Prof. NGUYỄN THẾ HÙNG

PHƯƠNG PHÁPTÍNH

NUMERICAL METHODS FOR ENGINEERS

****

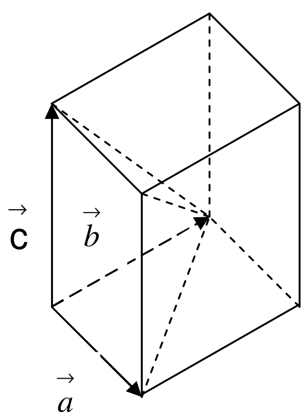
DANANG UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
Danang 2000

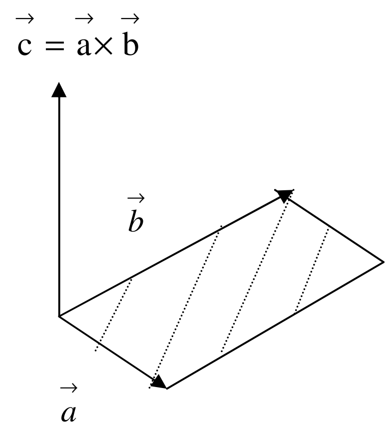
MỤC LỤC

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Chương 0 PHẦN BỔ TÚC
Supplement

A. PHÉP TÍNH VECTO





- Tích vô hướng : $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\varphi$

  $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
- Tích vector : $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab\sin\varphi$

  Có tính chất: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

- Tích hỗn tạp :

$$abc = (a \times b) . c = a.(b \times c) = bca = cab = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$abc = -bac = -cba = -acb$$

$$V_1 = |abc|, \ V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}|abc|$$

V_1 là thể tích hình hộp dựng trên các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

V_2 là thể tích hình chóp dựng trên các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nầy.

Toán tử Haminton

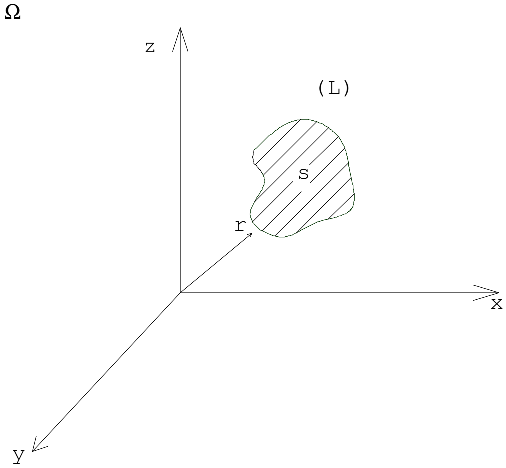
$$\text{gradU} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{divA} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

$$\text{rotA} = \left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)k$$

Công thức Ostrogradsky - Gauss:

$$\oint_{\sigma} A d\sigma = \int_{\Omega} \text{divA} d\Omega$$



Với σ : mặt và Ω : thể tích

Công thức Stokes :

$$\oint_{(L)} A dr = \int_{(S)} \text{rotA} ds \text{ với } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Phép toán với toán tử ∇

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla U = i\frac{\partial U}{\partial x} + j\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z} = \text{gradU}$$

$$\nabla \bullet A = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet (iAx + jAy + kAz) = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z} = \text{divA}$$

$$\text{CurlA} = \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial_X} & \dfrac{\partial}{\partial_Y} & \dfrac{\partial}{\partial_Z} \\ A_X & A_Y & A_Z \end{vmatrix}$$

$$\text{CurlA} = i\left(\frac{\partial A_Z}{\partial_Y} - \frac{\partial A_Y}{\partial_Z}\right) + j\left(\frac{\partial A_X}{\partial_Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial_X}\right) + k\left(\frac{\partial A_Y}{\partial_X} - \frac{\partial A_X}{\partial_Y}\right) = \text{rotA}$$

$$A \bullet \nabla = (iA_X + jA_Y + kA_Z) \bullet \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) = A_X\frac{\partial}{\partial x} + A_Y\frac{\partial}{\partial y} + A_Z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dt} = v \bullet \nabla + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \bullet \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ divgrad u } = \nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

<u>Ví dụ</u>: Chiếu phương trình Navier- Stocks lên hệ trục tọa độ tự nhiên:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp + \upsilon \Delta \vec{v}$$

Trong đó: $\vec{F} \equiv \vec{g}$

$\vec{v}$: Trường vận tốc dòng chảy.

ρ: Khối lượng riêng.

p: Áp suất(Vô hướng).

υ: Hệ số nhớt chất lỏng.

Hướng dẫn: VT= $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\nabla\vec{v}$

Mà $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$

$$\nabla\vec{v} = \vec{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial v}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial v}{\partial z}$$

VP=$\vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z - \dfrac{1}{\rho}(\vec{i}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial p}{\partial z}) + \upsilon(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2})$

Cân bằng hai vế rồi chiếu lên ox, oy, oz

B. PHÉP TÍNH TEN-XỎ (Tensor analysis)

Hạng của Tensor là số chỉ số của Tensor đó.

Ví dụ : a_i có một chỉ số, nên là tensor hạng nhất

a_{ij} có hai chỉ số, nên là Tensor hạng hai

Qui tắc chỉ số

Khi có hai chỉ số giống nhau, biểu thị một tổng:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

Hệ thống đối xứng khi $a_{ij} = a_{ji}$, phản đối xứng khi $a_{ij} = -a_{ji}$

Ví dụ:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi} \quad i = j \\ 0 & \text{khi} \quad i \neq j \end{cases}$$

là một Tensor hạng hai đối xứng.

- Tổng các Tensor cùng hạng là một Tensor cùng hạng:

  $C_{ijk} = a_{ijk} \pm b_{ijk}$ (hạng ba)
- Nhân Tensor: $C_{ijklm} = a_{ijk}.b_{lm}$

  (mọi tích có thể có của từng thành phần Tensor)

  Vô hướng được xem như Tensor hạng zero.
- Phép cuộn Tensor:

Được thực hiện khi có hai chỉ số bất kỳ trùng nhau:

$$a_{ijkk} = \sum_{k=1}^{3} a_{ijkk} = a_{ij11} + a_{ij22} + a_{ij33} = C_{ij}$$

Phép nhân trong: $C_{ijm} = a_{ijk} b_{km}$

Là phép nhân và cuộn đồng thời các Tensor , cho ta tìm được vết của Tensor.

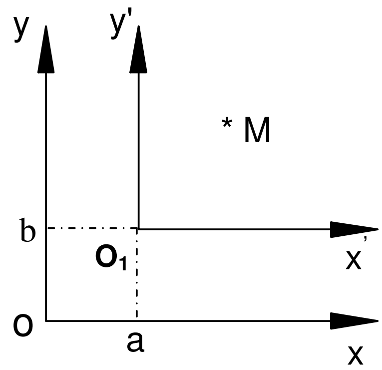
Phép nhân trong cho ta điểm xuất phát quan trọng để nhận được các bất biến của các đối tượng hình học và vật lý.

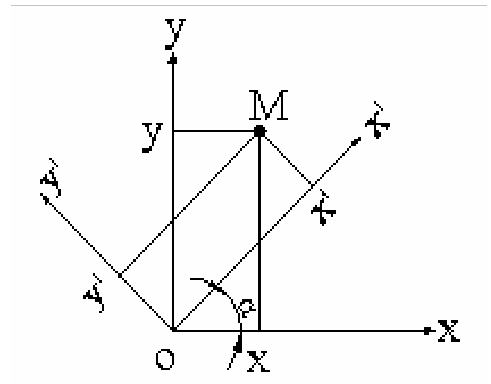
Thí dụ: Vết của Tensor $a_{ij} = x_i y_j$

Khi cho i = j => $a_{ii} = x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ = vô hướng

C. CÁC PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI

1. Phép biến đổi tọa độ





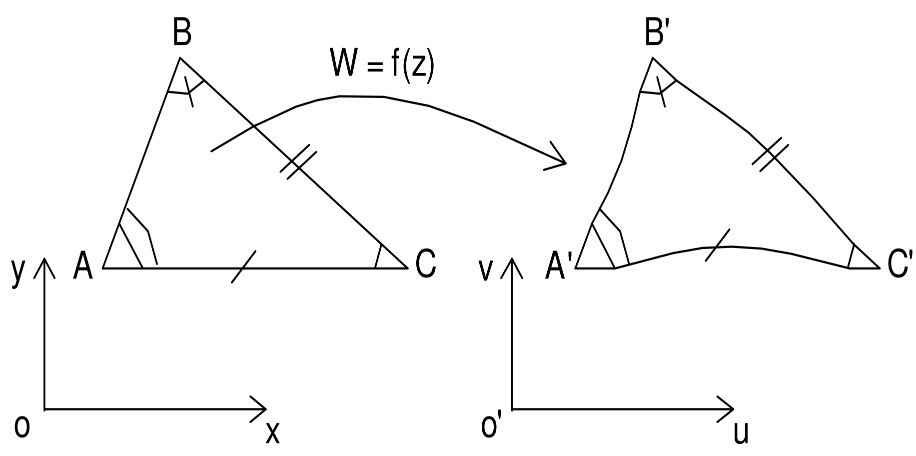
+ Phép tịnh tiến:

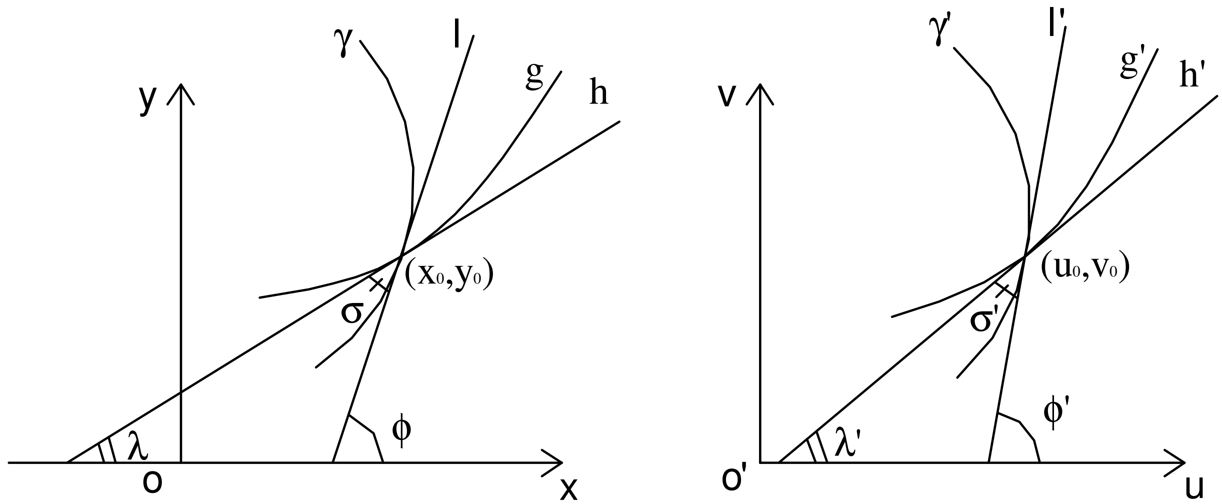
$$\begin{cases} x = x' + a & , \quad y = y' + b \\ x' = x - a & , \quad y' = y - b \end{cases}$$

+ Phép quay:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha & , \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha & , \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

2. Phép biến hình bảo giác





Cho W = f(z) giải tích trong miền D, số phức z = x + yi và W = u + vi

Phép biến đổi điểm: $A(x,y) \rightarrow A'(u,v)$,

Các cạnh tỉ lệ với nhau: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$ và các góc tương ứng bằng nhau: góc $\beta = \beta'$ (bảo giác)

3. Phép biến đổi Laplace

Xét phương trình vi phân : $\alpha \Delta U(x_i, t) = \frac{\partial U(x_i, t)}{\partial t}$, với $t > 0$

Nhân 2 vế của phương trình trên với e^{-pt} (với p > 0), lấy tích phân theo t từ $0 \rightarrow \infty$, ta được : $\alpha \int_0^\infty \Delta U(x_i, t) e^{-Pt} dt = \int_0^\infty \frac{\partial U(x_i, t)}{\partial t} e^{-Pt} dt$

Đặt $\overline{U}(x_i, P) = \int_0^\infty U(x_i, P) e^{-Pt} dt$, hàm $\overline{U}(x_i, P)$ được gọi là phép biến đổi Laplace của hàm $U(x_i, t)$ đối với t .

