BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG - ĐHBK

BGĐT – TOÁN 1

BÀI 7: TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH – XÁC ĐỊNH – SUY RỘNG

TS. NGUYỄN QUỐC LÂN (12/2006)

NỘI DUNG

1- NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

2- TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỶ

3- TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ

4- TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

5- T/PHÂN X/ĐỊNH. Đ/HÀM T/PHÂN THEO CẬN TRÊN

6- TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 1 & LOẠI 2

7- TIÊU CHUẨN SO SÁNH 1, 2. HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI

1. NGUYÊN HÀM

Tích phân bất định: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Bảng nguyên hàm cơ bản : Bổ sung hàm lượng giác ngược

Hàm số	Cơ bản	Tổng quát
Lượng giác ngược	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arctg}x + C$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C$
	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
Hyperbolic	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$

1. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- **Phương pháp : Biến đổi về tổng**
- **Kỹ năng : Đổi biến 1 – 2**
  - **Kỹ năng : Đổi biến 1 – 2** $\int f(u(x)u'(x)dx = \int f(u)du$
  - **Đổi biến 2: Phát hiện x(t)** $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$
- **Tích phân từng phần: v = Phần khó tìm nguyên hàm**
- **Tích phân hàm hữu tỷ**

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \mathbf{K} + \frac{B_1}{(x-\beta_1)} + \frac{B_2}{(x-\beta_1)^2} + \mathbf{K} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} \right]$$

- **Tích phân hàm vô tỷ (căn thức) + Lượng giác**

2. PHÂN THỨC HỮU TỶ. BẬC TỬ ≥ BẬC MẪU

Phân thức hữu tỷ: P(x)/Q(x), P và Q: đa thức. Phân thức hữu tỷ thực sự: Bậc P(x) < Bậc Q(x).

Bậc P(x) ≥ Bậc Q(x): Chia P(x) cho Q(x) → đa thức thương số h(x), đa thức dư r(x) ⇒ P(x) = h(x)Q(x) + r(x) ⇒

$$\int \frac{P}{Q} = \int \frac{h(x)Q(x)+r(x)}{Q(x)}dx = \int h(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx \text{ , bậc } r < \text{bậc } Q$$

VD: Tính tích phân

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = \int \left[x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right]dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C$$

2. PHÂN THỨC HỮU TỶ. NGUYÊN TẮC TỔNG QUÁT

1/ Phân tích đa thức mẫu số Q thành tích (bậc 1 hoặc bậc 2)

2/ Phân tích P/Q → tổng (thêm bớt, hoặc hệ số bất định)

VD: Tính $a/\int \frac{dx}{x^3+x^5} = \int \frac{1+x^4-x^4}{x^3(1+x^2)}dx = \int \frac{1-x^2}{x^3}dx + \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$$b/\ I = \int \frac{(x^2-1)}{(x^2+5x+1)(x^2-3x+1)}dx = \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+5x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-3x+1}\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\left[-\frac{2x+5}{x^2+5x+1} + \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\right] = \frac{1}{8}\int\left[-\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right] = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-3x+1}{x^2+5x+1}\right| + C$$

Đại số: Mọi đa thức hệ số thực bậc n luôn phân tích được thành tích các nhị thức bậc 1 và tam thức bậc 2 có $\Delta < 0$

2. PHÂN TÍCH PHÂN THỨC P(X)/Q(X) → TỔNG

1/ Giải Q(x) = 0 ⇒ Đưa Q(x) về tích bậc 1 & bậc 2 (Δ < 0)

$$Q(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}_{p_1^2-4q_1<0}\underbrace{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}}_{p_2^2-4q_2<0}\ldots$$

2/ Phân tích P(x)/Q(x) thành tổng các phân thức cơ bản:

$$\underbrace{\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{A_{m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}}_{m_1\ \text{thừa số}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)}_{g_1(x)}}+\frac{B_2x+C_2}{g_1^2(x)}+\ldots$$

