}^2$ với hệ tọa độ trực chuẩn cho elip có phương trình

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{với } a \neq b.$$

Viết phương trình các phép đẳng cự (phép dời hình) của $\mathbf{E}^2$ biến elip thành chính nó .

2.48. Trên $\mathbf{E}^n$ chứng minh rằng mỗi định lí của hình học afin (thực) là một định lí của hình học đồng dạng và cũng là một định lí của hình học Ơclit, nhưng ngược lại có thể không đúng.

2.49.Trong $\mathbf{E}^2$ chứng minh rằng khái niệm đa giác lồi đều n cạnh là một khái niệm đồng dạng. Hãy phân loại đồng dạng tập hợp các đa giác lồi đều đó .

2.50. Trong $\mathbf{E}^2$ chứng minh rằng đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác , đường trung trực của một tam giác là các khái niệm đồng dạng. Trong các khái niệm nêu trên, khái niệm nào là khái niệm afin ? Vì sao ?

2.51.Trong các khái niệm liệt kê sau đây, các khái niệm nào là của hình học afin, hình học đồng dạng, hình học Ơclit : đường tròn, đường elip, đường hypebol, đường parabol, đường thẳng, sự chéo nhau của hai đường thẳng , khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau, hình vuông, hình bình hành, trọng tâm của một tam giác, khối tứ diện đều.

2.52.Cho một tam giác ABC. Mỗi cạnh của nó được chia làm ba phần bằng nhau .Nối các điểm chia với đỉnh đối diện của cạnh đó ta sẽ được sáu đường thẳng tạo nên một hình lục giác (không đều). Chứng minh các đường chéo của hình lục giác đó đồng quy tại một điểm.

2.53. Cho hình bình hành có các đỉnh nằm trên một elip. Chứng minh tâm của hình bình hành trùng với tâm của hình elip còn các cạnh của hình bình hành thì song song với hai đường kính liên hợp của elip.

2.54.Cho hình bình hành có các cạnh tiếp xúc với một elip . Chứng minh các đường chéo của hình bình hành là những đường kính liên hợp của elip.

2.55.Gọi AB, CD là một cặp đường kính liên hợp bất kì của một elip cho trước. Các tiếp tuyến của elip tại A và C cắt nhau tại M.Tìm quỹ tích các điểm M khi AB và CD thay đổi trên elip.

2.56.Cho elip có đường kính AB . Trên một nửa cung elip ta lấy hai điểm M,N . Gọi $C=AM \cap BN$, $D = AN \cap BM$. Chứng minh phương của đường thẳng CD là phương liên hợp với phương của đường kính AB .

2.57.Chứng tỏ rằng phép đồng dạng f của $\mathbf{E}^n$ bảo toàn góc giữa hai đường thẳng, góc giữa hai siêu phẳng , góc giữa đường thẳng và siêu phẳng, và biến hai cái phẳng vuông góc với nhau thành hai cái phẳng cũng vuông góc với nhau .

2.58.Trong $\mathbf{V}_E^3$ với một cơ sở trực chuẩn cho các vectơ :

$$\vec{a} = (1,-2,0)\ ,\quad \vec{b} = (3,1,0)\ ,\quad \vec{c} = (3,1,1)$$

$$\vec{a'} = (-2,-4,0)\ ,\quad \vec{b'} = (-6,2,0)\ ,\quad \vec{c'} = (-6,2,2)$$

a)Xác định phép biến đổi tuyến tính φ sao cho

$$\varphi(\vec{a}) = \vec{a'},\ \varphi(\vec{b}) = \vec{b'},\ \varphi(\vec{c}) = \vec{c'}\ .$$

b) Giả sử φ liên kết với phép afin f . Chứng tỏ f là phép đồng dạng và hãy xác định tỉ số đồng dạng của f.

2.59.Chứng tỏ rằng phép vị tự tâm S tỉ số k của $\mathbf{E}^n$ là một phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$ với tỉ số $|k|$.

2.60.Viết phương trình của phép đồng dạng tỉ số k trong $\mathbf{E}^2$ biến mục tiêu trực chuẩn $\{E_o ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ thành mục tiêu $\{E'_o ; \overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}\}$, biết $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e'_1}})$ và tọa độ trực chuẩn của $E'_o = (x_o, y_o)$ đối với mục tiêu $\{E_o ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

2.61.Chứng minh rằng bất kì một phép đồng dạng nào trong mặt phẳng mà không phải là phép đẳng cự đều có một điểm kép .

2.62.Trong $\mathbf{E}^2$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước , hãy xét tính chất của phép biến đổi f cho bởi phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x'_1 = 8x_1 - x_2 + 1 \\ x'_2 = x_1 + 8x_2 \end{cases}$$

§9, §10

2.63.Chứng minh rằng n +1 điểm độc lập trong $\mathbf{E}^n$ luôn luôn thuộc một siêu cầu .

2.64.Trong $\mathbf{E}^3$ hãy xác định tâm và bán kính của các mặt cầu sau đây :

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_3 - 7 = 0$

2.65.Trong $\mathbf{E}^3$với mục tiêu trực chuẩn cho trước, viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$ không cùng nằm trên một mặt phẳng .

2.66.Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn , hãy xét vị trí tương đối của siêu phẳng và siêu cầu cho bởi phương trình sau đây :

siêu phẳng : $x_n = 0$

siêu cầu : $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 - R^2 = 0$.

2.67. Trong $\mathbf{E}^n$ cho ba điểm A,B,C phân biệt.Tìm quỹ tích những điểm M sao cho :

$$d^2(M,A) + d^2(M,B) = d^2(M,C) .$$

2.68.Trong $\mathbf{E}^n$ với mục tiêu trực chuẩn $\{E_o;E_i\}$ cho n điểm $A_1,A_2, \dots,A_n$ lần lượt có tọa độ là :

$A_i = (0, \dots ,0,a_i,0, \dots ,0)$ với $a_i \neq 0$ và ở cột thứ i, $i = 1,2, \dots ,n$

Hãy xác định tâm và bán kính siêu cầu đi qua các điểm $E_o, A_1,A_2, \dots,A_n$.

2.69. Chứng minh rằng nếu một phép afin $f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ của không gian $\mathbf{E}^n$ biến một siêu cầu tâm O bán kính R thành siêu cầu tâm O' bán kính R' thì f là một phép đồng dạng . Xác định tỉ số đồng dạng của f .

2.70. Trong $\mathbf{E}^3$ với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho phương trình siêu mặt bậc hai (S) :

$$x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 + p(x_1 + x_2 + x_3) + q = 0 \text{ với } p,q \in \mathbb{R} .$$

Hãy viết phương trình chính tắc của (S) .

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN XẠ ẢNH VÀ HÌNH HỌC XẠ ẢNH

§1. KHÔNG GIAN XẠ ẢNH

1. ĐỊNH NGHĨA

Giả sử $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ n+1 chiều ($n \geq 0$) trên trường $\mathbf{K}$ và $\mathbf{X}$ là một tập hợp không rỗng tùy ý. Ta kí hiệu $P(\mathbf{V}^{n+1})$ là tập hợp tất cả các không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$ nghĩa là mỗi phần tử của $P(\mathbf{V}^{n+1})$ là một không gian con $\mathbf{V}^1$ của $\mathbf{V}^{n+1}$. Nếu có song ánh

$$\pi : P(\mathbf{V}^{n+1}) \to \mathbf{X}$$

thì bộ ba $(\mathbf{X}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ được gọi là một *không gian xạ ảnh n chiều liên kết với không gian vectơ* $\mathbf{V}^{n+1}$ trên trường $\mathbf{K}$ và được kí hiệu là $\mathbf{P}^n$.

Ta có $\mathbf{P}^n = (\mathbf{X}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$

Tùy theo $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ thực hay phức, ta được không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ *thực* hay *phức*. Trong giáo trình này chủ yếu được trình bày về không gian xạ ảnh thực.

Như vậy mỗi điểm của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ là ảnh của một không gian con $\mathbf{V}^1$ được sinh ra bởi một vectơ $\vec{x} \neq \vec{0}$ của

$\mathbf{V}^{n+1}$ qua song ánh π. Nếu $\mathbf{V}^{m+1}$ là không gian vectơ con của $\mathbf{V}^{n+1}$ ($0 \leq m \leq n$) thì tập hợp con $\pi[P(\mathbf{V}^{m+1})]$ của $\mathbf{X}$ sẽ gọi là m–phẳng xạ ảnh của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$. Do đó 0–phẳng còn gọi là *điểm*, 1–phẳng còn gọi là *đường thẳng*, (n – 1)–phẳng còn gọi là *siêu phẳng*.

Giả sử $\mathbf{X}' = \pi[P(\mathbf{V}^{m+1})]$ là m–phẳng. Khi đó ta có song ánh

$\pi': P(\mathbf{V}^{m+1}) \to \mathbf{X}'$, cảm sinh bởi song ánh π tức là

$$\pi' = \pi / P(\mathbf{V}^{m+1})$$

Như vậy $(\mathbf{X}', \pi', \mathbf{V}^{m+1})$ cũng là một không gian xạ ảnh m chiều và được kí hiệu là $\mathbf{P}^m$. ta có: $\mathbf{P}^m = (\mathbf{X}', \pi', \mathbf{V}^{m+1})$.

2. CÁC MÔ HÌNH CỦA KHÔNG GIAN XẠ ẢNH

a) Mô hình vectơ. Ta lấy $\mathbf{X}$ là chính tập hợp $P(\mathbf{V}^{n+1})$ và song ánh π là phép đồng nhất: $\pi: P(\mathbf{V}^{n+1}) \to P(\mathbf{V}^{n+1})$

Điểm của không gian xạ ảnh $[P(\mathbf{V}^{n+1}), \pi, \mathbf{V}^{n+1}] = \mathbf{X}$ là các không gian vectơ con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Tập hợp các không gian con một chiều thuộc một không gian con m+1 chiều nào đó là một m–phẳng của không gian xạ ảnh này.

b) Mô hình số học. Ta hãy xét một bộ số thực có thứ tự gồm n+1 số $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ trong đó có ít nhất là một số khác 0. Hai bộ số thực $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ và $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ như vậy sẽ gọi là tương đương khi và chỉ khi có một số thực $\lambda \neq 0$ sao cho $x_i = \lambda y_i$ với $i=1,2,...,n+1$. Tập hợp các bộ số thực nói trên sẽ được phân thành các lớp tương đương. Ta gọi $\mathbf{K}$ là tập hợp tất cả các lớp tương đương đó. Bây giờ gọi $\mathbf{V}^{n+1}$ là một không gian vectơ nào đó và trên đó đã có một cơ sở được chọn. Ta hãy xét song ánh π như sau:

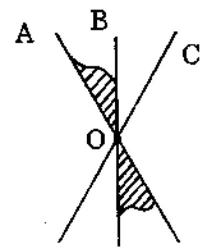
$$\pi : P(\mathbf{V}^{n+1}) \to \mathbf{K}$$

Giả sử $\mathbf{V}^1$ là một không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$. Ta chọn trên $\mathbf{V}^1$ một vectơ $\vec{x} \neq \vec{0}$ và gọi $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ là tọa độ của vectơ $\vec{x}$ đối với cơ sở đã chọn. Qua song ánh π, mỗi không gian con $\mathbf{V}^1$ ta đặt tương ứng với một lớp tương đương các bộ số thực mà phần tử đại diện là $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$. Như vậy $(\mathbf{K}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều và được gọi là mô hình số học của $\mathbf{P}^n$.

c) Mô hình bó. Trong không gian afin $\mathbf{A}^{n+1}$ xây dựng trên không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ ta lấy một điểm O tùy ý. Gọi $\mathbf{X}$ là tập hợp tất cả các đường thẳng của $\mathbf{A}^{n+1}$ cùng đi qua điểm O, và một tập hợp $\mathbf{X}$ như vậy được gọi là *bó đường thẳng tâm O*. Nếu $\mathbf{V}^1$ là không gian con một chiều thuộc $\mathbf{V}^{n+1}$ thì ta có $\pi(\mathbf{V}^1)$ là đường thẳng có phương $\mathbf{V}^1$ (H. 21).

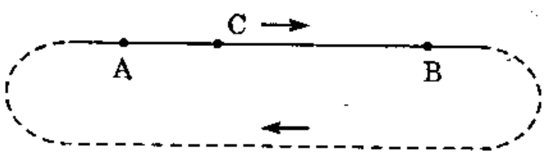
Ta có song ánh π:

$$\pi : P(\mathbf{V}^{n+1}) \to \mathbf{X}$$



hình 21

Do đó: $(\mathbf{X}, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều. Mỗi đường thẳng của bó biểu thị một "*điểm xạ ảnh*". Hai đường thẳng phân biệt của bó tạo nên một mặt phẳng afin đi qua O biểu thị cho một "*đường thẳng xạ ảnh*". Thông qua mô hình này ta nhận thấy rằng tập hợp "các điểm xạ ảnh" cùng thuộc một "đường thẳng xạ ảnh" là một tập hợp các "điểm" khép kín nghĩa là nếu có một điểm C chuyển động theo chiều từ A đến B của đường thẳng AB thì sau khi vượt qua điểm B, điểm đó vẫn đi theo hướng cũ và sẽ trở về A (H. 22). Như vậy đường thẳng xạ ảnh không giống với đường thẳng afin và đường thẳng Ơclit vì nó là một đường khép kín. Trong mô hình



hình 22

này muốn biểu thị một "mặt phẳng xạ ảnh" (là 2-phẳng) ta cần lấy ba đường thẳng của bó tâm O mà không cùng nằm trong một mặt phẳng afin. Giả sử A, B, C là "ba điểm xạ ảnh" không thẳng hàng (H. 21) mà trên mô hình được biểu thị bằng ba đường thẳng afin cùng đi qua O và không cùng thuộc một mặt phẳng afin. Khi đó trên "mặt phẳng xạ ảnh ABC" ta có các "đường thẳng xạ ảnh AB, BC, CA". Từ tính chất khép kín của "các đường thẳng AB, BC, CA" ta hãy tưởng tượng và hình dung ra tính chất khép kín của "mặt phẳng xạ ảnh ABC" một cách thích hợp.

d) Mô hình afin sau khi bổ sung các phần tử vô tận. Gọi $\mathbf{A}^{n+1}$ là một không gian afin n+1 chiều liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ và $\mathbf{A}^n$ là một siêu phẳng của $\mathbf{A}^{n+1}$ có phương là không gian vectơ con $\mathbf{V}^n \subset \mathbf{V}^{n+1}$.

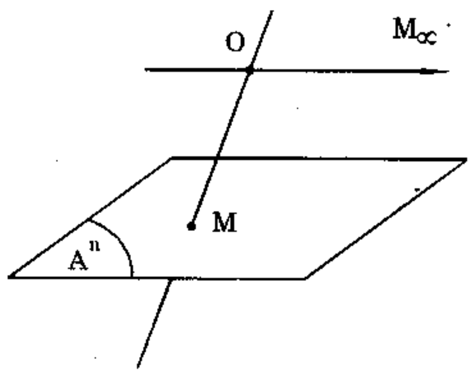
Ta hãy xét tập hợp:

$$\tilde{\mathbf{A}}^n = \mathbf{A}^n \cup \mathrm{P}(\mathbf{V}^n)$$

và xây dựng song ánh $\pi : \mathrm{P}(\mathbf{V}^{n+1}) \to \tilde{\mathbf{A}}^n$ như sau:

Lấy một điểm cố định O của $\mathbf{A}^{n+1}$ không nằm trên $\mathbf{A}^n$. Giả sử $\mathbf{V}^1$ là không gian con một chiều của $\mathbf{V}^{n+1}$.

–Nếu $\mathbf{V}^1 \not\subset \mathbf{V}^n$ thì trên $\mathbf{A}^n$ có một điểm M duy nhất sao cho $\overline{\mathrm{OM}} \in \mathbf{V}^1$ Trong trường hợp này ta đặt $\pi(\mathbf{V}^1) = \mathrm{M}$.



hình 23

– Nếu $\mathbf{V}^1 \subset \mathbf{V}^n$ thì đặt $\pi(\mathbf{V}^1) = \mathrm{M}_\infty$. Có thể hiểu rằng điểm $\pi(\mathbf{V}^1)$ là điểm gặp nhau của những đường thẳng song song với nhau trong $\mathbf{A}^n$ có cùng phương $\mathbf{V}^1$ và ta thường gọi đó là *điểm vô tận* của các đường thẳng song song đó.

Ta dễ dàng chứng minh được π là một song ánh vì mỗi đường thẳng của bó tâm O trong không gian afin $\mathbf{A}^{n+1}$ có tương ứng 1–1 với một điểm của $\tilde{\mathbf{A}}^n$. Như vậy ta có một không gian xạ ảnh n chiều $(\tilde{\mathbf{A}}^n, \pi, \mathbf{V}^{n+1})$ và gọi đó là *mô hình afin có bổ sung thêm các phần tử vô tận*.

Trên mô hình này, mỗi điểm xạ ảnh là một điểm thông thường của không gian afin $\mathbf{A}^n$ hoặc một không gian con một chiều của $\mathbf{V}^n$ (là phương của $\mathbf{A}^n$); mỗi m-phẳng của không gian xạ ảnh sẽ là:

–Hoặc là tập hợp $\mathbf{A}^m \cup P(\mathbf{V}^m)$ trong đó $\mathbf{A}^m$ là một m–phẳng afin còn $\mathbf{V}^m$ là phương của nó và $P(\mathbf{V}^m)$ là tập hợp các $\mathbf{V}^1 \subset \mathbf{V}^m$.

–Hoặc là tập hợp $P(\mathbf{V}^{m+1})$ trong đó $\mathbf{V}^{m+1} \subset \mathbf{V}^n$. Ta có thể xem $P(\mathbf{V}^{m+1})$ là giao của hai (m+1)-phẳng afin song song với nhau hoặc gọi đó là m-phẳng vô tận (m-phẳng chứa toàn điểm vô tận).

Trên mô hình này nếu a và b là hai đường thẳng song song với nhau có cùng phương $\mathbf{V}^1$ thì $a \cup \pi(\mathbf{V}^1)$ và $b \cup \pi(\mathbf{V}^1)$ là hai đường thẳng của không gian xạ ảnh $\tilde{\mathbf{A}}^n$, chúng có chung nhau một điểm $\pi(\mathbf{V}^1)$. Bởi vậy điểm $\pi(\mathbf{V}^1)$ được gọi là *điểm vô tận*. Tập hợp các điểm vô tận này của $\tilde{\mathbf{A}}^n$ nằm trên một (n-1)-phẳng được gọi là *siêu phẳng vô tận*. Ta có thể xem siêu phẳng này chứa toàn bộ các điểm vô tận của $\mathbf{A}^n$. Như thế là không gian xạ ảnh $\tilde{\mathbf{A}}^n$ có được bằng cách lấy không gian afin $\mathbf{A}^n$ và bổ sung thêm các điểm vô tận của tất cả các đường thẳng thuộc $\mathbf{A}^n$.

CHÚ Ý: Trên mỗi đường thẳng của $\mathbf{A}^n$ ta chỉ được phép bổ sung thêm một điểm vô tận mà thôi. Trong không gian xạ ảnh các điểm afin thông thường và các điểm vô tận đều có vai trò bình đẳng vì chúng đều là các điểm xạ ảnh như nhau. Vì vậy khi sử dụng mô hình này để minh họa các khái niệm tính chất trong không gian xạ ảnh chúng ta cần phải hiểu rõ bản chất của các điểm vô tận đó để khỏi nhầm lẫn. Cần lưu ý rằng điểm vô tận là một khái niệm không có trong không gian afin và cũng không được nêu tên trong không gian xạ ảnh.

§2. TỌA ĐỘ XẠ ẢNH VÀ MỤC TIÊU XẠ ẢNH

1. VECTƠ ĐẠI DIỆN CHO MỘT ĐIỂM

Gọi $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ qua song ánh π. Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ mỗi vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ sẽ sinh ra một không gian con một chiều và qua song ánh π không gian này sẽ ứng với một điểm A duy nhất của $\mathbf{P}^n$. Ta nói rằng *vectơ $\vec{a}$ đại diện cho điểm A*. Ta suy ra hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng đại diện cho một điểm A khi và chỉ khi $\vec{a} = k\vec{b}$ với k là một số thực khác 0. Như vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ cộng tuyến của $\mathbf{V}^{n+1}$ sẽ cùng đại diện cho một điểm của $\mathbf{P}^n$.

2. HỆ ĐIỂM ĐỘC LẬP

Ta gọi một hệ gồm r điểm $M_1, M_2, ..., M_r$ của $\mathbf{P}^n$ là *độc lập* nếu trong không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ liên kết với $\mathbf{P}^n$ ta có r vectơ đại diện cho r điểm ấy độc lập tuyến tính. Ta nhận thấy rằng nếu có r điểm độc lập thì bất cứ hệ r vectơ nào đại diện cho chúng cũng độc lập tuyến tính và do đó r điểm $M_1, M_2, ..., M_r$ xác định một (r –1)–phẳng xạ ảnh. Như vậy muốn xác định một m–phẳng xạ ảnh ta phải biết m+1 điểm độc lập thuộc phẳng đó. Trong $\mathbf{P}^n$ muốn có r điểm độc lập thì $r < n+1$ và do đó mọi hệ điểm nhiều hơn n+1 điểm đều không độc lập.

3. TỌA ĐỘ XẠ ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM

Cho không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Ta chọn trong $\mathbf{V}^{n+1}$ một cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\ldots \vec{e}_{n+1}\}$. Gọi X là một điểm tùy ý của $\mathbf{P}^n$ và trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm X. Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ là tọa độ của vectơ $\vec{x}$ đối với cơ sở ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$ thì ta cũng gọi đó là tọa độ xạ ảnh của điểm X của $\mathbf{P}^n$ ứng với cơ sở ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$. Khi đó ta kí hiệu:

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ hoặc $X\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$

Do cách xây dựng như trên nên các tọa độ xạ ảnh của các điểm thuộc $\mathbf{P}^n$ có các tính chất sau đây:

a) Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ là tọa độ xạ ảnh của một điểm thì các x_i không đồng thời bằng 0 vì vectơ đại diện cho một điểm phải luôn luôn là vectơ khác vectơ $\vec{0}$.

b) Một bộ số có thứ tự gồm n+1 số $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ trong đó ít nhất có một số khác 0 xác định một điểm X duy nhất của $\mathbf{P}^n$. Điểm X này nhận bộ số thực đó làm tọa độ xạ ảnh ứng với cơ sở đã cho.

c) Nếu $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ là tọa độ xạ ảnh của một điểm X thì mọi bộ số có dạng $(kx_1, kx_2, \ldots, kx_{n+1})$ với $k \neq 0$ đều là tọa độ của điểm X đó.

CHÚ Ý: Các tính chất trên đây là các tính chất đặc biệt của tọa độ xạ ảnh của một điểm. Thí dụ:

– Trong $\mathbf{P}^2$ bộ số (0,0,0) không phải là tọa độ của bất cứ điểm xạ ảnh nào nhưng trong $\mathbf{A}^3$ hoặc trong $\mathbf{E}^3$ bộ số đó là tọa độ của điểm gốc mục tiêu tọa độ.

– Trong $\mathbf{P}^2$ hai bộ số (1,0, –2) và (–1,0,2) là tọa độ của cùng một điểm xạ ảnh còn trong $\mathbf{A}^3$ hoặc $\mathbf{E}^3$ hai bộ số đó là tọa độ của hai điểm hoàn toàn khác nhau.

4. MỤC TIÊU XẠ ẢNH

Giả sử không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$. Gọi $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n+1}\}$ là một cơ sở cho trước của $\mathbf{V}^{n+1}$. Khi đó trong $\mathbf{P}^n$ tọa độ xạ ảnh của mỗi điểm đều được xác định đối với cơ sở ε đó. Bây giờ trong $\mathbf{P}^n$ ta gọi A_i là các điểm nhận các vectơ $\vec{e}_i$ với i = 1,2,..., n+1 làm các vectơ đại diện. Ta được tọa độ xạ ảnh của các điểm A_i đó là:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= (1,0,0,...,0,0)\\
A_2 &= (0,1,0,...,0,0)\\
.. \quad &.. \quad ... \quad ..\\
A_n &= (0,0,0,...,1,0)\\
A_{n+1} &= (0,0,0,...,0,1)
\end{aligned}
$$

Gọi E là điểm có vectơ đại diện là vectơ $\vec{e}$, trong đó:

$$\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... + \vec{e}_{n+1}$$

Như vậy điểm E có tọa độ xạ ảnh là:

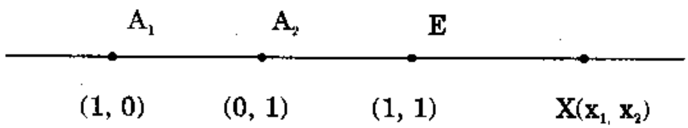
$$E = (1\ ,\ 1, ...\ ,1)$$

a) Định nghĩa: Một tập hợp gồm n+2 điểm được xây dựng như trên: $\{A_1, A_2, ...A_{n+1}; E\}$ là một *mục tiêu xạ ảnh* của không gian xạ ảnh n chiều $\mathbf{P}^n$ ứng với cơ sở ε trong $\mathbf{V}^{n+1}$. Ta kí hiệu mục tiêu xạ ảnh đó là $\{A_i ; E\}$ với i = 1,2, ..., n+1. Các điểm A_i là các *đỉnh* của mục tiêu và điểm E là *điểm đơn vị*.

Nếu một điểm X thuộc $\mathbf{P}^n$ có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ đối với cơ sở ε, và mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ được xây dựng cũng ứng với cơ sở ε đó thì ta nói rằng $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ là tọa độ xạ ảnh của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ với i = 1,2,..., n+1.

CHÚ Ý: Trong n+2 điểm $\{A_1, A_2, ..., A_{n+1} ; E\}$ của một mục tiêu xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$ bất cứ n+1 điểm nào cũng độc lập.

b) Thí dụ: – Trên đường thẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^1$, mục tiêu xạ ảnh là một bộ gồm ba điểm phân biệt thẳng hàng $\{A_1, A_2 ; E\}$. Một điểm X bất kì thuộc $\mathbf{P}^1$ được xác định bởi tọa độ xạ ảnh của điểm đó là $X = (x_1, x_2)$ đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước (H. 24).



hình 24

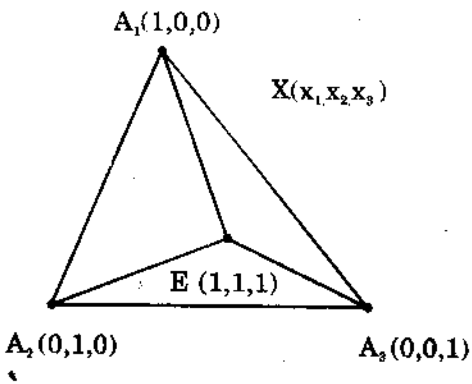
– Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, mục tiêu xạ ảnh là một bộ gồm bốn điểm trong đó bất cứ ba điểm nào cũng không thẳng hàng:

$$\{A_1, A_2, A_3 ; E\}$$

Một điểm X thuộc $\mathbf{P}^2$ được xác định bởi tọa độ xạ ảnh của điểm đó là:

$$X = (x_1, x_2, x_3)$$

đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước (H.25).



hình 25

5.MỐI LIÊN HỆ GIỮA MỤC TIÊU XẠ ẢNH CỦA $\mathbf{P}^n$ VÀ CƠ SỞ TƯƠNG ỨNG ε TRONG $\mathbf{V}^{n+1}$

Định lí: Gọi $\mathbf{P}^n$ là không gian xạ ảnh liên kết với không gian $\mathbf{V}^{n+1}$, khi đó:

a) Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ các cơ sở vị tự với nhau xác định một và chỉ một mục tiêu xạ ảnh tương ứng trong $\mathbf{P}^n$.

b) Trong $\mathbf{P}^n$ với một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$, $i = 1,2,..., n+1$ cho trước, (hoặc n+2 điểm $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, E sao cho bất kì n+1 điểm nào trong chúng đều độc lập) ta có thể tìm được trong $\mathbf{V}^{n+1}$ một lớp duy nhất các cơ sở vị tự với nhau nhận $\{A_i ; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh tương ứng.

Chứng minh

a) Ta biết rằng trong $\mathbf{V}^{n+1}$ với một cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n+1}\}$ cho trước ta hoàn toàn xác định được một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ tương ứng của $\mathbf{P}^n$. Bây giờ nếu ta chọn một cơ sở khác là $\varepsilon' = \{k\vec{e}_1, k\vec{e}_2, ..., k\vec{e}_{n+1}\}$ trong $\mathbf{V}^{n+1}$ với số thực $k \neq 0$ thì mục tiêu xạ ảnh tương ứng với ε' hoàn toàn trùng với mục tiêu xạ ảnh ứng với cơ sở ε cho trước. Khi k thay đổi và luôn luôn khác 0 ta sẽ được một lớp các cơ sở vị tự với ε. Tất nhiên nếu hai cơ sở ε_1 và ε_2 không vị tự với nhau thì chúng sẽ ứng với hai mục tiêu xạ ảnh khác nhau của $\mathbf{P}^n$.

b) Bây giờ giả sử trong $\mathbf{P}^n$ ta có một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$, $i = 1,2,..., n+1$

Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có các vectơ $\vec{e}'_i$ đại diện cho các điểm A_i với $i = 1,2,..., n+1$ và vectơ $\vec{e}$ đại diện cho điểm E. Vì n+1 điểm A_1, A_2, ..., A_{n+1} độc lập nên ta có n+1 vectơ $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_{n+1}$ độc lập tuyến tính và do đó chúng tạo thành một cơ sở của $\mathbf{V}^{n+1}$. Vì vectơ $\vec{e} \in \mathbf{V}^{n+1}$ nên vectơ đó được biểu thị tuyến tính qua cơ sở $\{\vec{e}'_i\}$ nói trên, nghĩa là:

$$\vec{e} = t_1\vec{e}'_1 + t_2\vec{e}'_2 + ... + t_{n+1}\vec{e}'_{n+1}$$

Vì điểm E và n điểm A_i nào đó là một hệ gồm n + 1 điểm độc lập, nên vectơ $\vec{e}$ cùng với n vectơ $\vec{e}'_i$ tương ứng là một hệ n + 1 vectơ độc lập tuyến tính. Từ đó ta suy ra $t_i \neq 0$ với mọi i vì nếu $t_i = 0$ thì vectơ $\vec{e}$ được biểu thị tuyến tính qua n vectơ còn lại nghĩa là vectơ $\vec{e}$ và n vectơ $\vec{e}'_i$ còn lại đó không độc lập tuyến tính, điều này trái với giả thiết nêu ở phần kết luận trên đây.

Vì $t_i \neq 0$ với mọi i nên ta đặt:

$$\vec{e}_i = t_i\vec{e}'_i \text{ với } i = 1, 2, \ldots, n+1$$

và ta có: $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1}$

Do đó ta có cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ của $\mathbf{V}^{n+1}$, trong đó mỗi vectơ $\vec{e}_i$ đại diện cho điểm A_i của mục tiêu $\{A_i, E\}$ cho trước với $i = 1, 2, \ldots, n+1$ và vectơ $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1}$ đại diện cho điểm E của mục tiêu xạ ảnh đó. Như vậy ta đã chứng minh được sự tồn tại của cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ trong $\mathbf{V}^{n+1}$ sinh ra mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho trước. Bây giờ chúng ta cần chứng minh rằng có một lớp duy nhất các cơ sở vị tự với ε nhận $\{A_i; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh tương ứng.

Vì $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A_i với $i = 1, 2, \ldots, n+1$ nên các vectơ $\vec{a}_i = k_i\vec{e}_i$, $k_i \neq 0$ cũng là các vectơ đại diện cho các điểm A_i với $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Mặt khác vectơ $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_{n+1}$ là vectơ đại diện cho điểm E nên vectơ $\vec{a} = k\vec{e}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ đại diện cho điểm E.

Ta có $\vec{a} = k\vec{e} = k\sum_{i=1}^{n+1}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n+1}k\vec{e}_i$ (1)

Mặt khác vì $\vec{a}$ đại diện cho điểm E và các vectơ $\vec{a}_i$ đại diện cho các điểm A_i với $i = 1, 2, \ldots, n+1$ nên ta có:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n+1}\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n+1}k_i\vec{e}_i \quad (2)$$

So sánh hai hệ thức (1) và (2) ta có:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(k - k_i)\vec{e}_i = \vec{0} \qquad (3)$$

Vì $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n+1}\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính nên từ (3) ta có $k = k_i$ với mọi i và do đó $\vec{a}_i = k\vec{e}_i$.

Vậy các cơ sở vị tự với nhau tạo thành một lớp duy nhất nhận $\{A_i; E\}$ cho trước làm mục tiêu xạ ảnh tương ứng.