Biểu thức trên được viết lại theo $\overline{U}(x_i, P)$:

$$\alpha.\Delta \overline{U} = P\overline{U} - U(x_i, P),$$

Giải dễ dàng hơn và tìm được $\overline{U}$, có $\overline{U}$ dùng bảng tra tìm U.

Chú ý: $\int_0^\infty \frac{\partial U(x_i, t)}{\partial t} e^{-Pt} dt = \left[U(x_i, P).e^{-Pt} \right] + P \int_0^\infty U(x_i, t) e^{-Pt} dt$

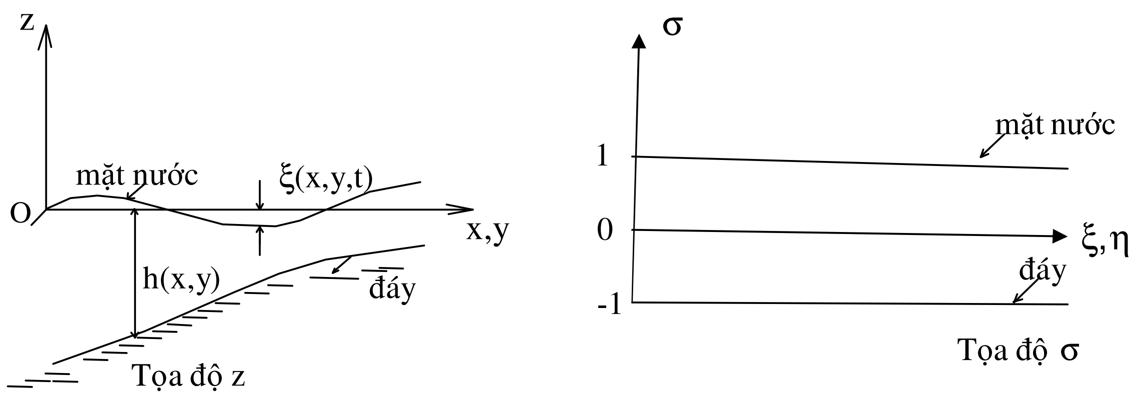
4. Phép biến đổi Sigma σ

$\xi = x$ $\quad z = \xi \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = 1$ tại mặt thoáng

$\eta = y$ $\quad z = -h(x,y) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -1$ tại đáy

$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2(z - \xi)}{h(x,y) + \xi} + 1$ => $\sigma \in [-1, +1]$

$t' = t$



D. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA GIẢI TÍCH HÀM

1. Không gian mêtrix

Định nghĩa: Một tập hợp X được gọi là một không gian Metrix, nếu ứng với mỗi cặp phần tử $x,y \in X$ có một số thực $\rho(x,y) \geq 0$, gọi là khoảng cách giữa x & y, thỏa điều kiện sau:

$\rho(x,y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$, $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, $\forall x,y,z \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

2. Không gian tuyến tính định chuẩn

Tập hợp X được gọi là không gian tuyến tính nếu trên tập hợp đó xác định hai phép tính: Cộng các phần tử và nhân phần tử với một số đồng thời thỏa các tiên đề:

$x + y = y + x$, $(x + y) + z = x + (y + z)$,

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Tồn tại phần tử $\theta \in X$, gọi là phần tử không, sao cho $0.x = \theta$, $\forall x \in X$

Không gian tuyến tính được gọi là định chuẩn, nếu ứng với mỗi $x \in X$ ta xác định được một số thực gọi là chuẩn của x và ký hiệu $\|x\|$ đồng thời số thực đó thỏa điều kiện sau:

$\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$, khi và chỉ khi $x = \theta$

$\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$, $\forall \lambda \in R$, $\forall x \in X$

$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

3. Không gian EUCLIC- Không gian HILBERT

Cho một không gian tuyến tính X (trên trường số thực hoặc phức). Giả sử ứng với mỗi cặp phần tử $x,y \in X$, xác định được một số thực hoặc phức (x,y) thỏa các điều kiện sau :

$(x,y) = (y,x)$, trong trường số phức thì $(x,y) = \overline{(y,x)}$

$(x + y,z) = (x,z) + (y,z)$, $\forall x,y,z \in X$

$(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$

$(x,x) \geq 0$, trong đó $(x,x) = 0$ khi và chỉ khi $x = \theta$

Số (x,y) như vậy được gọi là tích vô hướng của hai phần tử x,y.

Không gian tuyến tính mà trong đó có xác định tích vô hướng được gọi là không gian Euclic.

Không gian Euclic đủ, vô hạn chiều được gọi là không gian Hilbert.

Toán Tử Tuyến Tính - Phiếm Hàm Tuyến Tính

Giả sử X,Y là hai không gian Topo tuyến tính

Toán tử (hay ánh xạ):

$A: X \rightarrow Y$ $(y = Ax,\ x \in X,\ y \in Y)$ được gọi là tuyến tính nếu ta có:

$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2$

Tập hợp tất cả các gía trị $x \in X$ mà tại đó A xác định, được gọi là miền xác định của toán tử A và ký hiệu D(A). Miền giá trị của A được ký hiệu $R(A) \subset Y$.

Trong trường hợp $Y = R^1$ (trường số thực), thì toán tử tuyến tính A được gọi là phiếm hàm tuyến tính.

Câu hỏi:

1. Nêu ý nghĩa vật lý và trình bày công thức tính của các toán tử Haminton (GradU, DivA, RotA)? Sự ích lợi của nó ?.
2. Hãy nêu những ưu nhược điểm của phép tính toán tử so với phép tính tensor ?
3. Hãy nêu vài ứng dụng của công thức Stockes và công thức Oxtrograski – Gauss ?
4. Hãy nêu vài ứng dụng của các phép biến đổi (Laplace, biến hình bảo giác, Sigma) ?

Bài tập :

Bài 1: Chứng minh: $divgradu = \nabla^2 u$

$rot(u.a) = gradu \times a + urota$ với: a là véctơ, u = u(x,y,z)

Bài 2 : $\nabla.\nabla(\bullet) = \Delta(\bullet) = \nabla^2(\bullet) = divgrad(\bullet)$

Bài 3: Từ phương trình véc tơ: $F - \frac{1}{\rho} gradp = \frac{\partial u}{\partial t} + grad(\frac{u}{2}) + rotU$

Hãy viết nó ở dạng chiếu lên các trục tọa độ ox,oy,oz.

Bài 4: Viết các thành phần hình chiếu lên các trục ox, oy, oz của các phương trình sau:

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = div\left(k\nabla T\right) + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

$$\because \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda divV$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
2. Nguyễn Thế Hùng, Phương pháp phần tử hữu hạn trong chất lỏng, NXB Xây Dựng, Hà Nội 2004.
3. Đào Huy Bích & Nguyễn Đăng Bích, Cơ học môi trường liên tục, NXB Xây Dựng, Hà Nội 2002

4. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
5. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
6. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
7. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
8. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://db.vista.gov.vn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 1

SAI SỐ

Approximate numbers

1. 1 Sai số tuyệt đối

Gọi a là giá trị gần đúng của A, ta viết được $A = a \pm \Delta a$

Δa : gọi là sai số tuyệt đối giới hạn

1.2 Sai số tương đối

$\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$, dạng khác: $A = a\,(1 \pm \delta a)$

Sai số tuyệt đối không nói lên đầy đủ "chất lượng" của 1 số xấp xỉ, chất lượng ấy được phản ảnh qua sai số tương đối.

1.3 Cách viết số xấp xỉ

+ Chữ số có nghĩa: Đó là chữ số $\neq 0$ đầu tiên tính từ trái sang phải

Ví dụ: 002,74 $\rightarrow$ 2,74

00,0207 $\rightarrow$ 0,0207

+ Chữ số đáng tin: Một số a có thể được viết $a = \pm \sum \alpha_s 10^s$

$65{,}807 = 6.10^1 + 5.10^0 + 8.10^{-1} + 0.10^{-2} + 7.10^{-3}$

Vậy $\alpha_1 = 6$, $\alpha_0 = 5$, $\alpha_{-1} = 8$, $\alpha_{-2} = 0$, $\alpha_{-3} = 7$

Nếu $\Delta a \leq 0{,}5.10^S$ thì α_S là chữ số đáng tin.

Nếu $\Delta a > 0{,}5.10^S$ thì α_S là chữ số đáng nghi.

Ví dụ: $a = 65{,}8274$; $\Delta a = 0{,}0043 \rightarrow$ Chữ số 6,5,8,2 đáng tin

$\Delta a = 0{,}0067 \rightarrow$ Chữ số 6,5,8 đáng tin

1.4 Sai số quy tròn:

Quy tắc quy tròn

Chữ số bỏ đi đầu tiên ≥ 5: Thêm vào chữ số giữ lại cuối cùng 1 đơn vị

Chữ số bỏ đi đầu tiên < 5: Để nguyên chữ số giữ lại cuối cùng

Ví Dụ: 65,8274 $\rightarrow$ 65,827 ; 65,827 $\rightarrow$ 65,83

1.5 Sai số của số đã quy tròn:

Giả sử quy tròn a thành a' với sai số quy tròn tuyệt đối $\theta a'$

$|a' - a| \leq \theta a'$ thì $\Delta a' = \Delta a + \theta a'$ (tức tăng sai số tuyệt đối)

1.6 Ảnh hưởng của sai số quy tròn :

Ap dụng nhị thức Newton, ta có: $\left(\sqrt{2}-1\right)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2}$

Bây giờ thay $\sqrt{2}$ bởi các số quy tròn khác nhau:

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,000147912	0,508
1,41426	0,00014866394	0,00862

1,4142613563 0,00014867678 0,001472

1.8 Các quy tắc tính sai số

Xét hàm số: u = f(x,y)

Ta ký hiệu Δx , Δy, Δu : chỉ các số gia của x, y, u

dx , dy , du : chỉ các vi phân của x , y, u

Δ_X , Δ_Y, Δ_U : sai số tuyệt đối của x, y, u

Ta luôn có: $|\Delta x| \le \Delta_X$

$|\Delta y| \le \Delta y$

Ta phải tìm Δ_U để có: $|\Delta u| \le \Delta_U$

Sai số của tổng: u = x + y

Ta có $\Delta u = \Delta x + \Delta y \rightarrow |\Delta u| \le |\Delta x| + |\Delta y|$

$\rightarrow |\Delta u| \le \Delta_X + \Delta_Y (\equiv \Delta_{X+Y})$

\+ Nếu u = x – y với x, y cùng dấu:

$\delta_U = \dfrac{\Delta_U}{|u|} = \dfrac{\Delta_X + \Delta_Y}{|x-y|}$ nếu $|x-y|$ là rất bé thì sai số rất lớn.

\+ Nếu u = x.y $\rightarrow \Delta u \approx du = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$

$|\Delta u| \le |y|\Delta_X + |x|\Delta_Y \Rightarrow \Delta_U = |y|\Delta_X + |x|\Delta_Y$

Do đó : $\delta_U = \dfrac{\Delta_U}{|u|} = \dfrac{\Delta_X}{|x|} + \dfrac{\Delta_Y}{|y|} = \delta_X + \delta_Y$

\+ Nếu $u = \dfrac{x}{y}$, với $y \neq 0$, $\delta_U = \delta_X + \delta_Y$

Công thức tổng quát**:** $u = f(x_1 , x_2 , x_3, \ldots , x_n)$

Thì: $$\Delta_U = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta_{X_i}$$

1.9 Sai số tính toán và sai số phương pháp

Phương pháp thay bài toán phức tạp bằng bài toán đơn giản (phương pháp gần đúng) $\rightarrow$ tạo ra sai số phương pháp.