3/ Quy đồng mẫu số; Đồng nhất 2 vế; Giải hệ p/trình tìm A_k …

1/ Tích ở mẫu số chứa bao nhiêu thừa số → Tổng chứa bấy nhiêu

2/ Mẫu bậc 1→ Tử: hằng số. Mẫu bậc 2 (lũy thừa k) → Tử bậc 1

2. TÍCH PHÂN CÁC PHÂN THỨC CƠ BẢN

Bậc 1 / Bậc 2, mẫu số vô nghiệm: Thêm bớt tạo dạng u’/u

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{m}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\cdot\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Bậc 1 / (Bậc 2)^n: Thêm bớt tạo u’/u^n & Đưa về C/(x^2 + α^2)^n

$$\frac{mx+n}{\left(ax^2+bx+c\right)^r}=\frac{m}{2a}\cdot\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^r}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(x^2+\alpha^2\right)^r}$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

Từng phần: $I_{n+1}=\dfrac{1}{2na^2}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^n}+\dfrac{2n-1}{2n}\cdot\dfrac{1}{a^2}I_n$

Lượng giác hóa: x = atgt $\Rightarrow I_n\to\int\cos^{2n-2}t\,dt$

2. VÍ DỤ TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

Đưa các tích phân sau về phân thức hữu tỷ cơ bản

$$a.\int \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}dx \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$ **x = 0 ⇒ A = … ; x = 1 ⇒ C**

$$b.\int \frac{dx}{x^5-x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

$$c.\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3} \Rightarrow \frac{1}{(x^2+x+1)^3} = ???:$$ **Không thể phân tích (mẫu: bất khả quy, tử: bậc ≤ 1)!!!**

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^3} = \frac{1}{\left[(x+1/2)^2+3/4\right]^3} = \frac{1}{(t^2+a^2)^3}\quad t = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}u \Rightarrow I = \mathbf{K}\int \cos^4 u$$

3. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ- CĂN PHÂN THỨC BẬC 1

Tích phân chứa căn bậc n, trong căn chứa phân thức bậc 1

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Đặc biệt: Tích phân $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[n]{ax+b}$

VD: $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} \cdot \dfrac{dx}{x+1}$

Giải: Đổi biến $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} \Rightarrow x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1} \Rightarrow dx = -\dfrac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$

Tổng quát: $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} \ldots\right)dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$

3. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ – CĂN CỦA TAM THỨC

Tích phân chứa căn bậc 2, trong căn chứa tam thức bậc hai → Đưa về bình phương đúng $k \pm x^2$ & Sử dụng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)+C$$

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

3. TÍCH PHÂN ĐA THỨC – CĂN CỦA TAM THỨC

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

VD: $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx =$

$$\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ **Đổi biến:** $x-\alpha = \frac{1}{t}$

VD: $I = \int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$ **Đổi biến:** $x = \frac{1}{t} \Rightarrow I = \int\frac{-dt/t^2}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}$

3. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ – CĂN CỦA TAM THỨC

Căn tam thức → Lượng giác hoá (hoặc hyperbolic hóa):

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx \Rightarrow x = a|\sin t|$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx \ : \left[\begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}t \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a/|\cos t| \\ x = a\sinh t \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a\cosh t \end{array}\right.$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx \ : \left[\begin{array}{l} x = a/\cos t \Rightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = a|\mathrm{tg}t| \\ x = a\cosh t \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a|\sinh t| \end{array}\right.$$

VD: $I = \int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx \quad x = \sinh t \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^2 = \cosh t \\ dx = \cosh t\,dt \end{cases} \Rightarrow I = \int \coth^2 t\,dt\,?$

Quen thuộc hơn: $x = \mathrm{tg}t,\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow I = \int \dfrac{dt}{\cos t \sin^2 t}$

3. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỶ – PHÉP THẾ EULER

Tính $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **(Giới thiệu ý tưởng. Minh hoạ)**

$$a>0: \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$$

$$\Delta>0: ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu): \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$$

VD: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$

VD: $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$ $\quad \sqrt{x^2-x+1} = t - x \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t-1}$

4. HÀM LƯỢNG GIÁC – PHÂN THỨC HỮU TỶ

Hàm hữu tỷ theo sinx, cosx: R(sinx, cosx)

VD: $\dfrac{1}{1+\sin x+\cos x},\ \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x},\ \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\sin^3 x},\ \dfrac{\sqrt{\sin x}+\cos x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx : t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 2t\big/\left(1+t^2\right) \\ \cos x = \left(1-t^2\right)\big/\left(1+t^2\right) \\ dx = 2\,dt\big/\left(1+t^2\right) \end{cases}$$

VD: $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$ $\qquad\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ $\qquad\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$