6. CÁC m–PHẲNG TỌA ĐỘ

a) Định nghĩa. Qua m+1 đỉnh A_i của mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ với $0 < m < n$ ta có một m–phẳng xạ ảnh và được gọi là *m–phẳng tọa độ*.

b) Phương trình. Ta hãy viết phương trình của m–phẳng tọa độ $\mathbf{P}^m$ đi qua m+1 đỉnh sau đây:

$$A_{n-m+1}, A_{n-m+2}, \ldots, \underbrace{A_n}_{A_{n-m+m}}, A_{n+1}$$

Điểm $X \in \mathbf{P}^m$ khi và chỉ khi vectơ $\vec{x}$ đại diện cho nó thuộc không gian vectơ $\mathbf{V}^{m+1}$ có cơ sở là m+1 vectơ sau đây:

$$\{\vec{e}_{n-m+1}, \vec{e}_{n-m+2}, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1}\}$$

$$X \in \mathbf{P}^m \quad \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbf{V}^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = 0\vec{e}_1 + \ldots + 0\vec{e}_{n-m} + x_{n-m+1}\vec{e}_{n-m+1} + \ldots + x_{n+1}\vec{e}_{n+1}$$

$$\text{Vậy } X \in \mathbf{P}^m \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x_i = 0 \\ \text{với } i = 1,2, \ldots, n-m \end{array}} \qquad (4)$$

Ta có phương trình tổng quát của m–phẳng tọa độ $\mathbf{P}^m$ là một hệ gồm có n–m phương trình có dạng (4) ở trên.

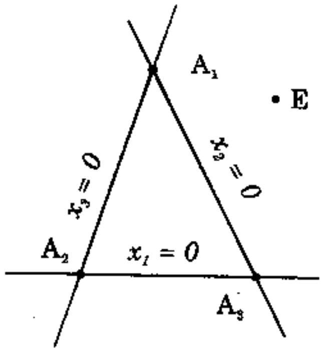
c) Thí dụ

- Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ (H. 26).

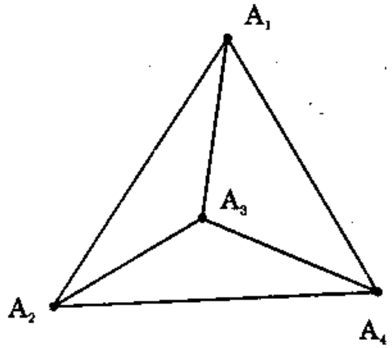
– đường thẳng A_1A_2 có phương trình $x_3 = 0$

– đường thẳng A_2A_3 có phương trình $x_1 = 0$

– đường thẳng A_3A_1 có phương trình $x_3 = 0$



hình 26



hình 27

• Trong $\mathbf{P}^3$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3, A_4; E\}$ (H.27).

– mặt phẳng $A_1A_2A_3$ có phương trình $x_4 = 0$

– mặt phẳng $A_2A_3A_4$ có phương trình $x_1 = 0$

– mặt phẳng $A_3A_4A_1$ có phương trình $x_2 = 0$ v.v...

– đường thẳng A_1A_2 có phương trình $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

– đường thẳng A_2A_3 có phương trình $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ v.v...

7. CÔNG THỨC ĐỔI MỤC TIÊU XẠ ẢNH

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ lần lượt ứng với hai cơ sở $\varepsilon = \{\vec{e}_i\}$ và $\varepsilon' = \{\vec{e}'_i\}$ của $\mathbf{V}^{n+1}$.

Giả sử $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1})$ lần lượt là tọa độ của một điểm X nào đó của $\mathbf{P}^n$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ và mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Để tìm sự liên hệ giữa các tọa độ của điểm X đó, ta cần tìm sự liên hệ giữa tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ và $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1})$ của vectơ $\bar{x}$ đại diện cho điểm X đối với cơ sở ε và ε'. Trong không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có:

$$\boxed{[x] = C^*[x']} \qquad \text{hay} \qquad \boxed{[x'] = C^{*-1}[x]}$$

trong đó C là ma trận chuyển từ cơ sở ε sang cơ sở ε', C^* là ma trận chuyển vị của C, còn [x] và [x'] lần lượt là ma trận cột tọa độ của điểm X đối với mục tiêu thứ nhất và mục tiêu thứ hai.

Ma trận C trong công thức trên cũng được gọi là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Như vậy khi chuyển từ mục tiêu này sang mục tiêu khác, các tọa độ cũ và mới được liên hệ với nhau bằng một phép biến đổi tuyến tính thuần nhất có ma trận vuông cấp n+1 không suy biến.

CHÚ Ý: Ma trận C trong công thức đổi mục tiêu xạ ảnh không được xác định một cách duy nhất, mà được xác định sai khác một hệ số tỉ lệ khác 0 vì nếu C là ma trận chuyển của hai mục tiêu xạ ảnh thì kC với $k \neq 0$ cũng là ma trận chuyển của hai mục tiêu đó. Nếu ta biết tọa độ các đỉnh A'_i và tọa độ điểm E' của mục tiêu xạ ảnh $\{A'_i; E'\}$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì ma trận chuyển C nói trên sẽ được xác định. Ngược lại nếu cho C là một ma trận vuông cấp n+1 không suy biến thì ta có thể xác định được mục tiêu xạ ảnh $\{A'_i; E'\}$ sao cho ma trận chuyển từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i; E'\}$ chính là ma trận C nói trên.

Thí dụ: Trong không gian xạ ảnh hai chiều $\mathbf{P}^2$, hãy lập công thức đổi mục tiêu xạ ảnh đối với hai mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ và $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$, biết tọa độ các đỉnh và điểm đơn vị của mục tiêu thứ hai đối với mục tiêu thứ nhất là:

$$A'_1 = (0, 1, 1);\ A'_2 = (2, 0, 1);\ A'_3 = (1, 1, 0);\ E' = (1, 1, 1)$$

Giải

Gọi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A'_1, A'_2, A'_3, E' của mục tiêu xạ ảnh $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$

Ta có $\vec{e}' = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3$, do đó:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \text{ hay } \begin{cases}1 = 2\beta + \gamma\\ 1 = \alpha + \gamma\\ 1 = \alpha + \beta\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tính được $\beta = \frac{1}{3}$; $\gamma = \frac{1}{3}$; $\alpha = \frac{2}{3}$

$$\text{Do đó: } \begin{cases}\vec{e}'_1 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\\ \vec{e}'_2 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)\\ \vec{e}'_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\end{cases} \Rightarrow C = \begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

trong đó C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở $\{\vec{e}'_i\}$.

Vì ma trận chuyển C của hai mục tiêu xạ ảnh được xác định sai khác nhau bởi một hệ số tỉ lệ $k \neq 0$ nên với $k = 3$ ta có:

$$3C = \begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow (3C)^* = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Do đó ta có công thức đổi mục tiêu xạ ảnh đối với hai mục tiêu $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ và $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$ là:

$$\begin{cases}\rho x_1 = 2x'_2 + x'_3\\ \rho x_2 = 2x'_1 + x'_3 \quad \text{với } \rho \in \mathbf{R}\\ \rho x_3 = 2x'_1 + x'_2\end{cases}$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH CỦA m-PHẲNG TRONG $\mathbf{P}^n$

Ta biết rằng m-phẳng trong $\mathbf{P}^n$ được xác định bởi m+1 điểm độc lập nghĩa là trong không gian $\mathbf{V}^{n+1}$ liên kết với $\mathbf{P}^n$ đó, m+1 vectơ đại diện của m+1 điểm đã cho, tạo nên một hệ m+1 vectơ độc lập tuyến tính.

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA m–PHẲNG XẠ ẢNH

Giả sử trong $\mathbf{P}^n$, m–phẳng $\mathbf{P}^m$ xác định bởi m+1 điểm A_1, $A_2, \dots, A_{m+1}$ độc lập và giả sử với mục tiêu xạ ảnh cho trước các điểm A_i nói trên có tọa độ là:

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,n+1})$ với $i = 1, 2, \dots, m+1$

Gọi $\vec{a}_i$ là các vectơ trong $\mathbf{V}^{n+1}$ theo thứ tự đại diện cho các điểm A_i với $i = 1,2,\dots, m+1$. Vì m+1 điểm A_i độc lập nên m+1 vectơ $\vec{a}_i$ độc lập tuyến tính tạo nên một cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{V}^{m+1}$. Ta có: $X(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{P}^m \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbf{V}^{m+1}$

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \sum_{i=1}^{m+1} t_i \vec{a}_i$$

Viết dưới dạng tọa độ ta có:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 a_{11} + t_2 a_{21} + \dots + t_{m+1} a_{m+1,1} \\ x_2 = t_1 a_{12} + t_2 a_{22} + \dots + t_{m+1} a_{m+1,2} \\ \dots \\ x_{n+1} = t_1 a_{1,n+1} + t_2 a_{2,n+1} + \dots + t_{m+1} a_{m+1,n+1} \end{cases} \quad (1)$$

Vì m+1 vectơ $\vec{a}_i$ độc lập tuyến tính nên ma trận $[a_{ij}]$ trong hệ phương trình (1) có hạng bằng m+1.

Hệ phương trình (1) cũng có thể được viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x] = t_1[a_1] + t_2[a_2] + \dots + t_{m+1}[a_{m+1}] \quad (1')$$

trong đó $[x]$, $[a_i]$ lần lượt là ma trận cột tọa độ của điểm X và của các điểm A_i. Với một bộ m+1 giá trị của các tham số $t_1, t_2, ..., t_{m+1}$ không đồng thời bằng 0 sẽ xác định cho ta một điểm X thuộc m-phẳng $\mathbf{P}^m$ và ngược lại. Cần chú ý rằng một bộ m+1 của tham số đó nhân với một hệ số tỉ lệ $k \neq 0$ có tương ứng 1-1 với một điểm X thuộc $\mathbf{P}^m$.

Phương trình (1) và (1') được gọi là *phương trình tham số của m–phẳng xạ ảnh* $\boldsymbol{P}^m$ xác định bởi m+1 điểm $A_1, A_2, ..., A_{m+1}$ độc lập.

Ngược lại mọi phương trình tham số có dạng (1) hoặc (1') trong đó ma trận $[a_{ij}]$ có hạng m+1 đều là phương trình tham số của một m–phẳng trong $\mathbf{P}^m$.

Thực vậy, vì ma trận $[a_{ij}]$ có hạng bằng m+1 nên hệ m+1 điểm A_i có tọa độ $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i\, n+1})$ là một hệ điểm độc lập. Bây giờ nếu viết phương trình tham số của m–phẳng xác định bởi m+1 điểm $A_1, A_2, ..., A_{m+1}$ nói trên ta sẽ có lại phương trình (1).

2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA m–PHẲNG XẠ ẢNH

Định lí: Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$

a) Một m–phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^m$ ($0 \leq m < n$) được biểu thị bằng một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng n – m và đó là phương trình tổng quát của một m–phẳng đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước.

b) Ngược lại với một mục tiêu xạ ảnh đã chọn, bất kì một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng n – m ($0 \leq m < n$) đều là phương trình của một m–phẳng xác định.

Chứng minh

a) Trong $\mathbf{P}^n$, đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước, giả sử ta có phương trình tham số của một m–phẳng xác định bởi m+1 điểm A_i độc lập như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \dots + a_{m+1,1}t_{m+1} \\ x_2 = a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \dots + a_{m+1,2}t_{m+1} \\ \dots \\ x_{m+1} = a_{1,m+1}t_1 + a_{2,m+1}t_2 + \dots + a_{m+1,m+1}t_{m+1} \\ x_{m+2} = a_{1,m+2}t_1 + a_{2,m+2}t_2 + \dots + a_{m+1,m+2}t_{m+1} \\ \dots \\ x_{n+1} = a_{1,n+1}t_1 + a_{2,n+1}t_2 + \dots + a_{m+1,n+1}t_{m+1} \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính gồm có n+1 phương trình và có m+1 ẩn $t_1, t_2, \dots, t_{m+1}$. Vì hệ phương trình này có hạng m+1 nên trong đó ta có thể chọn được m+1 phương trình độc lập. Giả sử m+1 phương trình đầu là độc lập, giải hệ phương trình này ta được m+1 nghiệm t_i là các biểu thức có dạng bậc nhất đối với $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$. Thay các giá trị này vào n – m phương trình còn lại ta được phương trình tổng quát của m–phẳng có dạng:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1,m+1}x_{m+1} + x_{m+2} = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2,m+1}x_{m+1} + x_{m+3} = 0 \\ \dots \\ c_{n-m,1}x_1 + c_{n-m,2}x_2 + \dots + c_{n-m,m+1}x_{m+1} + x_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Quá trình tìm các nghiệm t_i rồi thay các giá trị này vào n-m phương trình còn lại gọi là quá trình khử tham số (trong phương trình tổng quát không còn các tham số nữa). Sau khi khử các tham số ta được một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận các hệ số gồm n – m hàng và n+1 cột. Ma trận này có hạng bằng n – m. Viết gọn lại phương trình tổng quát của một m–phẳng xạ ảnh có dạng sau đây:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0 \text{ với } i = 1,2, ..., n-m} \qquad (2')$$

b) Ngược lại, giả sử ta có một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng n – m. Hệ phương trình đó có n+1 ẩn và gồm có n – m phương trình độc lập. Như vậy hệ phương trình này (n+1) – (n – m) = m + 1 nghiệm độc lập tuyến tính và các nghiệm khác của hệ đều được biểu thị tuyến tính qua m+1 nghiệm đó. Ta gọi m+1 nghiệm đó là:

$$(b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{i,n+1}) \text{ với } i = 1,2, ...,m+1$$

Gọi $\bar{b}_i$ là các vectơ của $\mathbf{V}^{n+1}$ mà tọa độ đối với một cơ sở ε cho trước là $(b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{i,n+1})$ với i = 1,2, ...,m+1. Khi đó m+1 vectơ $\bar{b}_i$ độc lập tuyến tính nên chúng xác định một không gian vectơ m+1 chiều là $\mathbf{V}^{m+1}$.

Gọi $\mathbf{P}^m$ là m–phẳng xạ ảnh liên kết với không gian vectơ $\mathbf{V}^{m+1}$ đó.

Ta có: $X \in \mathbf{P}^m \Leftrightarrow \bar{x} = x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + ... + x_{m+1}\bar{b}_{m+1}$

Vậy điểm $X \in \mathbf{P}^m$ khi và chỉ khi tọa độ $(x_1,x_2, ..., x_{n+1})$ của nó thỏa mãn hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đã cho ở trên. Vậy phương trình (2') là phương trình tổng quát của một m–phẳng xạ ảnh.

3. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA SIÊU PHẲNG TRONG $\mathbf{P}^n$

a) Phương trình tổng quát. Với m = n – 1, phương trình tổng quát của siêu phẳng gồm có n – m = n – (n – 1) = 1 phương trình và có dạng:

$$\boxed{u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_{n+1}x_{n+1} = 0} \text{ hay } \boxed{\sum_{i=1}^{n+1} u_ix_i = 0} \qquad (3)$$

trong đó các hệ số u_i không đồng thời bằng 0 (vì phương trình có ma trận hạng 1).

Ngược lại mỗi phương trình có dạng (3) như trên đều là phương trình của một siêu phẳng xác định.

b) Tọa độ của siêu phẳng xạ ảnh

Cho siêu phẳng $u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_{n+1}x_{n+1} = 0$ trong $\mathbf{P}^n$.

Bộ số $[u_1, u_2, ..., u_{n+1}]$ gọi là *tọa độ của siêu phẳng* có phương trình đã cho và được kí hiệu như trên để phân biệt với tọa độ của điểm. Như vậy nếu biết tọa độ của siêu phẳng thì siêu phẳng đó hoàn toàn xác định vì ta dễ dàng viết được phương trình của siêu phẳng đó và ngược lại. Tọa độ của siêu phẳng cũng có những tính chất giống như tọa độ xạ ảnh của một điểm nghĩa là:

- Các u_i không đồng thời bằng 0.
- Mỗi bộ $[u_1, u_2, ... , u_{n+1}]$ xác định một siêu phẳng duy nhất.
- Hai bộ số $[u_1, u_2, ..., u_{n+1}]$ và $[v_1, v_2, ... , v_{n+1}]$ xác định một siêu phẳng khi và chỉ khi có một số $k \neq 0$ sao cho $u_i = kv_i$ với mọi $i = 1,2,..., n+1$.

4. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1: Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, hãy viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(a_1, a_2, a_3)$ và $B(b_1, b_2, b_3)$.

Giải

Gọi $\vec{x}$ là vectơ đại diện cho điểm $X(x_1, x_2, x_3)$ thuộc đường thẳng AB và $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A,B.

$X \in$ đường thẳng AB $\Leftrightarrow \{\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}\}$ phụ thuộc tuyến tính.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng AB có dạng:

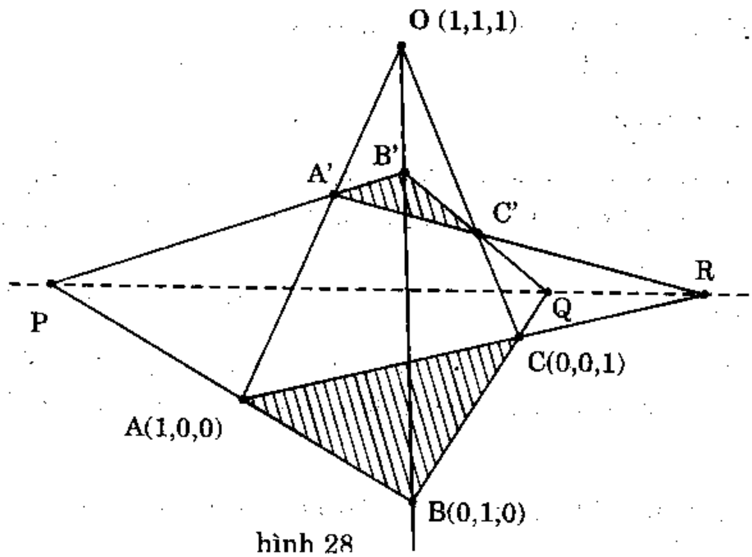
$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

Trong đó; $[u_1, u_2, u_3] = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right]$

Thí dụ 2 : Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và A'B'C' có các đường thẳng đi qua các đỉnh tương ứng là AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm O thì giao điểm của các cặp cạnh tương ứng là $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$ sẽ nằm trên một đường thẳng a (Định lí Desargues).

Giải

Chọn mục tiêu xạ ảnh {A,B,C;O} (H.28)



hình 28

Ta có: $A = (1,0,0)$

$B = (0,1,0)$

$C = (0,0,1)$

$O = (1,1,1)$

Điểm A' vì thẳng hàng với A và O nên :

$$[A'] = \lambda[O] + \mu[A]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Ta có thể chọn $\lambda = 1$ và $\lambda + \mu = a$. Do đó tọa độ điểm A' có dạng:

$A' = (a,1,1)$. Tương tự ta có $B' = (1,b,1)$, $C' = (1,1,c)$

Gọi P,Q,R theo thứ tự là giao điểm của các cặp $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$, $CA \cap C'A'$.

Đường thẳng AB có tọa độ là: $\left[\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] = [0,0,1]$

Đường thẳng A'B' có tọa độ là:

$$\left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix}\right] = [1 - b, 1 - a, ab - 1]$$

Do đó đường thẳng AB có phương trình là $x_3 = 0$ và đường thẳng A'B' có phương trình là $(1 - b)x_1 + (1 - a)x_2 + (ab - 1)x_3 = 0$

Vì $P = AB \cap A'B'$ nên tọa độ của P phải thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ (1 - b)x_1 + (1 - a)x_2 + (ab - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được tọa độ điểm $P = (a - 1, 1 - b, 0)$

Tương tự như vậy ta tính được tọa độ của Q và R là: $Q = (0, 1 - b, c - 1)$; $R = (1 - a, 0, c - 1)$

Ba điểm P, Q, R thẳng hàng vì:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 \\ 1-a & 0 & c-1 \end{vmatrix} = 0$$

5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA CÁC PHẲNG TRONG P^n

Bài toán về xét vị trí tương đối của các m–phẳng trong không gian xạ ảnh đơn giản hơn các bài toán đó khi xét trong không gian afin hoặc không gian Ơclit.

Trong không gian xạ ảnh, muốn xét vị trí tương đối của các phẳng ta chỉ cần xét sự cắt nhau hoặc chéo nhau của các phẳng đó mà thôi.

a) Sự cắt nhau và chéo nhau của các phẳng xạ ảnh

- Hai cái phẳng xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ được gọi là *cắt nhau* nếu chúng có điểm chung nghĩa là chúng có giao khác rỗng. Ta dễ dàng suy ra rằng giao của hai cái phẳng là một cái phẳng có số chiều lớn nhất thuộc các phẳng cho trước.

- Hai cái phẳng xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ được gọi là *chéo nhau* nếu chúng không có điểm chung.

b) Công thức số chiều của tổng và giao các phẳng xạ ảnh. Ta gọi tổng của hai cái phẳng là giao của tất cả cái phẳng chứa đồng thời cả hai phẳng đó. Ta suy ra tổng của hai cái phẳng là cái phẳng có số chiều bé nhất chứa các phẳng cho trước. Chú ý rằng khái niệm tổng của hai cái phẳng khác với khái niệm tổng hiểu theo nghĩa tập hợp. Thí dụ cho hai đường thẳng xạ ảnh phân biệt cắt nhau thì tổng của chúng là mặt phẳng chứa hai đường thẳng ấy. Nếu hai đường thẳng xạ ảnh chéo nhau (tức là không cắt nhau) thì tổng của hai cái phẳng đó là không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^3$ chứa hai đường thẳng ấy.

Để xét vị trí tương đối của hai cái phẳng xạ ảnh ta cần dựa vào các không gian vectơ con liên kết với hai phẳng đó và ta có các công thức về số chiều của tổng và giao của các phẳng như sau:

- Nếu hai cái phẳng xạ ảnh P và Q cắt nhau ta có:

$$\boxed{\dim (P + Q) = \dim P + \dim Q - \dim (P \cap Q)}$$

- Nếu hai cái phẳng xạ ảnh P và Q chéo nhau ta có:

$$\boxed{\dim (P + Q) = \dim P + \dim Q + 1}$$

CHÚ Ý: Từ định nghĩa về tổng và giao của hai cái phẳng xạ ảnh, bằng phương pháp quy nạp ta suy ra được định nghĩa của tổng và giao một số hữu hạn các phẳng trong $\mathbf{P}^n$.

c) Hệ siêu phẳng độc lập

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn cho m siêu phẳng có tọa độ là:

$[u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i,n+1}]$ với $i = 1,2,\dots, m$ và $0 < m \le n+1$

m siêu phẳng đó gọi là *độc lập* nếu tọa độ của chúng làm thành ma trận $[u_{ij}]$ có hạng bằng m với $i = 1,2,\dots, m$ và $j = 1,2,\dots, n+1$.

d) Định lí. Giao của m siêu phẳng độc lập $(0 < m < n)$ là một $n - m$ phẳng.

Chứng minh

Ta hãy xét hệ m phương trình độc lập sau đây:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots + u_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_{m,1}x_1 + u_{m,2}x_2 + \dots + u_{m,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Ta nhận thấy rằng mỗi phương trình của hệ biểu thị một siêu phẳng xạ ảnh. Do đó một điểm X đồng thời cùng thuộc vào m siêu phẳng đó khi và chỉ khi tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ của nó nghiệm hệ phương trình nói trên. Đây là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hạng bằng m nên đó chính là phương trình tổng quát của một (n – m)–phẳng.

Hệ quả: Ta có thể xem phương trình của một m–phẳng trong $\mathbf{P}^n$ có dạng:

$$\sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{a}_{ij}\mathbf{x}_j = 0 \; ; \; \mathbf{i} = \mathbf{1, 2, \dots, n - m}.$$

Đó là giao của n – m siêu phẳng độc lập. Từ đó ta suy ra giao của n siêu phẳng độc lập là một điểm. Do đó áp dụng vào mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ ta thấy rằng hai đường thẳng phân biệt luôn luôn cắt nhau.

e) Định lí. Giao của một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ và một m–phẳng $\mathbf{P}^m$ không nằm trong siêu phẳng đó là một (m – 1)–phẳng.

Chứng minh

Giả sử siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $\sum_{i=1}^{n+1} u_i x_i = 0$ và m– phẳng $\mathbf{P}^m$ có phương trình $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0$; $i = 1, 2, \dots, n - m$.

Hệ phương trình tìm giao của chúng là một hệ gồm có n – m+1 phương trình và có hạng bằng n – m + 1. Thật vậy nếu hệ đó có hạng bằng n – m thì các điểm của $\mathbf{P}^m$ đều thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ là điều trái với giả thiết.

Vì hệ phương trình trên có hạng bằng n – m + 1 nên nó xác định một (m – 1)–phẳng (vì n – (n – m + 1) = m – 1).

Hệ quả • Hai siêu phẳng phân biệt của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ luôn luôn cắt nhau theo một (n – 2)–phẳng.

• Một siêu phẳng và một đường thẳng không thuộc siêu phẳng đó luôn luôn cắt nhau tại một điểm.

f)Thí dụ 1. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a, b lần lượt có phương trình đối với mục tiêu cho trước:

$$(a): a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$(b): b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

Hãy tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đó

Giải

Tọa độ của giao điểm phải thỏa mãn hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = -a_3x_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = -b_3x_3 \end{cases}$$

Đây là hệ Crame. Gọi $M(x_1, x_2, x_3)$ là giao điểm của hai đường thẳng ta có:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \; D_{x_1} = \begin{vmatrix} -a_3x_3 & a_2 \\ -b_3x_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_3$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3x_3 \\ b_1 & -b_3x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_3$$

Do đó $x_1 = \dfrac{D_{x_1}}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_3}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$, $x_2 = \dfrac{D_{x_2}}{D} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} x_3}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$

Chọn $x_3 = D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ta có

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)}$$

g)Thí dụ 2. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^3$ cho hai đường thẳng d và d' có phương trình đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước:

$$(d): \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(d'): \begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0 \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0 \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau.

Giải

Giao điểm của (d) và (d') nếu có là điểm $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0 \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0 \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất và nghiệm tầm thường của hệ này không phải là tọa độ của điểm xạ ảnh. Vậy điều kiện cần và đủ để (d) và (d') chéo nhau là

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

(lúc đó hệ phương trình có nghiệm tầm thường là (0,0,0,0) và ta có $(d) \cap (d') = \varnothing$)

§4. ÁNH XẠ XẠ ẢNH VÀ BIẾN ĐỔI XẠ ẢNH

1. ÁNH XẠ XẠ ẢNH

a) Định nghĩa. Cho hai không gian xạ ảnh có cùng số chiều là $\mathbf{P}^n$ và $\mathbf{P}'^n$ lần lượt liên kết với hai không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ và $\mathbf{V}'^{n+1}$. Một ánh xạ f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ được gọi là *ánh xạ xạ ảnh* nếu có một phép đẳng cấu tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ sao cho nếu $\vec{a}$ là vectơ đại diện của điểm A của $\mathbf{P}^n$ thì $\varphi(\vec{a})$ là vectơ đại diện của điểm f(A) thuộc $\mathbf{P}'^n$.

Ta nói rằng ánh xạ xạ ảnh f được cảm sinh bởi phép đẳng cấu tuyến tính φ.

b) Tính chất

α) Từ định nghĩa trên ta suy ra ánh xạ xạ ảnh là một song ánh và do đó người ta còn gọi ánh xạ xạ ảnh là phép đẳng cấu xạ ảnh. Nếu f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ là ánh xạ xạ ảnh cảm sinh bởi phép đẳng cấu tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ thì $f^{-1}: \mathbf{P}'^n \to \mathbf{P}^n$ là ánh xạ xạ ảnh cảm sinh bởi $\varphi^{-1}: \mathbf{V}'^{n+1} \to \mathbf{V}^{n+1}$.

β) Một lớp các phép đẳng cấu tuyến tính vị tự với nhau biến không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ thành không gian vectơ $\mathbf{V}'^{n+1}$ cùng cảm sinh ra một ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ và ngược lại mỗi phép ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ đều được cảm sinh bởi một lớp các phép đẳng cấu tuyến tính vị tự với nhau biến $\mathbf{V}^{n+1}$ thành $\mathbf{V}'^{n+1}$.

γ) Qua ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ một hệ điểm độc lập của $\mathbf{P}^n$ biến thành một hệ điểm độc lập của $\mathbf{P}'^n$ và biến một hệ điểm không độc lập của $\mathbf{P}^n$ thành một hệ điểm không độc lập của $\mathbf{P}'^n$.

λ) Nếu f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ và g: $\mathbf{P}'^n \to \mathbf{P}''^n$ là hai ánh xạ xạ ảnh lần lượt được cảm sinh bởi φ: $\mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ và ψ: $\mathbf{V}'^{n+1} \to \mathbf{V}''^{n+1}$ thì tích $g_\circ f$ là ánh xạ xạ ảnh được cảm sinh bởi tích $\psi_\circ\varphi$

c) Định lí. Cho n+2 điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$ thuộc $\mathbf{P}^n$ trong đó bất kì hệ n+1 điểm nào cũng độc lập và cho hệ n+1 điểm $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+2}$ thuộc $\mathbf{P}'^n$ cũng có tính chất như vậy. Khi đó có một ánh xạ xạ ảnh duy nhất f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ sao cho $f(A_i) = A'_i$ với $i = 1,2,\ldots, n$.

Chứng minh

Trong $\mathbf{P}^n$ và $\mathbf{P}'^n$ ta lần lượt chọn các mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, \ldots, A_{n+1}; A_{n+2}\}$ và $\{A'_1, \ldots, A'_{n+1}; A'_{n+2}\}$. Chọn $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{n+1}\}$ và $\{\vec{e}'_1,\ldots,\vec{e}'_{n+1}\}$ là hai cơ sở trong hai không gian vectơ lần lượt ứng với hai mục tiêu xạ ảnh nói trên. Trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có vectơ $\vec{e} = \sum\limits_{i=1}^{n+1}\vec{e}_i$ là vectơ đại diện cho điểm đơn vị A_{n+2} và trong $\mathbf{V}'^{n+1}$ ta có vectơ $\vec{e}' = \sum\limits_{i=1}^{n+1}\vec{e}'_i$ là vectơ đại diện cho điểm đơn vị A'_{n+2}.

Khi đó giữa hai không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$ và $\mathbf{V}'^{n+1}$ có một phép đẳng cấu tuyến tính φ duy nhất xác định bởi hai cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ và $\{\vec{e}'_i\}$ với $i = 1,2,\ldots, n+1$. Ta có $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i$, $i = 1,2,\ldots, n+1$.

Gọi f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ là ánh xạ xạ ảnh cảm sinh bởi phép đẳng cấu tuyến tính φ nói trên thì rõ ràng là $f(A_i) = A'_i$ với $i = 1,2, \ldots, n+1$ và vì

$$\varphi(\vec{e}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n+1}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n+1}\vec{e}'_i = \vec{e}' \text{ nên } f(A_{n+2}) = A'_{n+2}.$$

Giả sử có một ánh xạ xạ ảnh $f': \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ cũng thỏa mãn điều kiện $f'(A_i) = A'_i$ với $i = 1,2,\ldots, n+2$ ta cần chứng minh $f' \equiv f$. Gọi $\varphi': \mathbf{V}^{n+1} \to \mathbf{V}'^{n+1}$ là phép đẳng cấu tuyến tính cảm sinh ra ánh xạ xạ ảnh f'. Ta có $\varphi'(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}'_i$ với $i = 1,2,\ldots, n+1$ và $\lambda_i \neq 0$ vì các vectơ $\lambda_i\vec{e}'_i$ cũng đại diện cho các điểm A'_i với $i = 1,2,\ldots, n+1$.

Hơn nữa $\varphi'(\vec{e}) = \varphi'\left(\sum_{i=1}^{n+1}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\vec{e}'_i$ với các $\lambda_i \neq 0$ (1)

Mặt khác vì $f'(A_{n+2}) = A'_{n+2}$ nên:

$$\varphi'(\vec{e}) = \lambda\vec{e}' = \lambda\sum_{i=1}^{n+1}\vec{e}'_i = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda\vec{e}'_i \text{ với } \lambda \neq 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_i - \lambda)\vec{e}'_i = \vec{0}$ với $i = 1, 2, \ldots, n+1$

Vì hệ n+1 vectơ $\{\vec{e}'_i\}$ độc lập tuyến tính nên ta có $\lambda = \lambda_i$ với $i = 1,2,\ldots, n+1$. Vậy ta có $\varphi'(\vec{e}_i) = \lambda\vec{e}_i$ hay φ' và φ vị tự với nhau. Do đó φ' và φ cùng cảm sinh ra một phép đẳng cấu xạ ảnh.

d) Định lí : Qua ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}'^n$ một m–phẳng của $\mathbf{P}^n$ biến thành một m–phẳng của $\mathbf{P}'^n$.

