ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA SƯ PHẠM KỸ THUẬT
-----0-----

BÀI GIẢNG

HÌNH HỌA

GVC - ThS NGUYỄN ĐỘ

ĐÀ NẴNG - 2005

MỞ ĐẦU

A. MỤC ĐÍCH VÀ YÊU CẦU

1) Mục đích

Hình hoạ là một môn học thuộc lĩnh vực Hình học, nhằm:

– Nghiên cứu các phương pháp biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt mà thông thường là mặt phẳng hai chiều
– Nghiên cứu các phương pháp giải các bài toán trong không gian bằng cach giải chúng trên các hình biểu diễn phẳng đó
– Cung cấp một số kiến thức hình học cơ bản để học tiếp môn Vẽ kĩ thuật và giải quyết một số vấn đề liên quan đến chuyên môn.

2) Yêu cầu của hình biểu diễn

Hình biểu diễn phải đơn giản, rõ ràng, chính xác. Các hình biểu diễn phải tương ứng với một hình nhất định trong không gian; người ta gọi tính chất này là tính phản chuyển hay tính tương đương hình học của hình biểu diễn

3) Một số ký hiệu và quy ước

Trong bài giảng này sẽ dùng những ký hiệu và qui ước sau:

– Điểm	Chữ in như: A, B, C,...
– Đường thẳng	Chữ thường như: a,b,c,...
– Mặt phẳng	Chữ Hy lạp hoặc chữ viết hoa như: α, β, γ, δ,...A, B, C, ...
– Sự liên thuộc	Ký hiệu $\in$ như: điểm $A\in a$; đường thẳng $a \in$ mp (α), ...$b\in$mp(Q),...
– Vuông góc	$\perp$ như: $a \perp b$
– Giao	$\cap$ như: $A= d \cap l$
– Kết quả	= như: g= mp$\alpha \cap$ mpβ
– Song song	// như: d // k
– Trùng	$\equiv$ như: $A \equiv B$

B. CÁC PHÉP CHIẾU

I. PHÉP CHIẾU XUYÊN TÂM

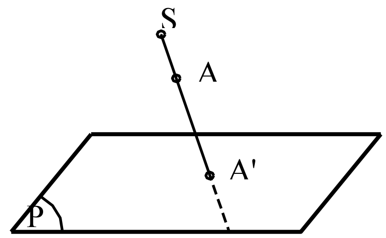
1) Cách xây dựng

Trong không gian cho mặt phẳng P và một điểm S không thuộc mp(P).(Hình 1)
Người ta thực hiện phép chiếu một điểm A bất kỳ như sau:
Vẽ đường thẳng SA, đường thẳng này cắt mặt phẳng P tại điểm A’

Ta có các định nghĩa:

– P : Mặt phẳng hình chiếu
– S : Tâm chiếu
– SA : Đường thẳng chiếu hoặc tia chiếu
– A’ : Hình chiếu xuyên tâm của điểm A từ tâm chiêú S lên mặt phẳng hình chiếu P .

Hnh 1



Phép chiếu được xây dựng như trên được gọi là ***phép chiếu xuyên tâm*** với tâm chiếu S và mặt phẳng hình chiếu P.
Một phép xuyên tâm được xác định khi biết tâm chiếu S và mặt phẳng hình chiếu P.

➢ **Chú ý**

a) Hình là một tập hợp điểm. Vậy để chiếu một hình ta chiếu một số điểm thành phần của hình đủ xác định hình đó

b) Nếu trong không gian ***Ơclic*** ta bổ sung thêm các yếu tố vô tận thì:

_ Hai đường thẳng son g song xem như cắt nhau tại một điểm ở vô tận:

$a \parallel b$ ⌡ $a \cap b = M_\infty$

Như vậy để biểu diễn một điểm ở vô tận ta biểu diễn nó bằng một phương đường thẳng

_ Hai mặt phẳng son g song xem như cắt nhau theo một đường thẳng ở vô tận

mp$\alpha \parallel$ mpβ ⌡ mp$\alpha \cap$ mp$\beta = d_\infty$

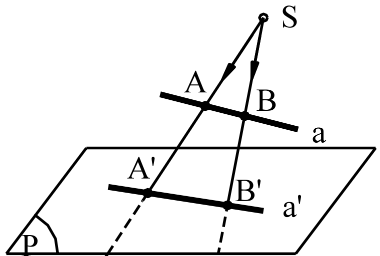
2) Tính chất

1. *Hình chiếu xuyên tâm của một đường thẳng không đi qua tâm chiếu là một đường thẳng*

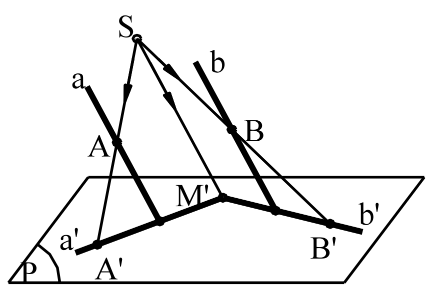
Khi chiếu đường thẳng a, các tia chiếu SA, SB hình thành một mặt phẳng (SAB) gọi là mặt phẳng chiếu. Do đó hình chiếu a’(≡A'B')= mp(SAB) ∩ mp(P) (hình 2)

2. *Hình chiếu xuyên tâm của những đường thẳng song song nói chung là những đường thẳng đồng qui*

Giả sử cho a // b nên các mp(S,a) và mp(S,b) sẽ giao với mp(P) cho các giao tuyến a’, b’ cắt nhau tại điểm M’ (M’ là hình chiếu xuyên tâm của điểm M_∞ của đường thẳng a, b) (hình 3)



Hình 2



Hình 3

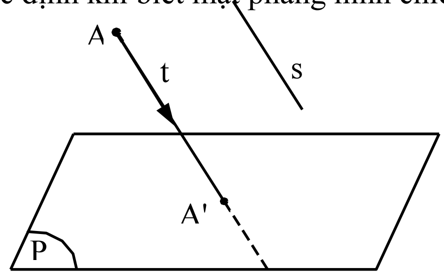
II. PHÉP CHIẾU SONG SONG

1) Cách xây dựng

Phép chiếu song song là trường hợp đặc biệt của phép chiêu xuyên tâm khi tâm chiếu S ở xa vô tận

Như vậy phép chiếu song song được xác định khi biết mặt phẳng hình chiếu P và phương chiếu s

Hnh 4



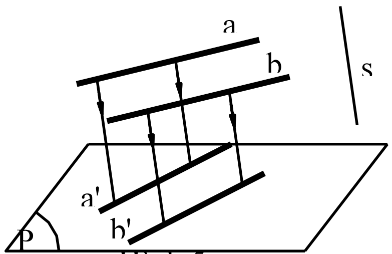
Người ta chiếu song song điểm A bằng cách qua A vẽ đường thẳng t song song với phương s, vẽ giao điểm A’ = t ∩ mp(P) thì A’ là hình chiếu song song của điểm A từ phương chiếu s lên mặt phẳng hình chiếu P (hình 4).

2) Tính chất

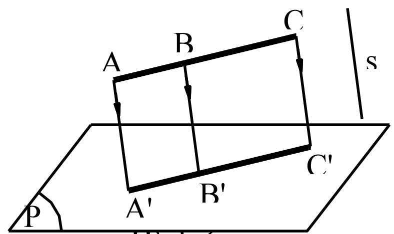
Phép chiếu song song là trường hợp đặc biệt của phép chiêu xuyên tâm nên có những tính chất của phép chiếu xuyên tâm. Ngoài ra phép chiếu song song có những tính chất sau:

1. *Hình chiếu song song của những đường thẳng không song song với phương chiếu là những đường thẳng song song.*

Giả sử cho a // b nên các mặt phẳng chiếu thuộc a, b song song nhau, do đó giao tuyến của chúng với mặt phẳng hình chiếu P là những đường thẳng song song: a' // b' (hình 5)



Hình 5



Hình 6

2. *Tỉ số đơn của ba điểm phân biệt thẳng hàng bằng tỉ số đơn của ba điểm phân biệt hình chiếu của chúng*

Cho ba điểm A, B ,C phân biệt thẳng hàng, chiếu thành ba điểm A', B', C' cũng phân biệt thẳng hàng.(hình 6). Theo định lý *Thalet*, ta có:

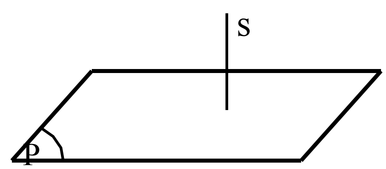
$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$$

Ký hiệu tỉ số đơn của ba điểm A,B,C như sau: (ABC) = (A'B'C')

III. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

1) Cách xây dựng

Phép chiếu vuông góc là trường hợp đặc biệt của phép chiêu song song khi phương chiếu s vuông góc với mặt phẳng hình chiếu P : $s \perp P$ (hình 7)



Hình 7

2) Tính chất

Phép chiếu vuông góc có những tính chất của phép chiếu song song; Ngoài ra còn có nhiều tính chất, chúng ta sẽ nghiên cứu ở các chương sau.

IV. NHẬN XÉT

Ta có thể dùng các phép chiếu trên để biểu diễn vật thể trong không gian lên một mặt phẳng. Tuy nhiên với mỗi hình chiêu thì chưa xác định được một vật thể duy nhất trong không gian Vì vậy một hình chiếu chưa đảm bảo được tính phản chuyển của hình biểu diễn.

- Trong các bài sau chúng ta sẽ nghiên cứu phương pháp các hình chiếu vuông góc mà ***các hình biểu diễn đảm bảo tính phản chuyển được gọi là đồ thức .***

========================

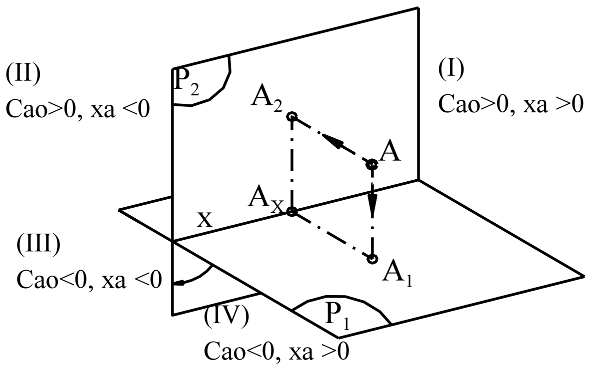
Bài 1 ĐIỂM

I. ĐỒ THỨC CỦA ĐIỂM

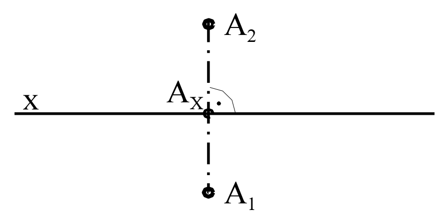
I.1 Hệ thống hai mặt phẳng hình chiếu vuông góc

a) Cách xây dựng

Trong không gian cho hai mặt phẳng P_1 và P_2 vuông góc nhau, để dễ hình dung đặt P_1 nằm ngang, P_2 thẳng đứng. Ta nhận được hệ thống hai mặt phẳng hình chiếu vuông góc (hình 1.1)



Hình 1.1



Hình 1.2

Xét một điểm A bất kỳ trong không gian.

_ Chiếu vuông góc điểm A lần lượt lên P_1 và P_2 ta nhận được các hình chiếu A_1, A_2

_ Quay mp P_1 quanh trục x một góc 90^0 theo chiều mũi tên qui ước như (hình 1.1) đến trùng P_2. Vì mp $(A\ A_1\ A_2) \perp P_1$ và P_2 nên sẽ vuông góc với trục x tại điểm A_X. Do đó sau khi quay đến vị trí mới ba điểm A_1, A_X, A_2 thẳng hàng và vuông góc trục x (hình1.2)

b) Các định nghĩa

_ P_1	Mặt phẳng hình chiếu bằng
_ P_2	Mặt phẳng hình chiếu đứng
_ $x = P_1 \cap P_2$	Trục hình chiếu
_ A_1	Hình chiếu bằng của điểm A
_ A_2	Hình chiếu đứng của điểm A
_ $A_1 A_2$ ($\perp$ x)	Đường gióng
_ $\overline{A_1 A_x}$	Độ xa của điểm A, qui ước dương nếu A_1 nằm phía dưới trục x
_ $A_2 A_x$	Độ cao của điểm A, qui ước dương nếu A_2 nằm phía trên trục x
_ (A_1, A_2)	Cặp điểm hình chiếu này gọi là đồ thức của điểm A.Thật vậy từ A_1, A_2 ta có thể dựng lại được điểm A theo thứ tự ngược lại với cách dựng đồ thức của nó

❖ Hệ thống P_1 và P_2 chia không gian ra làm 4 góc phần tư:

_ *Góc phần tư 1* - Là phần không gian nằm trên P_1 và trước P_2

_ *Góc phần tư 2* - Là phần không gian nằm trên P_1 và sau P_2

_ *Góc phần tư 3* - Là phần không gian nằm dưới P_1 và sau P_2

_ *Góc phần tư 4* - Là phần không gian nằm dưới P_1 và trước P_2

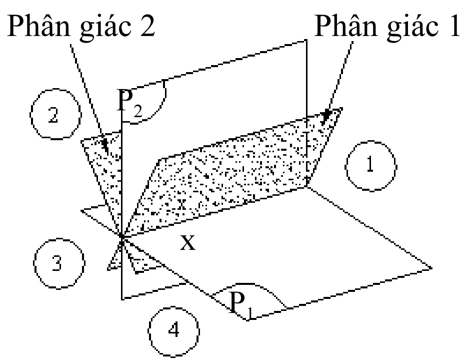
+ ***Mặt phẳng phân giác 1***. Là mặt phẳng phân giác của P_1 và P_2 đi qua góc phần tư thứ 1 và góc phần tư thứ 3.

Những điểm thuộc mặt phẳng phân giác1 có đồ thức là một cặp điểm hình chiếu đứng và hình chiếu bằng đối xứng nhau qua trục hình chiếu x

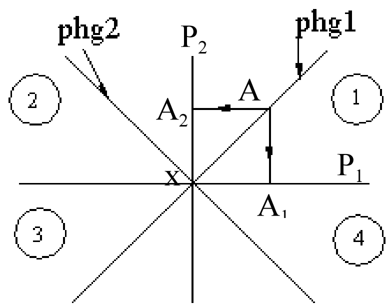
+ ***Mặt phẳng phân giác 2***. Là mặt phẳng phân giác của P_1 và P_2 đi qua góc phần tư thứ 2 và góc phần tư thứ 4.

Những điểm thuộc mặt phẳng phân giác 2 có đồ thức là một cặp điểm hình chiếu đứng và hình chiếu bằng trùng nhau

(Hình 1.3) là hình không gian biểu diễn mặt phẳng phân giác 1, mặt phẳng phân giác 2 và các góc phần tư của hệ thống hai mặt phẳng hình chiếu vuông góc P_1 và P_2



Hình 1.3



Hình 1.4

Nếu ta đặt trục hình chiếu x vuông góc với mặt phẳng của tờ giấy thì hệ thống hai mặt phẳng hình chiếu P_1 , P_2 và hai mặt phẳng phân giác 1, 2 được biểu diễn như (hình 1.4)

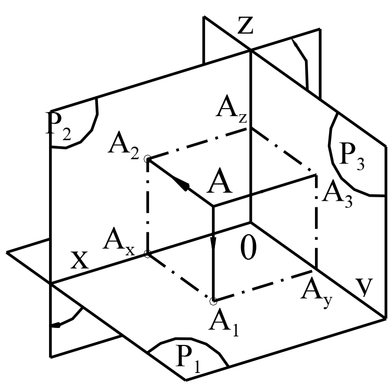
Tóm lại

Đồ thức của một điểm trong không gian là một cặp điểm hình chiếu đứng và hình chiếu bằng có thể phân biệt hoặc trùng nhau

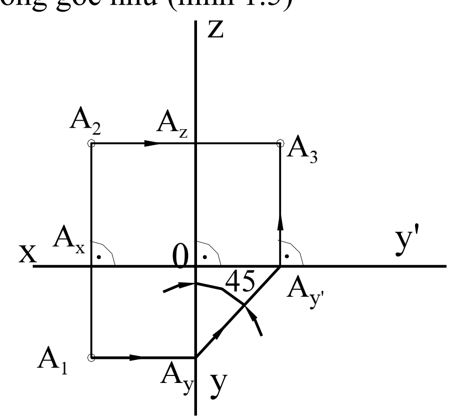
I.2 Hệ thống ba mặt phẳng hình chiếu vuông góc

a) Cách xây dựng

Thêm vào mặt phẳng P_3 vuông góc với P_1 và P_2 , thường P_3 đặt phía bên phải người quan sát, ta nhận được hệ thống ba mặt phẳng hình chiếu vuông góc như (hình 1.5)



Hình 1.5



Hình 1.6

Gọi $y = P_1 \cap P_3$; $z = P_2 \cap P_3$

Xét một điểm A bất kỳ trong không gian.

_ Chiếu vuông góc điểm A lần lượt lên các mặt phẳng P_1, P_2 , P_3 ta nhận được các hình chiếu A_1 , A_2, A_3 .

_ Quay các mp P_1 , P_3 lần lượt quanh các trục x, trục z một góc 90^0 theo chiều mũi tên qui ước như (hình 1.5). Trục y được tách ra làm hai phần, một phần trục y theo mp P_1 đến trùng với trục z, một phần trục y' theo mp P_3 đến trùng với trục x. Sau khi quay ta nhận được hình biểu diễn như (hình1.6)

b) Các định nghĩa

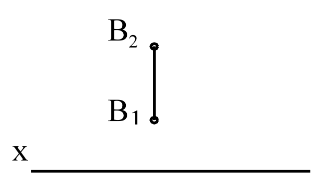
_ P_3 Mặt phẳng hình chiếu cạnh
_ $\overline{A_2 A_z}$ Độ xa cạnh của điểm A, qui ước dương nếu A_2 nằm phía bên trái trục z
_ A_3 Hình chiếu cạnh của điểm A

➢ Chú ý

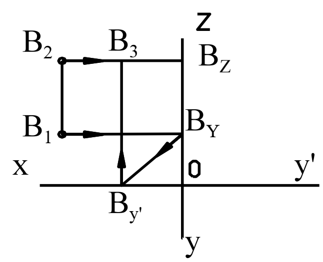
_ $\overline{A_2 A_z} = \overline{0 A_{y'}} = \overline{0 A_y} = \overline{A_x A_1}$
_ Vì hai hình chiếu biểu diễn đồ thức của một điểm nên ta dễ dàng vẽ được hình chiếu thứ ba của điểm đó

❖ Ví dụ

Cho đồ thức của điểm B (B_1, B_2) (hình 1.7a). Hãy vẽ hình chiếu thứ ba của điểm B.



Hình 1.7a



Hình 1.7b

Hình chiếu cạnh B_3 của điểm B được vẽ theo chiều mũi tên như (hình 1.7b) ,với $\overline{0B_{y'}} = \overline{0B_y}$

II. Quan hệ giữa toạ độ Đềcác và đồ thức của một điểm trong không gian

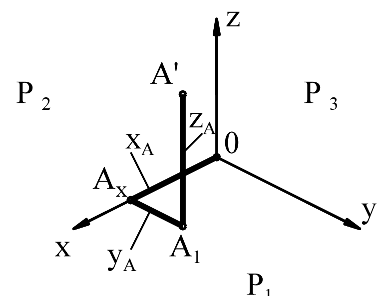
Nếu lấy ba mặt phẳng hình chiếu P_1, P_2, P_3 làm ba mặt phẳng toạ độ *Đềcác*; ba trục hình chiếu x, y, z làm ba trục toạ độ *Đềcác* (hình 1.8)

Với điểm A (x_A , y_A, z_A) bất kỳ trong không gian, ta có:

_ Hoành độ $x_A = \overline{0A_x}$: Độ xa cạnh của điểm A
_ Tung độ $y_A = \overline{A_x A_1}$: Độ xa của điểm A
_ Cao độ $z_A = \overline{A_1 A}$: Độ cao của điểm A

Như vậy

Nếu cho toạ độ Đềcác của một điểm trong không gian thì ta dễ dàng vẽ được đồ thức cuả điểm đó.



Hình 1.8

❖ Ví dụ

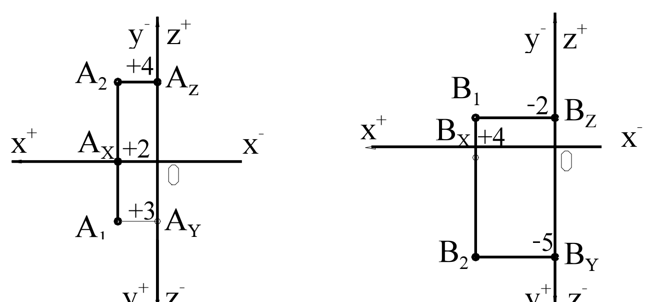
Cho toạ độ *Đềcác* của các điểm **A** (2, 3, 4); **B** (4, -2, -5). Hãy vẽ đồ thức của chúng.

Đồ thức của các điểm A, B được biểu diễn như (hình 1.9), chú ý chiều dương của các trục x, y, z .

Trong đó:

$OA_x = +2; OA_Y = +3; OA_Z = +4$

$OB_x = +4; OB_Y = -2; OB_Z = -5$



Hình 1.9

III. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

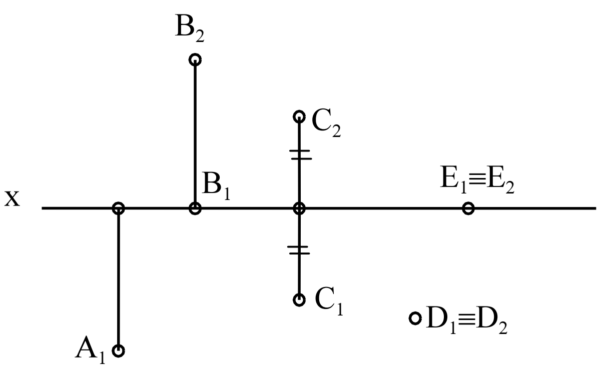
❖ Ví dụ 1

Hãy vẽ đồ thức của các điểm sau:

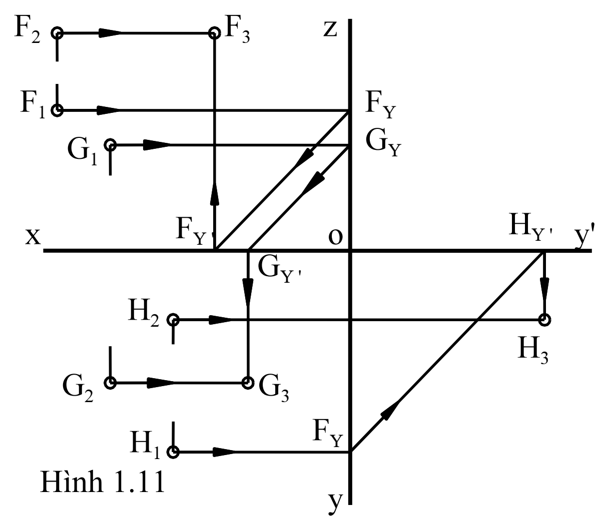
_ Điểm **A** thuộc mặt phẳng P_1
_ Điểm **B** thuộc mặt phẳng P_2
_ Điểm **C** thuộc mặt phẳng Phân giác 1
_ Điểm **D** thuộc mặt phẳng Phân giác 2
_ Điểm **E** thuộc trục hình chiếu x

Giải

_ Điểm **A** thuộc mặt phẳng P_1 nên có $A_1 \equiv A$; $A_2 \in x$
_ Điểm **B** thuộc mặt phẳng P_2 nên có $B_2 \equiv B$; $B_1 \in x$
_ Điểm **C** thuộc mặt phẳng phân giác 1 nên có C_1và C_2 đối xứng nhau qua trục x
_ Điểm **D** thuộc mặt phẳng phân giác 2 nên có $D_1 \equiv D_2$
_ Điểm **E** thuộc trục hình chiếu x nên có $E_1 \equiv E_2 \in x$; (Hình 1.10)



Hình 1.10



Hình 1.11

❖ **Ví dụ 2**

Cho đồ thức của các điểm F, G, H (hình 1.11)**.** Hãy vẽ hình chiếu cạnh của chúng và cho biết chúng thuộc góc phần tư thứ mấy?

Giải

Hình chiếu cạnh của các điểm F, G, H được vẽ theo chièu mũi tên bắt đầu đi từ hình chiếu bằng F_1, G_1, H_1 tiếp theo là mũi tên đi qua hình chiếu đứng F_2, G_2, H_2. Ta sẽ xác định được các hình chiếu cạnh F_3, G_3, H_3 ; (Hình 1.11)

_ Điểm F có độ cao dương, độ xa âm nên điểm F thuộc góc phần tư thứ 2
_ Điểm G có độ cao âm, độ xa âm nên điểm G thuộc góc phần tư thứ 3
_ Điểm H có độ cao âm, độ xa dương nên điểm H thuộc góc phần tư thứ 4

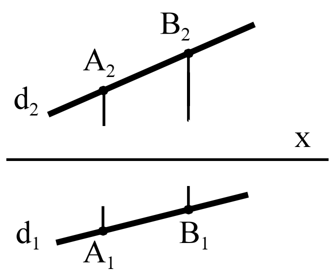
===============

Bài 2

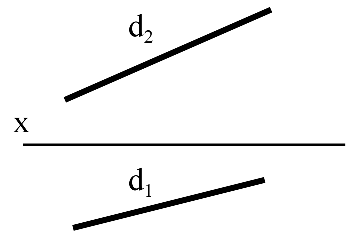
ĐƯỜNG THẲNG

I. ĐỒ THỨC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Đồ thức của đường thẳng được xác định bởi đồ thức của hai điểm thuộc đường thẳng đó.
Giả sử đường thẳng d được xác định bởi hai điểm $A(A_1, A_2)$ và $B(B_1, B_2)$ thì :
Hai điểm A_1, B_1 xác định hình chiếu bằng d_1 của đường thẳng d
Hai điểm A_2, B_2 xác định hình chiếu đứng d_2 của đường thẳng d (hình 2.1)



Hình 2.1



Hình 2.2

Nếu d là đường thẳng thường (d_1, d_2 không vuông góc trục hình chiếu x), thì khi biểu diễn đồ thức của đường thẳng d không cần biểu diễn hai điểm thuộc nó (hình 2.2) .

➢ **Chú ý**

_ Những đường thẳng thuộc mặt phẳng phân giác1 có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng đối xứng nhau qua trục hình chiếu x

_ Những đường thẳng thuộc mặt phẳng phân giác 2 có hình chiếu đứng và hình chiếu bằng trùng nhau

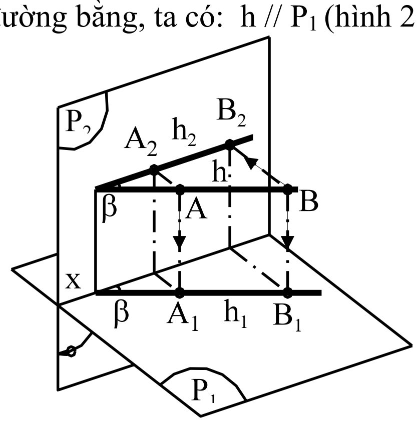
II. CÁC VỊ TRÍ ĐẶC BIỆT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

II. 1 Loại đường thẳng song song với một mặt phẳng hình chiếu

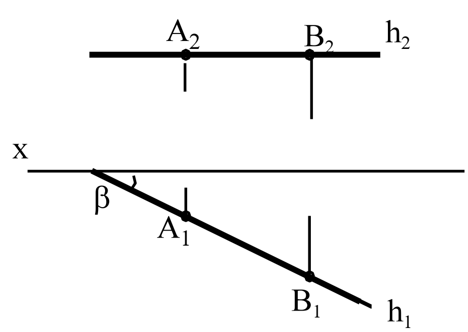
1) Đường bằng (h)

a) Định nghĩa: *Đường bằng là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu bằng*

Gọi h là đường bằng, ta có: $h // P_1$ (hình 2.3a)



Hình 2.3a



Hình 2.3b

b) Tính chất:

- *Hình chiếu đứng của đường bằng song song với trục x :* $h_2 // x$ (hình 2.3b)
- *Hình chiếu bằng của đường bằng hợp với trục x một góc bằng góc của đường bằng hợp với mặt phẳng hình chiếu đứng :* $(\widehat{h_1, x}) = (\widehat{h, P_2}) = \beta$

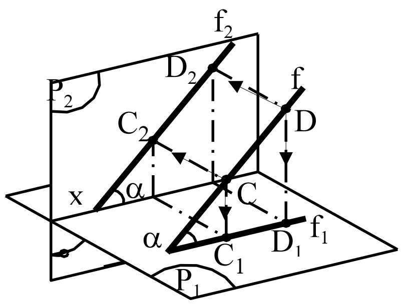
- *Hình chiếu bằng của một đoạn thẳng thuộc đường bằng, bằng chính nó.*

Giả sử A, B $\in$ h $\Rightarrow$ $A_1 B_1 = AB$ (hình 2.3b)

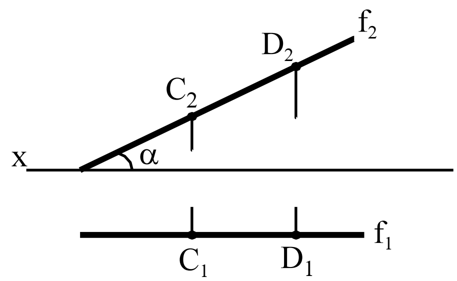
2) Đường mặt (f)

a) Định nghĩa: *Đường mặt là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng*:

Gọi f là đường mặt, ta có: $f \parallel P_2$ (hình 2.4a)



Hình 2.4a



Hình 2.4b

b) Tính chất

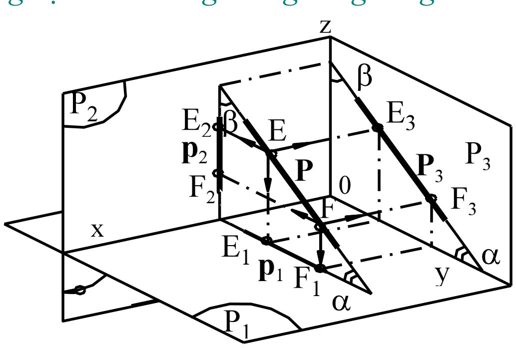
- *Hình chiếu bằng của đường mặt song song với trục x* : $f_1 \parallel x$ (hình 2.4b)
- *Hình chiếu đứng của đường mặt hợp với trục x một góc bằng góc của đường mặt hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng* : $(\widehat{f_2, x}) = (\widehat{f, P_1}) = \alpha$
- *Hình chiếu đứng của một đoạn thẳng thuộc đường mặt, bằng chính nó.*

  Giả sử C, D $\in$ f $\Rightarrow C_2 D_2 = CD$ (hình 2.4b)

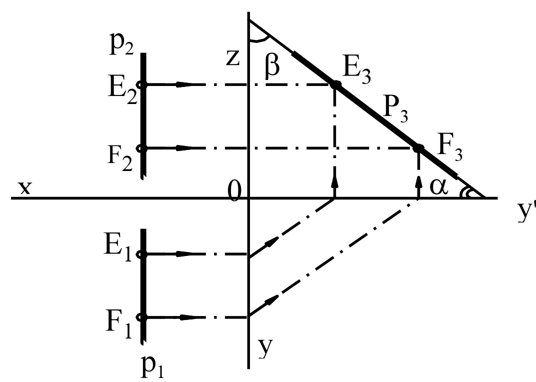
3) Đường cạnh (p)

a) Định nghĩa:

Đường cạnh là đường thẳng song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh: $p \parallel P_3$ (hình 2.5a)



Hình 2.5a



Hình 2.5b

b) Tính chất

- *Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đường cạnh, trùng nhau và vuông góc với trục x*: $p_1 \equiv p_2 \perp x$. Hai hình chiếu này chưa biểu diễn được một đường cạnh cụ thể trong không gian. Vì vậy để biểu diễn một đường cạnh cụ thể ta cần phải biểu diễn đồ thức của hai điểm thuộc đường cạnh đó; (hình 2.5b) biểu diễn đường cạnh p được xác định bằng hai điểm E, F

- *Hình chiếu cạnh của đường cạnh lần lượt hợp với trục y', z các góc bằng góc của đường cạnh hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng và mặt phẳng hình chiếu đứng* :

$$(\widehat{p_3, y'}) = (\widehat{p, P_1}) = \alpha$$
$$(\widehat{p_3, z}) = (\widehat{p, P_2}) = \beta$$

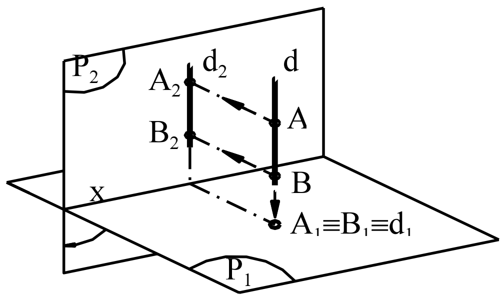
- *Hình chiếu cạnh của một đoạn thẳng thuộc đường cạnh, bằng chính nó.*

Giả sử E, F ∈ p ⇒ $E_3 F_3$ = EF (hình 2.5b)

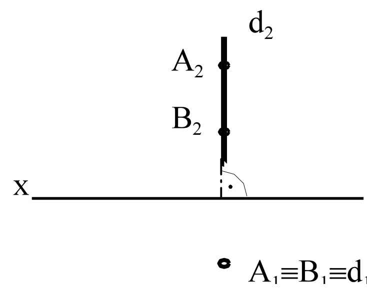
II.2 Loại đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng hình chiếu
(thì song song với hai mặt phẳng hình chiếu còn lại)

1) Đường thẳng chiếu bằng (d)
a) Định nghĩa:

Đường thẳng chiếu bằng là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng: $d \perp P_1$ (Hình 2.6a)



Hình 2.6a



Hình 2.6b

b) Tính chất

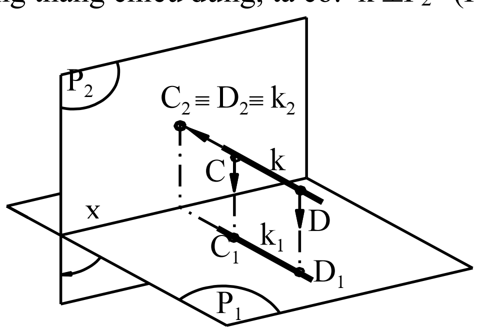
- *Hình chiếu bằng của đường thẳng chiếu bằng suy biến thành một điểm*: d_1 một điểm
- Đường thẳng chiếu bằng vừa là *đường mặt* vừa là *đường cạnh* nên có những tính chất của hai loại đường này, tức:

- *Hình chiếu đứng của đường thẳng chiếu bằng vuông góc với trục x*:: $d_2 \perp x$
- *Hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh của đoạn thẳng thuộc đường thẳng chiếu bằng, bằng nhau và bằng chính nó*. Giả sử A, B ∈ d ⇒ $A_2 B_2 = A_3 B_3$ = AB ; (hình 2.6b)

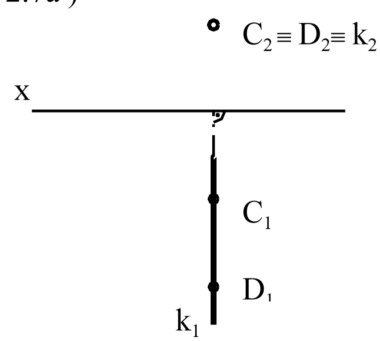
2) Đường thẳng chiếu đứng (k)
a) Định nghĩa:

Đường thẳng chiếu đứng là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Gọi k là đường thẳng chiếu đứng, ta có: $k \perp P_2$ (Hình 2.7a)



Hình 2.7a



Hình 2.7b

b) Tính chất:

- *Hình chiếu đứng của đường thẳng chiếu đứng suy biến thành một điểm*: k_2 một điểm
- Đường thẳng chiếu đứng vừa là *đường bằng* vừa là *đường cạnh* nên có những tính chất của hai loại đường này, tức:

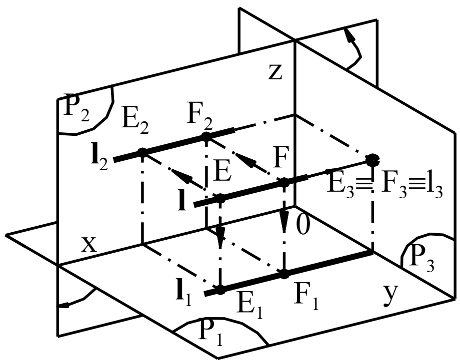
- *Hình chiếu bằng của đường thẳng chiếu đứng vuông góc với trục x*: : $k_1 \perp x$
- *Hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh của đoạn thẳng thuộc đường thẳng chiếu đứng bằng nhau và bằng chính nó*. Giả sử C, D ∈ k ⇒ $C_1 D_1 = C_3 D_3$ = CD (hình 2.7b)

3) Đường thẳng chiếu cạnh (l)

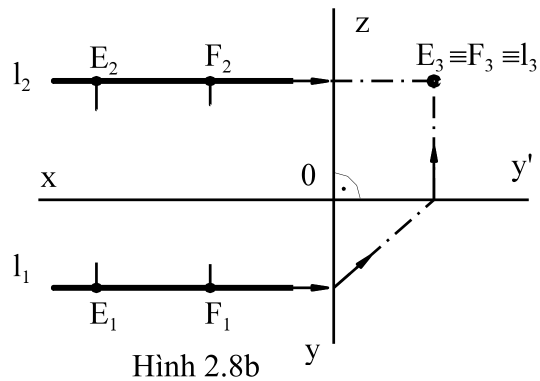
a) Định nghĩa

Đường thẳng chiếu cạnh là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu cạnh

Gọi l là đường thẳng chiếu cạnh, ta có: $l \perp P_3$ (Hình 2.8a)



Hình 2.8a



Hình 2.8b

b) Tính chất:

- *Hình chiếu cạnh của đường thẳng chiếu cạnh suy biến thành một điểm*: l_3 - một điểm
- Đường thẳng chiếu cạnh vừa là đường bằng vừa là đường mặt nên có những tính chất của hai loại đường này, tức:
- *Hình chiếu bằng và hình chiếu đứng của đường thẳng chiếu cạnh song song nhau và song song với trục x*: $l_1 // l_2 // x$.
- *Hình chiếu bằng và hình chiếu đứng của đoạn thẳng thuộc đường thẳng chiếu cạnh bằng nhau và bằng chính nó*: Giả sử $E, F \in l \Rightarrow E_1F_1 = E_2F_2 = EF$ (hình 2.8b)

III. SỰ LIÊN THUỘC CỦA ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Sau đây sẽ trình bày hai định lý không chứng mimh

1) Điểm thuộc đường thẳng thường

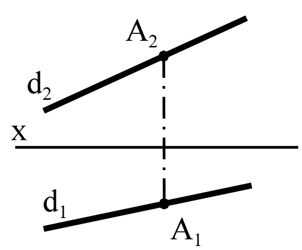
Đường thẳng thường là đường thẳng không phải là đường đường cạnh

Định lý

Điều kiện cần và đủ để một điểm thuộc một đường thẳng thường là các hình chiếu cùng tên của điểm và đường thẳng đó thuộc nhau

Cho điểm $A(A_1, A_2)$ và đường thẳng $d(d_1, d_2)$, (hình2.9); định lý trên được viết dưới dạng:

$$\boxed{A \in d \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \in d_1 \\ A_2 \in d_2 \end{cases}}$$



Hình 2.9

2) Điểm thuộc đường cạnh

Định lý

Điều kiện cần và đủ để điểm C thuộc đường cạnh AB là tỉ số đơn của ba điểm A, B, C trên các hình chiếu bằng nhau .

Cho điểm C (C_1, C_2) và đường cạnh AB (A_1B_1, A_2B_2), định lý trên được viết dưới dạng:

$$\boxed{C \in AB \Leftrightarrow (A_1\, B_1\, C_1) = (A_2\, B_2\, C_2)}$$

❖ **Ví dụ**

Cho đường cạnh AB (A_1B_1, A_2B_2) và hình chiếu đứng C_2 của điểm C; (hình 2.10). Hãy vẽ hình chiếu bằng C_1 của điểm C biết $C \in AB$.

Để vẽ điểm C_1 ta thực hiện như sau:

_ Vẽ tia A_1t bất kỳ, đặt trên đó các điểm C', B'sao cho: $A_1C' = A_2C_2$; $C'B' = C_2B_2$

_ Nối $B'B_1$

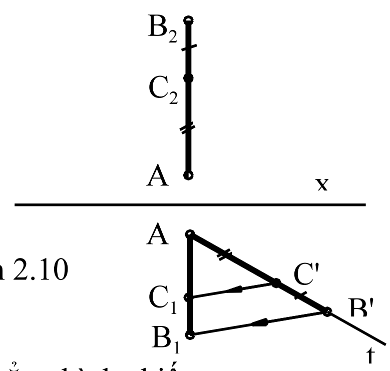
_ Đường thẳng vẽ qua điểm C'song song với phương $B'B_1$ cắt đường thẳng A_1B_1 tại điểm C_1 là điểm cần vẽ;

Thật vậy, theo định lý Thalet, ta có:

$(A_1B_1C_1) = (A_1B'C')$

Mà $(A_1B'C') = (A_2B_2C_2) \Rightarrow (A_1B_1C_1) = (A_2B_2C_2)$

thoả mãn định lý trên ; (Hình 2.10)



Hình 2.10

3) Vết của đường thẳng

Vết của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng hình chiếu

a) Vết bằng (M)

_ **Định nghĩa:**

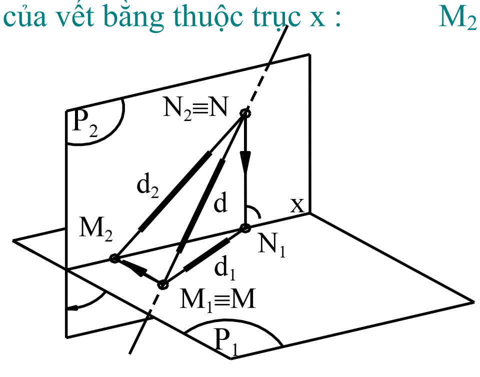
Vết bằng của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng hình chiếu bằng

Gọi M là vết bằng của đường thẳng d, ta có: $M = d \cap P_1$ (Hình 2.11a)

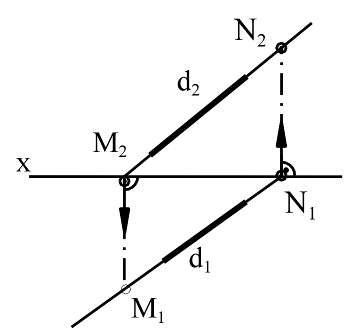
_ **Tính chất**

+ Hình chiếu bằng của vết bằng trùng với chính nó : $M_1 \equiv M$

+ Hình chiếu đứng của vết bằng thuộc trục x : $M_2 \in x$ (Hình 2.11b)



Hình 2.11a



Hình 2.11b

b) Vết đứng (N)

_ **Định nghĩa**

Vết đứng của đường thẳng là giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng hình chiếu đứng

Gọi N là vết đứng của đường thẳng d, ta có: $N = d \cap P_2$; (Hình 2.11a)

_ **Tính chất**

+ *Hình chiếu đứng của vết đứng trùng với chính nó* : $N_2 \equiv N$

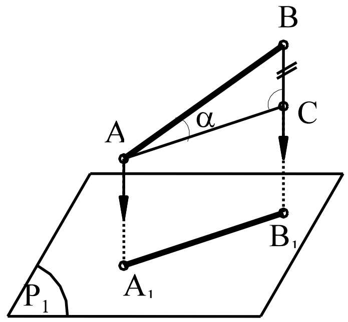
+ *Hình chiếu bằng của vết đứng thuộc trục x* : $N_1 \in x$; (hình 2.11b)

IV.PHƯƠNG PHÁP TAM GIÁC

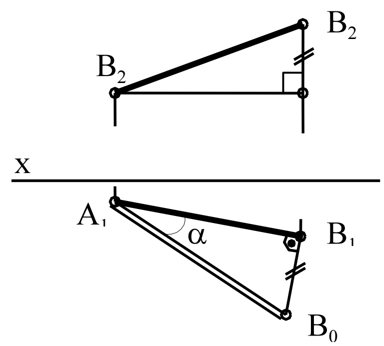
Phương pháp tam giác dùng để xác định độ dài thật của một đoạn thẳng và góc nghiêng của đoạn thẳng đó tạo với mặt phẳng hình chiếu

Giả sử có đoạn thẳng AB, chiếu vuông góc nó xuống P_1 được A_1B_1; (hình 2.12).
Kẽ AC // A_1B_1
Trong tam giác vuông ACB, ta có: AC = A_1B_1 và BC = $|\overline{BB_1} - \overline{AA_1}|$: Hiệu độ cao của A, B.
Với nhận xét này ta có thể vẽ được độ dài thật của đoạn thẳng AB như sau:

"Vẽ một tam giác vuông có một cạnh góc vuông A_1B_1 là hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB, cạnh góc vuông còn lại B_1B_0 bằng hiệu độ cao hai đầu mút A, B; thì cạnh huyền A_1B_0 là độ dài thật của đoạn thẳng cần tìm và góc nghiêng $\alpha = (\widehat{B_0A_1B_1})$ là góc của đoạn thẳng AB hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng ".