Sai số tạo ra bởi tất cả các lần quy tròn $\rightarrow$ sai số tính toán.

1.10 Sự ổn định của quá trình tính

Ta nói quá trình tính là ổn định nếu sai số tính toán, tức là các sai số quy tròn tích lũy lại không tăng vô hạn (ta sẽ gặp lại vấn đề nầy ở phương pháp sai phân).

Ví dụ: Tìm sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu.

$$V = \frac{1}{6}\pi . d^3 .$$

Nếu đường kính d=3,7cm$\pm$0,05 và π=3,14. Biết Δd=0,05, $\Delta \pi$=0,0016.

Giải: Xem π và d là đối số của hàm V

Ta có: $\delta_v = \delta_\pi + 3\delta_d$

Với: $\delta_\pi = \frac{0,0016}{3,14} = 0,0005$

$\delta_d = \frac{0,05}{3,7} = 0,0135$

$\Rightarrow \delta_v$ = 0,0005+3.0,0135 = 0,04.

Mặt khác: V = $\frac{1}{6}\pi.d^3$ = 26,5cm^3.

Vậy có: Δv = 26,5.0,04 = 1,06 $\approx$ 1,1cm^3.

V = 26,5 $\pm$ 1,1 cm^3

Câu hỏi:

1. Định nghĩa sai số tuyệt đối, sai số tương đối ? Trong thực tế tính toán, người ta sử dụng sai số tuyệt đối hay sai số tương đối ? Vì sao ?
2. Trình bày các quy tắc tính sai số?
3. Nêu sự khác nhau giữa sai số tính toán và sai số phương pháp? Hãy nêu ra một quá trình tính có số liệu cụ thể minh họa và chỉ ra sai số tính toán và sai số phương pháp ?
4. Đưa ra vài ví dụ tính toán, chỉ ra sự cần thiết phải chú ý đến sai số qui tròn ?

Bài tập:

1) Hãy xác định chữ số tin tưởng trong các số sau:
   a) x= 0,3941 với Δ_x = 0,25.10^{-2}
   b) y=0,1132 với Δ_y = 0,1.10^{-3}
   c) z=38,2543 với Δ_z = 0,27.10^{-2}
2) Hãy xác định sai số tuyệt đối, biết sai số tương đối của các số xấp xỉ sau:
   a) x=13267 nếu δ_x=0,1%
   b) x=0,896 nếu δ_y=10%
3) Hãy qui tròn các số dưới đây để có được 3 chữ số tin tưởng và xác định sai số tuyệt đối Δ và sai số tương đối δ của chúng:
   a) x=2,1514
   b) y=0,16152
   c) z=1,1225
   d) v=0,01204

4) Hãy tính thương $u=x_1/x_2$ của hai số xấp xỉ: $x_1=5,735$; $x_2 = 1,23$ và xác định sai số tương đối giới hạn δ_u, và sai số tuyệt đối giới hạn Δ_u
5) Hãy xác định sai số tương đối giới hạn δ_a, sai số tuyệt đối giới hạn Δ_a và số chữ số đáng tin của cạnh a của hình vuông, biết diện tích hình vuông $s=16,45cm^2$ với $\Delta_s=0,01$

Đáp số:

1) a) 2; b) 3; c)4
2) a) $\Delta_x=0,13.10^2$
   b) $\Delta_y=0,9.10^{-1}$
3) a) 2,15; $\Delta_x=0,14.10^{-2}$; $\delta_x=0,65.10^{-3}$
   b) 0,162; $\Delta_y = 0,48.10^{-3}$; $\delta_y = 0,3.10^{-2}$
   c) 1,23; $\Delta_z=0,5.10^{-2}$; $\delta_z=0,41.10^{-2}$
   d) 0,0120; $\Delta_v = 0,4.10^{-4}$; $\delta_v=0,33.10^{-2}$
4) u=4,66; $\delta_u \approx 0,0042$; $\Delta_u \approx 0,02$
5) a = $\sqrt{x}$=4,056cm; $\delta_a \approx 0,0003$; $\Delta_a \approx 0,0012$; a có ba chữ số đáng tin

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tạ Văn Đĩnh, Phương pháp tính, NXBGD, 1997
2. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
3. Đinh Văn Phong, Phương pháp số trong cơ học, NXB KHKT, Hà Nội 1999.
4. Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB KHKT, Hà Nội 2000.
5. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
6. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
7. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
8. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
9. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://www.info.sciencedirect.com/books
http://dspace.mit.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 2 NỘI SUY

(INTERPOLATION)

Trong nhiều bài toán kỹ thuật, ta phải tìm các trị y_i tại các điểm x_i bên trong đoạn [a,b], hoặc khi quan hệ giải tích y = f(x) đã có sẵn nhưng phức tạp, hoặc cần tìm đạo hàm, tích phân của hàm số,….Khi đó ta dùng phép nội suy để dễ dàng tính toán mà vẫn đảm bảo độ chính xác theo yêu cầu của thực tế.

2.1 Đa thức nội suy Lagrange

Cho bảng các giá trị

x	x_1	x_2	x_3 …. . ..	x_n
y	y_1	y_2	y_3 …	…y_n

Cần lập đa thức: y = f(x) có bậc m ≤ n - 1, nhận các giá trị y_i cho trước ứng với các x_i :

$$y_i = f(x_i), \quad \text{với} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \ldots, n$$

Ký hiệu: $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)$

Ta có được đẳng thức:

$$f(x) = \frac{y_1\varphi(x)}{(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} + \frac{y_2\varphi(x)}{(x - x_2)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots.(x_2 - x_n)} + \ldots$$

$$+ \frac{y_n\varphi(x)}{(x - x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots\ldots.(x_n - x_{n-1})}$$

Hay: $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k\varphi(x)}{\varphi'(x_k).(x - x_k)}$$ Đây là đa thức nội suy Lagrange

<u>Ví dụ:</u>

x	0	1	2	3
y	3	4	7	8

Tìm đa thức nội suy Lagrange và tìm y khi biết x=1,5.

Ta có: $\varphi_{(x)} = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$= x(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3.x.(x-1).(x-2).(x-3)}{x.(-1).(-2).(-3)} + \frac{4.x.(x-1).(x-2).(x-3)}{(x-1).1.(-1).(-2)} +$$

$$\frac{7.x.(x-1).(x-2).(x-3)}{(x-2).2.1.(-1)} + \frac{8.x.(x-1).(x-2).(x-3)}{(x-3).3.2.1}$$

$=-1/2(x-1)(x-2)(x-3)+2x(x-2)(x-3)-7/2x(x-1)(x-3)+4/3x(x-1)(x-2)$

Tại x=1,5 thế vào f(x) ta có y=5,5

2.2 Nội suy Newton

Giả sử y_0 , y_1 , y_2 , ... là những giá trị nào đó của hàm y = f(x) tương ứng với các giá trị cách đều nhau của các đối số x_0 , x_1 , x_2 ...tức là:

$$x_{K+1} - x_K = \Delta x_K = \text{const}$$

Ký hiệu: $y_1 - y_0 = \Delta y_0$; $y_2 - y_1 = \Delta y_1$; ... ... ; $y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$ là sai phân cấp 1.

$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$; $\Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$; ..... là sai phân cấp 2.

$\Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 = \Delta^{n+1} y_0$; $\Delta^n y_2 - \Delta^n y_1 = \Delta^{n+1} y_1$; ..... là sai phân cấp n + 1.

Tiến hành các phép thế liên tiếp, ta nhận được:

..., $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$; $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$,….

$$\Delta^n y_0 = \sum_{K=0}^{n} (-1)^K C_n^K y_{n-K}$$

Tương tự ta cũng nhận được:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$,…

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ ... + \Delta^n y_0 \qquad (1)$$

Nếu trong (1) ta xem n không những là chỉ là số nguyên dương mà có thể là số n = t bất kỳ, ta nhận được công thức nội suy Newton:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... + \Delta^t y_0 \qquad (2)$$

Do bước tăng $\Delta x = const$, ta được $x_n = x_0 + nh$, suy ra $n = \dfrac{x_n - x_0}{h}$

Đặt $x = x_0 + t.h$, suy ra $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, thế vào (2), ta có được dạng khác của (1)

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + ... \qquad (3)$$

<u>Vídụ:</u>

x	1	2	3	4
y	5	7	10	12

Tìm hàm nội suy Newton.

Giải: Ta có: Sai phân cấp 1 $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 7-5=2$

Sai phân cấp 2 $\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = 10-2.7+5=1$

Sai phân cấp 3: $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 12-3.10+3.7-5 =-2$

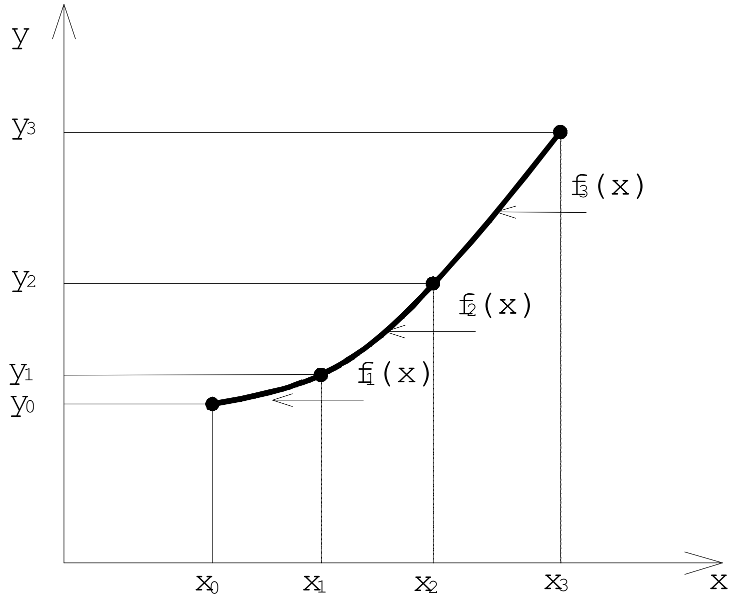
$\Delta x = h = 1$

$$\Rightarrow y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - 2h)}{3!h^3}\Delta^3 y_0$$

$$= 5 + \frac{x-1}{1}.2 + \frac{(x-1)(x-1-1)}{2!1^2}.1 + \frac{(x-1)(x-1-2.1)}{3!1^3}(-2)^3$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{19}{6}x + 6$$

2.3 Nội suy SPLINE



Phương pháp Spline nội suy bằng cách gắn một số đa thức bậc thấp với nhau; ở đây chỉ nghiên cứu nội suy Spline bậc 3, vì thường đáp ứng yêu cầu trong nhiều bài toán thực tế.

Hình vẽ bên chỉ ra nội suy 4 điểm bằng cách dùng 3 hàm bậc 3(cubic) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$. Tổng quát nếu có (n + 1) điểm, ta cần n hàm Spline bậc 3 dạng:

$f_i(x) = A_{1i} + A_{2i}\,x + A_{3i}\,x^2 + A_{4i}\,x^3$, $i = 1,2,3,\ldots,n$

Có 4n hệ số A_{ji} có thể xác định theo các điều kiện sau:

(i) Hàm Cubics phải gặp tất cả các điểm ở bên trong: có được 2n phương trình

$f_i(x_i) = y_i$, $i = 1,\ldots n$; $f_{i+1}(x_i) = y_i$, $i = 0,1,\ldots n-1$

(ii) Đạo hàm bậc 1 phải liên tục tại các điểm bên trong, dẫn đến được (n – 1) phương trình:

$$f'_i(x_i) = f'_{i+1}(x_i),\ i = 1, 2,\ldots,n-1$$

(iii) Đạo hàm bậc 2 cũng phải liên tục tại các điểm bên trong, thêm được (n – 1) phương trình nữa:

$f''_i(x_i) = f''_{i+1}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots, n-1$

(iv) Hai điều kiện cuối cùng dựa vào 2 điểm cuối của đường Spline, ở đây thường đặt $f''_1(x_0) = 0$ và $f''_n(x_n) = 0$.