Chứng minh

Chọn trong $\mathbf{P}^n$ một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$. Ta có:

$$f(\{A_i; E\}) = \{A'_i; E'\} \text{ thuộc } \mathbf{P}'^n.$$

Ta có thể chọn $\{A'_i; E'\}$ làm một mục tiêu xạ ảnh của $\mathbf{P}'^n$ và khi đó tọa độ của một điểm $X \in \mathbf{P}^n$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ sẽ hoàn toàn giống như tọa độ của điểm $f(X) \in \mathbf{P}'^n$ đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Do đó phương trình của m–phẳng $\mathbf{P}^m$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ sẽ hoàn toàn giống như phương trình của $f(\mathbf{P}^m)$ đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\}$. Vậy $f(\mathbf{P}^m)$ là một m–phẳng.

CHÚ Ý: Vì ánh xạ xạ ảnh biến đường thẳng thành đường thẳng nên người ta nói rằng ánh xạ xạ ảnh có tính chất *cộng tuyến*.

2. BIẾN ĐỔI XẠ ẢNH

a)Định nghĩa. Một phép ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ biến không gian xạ ảnh thành chính nó được gọi là *phép biến đổi xạ* *ảnh*. Phép biến đổi xạ ảnh này được cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}^{n+1}$.

b)Tính chất. Từ các tính chất của ánh xạ xạ ảnh ta suy ra:

α) Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, một phép biến đổi xạ ảnh f được xác định bởi:

– hoặc là hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ với $f(A_i) = A'_i$, $i = 1,2,\dots, n+1$ và $f(E) = E'$.

– hoặc là hai bộ n+2 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n+2}$ và $A'_1, A'_2, \dots, A'_{n+2}$ trong mỗi bộ bất cứ n+1 điểm nào cũng độc lập với $f(A_i)=A'_i$; $i=1,2,\dots, n+2$.

β) Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, phép biến đổi xạ ảnh biến một m–phẳng thành một m–phẳng. Vì phép biến đổi xạ ảnh biến đường thẳng thành đường thẳng nên người ta còn gọi nó là *phép cộng tuyến*.

c) Phương trình của phép biến đổi xạ ảnh

α) Lập phương trình. Gọi f: $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ là phép biến đổi xạ ảnh cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính φ: $\mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}^{n+1}$. Trong $\mathbf{P}^n$ ta chọn một mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và trong $\mathbf{V}^{n+1}$ ta có cơ sở tương ứng là $\{\vec{e}_i\}$. Qua phép biến đổi xạ ảnh f, đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước, một điểm X có tọa độ $(x_1,x_2, \dots ,x_{n+1})$ biến thành điểm X' có tọa độ $(x'_1, x'_2, \dots ,x'_{n+1})$. Ta hãy tìm sự liên hệ giữa tọa độ $(x_1, x_2, \dots ,x_{n+1})$ của điểm X và tọa độ $(x'_1, x'_2, \dots ,x'_{n+1})$ của điểm X' = f(X).

Khi đó trong $\mathbf{V}^{n+1}$ là không gian vectơ liên kết với không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, vectơ $\vec{x}$ có tọa độ $(x_1, x_2, \dots ,x_{n+1})$ đại diện cho điểm X và vectơ $\vec{x}'$ có tọa độ $(x'_1, x'_2, \dots ,x'_{n+1})$ đại diện cho điểm X' = f(X). Ta có vectơ $\varphi(\vec{x})$ cũng đại diện cho điểm X' = f(X) nên $\vec{x}' = k\varphi(\vec{x})$ với $k \neq 0$.

Do đó nếu gọi B là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ

đối với cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ thì ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ tương ứng là:

$$\boxed{[x'] = k\,B\,[x] \text{ với } k \neq 0}$$

trong đó B là ma trận vuông cấp n+1 không suy biến.

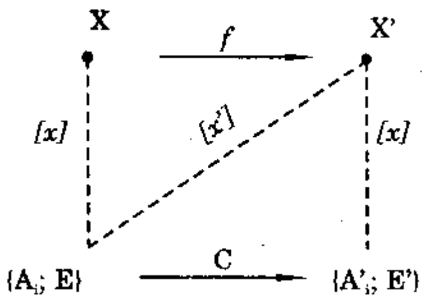
Nếu gọi $\{\vec{e}'_i\} = \{\varphi(\vec{e}_i)\}$ với C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở $\{\vec{e}'_i\}$ thì ta có thể viết phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f nói trên như sau:

$$\boxed{[x'] = k\,C^*\,[x] \text{ với } k \neq 0}$$

Ngược lại trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, mỗi phương trình có dạng $[x'] = B[x]$ trong đó B là ma trận vuông cấp n+1 không suy biến là phương trình của một phép biến đổi xạ ảnh xác định.

CHÚ Ý: Có thể xem phương trình $[x'] = k\,C^*\,[x]$ là một công thức đổi mục tiêu tọa độ theo cách hiểu sau đây:

Công thức này nêu lên sự liên hệ về tọa độ của cùng một điểm X' = f(X) đối với hai mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ trong đó [x'] là tọa độ của điểm X' đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ và [x] là tọa độ của điểm X' đối với mục tiêu $\{A'_i; E'\} = f(\{A_i; E\})$ còn C là ma trận chuyển từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i; E'\}$ (H. 29).



hình 29

β) **Thí dụ**. Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ cho các điểm $A'_1(0,1,1)$, $A'_2(2,0,1)$, $A'_3(1,1,0)$. Hãy lập phương trình phép biến đổi xạ ảnh f đối với mục tiêu đã chọn sao cho $f(A_i) = A'_i$ với $i = 1,2,3$ và $f(E) = E$.

Giải

Trong $\mathbf{P}^2$ phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f cần tìm có dạng:

$$\begin{cases} kx'_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ kx'_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ kx'_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \end{cases}$$

Theo giả thiết:

- $A_1(1,0,0) \rightarrow A'_1(0,1,1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 0 = a_1 & (1) \\ k_1.1 = b_1 & (2) \\ k_1.1 = c_1 & (3) \end{cases}$$

- $A_2(0,1,0) \rightarrow A'_2(2,0,1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} k_2.2 = a_2 & (4) \\ 0 = b_2 & (5) \\ k_2.1 = c_2 & (6) \end{cases}$$

- $A_3(0,0,1) \rightarrow A'_3(1,1,0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} k_3.1 = a_3 & (7) \\ k_3.1 = b_3 & (8) \\ 0 = c_3 & (9) \end{cases}$$

- $E(1,1,1) \rightarrow E(1,1,1)$ nên ta có:

$$\begin{cases} k_4.1 = a_1 + a_2 + a_3 & (10) \\ k_4.1 = b_1 + b_2 + b_3 & (11) \\ k_4.1 = c_1 + c_2 + c_3 & (12) \end{cases}$$

Ta được một hệ gồm 12 phương trình có 13 ẩn. Vì 13 ẩn này có tính chất đẳng cấp nghĩa là có thể xác định sai khác nhau bởi cùng một hệ số tỉ lệ. Bởi vậy ta có thể chọn $k_1=1$ và từ ba phương trình đầu ta có: $b_1 = c_1 = 1$

Từ (1), (5), (9) ta có: $a_1 = b_2 = c_3 = 0$

Từ (7) và (8) ta có: $a_3 = b_3$

Từ (10) và (11) ta có: $a_2 = b_1 = 1$

Từ (4) ta tính được $k_2 = \frac{1}{2}$; $c_2 = \frac{1}{2}$

Do đó ta tính được $k_4 = \frac{3}{2}$; $a_3 = b_3 = \frac{1}{2} = k_3$

Vậy: $$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Để cho gọn ta có thể lấy ma trận B sau đây làm ma trận của phép biến đổi xạ ảnh f:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f đối với mục tiêu cho trước:

$$\begin{cases} kx'_1 = 2x_2 + x_3 \\ kx'_2 = 2x_1 + x_3 \\ kx'_3 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

NHẬN XÉT. Ta có thể giải bài toán trên đây bằng một cách khác gọn hơn như sau:

Gọi φ là phép biến đổi tuyến tính cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f và gọi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A'_1, A'_2, A'_3, E. Ta có:

$$\vec{e} = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \vec{e}'_3$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1 & = & 2\beta + \gamma\\ 1 & = & \alpha + \gamma\\ 1 & = & \alpha + \beta\end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tính được $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}$

Do đó: $\vec{e}'_1 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\vec{e}'_2 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{e}'_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Gọi C là ma trận chuyển từ cơ sở $\{\vec{e}_i\}$ sang cơ sở $\{\vec{e}'_i\}$ của $\mathbf{V}^{n+1}$ và C^* là ma trận chuyển vị của C, ta có:

$$C = \begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix} \Rightarrow C^* = \begin{bmatrix}0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

Ta tìm được C^* là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f. Do đó ta có ma trận B của phép biến đổi xạ ảnh f là:

$$B = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy ta có phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f là

$$k[x'] = B[x]$$

d)Nhóm các phép biến đổi xạ ảnh và hình học xạ ảnh

α) **Định lí.** Tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ lập thành một nhóm với phép toán lấy tích các phép biến đổi.

Chứng minh

• Trước hết ta chứng minh rằng tích của hai phép biến đổi xạ ảnh f_1, f_2 là một phép biến đổi xạ ảnh. Thực vậy, gọi φ_1, φ_2 là hai phép biến đổi tuyến tính lần lượt cảm sinh ra hai phép biến đổi xạ ảnh nói trên.Khi đó ta có phép biến đổi tuyến tính tích là $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh $f = f_2 \circ f_1$.

• Gọi f là phép biến đổi xạ ảnh được cảm sinh bởi phép biến đổi tuyến tính φ. Khi đó φ^{-1} cũng là một phép biến đổi tuyến tính sẽ cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f^{-1}. Vậy đảo ngược của phép biến đổi xạ ảnh f là một phép biến đổi xạ ảnh.

Từ đó ta kết luận rằng tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ lập thành một nhóm. Nhóm này đẳng cấu với nhóm các phép biến đổi tuyến tính đối với nhóm các phép vị tự trong không gian vectơ $\mathbf{V}^{n+1}$.

Người ta còn gọi nhóm các phép biến đổi xạ ảnh trong $\mathbf{P}^n$ là nhóm các phép biến đổi cộng tuyến và ta thường kí hiệu nhóm này là nhóm $\mathscr{K}^n$.

β)**Hình học xạ ảnh**: *Hình học xạ ảnh n chiều* nghiên cứu những tính chất bất biến qua nhóm các phép biến đổi xạ ảnh $\mathscr{K}^n$. Những tính chất được nghiên cứu trong hình học xạ ảnh được gọi là những *tính chất xạ ảnh*.Thí dụ phép biến đổi xạ ảnh f biến một m–phẳng thành một m–phẳng. Vậy m–phẳng là một khái niệm xạ ảnh. Ngoài ra ta còn có các tính chất xạ ảnh khác như tính chất thẳng hàng của ba điểm, tính chất đồng quy của các đường thẳng. Sau này trong các phần tiếp theo của giáo trình chúng ta sẽ được biết thêm các khái niệm xạ ảnh khác.

Trước đây trong hình học afin và hình học Ơclit ta đã có dịp nói đến các khái niệm như sự song song của hai đường thẳng, sự vuông góc của hai đường thẳng, độ dài của một đoạn thẳng, sự đồng dạng của hai tam giác v.v... Tất cả những khái niệm đó đều không phải là khái niệm xạ ảnh vì chúng không phải là các bất biến của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh. Việc nghiên cứu hình học xạ ảnh bằng phương pháp nhóm sẽ giúp chúng ta phân biệt được các khái niệm afin, khái niệm Ơclit và khái niệm xạ ảnh trong hình học, đồng thời cũng giúp chúng ta tìm ra mối liên hệ mật thiết giữa ba thứ hình học afin, Ơclit và xạ ảnh.

e) Điểm kép hay điểm bất động của phép biến đổi xạ ảnh

α)**Định nghĩa**: Điểm M thuộc $\mathbf{P}^n$ là *điểm kép* hay *điểm bất động* của phép biến đổi xạ ảnh f nếu M = f(M).

β) Tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh.

Cho phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$. Giả sử M = f(M) và gọi φ là phép biến đổi tuyến tính cảm sinh ra phép biến đổi xạ ảnh f đã cho. Khi đó nếu vectơ $\vec{x}$ đại diện cho điểm M thì ta có $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}' = k\vec{x}$ $(k \neq 0)$ cũng đại diện cho điểm M. Như vậy $\vec{x}$ là vectơ riêng và k là giá trị riêng của φ.

Giả sử phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$k\,[x'] = B\,[x]$$

Khi đó phương trình tìm điểm kép của f là:

$$k\,[x] = B\,[x] \Leftrightarrow (B - kI)[x] = 0$$

với I là ma trận đơn vị.

Đây là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm có n+1 phương trình với n+1 ẩn. Muốn cho hệ phương trình này có nghiệm không phải là nghiệm tầm thường (là tọa độ của các điểm kép) điều kiện cần và đủ là:

$$\boxed{|B - kI| = 0}$$

Với mỗi nghiệm $k = k_i$ của hệ phương trình $|B - kI| = 0$ ta có tập hợp các điểm kép của f ứng với giá trị riêng k_i có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình sau đây:

$$(B - k_iI)\,[x] = 0$$

Nếu hạng của ma trận $(B - k_iI)$ bằng m $(0 < m \leq n)$ nghĩa là có m phương trình độc lập thì phương trình $(B - k_iI)\,[x] = 0$ xác định một $(n-m)$–phẳng gồm toàn điểm kép ứng với giá trị riêng k_i đó.

γ) **Thí dụ**

Trong $\mathbf{P}^2$ tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình sau đây:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Giải

Ta có phương trình tìm điểm kép của f là:

$$\begin{cases} -kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

Muốn tìm điểm kép ta phải giải hệ phương trình sau:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2(k-2) = 0$$

• Với k = –1 ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Hệ phương trình này có hạng bằng 1. Tập hợp các điểm kép của f có tọa độ thỏa mãn phương trình đường thẳng sau đây:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Như vậy với k = –1 ta có đường thẳng $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ chứa toàn điểm kép của f.

• Với k = 2 ta có:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có hạng bằng 2 nghĩa là trong hệ phương trình đó có hai phương trình độc lập. Giải hệ phương trình này ta tìm được tọa độ điểm kép là:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1,1,1)$$

Tóm lại tập hợp các điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh gồm có một đường thẳng chứa toàn điểm kép có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ và một điểm kép có tọa độ là (1,1,1). Điểm kép này không thuộc đường thẳng chứa các điểm kép nói trên.

f)Các phép thấu xạ.Các phép thấu xạ là các phép biến đổi xạ ảnh đặc biệt. Trong trường hợp tập hợp các điểm kép của một phép biến đổi xạ ảnh f là một m- phẳng P và một (n-m-1) - phẳng Q chéo nhau thì ta gọi phép biến đổi xạ ảnh f là một phép *thấu xạ m–cặp*. Như vậy trong trường hợp này, nếu có điểm M thuộc P và điểm N thuộc Q thì đường thẳng MN luôn luôn biến thành chính nó vì M và N đều là các điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh đó.

Đặc biệt nếu m = 0 thì phẳng P lúc đó là một điểm được gọi là *tâm thấu xạ* còn Q là một siêu phẳng được gọi là *nền thấu xạ*. Phép thấu xạ này là phép *thấu xạ 0–cặp* hay là *phép thấu xạ tâm*. Trong trường hợp này mọi đường thẳng đi qua tâm thấu xạ đều biến thành chính nó vì đường thẳng đó có hai điểm kép phân biệt.

Trong trường hợp các điểm kép của f là một siêu phẳng thì ta gọi đó là phép *thấu xạ đặc biệt* vì lúc đó tâm thấu xạ thuộc nền thấu xạ.

Phép đồng nhất của $\mathbf{P}^n$ cũng được xem là một phép thấu xạ và lúc đó mọi điểm của $\mathbf{P}^n$ đều là điểm kép. Phép thấu xạ này là phép *thấu xạ tầm thường*.

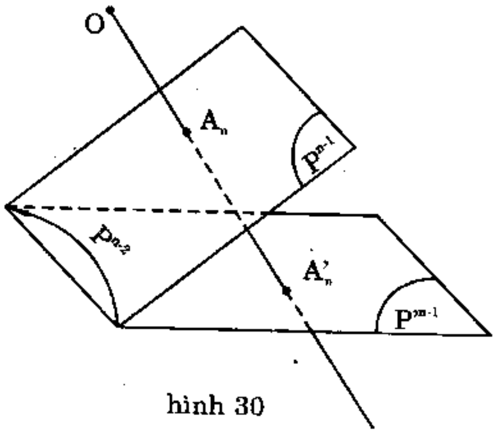
3. PHÉP CHIẾU XUYÊN TÂM

Hình học xạ ảnh đã ra đời từ việc nghiên cứu các bất biến qua phép chiếu xuyên tâm trong không gian hai chiều và ba chiều thông thường. Trong không gian ba chiều thông thường, các hình biểu diễn được xây dựng trên cơ sở của lí thuyết về phép chiếu xuyên tâm được gọi là *hình biểu diễn phối cảnh*. Ta xem phép chiếu xuyên tâm là một thí dụ quan trọng của phép ánh xạ xạ ảnh.

a)Định nghĩa: Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ $(n \geq 2)$ cho hai siêu phẳng phân biệt P và P' và một điểm O nằm ngoài hai siêu phẳng đó.

Với mỗi điểm $M \in P$ ta tìm được điểm $M' = OM \cap P'$ duy nhất. Phép ánh xạ $f: P \to P'$ sao cho $M' = f(M)$ được gọi là *phép chiếu xuyên tâm* từ P lên P' bởi tâm chiếu O.

b)Định lí. Phép chiếu xuyên tâm f từ siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ lên siêu phẳng $\mathbf{P}'^{n-1}$ là một ánh xạ xạ ảnh (là phép đẳng cấu xạ ảnh).



hình 30

Chứng minh

Gọi $\mathbf{V}^n$ và $\mathbf{V}'^n$ là các không gian vectơ con lần lượt liên kết với các không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}'^{n-1}$. Gọi giao của hai siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}'^{n-1}$ là $(n-2)$–phẳng $\mathbf{P}^{n-2}$ (H.30).

$$\mathbf{P}^{n-2} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P}'^{n-1}$$

Trong siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ ta lấy n điểm độc lập $A_1, A_2, ..., A_n$ trong đó $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$ và tất nhiên $A_n \notin \mathbf{P}^{n-2}$. Gọi f là phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu O ta có:

$$f(A_i) = A_i \text{ với } i = 1,2, ..., n-1$$

$$\text{và } f(A_n) = A'_n \in \mathbf{P}'^{n-1} \text{ và } A'_n \notin \mathbf{P}^{n-2}.$$

• Hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A'_n\}$ là n điểm độc lập. Thực vậy nếu hệ điểm đó không độc lập tức là điểm A'_n phải thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$, từ đó ta suy ra đường thẳng $A_nA'_n$ sẽ thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ và như vậy điểm $O \in \mathbf{P}^{n-1}$ là điều trái với giả thiết.

• Gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n, \vec{e}'_n, \vec{e}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, A'_n$, O.

Vì ba điểm A'_n, A_n, O thẳng hàng nên ta có thể đặt:

$\vec{e}'_n = \alpha\vec{e}_n + \beta\vec{e}$ với $\alpha \neq 0$ vì nếu $\alpha = 0$ thì O thuộc P'^{n-1} là điều trái với giả thiết. Do đó ta có thể chọn $\alpha = 1$ và suy ra :

$\vec{e}'_n = \vec{e}_n + \beta\vec{e}$.

hay $\vec{e}'_n = \vec{e}_n + \lambda\vec{e}$ với $\lambda = \beta$, $\lambda \neq 0$ (vì nếu $\lambda = 0$ thì $A_n \equiv A'_n$ là trái với giả thiết).

• Gọi $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n\}$ là cơ sở của $\mathbf{V}^n$

và $\varepsilon' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n-1}, \vec{e}'_n\}$ là cơ sở của $\mathbf{V}'^n$

Gọi φ là phép đẳng cấu tuyến tính xác định bởi hai cơ sở ε và ε'. Với mỗi điểm X thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ ta có vectơ đại diện $\vec{x}$ thuộc $\mathbf{V}^n$, do đó ta có:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

Khi đó $\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i)$

$$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_{n-1}\vec{e}_{n-1} + x_n\vec{e}'_n \text{ mà } \vec{e}'_n = \vec{e}_n + \lambda\vec{e}$$

$$= \underbrace{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n}_{\vec{x}} + x_n\lambda\vec{e}$$

$$= \vec{x} + x_n\lambda\vec{e}.$$

Đặt $x_n\lambda = \lambda_x$ ta có: $\boxed{\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda_x\vec{e}}$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng ba vectơ $\varphi(\vec{x})$, $\vec{x}$, $\vec{e}$ phụ thuộc tuyến tính, nên $\varphi(\vec{x})$ đại diện cho một điểm X' thuộc đường thẳng OX (vectơ $\vec{x}, \vec{e}$ lần lượt là các vectơ đại diện cho các điểm X và O).

Mặt khác $\varphi(\vec{x}) \in \mathbf{V}'^n$ nên nó đại diện cho điểm X' thuộc $\mathbf{P}'^{n-1}$

Vậy.

$$\boxed{X' = OX \cap \mathbf{P}'^{n-1}}$$

Ta suy ra điểm X' chính là ảnh của điểm X qua phép chiếu xuyên tâm f và phép chiếu xuyên tâm này chính là ánh xạ xạ ảnh được cảm sinh bởi phép đẳng cấu tuyến tính φ nói trên.

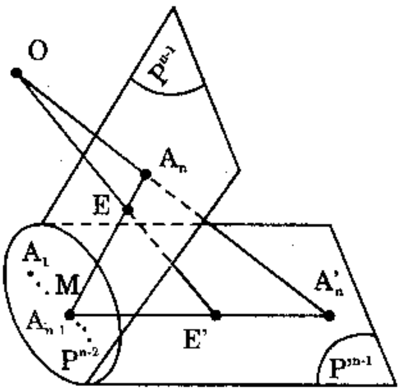
c)Định lí: Cho hai siêu phẳng phân biệt $\mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}'^{n-1}$ của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ $(n \geq 2)$. Một ánh xạ xạ ảnh f: $\mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}'^{n-1}$

là phép chiếu xuyên tâm khi và chỉ khi f(M) = M với mọi điểm M thuộc $\mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P}'^{n-1}$.

Chứng minh

Gọi $\mathbf{P}^{n-2} = \mathbf{P}^{n-1} \cap \mathbf{P}'^{n-1}$

• Nếu f là phép chiếu xuyên tâm thì rõ ràng là f(M) = M với mọi M thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$.



hình 31

• Gọi f là ánh xạ xạ ảnh có tính chất f(M) = M với mọi điểm M thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$ ta cần chứng minh f là phép chiếu xuyên tâm.

Trong $\mathbf{P}^{n-1}$ ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i;E\}$ sao cho $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$, còn điểm A_n và E tất nhiên không thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$. Gọi $A'_n = f(A_n)$ và $E' = f(E)$.

Trên $\mathbf{P}'^{n-1}$ ta có mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A'_n; E'\}$ là ảnh của mục tiêu $\{A_i; E\}$ trong $\mathbf{P}^{n-1}$ qua ánh xạ xạ ảnh f (H. 31).

Gọi $M = A_n E \cap \mathbf{P}'^{n-1}$ thì M thuộc $\mathbf{P}^{n-2}$ và theo giả thiết f(M)=M nên đường thẳng A'_nE' cũng đi qua M. Trong mặt phẳng xạ ảnh xác định bởi hai đường thẳng A_nE và A'_nE' phân biệt và cắt nhau, hai đường thẳng $A_nA'_n$ và EE' cắt nhau tại O. Gọi f' là phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu O, ta có:

$f'(\{A_i; E\}) = \{A'_i; E'\}$. Do sự xác định duy nhất của phép ánh xạ xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu xạ ảnh nên ta có f' trùng với f.

Vậy f là phép chiếu xuyên tâm.

§5. TỈ SỐ KÉP

1.TỈ SỐ KÉP CỦA 4 ĐIỂM THẲNG HÀNG

a)Định nghĩa. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, với mục tiêu xạ ảnh cho trước, trên một đường thẳng xác định bởi hai điểm A, B phân biệt, ta lấy các điểm C và D sao cho không trùng với A hoặc B. Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ là các vectơ lần lượt đại diện cho các điểm A, B, C, D, ta có:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} \\ \vec{d} &= \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} \end{aligned} \quad \text{hay} \quad \begin{aligned} [C] &= \lambda_1[A] + \mu_1[B] \\ [D] &= \lambda_2[A] + \mu_2[B] \end{aligned}$$

Khi đó tỉ số: $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ được gọi là *tỉ số kép của 4 điểm A,B,C,D lấy theo thứ tự đó* và kí hiệu:

$$\boxed{(ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}}$$

Bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường thẳng như trên được gọi là một *hàng điểm* và đường thẳng đó gọi là *giá* của hàng điểm.

Chú ý rằng các số λ_1 và μ_1 có thể thay thế bằng các số $k\lambda_1$, $k\mu_1$ với $k \neq 0$ và các số λ_2, μ_2 cũng thế.

NHẬN XÉT. Khái niệm tỉ số kép trong định nghĩa nói trên không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ. Thực vậy giả sử ta xét với mục tiêu mới mà ma trận chuyển từ mục tiêu cũ sang mục tiêu mới là M, khi đó ta có:

$$[A'] = M[A] \quad ; \quad [B'] = M[B]$$

$$[C'] = M[C] \quad ; \quad [D'] = M[D]$$

Thay vào hệ thức định nghĩa ta có:

$[C'] = M[C] = \lambda_1 M[A] + \mu_1 M[B] = \lambda_1[A'] + \mu_1[B']$

$[D'] = M[D] = \lambda_2 M[A] + \mu_2 M[B] = \lambda_2[A'] + \mu_2[B']$

Như vậy đối với mục tiêu mới ta có $(A'B'C'D') = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ nghĩa là giá trị của tỉ số kép không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ.

b)Các tính chất của tỉ số kép

α) Do giá trị của tỉ số kép không lệ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ ta suy ra rằng qua một phép biến đổi xạ ảnh, tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng không thay đổi. Giả sử qua phép biến đổi xạ ảnh f các điểm A, B, C, D thẳng hàng lần lượt biến thành A', B', C', D' cũng thẳng hàng và ta có

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

Ta nói rằng tỉ số kép là một bất biến xạ ảnh.

β) Dựa vào định nghĩa ta chứng minh được các tính chất sau đây của tỉ số kép:

- $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$
- $(ABCD) = \dfrac{1}{(BACD)} = \dfrac{1}{(ABDC)}$
- $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$

γ) Các trường hợp đặc biệt (mở rộng định nghĩa) của tỉ số kép:

- $(ABCC) = 1$ (trường hợp $D \equiv C$)
- $(AACD) = 1$ (trường hợp $A \equiv B$)
- $(ABAD) = (ABCB) = 0$ (trường hợp $C \equiv A$ hoặc $D \equiv B$)
- $(ABBD) = (ABCA) = \infty$ (trường hợp $C \equiv B$ hoặc $D \equiv A$)

c) Hàng điểm điều hòa

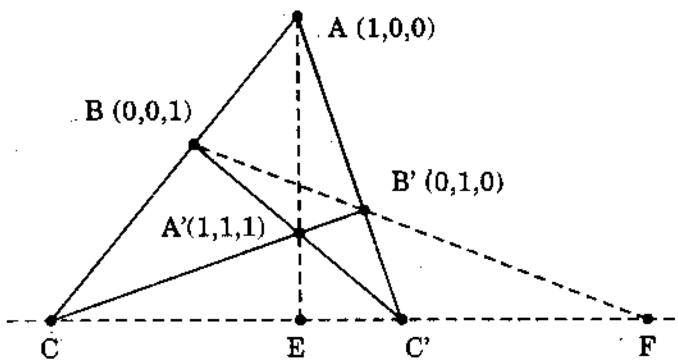
Nếu tỉ số kép (ABCD) = –1 ta nói rằng cặp điểm C,D *chia điều hòa* cặp điểm A,B. Vì (ABCD) = (CDAB) nên khi đó ta có (CDAB) = –1 và như vậy cặp điểm A,B cũng chia điều hòa cặp điểm C,D. Ta gọi cặp điểm A,B và cặp điểm C,D *liên hiệp điều hòa với nhau* hay bốn điểm A,B,C,D làm thành một *hàng điểm điều hòa*

d) Hình bốn cạnh toàn phần

α) **Định nghĩa.** Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ một tập hợp gồm 4 đường thẳng, trong đó không có 3 đường nào đồng quy được gọi là một *hình bốn cạnh toàn phần*. Mỗi đường thẳng đó là một *cạnh* (4 cạnh). Mỗi giao điểm của hai cạnh là một *đỉnh* (6 đỉnh). Hai đỉnh không thuộc cùng một cạnh gọi là *hai đỉnh đối diện* (3 cặp đỉnh đối diện). Mỗi đường thẳng nối hai đỉnh đối diện là một *đường chéo* (3 đường chéo). Mỗi giao điểm của hai đường chéo là một *điểm chéo* (3 điểm chéo).

β) **Định lí.** Trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo liên hiệp điều hòa với nhau.

Chứng minh



hình 32

Cho hình bốn cạnh toàn phần AA'BB'CC' có các đường chéo là AA', BB', CC'.

Trên đường chéo CC' ta cần chứng minh (CC'EF) = –1

Ta chọn {A,B',B; A'} làm mục tiêu xạ ảnh. Ta có:

$C = AB \cap A'B' \Rightarrow C = (1,0,1)$

$C' = AB' \cap A'B \Rightarrow C' = (1,1,0)$

Do đó: $\left.\begin{array}{lcl} CC' & = & [-1,1,1] \\ AA' & = & [0,-1,1] \end{array}\right\} \Rightarrow E = CC' \cap AA' = (2,1,1)$

$$\left.\begin{array}{lcl} CC' & = & [-1,1,1] \\ BB' & = & [-1,0,0] \end{array}\right\} \Rightarrow F = CC' \cap BB' = (0,1,-1)$$

Để tính tỉ số kép (CC'EF) ta giả sử:

$$[E] = \lambda_1[C] + \mu_1[C']$$

$$[F] = \lambda_2[C] + \mu_2[C']$$

Thay tọa độ các điểm C, C', E, F vào hệ thức trên ta có:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = -1,\ \mu_2 = 1.$$

Vậy $(CC'EF) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2} = \dfrac{1}{1} : \dfrac{1}{-1} = -1.$

Thực hiện phép tính tương tự ta có:

$$(BB'DF) = -1$$

$$(AA'DE) = -1$$

2. TỈ SỐ KÉP CỦA BỐN SIÊU PHẲNG THUỘC MỘT CHÙM

a)Định nghĩa chùm siêu phẳng.Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một (n–2)–phẳng được gọi là một *chùm siêu phẳng* và (n–2)–phẳng đó là *giá* của chùm. Một chùm siêu phẳng được xác định bởi hai siêu phẳng phân biệt của chùm.

Gọi P và Q là hai siêu phẳng phân biệt nào đó của chùm và có tọa độ đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước lần lượt là:

$$P = [p_1, p_2, ..., p_{n+1}]$$

$$Q = [q_1, q_2, ..., q_{n+1}]$$

Khi đó giá của chùm có phương trình là:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_{n+1}x_{n+1} = 0 \\ q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_{n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Nếu có một siêu phẳng R của chùm có phương trình là:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_{n+1}x_{n+1} = 0$$

thì vì R đi qua $P \cap Q$ nên ta có:

$$r_i = \lambda p_i + \mu q_i \text{ với } i = 1, 2, ..., n+1 \text{ và } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Như vậy với mỗi cặp số $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ sẽ xác định cho ta một siêu phẳng của chùm và tất nhiên cặp số (λ, μ) và cặp số $(k\lambda, k\mu)$ với $k \neq 0$ cùng xác định cho ta một siêu phẳng của chùm. Ta thường kí hiệu [P], [Q], [R] lần lượt là ma trận cột tọa độ của các siêu phẳng P, Q, R và ta có:

$$[R] = \lambda[P] + \mu[Q]$$

b)Tỉ số kép của chùm bốn siêu phẳng.Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu tọa độ cho trước, cho một chùm siêu phẳng xác định bởi hai siêu phẳng phân biệt P và Q cho trước. Giả sử R và S là hai siêu phẳng của chùm và được xác định bởi các hệ thức:

$$[R] = \lambda_1[P] + \mu_1[Q]$$

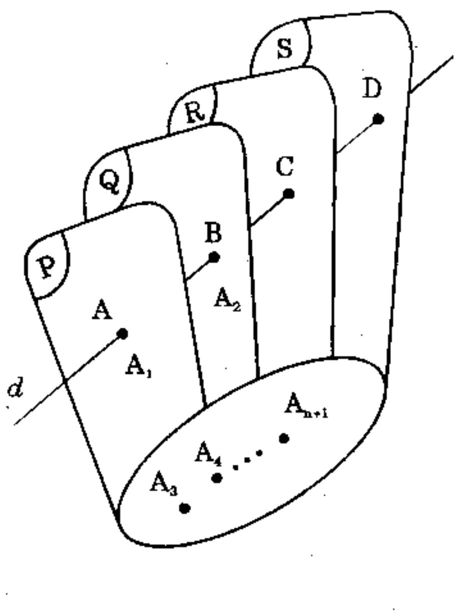
$$[S] = \lambda_2[P] + \mu_2[Q]$$

Khi đó tỉ số $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$ là *tỉ số kép của 4 siêu phẳng* P, Q, R, S của chùm lấy theo thứ tự đó và kí hiệu:

$$\boxed{(P\ Q\ R\ S) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}}$$

CHÚ Ý. α) Tỉ số kép của 4 siêu phẳng thuộc một chùm có các tính chất giống như các tính chất của tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

β) Nếu (PQRS) = −1 thì ta nói rằng bốn siêu phẳng P, Q, R, S làm thành một chùm điều hòa.



hình 33

c) Định lí. Trong $\mathbf{P}^n$ cho một chùm bốn siêu phẳng P, Q, R, S và một đường thẳng d không cắt giá của chùm. Nếu A, B, C, D lần lượt là giao điểm của d với P, Q, R, S thì:

$$\boxed{(P\ Q\ R\ S) = (A\ B\ C\ D)}$$

Chứng minh:

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ sao cho $A_1 \equiv A$, $A_2 \equiv B$ còn $A_3, A_4, \ldots, A_{n+1}$ thuộc giá của chùm (H.33). Khi đó siêu phẳng P đi qua tất cả các đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh A_2 nên P có phương trình $x_2 = 0$, và P có tọa độ là [0, 1, 0, . . . , 0].