Hình 2.12



Hình 2.13

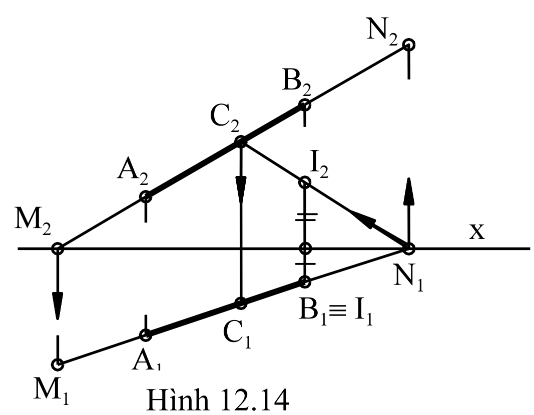
Phương pháp xác định độ dài thật của đoạn thẳng AB và góc nghiêng của đoạn thẳng đó tạo với mặt phẳng hình chiếu bằng P_1 đã nêu ở trên gọi là **phương pháp tam giác**.

Tương tự, ta cũng có thể xác định được độ dài thật của đoạn thẳng và góc nghiêng của đoạn thẳng tạo với mặt phẳng hình chiếu đứng; bằng cách vẽ một tam giác vuông có một cạnh góc vuông là ***hình chiếu đứng của đoạn thẳng***, cạnh góc vuông còn lại bằng ***hiệu độ xa*** của hai đầu mút đoạn thẳng đó

V. MỘT VÀI VÍ DỤ GIÃI SẴN

❖ Ví dụ 1

Cho đường thẳng AB. Hãy xác định:
a) Vết bằng, vết đứng của đường thẳng AB
b) Điểm C trên đường thẳng AB có độ cao gấp đôi độ xa



Hình 12.14

Giải

a) Gọi M, N lần lượt là vết bằng và vết đứng của đường thẳng AB, ta có :
_ $M_2 = A_2B_2 \cap x \Rightarrow M_1 \in A_1B_1$- là vết bằng của AB
_ $N_1 = A_1B_1 \cap x \Rightarrow N_2 \in A_2B_2$ - là vết đứng của AB

b) Gọi I là điểm có độ cao gấp đôi độ xa và $B_1 \equiv I_1$. Đường thẳng N_1I_2 cắt A_2B_2 tại điểm C_2 là hình chiếu đứng của điểm C cần tìm.
Từ $C_2 \in A_2B_2 \Rightarrow C_1 \in A_1B_1$; (Hình 2.14)

❖ Ví dụ 2

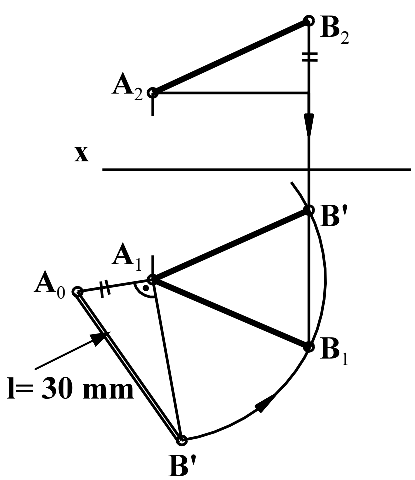
Cho điểm A(A_1, A_2) và hình chiếu đứng B_2 của điểm B. Hãy xác định hình chiếu bằng của điểm B trong các trường hợp sau:

a) Biết AB có độ dài l = 30 mm
b) Biết AB hợp với P_1 góc $\alpha < 90^0$
c) Biết AB hợp với P_2 góc $\beta < 90^0$

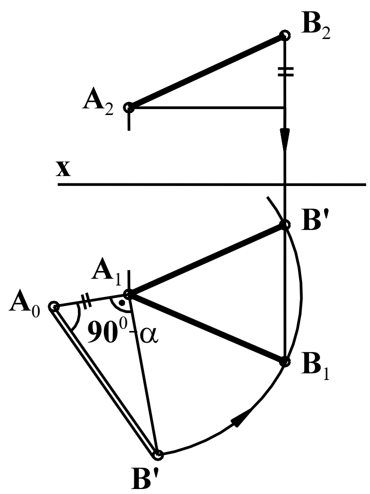
Giải

a) Vẽ tam giác vuông A_1A_0B' vuông tại A_1 có một cạnh góc vuông A_1A_0 bằng hiệu độ cao của hai điểm A, B; cạnh huyền $A_0B' = AB = 30$mm.

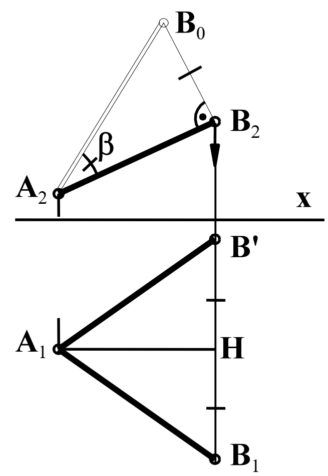
Theo phương pháp tam giác thì cạnh góc vuông còn lại A_1B' bằng hình chiếu bằng A_1B_1 của AB. Như vậy B_1 là giao điểm của đường tròn (A_1, A_1B') với đường gióng qua B_2 ;
(Hình 2.15a)



Hình 2.15a



Hình 2.15b



Hình 2.15c

b) Vẽ tam giác vuông A_1A_0B' vuông tại A_1 có một cạnh góc vuông A_1A_0 bằng hiệu độ cao của hai điểm A, B. Vì $(\widehat{AB, P_1}) = \alpha$ nên theo phương pháp tam giác thì cạnh huyền A_0B' hợp với cạnh A_1A_0 góc $90^0 - \alpha$ và cạnh góc vuông còn lại A_1B' bằng hình chiếu bằng A_1B_1 của AB.
Như vậy B_1 được vẽ là giao điểm của đường tròn (A_1, A_1B') với đường gióng qua B_2;
(Hình 2.15b)

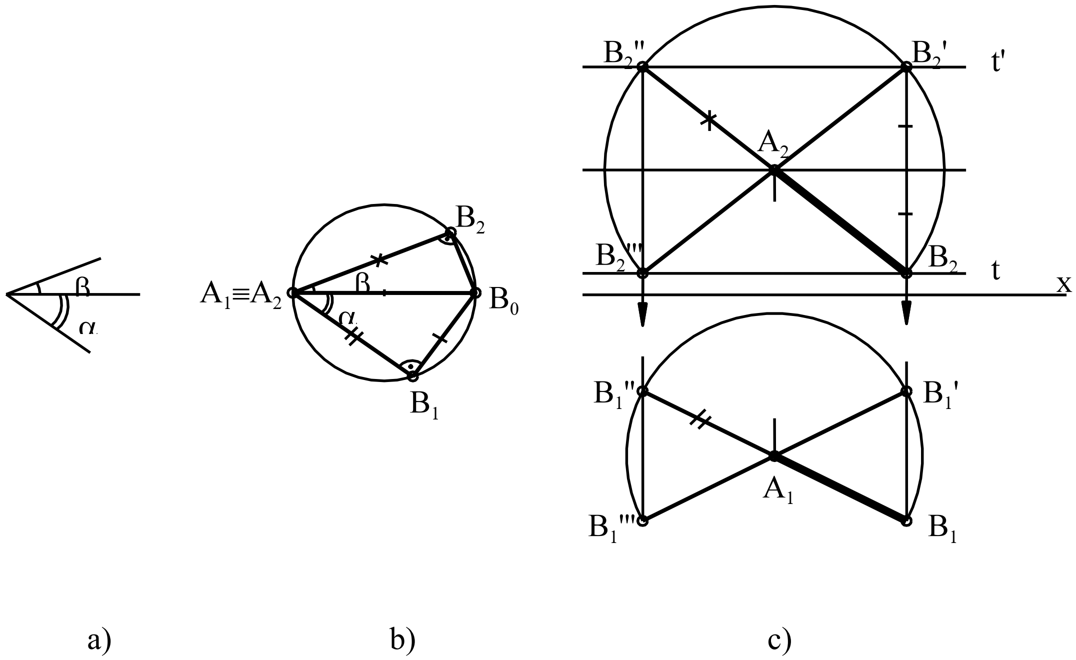
c) Vẽ tam giác vuông $A_2B_2B_0$ vuông tại B_2 có một cạnh góc vuông A_2B_2. Vì $(\widehat{AB, P_2}) = \beta$ nên theo phương pháp tam giác thì cạnh huyền A_2B_0 hợp với cạnh A_2B_2 góc β và cạnh góc vuông còn lại B_2B_0 bằng hiệu độ xa của hai điểm A, B, tức: $B_2B_0 = HB_1 = HB'_1$; (Hình 2.15c)

❖ Ví dụ 3

Cho điểm A(A_1, A_2). Hãy vẽ đường thẳng đi qua điểm A và nghiêng với mpP_1 , mpP_2 lần lượt các góc nhọn α, β như hình 2.16a

Giải

_ Giả sử có đoạn thẳng AB nghiêng với mpP_1 , mpP_2 lần lượt các góc α, β.
_ Giữa hình chiếu đứng A_2B_2, hiệu độ xa của A,B; độ dài thật của AB và góc nghiêng của AB hợp với mpP_2 liên quan nhau bởi tam giác vuông $A_2B_2B_0$; (Hình 2.16b)
_ Giữa hình chiếu bằng A_1B_1, hiệu độ cao của A,B; độ dài thật của AB và góc nghiêng của AB với mpP_1 liên quan nhau bởi tam giác vuông $A_1B_1B_0$; (Hình 2.16b)



Hình 2.16

_ Từ (Hình 2.16b), ta vẽ đồ thức của điểm B ở (Hình 2.16c) như sau:

+ Vẽ hai đường thẳng t, t' // x và cách A_2 đoạn bằng B_1B_0 (hiệu độ cao của A, B)
+ Vẽ đường tròn (A_2, A_2B_2), cắt t, t' tại 4 điểm B_2, B_2', B''$_1$, B'''$_2$ là các hình chiếu đứng của các điểm B cần dựng
+ Đường tròn (A_1, A_1B_1), cắt các đường gióng qua các điểm B_2, B_2', B''$_2$, B'''$_2$ tại 4 điểm B_1, B_1', B''$_1$, B'''$_1$ là các hình chiếu bằng của các điểm B cần dựng; (Hình 1.16c)

_ Bài toán có 4 nghiệm

(Để hiểu kỹ hơn hãy tham khảo thêm bai số17* sách "**BÀI TẬP HÌNH HOẠ GIẢI SẴN**" của cùng tác giả)

====================

Bài 3 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Ttrong không gian, hai đường thẳng có các vị trí tương đối: giao nhau, song song và chéo nhau

I. HAI ĐƯỜNG THẲNG GIAO NHAU

1) Hai đường thẳng thường giao nhau

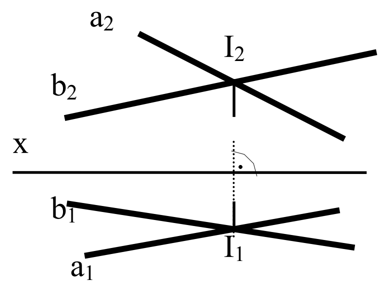
Đường thẳng thường là đường thẳng không phải là đường cạnh 35

Định lý

Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng thường giao nhau là các hình chiếu cùng tên của chúng giao nhau tại các điểm nằm trên một đường gióng

Cho hai đường thẳng a,b (hình 3.1), định lý trên được viết thành:

$$a \cap b = I \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \cap b_1 = I_1 \\ a_2 \cap b_2 = I_2 \\ I_1 I_2 \perp x \end{cases}$$



Hình 3.1

2) Một đường thẳng thường và một đường cạnh giao nhau

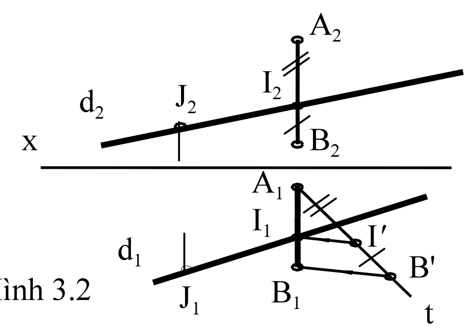
Định lý

Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng thường và một đường cạnh giao nhau là các hình chiếu cùng tên của chúng giao nhau tại các điểm thoả mản đồ thức của điểm thuộc đường cạnh đó

Cho đường thẳng thường d và đường cạnh AB,

định lý trên được viết thành:

$$d \cap AB = I \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 \cap A_1B_1 = I_1 \\ d_2 \cap A_2B_2 = I_2 \\ (A_1B_1I_1) = (A_2B_2I_2) \end{cases}$$



Hình 3.2

❖ **Ví dụ**

Cho đường cạnh AB và hình chiếu đứng d_2 của đường thẳng d. Hãy vẽ hình chiếu bằng d_1 của đường thẳng d, biết d đi qua điểm J và cắt AB tại điểm I

Giải

Hình chiếu bằng I_1 của điểm $I \in AB$ được vẽ bằng cách ứng dụng định lý ***Thalet*** như sau:

_ Vẽ tia A_1 t bất kỳ rồi đặt lên đó các đoạn $A_1I' = A_2I_2$ và $I'B' = I_2B_2$

_ Nối $B'B_1$

Đường thẳng qua I' song song với $B'B_1$ cắt A_1B_1 tại điểm I_1; ta có:$(A_1B_1I_1) = (A_2B_2I_2)$

$\Rightarrow I \in AB$. Vậy $d_1 \equiv I_1J_1$ (Hình 3.2)

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

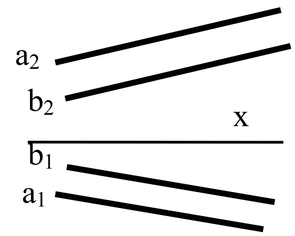
1) Hai đường thẳng thường song song

Định lý

Điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng thường song song nhau là các cặp hình chiếu cùng tên của chúng song song nhau

Cho hai đường thẳng thường a,b; (hình 3.3), định lý trên được viết thành:

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 // b_1 \\ a_2 // b_2 \end{cases}$$



Hình 3.3

Chứng minh

_ ***Điều kiện cần:*** Giả sử a // b nên các cặp mặt phẳng chiếu qua a, b song song nhau, do đó chúng sẽ cắt mặt phẳng hình chiếu bằng và mặt phẳng hình chiếu đứng theo các cặp giao tuyến song song nhau, tức là $a_1 // b_1$ và $a_2 // b_2$.

_ ***Điều kiện đủ:*** Giả sử có hai đường thẳng thường a, b thoả mãn $a_1 // b_1$ và $a_2 // b_2$. Bằng cách xây dựng ngược lại phép chiếu vuông góc, cặp mặt phẳng song song vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng qua a_1, b_1 sẽ cắt cặp mặt phẳng song song vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng qua a_2, b_2 theo hai giao tuyến a, b song song nhau .

3) Hai đường cạnh song song

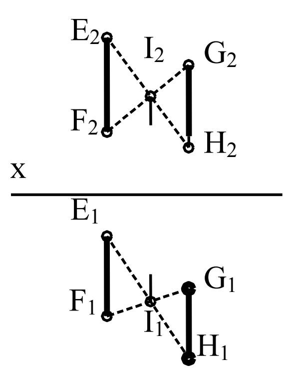
Xét hai đường cạnh có các cặp hình chiếu cùng tên không trùng nhau

Định lý

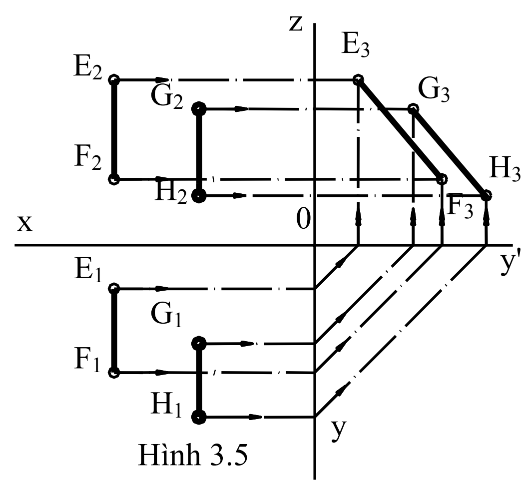
"Điều kiện cần và đủ để hai đường cạnh song song nhau là có hai đường thẳng tựa trên chúng giao nhau hoặc song song nhau "

Cho hai dường cạnh EF và GH, định lý trên được viết thành:

$$EF // GH \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} EH \cap GF = I \\ EH // GF \end{array} \right.$$



Hình 3.4



Hình 3.5

Chứng minh

_ ***Điều kiện cần:*** Giả sử EF // GH, thì bốn điểm E, F, G, H đồng phẳng nên sẽ có hai đường thẳng EH, GF tựa trên chúng giao nhau tại **I** hoặc song song nhau (ở đây xét giao nhau)

_ ***Điều kiện đủ:*** Giả sử có hai đường cạnh EF, GH có các cặp hình chiếu cùng tên không trùng nhau và có hai đường thẳng tựa trên chúng $EH \cap GF = I$ hoặc EH // GF. Thì bốn điểm E, F, G, H đồng phẳng nên hai đường cạnh đó song song nhau, tức: EF // GH (Hình 3.4)

➢ **Chú ý**

Ngoài ra ta có thể phát biểu định lý trên như sau:

"Điều kiện cần và đủ để hai đường cạnh song song nhau là hình chiếu cạnh của chúng song song nhau " (Hình 3.5)

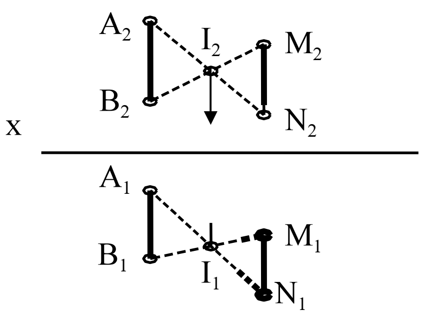
❖ Ví dụ

Cho đường cạnh AB và điểm M; (Hình 3.6). Hãy vẽ đường thẳng MN // AB

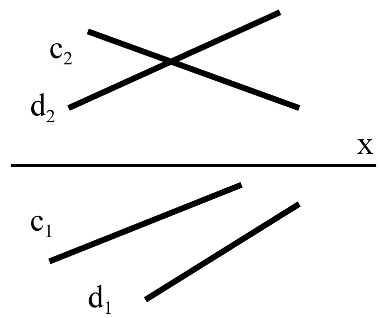
Giải

Vì AB là đường cạnh nên MN // AB cũng là đường cạnh. Trong mp(MAB), vẽ N thoả mãn MN // AB, giả sử biết trước N_2 hãy vẽ N_1 như sau:

Gọi $I = AN \cap BM$ $\begin{vmatrix} I_2 \in B_2M_2 \\ I_1 \in B_1M_1 \end{vmatrix}$ Mà $N_2 \in A_2 I_2$; $N_1 \in A_1 I_1$



Hình 3.6



Hình 3.7

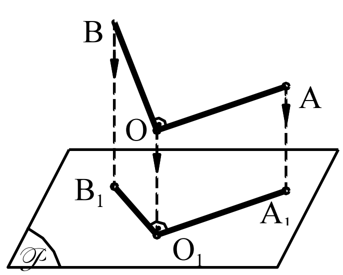
III. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Hai đường thẳng không thoả mãn song song hoặc giao nhau thì chéo nhau; (Hình 3.7) biểu diễn hai đường thẳng c, d chéo nhau.

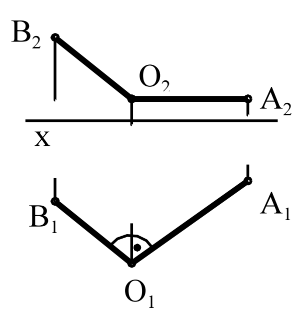
IV. HÌNH CHIẾU CỦA GÓC VUÔNG

Định lý

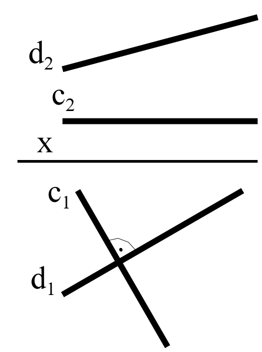
"Điều kiện cần và đủ để một góc vuông chiếu xuống mặt phẳng hình chiếu thành một góc vuông là góc vuông đó có một cạnh song song với mặt phẳng hình chiếu và cạnh góc vuông còn lại không vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đó."



Hình 3.8



Hình 3.9



Hình 3.10

Chứng minh

_ ***Điều kiện cần:*** Giả sử có $\widehat{AOB} = 90^0$ và OA // P_1 . Chiếu vuông góc xuống mặt phẳng hình chiếu bằng ta nhận được $\widehat{A_1O_1B_1}$ (Hình 3.8), cần chứng minh $\widehat{A_1O_1B_1} = 90^0$

Ta có: A_1O_1 // AO

$AO \perp OB$ và $AO \perp OO_1 \Rightarrow AO \perp mp(B\ OO_1) \Rightarrow AO \perp O_1B_1$

Mà A_1O_1 // $AO \Rightarrow A_1O_1 \perp O_1B_1$

_ ***Điều kiện đủ :*** Giả sử $\widehat{AOB} = 90^0$ chiếu vuông góc xuống mặt phẳng hình chiếu bằng được góc $\widehat{A_1O_1B_1} = 90^0$, ta cần chứng minh góc vuông AOB có một cạnh song song mặt phẳng hình chiếu bằng P_1; ta có : $A_1O_1 \perp mp(OO_1B_1)$ (1)

$B_1O_1 \perp mp(OO_1A_1A) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_1O_1 \perp AO \\ \text{Mà } BO \perp AO \end{array}\right\} \Rightarrow AO \perp mp(OO_1B_1)$ (2)

Từ (1) và (2), $\Rightarrow AO \,//\, A_1O_1$, tức $AO \,//\, mp(P_1)$

(Hình 3.9) biểu diễn đồ thức của góc vuông AOB, có cạnh $OA \,//\, mp(P_1)$.

➢ Chú ý

Định lý trên cũng đúng cho trường hợp hai đường thẳng chéo nhau mà vuông góc với nhau. (Hình 3.10) biểu diễn hai đường thẳng c, d chéo nhau mà vuông góc nhau, với $c \,//\, P_1$

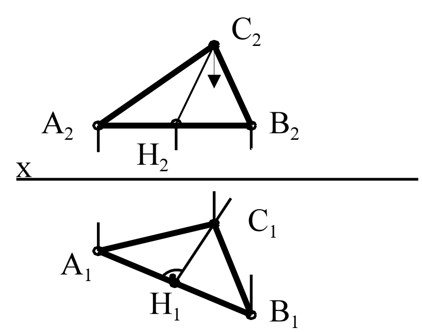
❖ Ví dụ

Hãy vẽ hình chiếu bằng C_1 của điểm C, biết rằng tam giác ABC cân tại C, cho AB là đường bằng, (Hình 3.11) .

Giải

Gọi H là trung điểm của AB, vì tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$, vả lại $AB \,//\, mp\ (P_1)$., nên theo định lý trên, ta có $C_1H_1 \perp A_1B_1$.

Từ đó ta vẽ được C_1 là giao điểm của đường gióng qua C_2 với đường thẳng $\perp A_1B_1$ tại H_1



Hình 3.11

V. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ Ví dụ 1

Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau; (Hình 3.12). Hãy vẽ đường thẳng d song song với c cắt cả a và b; trong đó $a \perp mp\ (P_1)$

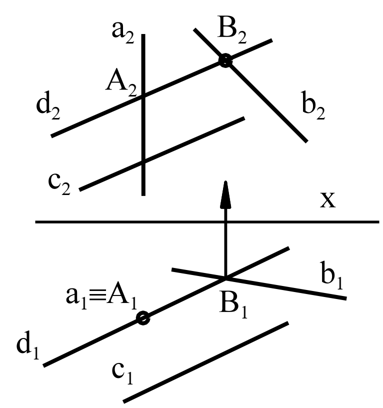
Giải

Giả sử đường thẳng d cần dựng cắt a, b lần lượt tại A, B. Vì $a \perp mp\ (P_1)$ nên $A_1 \equiv a_1$. Vả lại $d \,//\, c$ nên d_1 qua A_1 và $d_1 \,//\, c_1$

Vì $d \cap b = B$; từ $d_1 \cap b_1 = B_1 \Rightarrow B_2 \in b_2$

Vẽ d_2 qua B_2 và $d_2 \,//\, c_2$; (Hình 3.12)

Vậy d là đường thẳng thẳng cần vẽ



Hình 3.12

❖ Ví dụ 2

Cho hai đường thẳng AB, CD chéo nhau; (Hình 3.13). Hãy xác định khoảng cách và dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó trong các trường hợp sau đây:

a) $CD \perp mp\ (P_1)$; AB là đường thẳng thường

b) $CD \perp mp\ (P_2)$; AB là đường cạnh

c) $CD \perp mp\ (P_3)$; AB là đường thẳng thường

Giải

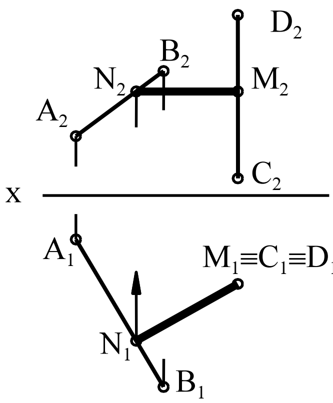
a) Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD, với $N \in AB$, $M \in CD$

Vì $CD \perp mp\ (P_1)$ nên $M_1 \equiv C_1 \equiv D_1$ và MN là đoạn đường bằng

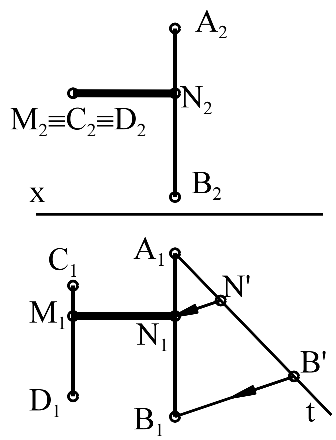
Vả lại $MN \perp AB \Rightarrow M_1N_1 \perp A_1B_1$ tại N_1. Từ $N_1 \in A_1B_1 \Rightarrow N_2 \in A_2B_2 \Rightarrow M_2N_2 \,//\, x$; (Hình 3.13a)

Kết luận: $M_1N_1 = MN$ - là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD chéo nhau

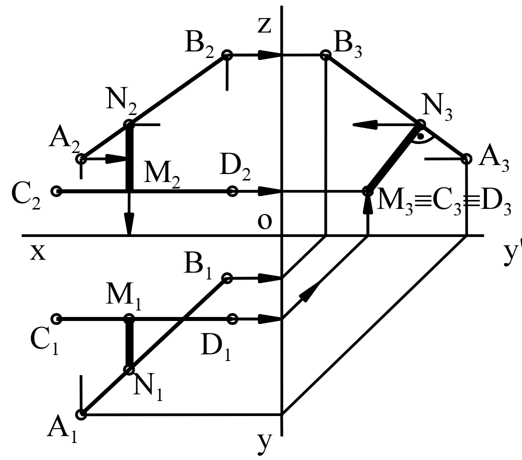
b) Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD, với $N \in AB$, $M \in CD$
Vì $CD \perp$ mp (P_2) nên $M_2 \equiv C_2 \equiv D_2$ và MN là đoạn đường mặt
Vả lại $MN \perp AB \Rightarrow M_2N_2 \perp A_2B_2$ tại N_2. Từ $N_2 \in A_2B_2 \Rightarrow N_1 \in A_1B_1 \Rightarrow M_1N_1$ // x; (Hình 3.13b)
Kết luận: $M_1N_1 = M_2N_2 = MN$ - là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD chéo nhau



Hình 3.13a



Hình 3.12b



Hình 3.12c

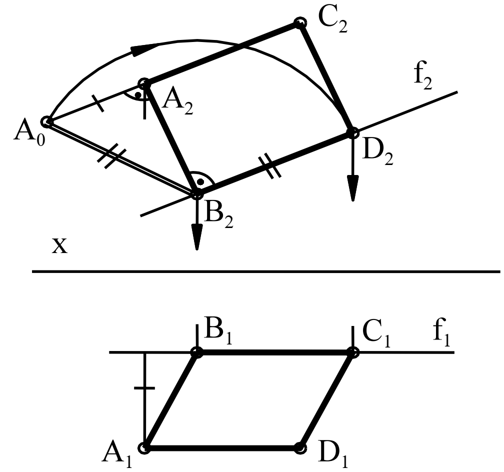
c) Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD, với $N \in AB$, $M \in CD$
Vì $CD \perp$ mp (P_3) nên $M_3 \equiv C_3 \equiv D_3$ và MN là đoạn đường cạnh
Vả lại $MN \perp AB \Rightarrow M_3N_3 \perp A_3B_3$ tại N_3.
Từ $N_3 \in A_3B_3 \Rightarrow N_2 \in A_2B_2$, M_2N_2 // z và $N_1 \in A_1B_1$, M_1N_1 // y; (Hình 3.13c)
Kết luận: $M_3N_3 = MN$ - là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD chéo nhau

❖ **Ví dụ 3**

Cho diểm A(A_1, A_2) và đường mặt f (f_1, f_2); (Hình 3.14). Hãy dựng hình vuông ABCD, biết rằng B,C thuộc đường mặt f

Giải

_ ABCD là hình vuông nên $AB \perp BC$
_ vì $B,C \in f$ nên $AB \perp f \Rightarrow A_2B_2 \perp f_2 \Rightarrow B_1 \in f_1$
_ Bằng phương pháp tam giác, xác định độ dài thật của đoạn AB là đoạn B_2A_0
_ Vì $BC = AB \Rightarrow B_2C_2 = B_2A_0 \Rightarrow C_1 \in f_1$
Vẽ D thoả mãn AD // BC; (Hình 3.14)



Hình 3.14

===================

Bài 4 MẶT PHẲNG

I . ĐỒ THỨC CỦA HAI MẶT PHẲNG

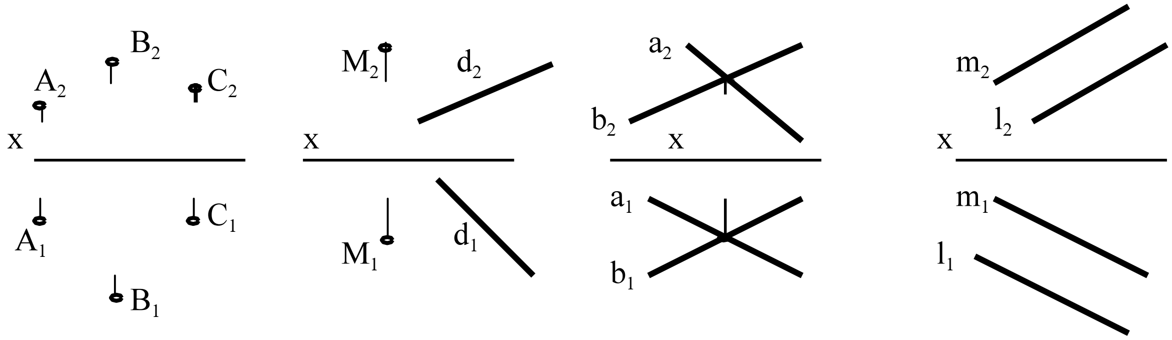
Đồ thức của mặt phẳng có thể được xác định bởi một trong các cách sau đây:

_ Ba điểm phân biệt không thẳng hàng, mp(ABC); (Hình 4.1a)

_ Một điểm và một đường thẳng không thuộc nhau, mp(M, d) ; (Hình 4.1b)

_ Hai đường thẳng giao nhau, mp(a, b) ; (Hình 4.1c)

_ Hai đường thẳng song song, mp(m, l) ; (Hình 4.1d)



a) mp(ABC) b) mp(M, d) c) mp(a, b) d) mp(m // l)

Hình 4.1

Ngoài ra người ta còn biểu diễn mặt phẳng bằng hai vết của chúng như sau:

♣ VẾT CỦA MẶT PHẲNG

Vết của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với mặt phẳng hình chiếu

1) Vết bằng của mặt phẳng

a) Định nghĩa:

Vết bằng của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với mặt phẳng hình chiếu bằng

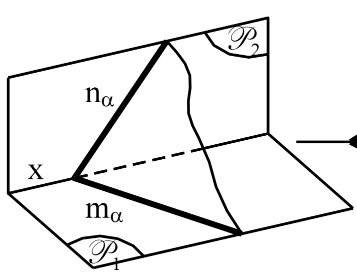
Gọi m là vết bằng của mặt phẳng α thì: $m = mp\alpha \cap mpP1$; (Hình 4.2a)

Ký hiệu : m_α

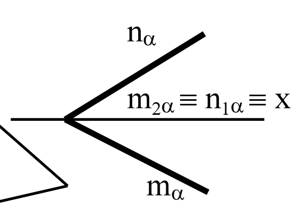
b) Tính chất

_ Hình chiếu bằng của vết bằng trùng với chính nó: $m_{1\alpha} \equiv m_\alpha$

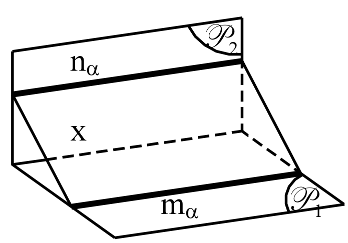
_ Hình chiếu đứng của vết bằng trùng với trục x : $m_{2\alpha} \equiv x$; (hình 4.2b)



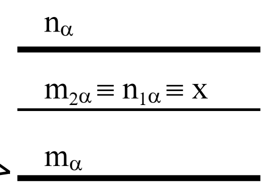
Hình 4.2a



Hình 4.2b



Hình 4.3a



Hình 4.3b

2) Vết đứng của mặt phẳng

a) Định nghĩa:

Vết đứng của mặt phẳng là giao tuyến của mặt phẳng với mặt phẳng hình chiếu đứng

Gọi n là vết đứng của mặt phẳng α thì: $n = mp\alpha \cap mpP_2$ (Hình 4.2a)

Ký hiệu : n_α

b) Tính chất

_ Hình chiếu đứng của vết đứng trùng với chính nó: $n_{2\alpha} \equiv n_\alpha$

_ Hình chiếu bằng của vết đứng trùng với trục x : $n_{1\alpha} \equiv x$; (hình 4.2b)

➢ **Chú ý**

♦ Thực chất của việc biểu diễn mặt phẳng α bằng hai vết của chúng là biểu diễn mặt phẳng α bằng hai đường thẳng m_α, n_α cắt nhau hoặc song song nhau lần lượt nằm trong mặt phẳng hình chiếu bằng và mặt phẳng hình chiếu đứng. Do đó hai vết m_α , n_α của mặt phẳng α phải cắt nhau tại một điểm nằm trên trục x (Hình 4.2a,b) hoặc song song với trục x (Hình 4.3a, b)

♦ Đường thẳng thuộc mặt phẳng thì các vết cùng tên của đường thẳng và mặt phẳng thuộc nhau

II. CÁC Vị TRÍ ĐẶC BIỆT CỦA MẶT PHẲNG

II. 1- Loại mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu

1) Mặt phẳng chiếu bằng

a) Định nghĩa:

Mặt phẳng chiếu bằng là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu bằng

Gọi α là mặt phẳng chiếu bằng, ta có: $mp\alpha \perp mpP_1$

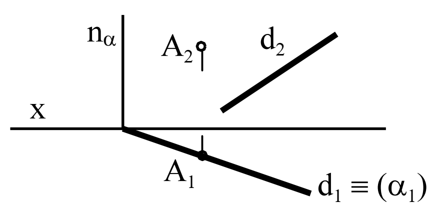
b) Tính chất

_ Hình chiếu bằng của mặt phẳng chiếu bằng suy biến thành một đường thẳng: $(\alpha_1) \rightarrow$ 1 đường thẳng

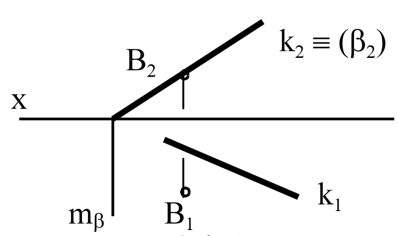
_ Hình chiếu bằng của điểm, đường thẳng thuộc mặt phẳng chiếu bằng thì thuộc đường thẳng suy biến của mặt phẳng chiếu bằng đó

Giả sử : Điểm $A \in mp\alpha$; $d \in mp\alpha \Rightarrow A_1 \in (\alpha_1)$; $d_1 \equiv (\alpha_1)$;

_ Vết đứng của mặt phẳng chiếu bằng vuông góc với trục x : $n\alpha \perp x$; (Hình 4.4)



Hình 4.4



Hình 4.5

2) Mặt phẳng chiếu đứng

a) Định nghĩa:

Mặt phẳng chiếu đứng là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng

Gọi β là mặt phẳng chiếu đứng: $mp\beta \perp mpP_2$

b) Tính chất

_ Hình chiếu đứng của mặt phẳng chiếu đứng suy biến thành một đường thẳng: $(\beta_2) \rightarrow$ 1 đường thẳng

_ Hình chiếu đứng của điểm, đường thẳng thuộc mặt phẳng chiếu đứng thì thuộc đường thẳng suy biến của mặt phẳng chiếu đứng đó

Giả sử : Điểm B ∈ mpβ ; k ∈ mpβ ⇒ $B_2 \in (\beta_2)$; $k_2 \equiv (\beta_2)$;

_ Vết bằng của mặt phẳng chiếu đứng vuông góc với trục x : $m_\beta \perp x$; (Hình 4.5)

3) Mặt phẳng chiếu cạnh

a) Định nghĩa:

Mặt phẳng chiếu cạnh là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu cạnh

Gọi γ là mặt phẳng chiếu cạnh, ta có: mpγ ⊥ mpP3

b) Tính chất

_ Hình chiếu cạnh của mặt phẳng chiếu cạnh suy biến thành một đường thẳng: $(\gamma 3) \rightarrow$ 1 đường thẳng

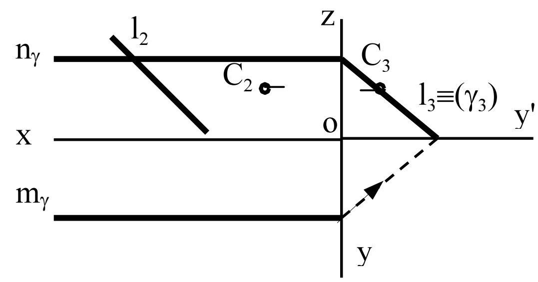
_ Hình chiếu cạnh của điểm, đường thẳng thuộc mặt phẳng chiếu cạnh thì thuộc đường thẳng suy biến của mặt phẳng chiếu cạnh đó

Giả sử : Điểm C ∈ mpγ ; l ∈ mpγ ⇒ $C_3 \in (\gamma_3)$; $l_3 \equiv (\gamma_3)$; (Hình 4.6)

_ Vết bằng và vết đứng của mặt phẳng chiếu cạnh vuông góc với trục z hay song song với trục x

$$\left[\begin{array}{l} m_\gamma, n_\gamma \perp z \\ m_\gamma // n_\gamma // x \end{array}\right.$$

(Hình 4.6) →



II.2 Loại mặt phẳng song song với một mặt phẳng hình chiếu

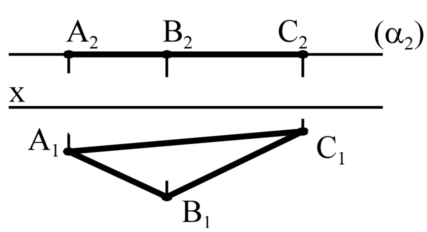
(Thì vuông góc với hai mặt phẳng hình chiếu còn lại)

1) Mặt phẳng bằng

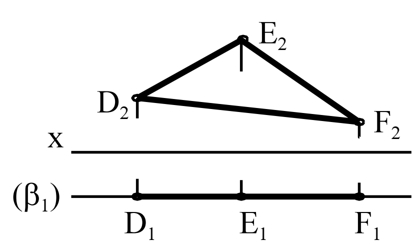
a) Định nghĩa:

Mặt phẳng bằng là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu bằng

Gọi α là mặt phẳng bằng, ta có: mpα // mpP1



Hình 4.7



Hình 4.8

b) Tính chất

_ Hình chiếu đứng của mặt phẳng bằng suy biến thành một đường thẳng song song với trục x: $(\alpha_2) // x$

_ Mặt phẳng bằng vừa là mặt phẳng chiếu đứng vừa là mặt phẳng chiếu cạnh nên có những tính chất của hai loại mặt phẳng này

Giả sử A, B, C $\in$ mp$\alpha \Rightarrow A_2, B_2, C_2 \in (\alpha_2)$

_ Hình chiếu bằng của một hình phẳng thuộc mặt phẳng bằng thì bằng chính nó

Δ ABC $\in$ mp$\alpha \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$; (Hình 4.7)

2) Mặt phẳng mặt

a) Định nghĩa

Mặt phẳng mặt là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu đứng

Gọi β là mặt phẳng mặt, ta có: mpβ // mpP_2

b) Tính chất

_ Hình chiếu bằng của mặt phẳng mặt suy biến thành một đường thẳng song song với trục x: (β_1) // x

_ Mặt phẳng mặt vừa là mặt phẳng chiếu bằng vừa là mặt phẳng chiếu cạnh nên có những tính chất của hai loại mặt phẳng này

Giả sử D, E, F $\in$ mp$\beta \Rightarrow D_1, E_1, F_1 \in (\beta_1)$

_ Hình chiếu đứng của một hình phẳng thuộc mặt phẳng mặt thì bằng chính nó

Δ DEF $\in$ mp $\beta \Rightarrow \Delta D_2E_2F_2 = \Delta DEF$; (Hình 4.8)

3) Mặt phẳng cạnh

a) Định nghĩa

Mặt phẳng cạnh là mặt phẳng song song với mặt phẳng hình chiếu cạnh

Gọi δ là mặt phẳng cạnh, ta có : mpδ // mpP_3

b) Tính chất

_ Hình chiếu bằng và hình chiếu đứng của mặt phẳng cạnh suy biến thành hai đường thẳng trùng nhau và vuông góc với trục x: $(\delta 1) \equiv (\delta 2) \perp x$

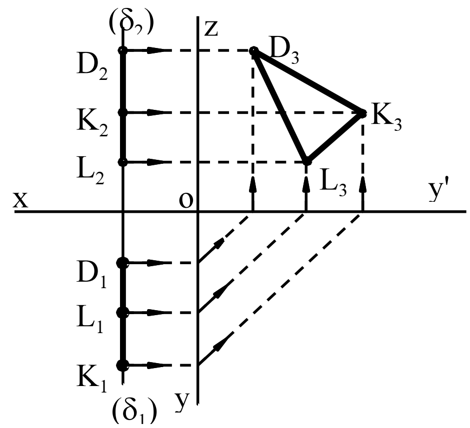
_ Mặt phẳng cạnh vừa là mặt phẳng chiếu bằng vừa là mặt phẳng chiếu đứng nên có những tính chất của hai loại mặt phẳng này

Giả sử :D, K, L $\in$ mpδ; (Hình 4.9)

$\Rightarrow D_1, K_1, L_1 \in (\delta_1)$ và $D_2, K_2, L_2 \in (\delta_2)$

_ Hình chiếu cạnh của một hình phẳng thuộc mặt phẳng cạnh thì bằng chính nó, giả sử :

Δ DKL $\in$ mp$\delta \Rightarrow \Delta D_3K_3L_3 = \Delta DKL$



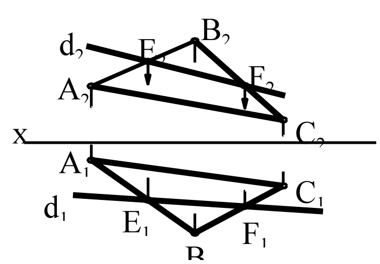
Hình 4.9

III. SỰ LIÊN THUỘC CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VỚi MẶT PHẲNG

(Bài toán cơ bản trên mặt phẳng)

Dựa vào hai tiên đề sau đây để biểu diễn sự liên thuộc của điểm, đường thẳng với mặt phẳng

1. *Một đường thẳng thuộc một mặt phẳng nếu nó có hai điểm thuộc mặt phẳng đó*
2. *Một điểm thuộc một mặt phẳng nếu nó thuộc một đường thẳng của mặt phẳng đó*



Hình 4.10

❖ Ví dụ1

Cho mặt phẳng ABC (hình 4.10). Hãy vẽ một đường thẳng d bất kỳ thuộc mặt phẳng ABC.