4. LƯỢNG GIÁC – BẬC 1/BẬC 1 – KHAI THÁC u'/u

Trường hợp riêng: $\dfrac{A\sin x + B\cos x + C}{A'\sin x + B'\cos x + C'} = \dfrac{u}{v}$

Tách thành tổng: $u = \alpha + \beta v + \lambda v' \Rightarrow \dfrac{u}{v} = \beta + \lambda \dfrac{v'}{v} + \alpha \dfrac{1}{v}$

Vài dạng khác: $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x dx \qquad \int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$

Hạ bậc, biến tích → tổng & phối hợp tính chẵn lẻ:

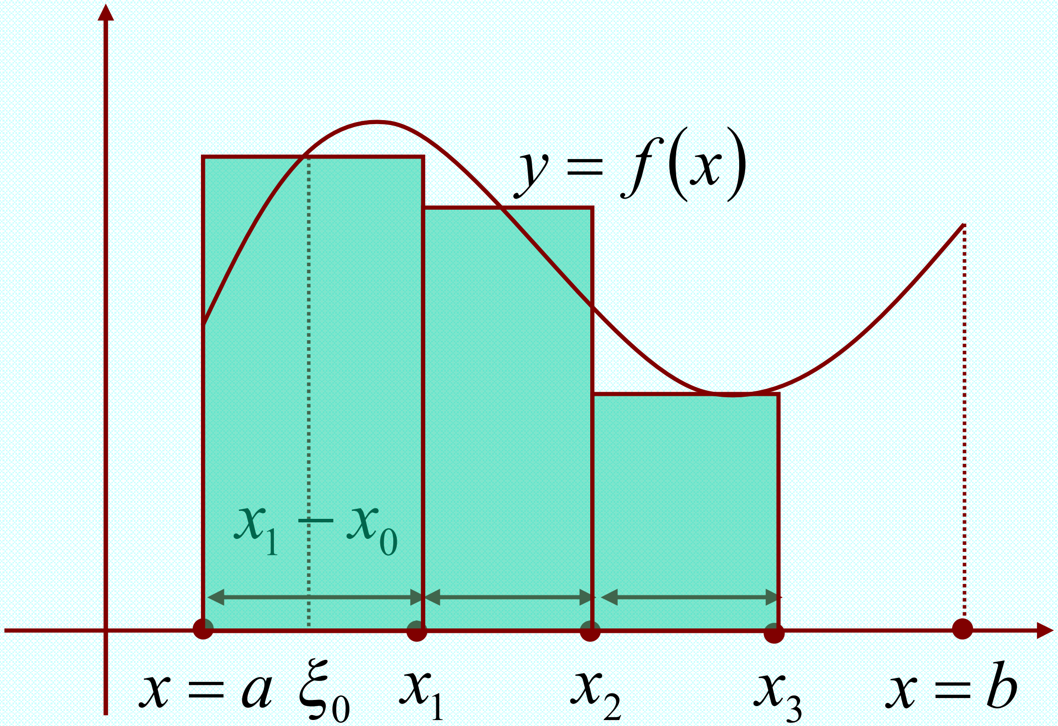
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \cos x$$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \sin x$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \mathrm{tg} x$$

5. Ý NGHĨA PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài toán thực tế: Diện tích hình thang cong: y = f(x), x = a …



Diện tích hình thang cong ≈ Tổng diện tích các hình chữ nhật xấp xỉ

$$f(\xi_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x_0} + f(\xi_1)\Delta_{x_1} + \ldots$$

Chia càng nhỏ càng tốt ⇒

Diện tích hình thang cong: lim tổng (Rieman)

$$\lim_{\max(\Delta x_k)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\Delta x_k} f(c_k) = \int_a^b f(x)dx$$

5. KẾT QUẢ CƠ BẢN

Lặp lại quy trình với nhiều bài toán: Thể tích vật thể tròn xoay, độ dài dây cung, công của lực biến thiên … ⇒ Khái niệm tích phân xác định, định nghĩa bởi tổng Rieman của hàm f(x) trên đoạn [a, b]:

$$\lim_{\max(\Delta x_k)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = \lim_{\max(\Delta x_k)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x)+C\ ,\ F: \text{Nguyên hàm}$$

Tìm C ⇒ Công thức Newton – Lebnitz: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

5. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Hàm f(x) xác định, bị chặn trên đoạn [a, b]. Phân hoạch:

$$a = x_0 < x_1 < \mathbf{K} < x_n = b \ ; \ \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]; \delta = \max_k |x_{k+1} - x_k|$$

Tphân xđịnh: Giới hạn tổng Rieman khi δ → 0 ∀ cách phân hoạch [a, b], ∀ cách chọn điểm chia ξk ∈ [x_k, x_{k+1}]:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k) = \int_a^b f(x)dx$$

Định lý: Hàm liên tục trên 1 đoạn thì khả tích (Rieman)

VD: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$

5. ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Bất đẳng thức tích phân:

$$f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Hay sử dụng:

$$m \le f(x) \le M \;\; \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Định lý giá trị trung bình: Hàm f(x) liên tục trên [a, b] ⇒

$$\exists\, \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5. ĐẠO HÀM TÍCH PHÂN THEO CẬN TRÊN

Tích phân theo cận trên: $S(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow S'(x) = f(x)$

Tổng quát: Đạo hàm tích phân theo cận trên lẫn dưới

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

VD: Tính giới hạn $a/ \lim_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \cos(t^2)dt}{x}$ $\quad b/ \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\int_0^x (\text{arctg}t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

5. VÀI CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN ĐẶC BIỆT

f(x): hàm lẻ (f(–x) = –f(x)) ⇒ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

f: hàm tuần hoàn (f(x+ T) = f(x) ∀x) ⇒ $\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$

VD: Tính tích phân $I = \int_{0}^{2006\pi} \sin(2006x + \sin x)dx$

Tích phân liên hợp $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow \int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)dx$

VD: Tính $I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^{\alpha} x}{\sin^{\alpha} x + \cos^{\alpha} x} dx$

6. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 1

---

f(x) xác định trên [a, ∞), khả tích trên mọi [a, b] ⊂ [a, ∞)

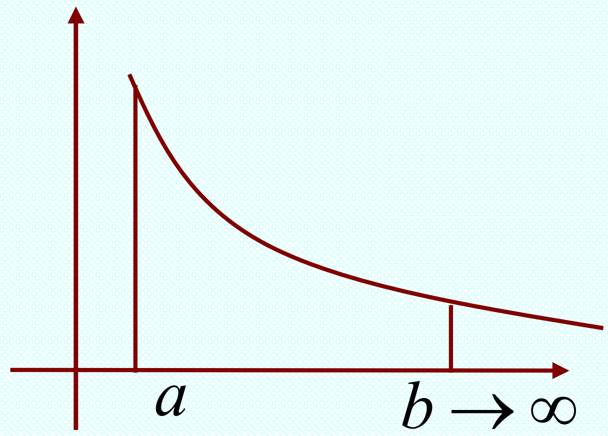
Tích phân suy rộng loại 1: $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

Điểm suy rộng: ∞

Giới hạn tồn tại và hữu hạn ⇔ Tích phân suy rộng hội tụ

VD: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}[\mathrm{arctg}x]_0^b = \frac{\pi}{2}$

VD: Tphân suy rộng $\int_0^{\infty}\cos x\,dx$: **Phân kỳ!**



Khảo sát & tính tphân SR: Tính tphân XĐ & qua giới hạn

6. TÍCH PHÂN SUY RỘNG TẠI –∞, TRÊN R

Ký hiệu: $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) \Rightarrow$ $\boxed{\int_a^{\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{\infty}}$

TP suy rộng trên (–∞, b]

→ Điểm suy rộng –∞ :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{b}$$

TP suy rộng trên R: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{\infty} f = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f + \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$

Chú ý: TP suy rộng trên R, hai đầu → ± ∞ độc lập với nhau!