Lập luận tương tự Q có phương trình $x_1 = 0$ và Q có tọa độ là [1, 0, . . ., 0].

Giả sử R là một siêu phẳng của chùm (P, Q) xác định bởi cặp số (μ_1, λ_1) nghĩa là:

$$[R] = \lambda_1[P] + \mu_1[Q]$$

Do đó $R = [\mu_1, \lambda_1, 0, \ldots, 0]$

và R có phương trình $\mu_1 x_1 + \lambda_1 x_2 = 0$

Bây giờ ta hãy xét tọa độ giao điểm C của đường thẳng AB với siêu phẳng R của chùm (P, Q). Đường thẳng AB có phương trình tham số:

$$[X] = t_1[A] + t_2[B]$$

Do đó $X = (t_1, t_2, 0, \ldots, 0)$

Muốn cho điểm C thuộc đường thẳng AB đồng thời cũng thuộc siêu phẳng R của chùm (P, Q) thì tọa độ của C phải thỏa mãn phương trình của R nghĩa là:

$$\mu_1 t_1 + \lambda_1 t_2 = 0$$

Ta có thể chọn $t_1 = -\lambda_1$, $t_2 = \mu_1$. Do đó giao điểm C của đường thẳng AB với siêu phẳng R của chùm (P, Q) có tọa độ là:

$$C = (-\lambda_1, \mu_1, 0, \ldots, 0)$$

Vậy $C \in AB \cap R \Leftrightarrow [C] = -\lambda_1[A] + \mu_1[B]$ (1)

Gọi $D \in AB \cap S$. Chứng minh tương tự như đối với C với giả thiết:

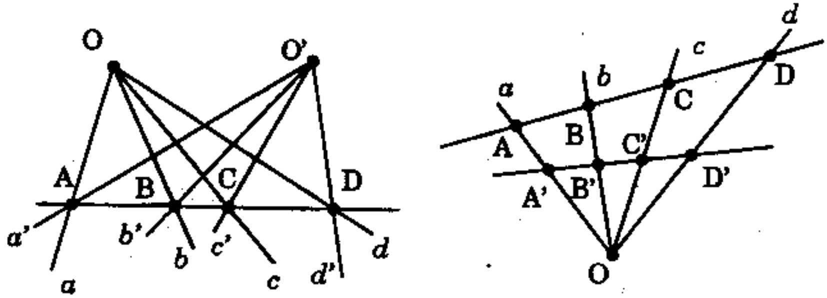
$$[S] = \lambda_2[P] + \mu_2[Q]$$

ta có: $[D] = -\lambda_2[A] + \mu_2[B]$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$(ABCD) = \frac{\mu_1}{-\lambda_1} : \frac{\mu_2}{-\lambda_2} = (PQRS)$$

Ứng dụng.Trong P^2 với phương pháp cắt và chiếu ta có thể chuyển tỉ số kép của một chùm bốn đường thẳng sang một chùm bốn đường thẳng khác, hoặc chuyển tỉ số kép của một hàng bốn điểm sang một hàng bốn điểm khác (H.34).



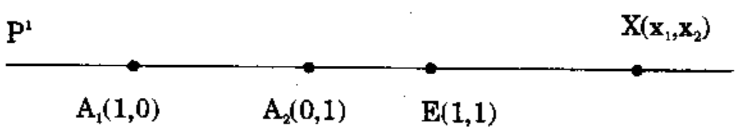
(abcd) = (ABCD) = (a'b'c'd') (ABCD) = (abcd) = (A'B'C'D')

hình 34

3. TỌA ĐỘ XẠ ẢNH KHÔNG THUẦN NHẤT

a)Trên đường thẳng xạ ảnh

α) **Định nghĩa**.Trên đường thẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^1$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2; E\}$ đã chọn, một điểm $X \neq A_1$ có tọa độ xạ ảnh là (x_1, x_2). Khi đó tỉ số $\frac{x_1}{x_2}$ được gọi là *tọa độ xạ ảnh không thuần nhất* của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước (H.35).



hình 35

β) **Tính chất**.Tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của một điểm X trên đường thẳng xạ ảnh đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2; E\}$ bằng tỉ số kép (A_1A_2EX).

Chứng minh

Để tính tỉ số kép (A_1A_2EX), ta giả sử rằng:

$$[E] = \lambda_1[A_1] + \mu_1[A_2]$$

$$[X] = \lambda_2[A_1] + \mu_2[A_2]$$

Thay tọa độ các điểm A_1, A_2, E, X vào các biểu thức trên ta có:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \mu_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \mu_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = x_1,\ \mu_2 = x_2$$

Vậy $(A_1A_2EX) = \dfrac{1}{1} : \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_2}$

NHẬN XÉT. Trên đường thẳng xạ ảnh nếu cho biết tọa độ xạ ảnh của một điểm X là (x_1, x_2) với $x_2 \neq 0$ thì ta dễ dàng tính được tọa độ không thuần nhất của điểm đó là $\dfrac{x_1}{x_2}$. Ngược lại nếu biết tọa độ không thuần nhất của một điểm là m thì ta suy ra tọa độ xạ ảnh của điểm đó là (m, 1).

Đặc biệt với tọa độ xạ ảnh là cặp số $(x_1, 0)$ thì ta quy ước lấy tọa độ không thuần nhất của điểm đó là ∞ (vô tận) và ngược lại.

b)Trong không gian xạ ảnh P^n

α) **Định nghĩa**.Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho trước, cho một điểm X có tọa độ xạ ảnh là $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ trong đó $x_{n+1} \neq 0$ thì khi đó bộ n số thực có thứ tự $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ trong đó $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$ được gọi là tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của điểm X đối với mục tiêu xạ ảnh đã cho.

β) **Tính chất**. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$. Ta hãy xét đường thẳng A_iA_{n+1} và chùm siêu phẳng P, Q, R, S có giá là (n–2)– phẳng xác định bởi n–1 đỉnh còn lại của mục tiêu và lần lượt đi qua các điểm A_i, A_{n+1}, E, X. Gọi E_i và X_i lần lượt là giao điểm của đường thẳng A_iA_{n+1} với các siêu phẳng R và S. Khi đó ta có:

$$\boxed{(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \frac{x_i}{x_{n+1}}}$$

Chứng minh:

Siêu phẳng P không đi qua điểm A_{n+1} nên có phương trình là $x_{n+1} = 0$ nghĩa là $P = [0, \ldots, 0, 1]$. Siêu phẳng Q không đi qua đỉnh A_i nên có phương trình là $x_i = 0$, nghĩa là:

$Q = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ (số 1 ở cột thứ i) (H.36)

Mọi siêu phẳng T của chùm (P, Q) được biểu thị bởi phương trình:

$$[T] = \lambda[P] + \mu[Q]$$

Do đó $T = (0, \ldots, 0, \mu, 0, \ldots, 0, \lambda)$

Như vậy siêu phẳng T của chùm (P, Q) có phương trình:

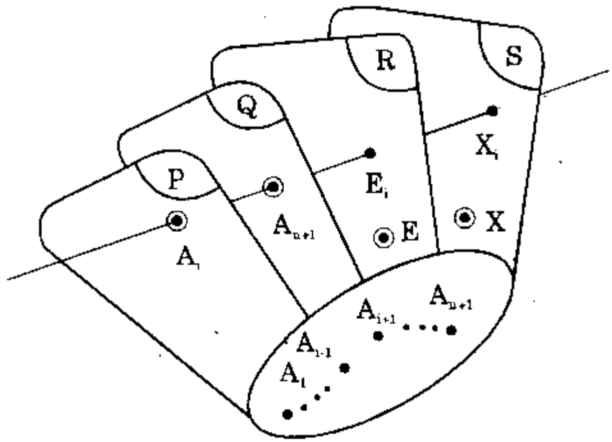
$$\mu x_i + \lambda x_{n+1} = 0$$

•Vì R là siêu phẳng của chùm (P,Q) và đi qua điểm $E(1, 1, \ldots, 1)$ nên: $\mu + \lambda = 0$

Do đó ta có thể chọn $\mu = 1$ và $\lambda = -1$. Vậy:

$$[R] = -[P] + [Q]$$

• Còn S là siêu phẳng của chùm (P, Q) và đi qua điểm $X(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ nên:



hình 36

$\mu x_i + \lambda x_{n+1} = 0$

Ta có thể chọn: $\mu = x_{n+1}$ và $\lambda = -x_i$

Vậy: $[S] = -x_i[P] + x_{n+1}[Q]$

Do đó: $(PQRS) = \frac{1}{-1} : \frac{x_{n+1}}{-x_i} = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ (H.36)

Mặt khác $(PQRS) = (A_iA_{n+1}E_iX_i)$ nên:

$$\boxed{(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \frac{x_i}{x_{n+1}}}$$

Đẳng thức $(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \frac{x_i}{x_{n+1}}$ chứng tỏ rằng trên đường thẳng A_iA_{n+1} tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của điểm X_i đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i, A_{n+1}; E_i\}$ là $\frac{x_i}{x_{n+1}}$. Vậy đối với một mục tiêu xạ ảnh cho trước nếu một điểm $X \in \mathbf{P}^n$ có tọa độ xạ ảnh là $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ với $x_{n+1} \neq 0$ thì ta có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của điểm đó là bộ n số thực có thứ tự:

$$\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ với } X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}$$

với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ngược lại nếu biết tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của một điểm X là $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ thì ta dễ dàng suy ra được tọa độ xạ ảnh của điểm đó là:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n, 1).$$

CHÚ Ý. Các điểm có tọa độ xạ ảnh bằng $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ trong đó $x_{n+1} = 0$ đều không xác định được tọa độ xạ ảnh không thuần nhất vì khi đó ta có một bộ n số ∞ và một bộ như thế sẽ ứng với tất cả các điểm X của siêu phẳng có phương trình $x_{n+1} = 0$ chứa các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

§6. MÔ HÌNH XẠ ẢNH CỦA KHÔNG GIAN AFIN

1. XÂY DỰNG MÔ HÌNH CỦA $\mathbf{A}^n$ TỪ $\mathbf{P}^n$

Xuất phát từ không gian afin $\mathbf{A}^n$ ta đã biết cách xây dựng mô hình của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ bằng cách thêm vào $\mathbf{A}^n$ những điểm vô tận. Bây giờ ngược lại, từ không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ ta hãy bỏ bớt đi một số điểm nào đó để xây dựng mô hình của không gian afin.

Ta hãy chọn trong $\mathbf{P}^n$ một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ nào đó và gọi $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ là tập hợp những điểm của $\mathbf{P}^n$ mà không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$. Ta sẽ chứng minh $\mathbf{A}^n$ là một không gian afin n chiều.

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ của $\mathbf{P}^n$ sao cho các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ và do đó đỉnh A_{n+1} không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$. Đối với mục tiêu đã chọn siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Bởi vậy mọi điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ sẽ có tọa độ xạ ảnh là

$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ trong đó $x_{n+1} \neq 0$ và có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ trong đó $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$. Như vậy có tương ứng 1 – 1 giữa tập hợp các điểm của $\mathbf{A}^n$ và tập hợp các bộ n số thực có thứ tự $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Bây giờ với hai điểm X, Y của $\mathbf{A}^n$ mà tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ và $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ta cho ứng với một vectơ của không gian vectơ $\mathbf{V}^n$ mà tọa độ của nó là:

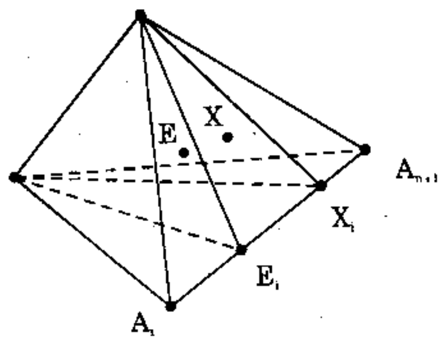
$$(Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, \dots, Y_n - X_n)$$

Ta dễ dàng thấy sự tương ứng này thỏa mãn hai tiên đề của không gian afin. Vậy $\mathbf{A}^n$ là một không gian afin n chiều.

2. MỘT SỐ THỂ HIỆN TRÊN MÔ HÌNH

a)Tọa độ afin và mục tiêu afin

Ta xét mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$. Gọi E_i là giao điểm của đường thẳng A_iA_{n+1} với siêu phẳng chứa các đỉnh A_i còn lại của mục tiêu và điểm E, còn X_i là giao điểm của đường thẳng đó với siêu phẳng chứa các điểm A_i còn lại và điểm X. Ta có các tỉ số kép (H.37):



hình 37

$$\boxed{(A_iA_{n+1}E_iX_i) = \frac{x_i}{x_{n+1}} = X_i} \qquad \text{và } (A_iA_{n+1}E_iE_i) = 1$$

Do đó các điểm E_i có tọa độ xạ ảnh là:

$$E_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$$

(con số 1 thứ nhất ở cột thứ i)

Do đó ta tính được tọa độ xạ ảnh của các điểm $E_1, E_2, ..., E_n$ là:

$E_1 = (1, 0, ..., 0, 1)$

$E_2 = (0, 1, 0, ..., 0, 1)$

. . . .

$E_n = (0, ..., 1, 1)$

Ta suy ra tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của các điểm đó là:

$E_1 = (1, 0, ..., 0)$

$E_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$

$E_n = (0, ..., 0, 1)$

Điểm $A_{n+1}(0, 0, ..., 0, 1)$ có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là:

$A_{n+1} = (0, 0, ..., 0)$

Do cách đặt tương ứng khi xây dựng mô hình ta có:

$$\overrightarrow{A_{n+1}E_1} = (1, 0, ..., 0) = \overrightarrow{e_1}$$

$$\overrightarrow{A_{n+1}E_2} = (0, 1, 0, ..., 0) = \overrightarrow{e_2}$$

.. ..

$$\overrightarrow{A_{n+1}E_n} = (0, ..., 0, 1) = \overrightarrow{e_n}$$

Ta nhận thấy các vectơ $\overrightarrow{A_{n+1}E_i}$ chính là các vectơ cơ sở $\overrightarrow{e_i}$ trong không gian vectơ $\mathbf{V}^n$. Do đó ta có thể dùng bộ điểm $\{A_{n+1} ; E_1, E_2, ..., E_n\}$ làm mục tiêu afin của không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$. Mục tiêu afin này được sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ đã cho.

Nếu một điểm $X \in \mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, ..., X_n)$ thì vectơ $\overrightarrow{A_{n+1}X}$ có tọa độ là:

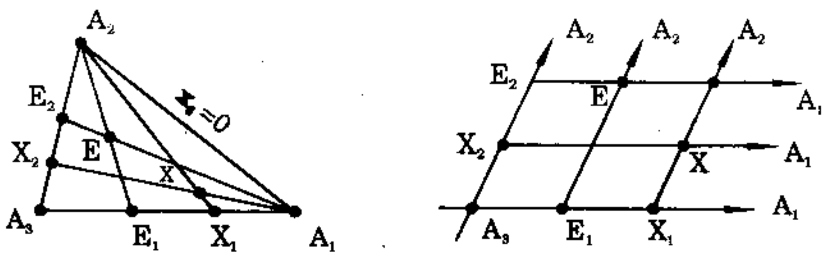
$$\overrightarrow{A_{n+1}X} = (X_1 - 0, X_2 - 0, . . ., X_n - 0)$$

$$\overrightarrow{A_{n+1}X} = (X_1 , X_2, . . ., X_n)$$

Điều đó chứng tỏ rằng $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là tọa độ afin của điểm X đối với mục tiêu afin $\{A_{n+1}; E_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Vậy:

Kết luận: Tọa độ xạ ảnh không thuần nhất của một điểm X thuộc $\mathbf{A}^n$ đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ chính là tọa độ afin của điểm X đó đối với mục tiêu afin $\{A_{n+1}; E_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, còn mục tiêu afin $\{A_{n+1}; E_i\}$ gọi là được sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho trước.

Thí dụ: Trong mặt phẳng afin $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{P}^1$, ta thấy mục tiêu afin $\{A_3; E_1, E_2\}$ được sinh ra bởi mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$. Trong trường hợp này đường thẳng $P^1 = A_1A_2$ là đường thẳng vô tận có phương trình $x_3 = 0$ nên không có trong mặt phẳng afin. Các đường thẳng đồng quy tại A_1 hoặc A_2 nằm trên $\mathbf{P}^1$ trở thành những đường thẳng song song với nhau trong mặt phẳng afin (H.38).

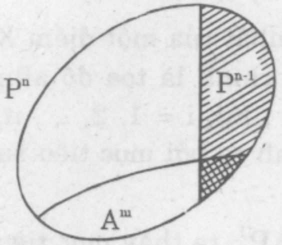


hình 38

b)Các m-phẳng afin. Ta hãy xét một m-phẳng $\mathbf{P}^m$ nào đó của $\mathbf{P}^n$ mà không nằm trong siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Giả sử đối với mục tiêu xạ ảnh đã chọn sao cho $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$, khi đó $\mathbf{P}^m$ có phương trình:

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-m$$

trong đó ma trận $[a_{ij}]$ có hạng bằng n− m.



hình 39

Gọi $\mathbf{A}^m$ là tập hợp những điểm X thuộc $\mathbf{P}^m$ mà không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ có nghĩa là:

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{P}^m \cap \mathbf{A}^n \text{ với } \mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}.$$

Khi đó mỗi điểm X của $\mathbf{A}^m$ có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất là $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ với $X_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$

$$X(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{A}^m \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0 \text{ với } x_{n+1} \neq 0$$

Chia hai vế của phương trình m–phẳng cho x_{n+1} ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + a_{i,n+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

Ta thấy ma trận a_{ij} của hệ phương trình này cũng có hạng bằng n – m. Thật vậy ta hãy xét hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, n-m$$

Vì $\mathbf{P}^m$ không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ nên hệ này có hạng bằng n− m+1. Gọi A là ma trận của hệ, ta có hạng của A phải bằng n− m+1:

$$A = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \dots & a_{n-m,n} & a_{n-m,n+1} \\ \hdashline 0 & 0 & & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nếu ma trận $[a_{ij}]$ có hạng nhỏ hơn n–m thì ma trận A sẽ có hạng phải nhỏ hơn n–m+1 là điều vô lí.

Vậy hệ phương trình $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + a_{i,n+1} = 0, \; i = 1,2, \dots, n-m,$

có hạng bằng n–m, là phương trình của một m–phẳng afin.

Vậy: mỗi m–phẳng afin $\mathbf{A}^m$ chính là một m–phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^m$ (không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$) sau khi bỏ đi những điểm nằm trên siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$.

c)Sự cùng phương của các phẳng afin. Trong $\mathbf{P}^n$ cho hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ phân biệt ($r \geq s$) đều không thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ nhưng có giao là một cái phẳng s–1 chiều thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ vì $\mathbf{P}^{n-1} \cap P^s = P^{s-1}$.

Giả sử $\mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s = \mathbf{Q}^{s-1} \subset \mathbf{P}^{n-1}$

Ta cần chứng minh $\mathbf{P}^r \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ và $\mathbf{P}^s \backslash \mathbf{P}^{n-1}$ là hai phẳng afin song song. Đối với mục tiêu xạ ảnh$\{A_i ; E\}$ đã chọn, giả sử $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có phương trình:

$$(\mathbf{P}^r): \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n-r.$$

$$(\mathbf{P}^s): \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}x_j = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n-s.$$

Khi đó theo giả thiết ta có: $\mathbf{Q}^{s-1} = \mathbf{P}^r \cap \mathbf{P}^s \cap \mathbf{P}^{n-1}$ nên ta có phương trình của $\mathbf{Q}^{s-1}$ là:

$$(\mathbf{Q}^{s-1}): \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j = 0, & i = 1, 2, \dots, n-r. \\ \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}x_j = 0, & i = 1, 2, \dots, n-s. \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Hệ này gồm có 2n − (r+s) + 1 phương trình nhưng vì dim$\mathbf{Q}$ = s−1 nên trong hệ trên có n − (s−1) = n − s + 1 phương trình độc lập. Do đó ta có thể lấy n−s+1 phương trình cuối của hệ trên làm phương trình của $\mathbf{Q}^{s-1}$. Như vậy mỗi hệ số a_{ij} ở vế trái của n−r phương trình đầu được biểu thị tuyến tính qua các hệ số ở vế trái của n−s+1 phương trình cuối.

Bây giờ nếu gọi $\mathbf{A}^r$ và $\mathbf{A}^s$ là hai cái phẳng afin được sinh ra bởi hai cái phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ thì khi đó phương trình của chúng đối với mục tiêu afin lần lượt là:

$$(\mathbf{A}^r):\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + a_{i,n+1} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-r.$$

$$(\mathbf{A}^s):\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}X_j + b_{i,n+1} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n-s.$$

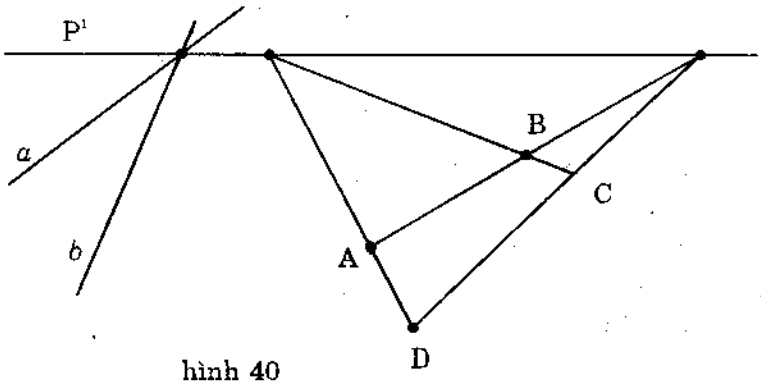
Vì mỗi hệ số a_{ij} trong mỗi vế trái của n−r phương trình đầu được biểu thị tuyến tính qua các hệ số của n−s phương trình sau nghĩa là:

$$a_{ij} = k_{i1}b_{1j} + k_{i2}b_{2j} + \ldots + k_{i,n-s}b_{n-s,j}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-r$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

Do đó $\mathbf{A}^s$ cùng phương với $\mathbf{A}^r$ (nghĩa là $\mathbf{V}^s \subset \mathbf{V}^r$) và vì chúng là các phẳng phân biệt nên $\mathbf{A}^s$ song song với $\mathbf{A}^r$.

CHÚ Ý: Ta thường gọi các điểm của siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ là các *điểm vô tận*. Do đó nếu hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có giao là phẳng $\mathbf{Q}$ chứa toàn điểm vô tận nghĩa là $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}^{n-1}$ thì ta nói rằng $\mathbf{A}^s$ song song với $\mathbf{A}^r$.

Thí dụ: Trong $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \backslash \mathbf{P}^1$ hai đường thẳng a, b song song với nhau nghĩa là hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm nằm trên $\mathbf{P}^1$. Một hình tứ giác ABCD có AB∩DC và AD∩BC thuộc $\mathbf{P}^1$ thì tứ giác đó biểu thị cho hình bình hành ABCD trong mặt phẳng afin (H.40).



hình 40

d)Phép biến đổi afin

Trong tập hợp tất cả những phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ ta hãy xét những phép biến đổi biến siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó. Mỗi phép biến đổi như vậy biến mỗi điểm có tọa độ xạ ảnh $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ thành điểm có tọa độ xạ ảnh $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1})$ sao cho nếu $x_{n+1} = 0$ thì $x'_{n+1} = 0$ và nếu $x_{n+1} \neq 0$ thì $x'_{n+1} \neq 0$. Muốn vậy trong phương trình của phép biến đổi xạ ảnh cần có phương trình $x'_{n+1} = x_{n+1}$. Do đó phương trình của phép biến đổi xạ ảnh có dạng:

$$\begin{cases} x'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij}x_j & i = 1, 2, \dots, n \\ x'_{n+1} = x_{n+1} \end{cases}$$

trong đó ma trận A của phép biến đổi xạ ảnh là một ma trận vuông cấp n+1 không suy biến và có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó phép biến đổi xạ ảnh nói trên của $\mathbf{P}^n$ sẽ sinh ra trên không gian afin $\mathbf{A}^n$ một phép biến đổi afin. Thực vậy ta hãy lấy một điểm $X \in \mathbf{A}^n$ có tọa độ xạ ảnh là $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ trong đó $x_{n+1} \neq 0$. Qua phép biến đổi xạ ảnh nói trên điểm X biến thành điểm X' có tọa độ xạ ảnh là $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n+1})$ và tất nhiên $x'_{n+1} \neq 0$. Chuyển tọa độ xạ ảnh của X và của X' sang tọa độ afin ta có phép biến đổi:

$$\begin{cases} X'_1 & = & a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + a_{1,n+1} \\ X'_2 & = & a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + a_{2,n+1} \\ \dots & & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ X'_n & = & a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + a_{n,n+1} \end{cases}$$

trong đó ma trận $A' = [a_{ij}]$, $i,j = 1, 2, \dots, n$ là ma trận vuông cấp n không suy biến và như vậy ta được phép biến đổi afin.

Kết luận: Mỗi phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ biến $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó sẽ sinh ra trên $\mathbf{A}^n$ một phép biến đổi afin.

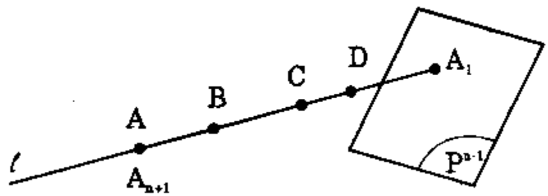
Ngược lại mỗi phép biến đổi afin của không gian afin $\mathbf{A}^n$ đều có thể xem như được sinh ra bởi một phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ biến siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó.

Thực vậy nếu ta có một phép biến đổi afin thì bằng cách chuyển từ tọa độ afin sang tọa độ xạ ảnh ta sẽ có n phương trình đầu của phép biến đổi xạ ảnh với điều kiện $x_{n+1} \neq 0$. Sau đó ta thêm vào n phương trình đó một phương trình $x'_{n+1} = x_{n+1}$ và xem x_{n+1} có thể bằng 0 thì ta được phương trình của phép biến đổi xạ ảnh sinh ra phép biến đổi afin nói trên. Phép biến đổi xạ ảnh này biến siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thành chính nó.

e) Tỉ số kép

α) Giả sử A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng xạ ảnh l của $\mathbf{P}^n$ nhưng không có điểm nào trong bốn điểm thuộc siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$.

Ta chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ sao cho $A_{n+1} \equiv A$, $A_1 = l \cap \mathbf{P}^{n-1}$. Khi đó các điểm B, C, D có tọa độ biểu thị tuyến tính qua tọa độ của A_{n+1} và A_1.



hình 41

Ta có: $A = (0, 0, \dots, 0, 1)$

$B = (b, 0, \dots, 0, 1)$

$C = (c, 0, \dots, 0, 1)$

$D = (d, 0, \dots, 0, 1)$

Thực vậy ta hãy tính tọa độ điểm $B(b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{\lambda} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự ta tính được tọa độ điểm C và D.

Bây giờ ta hãy tính tỉ số kép (ABCD). Ta có:

$$[C] = \lambda_1[A] + \mu_1[B]$$
$$[D] = \lambda_2[A] + \mu_2[B] \qquad \Rightarrow (ABCD) = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

Thay tọa độ của các điểm A, B, C, D vào công thức định nghĩa của tỉ số kép ta có:

$$[C] = \frac{b-c}{b}[A] + \frac{c}{b}[B]$$

$$[D] = \frac{b-d}{b}[A] + \frac{d}{b}[B]$$

Do đó $$\boxed{(ABCD) = \frac{c}{b-c} : \frac{d}{b-d}}$$

Nếu chuyển tọa độ xạ ảnh của các điểm A, B, C, D sang tọa độ afin ta có:

$$A = (0, 0, \dots, 0)$$

$$B = (b, 0, \dots, 0)$$

$$C = (c, 0, \dots, 0)$$

$$D = (d, 0, \dots, 0)$$

Từ đó ta tính được tọa độ của các vectơ sau đây:

$$\overrightarrow{CA} = (-c, 0, \dots, 0)\ ;\ \overrightarrow{DA} = (-d, 0, \dots, 0)$$

$$\overrightarrow{CB} = (b-c, 0, \dots, 0)\ ;\ \overrightarrow{DB} = (b-d, 0, \dots, 0)$$

Do đó $(CAB) = -\dfrac{c}{b-c}$ và $(DAB) = -\dfrac{d}{b-d}$

nên: $$\boxed{(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)}}$$

Như vậy tỉ số kép (ABCD) của bốn điểm A, B, C, D bằng tỉ số của hai tỉ số đơn (CAB) và (DAB).

β)Nếu có một trong bốn điểm A, B, C, D là điểm vô tận, thí dụ điểm D thuộc siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ thì khi đó $D \equiv A_1$ và ta có:

$$[D] = -[A] + [B]$$

nên $$(ABCD) = \frac{c}{b-c} : \frac{1}{-1} = -\frac{c}{b-c} = (CAB)$$

Vậy $\boxed{(ABCD_\infty) = (CAB)}$

Đặc biệt nếu (ABCD) = −1 và D là điểm vô tận thì khi đó C là trung điểm của đoạn AB.

$$\boxed{(ABCD_\infty) = (CAB) = -1}$$

CHÚ Ý: Tỉ số đơn của ba điểm thẳng hàng không phải là một khái niệm của hình học xạ ảnh và do đó trung điểm của một đoạn thẳng cũng không phải là một khái niệm có trong không gian xạ ảnh.

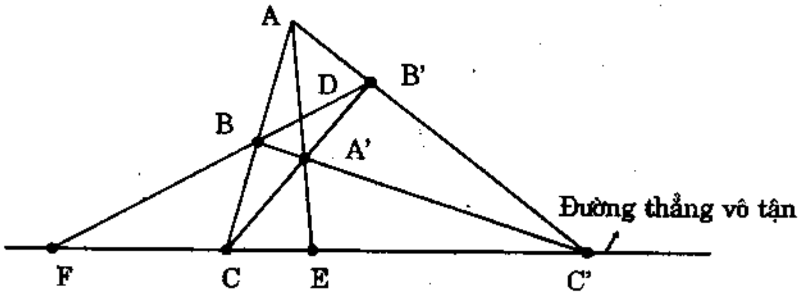
3. VÀI ÁP DỤNG CỦA MÔ HÌNH

a)Dùng hình học afin để nghiên cứu hình học xạ ảnh. Ta có thể chứng minh một số định lí của hình học xạ ảnh hoặc giải một số bài toán của hình học xạ ảnh bằng cách dựa vào những kết quả đã biết của hình học afin. Sau khi chọn siêu phẳng vô tận $\mathbf{P}^{n-1}$ một cách khôn khéo ta có thể chuyển một bài toán xạ ảnh thành một bài toán afin mà cách giải dễ thực hiện hơn.

Thí dụ: Chứng minh rằng: trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo liên hiệp điều hòa với nhau.

Trước đây ta đã giải bài toán này bằng công cụ của hình học xạ ảnh, bây giờ ta hãy dùng mô hình afin của không gian xạ ảnh để giải bài toán này.

Chọn siêu phẳng vô tận $\mathbf{P}^{n-1}$ đi qua hai điểm C, C' và không đi qua một đỉnh nào khác nữa của hình bốn cạnh toàn phần. Khi đó ta có hai đường thẳng AB và A'B' song song với nhau. Hai đường thẳng AB' và A'B cũng song song với nhau. Tứ giác



hình 42

ABA'B' là một hình bình hành của không gian afin $\mathbf{A}^n$. Theo kết quả của hình học afin ta có điểm chéo D là trung điểm của AA' và BB'.