Giải

- Trong mặt phẳng ABC, ta lấy hai điểm bất kỳ E, F; chẳng hạn E ∈AB, F∈ AC. Hai điểm phân biệt E, F xác định đường thẳng d có đồ thức: $E_1F_1 \equiv d_1$ và $E_2F_2 \equiv d_2$
- Đường thẳng d có hai điểm E, F thuộc mp(ABC) nên theo tiên đề1 thì (d_1, d_2) là đồ thức của đường thẳng d thuộc mặt phẳng (ABC) ; (hình 4.10)

❖ Ví dụ 2

Cho mặt phẳng được xác định bỡi hai đường thẳng giao nhau a, b và hình chiếu đứng K_2 của điểm K; (hình 4.11). Hãy vẽ hình chiếu bằng K_1, biết K thuộc mặt phẳng (a, b)

Giải

Trong mp (a,b), vẽ đường thẳng g đi qua điểm K; g_2 đi qua K_2. Vì g ∈ mp(a,b) nên vẽ được g_1
Từ $K_2 \in g_2 \Rightarrow K_1 \in g_1$. Vậy (K_1, K_2) là đồ thức của điểm K thuộc mp(a,b) cần dựng

IV. CÁC ĐƯỜNG THẲNG ĐẶC BIỆT CỦA MẶT PHẲNG

1) Đường bằng của mặt phẳng

a) Định nghĩa:

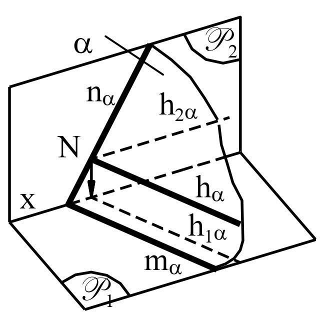
Đường bằng của mặt phẳng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và song song với mặt phẳng hình chiếu bằng

Gọi h_α là đường bằng của mặt phẳng α: $h_\alpha \in$ mpα và h_α // (P_1) ; (Hình 4.12a)

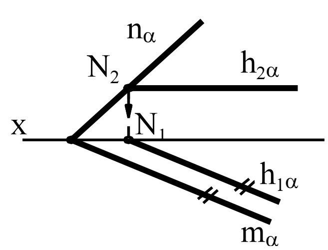
b) Tính chất

_ Hình chiếu đứng của đường bằng song song với trục x: $h_{2\alpha}$ // x ; (Hình 4.12b)
h_2 // x ; (Hình 4.13)

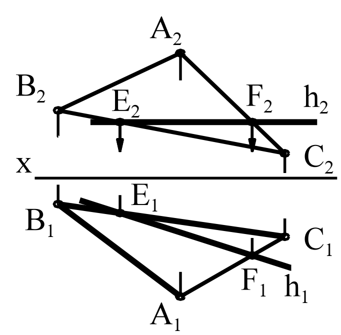
_ Hình chiếu bằng của đường bằng song song với vết bằng của mặt phẳng : $h_{1\alpha}$ // m_α



Hình 4.12a



Hình 4.12b



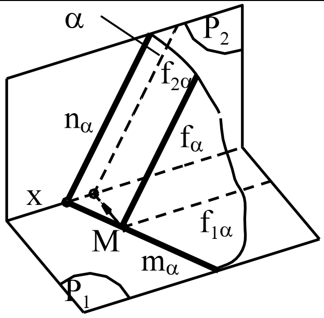
Hình 4.13

2) Đường mặt của mặt phẳng

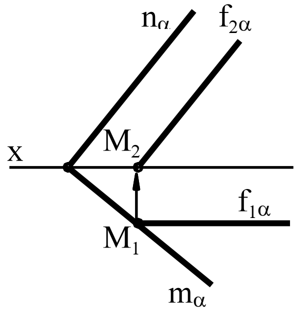
a) Định nghĩa

Đường mặt của mặt phẳng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và song song với mặt phẳng hình chiếu đứng

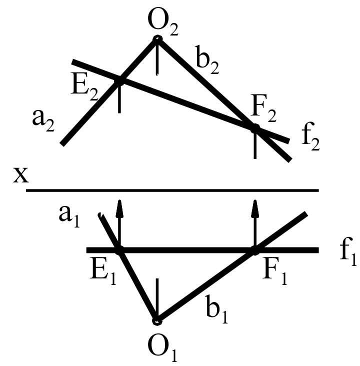
Gọi f_α là đường mặt của mặt phẳng α: $f_\alpha \in$ mpα và f_α // (P_2) ; (Hình 4.14a)



Hình 4.14a



Hình 4.14b



Hình 4.15

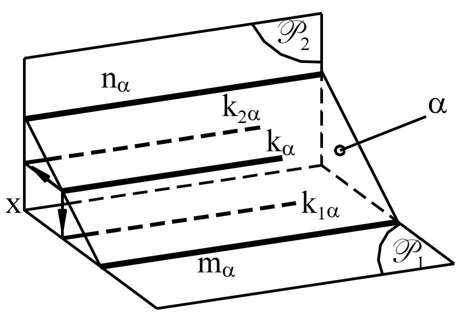
b) Tính chất

_ Hình chiếu bằng của đường mặt song song với trục x: $f_{1\alpha}$ // x ; (Hình 4.14b)
f_1 // x ; (Hình 4.15)

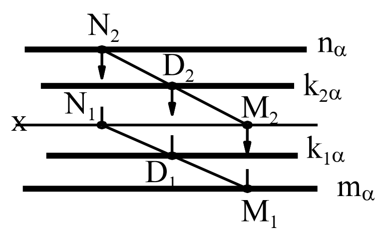
_ Hình chiếu đứng của đường mặt song song với vết đứng của mặt phẳng : $f_{2\alpha}$ // n_α

➢ Chú ý

- ♦ Đường bằng $h_\alpha \in$ mpα nên vết đứng N của đường bằng h_α thuộc vết đứng n_α của mpα
- ♦ Đường mặt $f_\alpha \in$ mpα nên vết bằng M của đường mặt f_α thuộc vết bằng m_α của mpα
- ♦ Nếu mặt phẳng α là mặt phẳng chiếu cạnh thì đường thẳng chiếu cạnh $k_\alpha \in$ mpα vừa là đường bằng vừa là đường mặt (Hình 4.16 a, b)



Hình 4.16a



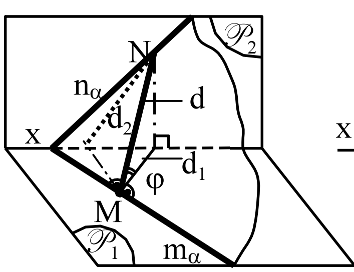
Hình 4.16b

3) Đường dốc nhất của mặt phẳng dối với mặt phẳng hình chiếu

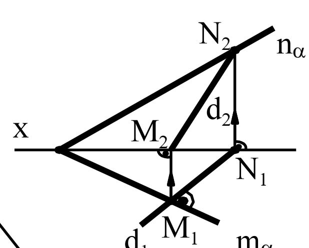
a) Đường dốc nhất của mặt phẳng dối với mặt phẳng hình chiếu bằng

♦ Định nghĩa

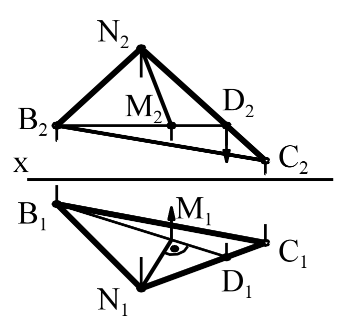
Đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu bằng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và tạo với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc lớn nhất so với các đường thẳng khác thuộc mặt phẳng đó



Hình 4.17a



Hình 4.17b



Hình 4.17c

Gọi d là đường dốc nhất của mp α đối với mặt phẳng hình chiếu bằng (Hình 4.17a)

♦ **Tính chất**

- **Đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu bằng** thì vuông góc với đường bằng (hay vết bằng) của mặt phẳng đó, nên góc vuông được bảo tồn ở hình chiếu bằng, tức $\mathbf{d \perp h\alpha\ (m\alpha) \Rightarrow d_1 \perp h_1\alpha}$ **hay** $\mathbf{d_1 \perp m_\alpha}$ (Hình 4.17b)

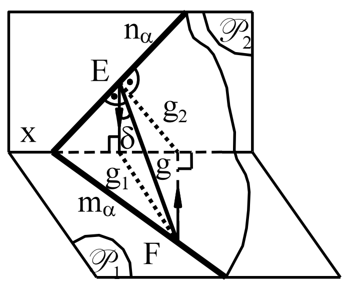
(Hình 4.17c) biểu diễn MN là đường dốc nhất của mặt phẳng (NBC) đối với mặt phẳng hình chiếu bằng, MN vuông góc với đường bằng BD $\Rightarrow N_1M_1 \perp B_1D_1$

- **Góc của đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu bằng** chính là góc của mặt phẳng đó hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng : $\mathbf{(\widehat{d, P_1}) = (\widehat{mp\alpha, P_1}) = \varphi}$

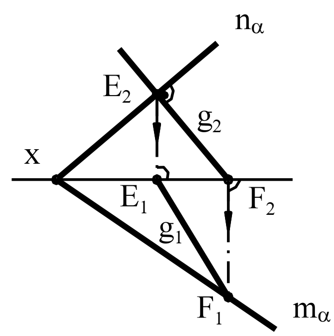
b) Đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu đứng

♦ **Định nghĩa**

Đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu đứng là đường thẳng thuộc mặt phẳng và tạo với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc lớn nhất so với các đường thẳng khác thuộc mặt phẳng đó



Hình 4.18



Hình 4.18b

Gọi g là đường dốc nhất của mpα đối với mặt phẳng hình chiếu đứng (Hình 4.18a)

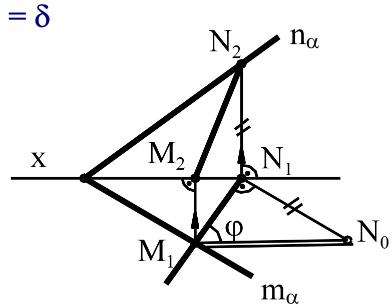
♦ **Tính chất**

- **Đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu đứng** thì vuông góc với đường mặt (hay vết đứng) của mặt phẳng đó, nên góc vuông được bảo tồn ở hình chiếu đứng, tức: $\mathbf{g \perp f_\alpha\ (n_\alpha) \Rightarrow g_2 \perp f_{2\alpha}}$ **hay** $\mathbf{g_2 \perp n_\alpha}$ (Hình 4.18b)
- **Góc của đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mặt phẳng hình chiếu đứng** chính là góc của mặt phẳng đó hợp với mặt phẳng hình chiếu đứng

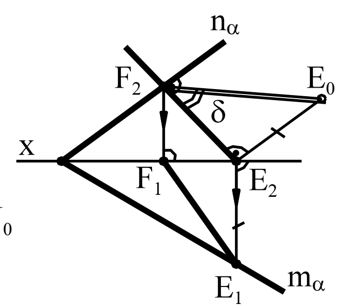
$$\mathbf{(\widehat{g, P_2}) = (\widehat{mp\alpha, P_2}) = \delta}$$

❖ **Ví dụ**

Cho mặt phẳng $\alpha(m_\alpha,\ n_\alpha)$. Hãy xác định góc nghiêng của mp α đối mặt phẳng hình chiếu bằng và đối với mặt phẳng hình chiếu đứng



Hình 4.19



Hình 4.20

Giải

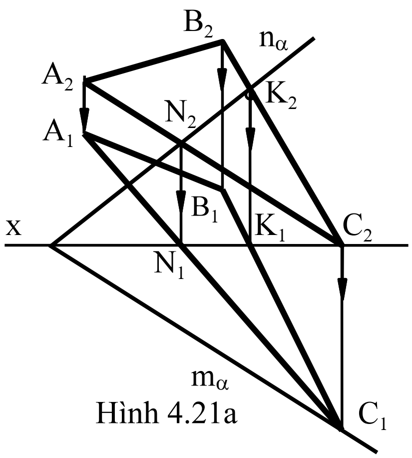
1) Vẽ đường dốc nhất MN của mpα đối với mpP_1 : $M_1N_1 \perp m_\alpha \Rightarrow M_2N_2$.
(Hình 4.19). Bằng phương pháp tam giác, xác định độ dài thật của đoạn NM là M_1N_0
$\Rightarrow\ \widehat{N_1M_1N_0} = \varphi = (\widehat{MN, P_1}) = (\widehat{mp\alpha, P_1})$

2) Vẽ đường dốc nhất EF của mp α đối với mp P_2 : $E_2F_2 \perp n_\alpha \Rightarrow E_1F_1$ (Hình 4.20).Bằng phương pháp tam giác, xác định độ dài thật của đoạn EF là F_2E_0
$\Rightarrow\ \widehat{E_2F_2E_0} = \delta = (\widehat{EF, P_2}) = (\widehat{mp\alpha, P_2})$

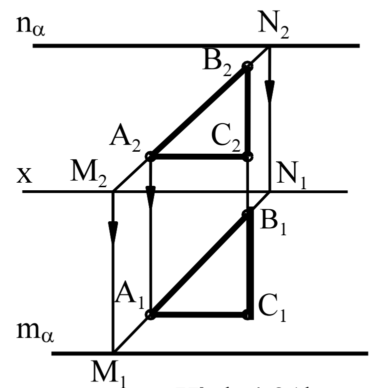
V. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ Ví dụ 1

Cho mp α (m_α, n_α) và hình chiếu đứng $A_2B_2C_2$ của tam giác ABC; (Hình 4.21a,b). Hãy vẽ hình chiếu bằng $A_1B_1C_1$, biết tam giác ABC thuộc mp α



Hình 4.21a



Hình 4.21b

Giải

a) Tam giác ABC $\in$ mpα (Hình 4.21a) nên:

_ $C_2 \in x \Rightarrow C_1 \in m_\alpha$

_ $BC \cap n_\alpha = K$; từ $K_2 = B_2C_2 \cap n_\alpha \Rightarrow K_1 \in x$ và $B_1 \in K_1C_1$

_ $AC \cap n_\alpha = N$; từ $N_2 = A_2C_2 \cap n_\alpha \Rightarrow N_1 \in x$ và $A_1 \in N_1C_1$

b) Tam giác ABC $\in$ mpα (Hình 4.21b) nên:

_ $AB \cap n_\alpha = N$ và $AB \cap m_\alpha = M$.

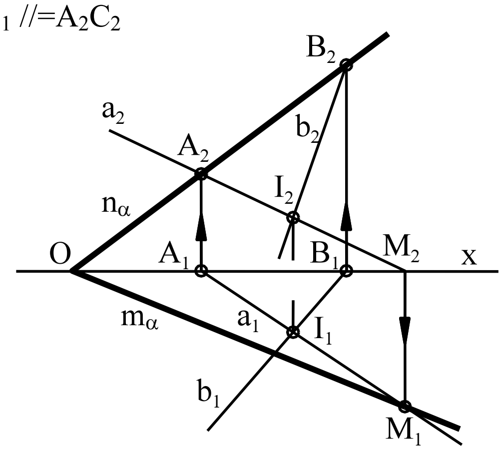
_ Từ $N_2 = A_2B_2 \cap n_\alpha \Rightarrow N_1 \in x$ và $M_2 = A_2B_2 \cap x \Rightarrow M_1 \in m_\alpha \Rightarrow A_1, B_1 \in M_1N_1$

_ Vì mpα là mặt phẳng chiếu cạnh (m_α // n_α // x) nên A_1C_1 //= A_2C_2

_ Nối B_1C_1

❖ Ví dụ 2

Cho mpα được xác định bằng hai đường thẳng a,b cắt nhau; (Hình 4.22). Hãy vẽ các vết m_α, n_α của mpα



Hình 4.22

Giải

_ Gọi A,B lần lượt là vết đứng của đường thẳng a, b.

Từ $A_1 = a_1 \cap x \Rightarrow A_2 \in a_2$; ($A \equiv A_2$)

Từ $B_1 = b_1 \cap x \Rightarrow B_2 \in b_2$; ($B \equiv B_2$)

_ Gọi M là vết bằng của đường thẳng a

Từ $M_2 = a_2 \cap x \Rightarrow M_1 \in a_1$; ($M \equiv M_1$)

_ Đường thẳng a,b $\in$ mp α nên vết đứng n_α đi qua các vết đứng A, B của đường thẳng a,b : $n_\alpha \equiv A_2B_2$

Gọi $O = n_\alpha \cap x \Rightarrow m_\alpha \equiv M_1O$; (Hình 4.22)

❖ Ví dụ 3

Cho đường thẳng d. Hãy dựng mặt phẳng thường và mặt phẳng bằng vết nhận đường thẳng d làm đường dốc nhất của mặt phẳng:

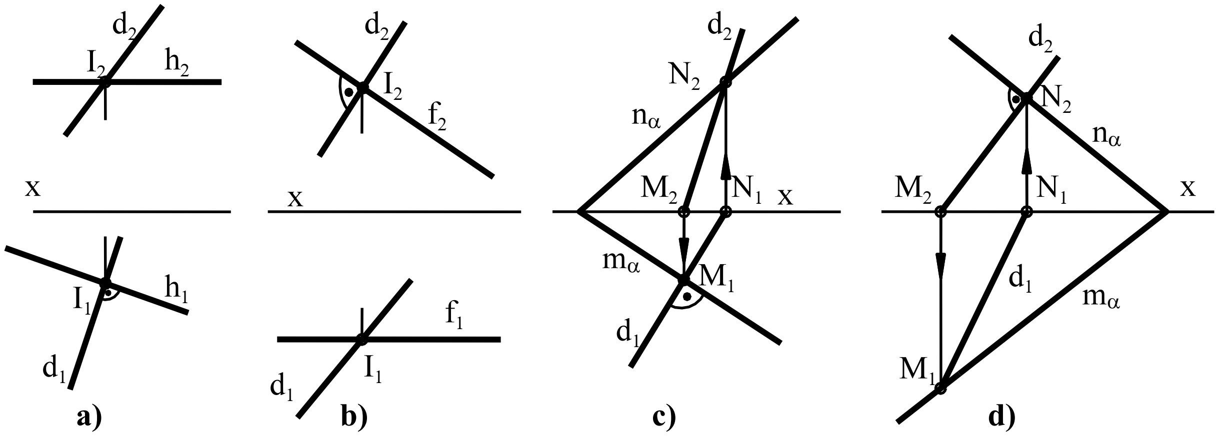
a) Đối với mp P_1

b) Đối với mp P_2

Giải

a) Vẽ đường bằng h ⊥ d tại I ⇒ $h_1 \perp d_1$ tại I_1 ⇒ mp(d,h) nhận đường thẳng d làm đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mpP_1;(Hình 4.23a)

b) Vẽ đường mặt f ⊥ d tại I ⇒ $f_2 \perp d_2$ tại I_2 ⇒ mp(d, f) nhận đường thẳng d làm đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mp P_2 ;(Hình 4.23b)



Hình 4.23

c) Vẽ M, N lần lượt là vết bằng, vết đứng của đường thẳng d; mpα nhận đường thẳng d làm đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mpP_1 nên $m_\alpha \perp d_1$ tại M_1 ⇒ n_α đi qua N_2; (Hình 4.23c)

d) Tương tự, mpα nhận đường thẳng d làm đường dốc nhất của mặt phẳng đối với mp P_2 nên $n_\alpha \perp d_2$ tại N_2 ⇒ m_α đi qua M_1 và đi qua giao điểm của n_α với trục x; (Hình 4.23d)

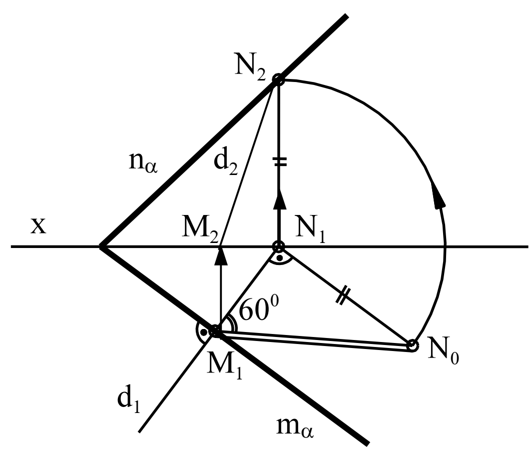
❖ Ví dụ 4

Cho vết bằng m_α của mpα. Hãy vẽ vết đứng n_α, biết rằng mpα nghiêng với mp P_1 góc 60^0

Giải

Ta biết rằng góc nghiêng của mpα đối với mp P_1 cũng chính là góc của đường dốc nhất của mpα đó đối với mp P_1. Vì vậy ta vẽ đường thẳng d dốc nhất của mpα đối với mp P_1

- $d_1 \perp m_\alpha$ tại M_1 và cắt trục x tại N_1, ⇒ $M_2 \in$ x.
- Ta biết rằng mpα tạo với mp P_1 góc 60^0nên d tạo với mpP_1 góc 60^0.Vẽ tam giác vuông $M_1N_1N_0$ có một cạnh góc vuông M_1N_1, cạnh huyền M_1N_0 tạo với M_1N_1 góc 60^0
- Theo phương pháp tam giác thì cạnh góc vuông còn lại N_1N_0 bằng hiệu độ cao của M, N; tức : $N_1N_2 = N_1N_0 \Rightarrow d_2 \equiv M_2N_2$
- Vậy n_α đi qua N_2 và qua giao điểm của m_α với trục x ; (Hình 4.24)



Hình 4.24

=============

Bài 5 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Trong không gian hai mặt phẳng có các vị trí tương đối: giao nhau hoặc song song

I. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định lý

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng song song nhau là trong mặt phẳng này chứa hai đường thẳng giao nhau lần lượt song song với hai đường thẳng giao nhau thuộc mặt phẳng kia

❖ **Ví dụ**

Cho mặt phẳng (a,b) và điểm M. Qua M hãy dựng mp(c,d) // mp(a,b)

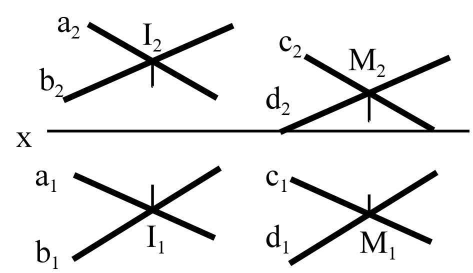
Giải

Qua điểm M vẽ hai đường thẳng c, d:

_ c // a $\Rightarrow$ c_1 // a_1 và c_2 // a_2

_ d // b $\Rightarrow$ d_1 // b_1 và d_2 // b_2

Vậy mp(c, d) // mp(a,b) là mặt phẳng cần dựng



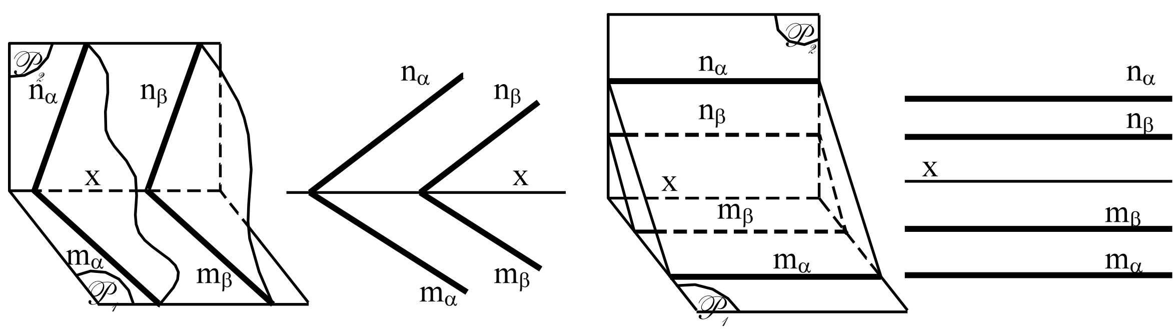
Hình 5.1

➢ **Chú ý**

♦ Hai mặt phẳng song song nhau thì các vết cùng tên của chúng song song

Giả sử : mpα // mpβ $\Rightarrow m_\alpha$ // m_β và n_α // n_β ; (Hình 5.2)

♦ Điều ngược lại chỉ đúng khi chúng là mặt phẳng thường, còn mặt phẳng chiếu cạnh thì chưa chắc



Hình 5.2

II. HAI MẶT PHẲNG GIAO NHAU

Nội dung của phần này là vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng

1) Trường hợp biết một hình chiếu của giao tuyến

a) Nếu cả hai mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu cùng tên, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao tuyến suy biến thành một điểm chính là giao điểm của hai đường thẳng suy biến của hai mặt phẳng chiếu đó

_ Hình chiếu còn lại của giao tuyến đi qua điểm suy biến đó và vuông góc với trục hình chiếu .

❖ **Ví dụ**

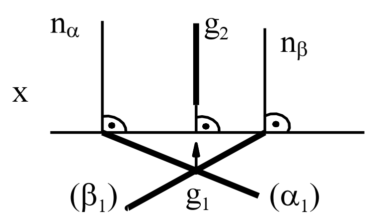
Hãy vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng α, β chiếu bằng (Hình 5.3)

Giải

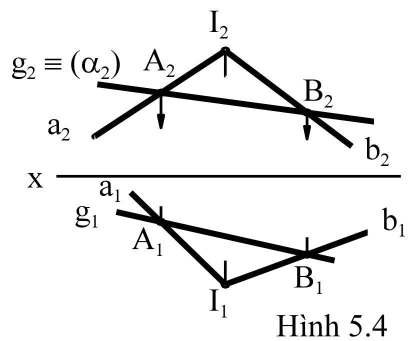
Gọi $g = mp\alpha \cap mp\beta$.

Vì mp α và mpβ $\perp P_1$ nên giao tuyến g của chúng vuông góc mpP_1 ; có hình chiếu bằng $g_1 = (\alpha_1) \cap (\beta_1) \rightarrow$ 1 điểm

Hình chiếu đứng của giao tuyến : $g_2 \perp x$



Hình 5.3



Hình 5.4

b) Nếu một trong hai mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao tuyến trùng với đường thẳng suy biến của mặt phẳng chiếu đó.

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của giao tuyến ta áp dụng bài toán đường thẳng thuộc mặt phẳng không chiếu.

❖ **Ví dụ**

Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng (a, b) với mặt phẳng α chiếu đứng ; (Hình 5.4)

Giải

Gọi $g = mp\alpha \cap mp(a, b)$.

Vì mp $\alpha \perp P_2$ nên $g_2 \equiv (\alpha_2)$.

Theo trên, $g \in mp(a, b)$ nên g sẽ cắt a, b lần lượt tại các điểm A, B. Do đó $g_1 \equiv A_1B_1$

2) Trường hợp tổng quát

Để vẽ giao tuyến **g** của hai mặt phẳng α, β bất kỳ (Hình 5.5). Ta phải tìm hai điểm chung của chúng bằng cách dùng hai mặt phẳng phụ trợ. Trình tự giải như sau:

1) Dựng mặt phẳng φ phu trợ (φ thường là mặt phẳng chiếu) cắt cả mpα và mp β

2) Vẽ hai giao tuyến phụ: $a = mp\varphi \cap mp\alpha$

và $b = mp\varphi \cap mp\beta$

3) Vẽ giao điểm: $M = a \cap b$, là một điểm thuộc giao tuyến **g**

Tương tự, vẽ mp φ' phu trợ thứ hai [thường (φ') // (φ)], ta tìm được điểm thứ hai $N \in g$

Vậy

$$\boxed{g \equiv MN = mp\alpha \cap mp\beta}$$

❖ **Ví dụ**

Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng (c, d) với mặt phẳng α (m_α, n_α) (Hình 5.6)

Giải

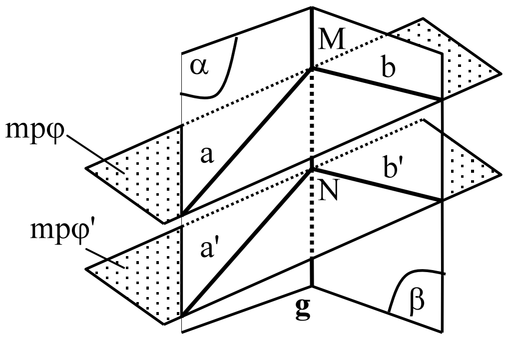
_ Dựng mpφ - làm mặt phẳng bằng phụ trợ (cũng là mặt phẳng chiếu đứng)

_ Vẽ hai đường bằng giao tuyến phụ:

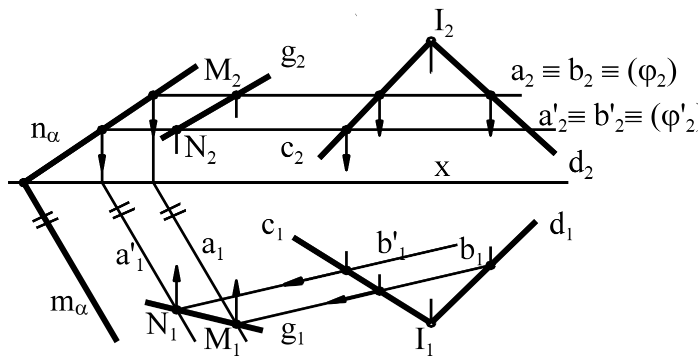
\+ $a = mp\varphi \cap mp\alpha$; Vì mp $\varphi \perp P_2$ nên $a_2 \equiv (\varphi_2) \Rightarrow a_1 // m_\alpha$

\+ $b = mp\varphi \cap mp(c, d)$; Vì $mp\varphi \perp P_2$ nên $b_2 \equiv (\varphi_2) \Rightarrow b_1$

_ Vẽ giao điểm $M = a \cap b$; Từ $a_1 \cap b_1 = M_1 \Rightarrow M_2 \in a_2$



Hình 5.5



Hình 5.6

T□□ng t□

_ Dựng mp $\varphi' // mp\varphi$ - làm mặt phẳng phụ trợ

_ Vẽ hai đường bằng giao tuyến phụ:

\+ $a' = mp\varphi' \cap mp\alpha$; Vì $mp\varphi' \perp P_2$ nên $a'_2 \equiv (\varphi'_2) \Rightarrow a'_1 // a_1$

\+ $b' = mp\varphi' \cap mp(c, d)$; Vì $mp\varphi' \perp P_2$ nên $b'_2 \equiv (\varphi'_2) \Rightarrow b'_1 // b_1$

_ Vẽ giao điểm $N = a' \cap b'$; Từ $a'_1 \cap b'_1 = N_1 \Rightarrow N_2 \in a'_2$

Kết luận: $g \equiv MN = mp\alpha \cap mp(c, d)$

III. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ Ví dụ 1

Hãy vẽ giao tuyến của mp α và mpβ; được cho trong các trường hợp ở (Hình 5.7a,b,c)

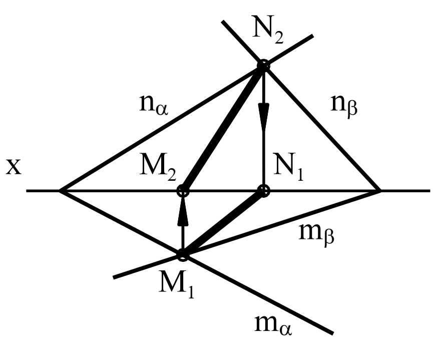
Giải

a) Vì $m_\alpha, m_\beta \in P_1 \Rightarrow m_\alpha \cap m_\beta = M$ thuộc giao tuyến của (α) và (β).

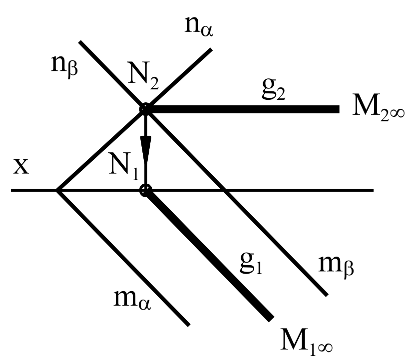
Từ $M_1 = m_\alpha \cap m_\beta \Rightarrow M_2 \in x$

Và $n_\alpha, n_\beta \in P_2 \Rightarrow n_\alpha \cap n_\beta = N$ thuộc giao tuyến của (α) và (β). Từ $N_2 = n_\alpha \cap n_\beta \Rightarrow N_1 \in x$

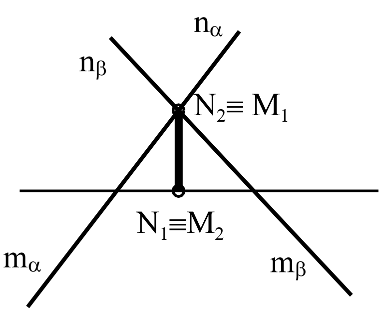
Vậy $MN = mp\alpha \cap mp\beta$; (Hình 5.7a)



Hình 5.7a



Hình 5.7b



Hình 5.7c

b) Tương tự như trên, vì $m_\alpha // m_\beta \Rightarrow m_\alpha \cap m_\beta = M_\infty$

$\Rightarrow mp\alpha \cap mp\beta = NM_\infty \equiv g$ (g là đường bằng của mpα và mpβ); (Hình 5.7b)

c) Tương tự như trên $\Rightarrow mp\alpha \cap mp\beta = NM$ - là đường cạnh ; (Hình 5.7c)

❖ Ví dụ 2

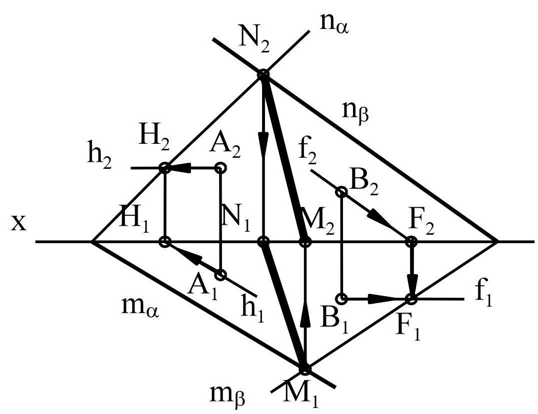
Hãy vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng : mpα (m_α, A) và mpβ (n_β, B) ; (Hình 5.7)

Giải

_ Qua điểm A$\in$ mpα, vẽ đường bằng h và vẽ vết đứng H của h $\Rightarrow$ Vết đứng n_α di qua H_2và qua giao điểm của m_α với trục x

_ Qua điểm B$\in$ mpβ, vẽ đường mặt f và vẽ vết đứng F của f $\Rightarrow$ Vết bằng m_β đi qua F_1 và qua giao điểm của n_β với trục x

Vẽ giao tuyến MN = mp $\alpha \cap$ mpβ ; (Hình 5.7)



Hình 5.7

=====================

Bài 6 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẲNG

Định lý

Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng song song với một mặt phẳng là đường thẳng đó song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó

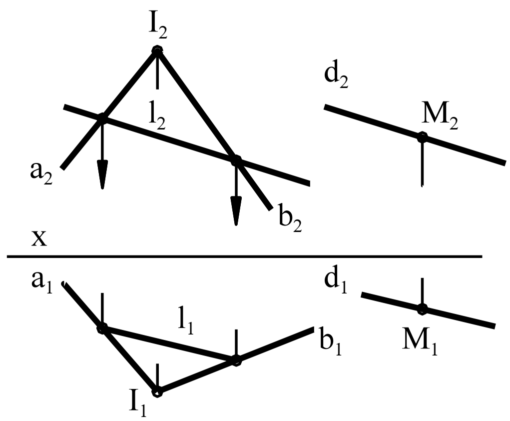
❖ **Ví dụ**

Cho mp(a, b) và điểm M; (Hình 6.1). Qua M, hãy dựng đường thẳng d // mp(a, b)

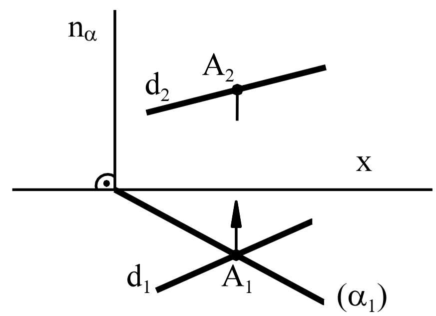
Giải

Trong mặt phẳng (a,b), vẽ đường thẳng l.

Qua điểm M vẽ đường thẳng d // l $\Rightarrow$ d_1 // l_1 và d_2 // l_2 Theo định lý trên thì d // mp(a, b)



Hình 6.1



Hình 6.2

II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG GIAO NHAU

Nội dung của phần này là vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng

1) Trường hợp biết một hình chiếu của giao điểm

***a)* Nếu mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu, đường thẳng bất kỳ**, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao điểm là giao của đường thẳng suy biến của mặt phẳng chiếu đó với hình chiếu cùng tên của đường thẳng

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của giao điểm, ta áp dụng bài toán diểm thuộc đường thẳng

❖ **Ví dụ**

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng α chiếu bằng (Hình 6.2)

Giải

Gọi A = d $\cap$ mpα $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} A \in mp\alpha,\ \text{vì mp}\ \alpha \perp P_1\ \text{nên}\ A_1 \in (\alpha_1) \\ A \in d \Rightarrow A_1 \in d_1 \end{array}\right.$

Vậy $A_1 = (\alpha_1) \cap d_1 \Rightarrow A_2 \in d_2$; (Hình 6.2)

***b)* Nếu đường thẳng đã cho là đường thẳng chiếu, mặt phẳng bất ky,** thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao điểm trùng với điểm suy biến của đường thẳng chiếu đó

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của giao điểm, ta áp dụng bài toán điểm thuộc mặt phẳng

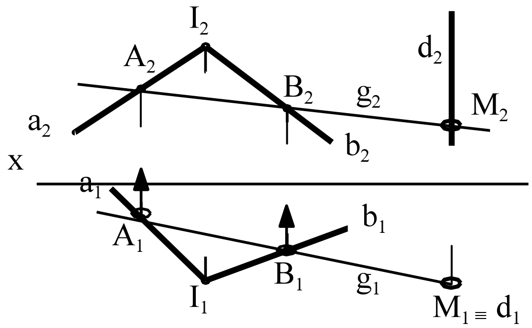
❖ Ví dụ

Hãy vẽ giao điểm của mp(a, b) với đường thẳng d chiếu bằng; (Hình 6.3)

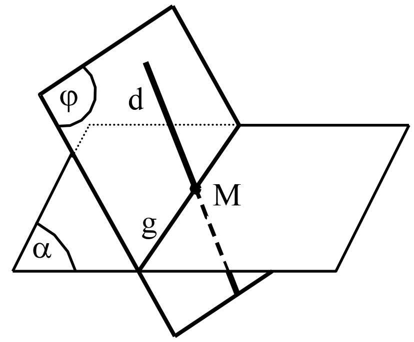
Giải

Gọi $M = d \cap mp(a, b) \Rightarrow \begin{cases} M \in d, \text{ vì } d \perp P_1 \text{ nên } M_1 \equiv d_1 \\ M \in mp(a, b) \Rightarrow M \in g \in mp(a, b) \end{cases}$

Từ $M_1 \in g_1 \Rightarrow M_2 \in g_2$; (Hình 6.3)



Hình 6.3



Hình 6.4

2) Trường hợp tổng quát

Để vẽ giao điểm **M** của đường thẳng d với mpα bất kỳ; (Hình 6.4). Ta phải tìm một điểm chung của chúng bằng cách dùng mặt phẳng phụ trợ, với trình tự giải như sau:

3) Dựng mặt phẳng φ phu trợ chứa đường thẳng d (φ thường là mặt phẳng chiếu)
4) Vẽ giao tuyến phụ: $g = mp\varphi \cap mp\alpha$
3) Vẽ giao điểm: $M = g \cap d$

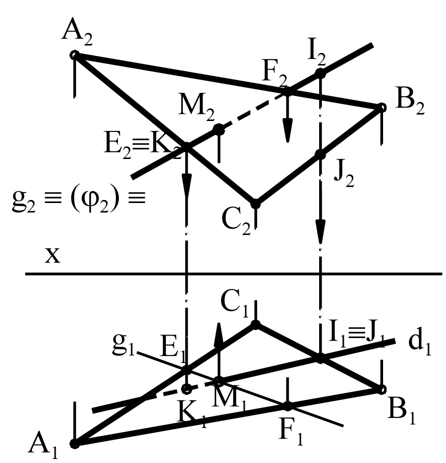
Vậy $\boxed{M = d \cap mp\alpha}$

❖ Ví dụ

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mp(ABC) Hình 6.5)

Giải

1) Dựng mặt phẳng φ phu trợ chiếu đứng chứa đường thẳng d $\Rightarrow (\varphi_2) \equiv d_2$
2) Vẽ giao tuyến phụ: $g \equiv EF = mp\varphi \cap mp\,(ABC)$
   Từ $g_2 \equiv E_2F_2 \equiv (\varphi_2) \Rightarrow g_1 \equiv E_1F_1$
3) Vẽ giao điểm: $M = g \cap d$
   Từ $M_1 = g_1 \cap d_1 \Rightarrow M_2 \in d_2 \Rightarrow M = d \cap mp\alpha$



Hình 6.5

❖ Biểu diễn thấy khuất trên hình chiếu

Sau khi vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng, để gây ấn tượng nỗi cho hình chiếu, người ta thường biểu diễn thấy - khuất của hình với ***qui ước*** như sau:

_ Mắt người quan sát đặt trên P_1, trước P_2 và đặt xa vô tận theo các hướng nhìn vuông góc với hai mặt phẳng hình chiếu này
_ Mặt phẳng xem như không trong suốt (vật thể đục)

Với qui ước này, thì:

+ Cặp điểm nằm trên đường thẳng chiếu bằng, điểm nào cao hơn sẽ thấy ở hình chiếu bằng.