Sắp xếp lại hàm $f_i(x)$, ta chỉ cần (n-1) phương trình cần thiết để giải, có dạng:

y = $f_i(x)$ =

$$= \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x)^3}{6\Delta x_i} + \frac{f''(x_i)(x - x_{i-1})^3}{6\Delta x_i} + \left(\frac{y_{i-1}}{\Delta x_i} - \frac{f''(x_{i-1})\Delta x_i}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{\Delta x_i} - \frac{f''(x_i)\Delta x_i}{6}\right)(x - x_{i-1})$$

Với $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, với $i = 1,2,\ldots,n$ (dạng sai phân lùi).

Đạo hàm phương trình này và áp dụng điều kiện liên tục về đạo hàm bậc nhất ta được:

$$\Delta x_i f''(x_{i-1}) + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}).f''(x_i) + \Delta x_{i+1}.\ f''(x_{i+1}) = 6\left(-\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} + \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}\right)$$

Với $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, với $i = 1,2, \ldots n - 1$

Điều này tương đương với hệ phương trình tuyến tính có ẩn là đạo hàm bậc 2 tại các điểm bên trong của đường cong nội suy:

$$\begin{Bmatrix} 2(\Delta x_1+\Delta x_2) & \Delta x_2 & 0 & \ldots 0 \\ \Delta x_2 & 2(\Delta x_2+\Delta x_3) & \Delta x_3 & \ldots 0 \\ 0 & \Delta x_3 & 2(\Delta x_3+\Delta x_4) & \ldots 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 2(\Delta x_{n-1}+\Delta x_n) \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} f''(x_1) \\ f''(x_2) \\ \vdots \\ f''(x_{n-1}) \end{Bmatrix} =$$

$$6.\begin{Bmatrix} -\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}+\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x_2} \\ -\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x_2}+\dfrac{\Delta y_3}{\Delta x_3} \\ \vdots \\ -\dfrac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}+\dfrac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \end{Bmatrix}$$

Giải hệ đại tuyến nầy ta tìm được $f''(x_i)$, với $i = 1,2, \ldots, n-1$ cộng với hai điều kiện biên 2 đầu:

$f''(x_0) = f''(x_n) = 0$, đường cong nội suy sẽ hoàn toàn xác định.

Ví dụ:

x	1	2	**2,2**	3	4
y	5	7	**?**	10	12

Tìm y=f(x) theo phương pháp nội suy spline bậc 3 và tính y(x=2,2)=?

Giải:

Ta có $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 1$

$\Delta y_1 = 2; \Delta y_2 = 3; \Delta y_3 = 2$

$$\begin{vmatrix} 2(1+1)1 & \\ 1 & 2(1+1) \end{vmatrix} . \begin{Bmatrix} f''(x_1) \\ f''(x_2) \end{Bmatrix} = 6.\begin{Bmatrix} -\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{1} \\ -\dfrac{3}{1}+\dfrac{2}{1} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4f''(x_1)+f''(x_2)=6 \\ f''(x_1)+4f''(x_2)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x_1)=2 \\ f''(x_2)=-2 \end{cases}$$

y = f(x) = y = f_i(x) =

$$= \frac{f''(x_1)(x_2-x)^3}{6\Delta x_2} + \frac{f''(x_2)(x-x_1)^3}{6\Delta x_2} + \left(\frac{y_1}{\Delta x_2} - \frac{f''(x_1)\Delta x_2}{6}\right)(x_2-x) + \left(\frac{y_2}{\Delta x_2} - \frac{f''(x_2)\Delta x_2}{6}\right)(x-x_1)$$

Tại $x=2,2 \Rightarrow y = 7,8$

2.4 Phương pháp bình phương cực tiểu (Least squares method)

Gỉa sử có hai đại lượng x và y có liên hệ phụ thuộc nhau, theo một dạng đã biết: $y = a+b.x$, hay $y = a+b.x+c.x^2$, hay $y = a.e^{bx}$,....

Nhưng chưa biết giá trị các tham số a,b,c. Muốn xác định chúng, người ta tìm cách có được bằng thí nghiệm, đo đạc,... một số cặp (x_i,y_i) rồi áp dụng phương pháp bình phương cực tiểu.

(a) Trường hợp y = a + bx

Ta có: $y_i- a- bx_i = \varepsilon_i$, với i =1,2,..,n ở đây ε_i sai số tại x_i.

Do đó $S = \Sigma(y_i - a - bx_i)^2$ là tổng các bình phương của các sai số.

S phụ thuộc a và b, còn x_i, y_i ta đã biết rồi.

Mục đích của phương pháp bình phương cực tiểu là xác định a và b sao cho Sai số nhỏ nhất: $S \rightarrow Smin$.

Như vậy: $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ và $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$

Ta có được hệ phương trình:

$$\begin{cases} na + b\sum x_i = \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được a,b.

Câu hỏi:

1. Ưu nhược điểm của các phương pháp nội suy Lagrange, Newton, spline ?
2. Hãy chỉ ra những trường hợp cụ thể và cách chọn phương pháp nội suy nào thích hợp nhất ?
3. Phương pháp bình phương cực tiểu thường được áp dụng khi nào ? Tại sao người ta nói phương pháp nầy mang tính chủ quan của người sử dụng tính toán ? Một cách chính xác có gọi phương pháp nầy là nội suy được không ?

Bài tập:

Nội suy Lagrange

1)Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số y=f(x) cho dưới dang bảng sau

x	0	2	3	5
y	1	3	2	5

2) Cho bảng giá trị của hàm số y=f(x)

x	321,0	322,8	324,2	325,0
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

Tính gần đúng f(323,5) bằng đa thức nội suy Lagrange.

3) Thành lập đa thức nội suy Lagrange từ bảng số sau:

x	2	4	6	8	10
y	0	3	5	4	1

4) Hãy đánh giá sai số nhận được khi xấp xỉ hàm số y=sinx bằng đa thức nội suy Lagrange bậc 5: $L_5(x)$, biết rằng đa thức này trùng với hàm số đã cho tại các giá trị x bằng: 0^0, 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, 25^0. Xác định giá trị của sai số khi x=$12^0 30'$.

5) Tìm đa thức nội suy bậc 2 của hàm y=3^x trên đoạn $[-1{,}1]$, từ đó suy ra gia trị gần đúng của $\sqrt{3}$

Đáp số:

1) $1+\frac{62}{15}x+\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2$
2) 2,50987
3) f(x)= $\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640)$
4) $\left|\sin(x)-L_5(x)\right|\le\frac{1}{6!}\left|x(x-\frac{\pi}{36})(x-\frac{\pi}{18})(x-\frac{\pi}{12})(x-\frac{\pi}{9})(x-\frac{5\pi}{36})\right|$, khi x=$12^0 30'$

   thì $\left|\sin(12^0 30'-L_5(12^0 30')\right|<2{,}2.10^{-9}$
5) Để được đa thức nội suy bậc 2 thì cần 3 mốc: Ở đây ta chọn x_0=-1;0;1 thì y=3^x $\approx\frac{1}{6}(4x^2+8x+6)$ trên đoạn $[-1{,}1]$, và $\sqrt{3}$ $\approx 1{,}8$

<u>Nội suy Newton:</u>

1) Cho bảng giá trị của hàm số y=f(x)

x	-1	0	3	6	7
y	3	-6	39	822	1611

a) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ nút x_0 = -1 của hàm số y=f(x)
b) Dùng đa thức nội suy nhận được, tính gần đúng f(-0,25).

2) Cho bảng giá trị của hàm số y = sinx

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942

a) Dùng đa thức nội suy tiến xuất phát từ nút x_0 = 0,1 tính gần đúng sin(0,14)
b) Dùng đa thức nội suy lùi xuất phát từ nút x_0 = 0,4 tính gần đúng sin(0,46)

3) Xây dựng đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ bảng số (x_0=0).

x	0	2,5069	5,0154	7,5270

y	0,3989423	0,3988169	0,3984408	0,39781138

4) Cho giá trị của hàm số y = arctg$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ - 3arctgx + $\frac{x^2}{4}(2\ln x-3)$ trong dạng bảng số sau:

x	58	**58,17**	58,34	58,68	59,02	59,36	59,7
y	4303,52	**?**	4364,11	4425,17	4486,69	4548,69	4611,16

Xây dựng đa thức nội suy Niutơn tiến và tính gần đúng giá trị của y tại x =58,17.

Đáp số:

1) a) $x^4-3x^3+5x^2-6$
   b) -5,6367188
2) a) $\sin(0,14)\approx 0,1395434$
   b) $\sin(0,46)\approx 0,4439446$
3) $f(x)\approx 0,3989423-0,0000500x-0,0000199x(x-2,5069)$
4) $y=4303,52+60,59t+\frac{0,47}{2!}t(t-1)-0,01\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}+0,03\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}-0,06\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}$

Trong đó: $t=\frac{x-58}{0,34}$; y(x=58,17)=4333,75779688

<u>Nội suy spline và phương pháp bình phương cực tiểu:</u>

1) Dựng hàm spline bậc 3, xấp xỉ hàm y = 3^x trên đoạn $[-1;1]$, lấy với h=1,từ đó suy ra $\sqrt[3]{3}$.

2) Cho hàm số y = sinx trên đoạn $[0;\pi]$. Hãy lập hàm spline bậc 3 để xấp xỉ hàm sinx trên đoạn đã cho, với các mốc nội suy x_0 =0; $\frac{\pi}{2}$; π.

3) Cho bảng các giá trị:

x	2	4	6	8	10	12
y	7,32	8,24	9,20	10,19	11,01	12,05

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng y=a+bx.

4) Cho bảng giá trị:

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng $y=a+bx+cx^2$

Đáp số:

3) y=6,3733333+0,4707143x
4) y= 0,992-0,909

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB ĐHQG, Hà Nội 1996
2. Phan Văn Hạp, Các phương pháp giải gần đúng, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1981.
3. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
4. Đinh Văn Phong, Phương pháp số trong cơ học, NXB KHKT, Hà Nội 1999.
5. Lê Đình Thịnh, Phương pháp tính, NXB KHKT, Hà Nội 1995.
6. Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB KHKT, Hà Nội 2000.
7. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
8. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
9. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
10. HOFFMAN, J., Numerical Methods for Engineers scientists, McGrawHill, Newyork 1992.
11. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
12. OWEN T. et al., Computational methods in chemical engineering, Prentice Hall, 1995.
13. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://www.info.sciencedirect.com/books
http://db.vista.gov.vn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 3 TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN
NUMERICAL DIFFERENTIATION AND INTEGRATION

3.1 Tính gần đúng đạo hàm

+ Ta biểu diễn hàm f(x) bằng đa thức nội suy: f(x) = P(x), với P(x) là đa thức nội suy (đa thức nội suy tiện lợi là spline bậc 3); Tiếp theo ta tính gần đúng đạo hàm $f'(x)$ ở đa thức nầy:

$$f'(x) = P'(x)$$

+ Ta cũng có thể áp dụng khai triển Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(c), \quad \text{với } c = x + \theta h,\ 0 < \theta < 1.$$

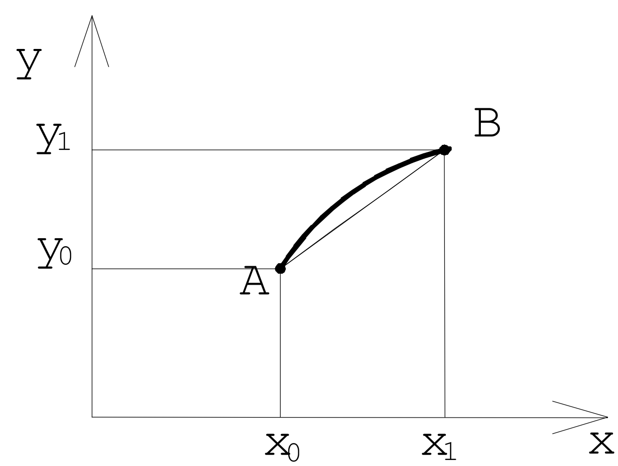
Từ đó ta tính được: $$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

3.2 Tính gần đúng tích phân xác định

3.2.1 Công thức hình thang:

Trong từng khoảng chia (i,i+1), đường cong M_i, M_{i+1} được xấp xỉ thành đường thẳng.