Vì vậy điểm D cùng với điểm E vô tận liên hiệp điều hòa với hai điểm A, A'. Trên đường chéo BB', điểm D cùng với điểm vô tận F liên hiệp điều hòa với hai điểm B, B'. Do đó ta có:

$(AA'DE_\infty) = (DAA') = -1$

$(BB'DF_\infty) = (DBB') = -1$ là đpcm. (H.42)

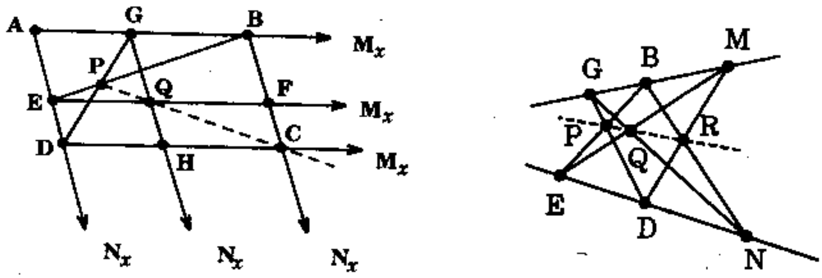
b)Dùng hình học xạ ảnh để nghiên cứu hình học afin

Ta có thể chứng minh một số định lí của hình học afin hoặc giải một số bài toán của hình học afin bằng cách dựa vào những kết quả đã biết của hình học xạ ảnh.

Thí dụ. Hãy giải bài toán afin sau đây:

Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng song song với cạnh AB cắt các cạnh AD, BC lần lượt tại E và F. Một đường thẳng khác song song với cạnh AD cắt các cạnh AB, DC lần lượt tại G và H. Gọi $P = BE \cap DG$, $Q = EF \cap GH$. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, C thẳng hàng.

Giải



hình 43

Ta hãy bổ sung các điểm vô tận vào mặt phẳng afin chứa hình bình hành ABCD. Các đường thẳng AB, EF, DC đồng quy tại một điểm M vô tận và các đường thẳng AD, GH, BC đồng quy tại một điểm N vô tận. Sau khi đưa thêm đường thẳng vô tận vào mặt phẳng afin ta có mặt phẳng xạ ảnh và trên đó ta có bài toán xạ ảnh sau đây:

"Cho ba điểm G, B, M thuộc một đường thẳng và ba điểm E, D, N thuộc một đường thẳng khác. Gọi $P = EB \cap DG$, $Q = EM \cap NG$, $R = DM \cap NB$. Chứng minh ba điểm P, Q, R thẳng hàng". Sau khi chuyển thành bài toán xạ ảnh, áp dụng định lí Pappus ta có ngay kết quả cần chứng minh (H.43).

c)Sáng tạo các bài toán mới

α) Từ một bài toán xạ ảnh trong không gian xạ ảnh, bằng cách chọn các siêu phẳng khác nhau đóng vai trò siêu phẳng vô tận ta có thể có nhiều bài toán afin khác nhau mà các kết quả ta có thể suy ra từ những kết quả đã biết trong không gian xạ ảnh.

β) Từ một bài toán afin ta có thể suy ra một bài toán xạ ảnh bằng cách bổ sung thêm vào không gian afin này những điểm vô tận thuộc một siêu phẳng vô tận. Khi đó ta có một bài toán của không gian xạ ảnh mà các kết quả có thể suy ra từ bài toán afin cho trước.

γ) Từ một bài toán afin ta có thể suy ra nhiều bài toán afin khác bằng cách kết hợp cả hai cách làm trên đây.

Thông qua mô hình xạ ảnh của không gian afin, chúng ta thấy giữa không gian afin và không gian xạ ảnh có một sự liên quan rất mật thiết. Do đó giữa hình học afin và hình học xạ ảnh có nhiều mối liên hệ mà chúng ta sẽ tiếp tục tìm hiểu thêm trong các phần sau.

§7. NGUYÊN TẮC ĐỐI NGẪU TRONG $\mathbf{P}^n$

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$, hai cái phẳng $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ có mối quan hệ liên thuộc sau đây: nếu $\mathbf{P}^r \subset \mathbf{P}^s$ thì ta nói rằng $\mathbf{P}^r$ thuộc $\mathbf{P}^s$ hoặc $\mathbf{P}^s \subset \mathbf{P}^r$ thì ta nói rằng $\mathbf{P}^s$ thuộc $\mathbf{P}^r$. Trong cả hai trường hợp ta kí hiệu $\mathbf{P}^r$ ⵋ $\mathbf{P}^s$ và dùng từ "thuộc" để diễn tả mối quan hệ đó của hai cái phẳng. Như vậy từ "thuộc" có nghĩa là "nằm trên", "đi qua", "chứa" v.v... Thí dụ điểm A ⵋ $\mathbf{P}^m$ thì ta nói rằng điểm A thuộc $\mathbf{P}^m$ hay $\mathbf{P}^m$ thuộc điểm A.

1. KHÁI NIỆM VỀ SỰ ĐỐI NGẪU

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ cho trước, gọi $\mathbf{P}$ là tập hợp các siêu phẳng của $\mathbf{P}^n$ và xét ánh xạ p: $\mathbf{P}^n \rightarrow \mathbf{P}^n_*$ sao cho với mỗi điểm có tọa độ $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ của $\mathbf{P}^n$ ta có một siêu phẳng có tọa độ $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. Rõ ràng ánh xạ p là một song ánh và ta có $\mathbf{P}^n_*$ là một mô hình của không gian xạ ảnh n chiều trong đó mỗi "điểm" là một siêu phẳng của $\mathbf{P}^n$. Như vậy qua song ánh p mỗi khái niệm trong $\mathbf{P}^n$ sẽ có một khái niệm tương ứng trong P_*^n. Thí dụ trong P^2 với điểm M có tọa độ (1,2,3) thì khi đó trong P_*^2 ta có khái niệm tương ứng là siêu phẳng $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Do đó với các định nghĩa, định lí có liên quan đến các khái niệm trong P^n ta sẽ có các định nghĩa, định lí có liên quan đến các khái niệm tương ứng trong P_*^n. Vấn đề này sẽ được xét và trình bày thông qua nguyên tắc đối ngẫu của không gian xạ ảnh và trước hết ta hãy nói về các khái niệm đối ngẫu của nhau.

Bây giờ chúng ta hãy xét đẳng thức sau đây:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_{n+1}x_{n+1} = 0$$

Nếu $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ là hằng số không đồng thời bằng 0 còn $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ là những biến số thì đẳng thức trên trở thành một phương trình và ta có thể hiểu phương trình đó theo hai cách hiểu khác nhau:

a) Có thể xem phương trình đó cho ta tập hợp những điểm X có tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ thuộc siêu phẳng có tọa độ $[u_1, u_2, \dots, u_{n+1}]$.

b) Có thể xem phương trình đó cho ta tập hợp những siêu phẳng có tọa độ $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ cùng đi qua một điểm U có tọa độ $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$.

Với cách hiểu thứ nhất ta có điểm (x_i) thuộc siêu phẳng $[u_i]$. Nếu trong cách hiểu đó ta thay chữ "điểm" và "siêu phẳng" cho nhau thì ta có ngay cách hiểu thứ hai là siêu phẳng $[x_i]$ thuộc điểm (u_i). Ta nói rằng điểm và siêu phẳng là *hai khái niệm đối ngẫu của nhau*. Trong không gian xạ ảnh ta còn gặp các khái niệm khác được suy ra từ khái niệm điểm và siêu phẳng cùng với sự liên thuộc giữa chúng. Khi đó ta sẽ có các khái niệm đối ngẫu của những khái niệm mới được xét đến.Dựa trên khái niệm đối ngẫu cơ bản là cặp khái niệm cơ bản điểm và siêu phẳng ta sẽ tìm được khái niệm đối ngẫu của m–phẳng qua định lí sau đây:

2. ĐỊNH LÍ

Trong $\mathbf{P}^n$ đối ngẫu của một m–phẳng là một (n–m–1)–phẳng.

Chứng minh

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho m–phẳng $\mathbf{P}^m$ có phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \dots \\ a_{n-m,1}x_1 + a_{n-m,2}x_2 + \dots + a_{n-m,n+1}x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Ta có thể xem $\mathbf{P}^m$ này là giao của n–m siêu phẳng độc lập. Với mỗi điểm X có tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ thuộc các siêu phẳng nói trên qua song ánh p biến thành siêu phẳng p(X) có tọa độ $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$.

Dựa vào phương trình của $\mathbf{P}^m$ ta nhận thấy rằng các siêu phẳng p(X) chứa n–m điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n-m}$ độc lập có tọa độ là:

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,n+1}) \text{ với } i = 1, 2, \dots, n-m.$$

Các siêu phẳng p(X) biến thiên nhưng luôn luôn chứa n–m điểm $A_1, A_2, \dots, A_{n-m}$ độc lập. Gọi $\mathbf{P}^{n-m-1}$ là (n–m–1)– phẳng xác định bởi n–m điểm A_i độc lập đó, ta có:

$$\mathbf{P}^{n-m-1} \subset \text{mọi siêu phẳng } p(X) \text{ với } X \in \mathbf{P}^m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{P}^{n-m-1} \subset \bigcap_{X \in \mathbf{P}^m} p(X)} \qquad (1)$$

Bây giờ trong m–phẳng $\mathbf{P}^m$ ta lấy m+1 điểm $B_1, B_2, \dots, B_{m+1}$ độc lập. Qua song ánh p ta có m+1 siêu phẳng $p(B_i)$, $i = 1, 2, \dots, m+1$ cũng độc lập. Vậy giao của m+1 siêu phẳng độc lập này là một cái phẳng n–m–1 chiều và cũng chứa cái phẳng $\mathbf{P}^{n-m-1}$ nói trên vì các điểm B_i cũng là các điểm thuộc $\mathbf{P}^m$.

Do đó $\mathbf{P}^{n-m-1} \subset \bigcap_{i=1}^{m+1} p(B_i)$ với $B_i \in \mathbf{P}^m$

trong đó $\bigcap_{i=1}^{m+1} p(B_i)$ cũng là cái phẳng n–m–1 chiều.Hai cái phẳng có số chiều bằng nhau và chứa nhau nên:

$$\mathbf{P}^{n-m-1} = \bigcap_{i=1}^{m+1} p(B_i)$$

Mặt khác ta có: $\boxed{\bigcap_{X \in P^m} p(X) \subset \bigcap_{B_i \in P^m} p(B_i) = \mathbf{P}^{n-m-1}}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\boxed{\bigcap_{X \in P^m} p(X) = \mathbf{P}^{n-m-1}}$

Vậy trong $\mathbf{P}^n$ đối ngẫu của một m–phẳng là một (n-m-1)–phẳng.

Hệ quả: Đối ngẫu của một m–phẳng $\mathbf{P}^m$ trong không gian xạ ảnh n chiều $\mathbf{P}^n$ là một cái phẳng n–m–1 chiều $\mathbf{P}^{n-m-1}$ và được xác định như sau:

$$\mathbf{P}^{n-m-1} = \bigcap_{X \in P^m} p(X)$$

3.ĐỊNH LÍ

Trong $\mathbf{P}^n$ cho $\mathbf{P}^r$ và $\mathbf{P}^s$ là hai cái phẳng thuộc nhau thì khi đó hai cái phẳng đối ngẫu của chúng cũng thuộc nhau.

Chứng minh

Giả sử $\mathbf{P}^r \subset \mathbf{P}^s$. Ta kí hiệu $\mathbf{P}^r$ ⲭ $\mathbf{P}^s$.

Nếu ta lấy một điểm $X \in \mathbf{P}^r$ thì $X \in \mathbf{P}^s$ và khi đó:

$$\bigcap_{X \in P^r} p(X) \subset \text{siêu phẳng } p(X)$$

và $\quad \bigcap_{X \in P^s} p(X) \subset$ siêu phẳng p(X)

Từ đó suy ra $\bigcap_{X \in \mathbf{P}^s} p(X) \subset \bigcap_{X \in \mathbf{P}^r} p(X)$ vì $\mathbf{P}^r \subset \mathbf{P}^s$

Vậy $\quad \bigcap_{X \in \mathbf{P}^s} p(X) \subset \bigcap_{X \in \mathbf{P}^r} p(X)$

Hệ quả. Nếu $\mathbf{P}^r \subset \mathbf{P}^s$ thì ta có các phẳng đối ngẫu của chúng là: $\mathbf{P}^{n-r-1} \supset \mathbf{P}^{n-s-1}$.

4. NGUYÊN TẮC ĐỐI NGẪU

a)Định nghĩa.Giả sử A là một mệnh đề nói về những cái phẳng của $\mathbf{P}^n$ và về quan hệ liên thuộc giữa những cái phẳng đó. Nếu trong A ta thay các từ "m–phẳng" bằng các từ "(n–m–1)–phẳng" còn tất cả các từ khác giữ nguyên thì khi đó ta được mệnh đề A* là *mệnh đề đối ngẫu* của mệnh đề A.

Nếu A* là mệnh đề đối ngẫu của A thì ngược lại A là mệnh đề đối ngẫu của A*. Do đó A và A* được gọi là *hai mệnh đề đối ngẫu của nhau.*

Hai định nghĩa được định nghĩa bằng hai mệnh đề đối ngẫu của nhau được gọi là hai khái niệm đối ngẫu của nhau. Từ đó ta suy ra trong $\mathbf{P}^n$ mỗi khái niệm được định nghĩa thông qua khái niệm "cái phẳng" và khái niệm liên thuộc giữa chúng đều có khái niệm đối ngẫu với nó, thí dụ khái niệm đối ngẫu của đường thẳng (là tập hợp những điểm cùng thuộc một cái 1–phẳng) là (n–2)–phẳng (là tập hợp những siêu phẳng cùng thuộc một (n–1–1)–phẳng).

b) Nguyên tắc đối ngẫu. Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ nếu A là một mệnh đề đúng thì mệnh đề đối ngẫu A* cũng đúng.

Do đó trong $\mathbf{P}^n$ áp dụng nguyên tắc đối ngẫu ta có thể thay việc chứng minh một định lí bằng cách chứng minh định lí đối ngẫu với định lí đó và có thể giải một bài toán bằng cách giải bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

5. CÁC THÍ DỤ

a)Khái niệm đối ngẫu. Ta có từng cặp khái niệm đối ngẫu sau đây:

- Trong $\mathbf{P}^2$:

điểm	$\leftrightarrow$	đường thẳng
hình ba đỉnh	$\leftrightarrow$	hình ba cạnh
hàng điểm	$\leftrightarrow$	chùm đường thẳng
hình bốn cạnh toàn phần	$\leftrightarrow$	hình bốn đỉnh toàn phần

- Trong $\mathbf{P}^3$:

điểm	$\leftrightarrow$	mặt phẳng
đường thẳng	$\leftrightarrow$	đường thẳng
hàng điểm	$\leftrightarrow$	chùm mặt phẳng

- Trong $\mathbf{P}^n$:

điểm	$\leftrightarrow$	siêu phẳng
đường thẳng	$\leftrightarrow$	(n–2)–phẳng
hàng điểm	$\leftrightarrow$	chùm siêu phẳng
m–phẳng	$\leftrightarrow$	(n–m–1)–phẳng

b)Định lí đối ngẫu. Ta lấy thí dụ trong $\mathbf{P}^2$:

Định lí A: Trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo hai đỉnh đối diện cùng với hai điểm chéo liên hiệp điều hòa với nhau.

Định lí A*: Trong một hình bốn đỉnh toàn phần, tại mỗi điểm chéo hai cạnh đối diện cùng với hai đường chéo liên hiệp điều hòa với nhau.

§8. SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG P^n

1. ĐỊNH NGHĨA

Trong không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$ với một mục tiêu xạ ảnh đã chọn, tập hợp tất cả những điểm X mà tọa độ $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ của chúng thỏa mãn một phương trình bậc hai có dạng:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (1)$$

với các hệ số $a_{ij} = a_{ji}$ và các a_{ij} không đồng thời bằng 0 là một siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^n$.

Nếu kí hiệu vế phải của (1) là một dạng toàn phương với ma trận $A = [a_{ij}]$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

thì phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$[x]^* A [x] = 0 \qquad (2)$$

trong đó $[x]$ là ma trận cột tọa độ của điểm X và $[x]^*$ là ma trận chuyển vị của $[x]$. Ta gọi ma trận A là ma trận của siêu mặt bậc hai đã cho, ta có $A = A^*$ và hạng của ma trận A lớn hơn hay bằng 1. Nếu hạng của ma trận A bằng n+1 nghĩa là $\det A \neq 0$ ta nói rằng siêu mặt bậc hai đó *không suy biến*, nếu ma trận A có hạng bé hơn n+1 nghĩa là $\det A = 0$, ta nói rằng siêu mặt bậc hai khi đó là *suy biến*.

Siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^2$ gọi là *đường bậc hai* và siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^3$ gọi là *mặt bậc hai*.

CHÚ Ý: Định nghĩa của siêu mặt bậc hai không phụ thuộc vào việc chọn mục tiêu tọa độ. Nếu ta dùng phép biến đổi tọa độ $[x] = B[x']$ trong đó B là ma trận vuông cấp n+1 không suy biến thì siêu mặt bậc hai (2) sẽ có phương trình mới là:

$$(B[x'])^* AB[x'] = 0 \Leftrightarrow [x']^*B^*AB[x] = 0$$

trong đó ma trận $A' = B^*AB$ cũng có những tính chất giống như ma trận A. Từ đó ta suy ra qua một phép biến đổi xạ ảnh một siêu mặt bậc hai của $\mathbf{P}^n$ có ảnh là một siêu mặt bậc hai. Nói cách khác siêu mặt bậc hai là một khái niệm xạ ảnh. Nếu A không suy biến thì B^*AB cũng không suy biến. Do đó ta suy ra khái niệm "suy biến" hay "không suy biến" của một siêu mặt bậc hai cũng là những khái niệm xạ ảnh.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN TẮC CỦA MỘT SIÊU MẶT BẬC HAI

Định lí: Với mọi siêu mặt bậc hai (S) của $\mathbf{P}^n$, ta luôn luôn có thể tìm được một mục tiêu tọa độ xạ ảnh, sao cho đối với mục tiêu đó phương trình (S) có dạng:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - .... - x_r^2 = 0 \qquad (3)$$

trong đó $r \le n+1$ và $k \ge \dfrac{r}{2}$

(Ta luôn luôn có thể giả sử $k \ge \dfrac{r}{2}$ tức là số các hệ số dương lớn hơn hay bằng số các hệ số âm, bởi vì nếu xảy ra trường hợp ngược lại ta chỉ cần nhân 2 vế của phương trình (3) với -1).

Chứng minh

Giả sử siêu mặt bậc hai (S) có phương trình đối với mục tiêu cho trước là:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0$$

Vế phải của phương trình trên là một dạng toàn phương. Ta biết rằng luôn luôn có thể tìm được một phép biến đổi tuyến tính không suy biến [x'] = B[x] sao cho dạng toàn phương P(x) đó biến thành dạng toàn phương chuẩn tắc.

$$P(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_k'^2 - x_{k+1}'^2 - \dots - x_r'^2$$

Ta xem mỗi phép biến đổi tuyến tính cũng là một phép biến đổi xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu xạ ảnh. Do đó đối với mục tiêu xạ ảnh mới phương trình siêu mặt bậc hai (S) có dạng chuẩn tắc.

Một phương trình chuẩn tắc như thế sẽ được xác định bởi cặp số (k, r) trong đó k là số các hệ số dương và r là số các hệ số khác 0. Như vậy mỗi siêu mặt bậc hai (S) chỉ có một phương trình chuẩn tắc hoàn toàn xác định.

3. SỰ PHÂN LOẠI XẠ ẢNH CÁC SIÊU MẶT BẬC HAI

a)Định nghĩa. Hai siêu mặt bậc hai gọi là *cùng thuộc một loại* nếu chúng có phương trình chuẩn tắc giống nhau, nghĩa là cặp số (k, r) của các phương trình chuẩn tắc của hai siêu mặt bậc hai đó trùng nhau.

b)Định lí. Điều kiện cần và đủ để hai siêu mặt bậc hai (S_1) và (S_2) tương đương xạ ảnh với nhau là chúng thuộc cùng một loại.

Chứng minh

• Giả sử hai siêu mặt bậc hai (S_1) và (S_2) tương đương xạ ảnh nghĩa là có một phép biến đổi xạ ảnh f sao cho $f(S_1) = S_2$.

Ta hãy chọn mục tiêu xạ ảnh $\{A_i ; E\}$ sao cho đối với mục tiêu đó phương trình của (S_1) có dạng chuẩn tắc. Gọi $\{A'_i ; E'\}$ là ảnh của mục tiêu nói trên qua phép biến đổi xạ ảnh f. Khi đó phương trình của (S_2) đối với mục tiêu ảnh $\{A'_i ; E'\}$ hoàn toàn giống như phương trình của (S_1) đối với mục tiêu $\{A_i ; E\}$.

Vậy (S_1) và (S_2) thuộc cùng một loại.

• Ngược lại giả sử siêu mặt bậc hai (S_1) đối với mục tiêu $\{A_i ; E\}$ và siêu mặt bậc hai (S_2) đối với mục tiêu $\{A'_i ; E'\}$ có phương trình chuẩn tắc hoàn toàn giống nhau nghĩa là thuộc cùng một loại. Gọi f là phép biến đổi xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu xạ ảnh nói trên biến $\{A_i ; E\}$ thành $\{A'_i ; E'\}$. Khi đó (S_1) sẽ biến thành (S'_1) và (S'_1) có phương trình đối với mục tiêu $\{A'_i ; E'\}$ giống hệt phương trình của (S_1) đối với mục tiêu $(A_i ; E)$ tức là giống như phương trình của (S_2) đối với mục tiêu $\{A'_i ; E'\}$. Vậy (S'_1) trùng với (S_2) và ta có $f(S_1) = S_2$ nghĩa là (S_1) và (S_2) tương đương xạ ảnh.

c)Phân loại. Dựa vào phương trình chuẩn tắc của siêu mặt bậc hai ta có thể phân loại tập hợp tất cả các siêu mặt bậc hai (S) trong $(\mathbf{P}^n)$ theo cặp số (k, r). Mỗi loại được đặc trưng bằng cặp số (k, r) nên ta gọi chúng là loại (k, r).

α) **Loại không suy biến**: Siêu mặt bậc hai (S) có các loại:

* *Loại (n+1, n+1):*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 0 \tag{4}$$

Loại này gọi là siêu mặt trái xoan không vì nó không chứa điểm thực nào.

* *Loại (n, n+1):*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0 \tag{5}$$

Loại này gọi là siêu mặt trái xoan

* *Loại (k, n+1) với $k \leq n - 1$:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{n+1}^2 = 0 \tag{6}$$

Ta gọi loại này là *siêu mặt kẻ*. Vì $\dfrac{n+1}{2} \leq k \leq n - 1$ nên ta suy ra $n \geq 3$. Vậy với $n < 3$ ta không có các siêu mặt kẻ. Phương trình của siêu mặt kẻ tương đương với phương trình sau đây:

$$(x_1-x_{k+1})(x_1+x_{k+1})+...+(x_m-x_{n+1})(x_m+x_{n+1}) + x_{m+1}^2 + ... + x_k^2 = 0$$

Từ phương trình này ta có thể lập được họ (n–k)-phẳng, chúng gọi là (n-k)- phẳng sinh của mặt kẻ đã cho. Ta có thể tìm thấy nhiều họ (n-k)- phẳng sinh khác nữa bằng cách lập các hệ k phương trình bậc nhất và mỗi hệ k phương trình đó xác định một (n-k)- phẳng sinh.

β) Loại suy biến (k, r) với r < n+1. Siêu mặt bậc hai (S) có các loại:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - ... - x_r^2 = 0 \qquad (7)$$

trong đó $r < n+1$ và $\frac{r}{2} \le k \le r$

Ta gọi loại này là *siêu nón*. Trong trường hợp này vì det A = 0 nên ma trận A của siêu mặt bậc hai suy biến. Khi đó phương trình A [x] = 0 có nghiệm không tầm thường xác định một (n-r)- phẳng Q thuộc siêu nón bậc hai vì ta có:

$$[x]^* A[x] = 0$$

Ta gọi Q là (n-r)- phẳng cho bởi phương trình:

$$x_i = 0 \text{ với } i = 1,2,..., r.$$

Số chiều lớn nhất của Q là n – 1 và số chiều bé nhất của Q là 0, tức Q là một điểm. Ta hãy chứng minh rằng nếu M là một điểm của siêu nón nhưng không nằm trên Q thì đường thẳng nối M với một điểm X tùy ý của Q đều nằm trên siêu nón.

Giả sử siêu nón có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - x_{k+2}^2 - ... - x_r^2 = 0$$

với $r \ge k \ge \frac{r}{2}$ và $r < n+1$

Vì M $(m_1, m_2, ... , m_{n+1})$ thuộc siêu nón nên:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} m_i^2 = 0 \qquad (8)$$

$X(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ thuộc (n-r)- phẳng Q nên:

$$x_1 = x_2 = ... = x_r = 0 \qquad (9)$$

Mọi điểm của đường thẳng MX có tọa độ $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n+1})$ mà

$$\xi_i = \lambda m_i + \mu x_i \;\; ; i = 1,2, ..., n+1$$

trong đó λ, μ không đồng thời bằng 0

Ta có: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{k}(\lambda m_i - \mu x_i)^2 - \sum_{i=k+1}^{r}(\lambda m_i - \mu x_i)^2$

$$= \lambda^2\left[\sum_{i=1}^{k} m_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} m_i^2\right] + \mu^2\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{r} x_i^2\right] +$$

$$+ 2\lambda\mu\left[\sum_{i=1}^{k} m_i x_i - \sum_{i=k+1}^{r} m_i x_i\right]$$

$= 0$ (theo (8) và (9))

Vậy điểm $(\xi_1, \xi_2, ... , \xi_{n+1})$ nằm trên siêu nón và do đó đường thẳng MX cũng nằm trên siêu nón. Vì lí do đó nên người ta nói rằng siêu nón có đỉnh là (n-r)-phẳng Q. Nếu $k = r$ nghĩa là (S) có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_r^2 = 0 \qquad \text{ta có siêu nón ảo.}$$

γ) Thí dụ

1°) Trên $\mathbf{P}^1$ căn cứ vào phương trình chuẩn tắc ta có ba loại siêu mặt bậc hai:

- $x_1^2 + x_2^2 = 0$: 2 điểm ảo liên hợp
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$: 2 điểm thực
- $x_1^2 = 0$: 2 điểm thực trùng nhau

2°) Trong $\mathbf{P}^2$ căn cứ vào phương trình chuẩn tắc ta có 5 loại sau đây:

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$: đường trái xoan không (vì không chứa điểm thực nào)

- $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$: đường conic hay đường trái xoan

- $x_1^2 + x_2^2 = 0$: cặp đường thẳng ảo liên hợp có tọa độ [i,1,0] và [-i,1,0]

- $x_1^2 - x_2^2 = 0$: cặp đường thẳng thực phân biệt có tọa độ [1,1,0] và [-1,1,0]

- $x_1^2 = 0$: cặp đường thẳng trùng nhau có tọa độ [1,0,0]

3°) Trong $\mathbf{P}^3$ dựa vào phương trình chuẩn tắc ta phân ra 8 loại sau đây:

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$: mặt trái xoan không.

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$: mặt trái xoan

- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$: mặt kẻ bậc hai, mặt loại này chứa 2 họ đường thẳng:

$$(d): \begin{cases} \lambda(x_1 + x_3) & = & \mu(x_4 + x_2) \\ \mu(x_1 - x_3) & = & \lambda(x_4 - x_2) \end{cases} \qquad (10)$$

$$(d'): \begin{cases} \lambda(x_1 + x_3) & = & \mu(x_4 - x_2) \\ \mu(x_1 - x_3) & = & \lambda(x_4 + x_2) \end{cases} \qquad (11)$$

Với mọi cặp λ, μ không đồng thời bằng 0 hệ (10) và (11) cho ta hai đường thẳng nằm trên mặt kẻ bậc hai nói trên. Cũng có thể thấy rằng qua mỗi điểm của mặt kẻ đó ta có một đường thẳng của họ (10) và một đường thẳng của họ (11). Bởi vậy có thể xem hai họ đường thẳng (10) và (11) nói trên sinh ra mặt bậc hai. Ta gọi đó là hai họ đường sinh thẳng của mặt kẻ bậc hai.

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$: mặt nón ảo
- $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$: mặt nón bậc hai
- $x_1^2 + x_2^2 = 0$: cặp mặt phẳng ảo liên hợp
- $x_1^2 - x_2^2 = 0$: cặp mặt phẳng thực
- $x_1^2 = 0$: cặp mặt phẳng thực trùng nhau

4.SIÊU MẶT BẬC HAI TRONG KHÔNG GIAN AFIN $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus \mathbf{P}^{n-1}$

a) Trong $\mathbf{P}^n$ đối với mục tiêu xạ ảnh cho trước cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$(S): \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_i x_j = 0$$

và siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$

Ta hãy xét tập hợp các điểm của siêu mặt bậc hai (S) chỉ nằm trong $\mathbf{A}^n$ nghĩa là tập hợp các điểm X thuộc (S) có tọa độ thỏa mãn phương trình của (S) đã cho với điều kiện $x_{n+1} \neq 0$. Ta có thể viết phương trình của (S) dưới dạng sau đây bằng cách chia hai vế của phương trình cho x_{n+1}:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_i X_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + a = 0$$

với $X_{i,j} = \dfrac{x_{i,j}}{x_{n+1}}$; $\quad$ i,j = 1,2,..., n và $a = a_{n+1,\, n+1}$

Ta nhận thấy với tọa độ afin (tức là tọa độ xạ ảnh không thuần nhất) phương trình của (S) trở thành phương trình tổng quát của siêu mặt bậc hai trong không gian afin $\mathbf{A}^n$. Vậy:

Mỗi siêu mặt bậc hai của không gian afin $\mathbf{A}^n$ *chính là một siêu mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh* $\mathbf{P}^n$ *sau khi bỏ đi những điểm thuộc siêu phẳng* $\mathbf{P}^{n-1}$ (nếu có).

b) Trước đây trong không gian afin $\mathbf{A}^n$ ta đã biết phương tiệm cận hay phương vô tận của một siêu mặt bậc hai (S) là phương $\vec{c}\,(c_1, c_2, ..., c_n)$ sao cho $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = 0$.

Trong $\mathbf{P}^n$ các điểm vô tận của siêu mặt bậc hai (S) là các điểm thuộc $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Do đó để xác định phương vô tận $\vec{c}$ của siêu mặt bậc hai (S) trong $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus \mathbf{P}^{n-1}$ chúng ta cần tìm nghiệm của hệ phương trình sau đây trong $\mathbf{P}^n$:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0 \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = 0$$

Vậy *phương tiệm cận của siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{A}^n$ chính là giao điểm của siêu mặt bậc hai trong $\mathbf{P}^n$ với siêu phẳng vô tận $\mathbf{P}^{n-1}$.*

c) Đường conic trong mô hình $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}^2 \setminus \mathbf{P}^1$

Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ ta xét đường conic (S) có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

• Xét mặt phẳng afin sinh ra bởi mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ sau khi bỏ đi đường thẳng vô tận có phương trình $x_3 = 0$. Bằng cách chuyển sang tọa độ afin (X_1, X_2) bằng cách chia hai vế của phương trình đường conic (S) cho x_3 ta có:

$$X_1^2 + X_2^2 - 1 = 0 \text{ với } X_i = \frac{x_i}{x_3};\ i = 1,2$$

Ta thấy đó chính là đường elip trong $\mathbf{A}^2$. Chú ý rằng trong trường hợp này đường conic không cắt đường thẳng $x_3 = 0$ vì hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

• Bằng cách hoán vị các đỉnh của mục tiêu tọa độ ta đưa phương trình conic (S) về dạng:

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

Khi đó đường thẳng vô tận $x_3 = 0$ cắt conic tại hai điểm (1,1,0) và (1,–1,0).

Những điểm còn lại của đường trái xoan sẽ có phương trình đối với tọa độ afin là:

$$X_1^2 - X_2^2 + 1 = 0 \text{ với } X_i = \frac{x_i}{x_3} \text{ ; } i = 1,2.$$

Đó chính là một hypebol.

• Bằng phép biến đổi tọa độ:

$$\begin{cases} x_1 & = & x'_1 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}(x'_2 - x'_3) \\ x_3 & = & \frac{1}{2}(x'_2 + x'_3) \end{cases}$$

Khi đó conic $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ trở thành:

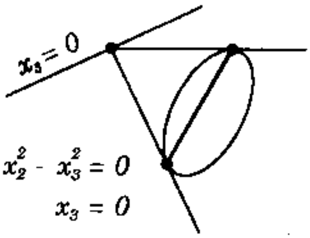
$$x_1'^2 + \left[\frac{1}{2}(x'_2 - x'_3)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(x'_2 + x'_3)\right]^2 = x_1'^2 - x'_2x'_3 = 0$$

Chọn $x'_3 = 0$ làm đường thẳng vô tận ta thấy đường conic khi đó tiếp xúc với đường thẳng $x'_3 = 0$ tại điểm (0,1,0). Những điểm còn lại của conic có phương trình đối với tọa độ afin là:

$$X_1^2 - X_2 = 0 \text{ với } X_i = \frac{x'_i}{x'_3} \text{ , } i = 1,2.$$

Đó chính là một parabol.