+ Cặp điểm nằm trên đường thẳng chiếu đứng, điểm nào xa hơn sẽ thấy ở hình chiếu đứng

Trở lại ví dụ (hình 6.5)

- ***Thấy khuất ở hình chiếu bằng***: Xét cặp điểm I, J với $I \in d$, $J \in BC$ sao cho $I_1 \equiv J_1$. Ta thấy điểm I cao hơn J nên : I_1- thấy $\Rightarrow I_1M_1$ - thấy; do đó trên hình chiếu này mặt phẳng che khuất phần còn lại của đường thẳng thuộc phạm vi mặt phẳng
- ***Thấy khuất ở hình chiếu đứng***: Xét cặp điểm E, K với $K \in d$, $E \in AC$ sao cho $E_2 \equiv K_2$. Ta thấy điểm K xa hơn E nên : K_2 - thấy $\Rightarrow K_2M_2$ - thấy; do đó trên hình chiếu này mặt phẳng che khuất phần còn lại của đường thẳng thuộc phạm vi mặt phẳng

III. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Dựa vào định lý về hình chiếu của góc vuông và định lý về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng trong không gian, ta nêu ra định lý sau:

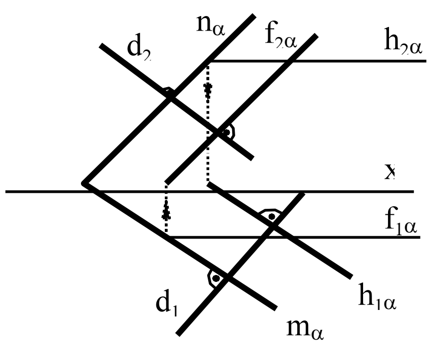
1) Đối với mặt phẳng thường

Định lý

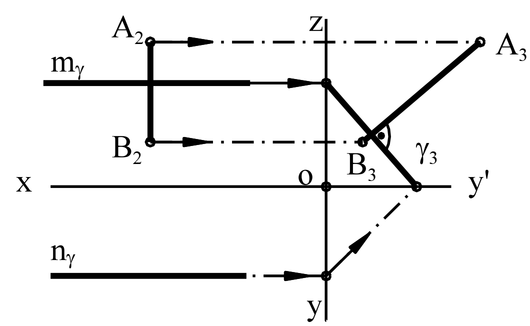
Điều kiện cần và đủ để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thường là hình chiếu bằng của đường thẳng vuông góc với hình chiếu bằng của đường bằng (vết bằng) của mặt phẳng và hình chiếu đứng của đường thẳng vuông góc với hình chiếu đứng của đường mặt(vết đứng) của mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mp α (Hình 6.6), định lý trên viết lại như sau:

$$\boxed{d \perp mp\alpha \quad \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 \perp h_{1\alpha} hay (d_1 \perp m_\alpha) \\ d_2 \perp f_{2\alpha} hay (d_2 \perp n_\alpha) \end{cases}}$$



Hình 6.6



Hình 6.7

Chứng minh

- ***Điều kiện cần:*** Giả sử $d \perp mp\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d \perp h_\alpha \in mp\alpha \Rightarrow d_1 \perp h_{1\alpha} \text{ hay } (d_1 \perp m_\alpha) \\ d \perp f_\alpha \in mp\alpha \Rightarrow d_2 \perp f_{2\alpha} \text{ hay } (d_2 \perp n_\alpha) \end{array}\right.$
- ***Điều kiện đủ:*** Giả sử có đường bằng h_α, đường mặt f_α thuộc mpα và đường thẳng d ; mà trên đồ thức thoả mãn : $\left[\begin{array}{l} d_1 \perp h_{1\alpha} \\ d_2 \perp f_{2\alpha} \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} (d_1 \perp m_\alpha) \\ (d_2 \perp n_\alpha) \end{array}\right.$

Thì theo định lý về hình chiếu của góc vuông $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d \perp h_\alpha \\ d \perp f_\alpha \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} d \perp m_\alpha \\ d \perp n_\alpha \end{array}\right.$

Mà h_α, f_α hay (m_α, n_α) là hai đường thẳng cắt nhau thuộc mpα nên: $d \perp mp\alpha$

2) Đối với mặt phẳng chiếu cạnh

Nếu mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu cạnh thì đường thẳng vuông góc với nó phải là đường cạnh; ngược lại đường cạnh thì chưa chắc vuông góc với mặt phẳng chiếu cạnh

Định lý :

Điều kiện cần và đủ để đường cạnh vuông góc với mặt phẳng chiếu cạnh là hình chiếu cạnh của đường cạnh vuông góc hình chiếu cạnh suy biến của mặt phẳng chiếu cạnh

Cho đường cạnh AB và mặt phẳng γ chiếu cạnh (Hình 6.7), định lý trên được viết thành:

$$\boxed{AB \perp mp\gamma \Leftrightarrow A_3B_3 \perp (\gamma_3)}$$

IV. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ Ví dụ 1

Chứng minh rằng :

a) Mặt phẳng có hai vết đối xứng nhau qua trục x thì vuông góc với mặt phẳng phân giác 1

b) Mặt phẳng có hai vết trùng nhau thì vuông góc với mặt phẳng phân giác 2

Giải

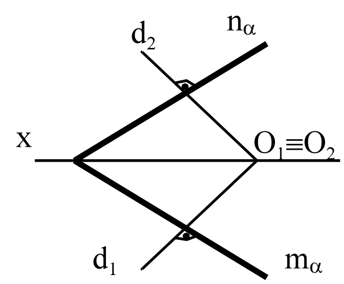
a) Giả sử cho mp α có hai vết n_α , m_α đối xứng nhau qua trục x (Hình 6.8). Qua điểm O tuỳ ý trên trục x, ta vẽ đường thẳng

$d \perp mp\alpha$ (1)

$\Rightarrow d_1 \perp m_\alpha$ và $d_2 \perp n_\alpha$.

b) Vì n_α , m_α đối xứng nhau qua trục x nên d_1, d_2 đối xứng nhau qua trục x $\Rightarrow d \in$ mp phg1 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow mp\alpha \perp$ mp phg1



Hình 6.8

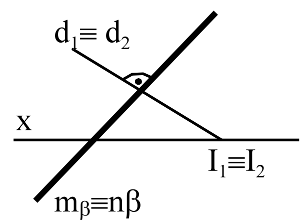
c) Giả sử cho mpβ có hai vết trùng nhau ($n_\beta \equiv m_\beta$)

Qua điểm I tuỳ ý trên trục x, ta vẽ đường thẳng

$d \perp mp\beta \Rightarrow d_1 \perp m_\beta$ và $d_2 \perp n_\beta$ (1')

Vì $n_\beta \equiv m_\beta$ nên $d_1 \equiv d_2 \Rightarrow d \in$ mp phg 2 (2')

Từ (1') và (2') $\Rightarrow mp\beta \perp$ mp phg 2



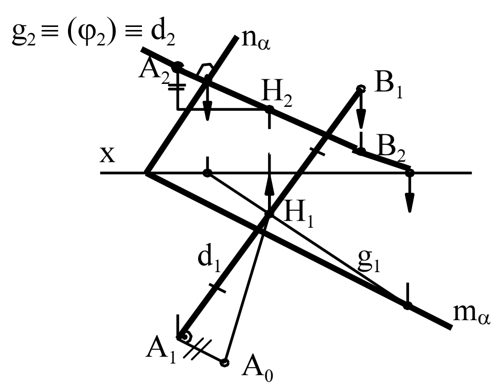
Hình 6.9

❖ Ví dụ 2

Cho điểm A (A_1, A_2) và mặt phẳng α (m_α, n_α); (Hình 6.10).

a) Xác định khoảng cách từ điểm A đến mp α

b) Hãy vẽ điểm B đối xứng với điểm A qua mpα



Hình 6.10

Giải

a) Để xác định khoảng cách từ điểm A đến mp α, ta làm như sau:

_ Qua A vẽ $d \perp$ mp $\alpha \Rightarrow d_1 \perp m_\alpha$ và $d_2 \perp n_\alpha$

_ Vẽ giao điểm : H = d ∩ mp α (dùng mặt phẳng φ phụ trợ). Bằng phương pháp tam giác, xác định độ dài thật của đoạn AH là cạnh huyền H_1A_0 của tam giác vuông $H_1A_1A_0$

b) Để vẽ điểm B đối xứng với điểm A qua mp α, ta làm như sau:

Trên đường thẳng d lấy điểm B sao cho BH = HA $\Rightarrow B_1H_1 = H_1A_1 \Rightarrow B_2 \in d_2$; (Hình 6.10)

Vậy B là điểm cần vẽ .

❖ Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB (A_1B_1, A_2B_2) và mặt phẳng α (m_α, n_α). Hãy tìm tập hợp những điểm trên mpα cách đều hai đầu mút A, B (Hình 6.11)

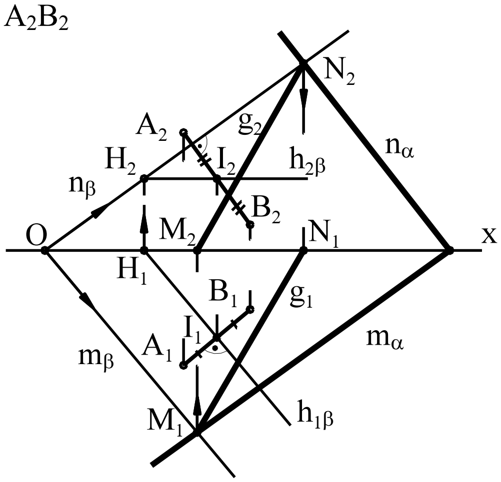
Giải

Tập hợp những điểm cách đều hai đầu mút A, B là mặt phẳng β - trung trực của đoạn thẳng AB (***mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng AB tại trung điểm I của nó***), mpβ được vẽ bằng vết như sau:

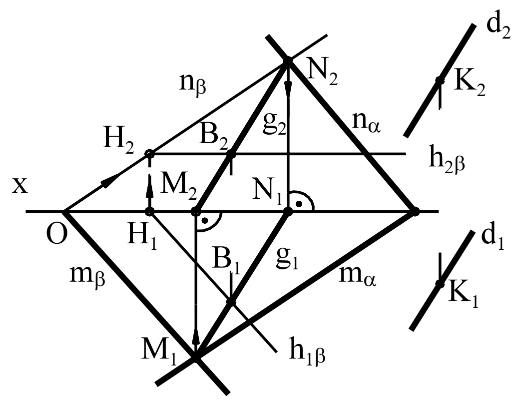
_ Vẽ đường bằng $h_\beta \perp AB$ tại trung điểm I của AB $\Rightarrow h_{1\beta} \perp A_1B_1$ tại I_1

_ Vẽ vết đứng H của đường bằng h_β : $H = h_\beta \cap$ mp $P_2 \Rightarrow H_2 \equiv H$

Vì $h_\beta \in$ mpβ nên vết đứng n_β của mpβ phải đi qua vết đứng $H_2 \equiv H$ của đường bằng h_β và vuông góc A_2B_2



Hình 6.11



Hình 6.12

_ Gọi $O = n_\beta \cap x$ thì vết bằng m_β đi qua O và vuông góc A_1B_1 (hay $m_\beta // h_{1\beta}$)

Theo yêu cầu của đề bài thi tập hợp những điểm cần tìm là giao tuyến của mpα và mpβ:

$g \equiv MN =$ mpα $\cap$ mpβ (Hình 6.11)

❖ Ví dụ 4

Cho hai mặt phẳng α (m_α, n_α), mặt phẳng β (m_β, B) và điểm K; (Hình 6.12).Yêu cầu:

a) Hãy vẽ vết đứng của mpβ

b) Qua K hãy vẽ đường thẳng d song song với hai mặt phẳng α, β

Giải

a) Vẽ vết đứng của mpβ như sau :

_ Trong mpβ, qua điểm B vẽ đường bằng $h_\beta \Rightarrow h_{2\beta} // x$ và $h_{1\beta} // m_\beta$

_ Vẽ vết đứng H của đường bằng h_β : $H = h_\beta \cap$ mp $P_2 \Rightarrow H_2 \equiv H$

_ Vì $h_\beta \in$ mpβ nên vết đứng n_β của mpβ phải đi qua vết đứng $H_2 \equiv H$ của đường bằng h_β

b) Vẽ giao tuyến **g** của mpα và mpβ như sau:

_ Vẽ $N = n\alpha \cap n\beta \Rightarrow (N_2 \equiv N;\ N_1 \in x) \Rightarrow N \in g$

_ Vẽ $M = m\alpha \cap m\beta \Rightarrow (M_1 \equiv M;\ M_2 \in x) \Rightarrow M \in g$

Vậy $g \equiv MN =$ mpα $\cap$ mpβ

Qua K, vẽ đường thẳng $d // g \Rightarrow (d_1 // g_1$ và $d_2 // g_2)$.Vậy d là đường thẳng cần vẽ (Hình 6.12)

❖ Ví dụ 5

Cho điểm A(A_1, A_2) và đường thẳng d (d_1, d_2); (Hình 6.13). Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d

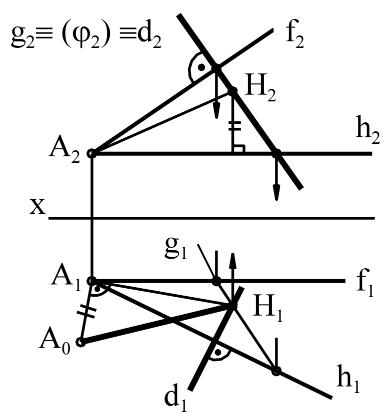
Giải

_ Qua A, dựng mp(h, f) ⊥ d ⇒ $h_1 \perp d_1$
và ⇒ $h_2 \perp d_2$

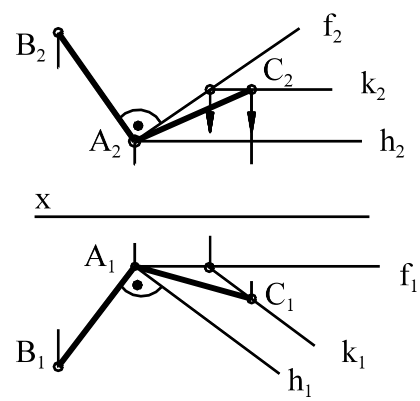
_ Vẽ giao điểm: H = d ∩ mp(h, f) - (Dùng mặt phẳng φ phụ trợ chiếu đứng chứa d)
Từ $H_1 = g_1 \cap d_1$ ⇒ $H_2 \in d_2$

_ Bằng phương pháp tam giác, xác định độ dài thật của đoạn AH là: H_1A_0 (Hình 6.13)

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là đoạn AH = H_1A_0



Hình 6.13



Hình 6.14

❖ Ví dụ 6

Cho đoạn thẳng AB (A_1B_1, A_2B_2) và hình chiếu đứng C_2 của điểm C (Hình 6.14). Hãy vẽ hình chiếu bằng C_1 của điểm C, biết rằng tam giác ABC vuông tại A

Giải

Theo giả thiết CA ⊥ AB nên C ∈ mp(h, f) ⊥ AB tại A, vì vậy ta thực hiện như sau :

_ Vẽ mp(h, f) ⊥ AB tại A

_ C ∈ mp(h, f) ⇒ C∈ k ∈ mp(h, f) ; [k - là dường bằng thuộc mp(h, f)]
Từ $C_2 \in k_2$ ⇒ $C_1 \in k_1$ (Hình 6.14)

❖ Ví dụ 7

Cho mặt phẳng α (m_α, n_α), đường thẳng d (d_1, d_2) và hình chiếu đứng A_2 của điểm A thuộc mặt phẳng α (Hình 6.15). Hãy vẽ trong mp α đường thẳng đi qua A và vuông góc với d

Giải

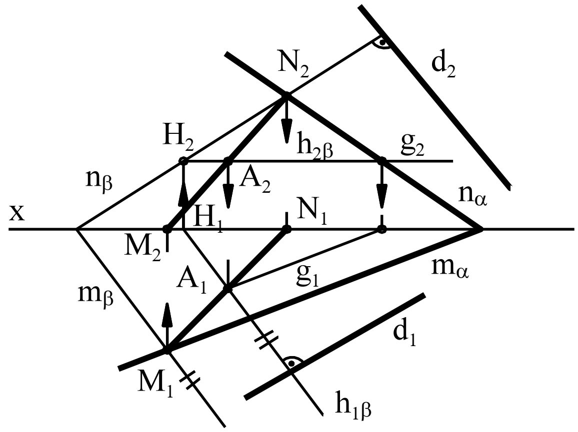
_ Vẽ hình chiếu bằng A_1 của điểm A, bằng cách gắn điểm A vào đường bằng g của mpα

Đường thẳng cần vẽ đi qua điểm A vuông góc với d nên thuộc mp β đi qua A, vuông góc với d. Mặt phẳng β được vẽ như sau :

_ Qua điểm A vẽ đường bằng $h_\beta \perp d$ ⇒ $h_{2\beta}$ // x và $h_{1\beta} \perp d_1$

_ Vẽ vết đứng H của đường bằng h_β : H = $h_\beta \cap mpP_2$ ⇒ $H_2 \equiv H$

_ Vì $h_\beta \in$ mpβ nên vết đứng n_β của mpβ phải đi qua vết đứng $H_2 \equiv H$ của đường bằng h_β



Hnh 6.15

_ Vẽ $n_\beta \perp d_2$ và $m_\beta \perp d_1$ (hoặc m_β // $h_{1\beta}$)
Vã lại, đường thẳng cần dựng thuộc mpα nên nó là giao tuyến của mpα với mpβ:
Vậy MN = mpα ∩ mpβ ; (Hình 6.15)

====================

Bài 7 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

I. KHÁI NIỆM

Ta đã biết rằng độ lớn thât của một đoạn thẳng thuộc đường bằng thể hiện ngay ở hình chiếu bằng. Giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng, nếu đường thẳng chiếu hoặc mặt phẳng chiếu thì ta biết được một hình chiếu của giao điểm mà không cần sử dụng mặt phẳng phu trợ.

Nhưng đối với đường thẳng thường, mặt phẳng thường thì trong hình hoạ người ta dùng *các **phép biến đổi hình chiếu*** để biến đường thẳng, mặt phẳng này về các vị trí đặc biệt mà ở vị trí mới này dễ dàng giải được bài toán. Sau khi giải xong có loại bài toán cần phải đưa nghiệm về vị trí ban đầu.

II. PHÉP THAY ĐỔI MẶT PHẲNG HÌNH CHIẾU

Phép thay đổi mặt phẳng hình chiếu là một phép biến đổi mà trong đó hệ thống mặt phẳng hình chiếu thay đổi còn vật thể được biểu diễn thì đứng yên

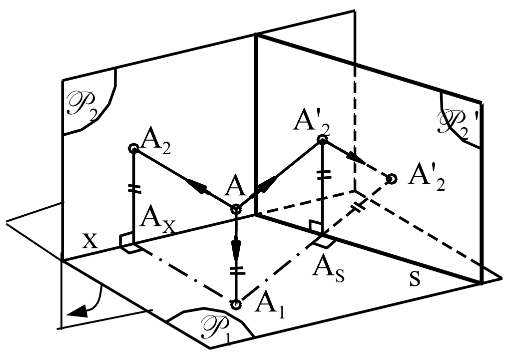
II.1 Thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng

a) Định nghĩa

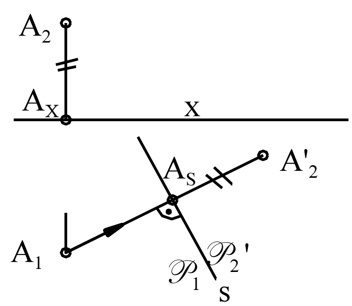
Thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng P_2 là dùng một mặt phẳng $P'_2 \perp P_1$ làm mặt phẳng hình chiếu đứng mới

Gọi trục hình chiếu mới là s : $s = P'_2 \cap P_1$

Xét một điểm A bất kỳ. Chiếu vuông góc điểm A lần lượt lên các mặt phẳng hình chiếu P_1, P_2 , P'_2 ta nhận được các hình chiếu là: A_1, A_2, A'_2 (Hình 7.1a)



Hình 7.1a



Hình 7.1b

b) Tính chất

_ Hình chiếu bằng A_1 của điểm A trong hệ thống mới và cũ không đổi

_ Độ cao của điểm A trong hệ thống mới và cũ bằng nhau: $\overline{A'_2 A_s} = \overline{A_2 A_x}$ (Hình 7.1a)

➢ **Qui ước**

_ Sau khi quay P'_2 quanh trục s đến trùng với P_1 rồi tiếp tục quay P_1 quanh trục x theo chiều qui ước đến trùng với P_2 ta nhận được đồ thức của điểm A trong hệ thống cũ và mới (Hình 7.1b)

_ Ở hai phía trục hình chiếu mới **s** người ta thường ghi hai mặt phẳng hình chiếu mới P_1 và P'_2 với qui ước như sau: Nếu độ cao của điểm A dương thì A'_2 được đặt về phía có ghi chữ P'_2

❖ **Ví dụ 1**

Cho đoạn thẳng AB (A_1B_1, A_2B_2); (Hình 7.2). Hãy thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng để AB trở thành đường mặt trong hệ thống mới.

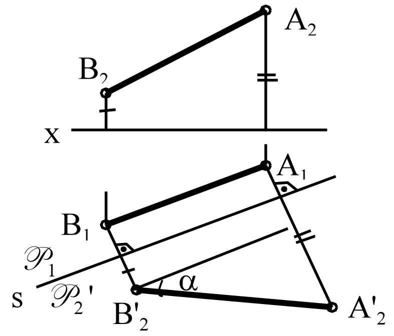
Giải

Để AB trở thành đường mặt trong hệ thống mới thì ta phải chọn mp P'_2 // AB, tức chọn trục s // A_1B_1

Áp dụng độ cao mới bằng độ cao cũ ta vẽ được $A'_2B'_2$ (Hình 7.2)

Nhận xét

- $A'_2B'_2 = AB$
- $(A'_2B'_2, s) = (AB, P_1) = \alpha$



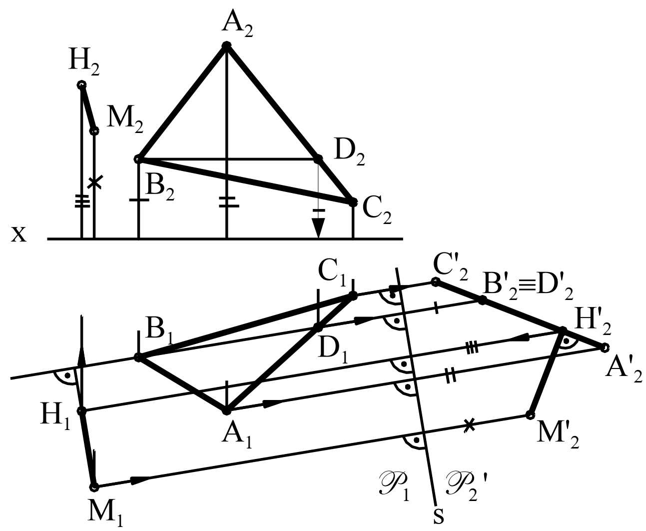
Hình 7.2

❖ Ví dụ 2

Cho mặt phẳng (ABC) và điểm M (Hnh 7.3). Bằng phương pháp thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng; hãy xác định khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (ABC)

Giải

- Để mp(ABC) trở thành mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới thì ta phải chọn mp P'_2 vuông góc với đường bằng BD của mặt phẳng (ABC) , tức chọn trục s ⊥ B_1D_1
- Áp dụng độ cao mới bằng độ cao cũ ta vẽ được hình chiếu đứng mới của mp(ABC) suy biến thành đoạn thẳng $A'_2C'_2$
- Để xác định khoảng cách từ điểm M đến mp(ABC), ta vẽ : MH ⊥ mp(ABC)



Dễ thấy MH là đường mặt trong hệ thống mới

nên : $M'_2H'_2 \perp A_2'C'_2$

và M_1H_1 // s

Hình 7.3

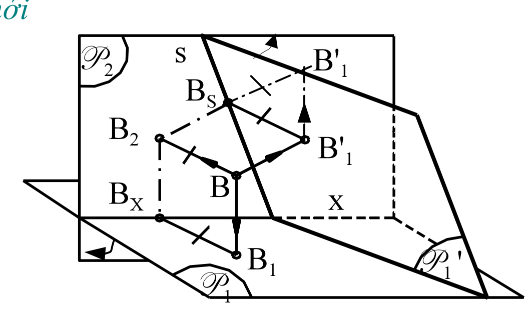
H_2 được xác định nhờ độ cao cũ bằng độ cao mới (Hình 7.3) .

- Khoảng cách từ điểm M đến mp(ABC) chính là đoạn $M'_2H'_2$ = MH

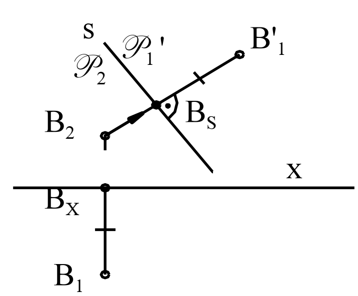
II.2 Thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng

a) Định nghĩa

Thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng P_1 là dùng một mặt phẳng $P'_1 \perp P_2$ làm mặt phẳng hình chiếu bằng mới



Hình 7.4a



Hình 7.4b

Gọi trục hình chiếu mới là s : $s = P'_1 \cap P_2$

Xét một điểm B bất kỳ. Chiếu vuông góc điểm B lần lượt lên các mặt phẳng hình chiếu P_1 , P_2 , P'_1 ta nhận được các hình chiếu là: B_1, B_2, B'_1 (Hình 7.4a)

b) Tính chất

_ Hình chiếu đứng B_2 không đổi trong hệ thống mới và cũ

_ Độ xa của điểm B trong hệ thống mới và cũ bằng nhau: $\overline{B'_1 B_s} = \overline{B_1 B_x}$ (Hình 7.4a)

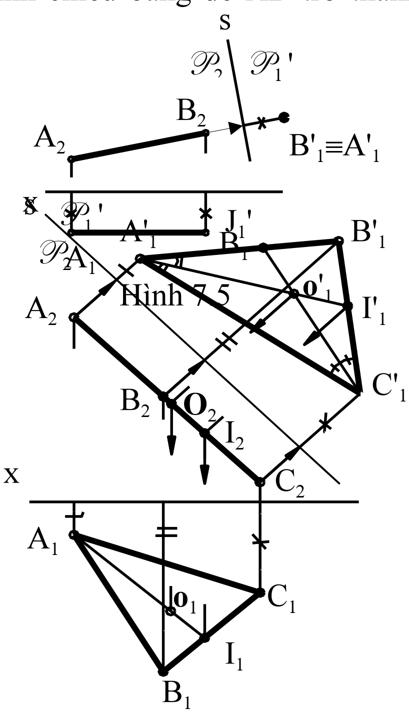
➢ Qui ước

_ Quay P'_1 quanh trục s đến trùng với P_2 rồi quay P_1 quanh trục x theo chiều qui ước đến trùng với P_2 ta nhận được đồ thức của điểm B trong hệ thống cũ và mới (Hình 7.4b)

_ Ở hai phía trục hình chiếu mới **s** người ta thường ghi hai mặt phẳng hình chiếu mới P'_1 và P_2 với qui ước như sau: Nếu độ xa của điểm B dương thì B'_1 được đặt về phía có ghi chữ P'_1

❖ Ví dụ 1

Cho đường mặt AB (A_1B_1, A_2B_2) .Hãy thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng để AB trở thành đường thẳng chiếu bằng trong hệ thống mới



Giải

- Để AB trở thành đường thẳng chiếu bằng trong hệ thống mới thì ta phải chọn mp P'_2 $\perp AB$, tức chọn trục s $\perp$ A_2B_2 .
- Áp dụng độ xa mới bằng độ xa cũ ta vẽ được $A'_1 \equiv B'_1$ (Hình 7.5)

Giải

- Để vẽ được tâm O của đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta phải xác định độ lớn thật của tam giác ABC
- Thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng để mp (ABC) trở thành mặt phẳng bằng trong hệ thống mới, ta phải chọn mp P'_1 // (ABC) $\Rightarrow$ s // A_2C_2 .
- Áp dụng độ xa mới bằng độ xa cũ ta vẽ được hình chiếu bằng mới của tam giác là: $A'_1B'_1C'_1$.
- Trong tam giác này ta vẽ hai đường phân giác $A'_1I'_1$ và $C'_1J'_1$ giao nhau tại O'_1 - là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác $A'_1B'_1C'_1$. Trả về hình chiếu ban đầu ta có (O_1, O_2) là đồ thức của tâm O của đường tròn nội tiếp tam giác ABC cần tìm.

Hình 7.6

3) Thay đổi liên tiếp hai mặt phẳng hình chiếu

Đối với một số bài toán ta cần phải thay đổi liên tiếp hai mặt phẳng hình chiếu để có hệ thống hai mặt phẳng hình chiếu mới phù hợp với bài toán , chẳng hạn:

_ Hệ $P_1 \perp P_2$ thay đổi $P_2 \rightarrow$ hệ $P_1 \perp P'_2$ **tiếp tục** thay đổi $P_1 \rightarrow$ hệ $P'_2 \perp P'_1$, hoặc

_ Hệ $P_1 \perp P_2$ thay đổi $P_1 \rightarrow$ hệ $P_2 \perp P'_1$ **tiếp tục** thay đổi $P_2 \rightarrow$ hệ $P'_1 \perp P'_2$

➢ Chú ý

1) Đối với đường thẳng:

_ Để đưa **đường thẳng thường** về đường bằng hoặc đường mặt trong hệ thống mới ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu một lần

_ Để đưa **đường bằng** hoặc **đường mặt** về đường thẳng chiếu đứng hoặc chiếu bằng trong hệ thống mới ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu một lần.

_ Để đưa **đường thẳng thường** về đường thẳng chiếu trong hệ thống mới ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu liên tiếp hai lần:

+ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu lần 1 đưa **đường thẳng thường** về đường bằng hoặc đường mặt trong hệ thống mới
+ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu lần 2 đưa **đường bằng** hoặc **đường mặt** đó về đường thẳng chiếu đứng hoặc chiếu bằng trong hệ thống mới

2) Đối với mặt phẳng:

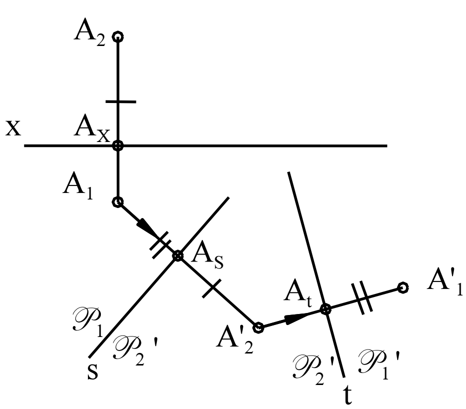
_ Để đưa **mặt phẳng thường** về mặt phẳng chiếu bằng hoặc mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu một lần

_ Để đưa mặt phẳng chiếu bằng hoặc mặt phẳng chiếu đứng về mặt phẳng mặt hoặc mặt phẳng bằng trong hệ thống mới ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu một lần

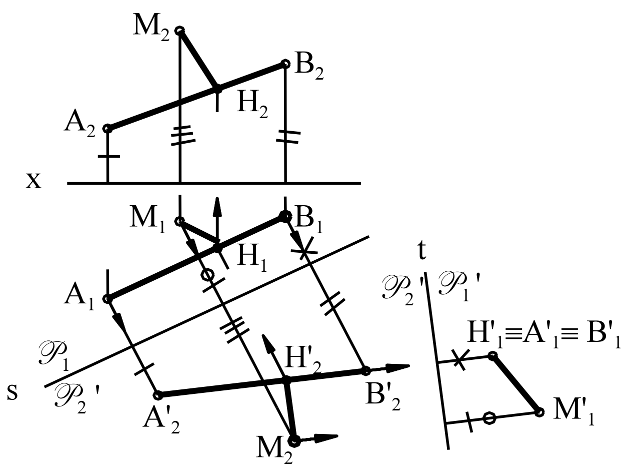
_ Để đưa mặt phẳng thường về mặt phẳng bằng hoặc mặt phẳng mặt trong hệ thống mới ta phải thay đổi mặt phẳng hình chiếu liên tiếp hai lần:

+ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu lần 1 đưa **mặt phẳng thường** về mặt phẳng chiếu bằng hoặc mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới
+ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu lần 2 đưa **mặt phẳng chiếu bằng** hoặc **mặt phẳng chiếu đứng** đó về mặt phẳng mặt hoặc mặt phẳng bằng trong hệ thống mới

(Hình 7.7) biểu diễn các hình chiếu của điểm A bằng cách thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng $P_2 \rightarrow P'_2$ rồi tiếp tục thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng $P_1 \rightarrow P'_1$. Khi vẽ A'_1, lấy độ xa mới $\overline{A'_1A_t} = \overline{A_1A_s}$



Hình 7.7



Hình 7.8

❖ Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB (A_1B_1, A_2B_2) và điểm M (M_1, M_2) ; (Hình 7.8). Tìm khoảng cách từ điểm M đến đoạn thẳng AB

Giải

♦ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu để đường thẳng thường AB trở thành đường thẳng chiếu trong hệ thống mới, trình tự thực hiện hai bước như sau:

_ Thay đổi P_2 để AB // $P'_2 \Rightarrow$ s // A_1B_1. Áp dụng độ cao mới bằng độ cao cũ ta vẽ được $A'_2B'_2$

_ Thay đổi P_1 để AB $\perp P'_1 \Rightarrow$ t $\perp A'_2B'_2$. Áp dụng độ xa mới bằng độ xa cũ ta vẽ được $A'_1 \equiv B'_1$

♦ Vẽ MH $\perp$ AB. Vì AB $\perp P'_1 \Rightarrow H'_1 \equiv A'_1 \equiv B'_1$ và dễ thấy MH là đường bằng trong hệ thống mới nên $\Rightarrow M'_2H'_2$ // t và $M'_1H'_1$ = MH thể hiện khoảng cách từ điểm M đến đoạn thẳng AB

Từ $H'_2 \in A'_2B'_2 \Rightarrow H_1 \in A_1B_1$ và $H_2 \in A_2B_2$ (Hình 7.8)

III. PHÉP QUAY QUAH TRỤC

Phép quay quanh trục là một phép biến đổi hình chiếu mà trong đó hệ thống mặt phẳng hình chiếu đứng yên, còn vật thể được biểu diễn quay đến vị trí mới phù hợp với yêu cầu của bài toán.

III.1 Phép quay quanh trục chiếu

1) Phép quay quanh trục chiếu bằng

a) Định nghĩa

*Phép quay quanh trục chiếu bằng **t** là một phép biến đổi hình chiếu, sao cho :*

_ *Mỗi điểm **M** tương ứng với điểm **M’**, hai điểm này thuộc mặt phẳng bằng vuông góc trục **t***

_ *Khoảng cách từ **M** và **M’** đến trục **t** bằng nhau gọi là bán kính quay: **OM = OM’***

_ *Góc quay* $\widehat{(OM,OM')} = \varphi$ *- có chiều cho trước (Hình 7.9a)*

b) Tính chất

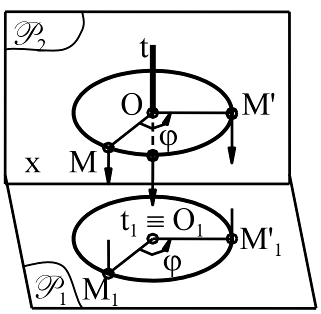
_ Hình chiếu đứng của đường thẳng nối cặp điểm tương ứng song song với trục x: $M_2M'_2$ // x

_ Hình chiếu bằng của góc quay $\widehat{(OM,OM')}$ bằng chính nó:

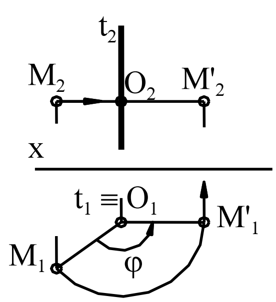
$\widehat{(O_1M_1, O_1M'_1)} = \widehat{(OM,OM')} = \varphi$ (Hình 7.9b)

➢ **Chú ý**

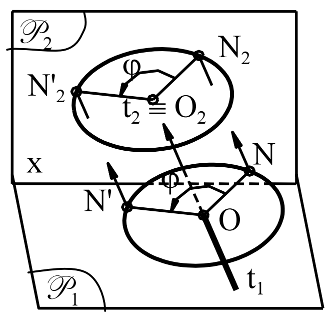
Những điểm thuộc trục quay **t** cho ảnh và tạo ảnh trùng nhau: giả sử $A \in t \Rightarrow A \equiv A'$



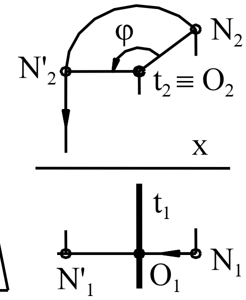
Hình 7.9a



Hình 7.9b



Hình 7.10a



Hình 7.10b

2) Phép quay quanh trục chiếu đứng

a) Định nghĩa

*Phép quay quanh trục chiếu đứng **t** là một phép biến đổi hình chiếu, sao cho :*

_ *Mỗi điểm **N** tương ứng với điểm **N’**, hai điểm này thuộc mặt phẳng mặt vuông góc trục **t***

_ *Khoảng cách từ **N** và **N’** đến trục **t** bằng nhau gọi là bán kính quay: **ON = ON’***

_ *Góc quay* $\widehat{(ON,ON')} = \varphi$ *- có hướng cho trước (Hình 7.10a)*

b) Tính chất

_ *Hình chiếu bằng của đường thẳng nối cặp điểm tương ứng song song với trục x:* $N_1N'_1$ // x

_ *Hình chiếu đứng của góc quay* $\widehat{(ON,ON')}$ *bằng chính nó:*

$\widehat{(O_2N_2,O_2N'_2)} = \widehat{(ON,ON')} = \varphi$; *(Hình 7.10b)*

➢ **Chú ý**

+ Những điểm thuộc trục quay **t** cho ảnh và tạo ảnh trùng nhau. Giả sử $B \in t \Rightarrow B \equiv B'$

+ Đối với một số bài toán ta cần phải quay liên tiếp quanh hai trục chiếu để có vị trí mới phù hợp với bài toán

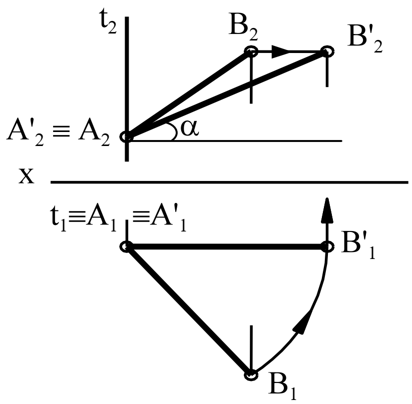
❖ Ví dụ1

Cho đoạn thẳng AB; (Hình 7.11). Bằng phép quay quanh trục chiếu, hãy xác định độ dài thật của đoạn thẳng AB và góc nghiêng của AB hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng

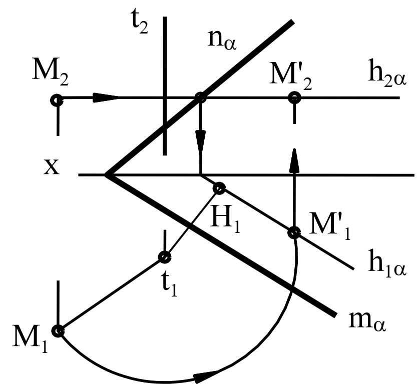
Giải

Chọn trục quay t chiếu bằng qua điểm A $\Rightarrow t_1 \equiv A_1$. Quay quanh trục t đưa AB đến vị trí mới $A'B' // P_2$, $\Rightarrow A'_1 \equiv A_1 \equiv t_1$; $A'_2 \equiv A_2$ và $A'_1B'_1 // x \Rightarrow B'_2$

Kết luận : $A'_2B'_2 = AB$ và góc $(\widehat{A'_2B'_2, x}) = \alpha = (\widehat{AB, P_1})$; (Hình 7.11)



Hình 7.11



Hình 7.12

❖ Ví dụ2

Cho mặt phẳng α (m_α, n_α) và điểm M (M_1, M_2); (Hình 7.12). Hãy chọn trục quay là đường thẳng chiếu và quay quanh trục đó đưa điểm M đến vị trí mới thuộc mặt phẳng α

Giải

Khi quay diểm M quanh trục $t \perp P_1$ đến vị trí mới $M' \in$ mp α thì M' thuộc đường bằng h_α của mpα, h_α cùng độ cao với M. Lúc này $M'_1 \in h_{1\alpha}$ và $M_1t_1 = M'_1t_1$. Điều này xãy ra khi ta chọn trục $t \perp P_1$ thoả mãn : $M_1t_1 \geq t_1H_1$ (với H_1 là chân đường vuông góc kẽ từ t_1 đến $h_{1\alpha}$)
Từ $M'_1 \in h_{1\alpha} \Rightarrow M'_2 \in h_{2\alpha}$; (Hình 7.12)

➢ Chú ý

Đối với bài toán quay quanh trục chiếu đưa đường thẳng d đến vị trí mới d' thuộc mặt phẳng α. Ta chọn trục quay đi qua giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng α; sau đó chỉ cần quay một điểm tuỳ ý trên đường thẳng d đến vị trí mới thuộc mặt phẳng α (trở về ví dụ 2 ở trên)

III.2 Phép quay quanh đường bằng

a) Định nghĩa

Phép quay quanh đường bằng là một phép quay quanh trục mà trục ở đây là đường bằng

Trong phần này ta xét phép quay một mặt phẳng quanh một đường bằng của nó đến vị trí mới song song với P_1 (cùng độ cao với với đường bằng đó)

➢ Xét một điểm M quay quanh đường bằng h đến vị trí mới M' cùng độ cao với h, ta có:

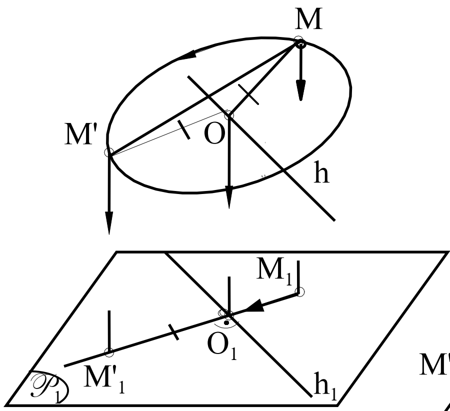
_ M, M'$\in$mp $\perp$ h tại O $\Rightarrow h \perp MM' \Rightarrow M_1M'_1 \perp h_1$ tại O_1 (góc vuông được bảo tồn ở mp P_1)

_ $O_1M'_1 = OM$ (vì ở vị trí mới bán kính quay $OM' // P_1$); (Hình 7.13a)

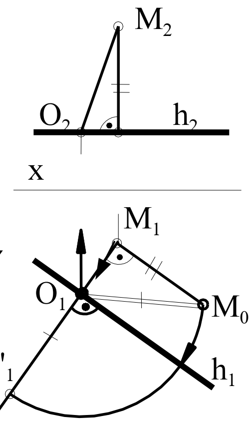
Từ đó ta có cách vẽ M'_1 trên đồ thức như sau:

\+ Vẽ độ lớn thật của bán kính quay OM (dùng phương pháp tam giác): $O_1M_0 = OM$

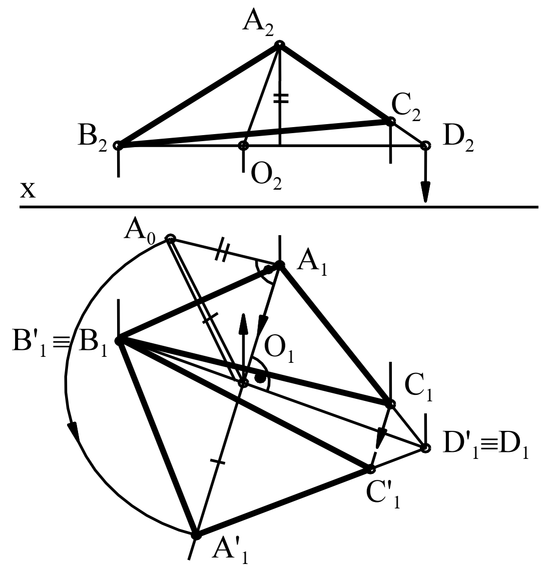
Đặt trên đường thẳng $M_1O_1(\perp h_1)$ đoạn $O_1M'_1 = O_1M_0$ (Hình 7.13b)



Hình 7.13a



Hình 7.13b



Hình 7.14

❖ **Ví dụ**

Cho tam giác ABC. Bằng phép quay quanh đường bằng, hãy xác định độ lớn thật của tam giác ABC

Giải

+ Trong tam giác ABC, vẽ đường bằng BD.
+ Quay điểm A quanh đường bằng BD đến vị trí mới A' cùng độ cao với đường bằng BD
+ Ta có $B'_1 \equiv B_1$ và $D'_1 \equiv D_1$ (Các điểm thuộc trục quay)
+ Vì $C \in AD \Rightarrow C_1 \in A_1D_1$ và $C'_1 \in A'_1D'_1$ (với $C_1C'_1 \perp A_1D_1$)

Kết luận: $\Delta A'_1B'_1C'_1 = \Delta ABC$

III.3 Phép quay quanh đường mặt

Phép quay mặt phẳng quanh đường mặt được xây dựng tương tự như phép quay mặt phẳng quanh đường bằng. Nhưng ở đây quay mặt phẳng đến vị trí mới song song P_2 (cùng độ xa với đường mặt đó)

III.4 Phép gập mặt phẳng quanh vết

Phép gập mặt phẳng quanh vết của nó là trường hợp đặc biệt của phép quay mặt phẳng quanh đường bằng hoặc đường mặt ở vị trí đặc biệt - đó chính là vết bằng, vết đứng của mặt phẳng

Mục đích của phép gập mặt phẳng quanh vết bằng, vết đứng của nó là đưa mặt phẳng đến vị trí mới đến trùng với P_1 hoặc P_2. Nhằm giải một số bài toán về độ lớn thật, hoặc vị trí ...