Đối với tích phân thứ (i + 1), ta có:



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = h\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Với $x_i = a + ih$, $h = \dfrac{b-a}{n}$,

$i = 1, 2, \ldots, n$; $a = x_0$, $b = x_n$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots\ldots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$I_T \cong \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \ldots\ldots + (y_{n-1} + y_n)\right]$$

$$I_T \cong h\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right]$$

Sai số: $|I - I_T| \le \frac{M}{12}h^2(b-a)$, với M = max $|f''(x)|$, $a \le x \le b$

Ví dụ: Dùng công thức hình thang tổng quát với n=10 để tính gần đúng:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Đánh giá những sai số của những giá trị gần đúng nhận được.

Giải:

Ta có: $h = \frac{1-0}{10} = 0,1$

Kết quả tính toán trong bảng sau:

i	x_i	y_i
0	0	1,00000
1	0,1	0,90909
2	0,2	0,83333
3	0,3	0,76923
4	0,4	0,71429
5	0,5	0,66667
6	0,6	0,62500
7	0,7	0,58824
8	0,8	0,55556
9	0,9	0,52632
10	1,0	0,50000
$\sum$		6,18773

Theo công thức hình thang tổng quát ta có:

$$I \approx 0,1\left(\frac{1,0000+0,50000}{2} + 0,90909+0,83333+0,76923+0,71429+0,66667+0,62500+0,58824+0,55556+0,52632\right) = 0,69377.$$

Sai số R được xác định như sau:

$$|I - I_T| = \frac{M}{12}h^2(b-a)$$

Với M = max$|f''_x|$ 0<x<1

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2}$$

$f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$ Trong (0,1) M = max$\left|f_x''\right|$ =2

$|R| \leq \frac{2.(0,1)^2}{12}(1-0) = 0,00167$

3.2.2 **Công thức Simpson**

Bây giờ cứ mỗi đoạn cong M_i, M_{i+1} được xấp xỉ bằng đường cong bậc hai, đi qua ba giá trị y_i, y_{i+1} và giá trị y tại $x = (x_i + x_{i+1})/2$, có nghĩa chia [a,b] thành 2n đoạn bằng nhau,bởi các điểm chia x_i:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2n} = b, \text{ nghĩa là: } x_i = a + ih$$

Với $h = (b - a)/2n$, với: $i = 0, 1,2,\ldots,2n$

Dùng đa thức nội suy bậc 2 xấp xỉ theo Newton, ta có công thức tính gần đúng tích phân theo Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx = \int_0^2 h(y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t+1)}{2}\Delta^2 y_0)dt$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Tổng quát : $$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \cong \frac{h}{3}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2})$$

Vậy:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}[(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + ... + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})]$$

$$I \cong \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2})]$$

Sai số: $$|I - I_S| \leq M \frac{h^4}{180}(b - a)$$

Với: $M = \max |f^{iv}(x)|$, $a \leq x \leq b$.

<u>**Ví dụ:**</u> Dùng công thức Simpson tổng quát với n=10 để tính gần đúng:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Đánh giá những sai số của những giá trị gần đúng nhận được.

3.2.3 Công thức của Gauss

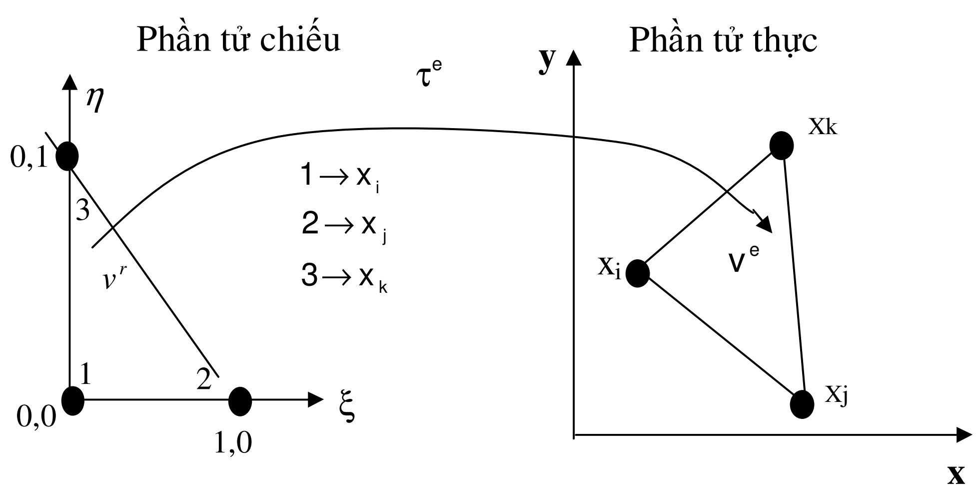
3.2.3.1Liên hệ giữa các hệ toạ độ tổng thể và hệ toạ độ địa phương

Trong nhiều trường hợp ta cần tính tích phân số với độ chính xác rất cao, như trong phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), miền tính toán Ω được chia nhỏ thành nhiều miền con, phương pháp biến phân trọng số xây dựng trên các miền con này. Do đó dẫn đến tích phân hàm dạng trên miền con.

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

Nếu tích phân hàm dạng bậc cao với sử dụng hệ toạ độ tổng thể (x,y,z, global coordinate) thì thông thường sẽ xuất hiện các biểu thức đại số rất phức tạp khi phần tử là hai, ba chiều (Irons and Ahmad, 1980).

Thay vào đó nếu chúng ta thực hiện chúng trong hệ toạ độ địa phương (ξ,η,ζ, local coordinate) hay còn gọi là toạ độ chuẩn hay toạ độ tự nhiên (normal coordinate hay natural coordinate) thì sẽ đơn giản hơn rất nhiều [Taig, 1961]; bởi lẽ nó thuận lợi trong việc xây dựng hàm nội suy, tích phân số dùng được cách thiết lập của Gauss-Legendre (phổ biến nhất).



Hình 3.3: Biểu thị phần tử chiếu V^r vào phần tử thực V^e

Với phần tử đẳng tham số (isoparametric), ta có thể viết công thức biến đổi toạ độ cho phần tử tứ giác tuyến tính có bốn điểm nút như sau:

$$y = \sum_{j=1}^{4} N_j x_j = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \qquad (3.10)$$

Với phần tử tam giác tuyến tính có ba điểm nút:

$$y = \sum_{j=1}^{3} N_j y_j = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \qquad (3.11)$$

ở đây N_i, N_j là hàm dạng hay còn gọi là hàm nội suy (shape function hay interpolation function).
Từ luật đạo hàm đạo hàm riêng phần, ta có:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (3.12)$$

Hay: $$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad (3.13)$$

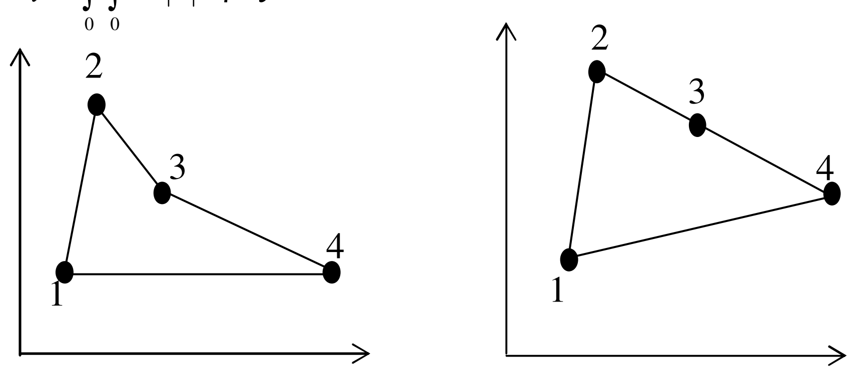
ở đây J là ma trận Jacobian biến đổi toạ độ. Định thức của ma trận nầy, det $|J|$, cũng phải được ước lượng bởi lẽ nó được dùng trong các tích phân biến đổi như sau:

\+ Cho phần tử tứ giác tuyến tính:

$$\iint_{\omega^e} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det|J| d\xi\, d\eta \qquad (3.14)$$

\+ Cho phần tử tam giác tuyến tính:

$$\iint_{\omega^e} dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\xi} \det|J| d\eta\, d\xi \qquad (3.15)$$



Hình 3.4: Phần tử tứ giác có ma trận Jacobian không xác định

Trong một số trường hợp, ví dụ như ở Hình 3.4, phần tử tứ giác có 4 điểm nút, nếu dạng hình học như vậy, ma trận Jacobian trở nên không xác định; để nó có giá trị tốt, các hình dạng phần tử như cạnh và góc của nó cần phải đều đặn hơn (ví dụ tam giác đều, tứ giác đều ≡ hình vuông, đây là các dạng phần tử lý tưởng).

3.2.3.2 Tích phân số

Một số tích phân của các loại bài toán hai chiều (2D), ba chiều (3D), theo phương pháp PTHH có thể được ước lượng bằng giải tích, nhưng nó không thực dụng cho các hàm số phức tạp , đặc biệt trong trường hợp tổng quát khi (ξ,η) là toạ độ cong. Trong thực hành (3.14), (3.15) được ước lượng bằng số, gọi là tích phân số (numerical integration hay còn gọi là numerical quadrature). Dùng tích phân số của Gauss, với phần tử tứ giác, miền hai chiều ta có:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j) \qquad (3.16)$$

Với phần tử tam giác:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\xi} f(\xi,\eta)d\eta d\xi \cong \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi^i,\eta^i) \qquad (3.17)$$

Với phần tử tứ giác thì w_i, w_j là hệ số trọng số và ξ_i,η_j là các vị trí toạ độ bên trong phần tử, cho ở Bảng 2 (Xem Kopal 1961); còn với phần tử tam giác, tương tự như phần tử tứ giác, nhưng các điểm tích phân là các điểm mẫu (Sampling Points), Bảng 1.

Thông thường người ta muốn các tích phân số đạt độ chính xác cao, nhưng có những trường hợp đặc biệt lại không cần thiết. ở tích phân Gauss (3.16), với n = 2, sẽ chính xác khi hàm f là cubic (bậc 3), còn ở tích phân (3.17), n = 1, sẽ chính xác khi đa thức f bậc nhất, còn n = 3, sẽ chính xác khi đa thức f bậc hai.

Bảng 1: Điểm tích phân cho phần tử tam giác theo công thức (3.17)

n	ξ^i	η^i	w_i
1	1/ 3	1/ 3	1
3	1/ 2 1/ 2 0	1/ 2 0 1/ 2	1/ 3 1/ 3 1/ 3

Bảng 2: Trọng số và điểm tích phân Gauss – Legendre theo công thức (3.16)

Điểm tích phân ξ_i	**Số điểm tích phân r**	**Trọng số** w_i
0.0000000000	Một điểm	2.0000000000
±0.5773502692	Hai điểm	1.0000000000
0.0000000000 ±0.7745966692	Ba điểm	0.8888888889 0.5555555555
±0.3399810435 ±0.8611363116	Bốn điểm	0.6521451548 0.3478548451
0.0000000000 ±0.5384693101 ±0.9061798459	Năm điểm	0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850
±0.2386191861 ±0.6612093865 ±0.9324695142	Sáu điểm	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

Ví dụ 1: Tính tích phân:

$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x+2x^2}\,dx$ Tính tích phân Gauss với n=3

Giải:

n = 3 tra bảng ta được:

a_1=0,774 $W_1 \equiv H_1$= 0,555

a_2=-0,774 $W_2 \equiv H_2$=+0,555

a_3=0,000 $W_3 \equiv H_3$=0,888

I= $\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi$ =$H_1f(a_1)$+ $H_2f(a_2)$+ $H_3f(a_3)$

I=0,555 $\sqrt[3]{0,774+2(0,774)^2}$ +0,555 $\sqrt[3]{-0,774+2(-0,774)^2}$ +0,888 $\sqrt[3]{0,000+2(0,000)^2}$ =1,113

Ví dụ 2: Sử dụng bảng tra tích phân của Gauss (n=2) để tính gần đúng tích phân.