Kết luận



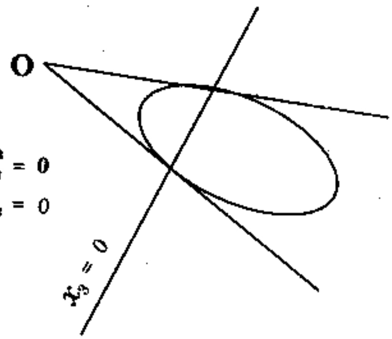
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

hình 44: đường elip

•Nếu conic không cắt đường thẳng vô tận (hay cắt tại hai điểm ảo liên hợp) ta có đường elip. Hai tiếp tuyến vẽ từ một điểm trên đường thẳng vô tận tiếp xúc với elip tại hai điểm. Đường thẳng nối hai tiếp điểm này biểu thị một đường kính của elip. Nếu vẽ hai đường kính của elip ta sẽ xác định được tâm của elip (H. 44).

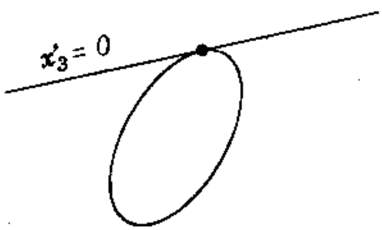
•Nếu conic cắt đường thẳng vô tận tại hai điểm thực ta có đường hypebol. Hai tiếp tuyến của conic tại hai giao điểm là hai tiệm cận của hypebol. Giao điểm của hai đường tiệm cận nói trên chính là tâm O của hypebol (H. 45).

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$



Hình 45: đường hypebol

$$\begin{cases} x_1'^2 - x_2' x_3' = 0 \\ x_3' = 0 \end{cases}$$



hình 46: **đường parabol**

•Nếu conic tiếp xúc với đường thẳng vô tận, trong trường hợp này đường conic chỉ có một phương vô tận. Đó là đường parabol. Các đường thẳng song song với trục của parabol đều đồng quy tại điểm vô tận này (H.46).

§ 9. CỰC VÀ SIÊU PHẲNG ĐỐI CỰC ĐỐI VỚI MỘT SIÊU MẶT BẬC HAI

1.ĐỊNH NGHĨA

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$[x]^* A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0 \qquad (1)$$

và một điểm U có tọa độ $(u_1, u_2, ..., u_{n+1})$. Ta hãy xét phương trình:

$$[u]^* A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i x_j = 0 \qquad (2)$$

nếu n+1 hệ số $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} u_i$ với j = 1,2,..., n+1 không đồng thời bằng 0 thì phương trình $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i x_j = 0$ là phương trình của một siêu phẳng P. Khi đó siêu phẳng P gọi là *siêu phẳng đối cực* của điểm U đối với siêu mặt bậc hai (S), còn điểm U gọi là *điểm cực* hay *cực điểm* của siêu phẳng P đối với siêu mặt bậc hai (S).

Thí dụ. Cho đường bậc hai (S) trong $\mathbf{P}^2$ đối với một mục tiêu cho trước, có phương trình:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$$

và điểm U có tọa độ (2,-1,5). Hãy tìm siêu phẳng đối cực của điểm U đối với đường bậc hai (S) đã cho.

Giải

Ta có thể viết phương trình của đường bậc hai (S) dưới dạng $[x]^*A[x] = 0$ như sau:

$$\begin{bmatrix} x_1 x_2 x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Do đó siêu phẳng đối cực của U(2,-1,5) có phương trình dạng $[u]^* A[x] = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

hay $7x_1 + 3x_2 - 12x_3 = 0$

CHÚ Ý. Nếu n+1 hệ số $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i$ với j = 1,2,..., n+1 đều bằng 0 thì điểm U được gọi là *điểm đặc biệt* của siêu mặt bậc hai (S). Như vậy sẽ không có siêu phẳng đối cực đối với điểm đặc biệt của (S) vì không tồn tại phương trình của siêu phẳng đó.

2. TÍNH CHẤT

a) Nếu $U = (u_1, u_2, ..., u_{n+1})$ là điểm đặc biệt của (S) thì (S) suy biến và điểm $U \in (S)$

Thật vậy ta có $\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i = 0$ với mọi j = 1,2,..., n+1. Vì các u_i không đồng thời bằng 0 nên hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i = 0 \ , j = 1,2,..., n+1.$$

có nghiệm không tầm thường tức là det $[a_{ij}] = 0$. Do đó siêu mặt bậc hai (S) suy biến.

Mặt khác nếu ta nhân phương trình thứ 1, thứ 2, ... , thứ n+1 của hệ phương trình trên lần lượt với $u_1, u_2, ..., u_{n+1}$ rồi cộng các kết quả lại ta có:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_iu_j = 0$$

Điều này chứng tỏ rằng điểm $U = (u_1, u_2, ..., u_{n+1})$ thuộc siêu mặt bậc hai (S).

b) Từ điều kết luận trên đây, ta suy ra nếu siêu mặt bậc hai (S) không suy biến thì bất kì một điểm nào của không gian cũng có một siêu phẳng đối cực duy nhất đối với (S).

3. ĐỊNH LÍ

Nếu (S) là một siêu mặt bậc hai không suy biến thì bất kì siêu phẳng nào của $\mathbf{P}^n$ cũng có một điểm cực duy nhất đối với (S).

Chứng minh

Thật vậy, giả sử siêu mặt bậc hai (S) có phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0 \text{ với } \det [a_{ij}] \neq 0$$

và siêu phẳng P có phương trình $\sum_{j=1}^{n+1} c_jx_j = 0$ (3)

Nếu U $(u_1,u_2, ..., u_{n+1})$ là điểm cực của siêu phẳng P nói trên đối với siêu mặt bậc hai (S) thì phương trình của P là:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}u_ix_j = 0 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}u_i = c_j \ ; j = 1,2,..., n+1$$

Đây là một hệ n phương trình tuyến tính không đẳng cấp và có $\det[a_{ij}] \neq 0$ nên có nghiệm duy nhất là $(u_1,u_2, ..., u_{n+1}) \neq$ $\neq (0,0,...,0)$ vì theo giả thiết các c_{ij} đều không đồng thời bằng 0. Vậy có một điểm cực $U(u_i)$ duy nhất đối với (S).

4. ĐỊNH LÍ

Các khái niệm "điểm cực", "siêu phẳng đối cực" trong định nghĩa nêu ở trên đều là các khái niệm xạ ảnh.

Chứng minh

Cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0 \qquad \text{hay } [x]^*A[x] = 0 \text{ với } \det[a_{ij}] \neq 0$$

và điểm U có tọa độ $(u_1, u_2, ..., u_{n+1})$. Khi đó siêu phẳng đối cực của điểm U có phương trình $[u]^*A[x] = 0$.

Với phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình $[x] = B[x']$ ta có: $f(S) = S'$ và (S') có phương trình:

$$[x']^*B^*AB[x'] = 0$$

Còn điểm U biến thành điểm $f(U) = U'$ với $[u] = B[u']$ và siêu phẳng đối cực của U biến thành:

$$(B[u'])^* A(B[x']) = 0$$

$$\text{hay} \quad [u']^* B^*AB[x'] = 0$$

Ta thấy đó chính là phương trình siêu phẳng đối cực của điểm U' đối với siêu mặt bậc hai S'.

5. GIAO ĐIỂM CỦA MỘT SIÊU MẶT BẬC HAI VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong $\mathbf{P}^n$ $(n > 1)$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$[x]^* A[x] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0$$

và đường thẳng xác định bởi hai điểm $U(u_i)$ và $V(v_i)$ phân biệt có phương trình:

$$x_i = \lambda u_i + \mu v_i, \qquad i = 1,2,..., n+1$$

Để tìm giao điểm của đường thẳng và siêu mặt bậc hai ta cần giải phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(\lambda u_i + \mu v_i)(\lambda u_j + \mu v_j) = 0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0} \qquad (5')$$

trong đó $P = [u]^* A[u] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i u_j$

$$Q = [u]^* A[v] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} u_i v_j$$

$$R = [v]^* A[v] = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} v_i v_j$$

Mỗi cặp số (λ, μ) không đồng thời bằng 0 nghiệm phương trình (5') sẽ cho ta một giao điểm cần tìm. Ta xét các trường hợp:

a) Trường hợp $Q^2 - PR \neq 0$

1°) Giả sử $P \neq 0$, khi đó nếu $\mu = 0$ thì $P\lambda^2 = 0$ ta có $\lambda = 0$, là không thỏa mãn điều kiện $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, bởi vậy ta xét $\mu \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (5') cho μ^2 ta có:

$$P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 2Q\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + R = 0$$

Ta được một phương trình bậc hai đối với $\frac{\lambda}{\mu}$. Vì $Q^2 - PR \neq 0$ nên phương trình bậc hai đó có hai nghiệm phân biệt. Nếu hai nghiệm đó là thực ta được hai giao điểm thực. Nếu hai nghiệm đó là phức liên hợp ta được hai giao điểm là ảo liên hợp.

2°) Nếu $P = 0$ tức là $[u]^* A[u] = 0$, khi đó điểm U thuộc siêu mặt bậc hai. Vì $Q^2 - PR \neq 0$ và $P = 0$ nên ta suy ra $Q \neq 0$ và phương trình (5') có dạng:

$$2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0 \Leftrightarrow (2Q\lambda + R\mu)\mu = 0$$

Ta có một nghiệm là $(\lambda, 0)$ và đó chính là điểm U ứng với $\mu = 0$. Để tìm nghiệm thứ hai ta giả thiết $\mu \neq 0$ và được phương trình:

$$2Q\frac{\lambda}{\mu} + R = 0$$

Phương trình này luôn luôn cho ta một nghiệm là giao điểm thứ hai khác với U.

Tóm lại nếu $Q^2 - PR \neq 0$ đường thẳng UV sẽ cắt siêu mặt bậc hai (S) tại hai điểm thực phân biệt hoặc hai điểm ảo liên hợp.

b) Trường hợp $Q^2 - PR = 0$

Giả sử một trong các số P, Q, R khác 0, hoặc có thể cả ba số đó đều khác 0 để cho phương trình bậc hai tồn tại, khi đó phương trình tìm giao điểm (5') chỉ có một nghiệm duy nhất và do đó đường thẳng UV và siêu mặt bậc hai (S) có một giao điểm kép duy nhất. Ta nói rằng đường thẳng UV tiếp xúc với siêu mặt bậc hai (S).

c) Trường hợp P = Q = R = 0

Khi đó mọi cặp (λ, μ) đều nghiệm phương trình (5') nên toàn bộ đường thẳng UV đều thuộc siêu mặt bậc hai (S). Ta nói rằng đường thẳng UV lúc đó là một đường sinh của siêu mặt bậc hai (S).

6. ĐỊNH LÍ

Nếu một điểm U không thuộc siêu mặt bậc hai (S) và một đường thẳng đi qua U cắt siêu phẳng đối cực tại V đồng thời cắt (S) tại hai điểm phân biệt (thực hoặc ảo liên hợp) thì $(UVMN) = -1$.

Chứng minh

Giả sử đối với mục tiêu xạ ảnh đã chọn trọn trong $\mathbf{P}^n$ siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

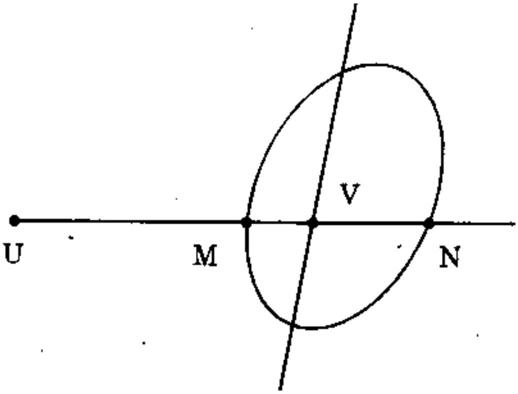
$$[x]^*A[x] = 0$$

và hai điểm U,V lần lượt có tọa độ là:

$$U = (u_1, u_2, ..., u_{n+1})$$

$$V = (v_1, v_2, ..., v_{n+1})$$

(H. 47).



hình 47

Giao điểm M, N của đường thẳng UV với siêu mặt bậc hai (S) xác định bởi phương trình (5') sau đây:

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda\mu + R\mu^2 = 0$$

Vì điểm U không thuộc (S) nên $P = [u]^*A[u] \neq 0$

Điểm V thuộc siêu phẳng đối cực của U đối với siêu mặt bậc hai (S) nên:

$$Q = [u]^*A[v] = 0$$

Khi đó phương trình tìm giao điểm của đường thẳng UV với (S) có dạng:

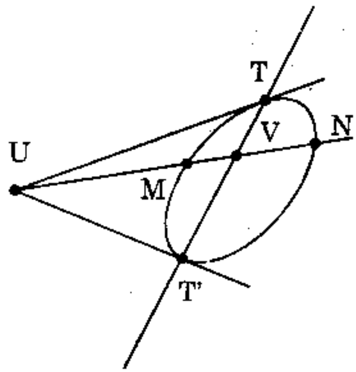
$$P\lambda^2 + R\mu^2 = 0$$

Theo giả thiết đường thẳng UV cắt (S) tại hai điểm M,N phân biệt nên $Q^2 - PR \neq 0$ mà $P \neq 0$ (vì nếu $P = 0$ thì ta có $\lambda = \mu = 0$ là không chấp nhận được), $Q = 0$ nên $R \neq 0$.

Do đó ta có $\lambda^2 = -\dfrac{R}{P}\mu^2$ và phương trình này cho ta hai nghiệm:

– Với $\mu_1 = 1$ ta có $\lambda_1 = \sqrt{-\dfrac{R}{P}}$ cho ta điểm M .

– Với $\mu_2 = 1$ ta có $\lambda_2 = -\sqrt{-\dfrac{R}{P}}$ cho ta điểm N.



hình 48

Hai điểm M, N có tọa độ thỏa mãn hệ thức:

$$[M] = \lambda_1 [U] + \mu_1 [V]$$

$$[N] = \lambda_2 [U] + \mu_2 [V].$$

Do đó $(UVMN) = \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = -1$

CHÚ Ý: Nếu $Q^2 - PR = 0$ ta suy ra $R = 0$, khi đó $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ và ta có ba điểm M, N, V trùng nhau. Áp dụng kết quả này, muốn vẽ đường đối cực của một điểm U đối với một đường bậc hai (S) ta vẽ hai tiếp tuyến UT và UT' từ U tới (S). Ta suy ra đường đối cực của điểm U đối với (S) là đường thẳng TT' (H.48).

7.ĐỊNH NGHĨA

Hai điểm U, V mà thỏa mãn điều kiện (UVMN) = –1 như ở định lí 6 gọi là *liên hợp với nhau* đối với siêu mặt bậc hai (S).

Do đó ta có thể nói rằng:

Siêu phẳng đối cực của một điểm U đối với siêu mặt bậc hai (S)(U không thuộc (S)) là tập hợp tất cả những điểm V liên hợp của U đối với (S).

Ta suy ra hai điểm U,V liên hợp với nhau đối với (S) khi và chỉ khi $[u]^* A [v] = 0$

8. ĐỊNH LÍ

Nếu điểm V nằm trên siêu phẳng đối cực của điểm U đối với siêu mặt bậc hai (S) thì điểm U nằm trên siêu phẳng đối cực của điểm V đối với S.

Chứng minh

Giả sử đối với mục tiêu đã cho của $\mathbf{P}^n$ siêu mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$[x]^* A[x] = 0$$

Khi đó điều kiện để cho V nằm trên siêu phẳng đối cực của U là:

$$[u]^* A[v] = 0$$

Ta suy ra $[v]^* A^* [u] = 0$ hay $[v]^* A[u] = 0$ vì $A^* = A$

Đẳng thức trên chứng tỏ rằng điểm U nằm trên siêu phẳng đối cực của V đối với (S).

Áp dụng: Người ta áp dụng định lí này trong $\mathbf{P}^2$ để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng khi biết ba đường đối cực của chúng (đối với một đường bậc hai) đồng quy và ngược lại.

9. SIÊU PHẲNG TIẾP XÚC, r – PHẲNG TIẾP XÚC

Nếu điểm U nằm trên siêu mặt bậc hai (S) nhưng không phải là điểm đặc biệt của (S) thì siêu phẳng đối cực của điểm U là *siêu phẳng tiếp xúc* của (S) tại U. Thật vậy vì siêu phẳng đối cực của điểm U đối với (S) có phương trình $[u]^*A[x] = 0$ nên nếu U thuộc (S) thì $[u]^*A[u] = 0$. Điều đó chứng tỏ U phải thuộc siêu phẳng đối cực của nó.

Mọi r-phẳng ($1 \leq r \leq n$-1) đi qua U và nằm trong siêu phẳng tiếp xúc được gọi là *r- phẳng tiếp xúc* của (S) tại U. Đường thẳng tiếp xúc với (S) tại U gọi là *tiếp tuyến* của (S) tại U.

CHÚ Ý: Các điểm đặc biệt của siêu mặt bậc hai (S) không có các r- phẳng tiếp xúc.

10. SIÊU MẶT LỚP HAI

a) Định nghĩa: Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn, tập các siêu phẳng tạo nên một *siêu mặt lớp hai* nếu tọa độ $[u_1, u_2, ..., u_{n+1}]$ của chúng thỏa mãn phương trình:

$$[u]^* A[u] = 0 \text{ hoặc } \sum a_{ij}u_iu_j = 0$$

trong đó $a_{ij} = a_{ji}$ và các a_{ij} không đồng thời bằng 0. Nếu ma trận $A = [a_{ij}]$ không suy biến ta có *siêu mặt lớp hai không suy biến* và ngược lại nếu A suy biến ta có *siêu mặt lớp hai suy biến.*

CHÚ Ý: Siêu mặt lớp hai là khái niệm đối ngẫu của siêu mặt bậc hai.

b) Định lí: Tập hợp tất cả các siêu phẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai không suy biến $[x]^* A[x] = 0$ là một siêu mặt lớp hai có phương trình $[u]^* A^{-1}[u] = 0$.

Chứng minh

• Giả sử siêu phẳng $[u]^*[x] = 0$ tiếp xúc với siêu mặt bậc hai ta cần chứng minh siêu phẳng đó thuộc siêu mặt lớp hai $[u]^*A^{-1}[u] = 0$.

Gọi $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ là tọa độ của một điểm nào đó thuộc siêu mặt bậc hai nên siêu phẳng tiếp xúc với siêu mặt bậc hai tại điểm đó có phương trình $[a]^*A[x] = 0$.

Ta suy ra $[u]^* = [a]^* A$ nên $[u] = A^*[a] = A[a]$ (vì $A^* = A$)

Do đó $[u]^*A^{-1}[u] = [a]^* A A^{-1}A[a] = [a]^*A[a] = 0$.

Điều đó chứng tỏ siêu phẳng $[u]^*[x] = 0$ thuộc siêu mặt lớp hai $[u]^*A^{-1}[u] = 0$.

Ngược lại giả sử $[u]^*[x]$ là siêu phẳng thuộc siêu mặt lớp hai $[u]^*A^{-1}[u] = 0$.Ta sẽ chứng minh rằng siêu phẳng đó tiếp xúc với siêu mặt bậc hai $[x]^*A[x] = 0$.

Ta lấy một điểm $A = (a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ sao cho $[a] = A^{-1}[u]$.

Ta suy ra: $A[a] = AA^{-1}[u] = [u]$ hay $[a]^*A = u^*$. Thay vào phương trình siêu mặt lớp hai $[u]^*A^{-1}[u] = 0$ ta có:

$[a]^*AA^{-1}A[a] = 0 \Leftrightarrow [a]^*A[a] = 0$. Điều đó chứng tỏ điểm $A(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ thuộc siêu mặt bậc hai có phương trình $[x]^*A[x] = 0$.

Khi đó siêu phẳng đối cực của điểm $A(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ đối với siêu mặt bậc hai là: $[a]^*A[x] = 0$. Vì $[a]^*A = [u]^*$ hay $[a]^* = [u]^*A^{-1}$ nên: $[u]^*A^{-1}A[x] = 0$ hay $[u]^*[x] = 0$ nhưng điểm $A(a_i)$ lại nằm trên siêu phẳng đối cực này vì $[u]^*[a] = [u]^*A^{-1}[u]$.

Tóm lại $[u]^*[x] = 0$ chính là siêu phẳng tiếp xúc của siêu mặt bậc hai $[x]^*A[x] = 0$.

Hệ quả: Mỗi siêu mặt lớp hai không suy biến có phương trình $[u]^*A[u] = 0$ đều có thể xem là tập hợp tất cả các siêu phẳng tiếp xúc của siêu mặt bậc hai $[x]^*A^{-1}[x] = 0$.

§ 10. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ QUAN TRỌNG TRONG P^2

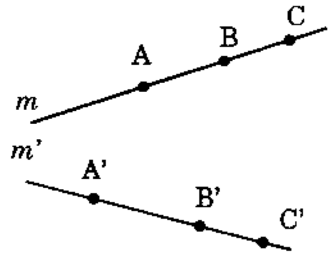
1. ÁNH XẠ XẠ ẢNH

a) Ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm và hai chùm đường thẳng. Ánh xạ f biến mỗi điểm của đường thẳng m thành một điểm của đường thẳng m' hoặc biến mỗi đường thẳng của chùm tâm S thành một đường thẳng của chùm tâm S' là *ánh xạ* xạ ảnh nếu nó bảo tồn tỉ số kép 4 điểm của hàng hoặc bảo tồn tỉ số kép 4 đường thẳng của chùm.

Khi đó ta nói rằng có một *liên hệ xạ ảnh* giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm đường thẳng. Ta kí hiệu sự liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm m và m' như sau (H. 49):

$\{A, B, C, ...\} \overline{\wedge} \{A', B', C', ...\}$

hoặc $\{m\} \overline{\wedge} \{m'\}$

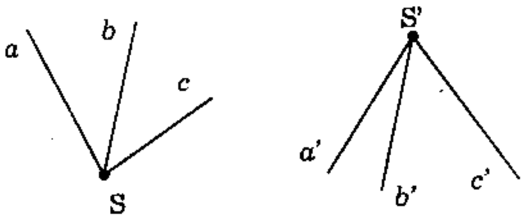


hình 49

Tương tự ta cũng kí hiệu sự liên hệ xạ ảnh giữa hai chùm tâm S và tâm S' như sau (H. 50):

$\{a,b,c,...\} \overline{\wedge} \{a',b',c',...\}$

hoặc $\{S\} \overline{\wedge} \{S'\}$



hình 50

CHÚ Ý: Ánh xạ xạ ảnh ở đây chính là phép đẳng cấu xạ ảnh giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm đường thẳng.

b) Sự xác định ánh xạ xạ ảnh trong P^2

Định lí. Nếu cho ba điểm A, B, C phân biệt thuộc đường thẳng m và ba điểm A', B', C' phân biệt thuộc đường thẳng m' thì khi đó có một phép ánh xạ xạ ảnh duy nhất f: $\{m\} \rightarrow \{m'\}$ sao cho f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'.

Chứng minh

Nếu trên đường thẳng m ta chọn mục tiêu xạ ảnh {A, B; C} và trên đường thẳng m' ta chọn mục tiêu xạ ảnh {A', B'; C'}. Khi đó có một phép đẳng cấu xạ ảnh **f** : $\{m\} \rightarrow \{m'\}$ duy nhất sao cho f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'. Khi đó nếu M' = f(M) thì (ABCM) = (A'B'C'M') và ta có phương trình của phép đẳng cấu xạ ảnh f đó là

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{cases}$$

trong đó (x_1, x_2) là tọa độ của một điểm M trên m đối với mục tiêu {A,B;C} còn (x'_1, x'_2) là tọa độ xạ ảnh của điểm M' đối với mục tiêu {A', B'; C'}

Nếu ta chọn mục tiêu xạ ảnh một cách tùy ý thì phương trình của phép đẳng cấu xạ ảnh nói chung có dạng:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{trong đó : } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nếu dùng tọa độ không thuần nhất trên đường thẳng tức là đặt $X = \dfrac{x_1}{x_2}$, $X' = \dfrac{x'_1}{x'_2}$ thì phương trình trên trở thành:

$$X' = \frac{a_{11}X + a_{12}}{x_{21}X + a_{22}}$$

Định lí đối ngẫu. Cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c thuộc chùm tâm S và ba đường thẳng phân biệt thuộc chùm tâm S' thì khi đó có một phép đẳng cấu xạ ảnh duy nhất f: {S} → {S'} sao cho f(a) = a' ; f(b) = b' ; f(c) = c'.

CHÚ Ý: Ta không cần chứng minh đối với định lí đối ngẫu vì dựa vào nguyên tắc đối ngẫu ta khẳng định được sự đúng đắn của định lí đối ngẫu. Trong định lí trên nếu có một đường thẳng m của chùm tâm S và m' = f(m) của chùm tâm S' thì ta vẫn có (a b c m) = (a' b' c' m').

2. PHÉP PHỐI CẢNH

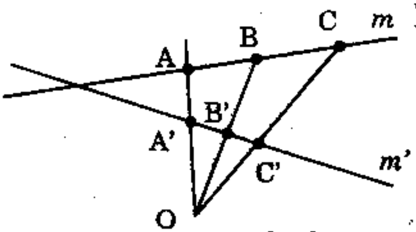
a) Định nghĩa • Một ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm gọi là *phép phối cảnh* (hay phép chiếu xuyên tâm) nếu đường thẳng nối các điểm tương ứng luôn luôn đi qua một điểm O cố định. Ta gọi O là *tâm phối cảnh.*

• Một ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng gọi là *phép phối cảnh* nếu giao điểm của các cặp đường thẳng tương ứng luôn luôn nằm trên một đường thẳng t cố định. Ta gọi t là *trục phối cảnh.*

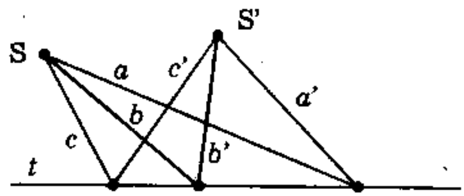
Ta kí hiệu sự liên hệ phối cảnh giữa hai hàng điểm hoặc giữa hai chùm như sau:

{A, B, C,....} $\overset{=}{\wedge}$ {A', B', C', ...}   {a, b, c, ...} $\overset{=}{\wedge}$ {a', b', c', ...}

hoặc {m} $\overset{=}{\wedge}$ {m'} (H. 51)   {S} $\overset{=}{\wedge}$ {S'} (H. 52)



hình 51

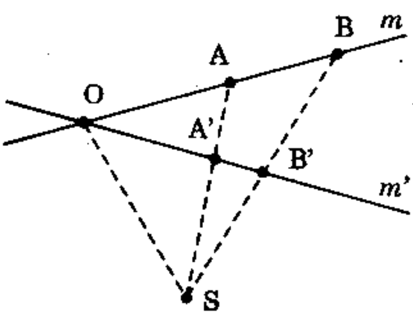


hình 52

b)Định lí. Điều kiện cần và đủ để phép ánh xạ xạ ảnh f: {m} → {m'} giữa hai điểm trở thành phép phối cảnh là giao điểm O của hai giá tự ứng nghĩa là f (O) = O.

Chứng minh

• Nếu f là phép phối cảnh (là phép chiếu xuyên tâm) thì rõ ràng điểm O = m ∩ m' là tự ứng (H. 53).

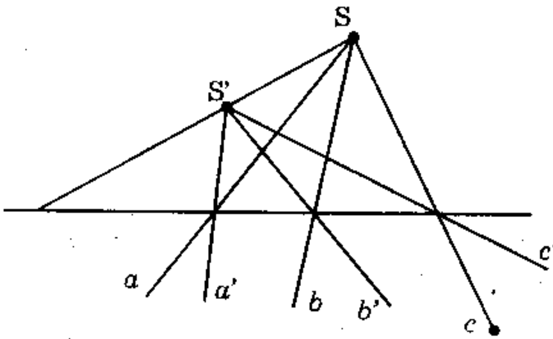


hình 53

• Ngược lại nếu ánh xạ xạ ảnh f có điểm O tự ứng, ta cần chứng minh f là phép phối cảnh.

Trên đường thẳng m ta lấy hai điểm A, B sao cho ba điểm O, A, B phân biệt. Gọi A' = f(A), B' = f(B) và ta có O = f(O). Khi đó ba điểm O, A', B' cũng phân biệt. Ánh xạ xạ ảnh f hoàn toàn được xác định bởi hai bộ ba điểm O, A, B và O, A', B'. Gọi S = = AA' ∩ BB' thì f là phép xuyên tâm với tâm chiếu S. Vậy f là phối cảnh giữa hai hàng điểm m và m'.

c) Định lí đối ngẫu. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ xạ ảnh f giữa hai chùm đường thẳng trở thành phép phối cảnh là đường thẳng nối hai tâm tự ứng (H. 54).



hình 54

f: {S} → {S'} là phối cảnh

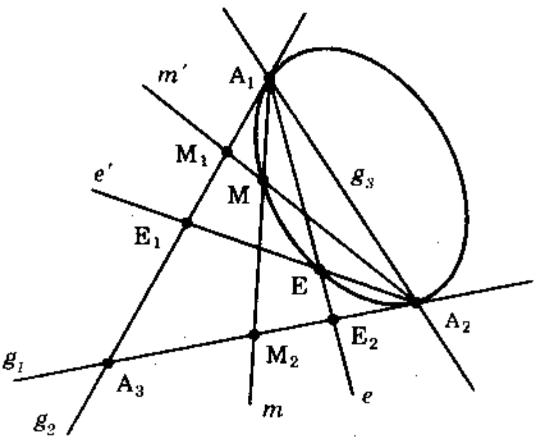
⇔ f(SS') = SS'

3. ĐỊNH LÍ STEINER

a) Định lí thuận: Nếu ánh xạ xạ ảnh f: $\{A_1\} \to \{A_2\}$ giữa hai chùm tâm A_1 và A_2 không phải là một phép phối cảnh thì giao điểm của các đường thẳng tương ứng nằm trên một đường conic.

Chứng minh

Xét ánh xạ xạ ảnh giữa hai chùm tâm A_1 và A_2. Gọi đường thẳng $g_3 = A_1A_2$. Vì f không phải là phép phối cảnh nên ta có $f(g_3) = g_1$, $f(g_2) = g_3$. Ta có g_1, g_2, g_3 là ba đường thẳng phân biệt.



hình 55

Gọi $A_3 = g_1 \cap g_2$. Lấy một đường thẳng e thuộc chùm tâm A_1 mà không trùng với

g_2 và g_3. Ta có e' = f(e) thuộc chùm tâm A_2.Khi đó một đường thẳng m bất kì thuộc chùm tâm A_1 sẽ biến thành đường thẳng m' thuộc chùm tâm A_2. Vì f là ánh xạ xạ ảnh nên ta có:

$$(g_3, g_2, e, m) = (g_1, g_3, e', m')$$

Gọi $E = e \cap e'$, $M = m \cap m'$, $E_1 = g_2 \cap e'$, $E_2 = g_1 \cap e$, $M_1 = g_2 \cap m'$, $M_2 = g_1 \cap m'$. Ta suy ra $(A_2A_3E_2M_2) = (A_3A_1E_1M_1)$.

Chọn $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh và gọi (x_1, x_2, x_3) là tọa độ xạ ảnh của điểm M đối với mục tiêu vừa chọn ta có: $(A_2A_3E_2M_2) = \dfrac{x_2}{x_3}$ và $(A_3A_1E_1M_1) = \dfrac{x_3}{x_1}$ nên suy ra $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{x_3}{x_1}$ hay

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0$$

Đây là phương trình của một đường conic. Conic này đi qua điểm E (vì điểm E có tọa độ thỏa mãn phương trình của conic) đồng thời tiếp xúc với các đường thẳng g_2 và g_1 tại các điểm A_1 và A_2.

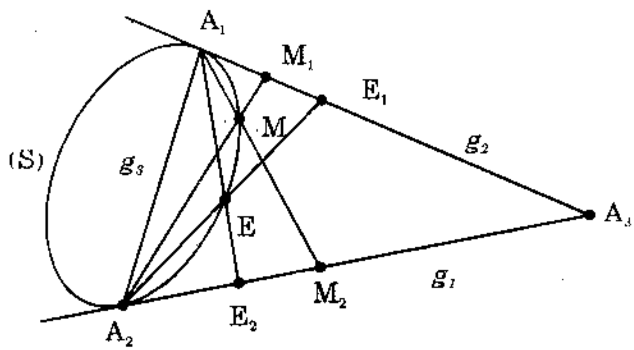
b) Định lí đảo. Nếu A_1, A_2 là hai điểm cố định của một đường conic (S) và M là một điểm thay đổi trên (S) thì ánh xạ f: $\{A_1\} \to \{A_2\}$ giữa hai chùm sao cho $f(A_1M) = A_2M$ là một ánh xạ xạ ảnh nhưng không phải là phối cảnh.