❖ **Ví dụ 1**

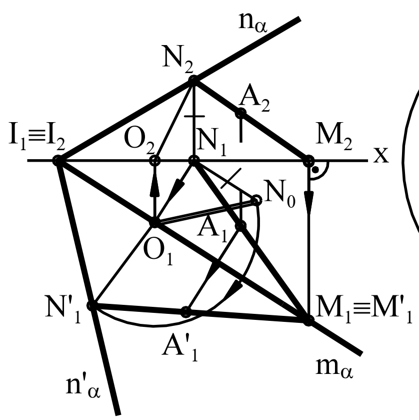
Cho mặt phẳng α (m_α, n_α) ; (Hình 7.14). Hãy gập mpα quanh vết bằng m_α đến vị trí mới trùng với P_1

Giải

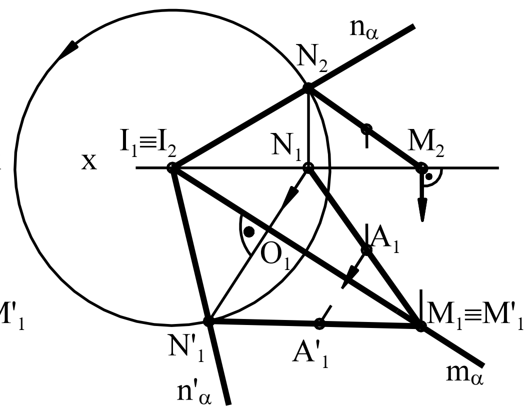
Để gập mặt phẳng α quanh vết bằng về vị trí mới trùng với P_1; vì $m_\alpha \in P_1$ nên ta chỉ cần quay thêm một điểm của mpα đến trùng với P_1. Để đơn giản ta lấy điểm $N \in n_\alpha$ rồi quay quanh vết bằng m_α đến vị trí mới N' thuộc P_1.

(Hình 7.14a) cũng cho thấy rằng $A'_1 \in M'_1N'_1$ là hình gập của $A \in MN \in$ mpα

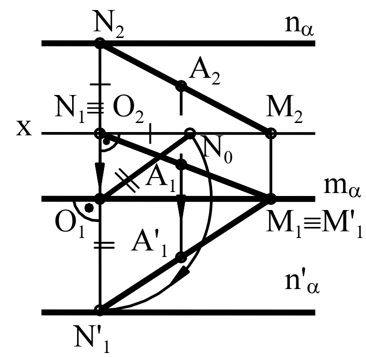
Gọi $I = m_\alpha \cap x$; ta có : $IN \equiv I_2N_2 \equiv n_\alpha \Rightarrow I'_1N'_1 = IN \equiv n'_\alpha$ **(1)**



Hình 7.14a



Hình 7.14b



Hình 7.15

➢ **Chú ý**

+ Từ nhận xét (1) thì điểm N'_1 được vẽ như sau: N'_1 = Vòng tròn (I_1, I_2N_2) $\cap$ N_1O_1 (Hình 7.14b)
+ Nếu mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu cạnh thì khi gập mặt phẳng quanh vết bằng ta vẫn thực hiện như phép quay quanh đường bằng (Hình 7.15)

III. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN.

❖ **Ví dụ 1**

Cho điểm A và mpα (m_α, n_α).

a) Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mpα

b) Hãy vẽ điểm B đối xứng điểm A qua mpα

Giải

a) Qua A vẽ đường thẳng d $\perp$ mpα $\Rightarrow d_1 \perp m_\alpha$ và $d_2 \perp n_\alpha$

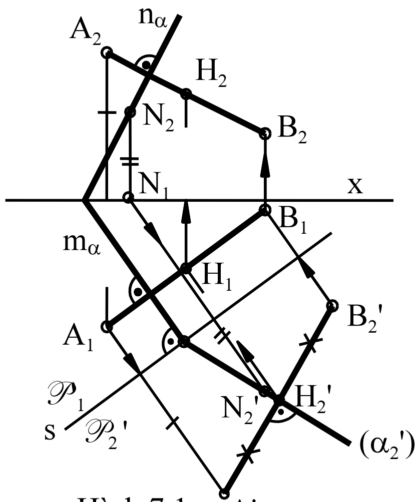
Vẽ giao điểm H = d $\cap$ mpα; bằng phương pháp thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng đưa mpα trở thành mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới, chọn trục s $\perp m_\alpha \Rightarrow$ hình chiếu đứng mới của mpα suy biến thành đường thẳng (α_2').

Ta xác định được $H'_2 = d'_2 \cap (\alpha'_2) \Rightarrow A'_2H'_2$ = AH - là khoảng cách từ điểm A đến mpα $\Rightarrow$ $H_1 \in d_1$ và $H_2 \in d_2$

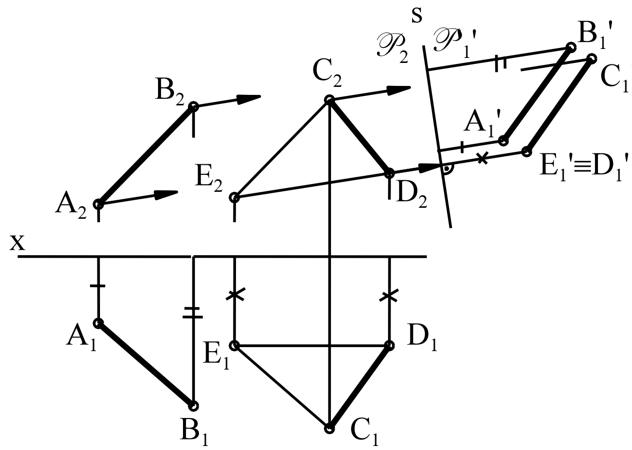
b) Vẽ điểm B đối xứng điểm A bằng cách lấy HB = HA. Từ $B'_2 \in d'_2 \Rightarrow B_1 \in d_1$ và $B_2 \in d_2$, (Hình 7.16)

❖ **Ví dụ 2**

Cho hai đoạn thẳng AB và CD; (Hình 7.17). Hãy thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng để hai hình chiếu bằng mới của chúng song song nhau



Hình 7.1



Hình 7.17

Giải

Vẽ CE // AB; trong mp (CDE) ta vẽ đường bằng ED. Thay đổi mặt phẳng hình chiếu bằng để mp (CDE) trở thành mặt phẳng chiếu bằng trong hệ thống mới, có hình chiếu bằng mới là đoạn $C'_1D'_1$

Vì AB // mp (CDE) $\Rightarrow$ $A'_1B'_1$ // $C'_1D'_1$; (Hình 7.17)

❖ Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB. Hãy thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng để:

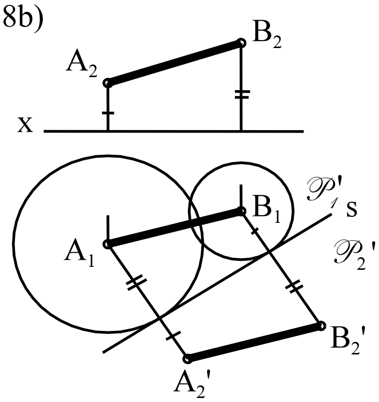
a) Hình chiếu đứng mới và hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB song song nhau

b) Hình chiếu đứng mới và hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB đối xứng nhau qua trục hình chiếu mới s

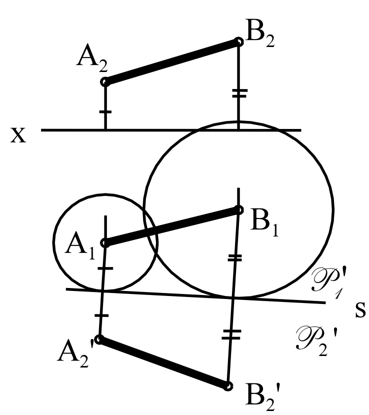
Giải

a) Để hình chiếu đứng mới và hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB song song nhau, ta ve các vòng tròn tâm A_1, B_1 có bán kính lần lượt là độ cao của điểm B và điểm A.Đường thẳng **s** tiếp tuyến ngoài của hai vòng tròn vừa vẽ là trục hình chiếu mới cần dựng; (Hình 7.18a)

b) Để hình chiếu đứng mới và hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB đối xứng nhau qua trục hình chiếu mới s, ta vẽ các vòng tròn tâm A_1, B_1 có bán kính lần lượt là độ cao của điểm A và điểm B.Đường thẳng **s** tiếp tuyến ngoài của hai vòng tròn vừa vẽ là trục hình chiếu mới cần dựng; (Hình 7.18b)



Hình 7.18a



Hình 7.18b

❖ Ví dụ 4

Cho hai mpα(m_α, n_α) và mpβ (m_β, n_β). Hãy tìm quĩ tích những điểm cách đều hai mpα (m_α, n_α) và mpβ (m_β, n_β) trong hai trường hợp sau đây

Giải

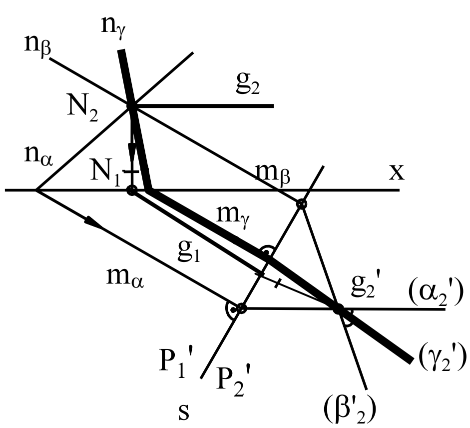
a) Câu a); Hình 7.19a

_ Vẽ giao tuyến $g \equiv$ mp$\alpha \cap$ mpβ; vì m_α // $m_\beta \Rightarrow$ g là đường bằng

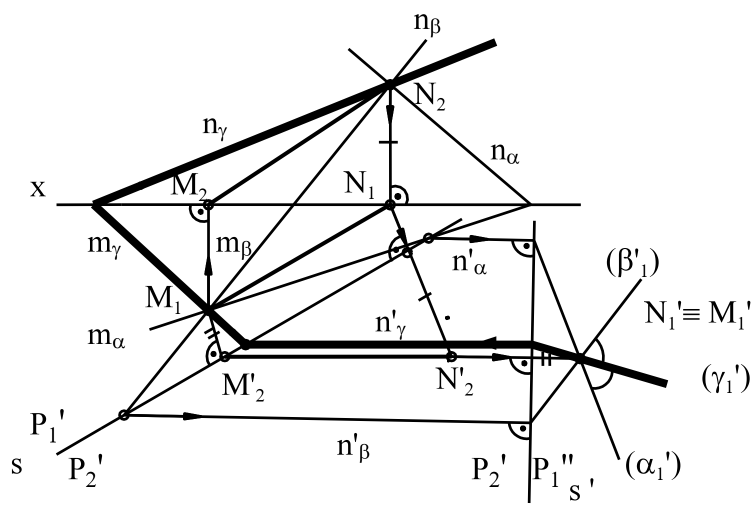
_ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng sao cho giao tuyến **g** trở thành đường thẳng chiếu đứng trong hệ thống mới: g_2' $\rightarrow$ một điểm ; các mpα, mpβ có hình chiếu đứng mới suy biến thành các đường thẳng (α_2') và (β'$_2$) đi qua điểm suy biến đó.

_ $\Rightarrow [\widehat{(\alpha_2'), (\beta'_2)}]$ là góc của hai mp α và mpβ

Tập hợp những điểm cách đều hai mp α, mpβ là mpγ phân giác của mpα, mp$\beta \Rightarrow$ (γ_2') là phân giác của $[\widehat{(\alpha_2'), (\beta'_2)}] \Rightarrow m_\gamma$ // g_1 ; và n_γ đi qua N_2 ; (Hình 7.19a)



Hình 7.19a



Hình 7.19b

b) Câub); Hình 7.19b

_ Vẽ giao tuyến $MN \equiv$ mp$\alpha \cap$ mpβ

_ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu liên tiếp hai lần để MN trở thành đường thẳng chiếu bằng trong hệ thống mới. Lúc này mpγ phân giác của hai mặt phẳng mpα, mpβ có hình chiếu bằng mới suy biến thành đường thẳng (γ_1') phân giác của $[\widehat{(\alpha_1'), (\beta'_1)}]$

_ Trả về vị trí ban đầu được : n'_γ // $M'_2N'_2$ và m_γ , n_γ ; (Hình 7.19b)

❖ Ví dụ 5

Cho mpα (m_α, n_α) và điểm A; (Hình 7.20). Hãy chọn trục quay **t** chiếu bằng, rồi quay quanh **t** đưa mpα đến vị trí mới chứa điểm A

Giải

_ Để quay mpα quanh trục t $\perp P_1$ đến vị trí mới mp $\alpha' \in$ A thì đường bằng h_α của mpα cùng độ cao với điểm A, đến vị trí mới h'_α đi qua điểm A. Khi quay quanh trục t chiếu bằng thì h_α luôn luôn tiếp xúc với đường tròn có bán kính R là khoảng cách giữa h_α và t. Lúc này $h_1'_\alpha$ tiếp xúc với đường tròn tâm t_1 bán kính $R=Kt_1$ và đi qua A1 $\Rightarrow A_2 \in h_2'_\alpha \equiv h_{2\alpha}$. Điều này xãy ra khi ta chọn trục t $\perp P_1$ thoả mãn: $A_1t_1 \geq t_1K$ (với K là chân đường vuông góc kẽ từ t_1 đến $h_{1\alpha}$). Vết bằng m_α cũng quay đến vị mới $m_\alpha' // h_1'_\alpha$

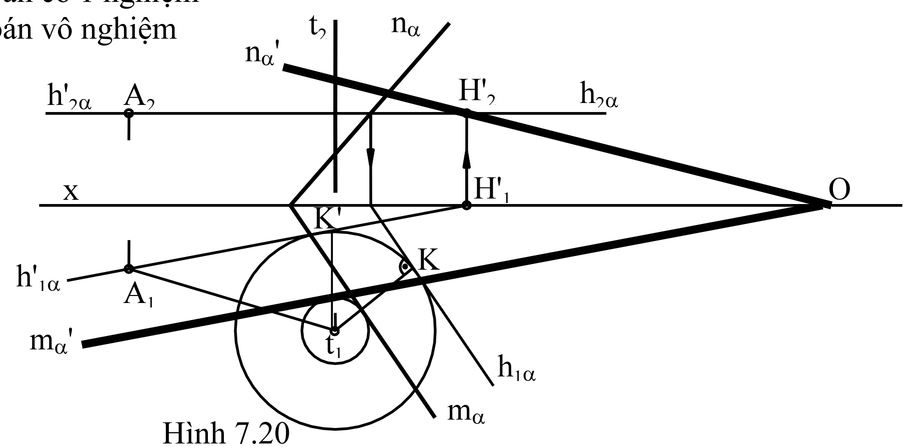
_ Vẽ vết dứng H' của đường thẳng $h'_\alpha \Rightarrow n_\alpha$' qua H'_2 và đi qua giao điểm O của vết bằng m_α' với trục x; (Hình 7.20)

_ Biện luận:

+ Nếu $A_1t_1 \geq t_1K$: Bài toán có 2 nghiệm

+ Nếu $A_1t_1 = t_1K$: Bài toán có 1 nghiệm

Nếu $A_1t_1 < t_1K$: Bài toán vô nghiệm



Hình 7.20

➢ Chú ý

Đối với bài toán quay quanh trục chiếu t đưa mặt phẳng α đến vị trí mới α' chứa đường thẳng d. Ta hãy chọn trục quay t đi qua giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng α; sau đó chỉ cần quay mặt phẳng α quanh trục t đến vị trí mới α' chứa một điểm tuỳ ý trên d (trở về ví dụ 5 quay mặt phẳng đến vị trí mới chứa điểm)

❖ Ví dụ 6

Cho đoạn thẳng AB. Hãy chọn trục quay **t** là đường thẳng chiếu, rồi quay quanh **t** đưa AB đến vị trí mới thoả mãn:

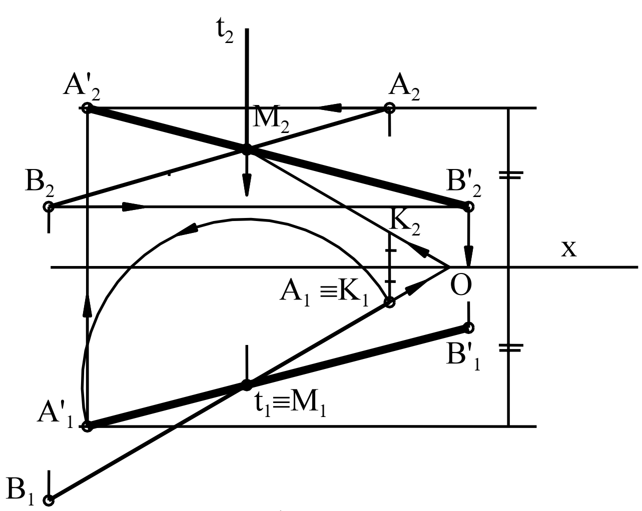
a) Thuộc mặt phẳng phân giác 1 (có hai hình chiếu đối xứng nhau qua trục x)

b) Thuộc mặt phẳng phân giác 2 (có hai hình chiếu trùng nhau)

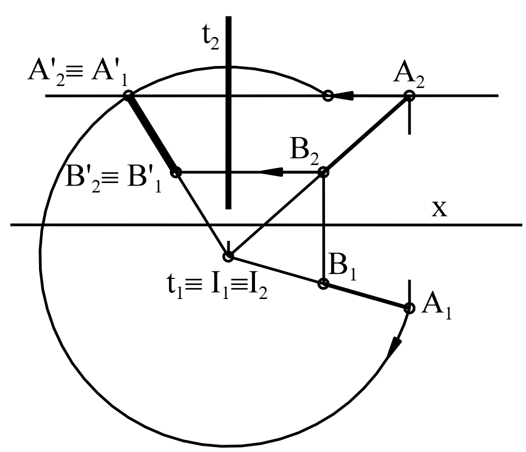
Giải

a) Vẽ giao điểm M = AB ∩ mphpg 1, bằng cách lấy điểm K thuộc mặt phẳng phân giác 1 sao cho $K_1 \equiv A_1$. Gọi $O = B_1K_1 \cap x$.

Vẽ $M_2 = OK_2 \cap A_2B_2 \Rightarrow M_1 \in A_1B_1$. Vậy M = AB ∩ mphpg 1



Hình 7.21a



Hình 7.21b

_ Chọn trục quay **t** chiếu bằng qua M ⇒ $t_1 \equiv M_1$, $t_2 \perp x$

_ Quay quanh trục t đưa đường thẳng AB đến vị trí mới A'B' thuộc mặt phẳng phân giác 1; vì

$M \in AB$ nên ta chỉ cần quay thêm điểm A đến vị trí mới A' thuộc mặt phẳng phân giác 1 thì (A_1', A_2' đối xứng nhau qua trục x); Hình 7.21a

b) Tương tự như trên, chọn trục quay t chiếu bằng đi qua giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng phân giác 2; có $I_1 \equiv I_2 = A_1B_1 \cap A_2B_2$

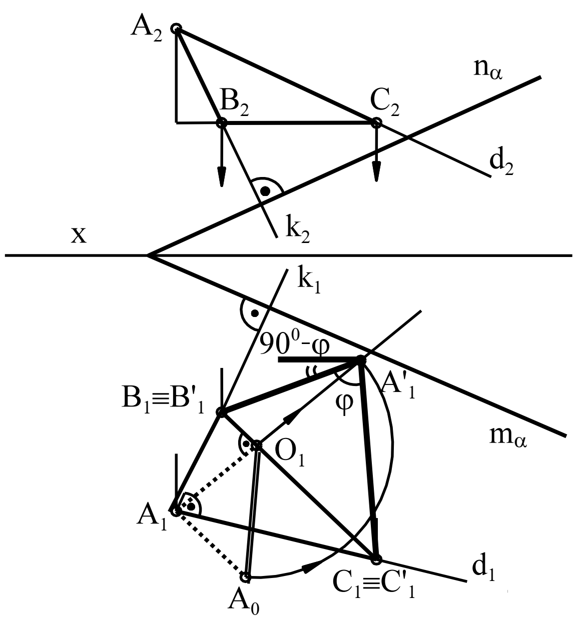
Quay A_1 quanh tâm t_1 đến vị trí mới A'_1 cùng độ cao với điểm A$\Rightarrow A'_2 \equiv A'_1$ và $B'_2 \equiv B'_1$ cùng độ cao với điểm B; (Hình 7.21b)

❖ Ví dụ 7

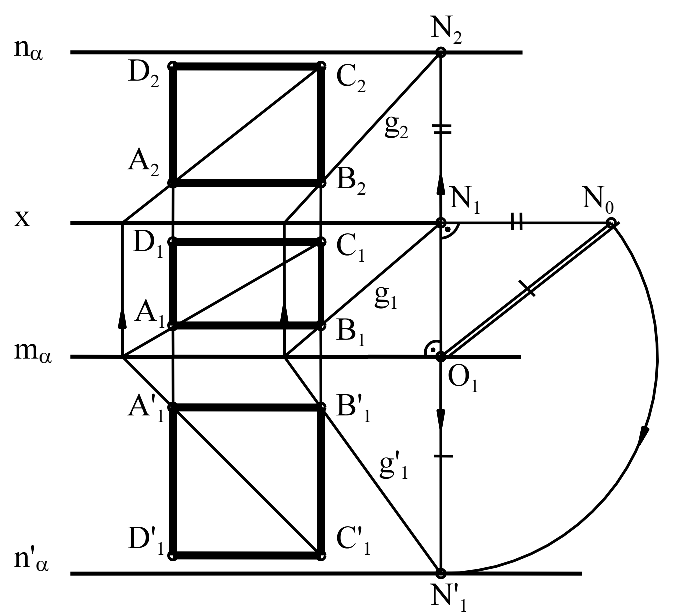
Cho mpα (m_α, n_α) và đường thẳng d; (Hình 7.22). Bằng phép quay quanh đường bằng, hãy xác định góc nghiêng của đường thẳng d hợp với mpα

Giải

- Qua điểm A tuỳ ý trên d, vẽ đường thẳng $k \perp$ mp α
  Gọi $\varphi = \widehat{(k, d)} \Rightarrow \widehat{(d, mp\alpha)} = 90^0 - \varphi$
- Vẽ đường bằng BC, với $B \in k$, $C \in d$.
  Bằng phép quay điểm A quanh đường bằng BC ta xác định được $\varphi = \widehat{B'_1A'_1C'_1} \Rightarrow \widehat{(d, mp\alpha)} = 90^0 - \varphi$ (Hình 7.22)



Hình 7.22



Hình 7.23

❖ Ví dụ 8

Cho mpα (m_α, n_α) và hình chiếu bằng A_1B_1; (Hình 7.23). Bằng phép gập mặt phẳng quanh vết, hãy vẽ các hình chiếu của hình vuông ABCD thuộc mpα

Giải

- Vẽ hình chiếu đứng B_2 của điểm B, bằng cách gắn $B \in g \in$ mp α; từ $B_1 \in g_1 \Rightarrow B_2 \in g_2$
- Vẽ A_2B_2 // x
- Gập mpα quanh vết bằng m_α, ta vẽ được hình gập $B'_1 \in g'_1 \Rightarrow A'_1B'_1$ // x và $A'_1B'_1 = AB$
- Vẽ hình vuông thật $A'_1B'_1C'_1D'_1 = ABCD$
- Từ $A'_1C'_1 \Rightarrow A_1C_1 \Rightarrow A_2C_2$; (Hình 7.23)

======================

Bài 8 ĐƯỜNG CONG VÀ MẶT

A. ĐƯỜNG CONG

I. KHÁI NIỆM

Ta có thể nói rằng đường cong là qũi tích của một diểm chuyển động theo một qui luật nhất định nào đó tạo thành. Có các loại đường cong sau:

_ Đường cong phẳng : Nếu đường cong thuộc một mặt phẳng

_ Đường cong ghềnh : Nếu đường cong không thuộc một mặt phẳng

_ Đường cong đại số bậc **n** : Nếu đường cong được biểu diễn bằng một phương trình đại số bậc **n**

_ Đường cong đại số bậc **m x n** : Nếu đường cong được biểu diễn bằng hai phương trình đại số bậc **m** và bậc **n**

Những đường cong phẳng bậc hai thường gặp là: *Đường tròn, Elip, Parabol, Hyperbol*

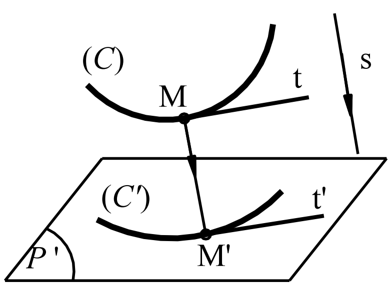
Ta có thể nói rằng *Elip, Parabol, Hyperbol* lần lượt là những đường cong bậc hai không có điểm vô tận, có một điểm vô tận thuộc trục đối xứng, có hai điểm vô tận thuộc hai đường tiệm cận

II. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐƯỜNG CONG

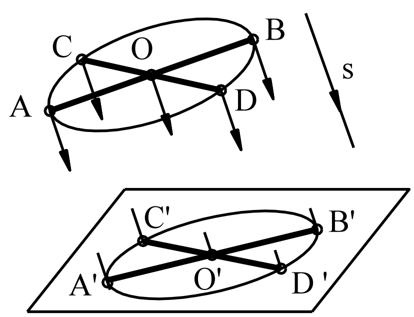
◆ **Tính chất 1**

Hình chiếu xuyên tâm hay song song của tiếp tuyến của đường cong tại một điểm nói chung là tiếp tuyến của hình chiếu đường cong tại hình chiếu điểm đó

Giả sử Mt là tiếp tuyến của đường cong (*C*) tại điểm M ⇒ M’t' là tiếp tuyến của đường cong (*C'*) tại điểm M’ là hình chiếu của điểm M (Hình 8.1)



Hình 8.1



Hình 8.2

◆ **Tính chất 2**

Hình chiếu của đường cong đại số bậc n nói chung là đường cong đại số bậc n

◆ **Tính chất 3**

Hình chiếu vuông góc của đường cong ghềnh đại số bậc n lên mặt phẳng đối xứng của nó là đường cong phẳng đại số bậc n / 2

➢ **Chú ý**

_ Hình chiếu song song của ***Elip, Parabol, Hyperbol*** lần lượt là ***Elip, Parabol, Hyperbol***

_ Hình chiếu song song của cặp đường kính liên hiệp của *Elip* là cặp đường kính liên hiệp của *Elip* hình chiếu (Hình 8.2). Nếu hai đường kính liên hiệp vuông góc với nhau thì gọi là cặp trục của Elip

_ *Elíp* có thể được xác định bằng cặp đường kính liên hiệp của nó

_ Riêng đối với đường tròn ta chú ý các tính chất sau:

\+ Nếu mặt phẳng của đường tròn không song song với phương chiếu thì hình chiếu của đường tròn là *Elip*

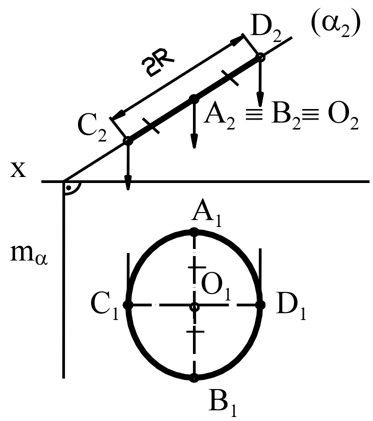
+ Tâm của đường tròn chiếu thành tâm của *elip*
+ Hai đường kính vuông góc của đường tròn chiếu thành hai đường kính liên hiệp của *Elip*

❖ **Đặc biệt**

Trong hình chiếu vuông góc, trục dài của *Elip* là hình chiếu của đường kính đường tròn song song với mặt phẳng hình chiếu, nên bằng đường kính của đường tròn đó

❖ **Ví dụ**

Hãy vẽ các hình chiếu của đường tròn tâm O, bán kính R thuộc mặt phẳng α chiếu đứng (Hình 8.3)



Giải

_ Hình chiếu đứng của đường tròn suy biến thành đoạn thẳng $C_2D_2 = 2R$ và $C_2, D_2 \in (\alpha_2)$

_ Hình chiếu bằng của đường tròn là *Elip* có :

+ Tâm O_1
+ Trục dài $A_1B_1 = AB = 2R$ với $AB \perp$ mp P_2
+ Trục ngắn $C_1D_1 \perp A_1B_1$ tại O_1

Hình 8.3

B. MẶT HÌNH HỌC

I. KHÁI NIỆM

1) Đa diện

Đa diện là mặt kín được tạo thành bởi một số hữu hạn các đa giác phẳng khép kín

_ Các đa giác này là các mặt của đa diện

_ Các cạnh, các đỉnh của đa giác này gọi là các cạnh, các đỉnh của đa diện

Mặt chóp, mặt lăng trụ là các đa diện đặc biệt

2) Mặt cong

Ta có thể nói rằng mặt cong là qũi tích của một đường chuyển động theo một qui luật nhất định nào đó tạo thành.

Đường chuyển động gọi là đường sinh, trong quá trình chuyển động tạo thành mặt đường sinh có thể biến dạng hoặc không biến dạng; đường sinh có thể là đường thẳng hoặc đường cong. Nếu đường sinh là đường thẳng thì mặt được tạo thành gọi là mặt kẽ (mặt nón, mặt trụ,...)

Có các loại mặt cong sau:

_ Mặt tròn xoay: Nếu mặt được tạo thành bởi một đường sinh quay xung quanh một trục

_ Mặt cong đại số bậc n : Nếu mặt được biểu diễn bằng một phương trình đại số bậc n

_ Các mặt cong bậc hai thường gặp là: Mặt *nón*, mặt *trụ*, mặt *cầu*, mặt *Elipxôit*, mặt *Paraboloic,* mặt *Hyperbolic*...

II. BIỂU DIỄN MẶT - ĐIỂM THUỘC MẶT

_ Biểu diễn một mặt là biểu diễn một số thành phần của mặt đủ xác định mặt đó.Tuy nhiên, để dễ hình dung người ta thường biểu diễn mặt cong bằng các đường bao hình chiếu

_ Biểu diễn một điểm thuộc mặt là biểu diễn điểm đó thuộc một đường của mặt sao cho trên hình chiếu đường này là đường thẳng hoặc đường tròn

Sau đây sẽ biểu diễn một số mặt thông dụng

1) Đa diện

Biểu diễn đa diện bằng cách biểu diễn tất cả các cạnh của đa diện

➢ (Hình 8.4) biểu diễn tứ diện ABCD. Cách vẽ thấy khuất của cặp cạnh hình chiếu bằng A_1B_1, C_1D_1 và cặp cạnh hình chiếu đứng A_2C_2, B_2D_2 như đã biết.

➢ Thấy khuất

_ Đường đi qua một điểm khuất trên hình chiếu nào thì đường đó khuất trên hình chiếu đó

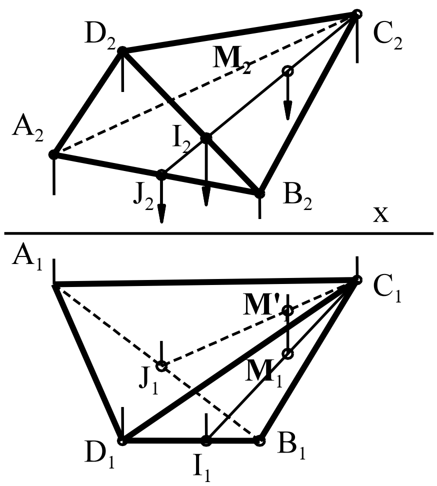
_ Mặt phẳng chứa một đường thẳng khuất trên hình chiếu nào thì mặt phẳng đó khuất trên hình chiếu đó

➢ Cho hình chiếu đứng M_2; hãy vẽ hình chiếu bằng M_1, biết M thuộc tứ diện ABCD(Hình 8.4)

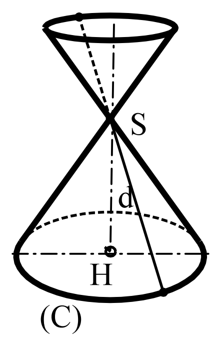
Với vị trí M_2 đã cho thì có hai điểm M và M', mà $M'_2 \equiv M_2$ với:

\+ $M \in$ mp (BCD) $\Rightarrow M \in CI$. Từ $M_2 \in C_2I_2 \Rightarrow M_1 \in C_1I_1$. Vì C_1I_1 thấy nên M_1 thấy

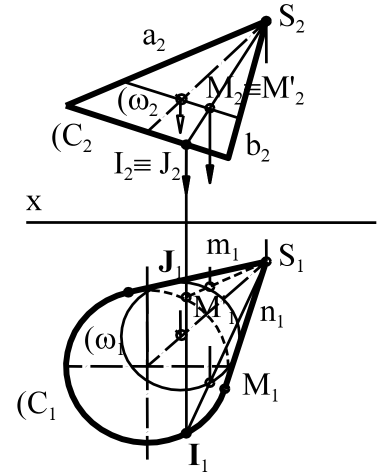
$M' \in$ mp (ACD) $\Rightarrow M' \in CJ$. Từ $M'_2 \in C_2J_2 \Rightarrow M'_1 \in C_1J_1$. Vì C_1J_1 khuất nên M'_1 khuất



Hình 8.4



Hình 8.5



Hình 8.6

2) Mặt nón bậc hai

*Mặt nón bậc hai là mặt được tạo thành bởi một đường thẳng **d** chuyển động luôn luôn đi qua một điểm **S** cố định gọi là đỉnh nón và tựa vào một đường cong bậc hai (**C**) gọi là đường chuẩn của nón (Hình 8.5).*

➢ Mặt nón bậc hai gồm có hai phần đối xứng nhau qua đỉnh nón. (Hình 8.6) biểu diễn một phần của mặt nón bậc hai được giới hạn từ đỉnh S đến đường chuẩn bậc hai (C) thuộc mặt phẳng chiếu đứng có hình chiếu bằng là đường tròn.

_ a_2, b_2 là hai đường sinh bao ở hình chiếu đứng của nón (a_1, b_1 không vẽ ở đây)

_ m_1, n_1 là hai đường sinh bao ở hình chiếu bằng của nón (m_2, n_2 không vẽ ở đây)

➢ Thấy khuất

\+ Những điểm thuộc mặt nón thì thuộc đường sinh của nón: Nếu chân đường sinh này thuộc cung thấy của đường chuẩn (C) trên hình chiếu nào thì điểm đó được thấy trên hình chiếu đó

\+ Những điểm thuộc nửa trước của nón kể từ hai đường sinh mà hình chiếu đứng là hai đường sinh biên thì được thấy ở hình chiếu đứng

\+ Những điểm thuộc nửa trên của nón kể từ hai đường sinh mà hình chiếu bằng là hai đường sinh biên thì được thấy ở hình chiếu bằng

➢ Cho hình chiếu đứng M_2; hãy vẽ hình chiếu bằng M_1, biết M thuộc mặt nón đỉnh S

(hình 8.6)

Với vị trí M_2 đã cho thì có hai điểm M và M’, mà $M'_2 \equiv M_2$:

+ Gắn $M \in SI \in$ nón. Từ $M_2 \in C_2I_2 \Rightarrow M_1 \in S_1I_1$. Vì S_1I_1 thấy nên M_1 thấy
+ Gắn $M' \in SJ \in$ nón. Từ $M'_2 \in S_2J_2 \Rightarrow M'_1 \in S_1J_1$. Vì S_1J_1 khuất nên M'_1 khuất

➢ **Chú ý**

1) Để vẽ hình chiếu bằng M_1, M'_1 của điểm M, ta có thể gắn M vào đường *Elip* (ω) thuộc mặt nón; Elip (ω) này có tâm nằm trên trục của nón và thuộc mặt phẳng chiếu đứng song song mp (C). Vì vậy (ω_1) là đường tròn và từ $M_2 \in (\omega_1) \Rightarrow M_1$, $M'_1 \in (\omega_1)$ (Hình 8.6)

2) Mặt nón tròn xoay là mặt được tạo thành bởi một đường thẳng quay xung quanh một trục tại một điểm cố định thuộc trục quay đó. Mặt phẳng vuông góc với trục tròn xoay này sẽ cho giao tuyến là đường tròn.

3) Mặt trụ bậc hai

Mặt trụ bậc hai là trường hợp đặc biệt của mặt nón bậc hai khi đỉnh nón S ở xa vô tận

➢ (Hình 8.7) biểu diễn mặt trụ bậc hai có đường chuẩn (C) là elip thuộc mặt phẳng chiếu đứng có hình chiếu bằng là đường tròn.

_ a_2, b_2 là hai đường sinh bao ở hình chiếu đứng của trụ, hình chiếu bằng không vẽ ở đây

_ m_1, n_1 là hai đường sinh bao ở hình chiếu bằng của trụ, hình chiếu đứng không vẽ ở đây

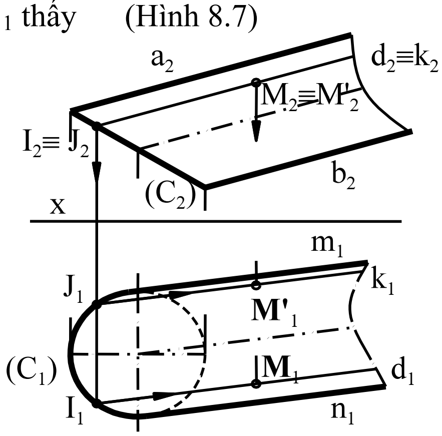
➢ **Thấy khuất**

Xét thấy khuất của trụ tương tự như xét thấy khuất của nón.

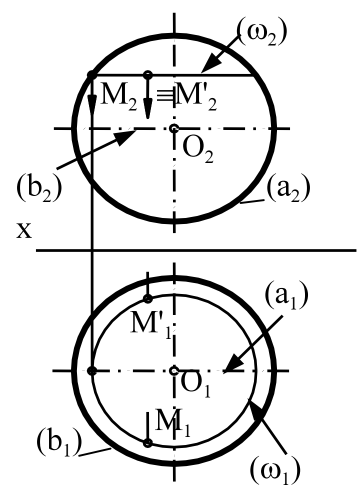
➢ Cho hình chiếu đứng M_2; hãy vẽ hình chiếu bằng M_1, biết M thuộc mặt trụ (Hình 8.7)

Với vị trí M_2 đã cho thì có hai điểm M và M’, mà $M'_2 \equiv M_2$:

+ Gắn $M \in d \in$ trụ. Từ $M_2 \in d_2 \Rightarrow M_1 \in d_1$.
  Vì d_1 thấy nên M_1 thấy
+ Gắn $M' \in k \in$ trụ.Từ $M'_2 \in k_2 \Rightarrow M'_1 \in k_1$.
  Vì k_1 thấy nên M'_1 thấy (Hình 8.7)



Hình 8.7



Hình 8.8

4) Mặt cầu

- *Mặt cầu là mặt bậc hai tròn xoay được tạo thành bởi một đường tròn quay xung quanh một đường kính của nó*
- *Mặt cầu là quĩ tích của những điểm trong không gian cách đều một điểm cố định gọi là tâm*

➢ (Hình 8.8) biểu diễn mặt cầu bậc hai tâm O, bán kính R

Các hình chiếu của mặt cầu là các đường tròn bằng nhau có bán kính R của cầu

_ a_2 là đường tròn bao ở hình chiếu đứng của cầu ; (a) $\in$mp // P_2

_ b_1 là đường tròn bao ở hình chiếu bằng của cầu ; (b) ∈mp // P_1

➢ **Thấy khuất**

+ Những điểm thuộc nửa trên của mặt cầu kể từ đường tròn (b) được thấy ở hình chiếu bằng
+ Những điểm thuộc nửa trước của mặt cầu kể từ đường tròn (a) được thấy ở hình chiếu đứng

➢ Cho hình chiếu đứng M_2; hãy vẽ hình chiếu bằng M_1, biết M thuộc mặt cầu (O,R) (hình 8.8)
Với vị trí M_2 đã cho thì có hai điểm M và M’, mà $M'_2 \equiv M_2$:
Gắn M ≡M’∈ (ω) ∈ cầu. Từ M_2, $M'_2 \in (\omega_2) \Rightarrow M_1$; $M'_1 \in (\omega_1)$. Vì M_2 nằm nửa trên của cầu nên M_1; M'_1 thấy ở hình chiếu bằng

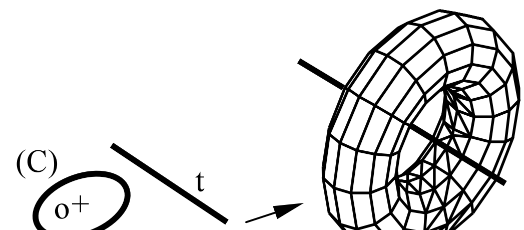
5) Mặt xuyến

*Mặt xuyến là mặt bậc bốn tròn xoay được tạo thànhbởi một đường tròn **(C)** quay xung quanh một trục **t** thuộc mặt phẳng của đường tròn nhưng không đi qua tâm O (Hình 8.9)*

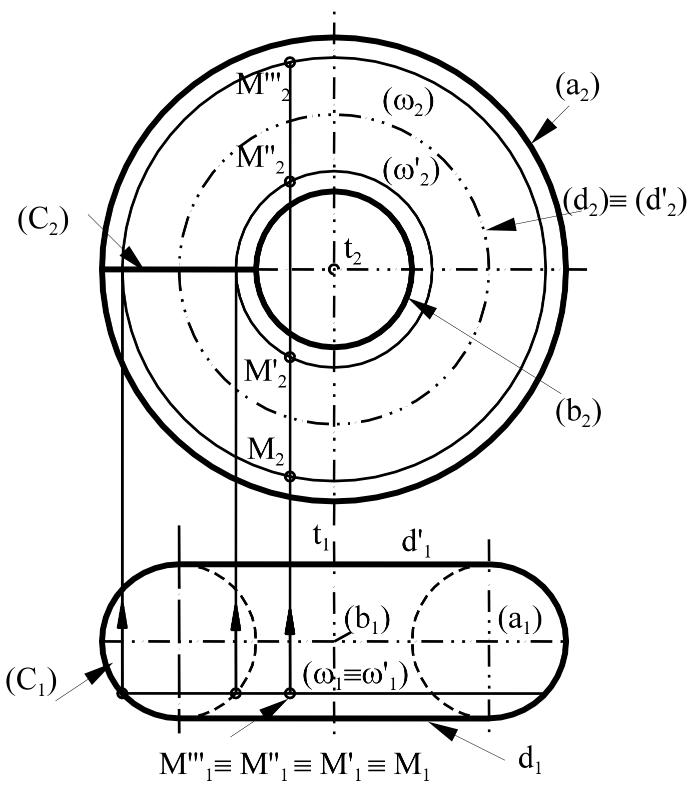
❖ **Phân loại mặt xuyến**

_ **Mặt xuyến hở:** Nếu trục **t** không căt đường tròn sinh **(C)**

_ **Mặt xuyến kín:** Nếu trục **t** cắt đường tròn sinh **(C)**



Hình 8.9



Hình 8.10

- Ta thường biểu diễn mặt xuyến ở vị trí đặc biệt có trục **t** vuông góc với mặt phẳng hình chiếu.
- (Hình 8.10) biểu diễn đồ thức của mặt xuyến có trục t ⊥ P_2
- (a_2), (b_2) là hình chiếu đứng của các đường tròn vĩ tuyến tạo ra do các điểm thuộc đường tròn sinh (C) xa và gần trục t nhất
- (a), (b) thuộc một mặt phẳng vuông góc trục t và đồng thời cũng là mặt phẳng đối xứng của xuyến
- (C_1) là hình chiếu bằng của đường tròn sinh (C) thuộc mặt phẳng đối xứng chứa trục t .
- d_1, d'_1 là hình chiếu bằng của hai đường tròn trung bình của xuyến
(đường tròn trung bình của xuyến là đường tròn tạo ra do hai điểm nằm trên đường tròn sinh (C) có khoảng cách đến trục t bằng khoảng cách của tâm O đường tròn (C) đến trục t-tạo thành.