I= $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x^2+2y)dxdy$

Câu hỏi:

1. Khi nào đạo hàm được tính gần đúng được chấp nhận (sai số nằm trong phạm vi cho phép), khi nào nó không được chấp nhận. Cho vài ví dụ ?
2. Tại sao tích phân gần đúng Gauss tốt hơn tích phân gần đúng Simpson và Tp gần đúng Simpson tốt hơn Tp gần đúng hình thang ?
3. Tại sao tích phân số (gần đúng) của Gauss càng chính xác khi điểm tích phân càng nhiều ?

Bài tập:

1) Tính gần đúng y'(55), y'(60) của hàm y=lgx dựa vào bảng giá trị đã cho sau:

x	50	55	60
y	1,6990	1,7404	1,7782

So sánh với kết quả đúng tính đạo hàm của hàm số y =lgx.

2) Tính gần đúng y'(1) của hàm y=f(x) từ bảng số đã cho:

x	0,98	1,00	1,02
y	0,7739332	0,7651977	0,7563321

3) Tính gần đúng tích phân I=$\int_1^2 \sqrt{x}dx$ bằng công thức hình thang tổng quát, lấy n=10. Đánh giá sai số.

4)Tính gần đúng I=$\int_0^1 e^{x^2}$ dx bằng công thức hình thang và Ximxơn bằng cách chia đoạn $[0;1]$ thành 10 đoạn bằng nhau.

5) Tính gần đúng I=$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}78539816$ bằng công thức hình thang và Simpson mở rộng. Với đoạn $[0;1]$ chia thành 10 đoạn bằng nhau.

6)Tính gần đúng tích phân I=$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}$ dx bằng công thức Simpson tổng quát sao cho đạt sai số 0,001.

Đáp số:

1) y'(55)≈0,00792; y'(60) ≈ 0,0072
   Giá trị đúng y'(55) = 0,0079862; y'(60) = 0,0072382
2) y'(1) ≈-0,4400275.
3) I≈I*=1,218; $|I-I^*| \le 0{,}02$.
4) Công thức hình thang: I≈I*=1,4672; $|I-I^*| \le 0{,}0136$.
   Công thức Simpson: I≈I*=1,4627; $|I-I^*| \le 0{,}000115$.

5) Công thức hình thang: I≈I*=0,78498149
   Công thức Simpson: I≈I*=0,78539815.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB ĐHQG, Hà Nội 1996
2. Phan Văn Hạp và các tác giả khác, Cơ sở phương pháp tính, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1970.
3. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
4. Đinh Văn Phong, Phương pháp số trong cơ học, NXB KHKT, Hà Nội 1999.
5. Lê Đình Thịnh, Phương pháp tính, NXB KHKT, Hà Nội 1995.
6. Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB KHKT, Hà Nội 2000.
7. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
8. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
9. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
10. HOFFMAN, J., Numerical Methods for Engineers scientists, McGrawHill, Newyork 1992.
11. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
12. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://db.vista.gov.vn
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 4 GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

ROOTS OF NONLINEAR EQUATIONS

4.1 Giải gần đúng phương trình

Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0, ta phải *tách nghiệm*.

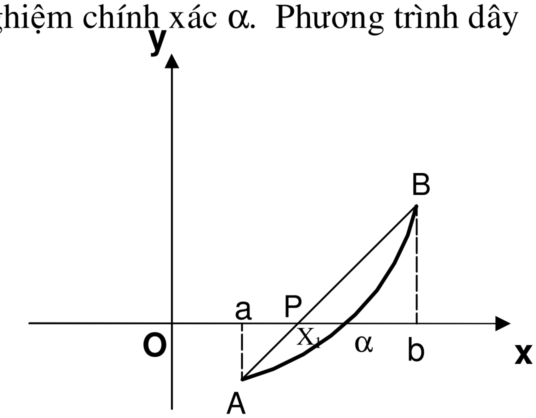
Giả sử trong khoảng [a,b] hàm f(x) liên tục cùng với các đạo hàm f'(x), f''(x), của nó. Các giá trị f(a), f(b) là giá trị của hàm tại các điểm mút của đoạn này f(a).f(b) < 0 và f'(x) giữ nguyên dấu trên đoạn [a , b].

Đôi khi để cho thuận lợi, viết lại: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$.

Nghiệm thực của phương trình f(x) = 0 là giao điểm của đồ thị các hàm $y = \varphi(x)$ và $y = \psi(x)$.

4.1.1 Phương pháp dây cung

Thay cung AB của y = f(x) bởi dây cung AB, lấy x_1 tại giao điểm P của dây cung với trục hoành làm giá trị gần đúng của nghiệm chính xác α. Phương trình dây cung AB:



$$\frac{Y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{X - a}{b - a}$$

Tại P ta có: Y = 0, X = x_1,

nên: $$-\frac{f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

Suy ra: $$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Sau khi tính được x_1 ta xét được khoảng phân li nghiệm mới là $[a,x_1]$ hay $[x_1,b]$ rồi tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng phân li mới, tiếp tục ta được x_2, x_3, x_4 $\rightarrow$ ngày càng gần đến nghiệm chính xác α.

Sai số ước lượng: $$|\alpha - x_1| < -\frac{f(a).f(b)}{2}\max\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|$$

<u>Ví dụ</u>: Tìm nghiệm trong khoảng (1,1;1,4) của phương trình:

$f(x)= x^3-0,2x^2-0,2x-1,2 =0$

Bằng phương pháp lặp dây cung(Với 2 lần lặp)

Giải:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_o)(x_o - 1,4)}{f(x_0) - f(1,4)} = 1,1 - \frac{f(1,1)(1,1-1,4)}{f(1,1) - f(1,4)} = 1,1 - \frac{(-0,331)(-0,3)}{-0,331 - 0,872} = 1,18254$$

$f(x_1)=f(1,18254)=-0,06252$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - 1,4)}{f(x_1) - f(1,4)} = 1,18254 - \frac{(-0,06252)(1,18254-1,4)}{-0,06252 - 0,872} = 1,19709$$

4.1.2 Phương pháp Newton-Raphson

Còn gọi là phương pháp Newton hay phương pháp tiếp tuyến.

Xét phương trình $f(x) = 0$

Khai triển Taylor hàm $f(x)$ tại lân cận x_0:

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) +$

$$\frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(C)$$

Với: $C = x_0 + \theta(x - x_0)$, với: $0 < \theta < 1$, có nghĩa: $x_0 < C < x$

Bây giờ ta chỉ lấy số hạng bậc 1 của chuỗi Taylor:

$$f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) = 0 \qquad (4.1)$$

Gọi x_1 là nghiệm của (4.1), ta có: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Tương tự: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$,…, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, với $x_0 \in [a,b]$

Vì (4.1) dùng thay cho phương trình $f(x) = 0$, nó tuyến tính đối với x nên phương pháp Newton cũng gọi là phương pháp tuyến tính hóa, $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của $y = f(x)$ tại x_0 .

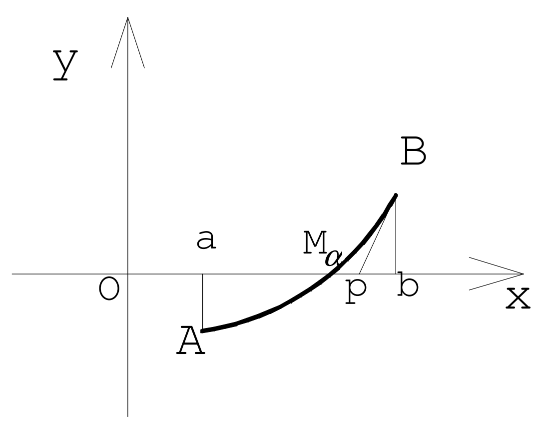
Tại $B(x_0, f(x_0))$.

$Y - f(x_0) = f'(x_0).(X - x_0)$,

tại P : $x = x_1$; $Y = 0$ đó chính là phương trình (4.1)

Hội tụ và sai số

Người ta sẽ áp dụng phương pháp lặp Newton nếu nghiệm $x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$



Định lý:

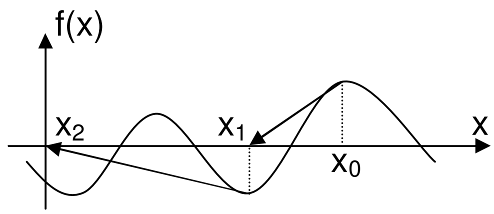
Giả sử [a,b] là khoảng phân ly nghiệm α của phương trình: $f(x) = 0$, f có đạo hàm f', f'' với f' liên tục trên [a,b], f' và f'' không đổi dấu trên (a, b). Xấp xỉ đầu x_0 chọn là a hay b sao cho $f(x_0)$ cùng dấu với f''.

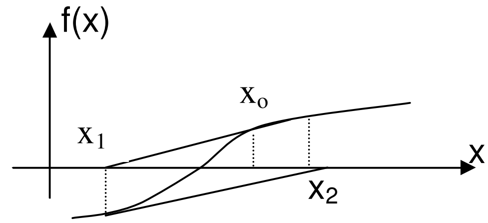
Khi đó $x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$.

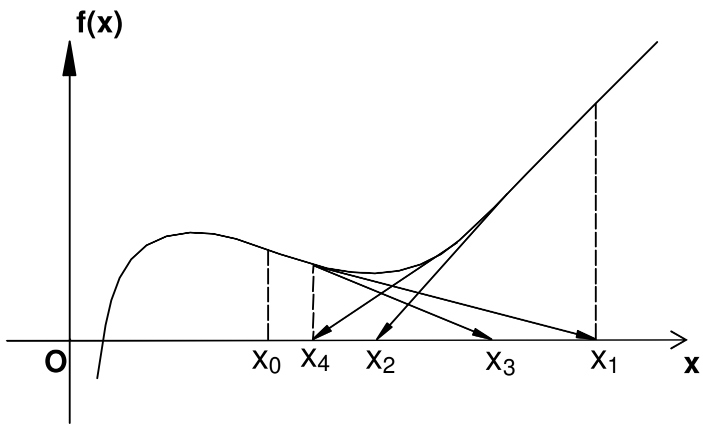
Cụ thể hơn x_n đơn điệu tăng tới α nếu $f'.f'' < 0$, và x_n đơn điệu giảm tới α nếu $f'.f'' > 0$.