Chứng minh

Gọi g_3 là đường thẳng A_1A_2 và g_1,g_2 lần lượt là các tiếp tuyến của (S) tại A_2 và A_1. Ta có $g_1 \cap g_2 = A_3$. Lấy một điểm E cố định trên (S) mà không trùng với A_1 và A_2. Gọi $E_2 = A_1E \cap A_2A_3$, $E_1 = A_2E \cap A_1A_3$.

Với một điểm M thuộc (S) khác với A_1, A_2 ta có $M_2 = A_1M \cap A_2A_3$, $M_1 = A_2M \cap A_2A_3$.

Nếu chọn $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ làm mục tiêu xạ ảnh ta có thể chứng minh được (bằng cách buộc điều kiện các điểm A_1, A_2, A_3,



hình 56

E thuộc (S) và các đường thẳng g_1, g_2 là các tiếp tuyến của (S) tại A_2, A_1) phương trình của (S) là:

$$x_3^2 - x_1x_2 = 0$$

Ta suy ra: $\dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{x_3}{x_1}$

Mặt khác $\dfrac{x_2}{x_3} = (A_2A_3E_2M_2)$ và $\dfrac{x_3}{x_1} = (A_3A_1E_1M_1)$

Do đó: $(A_2A_3E_2M_2) = (A_3A_1E_1M_1)$ (H. 56)

hay $(A_1A_2, A_1A_3, A_1E_2, A_1M_2) = (A_2A_3, A_2A_1, A_2E_1, A_2M_1)$

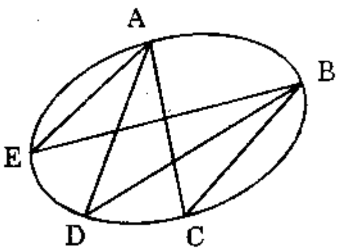
Như vậy ánh xạ f có tính chất bảo tồn tỉ số kép biến chùm tâm A_1 thành chùm tâm A_2 trong đó đường thẳng nối hai tâm là A_1A_2 không tự ứng. Vậy f là ánh xạ xạ ảnh mà không phải là phối cảnh.

Định lí thuận đối ngẫu. Nếu f: $\{m_1\} \to \{m_2\}$ là ánh xạ xạ ảnh giữa hai hàng điểm có giá là các đường thẳng m_1, m_2 nhưng không phải là phối cảnh thì các đường thẳng nối các cặp điểm tương ứng sẽ tiếp xúc với một đường conic.

Định lí đảo đối ngẫu. Nếu m_1 và m_2 là hai tiếp tuyến khác nhau của một đường conic và m là một tiếp tuyến thay đổi của nó thì phép ánh xạ f: $\{m_1\} \to \{m_2\}$ sao cho giao điểm của m_1 và m biến thành giao điểm của m_2 và m thì f là một ánh xạ xạ ảnh nhưng không phải là phối cảnh.

4. VẤN ĐỀ XÁC ĐỊNH MỘT CONIC

a) Định lí. Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, bao giờ cũng có một đường conic duy nhất đi qua 5 điểm đó.



hình 57

Chứng minh

Ta xét hai chùm tâm A và B và ánh xạ xạ ảnh f: $\{A\} \to \{B\}$ sao cho f(AC) = BC, f(AD) = BD, f(AE) = BE. Ánh xạ f như vậy được hoàn toàn xác định và không phải là phép phối cảnh (H. 57).

Do theo định lí Steiner thuận, giao điểm của các cặp đường thẳng tương ứng là một conic (S). Đường conic này đi qua 5 điểm A, B, C, D, E đã cho. Sự duy nhất của (S) được suy ra từ sự duy nhất của ánh xạ f.

b) Định lí đối ngẫu. Cho 5 đường thẳng a, b, c, d, e trong đó không có ba đường nào đồng quy, bao giờ cũng có một đường conic duy nhất tiếp xúc với 5 đường thẳng đó.

c) Các trường hợp đặc biệt

Nếu ta thay điều kiện đường conic đi qua một điểm bằng điều kiện conic đó tiếp xúc với một đường thẳng ta có các trường hợp đặc biệt sau đây:

• Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và một đường thẳng a đi qua điểm A nhưng không đi qua các điểm còn lại. Khi đó có một conic duy nhất đi qua A, B, C, D và tiếp xúc với a tại A.

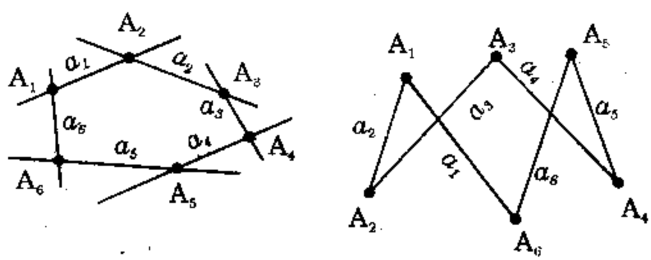
• Cho 4 đường thẳng a, b, c, d trong đó không có ba đường nào đồng quy và một điểm A thuộc a nhưng không thuộc các đường thẳng còn lại. Khi đó có một conic duy nhất tiếp xúc với a, b, c, d và đi qua A.

• Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, đường thẳng a đi qua A nhưng không đi qua B và C, đường thẳng b đi qua B nhưng không đi qua A và C. Khi đó có một conic duy nhất đi qua C tiếp xúc với a tại A và tiếp xúc với b tại B.

• Cho ba đường thẳng a, b, c không đồng quy, điểm A thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc b và c, điểm B thuộc đường thẳng b nhưng không thuộc a và c. Khi đó có một đường conic duy nhất tiếp xúc với c, tiếp xúc với a tại A và tiếp xúc với b tại B.

5. ĐỊNH LÍ PASCAL (PAXCAN)

a) Định nghĩa. Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$, tập hợp 6 điểm và 6 đường thẳng sao cho mỗi điểm là giao của hai đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua hai và chỉ hai điểm, gọi là một *hình lục giác*. Các điểm đã cho gọi là *đỉnh* và các đường thẳng đã cho gọi là *cạnh* của hình lục giác (H. 58).



hình 58

Ta có thể sắp xếp các đỉnh và các cạnh của lục giác theo một thứ tự nhất định nào đó bằng cách đánh số thứ tự. Thí dụ A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, a_3, A_4, a_4, A_5, a_5, A_6, a_6 (A_i là đỉnh và a_i là cạnh) sao cho cạnh a_i đi qua hai đỉnh A_i và A_{i+1} (xem đỉnh A_{6+1} là A_1) và do đó cạnh a_i và a_{i+1} đi qua đỉnh A_{i+1} (xem a_{6+1} là a_1).

Khi đó các cặp đỉnh A_1 và A_4, A_2 và A_5, A_3 và A_6 gọi là các *cặp đỉnh đối diện*, các cặp cạnh a_1 và a_4, a_2 và a_5, a_3 và a_6 gọi là các *cặp cạnh đối diện*.

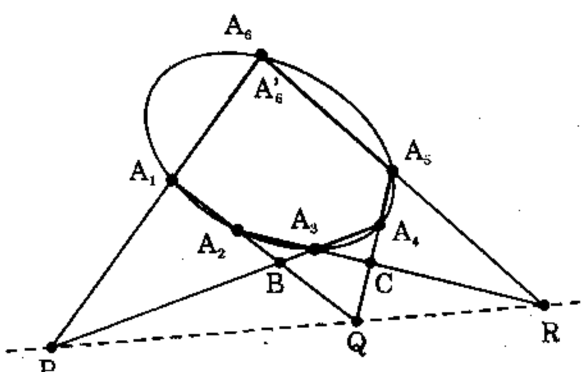
b) Định lí Pascal

Điều kiện cần và đủ để một lục giác nội tiếp trong một conic (các đỉnh của nó thuộc conic) là giao điểm của các cặp cạnh đối diện nằm trên một đường thẳng (đường thẳng này gọi là đường thẳng Pascal)

Chứng minh

• Giả sử lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp trong một conic. Theo định lý Steiner đảo ta có hai chùm tâm A_1 và tâm A_5 có liên hệ xạ ảnh với nhau nghĩa là

$$\{A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_6\} \;\overline{\wedge}\; \{A_5A_2, A_5A_3, A_5A_4, A_5A_6\}$$



hình 59

Cắt chùm tâm A_1 bởi đường thẳng A_3A_4 và cắt chùm tâm A_5 bởi đường thẳng A_2A_3. Gọi:

$B = A_3A_4 \cap A_1A_2$,

$P = A_3A_4 \cap A_1A_6$,

$Q = A_1A_2 \cap A_4A_5$,

$R = A_2A_3 \cap A_5A_6$,

$C = A_2A_3 \cap A_5A_4$

(H.59). Giữa hai hàng điểm nằm trên các đường thẳng A_3A_4 và A_2A_3 ta có:

$$\{B, A_3, A_4, P\} \;\overline{\wedge}\; \{A_2, A_3, C, R\}$$

Liên hệ xạ ảnh giữa hai hàng điểm này có điểm A_3 là giao của hai giá tự ứng nên nó là phép phối cảnh. Ta có $A_2B \cap CA_4 = Q$ nên Q là tâm phối cảnh. Vậy đường thẳng PR phải đi qua tâm phối cảnh là Q, nghĩa là ba điểm P,Q,R thẳng hàng.

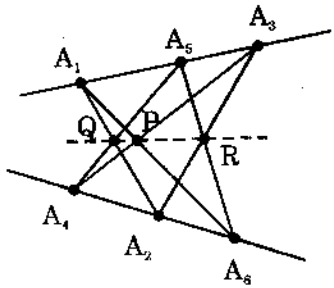
Ngược lại, giả sử lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có giao điểm của các cặp cạnh đối diện là P, Q, R thẳng hàng. Gọi S' là conic xác định bởi 5 điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 và giả sử conic cắt đường thẳng A_1A_6 tại A'_6. Cần chứng minh A'_6 trùng với A_6. Theo phần thuận của định lí Pascal vì lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A'_6$ nội tiếp conic S' nên đường thẳng PQ chính là đường thẳng Pascal.

Ta có $R = PQ \cap A_2A_3$ và

$A_6 = A_1P \cap A_5R = A'_6$.

Vậy A'_6 trùng với A_6

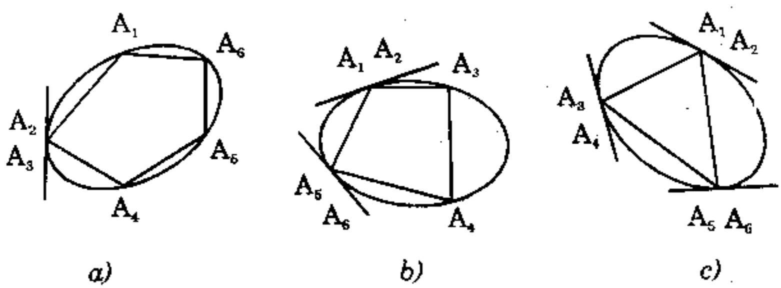
CHÚ Ý. Nếu đường bậc hai suy biến thành hai đường thẳng phân biệt ta có định lí Pappus. Vậy định lí này là một trường hợp đặc biệt của định lí Pascal (H. 60).



hình 60

c) Các trường hợp đặc biệt của định lí Pascal.

Ta có thể xem ngũ giác, tứ giác, tam giác nội tiếp một conic là các trường hợp đặc biệt của lục giác khi một cặp đỉnh, hai cặp đỉnh hay ba cặp đỉnh trùng nhau. Khi đó ta xem cạnh của lục giác chứa cặp đỉnh trùng nhau là tiếp tuyến của conic tại điểm đó. Người ta chứng minh được định lí Pascal vẫn đúng trong các trường hợp đặc biệt đó. Các trường hợp suy biến của lục giác minh họa bằng các hình vẽ sau đây (H. 61 a, b, c):



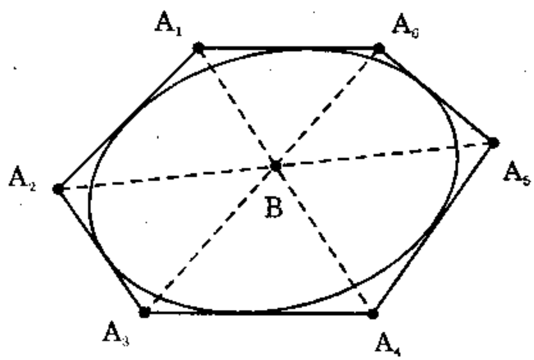
hình 61

6. ĐỊNH LÍ BRIANCHON (BRIĂNG-SÔNG)

a) Định lí. Điều kiện cần và đủ để một lục giác ngoại tiếp một đường conic (có cạnh tiếp xúc với conic) là các đường thẳng nối các đỉnh đối diện đồng quy tại một điểm (gọi là điểm Brianchon) (H. 62).

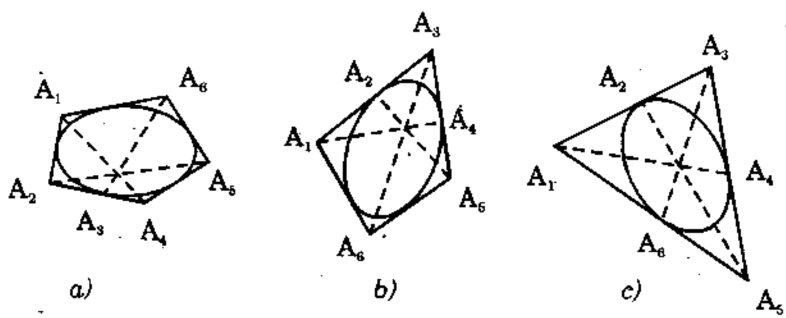
CHÚ Ý: Định lí Brianchon là định lí đối ngẫu của định lí Pascal trong $\mathbf{P}^2$.

b) Các trường hợp đặc biệt của định lí Brianchon



hình 62

Tương tự như đối với định lí Pascal, ta có thể xem ngũ giác, tứ giác, tam giác ngoại tiếp conic là những trường hợp đặc biệt của lục giác khi có một cặp cạnh, hai cặp cạnh hay ba cặp cạnh trùng nhau. Khi đó ta xem đỉnh của cặp cạnh trùng nhau là tiếp điểm của conic với cặp cạnh đó.Các trường hợp suy biến của lục giác ngoại tiếp conic được minh họa bằng các hình vẽ sau đây (H. 63 a, b, c):



hình 63

CHÚ Ý: Định lí Pascal và định lí Brianchon có thể được áp dụng đối với các đường bậc hai trong mặt phẳng afin (như elip, hypebol, parabol) và trong mặt phẳng Ơclit (như đường tròn).

§11. MÔ HÌNH XẠ ẢNH CỦA KHÔNG GIAN ƠCLIT

1. XÂY DỰNG MÔ HÌNH

Nếu ta chọn trong không gian xạ ảnh n chiều một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ làm siêu phẳng vô tận, ta được một không gian afin n chiều $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \backslash \mathbf{P}^{n-1}$.

Bây giờ ta định nghĩa tích vô hướng cho hai vectơ bất kì trong không gian vectơ liên kết với không gian afin $\mathbf{A}^n$, ta sẽ làm cho $\mathbf{A}^n$ trở thành không gian Ơclit n chiều $\mathbf{E}^n$. Mô hình đó được gọi là *mô hình xạ ảnh của không gian Ơclit.*

Ta hãy chọn trong không gian $\mathbf{E}^n$ đó một mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$ tức là:

$$\overline{A_{n+1}E_i}.\overline{A_{n+1}E_j} = \begin{cases} 0 \text{ khi } i \neq j \\ 1 \text{ khi } i = j \end{cases} \text{ với } i, j = 1,2,\dots, n$$

Ta hãy gọi $\{A_i; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh sinh ra mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$. Điều đó có nghĩa là: A_i là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E_i$ với siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ với $i = 1,2,\dots,n$ còn E là điểm của $\mathbf{E}^n$ có tọa độ trực chuẩn là $(1,1,\dots,1)$.

Khi đó ta có = $\overrightarrow{A_{n+1}E} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_{n+1}E_i}$

Ta chú ý rằng nếu một điểm $X \in \mathbf{E}^n$ có tọa độ đối với mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$ là $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ thì nó sẽ có tọa độ đối với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ là $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ với $x_{n+1} \neq 0$ và

$$X_i = \frac{x_i}{x_{n+1}}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Đối với mục tiêu trực chuẩn đã chọn hai vectơ $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ và $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_{n+1})$ sẽ có tích vô hướng là:

$$\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = [u]^*[v]$$

2. CÁI TUYỆT ĐỐI CỦA KHÔNG GIAN XẠ ẢNH $\mathbf{P}^n$

Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ ta chọn siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ có phương trình $x_{n+1} = 0$. Trong siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ ta lấy mục tiêu $\{A_1, A_2, ..., A_n ; E'\}$ trong đó E' là giao của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$. Ta hãy xét một siêu mặt trái xoan không T có phương trình đối với mục tiêu $\{A_1, A_2, ..., A_n; E'\}$ là:

$$[x]^*[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Siêu mặt trái xoan không T gọi là *cái tuyệt đối* của không gian xạ ảnh $\mathbf{P}^n$.

3. VÀI KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA HÌNH HỌC ƠCLIT THỂ HIỆN TRÊN MÔ HÌNH

a) Sự vuông góc của hai đường thẳng

Định lí. Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau là hai điểm vô tận của chúng liên hợp với nhau đối với cái tuyệt đối T.

Chứng minh

Ta dựng qua gốc A_{n+1} của mục tiêu trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$ hai đường thẳng d_1 và d'_1 lần lượt song song với d và d'. Trên d_1 và d'_1 ta lần lượt lấy hai điểm X và X' khác với A_{n+1} có tọa độ là $(X_1, X_2, ..., X_n)$ và $(X'_1, X'_2, ..., X'_n)$.

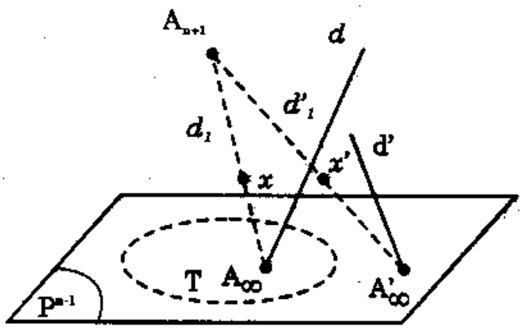
Gọi A_∞ và A'_∞ lần lượt là hai điểm vô tận của d_1 và d'_1 (cũng là điểm vô tận của d và d') (H.64).

Khi đó ta có tọa độ xạ ảnh của A_∞ và A'_∞ là:

$A_\infty = (X_1, X_2, ..., X_n, 0)$

$A'_\infty = (X'_1, X'_2, ..., X'_n, 0)$ (vì P^{n-1} có phương trình $x_{n+1} = 0$).

Điều kiện cần và đủ để d_1 và d'_1 vuông góc với nhau là:



hình 64

$$\overrightarrow{A_{n+1}X}.\overrightarrow{A_{n+1}X'} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i X'_i = 0$$

Đó chính là điều kiện để hai điểm A_∞ và A'_∞ liên hợp với nhau đối với cái tuyệt đối T.

b) Siêu cầu

Định lí : Mỗi siêu mặt bậc hai trong không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ là một siêu cầu khi và chỉ khi nó cắt siêu phẳng vô tận theo cái tuyệt đối T.

Chứng minh

Mỗi siêu cầu trong $\mathbf{E}^n$ có phương trình đối với cơ sở trực chuẩn $\{A_{n+1}; E_i\}$ là:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_i^0)^2 = R^2 \qquad (1)$$

trong đó $(X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0)$ là tọa độ của tâm siêu cầu và R là bán kính của siêu cầu. Bằng cách chuyển sang tọa độ xạ ảnh ta đưa phương trình siêu cầu ở trên về dạng:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{n+1}} - \frac{x_i^0}{x_{n+1}^0}\right)^2 = R^2 \tag{2}$$

hay $$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{n+1}^0 x_i - x_i^0 x_{n+1}\right)^2 = R^2 x_{n+1}^{0\,2}\ x_{n+1}^2 \tag{3}$$

Muốn tìm giao của siêu cầu với siêu phẳng vô tận có phương trình $x_{n+1} = 0$, ta thay $x_{n+1} = 0$ vào phương trình (3) ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{n+1}^{0\,2}\ x_i^2 = 0 \text{ hay } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Đó chính là phương trình của cái tuyệt đối T. Vậy mọi siêu cầu của $\mathbf{E}^n$ đều cắt siêu phẳng vô tận theo cái tuyệt đối T.

Ngược lại giả sử (S) là một siêu mặt bậc hai nào đó của $\mathbf{E}^n$ có phương trình đối với cơ sở trực chuẩn $\{A_{n+1}; \mathbf{E}_i\}$ là:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}X_i + a_{n+1,n+1} = 0 \tag{4}$$

Bằng cách chuyển sang tọa độ xạ ảnh ta có phương trình:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{4'}$$

Giao của siêu mặt (4') đó với siêu phẳng vô tận có phương trình $x_{n+1} = 0$ là:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{5}$$

Vì giao đó trùng với cái tuyệt đối T nên $a_{ij} = k\delta_{ij}$ với $k \neq 0$.

Như vậy phương trình (4) sẽ trở thành:

$$k\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}X_i + a_{n+1,n+1} = 0 \tag{6}$$

Phương trình (6) chính là phương trình của một siêu cầu (có thể là siêu cầu điểm hoặc siêu cầu ảo) và định lí đã được chứng minh.

c) Phép đồng dạng. Định lí sau đây sẽ nêu lên ý nghĩa xạ ảnh của phép đồng dạng:

Định lí. Mỗi phép biến đổi afin của không gian Ơclit $\mathbf{E}^n$ là một phép đồng dạng khi và chỉ khi nó được sinh ra bởi một phép biến đổi của $\mathbf{P}^n$ sao cho cái tuyệt đối T được giữ nguyên.

Chứng minh

Đối với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, mỗi phép afin của $\mathbf{E}^n$ sẽ có phương trình:

$$X_i' = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}X_j + b_{i,n+1}, \qquad i = 1,2,..., n \tag{7}$$

trong đó ma trận $B = [b_{ij}]$ không suy biến .

Ta biết rằng (theo §6, II, 4 ở chương III) phép afin đó được sinh ra bởi phép biến đổi xạ ảnh sau đây của $\mathbf{P}^n$:

$$\begin{cases} x_i' = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}x_j, & i = 1,2,...,n \\ x_{n+1}' = x_{n+1} \end{cases} \tag{8}$$

Phép biến đổi (8) ở trên sẽ sinh ra trên siêu phẳng vô tận $\mathbf{P}^{n-1}$ một phép biến đổi sau đây:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \quad , \qquad i = 1,2,..., n \tag{9}$$

hay $\qquad [x'] = B[x] \qquad (10)$

Ta suy ra: $\qquad [x] = B^{-1}[x'] \qquad (11)$

Do đó: $\qquad [x]^*[x] = [x']^*(B^{-1})^* B^{-1}[x']$

$$= [x']^* (BB^*)^{-1}[x'] \tag{12}$$

Nếu phép afin (7) là phép đồng dạng thì $BB^* = kI$ với $k \neq 0$, do đó phép (9) hay (10) sẽ biến mỗi điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ của cái tuyệt đối T thành điểm $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ thỏa mãn điều kiện:

$$[x']^*(BB^*)^{-1}[x'] = 0 \qquad (13)$$

hay $$[x']^*[x'] = 0 \qquad (14)$$

nghĩa là $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ cũng nằm trên cái tuyệt đối T. Vậy T biến thành chính nó.

Ngược lại nếu phép biến đổi (9) biến T thành chính nó thì phương trình (13) phải trùng với phương trình (14) nên:

$$(BB^*)^{-1} = kI \text{ với } k \neq 0$$

hay $$BB^* = \frac{1}{k} I$$

Điều đó chứng tỏ phép biến đổi (7) là một phép đồng dạng.

Trên đây chúng ta chỉ nêu lên một vài thể hiện của hình học Ơclit n chiều trên mô hình. Chúng ta hãy vận dụng sự thể hiện đó đối với không gian Ơclit 2,3 chiều để có thể giải được một số bài toán hình học thường gặp.

4. CÁC NHÓM CON CỦA NHÓM CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI XẠ ẢNH

Gọi $\mathcal{P}^n$ là nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ và khi đó hình học xạ ảnh là hình học của nhóm $\mathcal{P}^n$. Nếu trong $\mathbf{P}^n$ ta chọn một siêu phẳng $\mathbf{P}^{n-1}$ làm siêu phẳng vô tận thì các phép biến đổi xạ ảnh giữ nguyên $\mathbf{P}^{n-1}$ làm thành một nhóm con của nhóm $\mathcal{P}^n$. Nhóm con này đẳng cấu với nhóm các phép biến đổi afin $\mathcal{A}^n$ của không gian afin $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^n \setminus \mathbf{P}^{n-1}$.

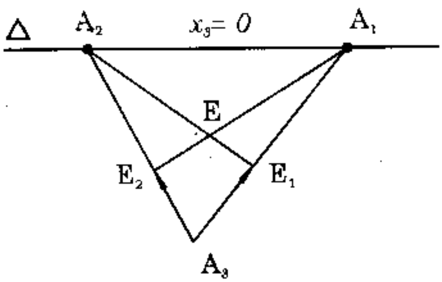
Nếu bây giờ xét tập hợp các phép biến đổi xạ ảnh giữ nguyên $\mathbf{P}^{n-1}$ và giữ nguyên cái tuyệt đối T thì tập hợp đó làm thành một nhóm con đẳng cấu với nhóm các phép đồng dạng của $\mathbf{E}^n$. Tóm lại ta có:

nhóm xạ ảnh $\supset$ nhóm afin $\supset$ nhóm đồng dạng $\supset$ nhóm dời hình học xạ ảnh ⊂ hình học afin ⊂ hình học đồng dạng ⊂ hình học Ơclit.

Việc nghiên cứu hình học theo quan điểm nhóm giúp chúng ta thấy được sự liên quan giữa các thứ hình học: xạ ảnh, afin và Ơclit. Đồng thời thông qua việc làm này, chúng ta sẽ hiểu rõ nội dung và cấu trúc của chương trình hình học ở các trường phổ thông hiện nay. Nhờ các công cụ của đại số học, chúng ta có nhiều điều kiện và phương tiện để nghiên cứu hình học một cách đầy đủ và chính xác.

5. MÔ HÌNH XẠ ẢNH CỦA MẶT PHẲNG ƠCLIT

a) Ta chọn trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ một đường thẳng Δ làm đường thẳng vô tận. Chọn mục tiêu xạ ảnh sao cho Δ có phương trình $x_3 = 0$. Đường thẳng Δ như vậy sẽ đi qua A_1, A_2 của mục tiêu (H. 65).



hình 65

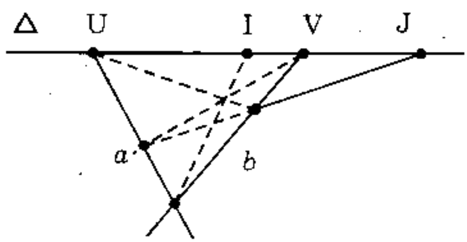
Cái tuyệt đối T trên Δ là hai cặp điểm ảo I, J liên hợp thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

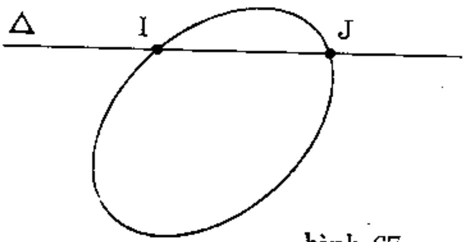
Ta có I(1,i,0), J(1,–i,0) là hai điểm cyclic (hay là hai viên điểm) của mô hình.

b) Sau đây ta hãy diễn tả một số khái niệm của không gian Ơclit E_2:

• Hai đường thẳng a, b có hai phương xác định lần lượt bởi hai điểm vô tận là



hình 66



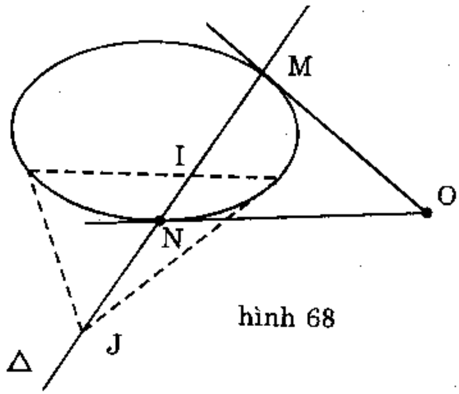
hình 67

U, V trên Δ, biểu thị cho hai đường thẳng vuông góc với nhau nếu :

(UVIJ) = - 1 (H .66)

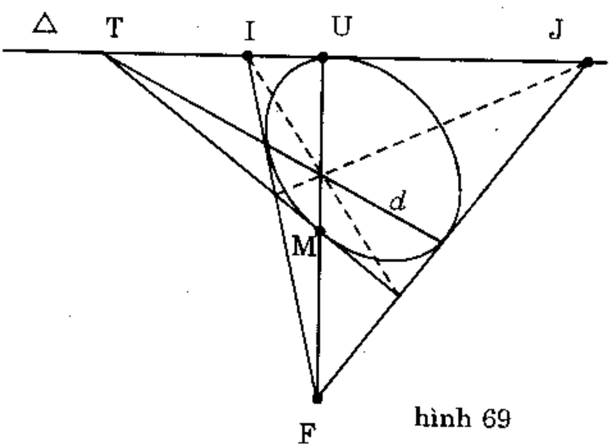
• Đường tròn là đường trái xoan S cắt đường thẳng vô tận Δ tại hai điểm cyclic I, J (H. 67).

• Đường hypebol vuông là đường trái xoan S cắt Δ tại hai điểm M, N sao cho (MNIJ) = -1. Các tiếp tuyến của S tại M,N là các đường tiệm cận của hypebol. Các tiếp tuyến này cắt nhau tại O là tâm của hypebol (H. 68).



hình 68

• Đường parabol là đường trái xoan S tiếp xúc với đường thẳng Δ tại U.



hình 69

Gọi T là điểm trên Δ sao cho (UTIJ) = -1.

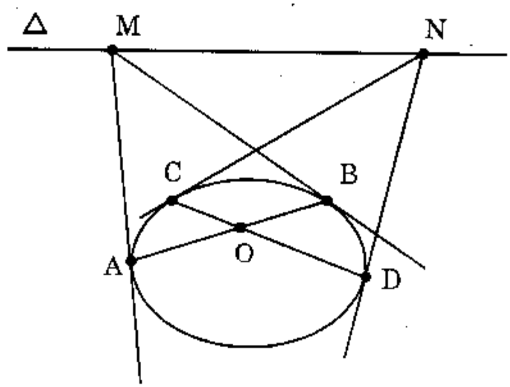
Gọi UM là đường đối cực của T đối với S. Như vậy UM là trục đối xứng của parabol và ta có MT ⊥ MU vì (UTIJ) = -1.

Các đường thẳng qua U biểu

thị các đường thẳng song song với trục MU trong đó M là đỉnh của parabol.

Các tiếp tuyến xuất phát từ I và J cắt nhau tại tiêu điểm F. Đường đối cực của F là đường thẳng d đi qua T biểu thị cho đường chuẩn của parabol (H .69)

• Đường elip là đường trái xoan S không cắt đường thẳng vô tận Δ. Từ một điểm M trên Δ ta dựng hai tiếp tuyến tiếp xúc với S tại A và B, ta có AB là một đường kính của elip. Tương tự từ điểm N ≠ M ở trên Δ ta dựng được một đường kính khác là CD của elip. Điểm O = AB ∩ CD biểu thị cho tâm của elip. Như vậy đường thẳng Δ là đường đối cực của điểm O đối với S (H. 70).



hình 70

BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN XẠ ẢNH VÀ HÌNH HỌC XẠ ẢNH

§1, §2, §3

3.1. Trong không gian Euclide n chiều đã cho một mục tiêu trực chuẩn, cho một siêu cầu S có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

Gọi S' là tập hợp các cặp điểm xuyên tâm đối của S. Hãy xây dựng S' trở thành một không gian xạ ảnh n−1 chiều.

3.2. Gọi S và S' là các tập hợp như ở bài 3.1, còn B là tập hợp các điểm nằm trong siêu cầu S

$$B = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n \left| x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1 \right. \right\}$$

Hãy xây dựng B' = B∪S' trở thành một không gian xạ ảnh n chiều.

3.3. Chứng minh rằng tập hợp các siêu phẳng cùng đi qua một điểm cố định của không gian afin A^n có thể được xây dựng thành một không gian xạ ảnh n chiều.

3.4. Chứng minh rằng nếu một m-phẳng xạ ảnh đi qua m+1 điểm độc lập của một p-phẳng ($m < p$) thì nó nằm trên p-phẳng đó.