➢ **Thấy khuất**

_ Những điểm thuộc nửa trên của xuyến kể từ đường tròn sinh (C) và đường tròn trung bình (d) sẽ thấy ở hình chiếu bằng .

_ Những điểm thuộc nửa trước của xuyến kể từ hai đường tròn (a), (b) sẽ thấy ở hình chiếu đứng

➢ **Chú ý**

_ Mặt phẳng vuông góc với trục t sẽ cắt xuyến cho giao tuyến là hai đường tròn vĩ tuyến

_ Mặt phẳng chứa trục t sẽ cắt xuyến cho giao tuyến là hai đường tròn bằng đường tròn sinh

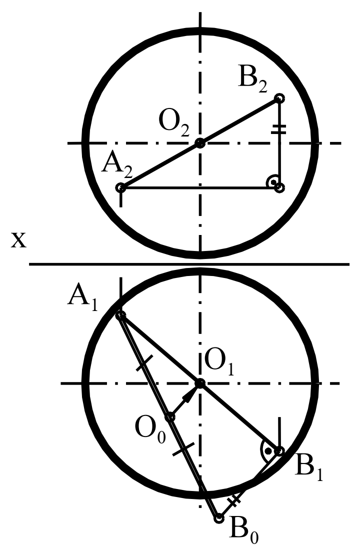
➢ Cho hình chiếu bằng M_1; hãy vẽ hình chiếu đứng của điểm M, biết M thuộc mặt xuyến (Hình 8.10)
Với vị trí M1 đã cho thì có bốn điểm M, M’, M’’, M’’’ mà $M'''_1 \equiv M''_1 \equiv M'_1 \equiv M_1$:
Gắn M, M’’’ $\in$ (ω) và M’, M’’$\in$ (ω’) $\in$ xuyến. Từ $[M'''_1 \equiv M''_1 \equiv M'_1 \equiv M_1] \in [(\omega_1) \equiv (\omega'_1)]$
$\Rightarrow M_2, M'''_2 \in (\omega_2)$ và $M'_2, M''_2 \in (\omega'_2)$. Vì M_1 nằm nửa trước của xuyến $\Rightarrow M_2, M'_2, M''_2, M'''_2$ thấy ở hình chiếu đứng .

III. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢi SẴN

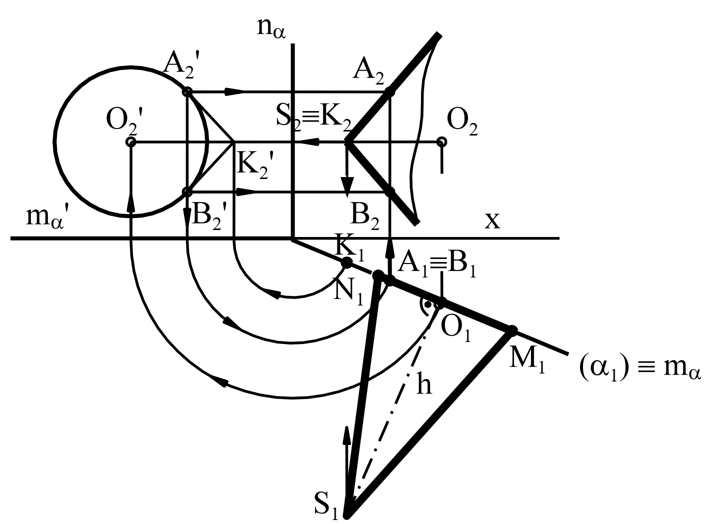
❖ Ví dụ 1
Cho đoạn thẳng AB. Hãy biểu diễn quĩ tích những điểm trong không gian nhìn đoạn AB dưới góc vuông.

Giải

_ Quĩ tích những điểm trong không gian nhìn đoạn AB dưới góc vuông là mặt cầu đường kính AB, có tâm O là trung điểm của đoạn AB
_ Bằng phương pháp tam giác ta xác định độ dài thật của đoạn thẳng AB là đoạn A_1B_0
Vẽ mặt cầu tâm O là trung điểm của đoạn AB, bán kính bằng A_1B_0 / 2; (Hình 8.11)

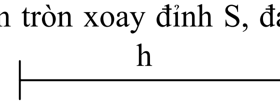


Hình 8.11



Hình 8.12

❖ Ví dụ 2
Cho mp α chiếu bằng và điểm O thuộc mp α. Hãy biểu diễn mặt nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, bán kính R thuộc mp α, chiều cao SO = h cho trước



Giải

_ Hình chiếu bằng của đáy nón suy biến thành đoạn thẳng $M_1N_1 = 2R$ thuộc đường thẳng (α_1)
_ Gập mp α quanh vết đứng, ta vẽ được đường tròn thật tâm O_2’ bán kính R của đáy nón
_ Vì chiều cao của nón bằng h , nên ta vẽ O_1S_1 = h và vuông góc đường thẳng (α_1) $\Rightarrow S_2$ với O_2S_2 // x
_ Vẽ hai đường sinh bao ở hình chiếu bằng của nón là: S_1N_1 , S_1M_1
_ Hai đường sinh bao ở hình chiếu đứng của nón sẽ đi qua S_2 và tiếp xúc với Elip hình chiếu đứng của đáy nón. Vì Elip này không vẽ chính xác bằng tay nên ta có cách giải như sau:

+ Việc vẽ hai đường sinh bao này tương đương với vẽ hai đường thẳng đi qua điểm K∈ mpα với $K_2 \equiv S_2$ và tiếp xúc với đáy nón
+ Từ hình gập ta xác định K'_2 rồi vẽ $K'_2A''_2$ và $K'_2B''_2$ tiếp xúc với đường tròn gập (O'_2, R).

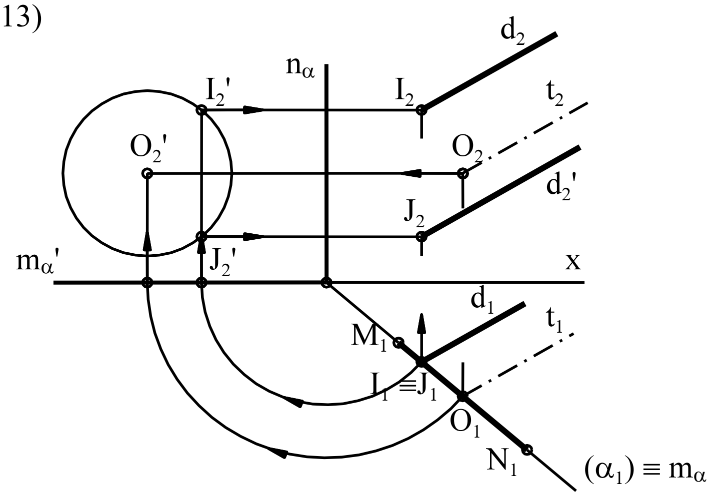
+ Trả về hình chiếu đứng ta được $K_2A'_2$ và K_2B_2- là hai đường sinh bao cần vẽ ; (Hình 8.12)

❖ Ví dụ 3

Cho mp α chiếu bằng, hình chếu bằng d_1 và đường thẳng Ot với O∈ mp α. Hãy vẽ hình chiếu đứng d_2 của đường sinh d của mặt trụ nhận Ot làm trục và đường chuẩn của trụ là đường tròn tâm O, bán kính R thuộc mp α.

Giải

_ Hình chiếu bằng của đáy trụ là đoạn thẳng $M_1N_1 = 2R$ thuộc đường thẳng (α_1)
_ Gập mp α quanh vết đứng, ta vẽ được đường tròn thật tâm O_2' bán kính R của đáy trụ
_ Vì d là đường sịnh của mặt trụ nên d tựa trên đáy tại hai điểm I, J. Ở hình gập I_2', J_2' thuộc đường tròn gập
_ Từ hình chiếu bằng và hình gập của I, J ⇒ I_2, J_2
_ Hai đường thẳng d_2, d_2' qua I_2, J_2 và song song O_2t_2 là hình chiếu đứng của hai đường sinh cần dựng ; (Hình 8.13)



Hình 8.13

========================

Bài 9 MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CONG

I. KHÁI NIỆM

_ Tiếp tuyến tại một điểm của một đường cong thuộc mặt cong cũng là tiếp tuyến của mặt cong tại điểm đó

_ Nếu tại một điểm của mặt cong có vô số tiếp tuyến thuộc một mặt phẳng thì mặt phẳng này gọi là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại điểm đó - mp(Mt,Mk) ; (Hình 9.1)

➢ Trong bài này ta sẽ trình bày các loại bài toán tiếp xúc sau:

1. Mặt phẳng tiếp xúc với một mặt tại một điểm cho trước thuộc mặt
2. Mặt phẳng tiếp xúc với một mặt đi qua một điểm cho trước không thuộc mặt
3. Mặt phẳng tiếp xúc với một mặt song song với một đường thẳng cho trước

II. MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT KẼ

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt kẽ sẽ tại một điểm thuộc mặt sẽ chứa các đường sinh là đường thẳng của mặt kẽ đi qua điểm đó

1) Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón

❖ **Ví dụ 1**

Cho mặt nón đỉnh S và hình chiếu đứng M_2 của điểm M thuộc nón (Hình 9.2). Qua điểm M hãy dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón

Giải

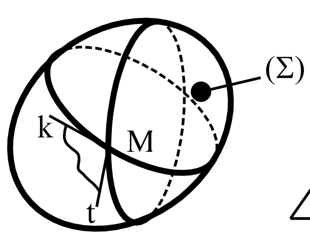
Với vị trí M_2 đã cho thì có hai điểm M và M’, mà $M'_2 \equiv M_2$:

+ Gắn $M \in SA \in$ nón. Từ $M_2 \in C_2A_2 \Rightarrow M_1 \in S_1A_1$

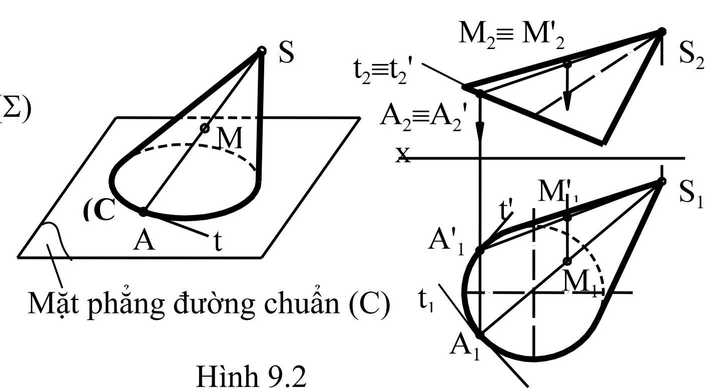
+ Gắn $M' \in SA' \in$ nón. Từ $M'_2 \in S_2A'_2 \Rightarrow M'_1 \in S_1A'_1$

Mặt phẳng tiếp xúc với nón tại điểm M thuộc nón phải chứa đường sinh SM và chứa một tiếp tuyến với nón tại một điểm tuỳ ý trên đường sinh SM ; gọi A là chân đường sinh SM trên đường chuẩn (C) ; vẽ At tiếp xúc với (C) Vậy mp (SM, At) tiếp xúc với nón theo đường sinh SM

Tương tự, ta cũng dựng được mp (SM’,A’t’) tiếp xúc với nón theo đường sinh SM’



Hình 9.1



Hình 9.2

❖ **Ví dụ 2**

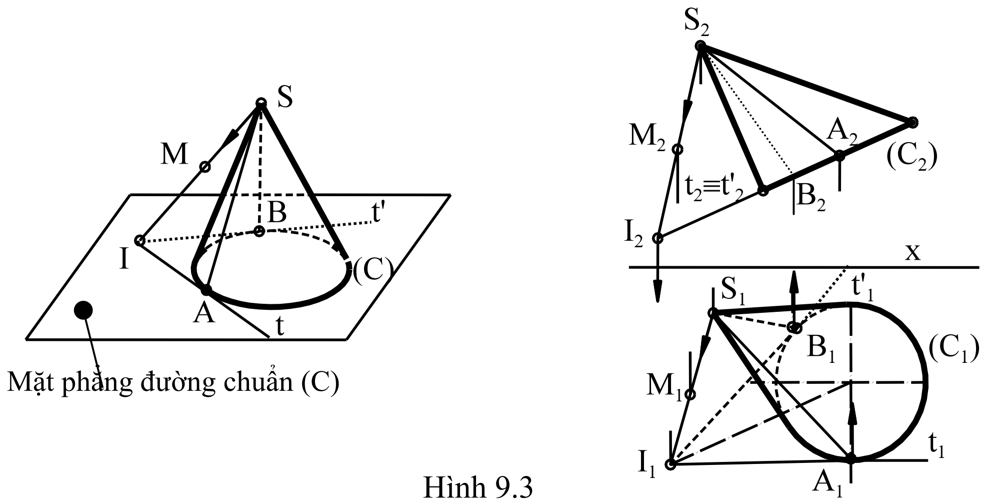
Cho mặt nón đỉnh S và điểm M không thuộc nón (Hình 9.3). Qua điểm M hãy dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón

Giải

Các mặt phẳng tiếp xúc cần dựng chứa SM và sẽ tiếp xúc với nón theo các đường sinh SA,SB. Các mặt phẳng tiếp xúc này sẽ cắt mặt phẳng đường chuẩn (C) theo các tiếp tuyến **t** và **t**’ với đường chuẩn (C). Vì vậy ta có cách vẽ như sau:

_ Vẽ $I = SM \cap mp(C)$

Vẽ IA, IB tiếp xúc với (C) $\Rightarrow$ mp(SIA) và mp(SIB) là hai mặt phẳng tiếp xúc cần dựng



Hình 9.3

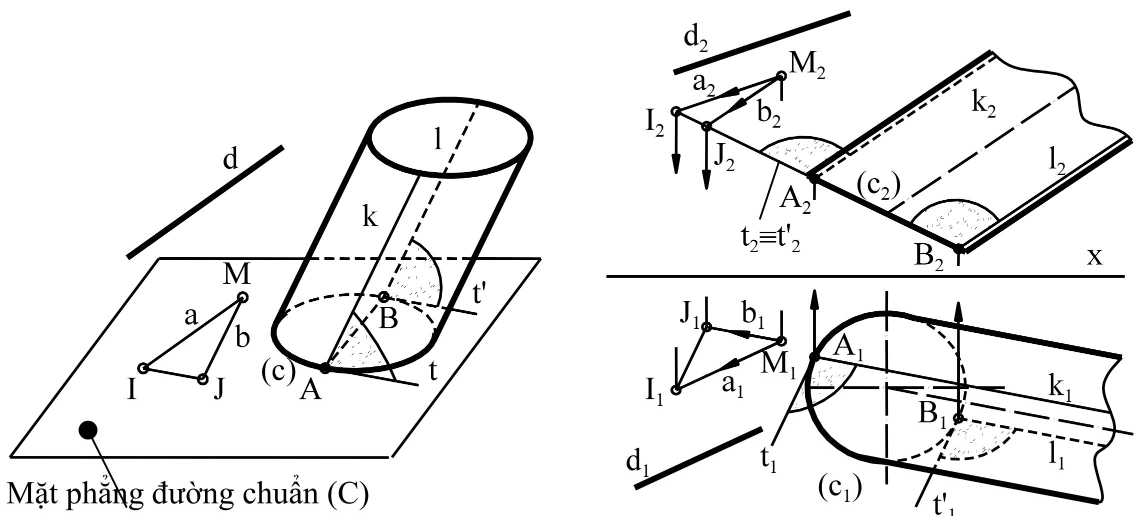
2) Mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ

❖ **Ví dụ**

Cho mặt trụ đường chuẩn (C) nằm trong mặt phẳng chiếu đứng và đường thẳng d (Hình 9.4). Hãy dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ song song với đường thẳng d

Giải

Mặt phẳng tiếp xúc cần dựng song song với đường thẳng d và tiếp xúc với trụ theo một đường sinh. Như vậy phương của mặt phẳng tiếp xúc đã được xác định; vì vậy ta có cách vẽ như sau:



Hình 9.4

Qua điểm M tuỳ ý, vẽ mp (a, b) với a // d và b // đường sinh trụ

_ Vẽ $I = a \cap mp(C)$ và $J = b \cap mp(C)$ $\Rightarrow mp(a, b) \cap mp(C) = IJ$

_ Vẽ các tiếp tuyến t, t' tiếp xúc với (C) lần lượt tại A, B và song song IJ

_ Từ các tiếp điểm A, B vẽ các đường sinh k, l

Vậy các mặt phẳng tiếp xúc cần dựng là: mp(t, k) và mp(t', l); (Hình 9.5)

III. MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CẦU

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm thuộc cầu thì vuông góc với bán kính của mặt cầu đi qua điểm đó

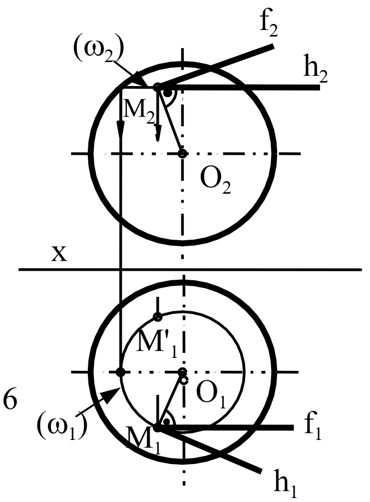
❖ **Ví dụ**

Cho mặt cầu (O,R) và hình chiếu đứng M_2 của điểm M thuộc cầu; (Hình 9.6). Hãy dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại M

Giải

- Từ vị trí M_2 của điểm M đã cho, ta gắn M thuộc đường tròn vĩ tuyến (ω) thuộc cầu sẽ xác định được hình chiếu bằng của điểm M là hai điểm M_1, $M'_1 \in (\omega_1)$
- Vẽ mp (h, f) ⊥ OM tại điểm M. vậy mp (h, f) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M
- Tương tự, ta vẽ được mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M'

  Bài toán có hai nghiệm



Hình 9.6

IV. MỘT VÀI VÍ DỤ ỨNG DỤNG GIẢI SẴN

❖ Ví dụ 1

Cho đường thẳng d (d_1, d_2); (Hình 9.7). Qua đường thẳng d hãy vẽ mặt phẳng hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc φ

Giải

Mặt phẳng cần dựng tiếp xúc với mặt nón tròn xoay có :

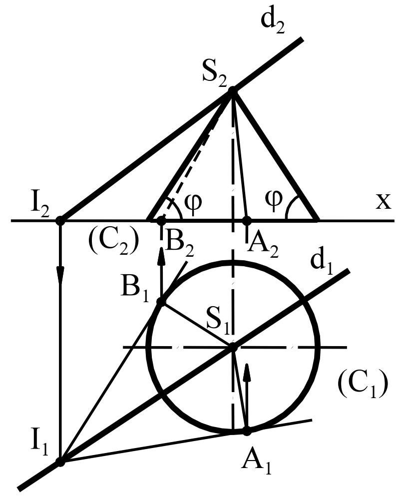
+ Đỉnh S∈ d
+ Trục vuông góc P 1
+ Các đường sinh hợp với P 1 góc φ

_ Lấy điểm S ∈ d tuỳ ý, vẽ mặt nón tròn xoay đỉng S, vì các đường sịnh nón hợp với P_1 góc φ nên hai đường sinh biên ở hình chiếu đứng của nón hợp với trục x góc φ. Hình chiếu bằng (C_1) của đường chuẩn (C); là đường tròn

_ Vẽ I = d ∩ mp(C);

_ Vẽ IA, IB tiếp xúc với (C); (Hình 9.7)

_ Vậy các mặt phẳng cần dựng là: mp(SIA) và mp(SIB).



Hình 9.7

Biện luận:

Gọi δ là góc của đường thẳng d với mp P_1

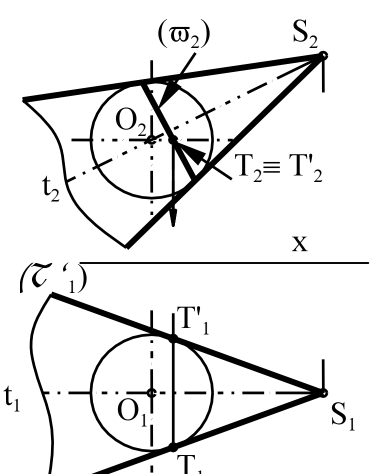
+ Nếu φ > δ : Bài toán có hai nghiệm
+ Nếu φ = δ : Bài toán có một nghiệm
+ Nếu φ < δ : Bài toán vô nghiệm

❖ Ví dụ 2

Cho hai đường sinh bao hình chiếu đứng của nón tròn xoay đỉnh S, trục t là đường mặt; (Hình 9.8). Hãy vẽ hai đường sinh bao hình chiếu bằng của nón.

Giải

Hai đường sinh bao hình chiếu bằng của nón là hai đường thẳng suy biến của hai mặt phẳng chiếu bằng tiếp xúc với nón. Hai mặt phẳng tiếp xúc này cũng tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp nón.



Hình 9.8

- Vậy ta vẽ một mặt cầu tâm O ∈t, tiếp xúc mặt nón theo một đường tròn (ω) thuộc mặt phẳng vuông góc trục t. Vì t // P_2 nên (ω_2) suy biến thành đoạn thẳng; [(ω_1) không vẽ ở đây]

- Qua đỉnh nón S, vẽ hai mp$T$ và mp$T$ ‘chiếu bằng tiếp xúc cầu ta nhận được hình chiếu bằng là hai đường thẳng (T_1), (T'_1) đi qua S_1 tiếp xúc đường tròn bao hình chiếu bằng của cầu. Vậy (T_1) và (T'_1) là hai đường sinh bao ở hình chiếu bằng của nón.

➢ Nhận xét

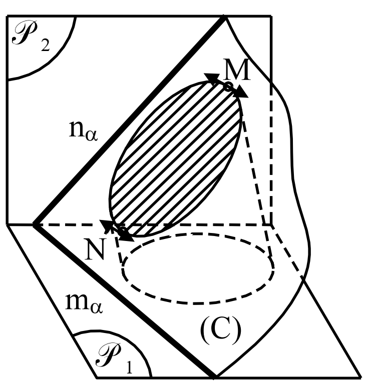
Hai tiếp điểm **T_1, T'_1** thuộc đường sinh bao hình chiếu bằng của nón cũng thuộc đường tròn bao hình chiếu bằng của cầu. Do đó chúng chính là hình chiếu bằng của các giao điểm của đường tròn lớn nhất nằm ngang của cầu với đường tròn tiếp xúc (ω) do cầu tiếp xúc nón.

❖ Ví dụ 3

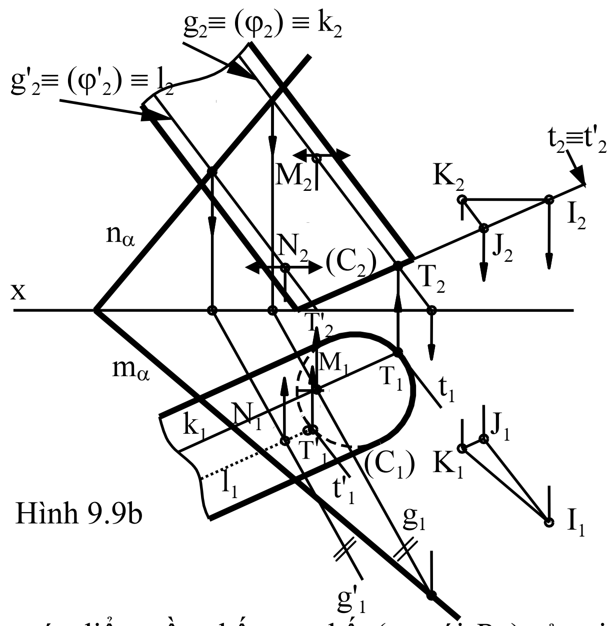
Cho mặt phẳng α (n_α, m_α) và mặt trụ có đường chuẩn (C_1) thuộc mặt phẳng chiếu đứng (Hình 9.9). Hãy vẽ điểm cao nhất, thấp nhất (đối với P_1) của giao tuyến của mp α với mặt trụ

Giải

- Gọi M, N lần lượt là các điểm cao nhất, thấp nhất cần tìm. Tại M, N tiếp tuyến của giao tuyến phải là những đường bằng của mặt phẳng α đồng thời chúng thuộc các mặt phẳng tiếp xúc với trụ (Hình 9.9a)
- Để có các tiếp tuyến đó ta phải vẽ các mặt phẳng tiếp xúc trụ song song với phương đường bằng của mặt phẳng α - đó là mp (k,t) và mp (l,t’) // mp (KIJ)
- Các mặt phẳng tiếp xúc này sẽ tiếp xúc với trụ theo các đường sinh tiếp xúc **k** và **l.** Các giao điểm M, N của hai đường sinh tiếp xúc này với mpα là các điểm cao, thấp nhất cần tìm
  $M = k \cap$ mp α và $N = l \cap$ mp α ; (Hình 9.9b)



Hình 9.9b



Hình 9.9b

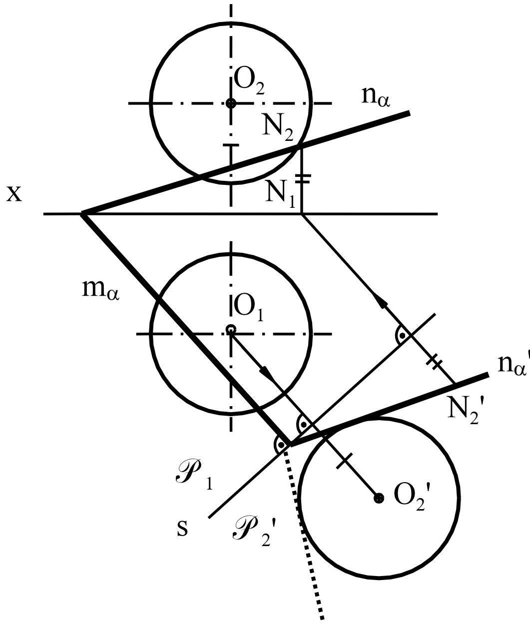
- ➢ Tương tự, trong ví dụ này ta có thể tìm các điểm gần nhất, xa nhất (so với P_2) của giao tuyến, bằng cách vẽ mặt phẳng tiếp xúc trụ song song với phương đường mặt của mặt phẳng α. Giao điểm của hai đường sinh tiếp xúc với mpα cho các điểm gần nhất, xa nhất cần tìm

➢ Chú ý

Tìm các điểm cao nhất, thấp nhất, gần nhất, xa nhất của giao tuyến của mặt phẳng α với mặt nón cách giải giống như trường hợp trên

❖ Ví dụ 4

Cho điểm 0 và vết bằng m_α của mặt phẳng α (Hình 9.10). Hãy vẽ vết đứng n_α của mp α; biết mp α cách điểm 0 một khoảng R



Hình 9.10

Giải

- Mặt phẳng α cách điểm 0 một khoảng R nên mặt phẳng α tiếp xúc với mặt cầu tâm 0 bán kính R
- Vẽ mặt cầu tâm O, bán kính R
- Thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng để mp α trở thành mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới; chọn trục s ⊥ m_α ⇒ Hình chiếu đứng mới của mp α suy biến thành đường thẳng (α_2’) đi qua giao điểm của m_α với trục s và tiếp xúc với đường tròn bao hình chiếu đứng mới của mặt cầu
- Từ (α_2’), trả về hình chiếu đứng ta được n_α (chú ý độ cao cũ bằng độ cao mới); (Hình 9.10)
- Bài toán có hai nghiệm (Ở đây chỉ vẽ một nghiệm)

==============

Bài 10 GIAO TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG VỚI MỘT MẶT

I. KHÁI NIỆM

_ Giao tuyến của mặt phẳng với một mặt là tập hợp các điểm chung của mặt phẳng với mặt đó
_ Giao tuyến của mặt phẳng với một đa diện thường là một hoặc nhiều đa giác phẳng trong đó:
+ Các cạnh của đa giác này là giao tuyến của các mặt của đa diện với mặt phẳng cắt
+ Các đỉnh của đa giác này là giao điểm của các cạnh của đa diện với mặt phẳng cắt
_ Giao tuyến của mặt phẳng với một mặt cong bậc **n** thường là đường cong phẳng bậc **n**

1) Đối với mặt nón bậc hai đường chuẩn là Elipse hoặc đường tròn

Giao tuyến có thể là:
_ **Elipse** (hoặc đường **Tròn**) Nếu mặt phẳng cắt tất cả các đường sinh của mặt nón
_ **Parabol** Nếu mặt phẳng song song với một đường sinh của mặt nón
_ **Hyperbol** Nếu mặt phẳng song song với hai đường sinh của mặt nón
(hai đường sinh này là hai hướng của hai đường tiệm cận của **Hyperbol** giao tuyến)

➢ Chú ý

Nếu mặt phẳng đi qua đỉnh nón **-** giao tuyến có thể là:
_ Một điểm đỉnh nón. Nếu mặt phẳng không cắt đường chuẩn của nón
_ Một đường sinh của nón. Nếu mặt phẳng cắt đường chuẩn của nón tại 1 điểm (tiếp xúc)
_ Hai đường sinh của nón: Nếu mặt phẳng cắt đường chuẩn của nón tại 2 điểm

➢ Nhận dạng giao tuyến

Từ chú ý trên ta có thể đoán nhận dạng giao tuyến của mặt phẳng với nón bậc hai có đường chuẩn là *Elipse* hoặc đường tròn ta làm như sau:

Qua đỉnh nón, vẽ mặt phẳng song song mặt phẳng đã cho. Nếu mặt phẳng vừa vẽ không cắt, cắt một điểm, cắt hai điểm với đường chuẩn của nón thì giao tuyến lần lượt là: Elipse, Parabol, Hyperbol

2) Đối với mặt trụ bậc hai đường chuẩn là Elipse hoặc đường tròn

Giao tuyến có thể là:
_ **Elipse** (đường **Tròn**) Nếu mặt phẳng cắt tất cả các đường sinh của mặt trụ
_ **Một đường sinh** (kép) Nếu mặt phẳng tiếp xúc mặt trụ
_ **Hai đường sinh** Nếu mặt phẳng song song đường sinh mặt trụ

➢ Chú ý

Khi vẽ giao tuyến ta cần chú ý đến các đặc trưng sau:
+ Trục đối xứng của giao tuyến
+ Các điểm ranh giới giữa phần thấy, phần khuất của giao trên từng hình chiếu
+ Các điểm cao nhất, thấp nhất (so với P_1) các điểm gần nhất, xa nhất (so với P_2)
+ Để vẽ giao tuyến được chính xác, đôi khi ta cần phải vẽ thêm một vài điểm trung gian nữa.

II. Trường hợp biết một hình chiếu của giao tuyến

1) ***Nếu mặt đã cho là lăng trụ chiếu hoặc trụ chiếu*** (tức cạnh lăng trụ hoặc đường sinh trụ vuông góc với mặt phẳng hình chiếu) ***còn mặt phẳng bất kỳ***, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao tuyến trùng với hình chiếu suy biến của lăng trụ hoặc trụ chiếu đó

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của giao tuyến ta áp dụng bài toán điểm, đường thẳng thuộc mặt phẳng.

❖ Ví dụ 1

Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng α với lăng trụ (abc) chiếu bằng (Hình 10.1)

Giải

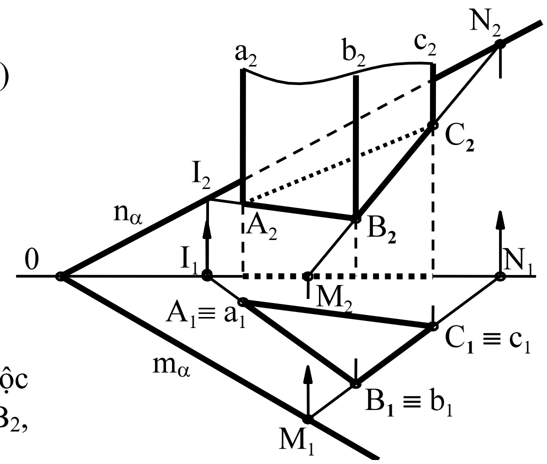
- Gọi A= a ∩ mp(α); B= b ∩ mp(α); C= c ∩ mp(α)

⇒ mpα ∩ lăng trụ (abc) = Tam giác ABC

Vì a, b, c ⊥ P_1

⇒ $A_1 \equiv a_1$, $B_1 \equiv b_1$, $C_1 \equiv c_1$

- Ap dụng bài toán cơ bản: điểm, đường thẳng thuộc mặt phẳng α; xác định được hình chiếu đứng A_2, B_2, C_2
- Mặt phẳng (a, c) khuất trên hình chiếu đứng nên A_2, C_2 khuất ; (Hình 10.1)



Hình 10.1

❖ Ví dụ 2

Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng α với mặt trụ tròn xoay chiếu bằng (Hình 10.2)

Giải

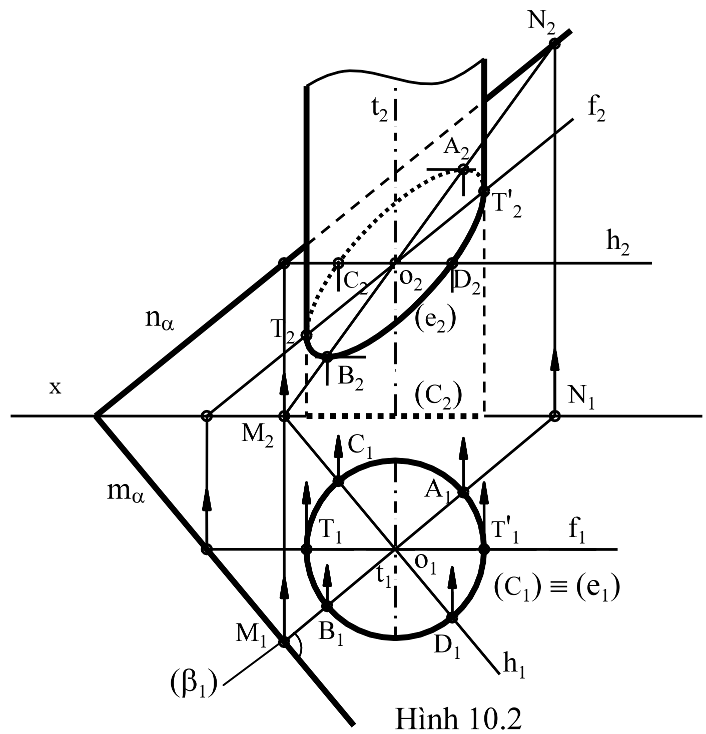
_ Dễ dàng thấy rằng mặt phẳng cắt trụ cho giao tuyến là Elip: (e) = mpα ∩ trụ

_ Hình chiếu bằng (e_1) trùng với hình chiếu bằng của trụ - đường tròn (C_1)

Ta biết rằng trục dài AB của Elip (e) thuộc đường thẳng MN giao của mặt phẳng α với mặt phẳng β đối xứng chung của trụ và mp α , trục ngắn CD bằng đường kính của mặt trụ

_ Vì trục t ⊥ P_1 nên (β) là mặt phẳng chiếu bằng có hình chiếu bằng suy biến thành đường thẳng (β_1) đi qua t_1; hơn nữa mp(β) ⊥ mpα nên (β_1) đi qua t_1 và vuông góc m_α. Do đó AB chính là đường dốc nhất của mpα đối với đối với mpP_1 và CD là đường bằng của mp α

Vậy $A_1B_1 \perp C_1D_1$ tại $O_1 \equiv t_1$



Hình 10.2

_ Hình chiếu đứng (e_2) là elip nhận A_2B_2, C_2D_2 làm cặp đường kính liên hiệp

_ Vì A, B là các điểm thuộc trục đối xứng đồng thời thuộc giao tuyến nên chúng là các điểm cao nhất, thấp nhất của giao tuyến (e)

_ T_2, T'_2 là các tiếp điểm của elip (e_2) với hai đường sinh bao hình chiếu đứng của trụ; nó cũng là các điểm ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của elip (e_2) - cách vẽ chúng bằng cách gắn vào đường mặt **f** ; (Hình 10.2)

2) ***Nếu mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu còn mặt bất kỳ***, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao tuyến thuộc hình chiếu suy biến của mặt phẳng chiếu đó

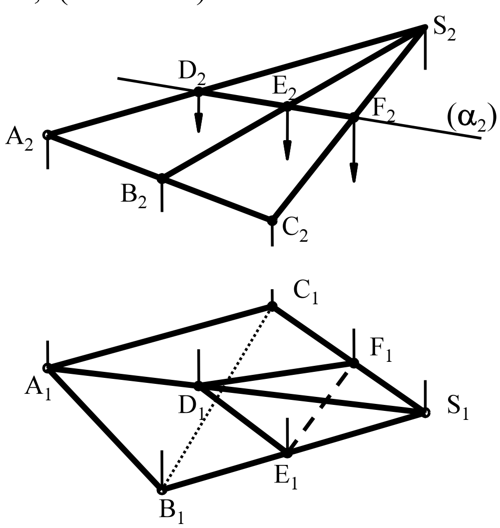
_ Để vẽ hình chiếu còn lại của giao tuyến ta áp dụng bài toán điểm thuộc mặt

❖ Ví dụ 1

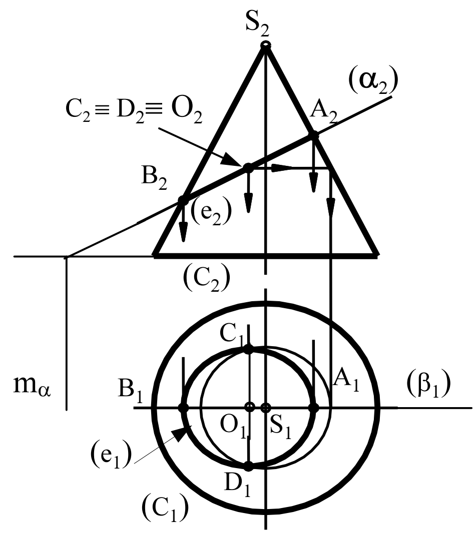
Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng α chiếu đứng với mặt chóp (S.ABC) ; (Hình 10.3)

Giải

Gọi tam giác DEF = mpα ∩ (S.ABC).
Vì mp $\alpha \perp P_2$ nên $D_2E_2F_2 \in (\alpha_2) \Rightarrow D_1E_1F_1$. Mặt phẳng (SBC) khuất ở hình chiếu bằng nên đoạn E_1F_1 khuất ; (Hình 10.2)



Hình 10.3



Hình 10.4

❖ Ví dụ 2

Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng α chiếu đứng với mặt nón tròn xoay trục $t \perp P_1$ (Hình 10.4)

Giải

_ Mặt phẳng α cắt toàn bộ đường sinh của nón nên mp α ∩ nón = Elip (e)

_ Vì mpα $\perp P_2$ nên hình chiếu đứng (e_2) của giao tuyến suy biến thành đoạn thẳng $A_2B_2 \in (\alpha_2)$. Vả lại mp β, đối xứng chung của trụ tròn xoay và mpα, song song P_2 nên AB∈ mpβ và là trục dài của elip giao tuyến ; trục ngắn CD $\perp P_2 \Rightarrow C_2 \equiv D_2 \equiv O_2$ [với O là tâm của elip (e)]

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là elip (e_1) nhận A_1B_1 làm trục dài; C_1D_1 làm trục ngắn (vì AB ⊥ CD và CD // P_1). C_1, D_1 được vẽ bằng cách gắn vào đường tròn vĩ tuyến nằm ngang thuộc nón

➢ Chú ý

Người ta đã chứng minh được rằng mặt phẳng cắt nón tròn xoay cho giao tuyến là elip chiếu lên mặt phẳng vuông góc với trục của nón tròn xoay đó là elip nhận hình chiếu của đỉnh nón làm một tiêu điểm

❖ Ví dụ 3

_ Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng α chiếu đứng với mặt cầu tâm O bán kính R (Hình 10.5)

Giải

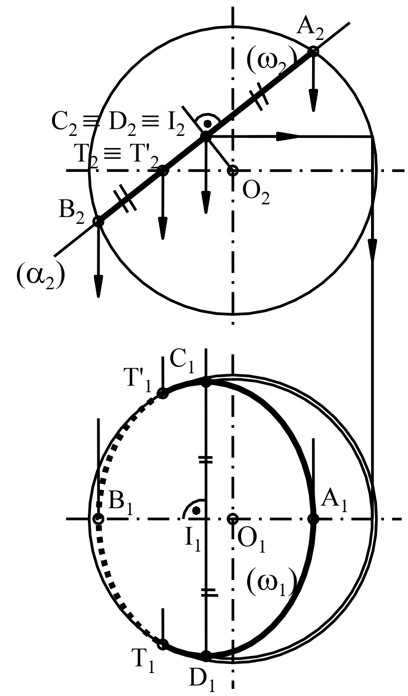
_ Mặt phẳng α ∩ cầu = đường tròn (ω) có tâm **I** là chân đường vuông góc vẽ từ O đến mpα

_ Vì mp α ⊥P_2 nên hình chiếu đứng (ω_2) của giao tuyến suy biến thành đoạn thẳng $A_2B_2 \in (\alpha_2)$

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là elip có :

+ Trục dài $C_1D_1 = A_2B_2 = AB$ [AB là đường kính của đường tròn (ω)], có thể vẽ C_1, D_1 bằng cách gắn C, D vào đường tròn vĩ tuyến nằm ngang; (Hình 10.5)
+ Trục ngắn A_1B_1

_ T_1, T'_1 là các tiếp điểm của elip (ω_1) với đường tròn bao hình chiếu bằng của cầu; nó cũng là các điểm ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của elip (ω_1)



Hình 10.5

III. Trường hợp tổng quát

Giả sử cần tìm giao tuyến của mpα và mặt (Σ), ta tiến hành như sau:

a) Dùng mặt phẳng φ phụ trợ cắt cả mpα và mặt (Σ) [mpφ thường là mặt phẳng chiếu] sao cho giao tuyến là đường dễ vẽ trên hình chiếu

b) Vẽ các giao tuyến phụ: $\begin{cases} m = mp\varphi \cap mp\alpha \\ n = mp\varphi \cap (\Sigma) \end{cases}$

c) Vẽ các giao điểm : A, B = m ∩ n

Các điểm A, B thuộc giao tuyến của mpα và mặt (Σ) cần tìm,
Tương tư, tìm thêm một số điểm thuộc giao tuyến nữa và cuối cùng nối giao lại.