Hệ quả: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \neq \lim_{a\to\infty} [F(x)]_{-a}^{a}$

VD: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0\ ???$

6. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2

Hàm f(x) xác định trên [a, b), không bị chặn trong lân cận b, khả tích trên mọi [a, c] ⊂ [a, b) → Điểm suy rộng: b

Tích phân suy rộng loại 2: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx = [F(x)]_a^{b-}$

VD: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1-} [\arcsin x]_0^{1-} = \frac{\pi}{2}$

Hai điểm suy rộng a, b: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^c f + \lim_{\beta\to b-} \int_c^\beta f$

VD: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

VD: $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$

7. KHẢO SÁT SỰ HỘI TỤ CỦA TP SUY RỘNG

Chứng minh tích phân suy rộng tồn tại (hội tụ) bằng cách tính TP xác định & qua giới hạn: CỒNG KỀNH, PHỨC TẠP, KHÔNG THỰC TẾ → Bài toán: Khảo sát sự hội tụ

TPSR Rieman (hàm luỹ thừa)

$$I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\left[\begin{array}{l}\boxed{\alpha>1}:\text{hội tụ}\\ \alpha\le 1:\text{phân kỳ}\end{array}\right.$$

Tích phân suy rộng Rieman loại 1 hội tụ ⇔ $\alpha > 1$

Rieman loại 2: $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}},\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}\to\int_0^a\frac{dx}{x^{\alpha}},\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}},\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$

Tích phân suy rộng Rieman loại 2 (3 dạng: miền lấy tích phân hữu hạn) hội tụ ⇔ $\boxed{\alpha < 1}$. Đừng nhầm với Rieman 1!

7. HÀM KHÔNG ÂM – TIÊU CHUẨN SO SÁNH 1

Hàm f xác định / [a, b), điểm suy rộng b & f(x) ≥ 0 ∀ x ∈ [a, b)

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$: **Hàm↑** $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x\to b-} F(x) \Leftrightarrow F(x)\le M \ \forall\, x\in[a,b)$

Tphân suy rộng (hàm không âm) $\int_a^b f(x)dx$ **hội tụ ⇔ bị chặn**

f(x), g(x) ≥ 0 trên [a, b) ; f(x) ≤ g(x) trong lân cận ĐSRộng b

$a/\int_a^b g<\infty \Rightarrow \int_a^b f<\infty$ $\qquad$ $b/\int_a^b f=\infty \Rightarrow \int_a^b g=\infty$

VD: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^\infty e^{-x^2}dx$: **TP (1) thường; (2): suy rộng**

7. TIÊU CHUẨN SO SÁNH 2

f, g ≥ 0 trên [a, b) với $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in (0,\infty) \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to b}{\sim} kg(x)$

$\Rightarrow \int\limits^{b} f(x)dx\ ,\ \int\limits^{b} g(x)dx$ **cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ**

- **k = 0 ⇒ f(x) ≤ g(x) (lân cận b) ⇒ Áp dụng Tchuẩn so sánh 1**
- **k = ∞ ⇒ f(x) ≤ g(x) (lân cận b) ⇒ Áp dụng Tchuẩn so sánh 1**

VD: $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad \int\limits_0^1 \dfrac{\ln x dx}{(x-1)}$ $\qquad \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)(e^x-\sqrt{1-x})}}$

$\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$: hội tụ $\qquad$ Đầu 0: $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\ln x = 0$ $\qquad x\to 0+ : e^x - \sqrt{1-x} \sim \dfrac{3x}{2}$

Trường hợp tổng quát, thường so sánh *f* với tphân Rieman!

7. HÀM DẤU BẤT KỲ. HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI

Hội tụ tuyệt đối: TPSR của | f | hội tụ ⇒ TPSR của f hội tụ

VD: $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx$ $\qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$

VD: $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx : \text{hội tụ}$

∫ |f(x)| dx phân kỳ (không hội tụ tuyệt đối) & ∫ f(x) dx hội tụ

⇒ Bán hội tụ

VD: $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx : \text{hội tụ nhưng tphân trị tuyệt} \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx : \text{phân kỳ!}$

KẾT LUẬN

Tính Tích phân suy rộng: Phải tìm nguyên hàm & Qua g/hạn

Khảo sát sự hội tụ (phân kỳ) của TPSR: Kỹ năng chứng minh

- Cận hữu hạn, hàm vô hạn: Loại 2; Cận ∞: Loại 1 (và 2)
- Hàm dưới dấu ∫ DƯƠNG: T/ch so sánh (dạng t/đương)
- Điểm suy rộng b:

$$\left[\begin{array}{l} b = \pm\infty : x \to \pm\infty,\ f(x) \sim C \big/ |x|^{\alpha} \\ b \in R : x \to b,\ f(x) \sim C \big/ |b-x|^{\alpha} \end{array}\right.$$

Hàm dưới dấu t/phân ĐỔI DẤU: Lấy trị tuyệt đối & đánh giá