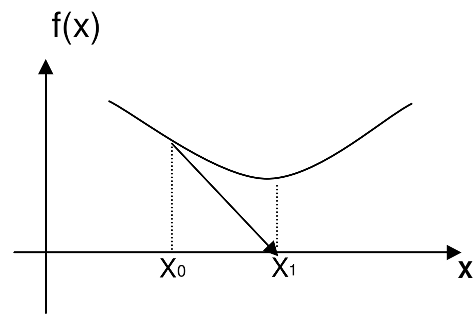
Sai số: $|\alpha - x_n| < \dfrac{|f(x_n)|}{m}$, với: $0 < m < |f'(x_n)|$ và $\alpha \le x \le b$

Trường Hợp Lặp Newton - Raphson Không Có Hiệu Quả (hàm 1 biến)









<u>Ví dụ:</u>

Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$f(x) = 2^x - 4x$

Bằng phương pháp *Newton – Raphson* với 3 lần lặp (cho $x_0 = 0{,}3$)

4.2 Giải hệ phương trình phi tuyến

Ở đây ta đi giải hệ phương trình phi tuyến theo phương pháp lặp Newton-Raphson

Từ khai triển Taylor cho bài toán một biến:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\Im)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad \text{vì } f(x_{i+1}) = 0$$

Tổng quát hoá cho bài toán 2 biến (hàm 2 biến):

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + (x_{i+1} - x_i).\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + (y_{i+1} - y_i).\dfrac{\partial u_i}{\partial y_i} & (4.2a) \\ v_{i+1} = v_i + (x_{i+1} - x_i).\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} + (y_{i+1} - y_i).\dfrac{\partial v_i}{\partial y_i} & (4.2b) \end{cases}$$

Từ (4.2a) và (4.2b) ta có:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{u_i \dfrac{\partial v_i}{\partial y} - v_i \dfrac{\partial u_i}{\partial y}}{\dfrac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v_i}{\partial y} - \dfrac{\partial u_i}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v_i}{\partial x}} & (4.3a) \\ y_{i+1} = y_i - \dfrac{v_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \dfrac{\partial v_i}{\partial x}}{\dfrac{\partial u_i}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v_i}{\partial y} - \dfrac{\partial u_i}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v_i}{\partial x}} & (4.3b) \end{cases}$$

Mẫu số của (4.3a) và (4.3b) gọi là **định thức Jacobien (detJ),** của hệ thống:

$$\det J = \det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_i}{\partial x} & \dfrac{\partial u_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x} & \dfrac{\partial v_i}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Một cách tổng quát cho phương trình: f(x)=0

Với $x = [x_1,x_2,....,x_n]^T$ và $f = [f_1,f_2,....,f_n]^T$

Phương pháp lặp Newton-Raphson cho hệ phương trình n ẩn này là:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F_x^{-1}(x^{(k)}).f(x^{(k)})$$

Với ma trận Jacobi F_x như sau:

$$F_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ví dụ:

Hãy tính lặp theo phương pháp Newton- Raphson

1. Cho $f(x) = e^{-x} - x$, với $x_0 = 0$ (điểm ban đầu)

Giải : Ta có $f'(x) = -e^{-X} - 1$, $\alpha_{x+1} = x_i - \dfrac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$

Ta lập được bảng tính:

i	x_i	ε(%)
0	0	100
1	0, 5 0 0 0 0 0 0 0 0	11,8
2	0, 5 6 6 3 1 1 0 0 3	0,147
3	0, 5 6 7 1 4 2 1 6 3	0,0000220
4	0, 5 6 7 1 4 3 2 7 0	$< 10^{-8}$

2. Cho $\begin{cases} u(x,y) = x^2 + xy - 10 = 0 \\ v(x,y) = y + 3xy^2 - 57 = 0 \end{cases}$ cho biết nghiệm (x = 2, y = 3)

Nghiệm ban đầu cho (x = 1,5 , y = 3,5)

Giải:

$\frac{\partial v_0}{\partial y_0} = 1 + 6xy = 1 + 6(1,5)(3,5) = 3,25$ $\frac{\partial v_0}{\partial x_0} = 2y^2 = 3(3,5)^2 = 36,75$

$\frac{\partial u_0}{\partial y_0} = x = 1,5$ $\frac{\partial u_0}{\partial x_0} = 2x + y = 2(1,5) + 3,5 = 6,5$

Vậy định thức Jacobien: det J = 6,5(32,5) - 1,5(36,75) = 156,125

và u_0 = $(1,5)^2$ + 1,5(3,5) - 10 = - 2,5

v_0 = 3,5 + $3(1,5)(3,5)^2$ - 57 = 1,625

Từ đó có: $\begin{cases} x = 1,5 - \dfrac{-2,5(32,5) - 1,625(3,5)}{156,125} = 2,03603 \\ y = 3,5 - \dfrac{1,625(6,5) - (-3,5)(36,75)}{156,125} = 2,84387 \end{cases}$

Tiếp tục các phần xấp xỉ bị dư → (x = 2 , y = 3)

3. Cho hàm: f(x) = - $0,9x^2$ + 1,7x + 2,5, điểm ban đầu x_0 = 5, chọn ε_0 = 0,01%

Câu hỏi:

1. Phương trình (hoặc hệ phương trình) phi tuyến thông thường có nhiều nghiệm; để giải nó (hoặc chúng nó), bước đầu tiên ta phải làm gì ?
2. Trình bày cách giải hệ phương trình phi tuyến theo công thức lặp Newton-Raphson?
3. Tại sao phương pháp lặp Newton – Raphson còn được gọi là phương pháp tiếp tuyến ?
4. Ưu nhược điểm của các phương pháp lặp để giải phương trình phi tuyến ?

Bài tập:

1) Dùng phương pháp dây cung, tìm nghiệm gần đúng với độ chính xác10^{-2} của:
   a) $x^3 + 3x + 5=0$
   b) $x^4 -3x +1=0$
2) Áp dụng hai lần phương pháp đây cung, tìm nghiệm thực gần đúng của phương trình x^3-10x+5 trong khoảng phân ly(0;0,6). Đánh giá sai số của nghệm gần đúng x_2.
3) Cho phương trình x=sin3x, co khoảng phân ly nghiệm là($\frac{\pi}{6}$,$\frac{\pi}{3}$). Tìm nghiệm gần đúng trong khoảng đã cho bằng phương pháp dây cung, tính đến phép lặp thứ 3 là x3.
4) Tìm nghiệm gần đúng của hệ

$$\begin{cases} x^3 - 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 - 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

Bằng phương pháp Niutơn, cho x_0=0,7; y_0=1,0.

5) Tìm nghiệm gần đúng của hệ bằng phương pháp lặp Niutơn.

$$\begin{cases} Sinx - y = 1{,}32 \\ x - \cos y = 0{,}85 \end{cases}$$

Với xấp xỉ đầu($x_{0,}$ y_0)=(1,80; -0,33).

Đáp số:

2) $\alpha \approx 0{,}51$

3) $\mathbf{x_3} \approx 0{,}75649$

4) $(\alpha, \beta) = (0{,}704402;1{,}087387)$

5) $(\alpha, \beta) = (1{,}79;0{,}34)$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB ĐHQG, Hà Nội 1996
2. Phan Văn Hạp và các tác giả khác, Cơ sở phương pháp tính, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1970.
3. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
4. Đinh Văn Phong, Phương pháp số trong cơ học, NXB KHKT, Hà Nội 1999.
5. Lê Đình Thịnh, Phương pháp tính, NXB KHKT, Hà Nội 1995.
6. Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB KHKT, Hà Nội 2000.
7. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
8. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
9. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
10. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
11. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://www.info.sciencedirect.com/books
http://db.vista.gov.vn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 5 CÁC PHƯƠNG PHÁP SỐ CỦA ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

NUMERICAL METHODS FOR LINEAR ALGEBRA

Các phương pháp số gắn liền với việc ứng dụng trên máy tính số. Ma trận được ứng dụng rất thích hợp ở đây, như giải hệ phương trình vi phân, biểu diễn các vectơ ở dạng ma trận.

Khi giải hệ đại tuyến A.X = B, ma trận A có thể là ma trận đầy hoặc thưa; khi A là ma trận thưa, trong nhiều trường hợp đã có thuật toán để lưu trữ tiết kiệm bộ nhớ và thời gian tính như lưu trử dạng BAND bình thường hoặc dạng BAND ép lại, hay kỷ thuật lưu trử Skyline (frontal method), với nhiều thuật giải rất hiệu quả.

5.1 Ma trận

5.1.1 Các định nghĩa

Ma trận là tập hợp gồm m×n phần tử, chia thành m hàng và n cột.

Kí hiệu: $$A_{m,n} = [a_{i,j}]_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Có thể coi ma trận hàng(cột) là biểu diễn đại số của một vectơ (hình học).

Vết (trace) của ma trận A được tính: $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

Mỗi một ma trận vuông A đều được gắn với một số, kí hiệu det(A) hoặc $|A|$, được gọi là định thức. Ma trận A được gọi là suy biến nếu det(A) = 0 và ngược lại là không suy biến.

5.1.2 Phép biến đổi tuyến tính trong không gian n chiều

Giữa ma trận và các phép biến đổi tuyến tính trong không gian (đại số) có một mối liên hệ mật thiết. Một phần tử của không gian n chiều có thể được mô tả bằng một vectơ, hay viết dưới dạng ma trận cột.

Xét hai vectơ: $X_{n1} = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]^T$, $Y_{n1} = [y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m]^T$

Với phép biến đổi: A.X=Y

Với A là ma trận cỡ m×n được gọi là phép biến đổi tuyến tính từ vectơ n chiều sang vectơ m chiều. Khi m=n đơn giản là ta có một phép chuyển tọa độ. Nếu trong không gian 2 hoặc 3 chiều với các tọa độ Descartes thì A chính là các ma trận chuyển đổi.

Ơ trường hợp đơn giản, A có thể là ma trận cosine chỉ phương khi thực hiện phép quay giữa hai hệ tọa độ, có thể là ma trận cosine chỉ phương khi thực hiện phép quay giữa hai hệ tọa độ, có thể là ma trận với một phần tử duy nhất khác không (các ma trận cơ bản) khi thực hiện các phép tịnh tiến các hệ tọa độ theo các trục.

Một hệ cơ sở của không gian n chiều là một tập hợp đúng n vectơ độc lập tuyến tính.

Ví dụ: Ta có thể chọn các vectơ đơn vị e_i làm hệ cơ sở với vectơ X bất kỳ:

$X=c_1e_1 + c_2e_2+....+ c_ne_n$

$$\begin{cases} e_1 = [1,0,0,........0]^T \\ e_2 = [0,1,0,........0]^T \\ .... \\ e_1 = [0,0,0,........1]^T \end{cases}$$

Tích vô hướng của hai vectơ: $X=[x_1, x_2,..., x_n]^T$

$Y=[y_1, y_2,..., y_n]^T$

Được định nghĩa: $X^T.Y = Y^T.X = \sum_1^n x_i y_i$ (trong không gian Euclide)

Độ dài hay Module của vectơ X ký hiệu $|X|$ được tính:

$$|X| = \sqrt{x^T.x}$$

Khoảng cách d và góc φ giữa hai vectơ:

$$d = |x - y| = \sqrt{(x-y)^T.(x-y)}$$

$$x^T.y = |x|.|y|.\cos\varphi$$

Hai vectơ x, y được gọi là trực giao với nhau nếu: $x^T.y = 0$

Một tập hợp các vectơ trực giao với nhau từng đôi một được gọi là một Hệ trực giao. Một ma trận trực giao sẽ có các hàng và các cột là các vectơ trực giao.

Định lý: Các vectơ của một hệ trực giao là độc lập tuyến tính.

Chuẩn của vectơ, ký hiệu là $\|X\|$, được định nghĩa là một số không âm, thõa mãn các tính chất sau:

1. $\|X\| \geq 0$ và $\|X\|$ khi và chỉ khi X=0
2. $\|\alpha X\| = |\alpha|.\|x\|$ với mọi α thực
3. $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ bất đẳng thức tam giác

Có 3 chuẩn sau đây hay sử dụng trong các bài tóan ứng dụng:

Với vectơ $X = [x_1, x_2,..., x_n]^T$

$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| +....+ |x_n| = \sum_1^n |x_i|$ thường gọi chuẩn tuyệt đối

$\|X\|_2 = \sqrt{x^2{}_1 + x^2{}_2 + ... + x^2{}_n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i}$ gọi là chuẩn Euclide

$\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$ gọi là chuẩn cực đại.

Mở rộng khái niệm cho chuẩn các ma trận. Chuẩn của các ma trận A và B ký hiệu là $\|A\|$ và $\|B\|$; được định nghĩa là các số không âm thõa mãn các điều kiện sau:

1. $\|A\| \geq 0$ và $\|A\| = 0$ khi và chỉ khi $A = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\|$ với mọi α thực
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. $\|A \bullet B\| \leq \|A\| \bullet \|B\|$

Ở đây, nêu 3 định nghĩa chuẩn hay dùng:

$\|A\|_1 = \max_j (\sum_i |a_{ij}|)$ gọi là chuẩn cột.

$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a^2{}_{ij}}$ gọi là chuẩn Euclide.

$\|A\|_\infty = \max_i (\sum_j |a_{ij}|)$ gọi là chuẩn hàng.