➢ **Chú ý**

_ Đầu tiên ta phải đoán dạng của giao tuyến, sau đó vẽ các điểm thuộc giao tuyến

_ Ngoài ra người ta còn dùng **các phương pháp biến đổi hình chiếu** hoặc phối hợp với các phương pháp đã biết để vẽ giao tuyến của mặt phẳng với một mặt .

❖ **Ví dụ1**

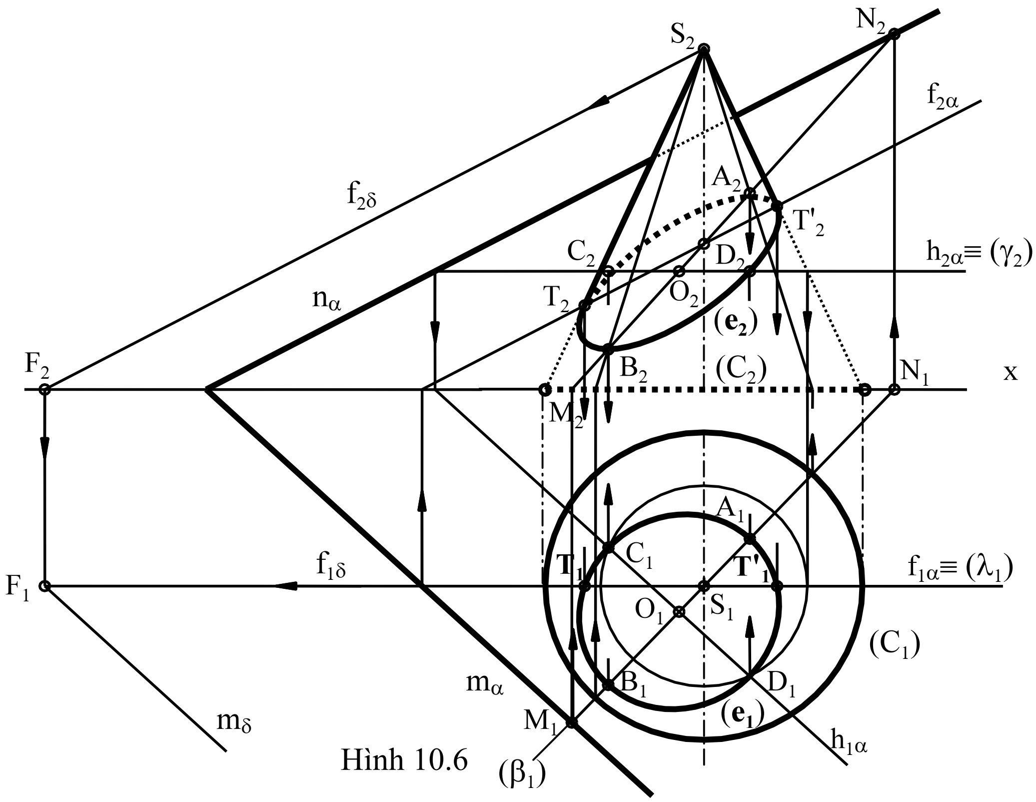
Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\alpha(m_\alpha, n_\alpha)$ với mặt trụ tròn xoay có trục t ⊥ P_1 ; (Hình 10.6)

Giải

1. Đoán dạng giao tuyến

- Qua đỉnh nón S, vẽ mpδ // mpα, bằng cách vẽ đường mặt f_δ // f_α ; rồi vẽ vết bằng $F = f_\delta \cap P_1$ ⇒ m_δ qua F_1 và song song m_α
- Dễ thấy rằng m_δ không cắt đường chuẩn (C) của nón nên mpα cắt nón cho giao tuyến là Elip **(e)**

2. **Để vẽ các điểm của giao**, ta dùng các mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng chiếu bằng chứa trục **t** của nón (để cắt nón theo các đường sinh) và các mặt phẳng bằng (để cắt nón theo các đường tròn có hình chiếu bằng cũng là đường tròn), cụ thể như sau:



Hình 10.6

+ mpβ chiếu bằng đối xứng chung của nón và mp α cho hai điểm A,B là hai đầu mút của trục dài Elip giao tuyến - A là điểm cao nhất; B là điểm thập nhất; (Hình 10.6)
+ mpγ // P_1 đi qua trung điểm O của AB, cho hai điểm C, D là hai đầu mút của trục ngắn Elip giao tuyến
+ mpλ // P_2 đi qua trục **t** của nón, cho hai điểm T, T' thuộc giao, có hình chiếu đứng T_2, T'_2 là các tiếp điểm của của elip (e_2) với hai đường sinh bao hình chiếu đứng của nón, nó cũng là các điểm ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của elip (e_2)

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là elip (e_1) nhận A_1B_1và C_1D_1 làm cặp trục; trong đó A_1B_1 là trục dài

_ Hình chiếu đứng của giao tuyến là elip (e_2) nhận A_2B_2 và C_2D_2 làm cặp đường kính liên hiệp

➢ **Chú ý**

Có thể sử dụng **phép thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng** để đưa mpα trở thành mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới thì việc giải bài toán này được dễ dàng hơn

❖ **Ví dụ 2**

Hãy vẽ giao tuyến của mặt phẳng $\alpha(m_\alpha, n_\alpha)$ với mặt cầu tâm O, bán kính R ; (Hình 10.7)

Giải

Mặt phẳng α ∩ cầu = đường tròn (ω)

_ Để vẽ các điểm của giao, ta dùng các mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng bằng, các mặt phẳng mặt (để cắt cầu theo đường tròn có hình chiếu bằng, hình chiếu đứng cũng là đường tròn); cụ thể như sau:

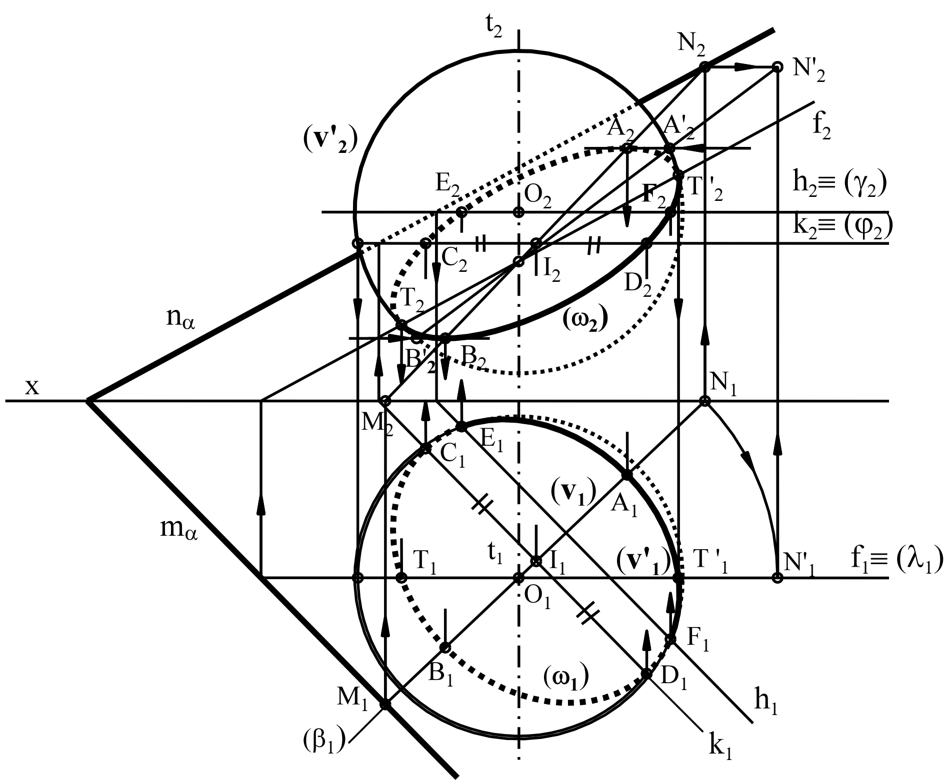
_ Dựng mpβ chiếu bằng đối xứng chung của cầu và mpα, vẽ các giao tuyến phụ:

mpβ ∩ mpα = MN

mpβ ∩ cầu = Đường tròn (v) bằng đường tròn lớn của cầu

_ Để vẽ các giao điểm A,B = MN ∩ (v); ta quay mpβ chứa MN và (v) quanh trục chiếu bằng **t** đi qua tâm O cầu, đến vị trí mới //P_2 . Lúc này hình chiếu đứng mới (v'_2) trùng với đường tròn bao hình chiếu đứng của cầu, MN có vị trí mới M'N' . Vẽ A',B'= M'N' ∩ (v')

_ Trả về vị trí ban đầu bằng cách quay ngược trở lại ta được A,B thuộc giao; trong đó: A là điểm cao nhất; B là điểm thập nhất; (Hình 10.6).



Hình 10.6

\+ Gọi CD là đường kính của đường tròn (ω), vuông góc với AB tại trung điểm I. mpφ // P_1 đi qua I, cho hai điểm C, D thuộc giao, có hình chiếu bằng C_1D_1 là trục dài của elip (ω_1)

\+ mpγ // P_1 đi qua tâm cầu O, cho hai điểm E, F thuộc giao, có hình chiếu bằng E_1, F_1 là các tiếp điểm của của elip (ω_1) với đường tròn bao hình chiếu bằng của cầu, nó cũng là các điểm ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của elip (ω_1)

\+ mpλ // P_2 đi qua tâm cầu O, cho hai điểm T, T' thuộc giao, có hình chiếu đứng T_2, T'_2 là các tiếp điểm của của elip (ω_2) với đường tròn bao hình chiếu đứng của cầu, nó cũng là các điểm ranh giới giữa phần thấy và phần khuất của elip (ω_2)

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là elip (ω_1) nhận A_1B_1và C_1D_1 làm cặp trục

_ Hình chiếu đứng của giao tuyến là elip (ω_2) nhận A_2B_2 và C_2D_2 làm cặp đường kính liên hiệp.

_ Xét thấy khuất như (Hình 10.6)

➢ **Chú ý**

Có thể sử dụng **phép thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng** để đưa mpα trở thành mặt phẳng chiếu đứng trong hệ thống mới thì việc giải bài toán này được dễ dàng hơn nhiều

V. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ **Ví dụ 1**

Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S và mpα; (Hình 10.7). Hãy vẽ giao tuyến của mpα với mặt nón tròn xoay đó

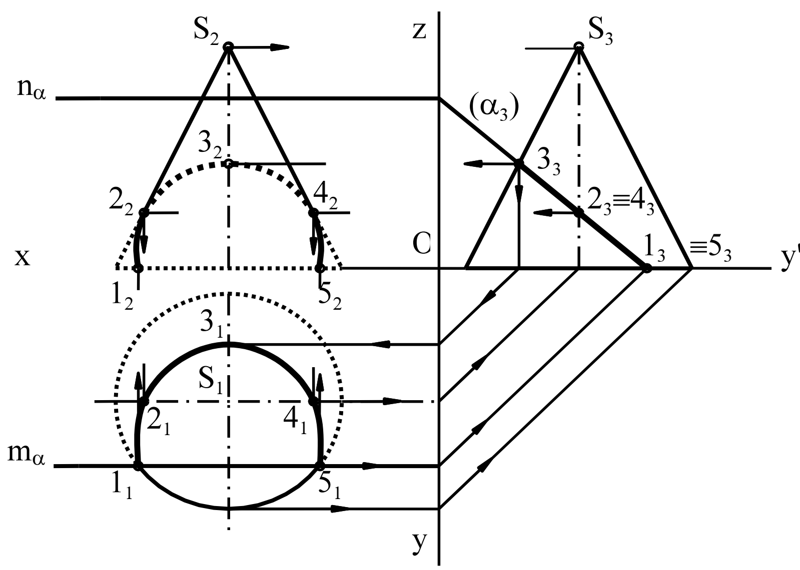
Giải

_ Vì mp α là mặt phẳng chiếu cạnh nên ta sử dụng hình chiếu cạnh để vẽ giao tuyến

_ Mặt phẳng α cắt toàn bộ đường sinh của nón nên giao tuyến là Elíp và hình chiếu cạnh của giao tuyến là đoạn thẳng $1_3 3_3$ thuộc đoạn thẳng suy biến (α_3) của mpα. Trả về hình chiếu đứng và hình chiếu bằng, ta nhận được:

_ Hình chiếu đứng của giao tuyến là cung elip $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2$, trong đó cung $2_2 3_2 4_2$ khuất vì thuộc nửa sau của nón

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là cung elip $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$ thấy ; (Hình 10.7)



Hình 10.7

➢ **Chú ý**

Nếu mặt phẳng đã cho là mặt phẳng chiếu cạnh hoặc mặt phẳng phân giác 1 hoặc mặt phẳng phân giác 2 thì ta dùng mặt phẳng hình chiếu cạnh để giải, cách giải tương tự như ví dụ trên (Hình 10.7)

❖ **Ví dụ 2**

Cho lăng trụ (abc) và mpα; (Hình 10.8). Hãy vẽ giao tuyến của mp α với lăng trụ đó và vẽ hình thật của giao tuyến đó

Giải

_ Gọi ABC = mpα ∩ lăng trụ (abc)

_ Để vẽ giao tuyến của mp α với lăng trụ (abc), ta xác định các đỉnh A, B, C là giao điểm của các cạnh của lăng trụ với mp α bằng cách dùng mặt phẳng φ phụ trợ chiếu đứng chứa cạnh của lăng trụ đó, ta nhận được:

$C = c \cap mp\alpha$

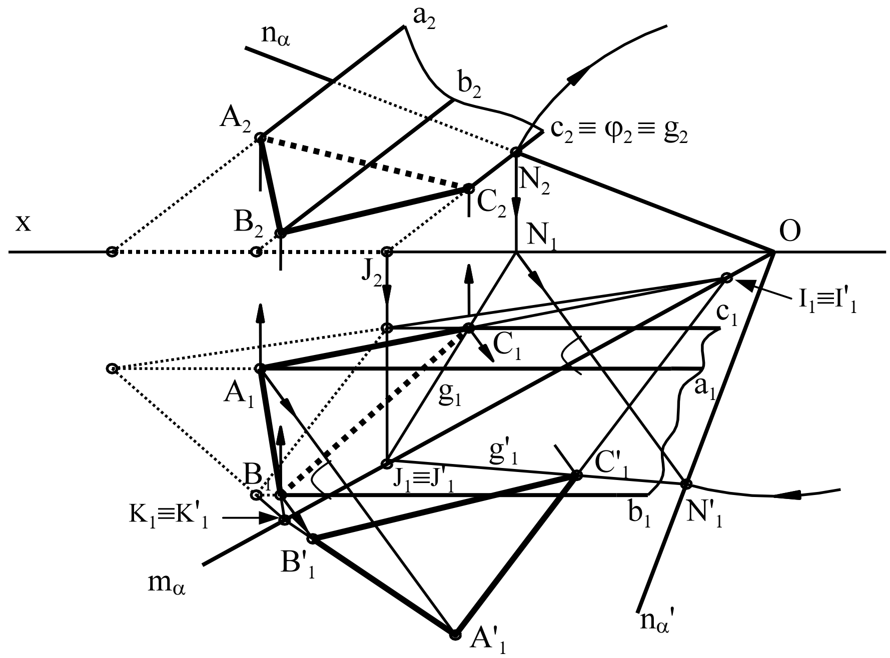
$\Rightarrow$ mp(a,c) $\cap$ mpα = CI [trong đó I là giao điểm của m_α với cạnh đáy của mp(a,c)]

$\Rightarrow$ AC = mp(a,c) $\cap$ mpα ;

tương tự AB = mp(a,b) $\cap$ mpα ; (Hình 10.8)

_ Để vẽ hình thật của giao tuyến, ta gập mp α quanh vết bằng m_α , hình gập là Δ A_1'B_1'C_1'

_ Kết luận: Δ A_1'B_1'C_1' = Δ ABC



Hình 10.8

❖ Ví dụ 3

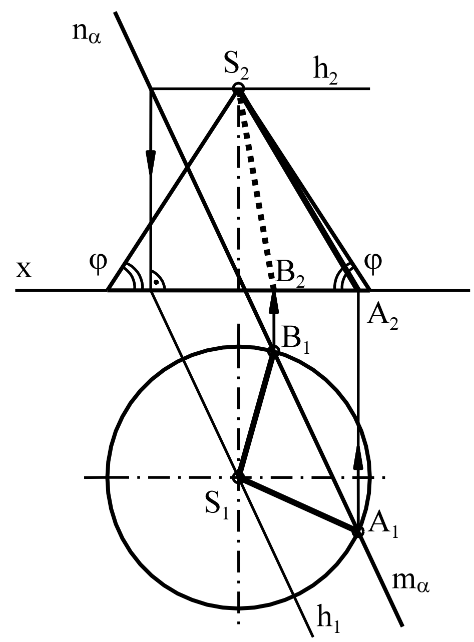
Cho mpα và hình chiếu đứng S_2 của điểm S ∈ mpα; (Hình 10.9). Hãy vẽ trong mpα đường thẳng đi qua điểm S và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng góc φ

Giải

_ S∈ mpα.⇒ S∈ h ∈ mpα. Từ $S_2 \in h_2 \Rightarrow S_1 \in h_1$

_ Đường thẳng cần dựng đi qua điểm S, hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng góc φ nên nó là đường sinh của mặt nón tròn xoay: đỉnh S, trục ⊥P_1 và các đường sinh tạo với P_1 góc φ

_ Vậy đường thẳng cần dựng là đường sinh giao tuyến của mặt nón đỉnh S nói trên với mpα SA,SB; (Hình 10.9)



Hình 10.9

Biện luận:

Gọi δ là góc nghiêng của mp α với mp P_1

+ Nếu δ < φ : Bài toán vô nghiệm

+ Nếu δ = φ : Bài toán có 1 nghiệm

+ Nếu δ > φ : Bài toán có 2 nghiệm

❖ Ví dụ 4

Cho mp α và điểm A; (Hình 10.10). Hãy vẽ đường thẳng qua điểm A song song với mp α đồng thời nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng góc φ

Giải

_ Đường thẳng cần dựng qua điểm A song song mpα nên đường thẳng đó thuộc mpβ song song với mpα. Mặt phẳng β được vẽ như sau :

_ Qua A vẽ đường bằng h_β // mpα;

+ Vẽ vết đứng $H = h_\beta \cap mpP_2 \Rightarrow$ Vết đứng n_β đi qua H_2 và song song n_α. Vết bằng m_β // m_α

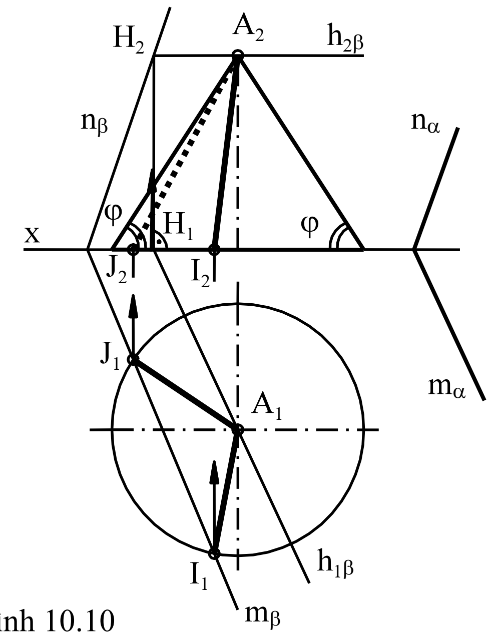
_ Đường thẳng cần dựng đi qua điểm A, hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng góc φ nên nó là đường sinh của mặt nón tròn xoay: đỉnh A, trục $\perp P_1$ và các đường sinh tạo với P_1 góc φ

_ Vậy đường thẳng cần dựng là đường sinh giao tuyến của mặt nón đỉnh A nói trên với mp β
Đó là: AI; AJ (Hình 10.10).

Biện luận:

Gọi δ là góc nghiêng của mp α với mp P_1

+ Nếu $\delta < \varphi$: Bài toán vô nghiệm
+ Nếu $\delta = \varphi$: Bài toán có 1 nghiệm
+ Nếu $\delta > \varphi$: Bài toán có 2 nghiệm



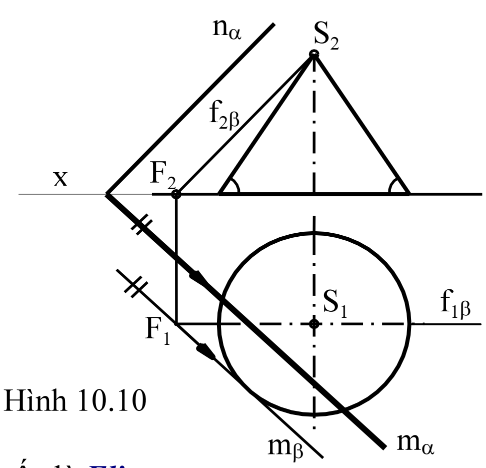
Hình 10.10

❖ Ví dụ 5

Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S_2 trục vuông góc với mp P_1 và vết đứng n_α của mpα; (Hình 10.10). Hãy vẽ vết bằng m_α biết rằng mpα cắt nón cho giao tuyến là ***Parabol***

Giải

- Gọi mpβ qua đỉnh nón song song mpα.
- Qua đỉnh nón vẽ đường mặt f_β // mpα.
- Vẽ vết bằng F của đường mặt f_β: $F = f_\beta \cap mpP_1$; dễ thấy $f_\beta \in$ mp$\beta \Rightarrow$ Vết bằng m_β đi qua F_1
- Theo đề bài, mpα cắt nón cho giao tuyến là Parabol nên m_β qua F_1 và tiếp xúc với đường tròn đáy của nón.
- Vì mpα // mp$\beta \Rightarrow m_\alpha$ // m_β ; (Hình 10.10)



Hình 10.10

➢ Chú ý

_ Nếu m_β không cắt đáy nón thì mpα cắt nón cho giao tuyến là ***Elip***

_ Nếu m_β cắt đáy nón tại hai điểm thì mpα cắt nón cho giao tuyến là ***Hyperbol***

====================

Bài 11 GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MỘT MẶT

I. KHÁI NIỆM

Giao điểm của đường thẳng với một mặt là tập hợp các điểm chung của đường thẳng với mặt đó

_ Số giao điểm tối đa của một đường thẳng với một đa diện lồi là **hai điểm**

_ Số giao điểm (thực và ảo) tối đa của một đường thẳng với một mặt bậc **n** là **n điểm**

II. TRƯỜNG HỢP BIẾT MỘT HÌNH CHIẾU CỦA GIAO ĐIỂM

1) ***Nếu mặt đã cho là lăng trụ chiếu hoặc trụ chiếu, còn đường thẳng bất kỳ***, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của các giao điểm là giao của hình chiếu suy biến của lăng trụ chiếu hoặc trụ chiếu đó với hình chiếu cùng tên của đường thẳng

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của các giao điểm ta áp dụng bài toán điểm thuộc đường thẳng

❖ **Ví dụ 1**

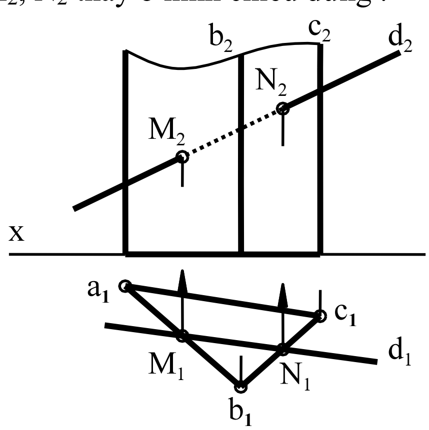
Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với lăng trụ (abc) chiếu bằng (Hình 11.1)

Giải

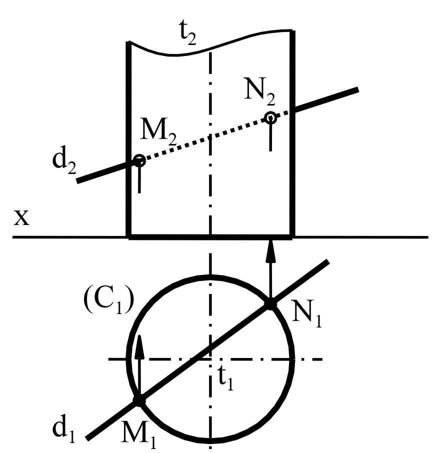
Gọi M, N = d $\cap$ (abc).

Vì lăng trụ (abc) $\perp P_1 \Rightarrow M_1, N_1 = d_1 \cap \Delta\, a_1b_1c_1 \Rightarrow M_2, N_2 \in d_2$; (Hình 11.1)

Đoạn chui MN khuất. Ta có: M$\in$ mp(a,b) và N $\in$mp(b, c) là hai mặt phẳng thấy ở hình chiếu đứng nên M_2, N_2 thấy ở hình chiếu đứng .



Hình 11.1



Hình 11.2

❖ **Ví dụ 2**

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mặt trụ chiếu bằng có trục t $\perp P_1$ (Hình 11.2)

Giải

Gọi M, N = d $\cap$ mặt trụ

Vì trụ $\perp P_1 \Rightarrow M_1, N_1 = d_1 \cap$ đường tròn $(C_1) \Rightarrow M_2, N_2 \in d_2$; (Hình 11.2)

Đoạn chui MN khuất; ta có M thuộc nửa trước của trụ nên M_2 thấy; N thuộc nửa sau của trụ nên N_2 khuất

2) ***Nếu đường thẳng đã cho là đường thẳng chiếu, còn mặt bất kỳ***, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của các giao điểm trùng với hình chiếu suy biến của đường thẳng chiếu đó

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của các giao điểm ta áp dụng bài toán điểm thuộc mặt

❖ **Ví dụ**

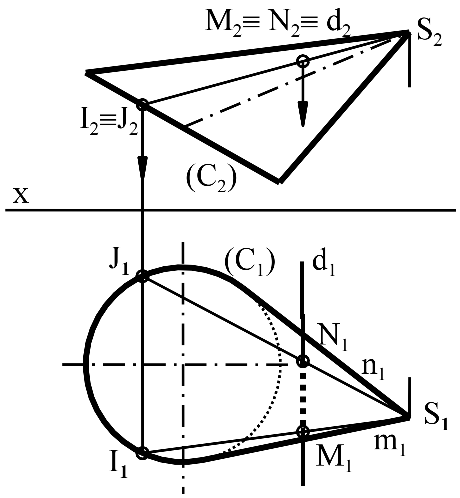
Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d chiếu đứng với mặt nón đỉnh S, đường chuẩn (C) là elip có hình chiếu bằng (C_1) là đường tròn (Hình 11.3)

Giải

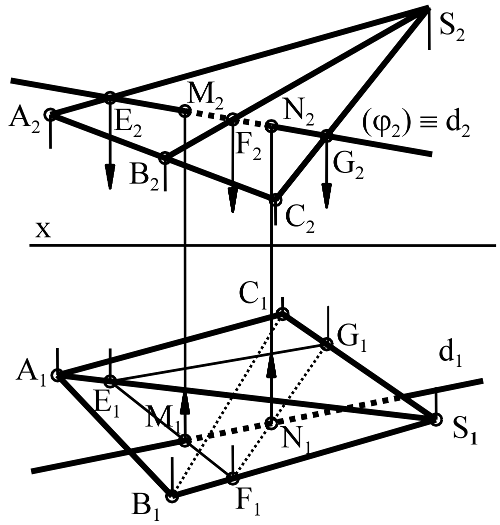
- Gọi M, N = d ∩ mặt nón S

Vì $d \perp P_2 \Rightarrow M_2 \equiv N_2 \equiv d_2$. Gắn M, N vào các đường sinh SI, SJ của nón ⇒ M_1, N_1; (Hình 11.3)

- Đoạn chui MN khuất; ta có M, N thuộc các đường sinh của nón mà các chân của các đường sinh này ở hình chiếu bằng nằm trên cung thấy của đường chuẩn (C_1) nên M_1, N_1 thấy



Hình 11.3



Hình 11.4

III. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Giả sử cần tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt (Σ), ta tiến hành như sau:

d) Dùng mặt phẳng φ phụ trợ chứa đường thẳng d cắt mặt (Σ) sao cho giao tuyến phụ là đường dễ vẽ trên hình chiếu

e) Vẽ giao tuyến phụ: $g = mp\varphi \cap (\Sigma)$

f) Vẽ các giao điểm : $M, N = g \cap d$

Các điểm M, N thuộc giao tuyến của đường thẳng d và mặt (Σ) cần tìm

➢ **Chú ý**

*Ngoài ra người ta còn dùng **các phương pháp biến đổi hình chiếu** hoặc phối hợp với các phương pháp đã biết để vẽ giao điểm của đường thẳng với một mặt .*

❖ **Ví dụ 1**

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mặt chóp S.ABC (Hình 11.4)

Giải

_ Dựng mp φ phụ trợ chiếu đứng chứa đường thẳng d ⇒ $(\varphi_2) \equiv d_2$

_ Vẽ giao tuyến phụ : $\Delta EFG = mp\varphi \cap S.ABC$

_ Vẽ các giao điểm : $M, N = \Delta EFG \cap d$

Từ $M_1, N_1 = \Delta E_1F_1G_1 \cap d_1 \Rightarrow M_2, N_2 \in d_2$; (Hình 11.4)

_ Vậy $M, N = d \cap S.ABC$

_ Đoạn chui MN khuất

+ M∈ mp(SAB) và N∈ mp(SBC) là hai mặt phẳng thấy trên hình chiếu đứng nên M_2, N_2 thấy
+ M∈ mp (SAB) thấy ở hình chiếu bằng nên M_1 thấy; N∈ mp(SBC) khuất ở hình chiếu bằng nên N_1 khuất; (Hình 11.4)

❖ Ví dụ 2

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mặt nón S, đường chuẩn (C) là elip có hình chiếu bằng (C_1) là đường tròn (Hình 11.5)

Giải

_ Dựng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng d và đỉnh nón S [để mp (S,d) cắt nón theo các đường sinh]

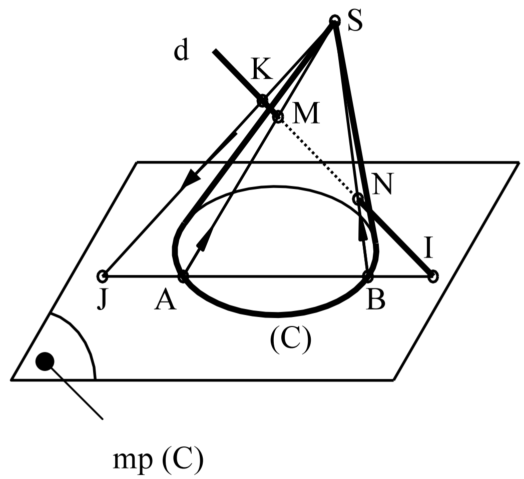
_ Vẽ các giao tuyến phụ :

+ I J = mp(S,d) ∩ mp(C); trong đó :

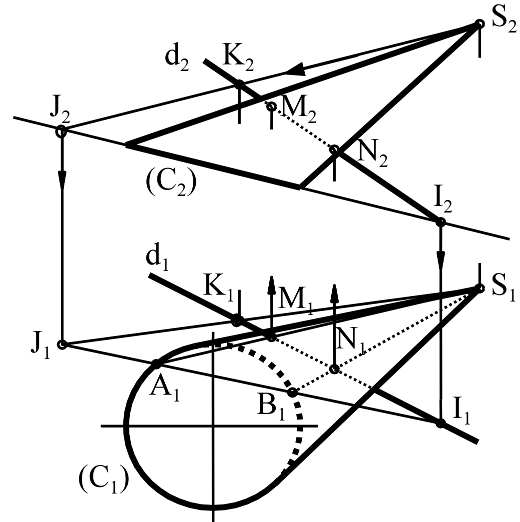
  I = d ∩ mp(C); J = SK ∩ mp(C) - với K là điểm lấy tuỳ ý trên đường thẳng d

+ Vẽ các giao điểm : A, B = I J ∩ (C)

  ⇒ mp(S,d) ∩ nón S = đường sinh SA, SB



Hình 11.5a



Hình 11.5b

_ Vẽ các giao điểm: M = SA ∩ d; N = SB ∩ d; (Hình 11.5a)

  Từ $M_1 = S_1A_1 \cap d_1 \Rightarrow M_2 \in d_2$; và $N_1 = S_1B_1 \cap d_1 \Rightarrow N_2 \in d_2$ (Hình 11.5b)

_ Vậy M, N = d ∩ nón S

_ Đoạn chui MN khuất

+ M ∈SA và N ∈SB ; Vì A_1, B_1 thuộc nửa sau của (C_1) nên hình chiếu đứng M_2, N_2 khuất.
+ Vì A_1 thuộc cung thấy của (C_1) nên hình chiếu bằng M_1 thấy; B_1 thuộc cung khuất của (C_1) nên hình chiếu bằng N_1 khuất .

➢ Chú ý

Để vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt hình chóp ta có thể dùng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng và đỉnh chóp, tương tự như giao điểm của đường thẳng với nón

❖ Ví dụ 3

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mặt trụ, đường chuẩn (C) là elip có hình chiếu bằng (C_1) là đường tròn (Hình 11.6)

Giải

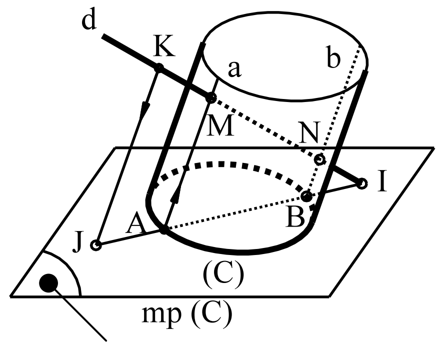
_ Dựng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng d và chứa đường thẳng k song song với phương đường sinh của trụ [để mp (k,d) cắt trụ theo giao tuyến phụ là các đường sinh]

_ Vẽ các giao tuyến phụ :

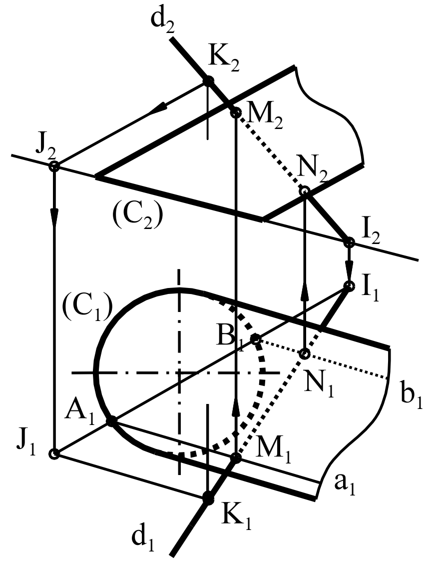
+ I J = mp(k,d) ∩ mp(C); trong đó :

+ $I = d \cap mp(C)$; $J = k \cap mp(C)$ - với k qua K là điểm lấy tuỳ ý trên đường thẳng d
+ Vẽ các giao điểm : A, B = $IJ \cap (C)$

$\Rightarrow$ mp(k,d) $\cap$ trụ = đường sinh a, b lần lượt qua A, B



Hình 11.6a



Hình 11.6b

_ Vẽ các giao điểm: $M = a \cap d$; $N = b \cap d$; (Hình 11.6a)

Từ $M_1 = a_1 \cap d_1 \Rightarrow M_2 \in d_2$; và $N_1 = b_1 \cap d_1 \Rightarrow N_2 \in d_2$ (Hình 11.6b)

_ Vậy M, N = $d \cap$ trụ

_ Đoạn chui MN khuất

+ $M \in a$ và $N \in b$; Vì B_1 thuộc nửa sau của (C_1) nên hình chiếu đứng N_2 khuất; A_1 thuộc nửa trước của (C_1) nên hình chiếu đứng M_2 thấy
+ Vì A_1 thuộc cung thấy của (C_1) nên hình chiếu bằng M_1 thấy; B_1 thuộc cung khuất của (C_1) nên hình chiếu bằng N_1 khuất .

➢ Chú ý

Để vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt hình lăng trụ ta có thể dùng mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng và song song với cạnh của lăng trụ, tương tự như giao điểm của đường thẳng với nón

❖ Ví dụ 4

Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu tâm O bán kính R (Hình 11.7)

Giải

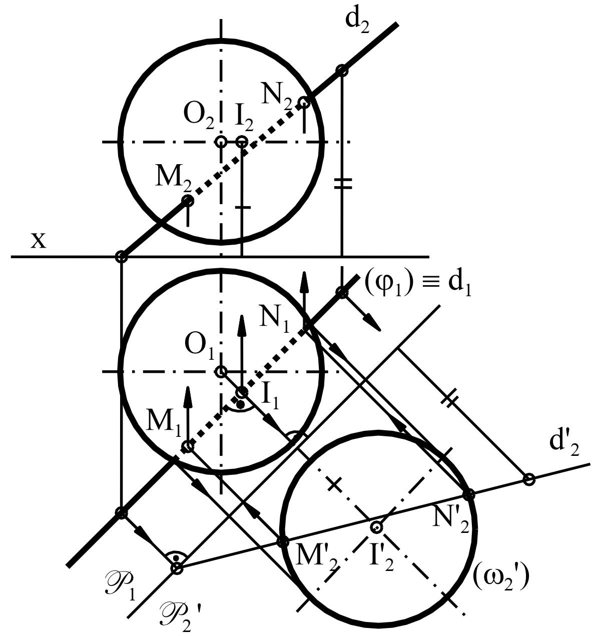
Dựng mặt phẳng φ phụ trợ chứa đường thẳng d [(φ) thường là mặt phẳng chiếu], sẽ cắt cầu theo đường tròn. Nói chung đường tròn này chiếu lên các mặt phẳng hình chiếu là Elip

Vậy ta có cách giải như sau:

_ Dựng mp(φ) chiếu bằng chứa d $\Rightarrow$ $(\varphi_1) \equiv d_1$

_ Vẽ các giao tuyến phụ : $(\omega) = mp(\varphi) \cap$ cầu $\Rightarrow$ $(\omega_1) \equiv (\varphi_1) \equiv d_1$

_ Để vẽ các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (ω), ta thay đổi mp hình chiếu đứng sao cho mp (ω) // P'₂. Ở hình chiếu đứng mới (ω_2') là đường tròn thật



Hình 11.7

_ Vẽ $M_2', N_2' = d_2' \cap (\omega_2')$ $\Rightarrow M_1, N_1 \in d_1$ và $M_2, N_2 \in d_2$

_ Vậy $M, N = d \cap$ cầu

Xét thấy, khuất như (Hình 11.7)

IV. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ Ví dụ 1

Cho mặt cầu tâm O và đường thẳng d; (Hình 11.8). Hãy tìm các điểm trên mặt cầu gần và xa đường thẳng d nhất

Giải

_ Qua tâm O, vẽ mp(h,f) ⊥ d

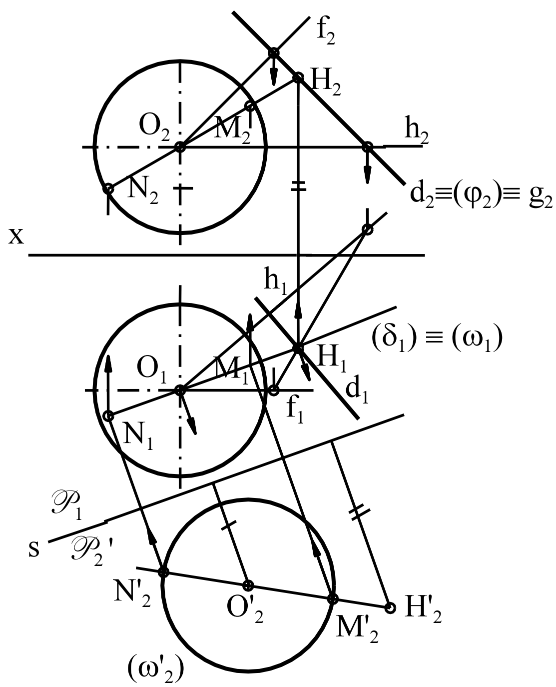
_ Vẽ giao điểm $H = d \cap$ mp(h,f) bằng cách dùng mặt phẳng φ phụ trợ chiếu đứng chứa d

_ Vẽ giao điểm M,N = OH ∩ cầu O, bằng cách dùng mặt phẳng δ phụ trợ chiếu bằng chứa OH :

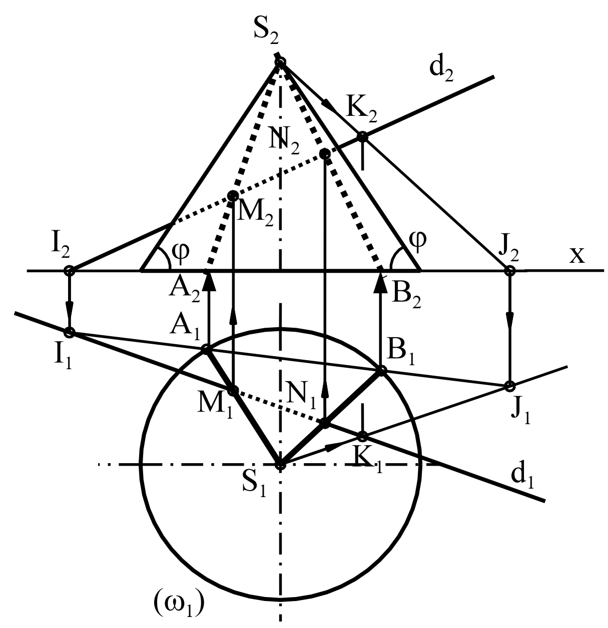
+ Vẽ giao tuyến phụ: $(\omega) = $ mpδ ∩ cầu; có $(\omega_1) \equiv O_1H_1$

+ Vẽ giao điểm M,N = OH ∩ (ω) bằng cách thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng ta xác định được hình chiếu đứng mới của giao điểm là : $M'_2, N'_2 = O'_2H'_2 \cap (\omega'_2)$. Trả về hình chiếu bằng và hình chiếu đứng ta nhận được $M_1, N_1 \in O_1H_1$ và $M_2, N_2 \in O_2H_2$

Vậy M,N là các điểm thuộc mặt cầu gần và xa đường thẳng d nhất cần tìm; (Hình 11.8)



Hình 11.8



Hình 11.9

❖ Ví dụ 2

Cho điểm S và đường thẳng d; (Hình 11.9). Hãy dựng đường thẳng đi qua S, cắt đường thẳng d đồng thời tạo với mp P_1 góc φ

Giải

_ Đường thẳng cần dựng đi qua điểm S tạo với mặt phẳng hình chiếu bằng góc φ nên nó là đường sinh của mặt nón tròn xoay có :

+ Đỉnh S

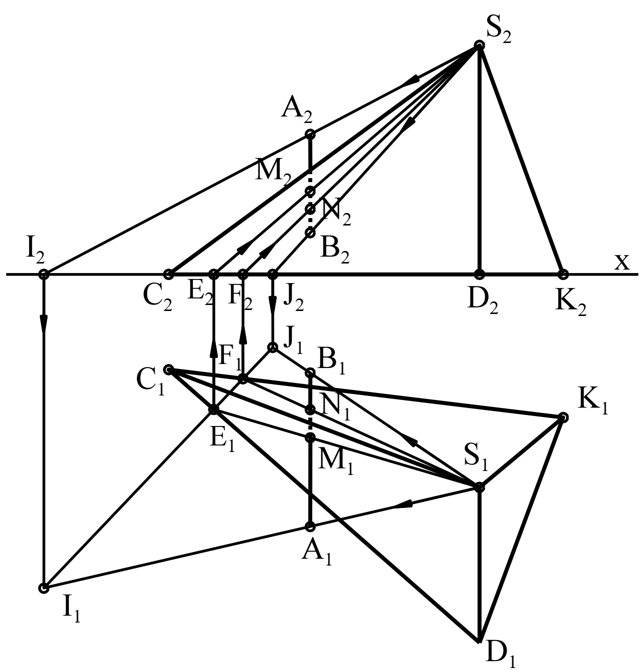
+ Trục vuông góc mp P_1

+ Các đường sinh tạo với mp P_1 góc φ nên hai đường sinh biên ở hình chiếu đứng của nón trục x góc φ.
_ Vả lại đường thẳng cần dựng cắt đường thẳng d. Vậy chúng là các đường sinh của mặt nón S đi qua giao điểm M,N của của d với nón - đó là: SM, SN ; (Hình 11.9)

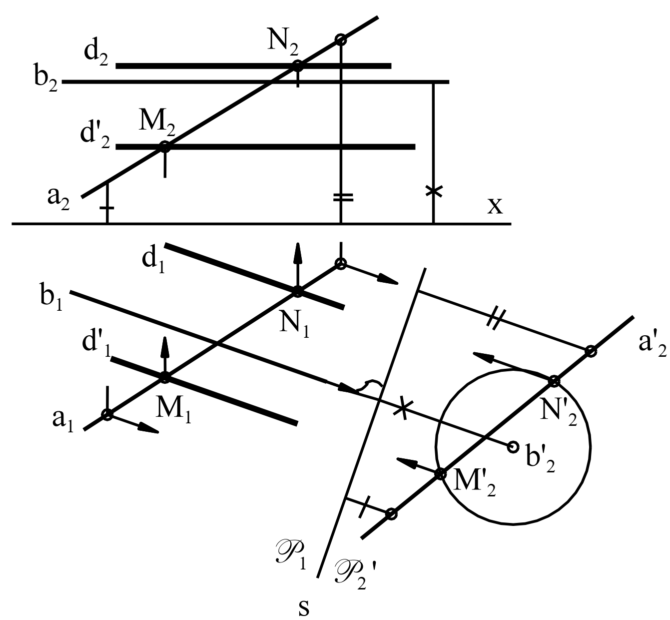
❖ Ví dụ 3
Cho mặt chóp S.CDK và đường cạnh AB; (Hình 11.10). Hãy vẽ giao điểm của đường thẳng AB với mặt chóp S.CDK

Giải

_ Dùng mp(AB,S) làm mặt phẳng phụ trợ (mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng và đỉnh chóp).
_ Vẽ các giao tuyến và giao điểm :
+ Vẽ IJ = mp(AB,S) ∩ mp(CDK)
+ Vẽ E, F = IJ ∩ Δ CDK
+ Vẽ M = AB ∩ SE
+ Vẽ N = AB ∩ SF
+ Vậy M, N = AB ∩ S.CDK
_ Xét thấy khuất như (hình 11.10), trong đó đoạn chuôi MN là khuất



Hình 11.10



Hình 11.11

❖ Ví dụ 4
Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau; (Hình 11.11). Hãy dựng đường thẳng cắt a song song b và và cách b một khoảng r cho trước

Giải

_ Đường thẳng d cần dựng song song với b và cách b một khoảng r nên d chính là đường sinh của mặt trụ tròn xoay trục b bán kính r
_ Vì d cắt a nên các đường sinh d cần dựng đi qua các giao điểm M, N của a với mặt trụ vừa vẽ.