3.5. Trong không gian xạ ảnh P^n cho hai cái phẳng P^r và P^s. Tổng của hai cái phẳng này là một cái phẳng có số chiều bé nhất chứa cả P^r và P^s. Giao của hai cái phẳng này là một cái phẳng có số chiều lớn nhất chứa trong P^r và P^s. Chứng minh rằng nếu p và q là số chiều của tổng và giao thì:

a) $r + s = p + q$ nếu P^r và P^s có điểm chung

b) $r + s = p + q - 1$ nếu P^r và P^s chéo nhau.

3.6. Tìm điều kiện cần và đủ để hai cái phẳng P^r và P^s của không gian P^n chéo nhau.

3.7. Cho hai cái phẳng P^r và P^s của không gian P^n. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các điểm nằm trên tất cả các đường thẳng MN với $M \in P^r$, $N \in P^s$ là tổng của P^r và P^s.

3.8. Trong không gian xạ ảnh P^2 cho mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ và các điểm $A'_1=(0,1,1)$, $A'_2=(2,0,1)$, $A'_3=(1,1,0)$, $E'=(1,1,1)$

a) Chứng tỏ có thể chọn hệ điểm $\{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}$ làm mục tiêu xạ ảnh của P^2.

b) Lập công thức đổi mục tiêu từ $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ sang $\{A'_1, A'_2, A'_3; E'\}$.

3.9. Trong P^2 với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho các điểm $A'_1(0,1,1)$, $A'_2(2,0,1)$, $A'_3(1,1,0)$, $E'(1,1,1)$.

a) Tìm ma trận chuyển mục tiêu từ mục tiêu $\{A_i;E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

b) Tìm tọa độ của điểm $M(1,2,3)$ đối với mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

3.10. Trong P^2 với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho các điểm $A'_1(1,1,0)$, $A'_2(0,1,-2)$, $A'_3(1,1,1)$, $E'(2,3,-5)$.

a) Tìm ma trận chuyển mục tiêu từ mục tiêu $\{A_i; E\}$ sang mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

b) Tìm tọa độ của điểm $N(0,1,1)$ đối với mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

3.11. Trong A^2 với mục tiêu afin $\{A_3; E_1, E_2\}$ cho điểm $E(1,1)$. Từ một điểm O nằm ngoài mặt phẳng afin đó, ta gọi $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{A_3E_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OA'_2} = \overrightarrow{A_3E_2}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$.

Ta có $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ là một cơ sở của V^3. Bây giờ ta bổ sung các phần tử vô tận vào mặt phẳng afin đã cho để có mặt phẳng xạ ảnh P^2. Gọi $\{A_1, A_2, A_3; E\}$ là mục tiêu xạ ảnh ứng với cơ sở nói trên.

a) Nếu một điểm X của mặt phẳng afin có tọa độ afin là (x_1, x_2) thì điểm đó có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu?

b) Các điểm vô tận được bổ sung vào mặt phẳng afin có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu?

3.12. Mặt phẳng afin A^2 được bổ sung các điểm vô tận để trở thành một mặt phẳng xạ ảnh P^2. Trong A^2 ta chọn một mục tiêu afin và xét các điểm có tọa độ đối với mục tiêu đó như sau: $A_1 = (1,0)$, $A_2 = (0,1)$, $A_3 = (0,0)$ và $E = (1,1)$. Xem $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ là mục tiêu xạ ảnh của P^2. Nếu một điểm M có tọa độ afin là (x_1, x_2) thì tọa độ xạ ảnh của nó bằng bao nhiêu? Điểm vô tận của mỗi đường thẳng afin Δ sẽ có tọa độ xạ ảnh là bao nhiêu nếu biết phương trình của đường thẳng Δ đối với mục tiêu afin đã cho ?

3.13. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu $\{A_i ; E\}$ cho trước:

a) Lập phương trình tham biến và phương trình tổng quát cua m–phẳng đi qua m+1 đỉnh đầu tiên của mục tiêu.

b) Lập phương trình tham biến và phương trình tổng quát của m–phẳng đi qua m+1 đỉnh cuối của mục tiêu.

c) Lập phương trình tổng quát của siêu phẳng đi qua tất cả các đỉnh của mục tiêu trừ đỉnh thứ k.

3.14. Trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ cho trước. Gọi $\{i, j, k\}$ là một hoán vị của tập hợp $\{1, 2, 3\}$ và

$$E_i = A_iE \cap A_jA_k,\ E'_i = A_iE \cap E_jE_k$$

a) Tìm tọa độ của các đường thẳng A_iE $(i = 1, 2, 3)$

b) Tìm tọa độ của các điểm E_i, E'_i $(i = 1, 2, 3)$

c) Chứng minh rằng ba điểm E'_1, E'_2, E'_3 thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm đó.

3.15. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai điểm $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ phân biệt. Chứng tỏ rằng tọa độ của đường thẳng AB là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

3.16. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a và b khác nhau có tọa độ là (a_1,a_2,a_3) và (b_1,b_2,b_3). Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm và tọa độ giao điểm là:

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

3.17. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.18. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba đường thẳng a, b, c lần lượt có tọa độ (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) và (c_1,c_2,c_3). Chứng minh điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng a, b, c đồng quy là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.19. Chứng minh định lí Pappus: Trong mặt phẳng xạ ảnh P^2 cho ba điểm A, B, C nằm trên đường thẳng d và ba điểm A', B', C' nằm trên đường thẳng d'. Chứng minh rằng các điểm sau đây thẳng hàng:

$$AB' \times A'B,\ AC' \times A'C \text{ và } BC' \times B'C$$

(kí hiệu AB là đường thẳng đi qua hai điểm A và B, còn $BC' \times B'C$ là giao điểm của hai đường thẳng BC' và B'C).

3.20. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác $A_1A_2A_3$ và hai đường thẳng p và q phân biệt không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Các đường thẳng p và q cắt các cạnh A_iA_j lần lượt tại P_k và Q_k (ở đây {i,j,k} là một hoán vị của tập hợp {1,2,3}). Gọi $M_1 = P_2Q_3 \cap Q_2P_3$, $M_2 = P_1Q_3 \cap Q_1P_3$, $M_3 = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$. Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 thẳng hàng.

3.21. Chứng minh định lí Desargues trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbf{P}^2$. Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh rằng đường thẳng nối ba đỉnh AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi các giao điểm $AB \times A'B'$, $BC \times B'C'$, $AC \times A'C'$ thẳng hàng.

3.22. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một tam giác ABC và một điểm S. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AS và BC, BS và CA, CS và AB. Chứng minh rằng các điểm $AB \times A'B'$, $BC \times B'C'$, $AC \times A'C'$ thẳng hàng.

3.23. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho P là m–phẳng đi qua m+1 đỉnh đầu tiên của mục tiêu và Q là cái phẳng đi qua các đỉnh còn lại.

a) Lập phương trình tổng quát của P và Q.

b) Xét vị trí tương đối của P và Q.

c) Tìm số chiều của phẳng tổng P + Q.

3.24. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho P là siêu phẳng đi qua n đỉnh đầu tiên của mục tiêu và gọi E' là giao điểm của đường thẳng $A_{n+1}E$ với siêu phẳng P.

a) Chứng minh rằng $\{A_i; E'\}$ là mục tiêu xạ ảnh trong P.

b) Chứng minh rằng nếu điểm X thuộc P có tọa độ $(x_1,x_2,...,x_n,0)$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì điểm đó có tọa độ đối với mục tiêu $\{A_i;E'\}$ là $(x_1,x_2,...,x_n)$.

3.25. Trong $\mathbf{P}^2$ cho tam giác $A_1A_2A_3$ và một đường thẳng e không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại một điểm E sao cho đối với mục tiêu $\{A_1,A_2,A_3;E\}$ đường thẳng e có phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (Đường thẳng e này được gọi là đường thẳng đơn vị).

3.26. Trong $\mathbf{P}^3$ viết phương trình của một đường thẳng đi qua một điểm M đã cho và cắt hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cho trước không chứa M.

3.27. Trong $\mathbf{P}^3$ cho hai đường thẳng có phương trình:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = 0 \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng đó chéo nhau.

§4

3.28. Tìm phương trình của phép biến đổi xạ ảnh f của $\mathbf{P}^n$ biến các đỉnh A_i của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó, nghĩa là $f(A_i) = A_i$, $i = 1,2,..., n+1$.

3.29. Tìm phương trình của phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$ biến các đỉnh A_i của mục tiêu $\{A_i; E\}$ thành chính nó và biến các điểm của siêu phẳng $x_{n+1} = 0$ thành chính nó.

Chứng minh rằng mỗi phép biến đổi xạ ảnh như thế biến các đường thẳng đi qua điểm A_{n+1} thành chính nó.

3.30. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Hãy tìm các điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh đó.

3.31. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = 4x_1 - x_2 \\ kx'_2 = 6x_1 - 3x_2 \\ kx'_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

Hãy tìm các điểm kép và các đường thẳng bất biến qua phép biến đổi xạ ảnh f.

3.32. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 = x_2 + x_3 \\ kx'_2 = x_1 + x_3 \\ kx'_3 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f là một phép thấu xạ. Xác định tâm và nền của phép thấu xạ.

3.33. Trong $\mathbf{P}^2$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình:

$$\begin{cases} kx'_1 & = & x_2 - x_3 \\ kx'_2 & = & x_1 + x_3 \\ kx'_3 & = & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f là một phép thấu xạ. Xác định tâm và nền của phép thấu xạ.

3.34. Tìm điểm kép của phép biến đổi xạ ảnh sau đây:

$$\begin{cases} x'_1 & = & ax_1 + a_1x_{n+1} \\ x'_2 & = & ax_2 + a_2x_{n+1} \\ \dots & .. & \dots\dots\dots\dots \\ x'_{n+1} & = & ax_{n+1} + a_{n+1}x_{n+1} \end{cases}$$

3.35. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu $\{A_i ; E\}$ cho phép biến đổi xạ ảnh f xác định bởi

$$f(A_1) = A_3;\ f(A_3) = A_1;\ f(A_2) = E;\ f(E) = A_2$$

a) Viết phương trình của f đối với mục tiêu đã chọn.

b) Tìm các điểm kép của f.

c) Cho một điểm M tùy ý trong $\mathbf{P}^2$, gọi N là ảnh của M. Chứng minh rằng M là ảnh của N.

3.36. Chứng minh rằng trong $\mathbf{P}^2$ nếu một phép biến đổi xạ ảnh f có 3 điểm kép thẳng hàng thì nó là phép thấu xạ.

3.37. Một phép biến đổi xạ ảnh f: $\mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ gọi là một phép thấu xạ m–cặp nếu tồn tại hai cái phẳng $\mathbf{P}^m$ $(m < n)$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ không cắt nhau và chứa toàn những điểm kép (gọi là cơ sở thấu xạ).

a) Bằng cách chọn một mục tiêu thích hợp, hãy viết phương trình của phép thấu xạ m–cặp.

b) Chứng minh rằng nếu M và M' là một cặp điểm tương ứng nào đó của f thì đường thẳng MM' cắt $\mathbf{P}^m$ và $\mathbf{P}^{n-m-1}$ tại hai điểm U, V sao cho (MM'UV) là một hằng số k.

• Nếu $k = 0$ ta có phép thấu xạ 0–cặp (đó là một phép thấu xạ mà tâm thấu xạ không nằm trên nền thấu xạ).

• Nếu $k = -1$ ta có phép thấu xạ đối hợp.

3.38. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các phép thấu xạ có chung một nền lập thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$.

3.39. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các phép thấu xạ m–cặp có cùng cơ sở thấu xạ lập thành một nhóm con của nhóm các phép biến đổi xạ ảnh của $\mathbf{P}^n$, nhóm này đẳng cấu với nhóm nhân các số khác 0 của trường $\mathbf{K}$.

3.40. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh đã chọn $\{A_i; E\}$ cho phép biến đổi xạ ảnh f có phương trình $[x'] = B[x]$ và một siêu phẳng có phương trình $u_1x_1 + u_2x_2 + ... + u_{n+1}x_{n+1} = 0$. Hãy tìm ảnh của siêu phẳng đó qua phép biến đổi xạ ảnh đã cho.

3.41. Trong $\mathbf{P}^n$ gọi f là phép biến đổi xạ ảnh xác định bởi hai mục tiêu $\{A_i; E\}$ và $\{A'_i; E'\}$ sao cho $f(A_i) = A'_i$, $i = 1,2,..., n+1$ và $f(E) = E'$. Chứng minh rằng nếu một điểm $X \in \mathbf{P}^n$ có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ đối với mục tiêu $\{A_i; E\}$ thì điểm $X' = f(X)$ cũng có tọa độ $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ đối với mục tiêu $\{A'_i;E'\}$.

§5

3.42. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho ba điểm A(1,2,0), B(2,1,1), C(5,4,2).

a) Tính tỉ số kép (ABCD) biết rằng điểm D có tọa độ là (4,5,1)

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho (ABCM) = -1

3.43. Trong $\mathbf{P}^2$ cho ba điểm A,B,C phân biệt cùng thuộc một đường thẳng. Bằng cách dựng các đường thẳng hãy dựng điểm D sao cho:

a) (ABCD) = -1

b) (ABDC) = -1

3.44. Cho bốn điểm A,B,C,D thuộc một đường thẳng xạ ảnh. Cho biết (ABCD) = λ , hãy tìm ra tất cả các tỉ số kép có giá trị khác nhau có thể thành lập từ hệ bốn điểm đó.

3.45. Cho 5 điểm A,B,C,D,E phân biệt thuộc đường thẳng xạ ảnh. Chứng minh rằng:

$$(ABCD) \,.\, (ABDE) \,.\, (ABEC) = 1$$

3.46. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a, b phân biệt cắt nhau tại O và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Một đường thẳng d đi qua M lần lượt cắt a,b tại U và V. Trên d ta lấy một điểm N không trùng với M,U,V và giả sử ta có (MNUV) = k. Tìm quỹ tích những điểm N khi d thay đổi nhưng luôn luôn đi qua điểm M cho trước.

3.47. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hai đường thẳng a, b phân biệt cắt nhau tại O và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Qua M có hai đường thẳng m, m' thay đổi. Đường thẳng m cắt a, b lần lượt tại A và B còn đường thẳng m' cắt a, b lần lượt tại A' và B'. Tìm quỹ tích điểm $N = AB' \cap A'B$.

3.48. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho tam giác $A_1A_2A_3$ và một đường thẳng d không đi qua các đỉnh của tam giác đó. Gọi K_1, K_2, K_3 lần lượt là giao điểm của d với các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Giả sử L_1, L_2, L_3 là ba điểm lần lượt nằm trên ba đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm L_1, L_2, L_3 thẳng hàng khi và chỉ khi :

$$(A_2A_3K_1L_1) \,.\, (A_3A_1K_2L_2) \,.\, (A_1A_2K_3L_3) = 1$$

b) Ba đường thẳng A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng quy khi và chỉ khi:

$$(A_2A_3K_1L_1) \,.\, (A_3A_1K_2L_2) \,.\, (A_1A_2K_3L_3) = -1$$

3.49. Trên đường thẳng xạ ảnh cho một mục tiêu xạ ảnh và bốn điểm A,B,C,D có tọa độ xạ ảnh không thuần nhất lần lượt là a, b, c, d. Chứng minh rằng:

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

§6

3.50. Chứng minh định lí Pappus bằng cách dùng mô hình xạ ảnh của không gian afin.

3.51. Chứng minh định lí Desargues bằng cách dùng mô hình xạ ảnh của không gian afin.

3.52. Trong mặt phẳng afin cho ba điểm L_1, L_2, L_3 lần lượt nằm trên ba cạnh A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 của một tam giác $A_1A_2A_3$ cho trước. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để L_1,L_2,L_3 thẳng hàng là:

$$(L_1A_2A_3).(L_2A_3A_1).(L_3A_1A_2) = 1$$

3.53. Trong mặt phẳng afin cho ba điểm L_1, L_2, L_3 lần lượt nằm trên ba cạnh A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 của một tam giác $A_1A_2A_3$ cho trước. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để A_1L_1, A_2L_2, A_3L_3 đồng quy là:

$$(L_1A_2A_3).(L_2A_3A_1).(L_3A_1A_2) = -1$$

3.54. Trong mặt phẳng afin cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Ta lấy hai điểm A và B trên đường thẳng a và một điểm P không thuộc a.

a) Bằng cách chỉ dùng thước,hãy dựng trung điểm I của đoạn AB.

b) Cũng chỉ dùng thước, hãy dựng một đường thẳng qua P và song song với a.

3.55. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và một đường thẳng d không đi qua các điểm đó . Gọi $B_{ij} = d \cap A_iA_j$ với $i,j = 1,2,3,4$ và $i \neq j$. Gọi C_{ij} là điểm liên hiệp điều hòa với B_{ij} đối với A_i và A_j.

a) Chứng minh rằng C_{12}, C_{14}, B_{24} thẳng hàng. Bằng cách chứng minh tương tự, hãy chỉ ra các bộ ba điểm thẳng hàng khác.

b) Chứng minh ba đường thẳng $C_{12}C_{34}$, $C_{13}C_{24}$, $C_{14}C_{23}$ đồng quy.

3.56. Trong mặt phẳng afin cho hình bình hành ABCD. Từ một điểm M tùy ý trên cạnh AB ta dựng đường thẳng a cắt cạnh BC tại N và từ một điểm Q tùy ý trên cạnh AD ta dựng đường thẳng b song song với a cắt cạnh CD tại P. Các đường thẳng MP, NQ của hình thang MNPQ cắt nhau tại O. Chứng minh rằng ba điểm O, B, D thẳng hàng.

3.57. Trong mặt phẳng afin cho tam giác $A_1A_2A_3$. Một đường thẳng d không đi qua các đỉnh của tam giác đó cắt các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 lần lượt tại P_1, P_2, P_3. Ta gọi B_1 là điểm đối xứng của A_1 qua trung điểm của đoạn P_2P_3, B_2 là điểm đối xứng của A_2 qua trung điểm của đoạn P_3P_1 và B_3 là điểm đối xứng của A_3 qua trung điểm của đoạn P_1P_2. Chứng minh rằng ba điểm B_1, B_2, B_3 thẳng hàng.

3.58. Trong mặt phẳng afin cho hình thang $A_1A_2B_1B_2$ với hai đáy là A_1A_2 và B_1B_2. Qua các đỉnh A_1 và B_1 ta vẽ các đường thẳng song song a_1 và b_1, qua các đỉnh A_2 và B_2 ta vẽ các đường thẳng song song a_2 và b_2 sao cho a_1 và a_2 không song song. Chứng minh rằng ba điểm $A_1B_1 \cap A_2B_2$, $a_1 \cap a_2$ và $b_1 \cap b_2$ thẳng hàng.

§7.

3.59. Trong $\mathbf{P}^n$ hãy tìm các khái niệm đối ngẫu của các khái niệm sau đây:

a) m–phẳng thuộc k–phẳng ($m \leq k$)
b) Siêu phẳng chứa m–phẳng
c) Bốn điểm thẳng hàng
d) Tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

3.60. Tìm khái niệm đối ngẫu của khái niệm hình ba cạnh (tam giác)

a) Trong $\mathbf{P}^2$
b) Trong $\mathbf{P}^3$

3.61. Phát biểu định lí đối ngẫu của định lí Desargues trong $\mathbf{P}^2$ và $\mathbf{P}^3$.

3.62. Phát biểu định lí đối ngẫu của định lí Pappus trong $\mathbf{P}^2$.

§.8, §.9

3.63. Xác định loại của các đường bậc hai sau đây trong mặt phẳng xạ ảnh:

a) $4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$

b) $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$

c) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$

d) $5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = 0$

e) $2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 5x_1x_3 - x_2x_3 = 0$

3.64. Tìm giao điểm của đường bậc hai:

$$2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$$

với các đường thẳng sau đây:

a) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

b) $\begin{cases} x_1 = 5m - n \\ x_2 = -3m \\ x_3 = -2m + n \end{cases}$

3.65. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$$

a) Viết phương trình đường đối cực đối với (S) của các điểm sau đây:

$A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$, $E(1,1,1)$, $M(2,-1,5)$

b) Tìm tọa độ cực điểm của đường thẳng $7x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$ đối với (S).

3.66. Trong mặt phẳng xạ ảnh hãy lập phương trình các tiếp tuyến đi qua điểm M(1,-7,4) với đường bậc hai (S) có phương trình:

$$3x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0$$

3.67. Cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0$$

cho hai điểm A(1,1,1), B(1,2,0). Hãy viết phương trình đường đối cực của A và của B đối với (S). Hai điểm A và B có liên hợp với nhau đối với (S) không?

3.68. Trong $\mathbf{P}^3$ cho mặt bậc hai (S) có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 + 4x_2x_3 = 0$$

và hai điểm A(1,1,0,0), B(1,1,1,1).

a) Chứng tỏ điểm A thuộc (S) và viết phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của (S) tại A.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của (S) và hãy viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB.

3.69. Chứng tỏ rằng nếu 4 đỉnh của một hình bốn đỉnh toàn phần nằm trên một đường cong bậc hai (S) thì ba điểm chéo của nó tạo thành một tam giác tự đối cực đối với (S).

3.70. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một đường cong bậc hai (S) và một tam giác ABC tự đối cực đối với (S). Một đường thẳng m cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Gọi P', Q', R' theo thứ tự là các điểm thuộc các đường thẳng BC, CA, AB và lần lượt thuộc liên hợp với P, Q, R đối với (S). Chứng minh rằng ba đường thẳng AP', BQ', CR' đồng quy.

3.71. Chứng minh rằng nếu một phép thấu xạ tâm O biến một siêu mặt bậc hai thành chính nó thì đó là phép thấu xạ đối hợp và nền của nó là siêu phẳng đối cực của O đối với siêu mặt bậc hai (S).

3.72. Trong $\mathbf{P}^n$ với mục tiêu xạ ảnh $\{A_i; E\}$ cho trước, tìm giao của một siêu mặt bậc hai (S) với siêu phẳng R đi qua n đỉnh A_1, $A_2, \dots, A_n$ của mục tiêu đã cho.

3.73. Trong $\mathbf{P}^2$ với mục tiêu xạ ảnh cho trước, cho đường bậc hai (S) có phương trình:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$$

a) Chứng tỏ các đỉnh A_1, A_2, A_3 của mục tiêu nằm trên đường bậc hai (S).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (S) tại các đỉnh A_1, A_2, A_3.

c) Tìm cực điểm của các đường thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

3.74. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hình bốn cạnh toàn phần abcd ngoại tiếp một đường bậc hai (S) lần lượt tại các điểm A, B, C, D tương ứng.

Gọi $P = a \cap b$, $Q = b \cap c$, $L = c \cap d$, $M = d \cap a$.

Chứng minh rằng :

a) Các điểm chéo của abcd làm thành một tam giác mà mỗi đỉnh là điểm cực của cạnh đối diện đối với (S).

b) Các đường thẳng AC, BD, PL, MQ đồng quy.

§.10

3.75. Trong $\mathbf{P}^2$ một tam giác ABC có hai điểm A và B chạy trên hai đường thẳng a, b cố định và ba cạnh BC, CA, AB lần lượt đi qua ba điểm cố định α, β, γ. Tìm tập hợp điểm C. Xét trường hợp đặc biệt khi α, β, γ thẳng hàng.

3.76. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic (S), hai điểm A, B thuộc (S) và một điểm P không thuộc (S). Vẽ qua P một đường thẳng d thay đổi cắt (S) tại M và N. Tìm tập hợp giao điểm của các cặp đường thẳng AM và BN, AN và BM.

3.77. Trong $\mathbf{P}^2$ cho conic (S) và một đường thẳng d không có điểm chung với (S). Trên (S) ta lấy hai điểm cố định A, B. Gọi X là một điểm biến thiên trên đường thẳng d. Gọi M và N lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AX và BX với (S). Tìm tập hợp giao điểm I của AN và BM.

3.78. Chứng minh rằng nếu hai hình bốn đỉnh toàn phần có chung ba điểm chéo thì tám đỉnh của chúng nằm trên một đường cong bậc hai.

3.79. Chứng minh rằng nếu hai tam giác cùng nội tiếp một conic thì chúng cùng ngoại tiếp một conic nào đó.

3.80. Trong $\mathbf{P}^2$ cho hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp một conic (S). Gọi B_i là giao điểm của hai tiếp tuyến của (S) tại A_i và A_{i+1}(xem $A_7 = A_1$). Như vậy ta được hình lục giác $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ ngoại tiếp (S). Chứng minh rằng đường thẳng Pascal của lục giác thứ nhất là đường đối cực của điểm Brianchon của lục giác thứ hai.

3.81. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. (S) là một conic biến thiên đi qua bốn điểm đó. Tiếp tuyến của (S) tại B và C lần lượt cắt AC và BD tại B' và C'. Gọi M là giao điểm của BB' và CC'. Chứng minh rằng đường thẳng B'C' luôn luôn đi qua một điểm cố định và điểm M chạy trên một đường thẳng cố định.

3.82. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho tam giác ABC và conic (S) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng các giao điểm $P = BC \cap B'C'$, $Q = CA \cap C'A'$, $R = AB \cap A'B'$ thẳng hàng.

3.83. Trong mặt phẳng xạ ảnh cho ba điểm A, B, C nằm trên conic (S) và K là điểm không thuộc (S). Các đường thẳng KA, KB, KC lại cắt (S) tại A', B', C'. Gọi P là một điểm biến thiên trên (S). Các đường thẳng PA, PB, PC lần lượt cắt B'C', C'A', A'B' tại A", B", C". Chứng minh rằng ba điểm A", B", C" cùng nằm trên một đường thẳng cố định và đường thẳng này luôn luôn đi qua một điểm cố định.

3.84. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một tứ giác ABCD và một conic (S) thay đổi nhưng luôn luôn tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác lần lượt tại P, Q, R, S.

a) Chứng minh các đường thẳng PR và QS cùng đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm của AQ và BS.

3.85. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) đi qua ba điểm A_1, A_2, A_3 của mục tiêu xạ ảnh $\{A_1, A_2, A_3; E\}$. Các đường thẳng A_iE lại cắt (S) tại $A'_i (i = 1,2,3)$. Các tiếp tuyến của (S) tại A'_1, A'_2, A'_3 cắt các đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 lần lượt tại α, β, γ. Chứng minh rằng α, β, γ thẳng hàng.

3.86. Cho một conic (S) xác định bởi 5 điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Hãy dựng tiếp tuyến của conic tại điểm A.

b) Cho d là đường thẳng đi qua A. Hãy dựng giao điểm còn lại của d với (S).

3.87. Trong $\mathbf{P}^2$ cho một conic (S) và sáu điểm A, B, C, D, E, F thuộc (S). Chứng minh rằng ba đường thẳng Pascal của ba hình lục giác ABCDEF, ADCFEB, AFCBED đồng quy tại một điểm.

3.88. Trong mặt phẳng afin cho tam giác ABC cố định. Một parabol biến thiên tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng mỗi một trong ba đường thẳng B'C', C'A', A'B' đều đi qua một điểm cố định.

3.89. Trong mặt phẳng afin cho hình bình hành ABCD có các cạnh song song với các đường tiệm cận của một hypebol cho trước và có hai đỉnh đối diện A, C nằm trên hypebol. Chứng minh rằng hai đỉnh còn lại của hình bình hành thẳng hàng với tâm O của hypebol.

3.90. Trong mặt phẳng afin, một tiếp tuyến bất kì tiếp xúc với một hypebol cho trước tại điểm C và cắt hai đường tiệm cận tại A và B. Chứng minh rằng C là trung điểm của đoạn AB.

3.91. Trong mặt phẳng afin cho một hypebol (S) có tâm O và hai đường tiệm cận là a và b. Gọi M và N là hai điểm bất kì trên (S). Tiếp tuyến của (S) tại M và tại N lần lượt cắt a và b tại các cặp điểm A; B và C; D. Chứng minh AD // BC.

§11

3.92. Chứng minh rằng trong mặt phẳng Ơclit hai đường phân giác của góc hợp thành bởi hai đường thẳng a, b cùng với a, b làm thành một chùm điều hòa.

3.93. Hãy diễn tả các khái niệm sau đây trong mô hình xạ ảnh của mặt phẳng Ơclit:

a) Hình chữ nhật.

b) Hình vuông

c) Hình tam giác cân

d) Đường tròn cùng với đường kính và tâm của đường tròn đó.

e) Đường elip cùng với tâm và hai trục của elip đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. VĂN NHƯ CƯƠNG, KIỀU HUY LUÂN: ***Hình học cao cấp*** – Hà Nội , 1976.
2. NGUYỄN CẢNH TOÀN: ***Hình học cao cấp*** – Hà Nội, 1979.
3. NGUYỄN CÔNG QUỲ: ***Bài tập hình học cao cấp: Phần hình học xạ ảnh*** – Hà Nội, 1964.
4. VĂN NHƯ CƯƠNG, TẠ MÂN: ***Hình học afin và hình học Ơclit*** –Hà Nội, 1998.
5. LÊ KHẮC BẢO: ***Hình học giải tích*** – Hà Nội, 1977
6. NGUYỄN THÚC HÀO: ***Hình học vectơ*** – Hà Nội, 1992
7. NGUYỄN CẢNH TOÀN: ***Hình học xạ ảnh*** – Hà Nội, 1963
8. ĐOÀN QUỲNH, VĂN NHƯ CƯƠNG, HOÀNG XUÂN SÍNH: ***Đại số tuyến tính và Hình học (4 tập)*** – Hà Nội, 1989.
9. NGUYỄN VĂN ĐOÀNH, PHẠM ĐÌNH ĐÔ, TRẦN LÊ TƯỜNG: ***Bài tập hình học cao cấp tập I*** – Hà Nội, 1984.
10. KHA QUỐC ANH, PHẠM ĐÌNH ĐÔ, TẠ MÂN: ***Bài tập Hình học cao cấp tập II*** – Hà Nội, 1984
11. NGUYỄN VĂN TƯ, NGUYỄN MỘNG HY: ***Hình học cao cấp*** -Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, 1986.
12. NGUYỄN MỘNG HY: ***Bài tập Hình học cao cấp tập I và tập II*** – Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, 1986.
13. G.B. GURÉVIK: ***Hình học xạ ảnh*** (tiếng Nga). Mockba, 1960.
14. N. ÉFIMOV: ***Hình học cao cấp*** (tiếng Pháp). Moscou, 1978.
15. B.T. BAZULEB: ***Tuyển tập các bài tập về hình học*** (tiếng Nga). Mockba, 1980.
16. NGÔ THÚC LANH: ***Đại số tuyến tính*** – Hà Nội, 1970.
17. D. KLÉTÉNIK: ***Các bài toán về Hình học giải tích*** (tiếng Pháp). Moscou.
18. JEAN DIEUDONNÉ: ***Đại số tuyến tính và hình học*** (tiếng Anh). Paris, 1969.
19. L.LESIEUR: ***Đại số tuyến tính, hình học*** (tiếng Pháp). Paris, 1977.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại TP. Hồ Chí Minh
VŨ BÁ HOÀ

Biên tập nội dung :
TRẦN CHÍ HIẾU

Biên tập tái bản :
TRẦN CHÍ HIẾU

Biên tập kĩ thuật :
TRẦN THÀNH TOÀN

Trình bày bìa :
NGUYỄN HỒNG HƯNG

Sửa bản in :
THANH VÂN

HÌNH HỌC CAO CẤP
Mã số: 7K451t7 - DAI
In 1000 bản, khổ 14,5 x 20,5 cm, tại Công ty Cổ phần In Phúc Yên
Số xuất bản: 11 - 2007/CXB/242 - 2119/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2007

SÁCH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN	Đặng Đình Áng
ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH (chương trình A3)	Nguyễn Cao Thắng
GIẢI TÍCH HÀM	Đậu Thế Cấp
HÀM MỘT BIẾN PHỨC	Đậu Thế Cấp
BÀI TẬP HÀM BIẾN PHỨC	Đậu Thế Cấp
HÌNH HỌC CAO CẤP	Nguyễn Mộng Hy
BÀI TẬP HÌNH HỌC CAO CẤP	Nguyễn Mộng Hy
LÍ THUYẾT TÍCH PHÂN	Đặng Đình Áng
LÍ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ	Đinh Văn Gắng
BÀI TẬP XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ	Đinh Văn Gắng
NHẬP MÔN GIẢI TÍCH	Đặng Đình Áng
PHÉP TÍNH VI TÍCH PHÂN T1, T2	Phan Quốc Khánh
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH	Phan Quốc Khánh- Trần Huệ Nương
TOÁN CAO CẤP T1: *Phép tính vi tích phân hàm một biến và lí thuyết chuỗi*	Lê Thị Thiên Hương-
TOÁN CAO CẤP T2: *Đại số tuyến tính*	Nguyễn Viết Đông- Nguyễn Anh Tuấn-
BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP T1, T2	Lê Anh Vũ
NHỮNG BẤT NGỜ LÍ THÚ VỚI CƠ HỌC LÍ THUYẾT	Trịnh Phôi
TOÁN OLYMPIC CHO SINH VIÊN T1	Trần Lưu Cường
TOÁN OLYMPIC CHO SINH VIÊN T2	Trần Lưu Cường
VẬN TRÙ HỌC	Phan Quốc Khánh

8 934980 759400

Giá: 18.500đ