_ Thay đổi mặt phẳng hình chiếu đứng để b trở thành đường thẳng chiếu đứng trong hệ thống mới; lúc này mặt trụ trục b có hình chiếu đứng mới suy biến thành đường tròn (ω'_2) tâm b'_2 bán kính r

_ Vẽ $M'_2, N'_2 = a'_2 \cap (\omega'_2) \Rightarrow M_1, N_1 \in a_1$ và $M_2, N_2 \in a_2$

_ Qua M,N vẽ các đường thẳng d, d' // b đó là các đường thẳng cần dựng ; (Hình 11.11)

==================

Bài 12 GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT

I. KHÁI NIỆM

Giao tuyến của hai mặt là tập hợp các điểm chung của hai mặt đó

Dạng của giao tuyến :

_ ***Giao tuyến của hai đa diện*** thường là một hay nhiều *đường gấp khúc kín trong không gian* - tập hợp các đoạn thẳng và các điểm gãy thuộc các mặt và các cạnh của đa diện

_ ***Giao tuyến của đa diện với mặt cong đại số bậc n*** thường là một hay nhiều *đường gấp khúc kín trong không gian*, tập hợp các cung đường cong phẳng đại số bậc **n** và các điểm gãy thuộc các mặt và các cạnh của đa diện

_ ***Giao tuyến của mặt cong đại số bậc m và mặt cong đại số bậc n*** thường là đường cong ghềnh đại số bậc **m x n**

II. TRƯỜNG HỢP BIẾT MỘT HÌNH CHIẾU CỦA GIAO TUYẾN

Nếu một trong hai mặt đã cho là lăng trụ chiếu hoặc trụ chiếu, thì:

_ Ta biết được một hình chiếu của giao tuyến thuộc hình chiếu suy biến của lăng trụ chiếu hoặc trụ chiếu đó

_ Để vẽ hình chiếu còn lại của các giao tuyến ta áp dụng bài toán điểm, đường thuộc mặt còn lại

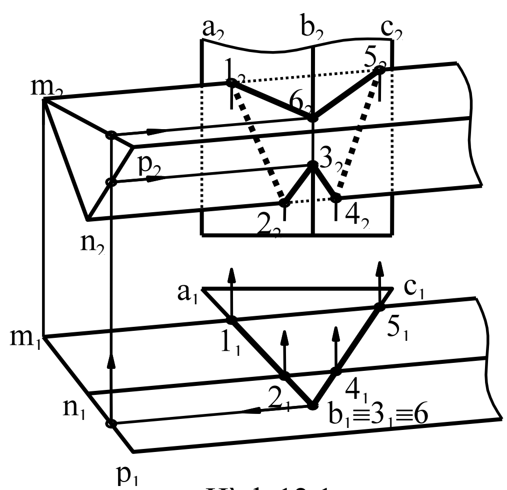
❖ **Ví dụ 1**

Hãy vẽ giao tuyến của lăng trụ (abc) chiếu bằng với lăng trụ xiên (mnp); (Hình 12.1a)

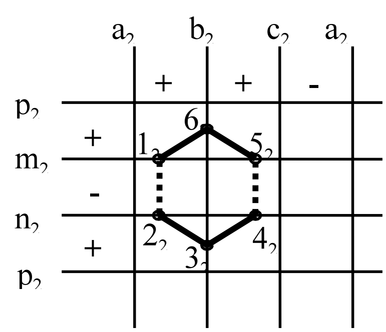
Giải

_ Vì lăng trụ (abc) ⊥ P_1 nên ta biết được hình chiếu bằng của giao tuyến là đoạn chữ **V:** $1_1 3_1 5_1$ thuộc tam giác $a_1 b_1 c_1$ [hình chiếu bằng suy biến của lăng trụ (abc)]

_ Giao tuyến là đường gấp khúc kín gồm tập hợp các điểm gãy và các đoạn thẳng thuộc các cạnh và các mặt của đa diện, được xác định như sau:



Hình 12.1a



Hình 12.1b

♣ **Các điểm gãy:** 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; (Hình 12.1a); trong đó:

+ m ∩ lăng trụ (abc) = điểm 1 ∈ mp(a, b) và điểm 5∈ mp(b, c)
+ n ∩ lăng trụ (abc) = điểm 2 ∈ mp(a, b) và điểm 4∈ mp(b, c)
+ b ∩ lăng trụ (m n p) = điểm 3 ∈ mp(n, p) và điểm 6∈ mp(m, p)

♣ **Các đoạn thẳng:**

+ mp(m, n) ∩ lăng trụ (abc) = đoạn 12 ∈ mp(a, b) và đoạn 45∈ mp(b, c)
+ mp(n, p) ∩ lăng trụ (abc) = đoạn 23 ∈ mp(a, b) và đoạn 34∈ mp(b, c)
+ mp(m, n) ∩ lăng trụ (abc) = đoạn 12 ∈ mp(a, b) và đoạn 45∈ mp(b, c)

♣ **Nối các điểm vừa tìm được**, với chú ý rằng hai điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì mới nối lại.

♣ **Thấy - khuất trên hình chiếu:** những đoạn giao tuyến thuộc phần khuất của một trong hai mặt trên hình chiếu nào thì những đoạn giao tuyến đó bị khuất trên hình chiếu đó.

Đoạn 12 và 45 thuộc mp(m,n) khuất trên hình chiếu đứng nên $1_2 2_2$ và $4_2 5_2$ khuất ; (Hình 12.1a)

➢ Nối giao bằng cách lập bảng khai triển

Ngoài cách nối giao đã nêu trên; sau đây sẽ trình bày cách nối giao bằng cách lập bảng.

Trình tự thực hiện:

_ Vẽ sơ đồ khai triển của hai mặt đa diện, nếu cạnh nào không giao thì nên khai triển theo cạnh đó (trong hình 12.1a khai triển theo cạnh a, cạnh p)

_ Ghi tên các điểm vừa tìm được dúng như vị trí trên hình chiếu

_ Nối hai điểm cùng một ô

➢ Xét thấy (+), khuất (-) trên từng hình chiếu ta thêm chỉ số hình chiếu đó.

➢ Đoạn nào thuộc hai mặt phẳng thấy thì thấy trên hình chiếu đó (Hình 12.1b)

❖ Ví dụ 2

Vẽ giao của mặt cầu tâm O với lăng trụ (abc) chiếu đứng (Hình 12.2)

Giải

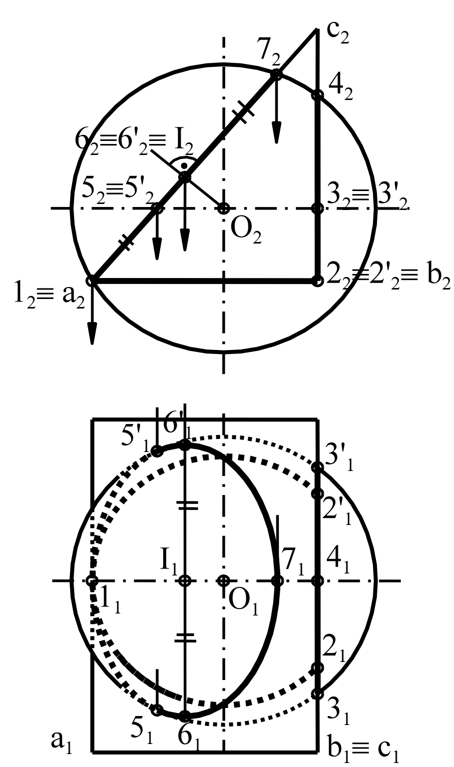
➢ Hình chiếu đứng của giao tuyến là đường gấp khúc $4_2 2_2 1_2 7_2$ thuộc tam giác $a_2 b_2 c_2$- hình chiếu đứng suy biến của lăng trụ, giao do ba mặt bên của lăng trụ cắt cầu:

_ mp(a,b) ∩ cầu = cung tròn 212', có hình chiếu bằng là cung tròn $2_1 1_2 2'_1$ khuất

_ mp(b,c) ∩ cầu = cung tròn 2343'2' song song P_3, có hình chiếu bằng là đoạn thẳng $3_1 3'_1$

_ mp(a,c) ∩ cầu = đường tròn tâm I, có hình chiếu bằng là elíp tâm I_1 và nhận $6_1 6'_1$, $1_1 7_1$ làm cặp trục ($I_1 6_1 = I_1 6'_1 = I_2 7_2$)

_ 5_1, $5'_1$ là các tiếp điểm của hình chiếu bằng của giao tuyến với đường tròn bao hình chiếu bằng của cầu, chúng cũng là các điểm ranh giới thấy khuất ở hình chiếu bằng của giao.



Hình 12.2

➢ Hình chiếu bằng của giao tuyến là hai đường kín: Elíp tâm I_1 và đường kín $1_1 2_1 3_1 4_1 3'_1 2'_1 1_1$

➢ Xét thấy khuất như hình 12.2 với chú ý những điểm thuộc nửa trên cầu được thấy ở hình chiếu bằng: cung $5_1 6_1 7_1 6_1 5_1$ thấy; các cung còn lại khuất ở hình chiếu bằng .

❖ Ví dụ 3

Vẽ giao của mặt chóp S.ABC với mặt trụ chiếu bằng (Hình 12.3)

Giải

- Vì trụ chiếu bằng nên ta biết được hình chiếu bằng của giao tuyến là cung tròn $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 7_1 8_1$ thuộc đường tròn hình chiếu bằng của trụ
- Để vẽ hình chiếu đứng của giao tuyến ta gắn các cung thuộc các mặt của đa diện:

_ mp(ABC) ∩ trụ = cung tròn1D8, có hình chiếu đứng là đoạn thẳng ngang $D_2 8_2$

_ mp(SBC) ∩ trụ = Hai cung 12 và 78 của một elip, có hình chiếu đứng là hai cung$1_2 2_2$ và $7_2 8_2$ của một elip

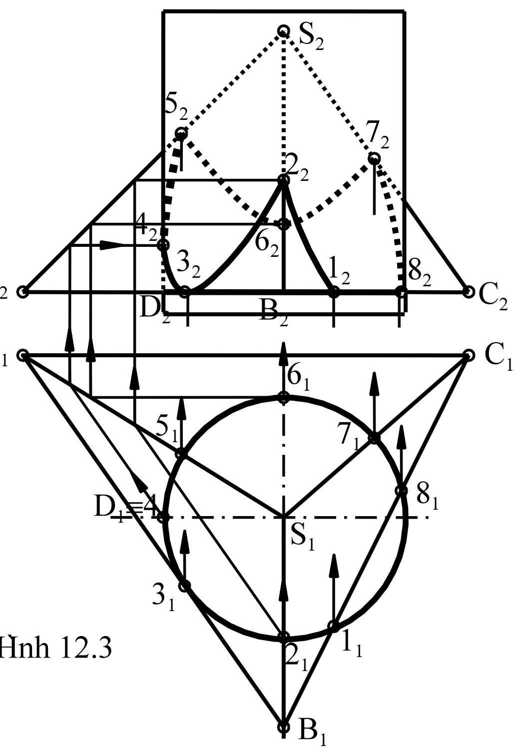
_ mp(SAB) ∩ trụ = cung elip 2345, có hình chiếu đứng là cung elip $2_2 3_2 4_2 5_2$

_ mp(SAC) ∩ trụ = cung elip 567, có hình chiếu đứng là cung elip $5_2 6_2 7_2$

_ 4_2 là tiếp điểm của hình chiếu đứng của giao tuyến với với đường sinh bao hình chiếu đứng của trụ và cũng là điểm ranh giới thấy khuất ở hình chiếu đứng của giao.

_ Vậy hình chiếu đứng của giao tuyến là đường kín $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2 D_2 1_2$

_ Xét thấy khuất như hình 12.3 với chú ý những điểm thuộc nửa trước trụ thì thấy ở hình chiếu đứng: $1_2 2_2 3_2 4_2$ thấy, các cung còn lại khuất ở hình chiếu đứng



Hnh 12.3

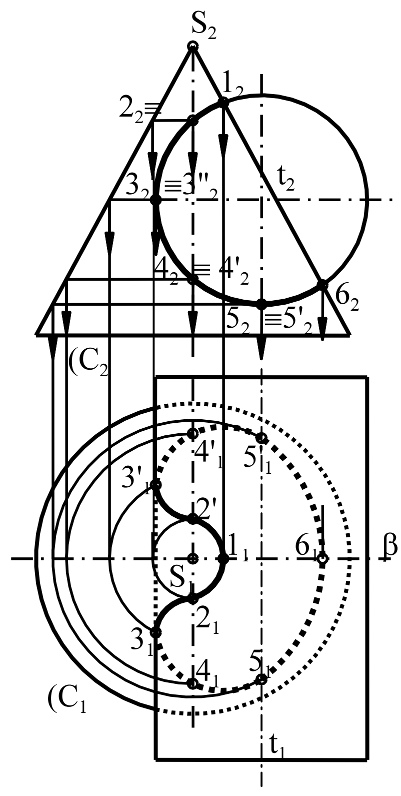
❖ **Ví dụ 4**

Vẽ giao của mặt nón tròn xoay đỉnh S với mặt trụ chiếu đứng (Hình 12.4)

Giải

- Hai mặt nón và trụ giao nhau nhau theo đường cong ghềnh bậc bốn, có:
- Hình chiếu đứng của giao tuyến là cung tròn $1_2 2_2$ $3_2 4_2 5_2 6_2$ thuộc đường tròn hình chiếu đứng của trụ

- Để vẽ hình chiếu bằng của giao tuyến ta áp dụng bài toán điểm thuộc mặt nón, bằng cách gắn các điểm vào các đường tròn vĩ tuyến nằm ngang của nón (hoặc gắn vào đường sinh của nón)
- 3_1, $3'_1$ là các tiếp điểm của hình chiếu bằng của giao tuyến với đường sinh bao hình chiếu bằng của trụ, chúng cũng là các điểm ranh giới thấy khuất ở hình chiếu bằng của giao.



Hình 12.4

- Hình chiếu bằng của giao tuyến là đường cong phẳng bậc bốn khép kín: 1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 $5'_1$ $4'_1$ $3'_1$ $2'_1 1_1$ đối xứng qua đường thẳng β_1 (là hình chiếu suy biến của mặt phẳng đối xứng chung)
- Xét thấy khuất như hình 12.4 với chú ý những điểm thuộc nửa trên của trụ thì thấy ở hình chiếu bằng: $3_1 2_1 1_1 2'_1 3'_1$- thấy; còn lại khuất ở hình chiếu bằng

III. TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT VỀ GIAO HAI MẶT BẬC HAI

Giao của hai mặt bậc hai trong trường hợp tổng quát là đường cong ghềnh bậc bốn. Trong các trường hợp đặc biệt đường cong ghềnh bậc bốn đó có thể suy biến thành :

_ Hai đường cong bậc hai
_ Một đường cong bậc hai và hai đường thẳng (hay một đường thẳng kép)
_ Một đường cong bậc ba và một đường thẳng
_ Bốn đường thẳng ...

Sau đây sẽ xét một vài định lý đã chứng minh về giao hai mặt bậc hai trong trường hợp đặc biệt.

➢ **Định lý 1**

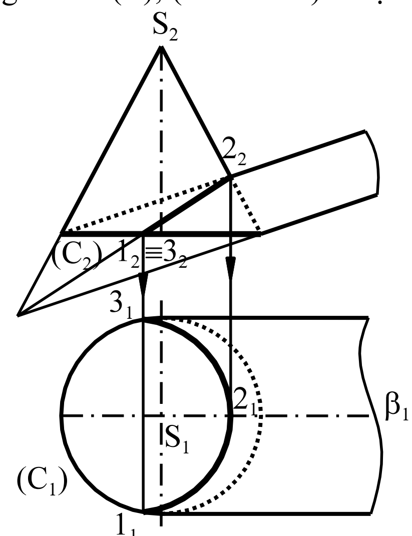
Nếu hai mặt bậc hai đã giao nhau theo một đường cong bậc hai thì chúng còn giao nhau theo một đường cong bậc hai nữa

❖ **Ví dụ**

Hãy vẽ giao tuyến của mặt nón với mặt trụ bậc hai có chung đường chuẩn (C); (Hình 12.5) - mặt phẳng đối xứng chung song song P_2

Giải

Hai mặt nón và trụ có chung nhau đường chuẩn (C), nên theo định lý 1 chúng còn giao nhau theo một đường cong bậc hai nữa. Vì mặt phẳng (β) đối xứng chung của hai mặt nón và trụ song songP_2 nên mp (β) sẽ cắt hai mặt đó theo các đường sinh mà ở hình chiếu đứng là các đường sinh biên, các đường sinh này sẽ giao nhau tại các điểm thuộc giao tuyến; hơn nữa mp (β) song songP_2 nên hình chiếu đứng của các đường cong bậc hai giao tuyến suy biến thành các đoạn thẳng đi qua các giao điểm của các đường sinh biên nói trên. Vì mặt trụ chỉ giới hạn tới đường chuẩn (C) nên đường cong bậc hai giao tuyến thứ hai chỉ là cung elip123; (Hình 12.5)



Hình 12.5

➢ **Định lý 2**

Nếu hai mặt bậc hai tiếp xúc nhau tại hai điểm và hai mặt phẳng tiếp xúc chung tại hai điểm đó không trùng nhau thì chúng giao nhau theo hai đường cong bậc hai đi qua hai điểm tiếp xúc đó

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ 2

1) Hướng thiết diện Mônjơ

Hướng thiết diện Mônjơ là hướng mặt phẳng cắt mặt bậc hai cho giao tuyến là elip có một hình chiếu là đường tròn

❖ **Ví dụ**

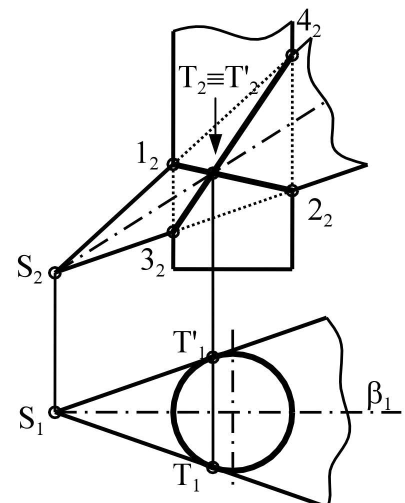
Cho mặt nón bậc hai có mặt phẳng đối xứng song song P_2 (Hình 12.6). Hãy vẽ hướng các mặt phẳng cắt mặt nón cho giao tuyến lá elip có hình chiếu bằng là đường tròn

Giải

- Vẽ mặt trụ tròn xoay chiếu bằng có hình chiếu bằng là đường tròn tiếp xúc với hai đường sinh bao của nón tại hai điểm T_1và T'_1
- Dễ thấy hai mặt nón và trụ tiếp xúc nhau tại hai điểm T,T' nên theo định lý 2; hai mặt nón và trụ giao nhau theo hai đường cong bậc hai đi qua hai điểm T, T'.
- Vì mặt phẳng β đối xứng chung của nón và trụ song song P_2 nên hình chiếu đứng của hai đường cong bậc

hai giao tuyến sẽ suy biến thành hai đoạn thẳng $1_2 2_2$ và $3_2 4_2$ đi qua $T_2 \equiv T'_2$; hình chiếu bằng của hai đường cong giao tuyến này là đường tròn trùng với đường tròn hình chiếu bằng của trụ; (Hình 12.6)

- Các mặt phẳng chiếu đứng $1_2 2_2$ và $3_2 4_2$ là các hướng mặt phẳng cắt nón cho giao tuyến là elip có hình chiếu bằng là đường tròn



Hnh 12.6

➢ **Chú ý**

Người ta ứng dụng hướng thiết diện **Monjơ** để xác định đáy của mặt nón, mặt trụ có một hình chiếu là đường tròn; khi nón, trụ đó có mặt phẳng đối xứng song song một mặt phẳng hình chiếu

2) Hướng thiết diện tròn

Hướng thiết diện tròn là hướng mặt phẳng, cắt mặt bậc hai cho giao tuyến là đường tròn

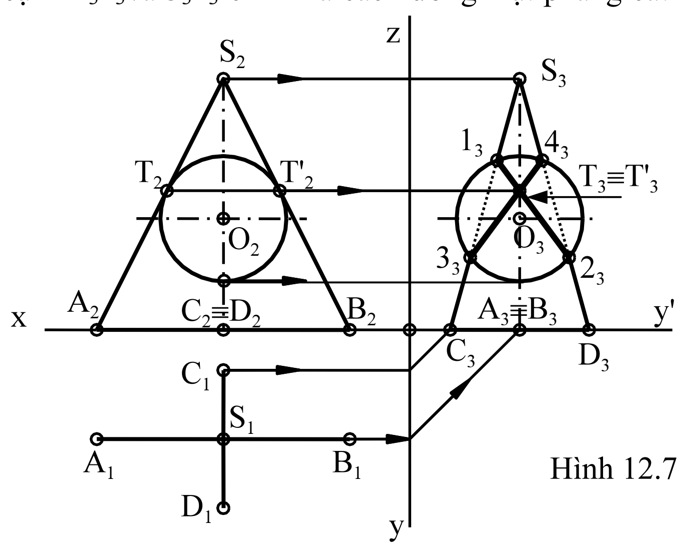
❖ **Ví dụ**

Cho mặt nón bậc hai có đường chuẩn là elip được xác định bằng cặp trục AB, CD; (Hình 12.7). Hãy vẽ hướng các mặt phẳng cắt mặt nón cho giao tuyến là đường tròn

Giải

Vẽ mặt cầu tâm O thuộc trục nón và tiếp xúc với nón tại hai điểm T, T' có hình chiếu đứng là đường tròn bao tiếp xúc với hai đường sinh bao hình chiếu đứng của nón tại hai điểm T_2 và T'_2. Theo định lý 2; hai mặt nón và cầu giao nhau theo hai đường cong bậc hai đi qua hai điểm T,T'; hai đường cong bậc hai này thuộc cầu nên nó là hai đường tròn. Vì mặt phẳng β đối xứng chung của nón và cầu song song song P_3 nên hình chiếu cạnh của hai đường tròn giao tuyến đó sẽ suy biến thành hai đoạn thẳng $1_3 2_3$ và $3_3 4_3$ đi qua $T_3 \equiv T'_3$; (Hình 12.7)

Các mặt phẳng chiếu cạnh $1_3 2_3$ và $3_3 4_3$ chính là các hướng mặt phẳng cắt nón cho giao tuyến là đường tròn



Hình 12.7

➢ **Định lý 3**

Nếu hai mặt bậc hai cùng nội tiếp hay ngoại tiếp với một mặt bậc hai khác thì chúng sẽ giao nhau theo hai đường cong bậc hai đi qua hai giao điểm của hai đường tiếp xúc

❖ **Ví dụ**

Hãy vẽ giao tuyến của hai mặt tròn xoay nón và trụ cùng ngoại tiếp cầu, có mặt phẳng đối xứng chung song song P_2; (Hình 12.8)

Giải

_ Gọi (v), (ω) là lần lượt là hai đường tròn tiếp xúc của mặt cầu với mặt nón và mặt trụ

_ Vẽ T, T' = (v) ∩ (ω). Vì mp (β) đối xứng chung của nón, trụ, cầu song song P_2 nên (v_2), (ω_2) suy biến thành hai đoạn thẳng và $T_2 \equiv T_2'$ = (v_2) ∩ (ω_2)

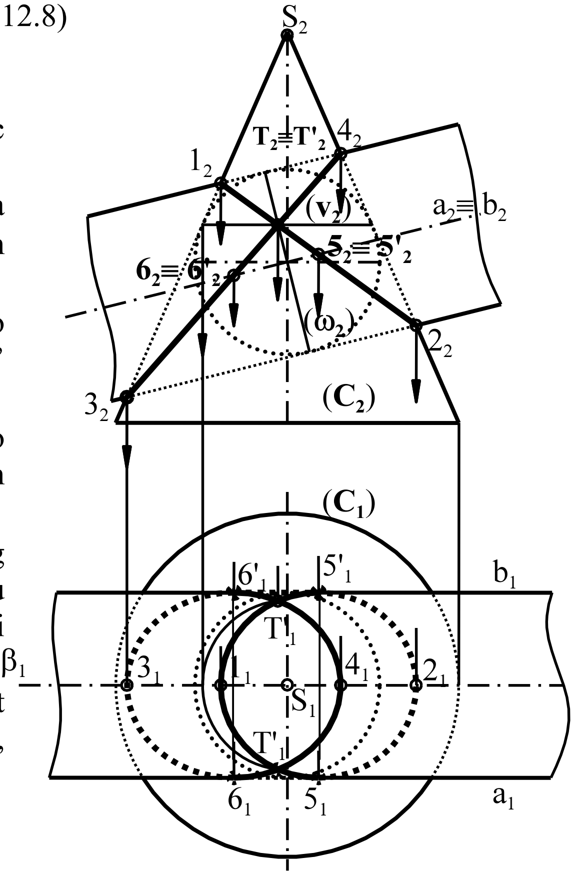
_ Theo định lý 3 thì hai mặt nón, trụ giao nhau theo hai đường cong bậc hai đi qua hai giao điểm T, T' của hai đường tiếp xúc (v) và (ω)

_ Vì mp (β) // P_2 nên hai đường cong bậc hai giao tuyến có hình chiếu đứng suy biến thành hai đoạn thẳng $1_2 2_2$và $3_2 4_2$ đi qua $T_2 \equiv T_2'$

_ 5_1, $5'_1$, 6_1, $6'_1$ là các tiếp điểm của hình chiếu bằng của giao tuyến với hai đường sinh bao hình chiếu bằng của trụ và đồng thời cũng là các điểm ranh giới thấy khuất ở hình chiếu bằng của giao

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là hai Elip lần lượt nhận cặp $1_1 2_1$, $5_1 5'_1$ và $3_1 4_1$, $6_1 6'_1$ làm hai cặp trục, hai elip này đi qua T_1 và T_1'

_ Xét thấy khuất như (hình 12.8)



Hình 12.8

III. MỘT VÀI VÍ DỤ GIẢI SẴN

❖ **Ví dụ 1**

Hãy vẽ giao tuyến của trụ tròn xoay chiếu bằng với lăng trụ xiên (abc); (Hình 12.9)

Giải

_ Vì trụ ⊥ P_1 nên ta biết được hình chiếu bằng của giao tuyến là cung tròn**:** $1_1 3_1 5_1$ thuộc đường tròn hình chiếu bằng suy biến của trụ

_ Giao tuyến là đường gấp khúc kín gồm tập hợp các điểm gãy và các cung elip thuộc các cạnh và các mặt của đa diện, được xác định như sau:

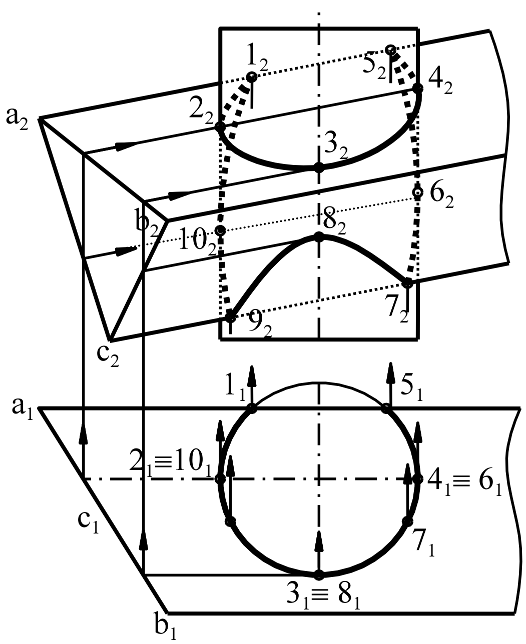
\+ mp(a,b) ∩ trụ = Cung elip 12345, có hình chiếu đứng là cung elip $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2$; trong đó 2_2 , 4_2 là các tiếp điểm của hình chiếu đứng của giao với hai đường sinh biên ở hình chiếu đứng của trụ, đồng thời cũng là hai điểm ranh giới thấy khuất ở hình chiếu đứng của giao tuyến

\+ mp(a,c) ∩ trụ = hai cung elip 567 và 910 1, có hình chiếu đứng là hai cung $5_2 6_2 7_2$ và $9_2 10_2 1_2$ của một elip. Vì mp(a,c) khuất ở hình chiếu đứng nên hai cung $5_2 6_2 7_2$ và $9_2 10_2 1_2$ khuất; trong đó: 10_2, 6_2 là các tiếp điểm của hình chiếu đứng của giao với hai đường sinh bao hình chiếu đứng của trụ

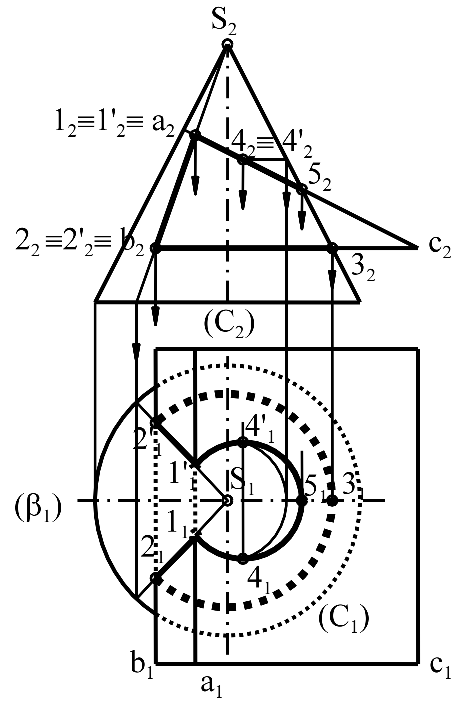
\+ mp(b,c) ∩ trụ = Cung elip 789, có hình chiếu đứng là cung elip $7_2 8_2 9_2$ thấy ở hình chiếu đứng

_ Hình chiếu đứng của giao tuyến là đường kín $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2 9_2 10_2 1_2$ gồm các cung elip nối liền nhau bỡi các điểm gãy .

Xét thấy khuất như (Hình 12.9)



Hình 12.9



Hình 12.10

❖ Ví dụ 2

Hãy vẽ giao tuyến của nón tròn xoay với lăng trụ (abc) chiếu đứng ; (Hình 12.10)

Giải

_ Vì lăng trụ (abc) $\perp$ P_2 nên ta biết được hình chiếu đứng của giao tuyến là đường gấp khúc: $5_21_2\,2_23_2$ thuộc hình chiếu đứng suy biến của lăng trụ

+ mp(a,b) $\cap$ nón = hai đoạn đường sinh 12 và1'2' thấy ở hình chiếu đứng và hình chiếu bằng
+ mp(b,c) $\cap$ nón = cung tròn 232', có hình chiếu bằng là cung tròn 21312'1. Vì mp(b,c) khuất ở hình chiếu bằng nên cung tròn 21312'1 khuất
+ mp(a,c) $\cap$ nón = cung elip 1454'1', có hình chiếu bằng là cung elip 1141514'11'1 nhận S1 làm một tiêu điểm

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là đường gấp khúc kín $1_12_13_12'_11'_14'_15_14_11_1$

_ Vì mp β đối xứng chung của nón và lăng trụ song song P_2 nên hình chiếu bằng của giao tuyến đối xứng qua đường thẳng (β_1)

_ Xét thấy khuất như (hình 12.10)

❖ Ví dụ 3

Hãy vẽ giao tuyến của mặt cầu tâm O với mặt trụ chiếu đứng ; (Hình 12.11)

Giải

_ Mặt trụ và cầu giao nhau theo đường cong ghềnh bậc 4

_ Vì trụ $\perp$ P_2 nên ta biết được hình chiếu đứng của giao tuyến là cung tròn: $1_22_23_24_25_2$ thuộc đường tròn hình chiếu đứng suy biến của trụ

_ Hình chiếu bằng của giao được vẽ bằng cách gắn vào đường tròn vĩ tuyến nằm ngang của cầu; ta nhận được hình chiếu bằng của giao tuyến là đường cong phẳng bậc 4 kín $1_12_13_14_15_14'_13'_12'_11_1$. Trong đó: 2_1, $2'_1$ là các tiếp điểm của hình chiếu bằng của giao với đường sinh bao hình chiếu bằng của trụ

_ Vì mp β đối xứng chung của cầu và trụ song song P_2 nên hình chiếu bằng của giao tuyến đối xứng qua đường thẳng (β_1)

_ Xét thấy khuất của hình như (hình 12.11)

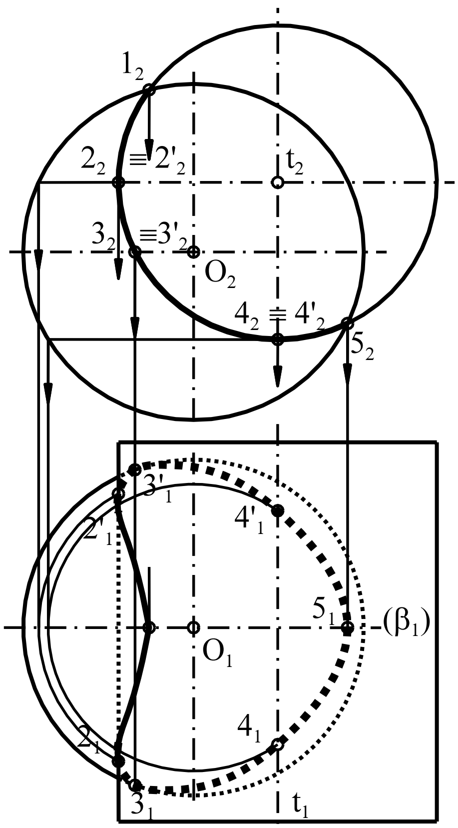
❖ Ví dụ 4

Hãy vẽ giao tuyến của mặt nón với mặt trụ chiếu đứng ; (Hình 12.12)

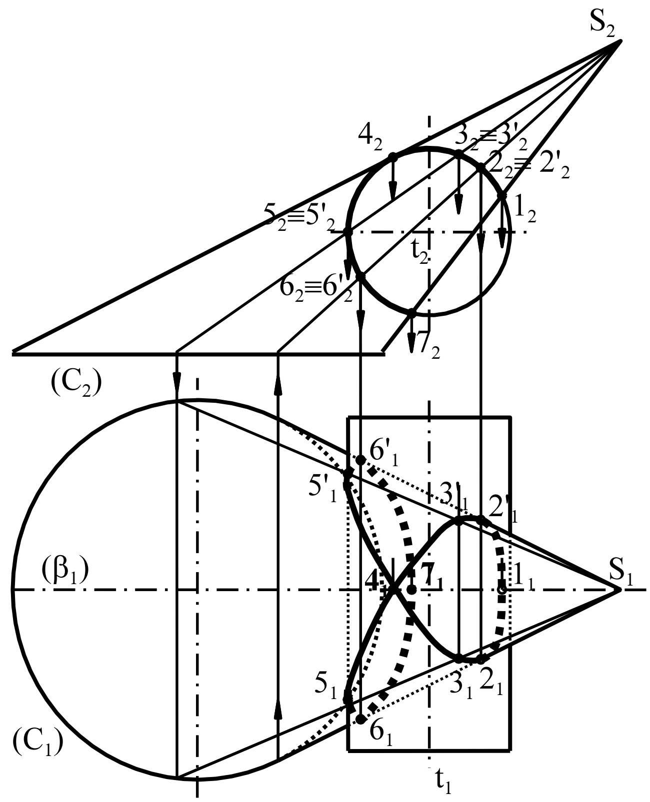
Giải

_ Mặt trụ và nón giao nhau theo đường cong ghềnh bậc 4

_ Vì trụ $\perp P_2$ nên ta biết được hình chiếu đứng của giao tuyến là cung tròn: $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2$ thuộc đường tròn hình chiếu đứng suy biến của trụ



Hình 12.11



Hình 12.12

_ Hình chiếu bằng của giao được vẽ bằng cách gắn vào đường sinh của nón; ta nhận được hình chiếu bằng của giao tuyến là đường cong phẳng bậc 4 kín: $1_1 2'_1 3'_1 4_1 5_1 6_1 7_1 6'_1 5'_1 4_1 3_1 2_1 1_1$. Trong đó: 2_1, $2_1'$, 6_1, $6'_1$ là các tiếp điểm của hình chiếu bằng của giao với đường sinh bao hình chiếu bằng của nón ; 5_1, $5'_1$ là các tiếp điểm của hình chiếu bằng của giao với đường sinh bao hình chiếu bằng của trụ

_ Vì mp β đối xứng chung của nón và trụ song song P_2 nên hình chiếu bằng của giao tuyến đối xứng qua đường thẳng (β_1).

_ Xét thấy khuất của giao như (hình 12.12)

❖ Ví dụ 5

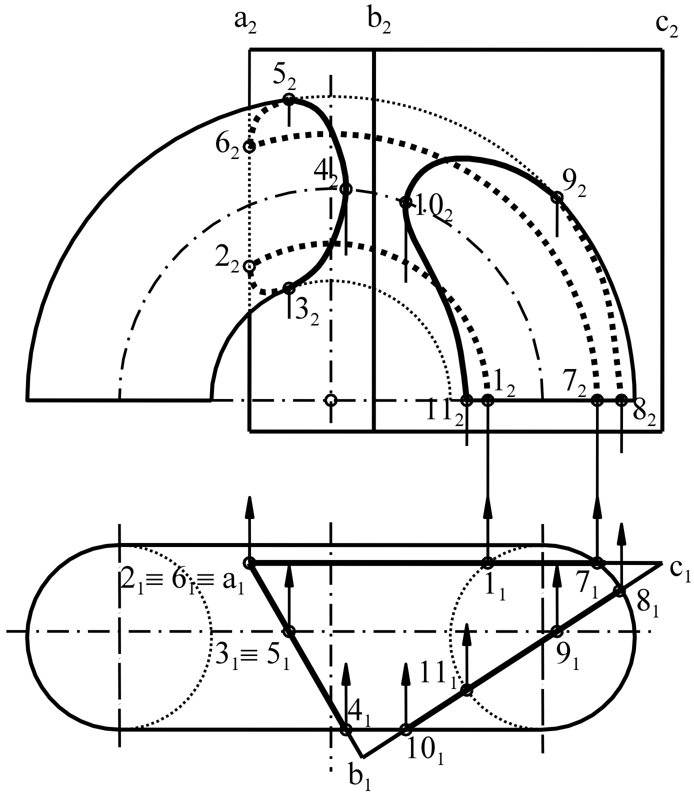
Hãy vẽ giao tuyến của nửa mặt xuyến có trục $t \perp P_2$ với lăng trụ (abc) chiếu bằng; (Hình 12.13)

Giải

_ Hình chiếu bằng của giao tuyến là đoạn $8_1 10_1$ và đường gấp khúc $4_1 2_1 7_1$ thuộc tam giác hình chiếu bằng suy biến của lăng trụ (abc)

_ Để vẽ hình chiếu đứng của giao tuyến ta gắn các điểm thuộc các đường tròn của xuyến nằm trong mặt phẳng vuông góc trục t. Kết quả nhận được hình chiếu đứng của giao tuyến là hai đường hở $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2$ và $8_2 9_2 10_2 11_2$ (hai đường hở vì ở đây chỉ xét nửa xuyến)

_ Xét thấy khuất của hình như hình 12.13 với chú ý những điểm nằm nửa trước của xuyến được thấy trên hình chiếu đứng, cụ thể cung $3_2 4_2 5_2$và $9_2 10_2 11_2$ thấy; các cung còn lại khuất trên hình chiếu đứng .



Hình 12.13

================