Chuẩn của ma trận là khái niệm hết sức quan trọng đối với các phương pháp số. Chúng hay sử dụng khi xét tính hội tụ của các phương pháp lặp hoặc khi xét sự ổn định của các hệ phương trình vi phân.

Liên hệ chuẩn của ma trận và vectơ:

Trong không gian n chiều V_n chuẩn của ma trận tương ứng với chuẩn của vectơ nếu:

$\|A.X\| \leq \|A\|.\|X\|$ với mọi A và X thuộc V_n.

5.1.3 Các phép tính ma trận

Với ma trận và cách đại số hóa các vectơ ta có thể định nghĩa các phép tính một cách hòan chỉnh và đầy đủ hơn.

Ta nhắc lại một số phép tính cơ bản:

Ma trận B gọi là ma trận chuyển vị của A (A^T=B), nếu hàng của ma trận A là cột của ma trận B.

$$[a_{ji}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{n\times m} \Rightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

Ma trận nghịch đảo: A^{-1}

$A.B = E \Rightarrow B = A^{-1} \Rightarrow A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$ (với E là ma trận đơn vị)

Chú ý một số tính chất: $A.B \neq B.A$

$(A^T)^T = A$, $(k.A)^T = k.A^T$

$(A+B)^T = A^T+B^T$, $(A.B)^T = B^T.A^T$

$(A^{-1})^{-1} = A$, $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

$\det(A) = \det(A^T)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\mathrm{a}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mathrm{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mathrm{a}_{33} \end{bmatrix} \quad ,$$

- Ma trận A là suy biến, det (A)=0 thì các hàng hoặc các cột của nó là các vectơ phụ thuộc tuyến tính.
- Hạng của ma trận vuông A là số lớn nhất các hàng (hoặc các cột) độc lập tuyến tính với nhau.
- Ma trận B có được từ ma trận A bằng cách đổi chỗ hai hàng cho nhau thì:
  det(B) = - det(A).
- Nếu A, B là các ma trận vuông trực giao thì A^T, A^{-1}, A.B cũng là các ma trận trực giao.
- Nếu A, B là các ma trận vuông đối xứng thì αA, A+B cũng là những ma trận vuông đối xứng. Nếu A không suy biến thì A^{-1} cũng đối xứng.

Cần chú ý rằng: Tích của hai ma trận đối xứng nói chung không phải là ma trận đối xứng.

Nếu A = $[a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n thoả $|a_{kk}| > \sum_{s=1}^{n} |a_{ks}|$, với s $\neq$ k, k=1...n , thì det(A) $\neq$ 0. Ma trận A được gọi là có phần tử trên đường chéo chính a_{ii} trội. Hơn nữa nếu $a_{kk} > 0$, k=1,2,..,n thì det(A)>0 định thức xác định dương.

5.1.4 Vectơ riêng, trị riêng và các dạng toàn phương của ma trận

Cho A là ma trận vuông cấp n; số λ được gọi là trị riêng và vectơ khác không X là vectơ riêng của A nếu chúng thõa mãn điều kiện:

$$A.X = \lambda.X \quad \text{hay} \quad (A-\lambda E).X = 0 \quad \Rightarrow \quad |A - \lambda.E| = 0,$$

Ta tìm được phương trình bậc n cho λ, sao cho: $f(\lambda) = 0$.
$f(\lambda)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A có n trị riêng λ_1, λ_2,.., λ_n. Tập hợp λ_1, λ_2,.., λ_n được gọi là phổ và $\max_i (|\lambda_i|)$ là bán kính phổ của ma trận A.

Với mỗi λ_i có vô số X_i. Các vectơ riêng cùng tương ứng với một λ_i rõ ràng là phụ thuộc tuyến tính và chỉ khác nhau một hằng số α. Do đó ta có thể chọn một vectơ duy nhất làm cơ sở. Tập hợp n vectơ riêng, ứng với n trị riêng khác nhau tạo thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính. Ma trận gồm các cột là các vectơ riêng của ma trận A, gọi là ma trận dạng riêng của A.

Định lý:
- Nếu A là ma trận thực, đối xứng thì các trị riêng là thực. Các vectơ riêng ứng với các trị riêng khác nhau là các vectơ thực trực giao và độc lập tuyến tính.
- Nếu A là ma trận xác định dương thì các giá trị riêng là những số dương.

Định lý Sylvester:

Nếu định thức $|A|$ và tất cả các tử thức nằm trên đường chéo chính đều là dương thì A là xác định dương.

Tổng quát hơn, khái niệm xác định dương của ma trận A được định nghĩa nhờ dạng toàn phương là đa thức: $Q(X) = X^T.A.X$

Nếu Q xác định dương, tức $Q(X) > 0$ với mọi số thực X và $Q(X) = 0$ khi và chỉ khi X=0, thì A được gọi là xác định dương.

5.2 GIẢI HỆ ĐẠI TUYẾN

Bài toán cơ bản:

Cho hệ gồm n phương trình đại số tuyến tính với n ẩn:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$... \quad ... \quad ...$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

Viết dưới dạng matrix:

$$A.X = B$$

Gỉa thiết $\det(A) \neq 0$: Hệ này có nghiệm duy nhất.

Ta có thể tìm nghiệm theo quy tắc CRAMER hoặc sử dụng ma trận nghịch đảo nhưng cách nầy đòi hỏi phép tính khá lớn và không thuận lợi khi ma trận A xấu.

Chúng ta chỉ nghiên cứu các phương pháp triển khai hữu hiệu trên máy tính. Có thể phân loại chúng thành hai nhóm chính:

+ Các phương pháp trực tiếp: Gauss, Gauss Jordan, phân tích LU,...
+ Các phương pháp lặp: Lặp đơn, Jacobi, Gauss - Seidel, lặp Gradient liên hợp…

5.2.1 PHÂN TÍCH LU VÀ PHÂN TÍCH CHOLESKY

Trong phép phân tích LU, ma trận A có thể phân tích: $A = L.U$

Với L là ma trận tam giác dưới, với các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1, U là ma trận tam giác trên. Phép phân tích LU này bao giờ cũng thực hiện được nếu các trụ (các phần tử chính a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...) khác không.

Nó sẽ duy nhất nếu các phần tử trên đường chéo chính của ma trận L bằng 1.

Với phân tích LU việc giải hệ phương trình:

$$A.X = b$$

Trở thành giải lần lượt hai hệ phương trình:

$$Ly = b$$
$$\text{Và} \quad UX = Y$$

Thuật giải của phép phân tích LU thường dùng là của Crout. Trong trường hợp ma trận A là đối xứng, khi đó phép phân tích trở nên đơn giản hơn rất nhiều, không đòi hỏi các phần tử trên đường chéo chính của ma trận L bằng 1 nữa.

Thay vào đó ta sử dụng điều kiện:

$$U = L^T$$
$$A = L.L^T$$

Lúc đó L và U có các phần tử trên đường chéo chính giống nhau, các phần tử nầy có thể là thực hay phức: và gọi phép này là phân tích Cholesky.

(chúng ta không đi sâu vào thuật toán, vì nó phức tạp và đã có các source code listing đã công bố trong nhiều ấn phẩm khoa học phương pháp số).

5.2.2 PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Mô tả phương pháp:

Phương pháp Gauss thuộc loại phương pháp đúng hay còn gọi là phương pháp trực tiếp. Ngoài ra còn có 1 loại phương pháp khác là phương pháp lặp, ở đây ta xét phương pháp lặp đơn, hệ cho ở dạng vector: $Ax = f$

Ta chuyển hệ này về dạng tương đương: $x = Bx + g$

Giả sử: $B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$

Sau đó ta xây dựng công thức tính lặp:

$$\begin{cases} x^{(m)} = Bx^{(m-1)} + g \\ x^{(0)} \end{cases} \qquad (5.2.1)$$

Trong đó: $(Bx)_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$, $x^{(0)}$ cho trước.

Phương pháp tính theo (5.2.1) gọi là phương pháp lặp đơn.

Sự hội tụ:

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ là nghiệm của hệ $x = Bx + g$, nếu $x_i^{(m)} \to \alpha_i$ khi $m \to \infty$, với $i = 1, 2, 3, \dots, n$ thì ta nói phương pháp lặp (5.2.1) hội tụ.

Ta đưa vào các ký hiệu: $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ thì mỗi đại lượng sau:

$$\left.\begin{aligned} \|z\|_0 &= \max\{|z_i|\} \\ \|z\|_1 &= |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \\ \|z\|_2 &= z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \end{aligned}\right\}$$

Gọi là độ dài mở rộng của vector **z**, người ta còn gọi nó là chuẩn của **z**.

Đối với ma trận $B = (b_{ij})$, ta đặt: $$\begin{cases} r_0 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}| \\ r_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}| \\ r_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} . \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}| \end{cases}$$

Người ta chứng minh được định lý sau đây về điều kiện hội tụ:

+ Nếu $r_0 < 1$ hoặc $r_1 < 1$ hoặc $r_2 < 1$ thì phương pháp lặp (5.2.1) hội tụ với bất kỳ xấp xỉ ban đầu $x^{(0)}$ nào, đồng thời ta có sai số đánh giá:

$$\left.\begin{aligned} \left\| x^{(m)} - \alpha \right\|_P &\le \frac{r_P^m}{1 - r_P} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|_P \\ \left\| x^{(m)} - \alpha \right\|_P &\le \frac{r_P^m}{1 - r_P} \left\| x^{(m)} - x^{(m-1)} \right\|_P \end{aligned}\right\}$$

Trong đó: $p = 0$ nếu $r_0 < 1$, $p = 1$ nếu $r_1 < 1$, $p = 2$ nếu $r_2 < 1$.

5.2.3 PHƯƠNG PHÁP LẶP SEIDEN (hay còn gọi là GAUSS-SEIDEN)

Là phương pháp cải tiến phương pháp lặp đơn một chút: khi tính xấp xỉ thứ (k+1) của ẩn x_i ta sử dụng các xấp xỉ thứ (k + 1) đã tính của ẩn $x_1, \ldots, x_{i-1}$.

Giả sử cho hệ: $A\overline{x} = \overline{b} \Leftrightarrow x_i = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ với $i = 1, 2, \ldots, n$

Lấy xấp xỉ ban đầu là $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$

Tiếp theo, giả sử ta đã biết xấp xỉ thứ k là $x_i^{(k)}$ theo Seiden, ta sẽ tìm xấp xỉ thứ (k+1) của nghiệm theo công thức:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum\limits_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)} \\ \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum\limits_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} \end{cases}$$

(Thông thường lặp Seiden hội tụ nhanh hơn lặp đơn)

Ví dụ:

Tìm nghiệm gần đúng của hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn.

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Giải:

Hệ phương trình đã cho có dạng đường chéo trội, dễ dàng đưa về dạng X=$\alpha X + \beta$; Trong đó:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix};\ \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\|\alpha\|_x = 0,08 < 1$ quá trình lặp Seiden hội tụ

Chọn xấp xỉ đầu $X^0 = \beta = (2,3,5)$

K	X_1	X_2	X_3
0	2	3	5
1	1,92	3,1924	5,044648
2	1,9093489	3,194952	5,0448056
3	1,909199	3,1949643	5,0448073

5.2.4 PHƯƠNG PHÁP GRADIENT LIÊN HỢP (Conjugate gradient method)

Phương pháp này rất thích hợp với bài toán phụ thuộc thời gian.

Để giải hệ phương trình: $\sum\{P(I,J) \times F(J)\} = G(I)$

Gía trị ban đầu ước lượng là: $F_0(J)$ gây ra phần dư U(I), ta biểu diễn:

$$U(I) = G(I) - \sum\{P(I,J) \times F_O(J)\}.$$

Đặt: V(I) = U(I)

UU = $\sum\{U(I).U(I)\}$

Vòng lặp:

W(I) = $\sum\{P(I,J).V(J)\}$

VW = $\sum\{V(I).W(I)\}$

AA = UU/VW

F(I) = F(I) + AA.V(I)

U(I) = U(I) - AA.W(I)

WW = $\sum\{U(I).U(I)\}$

BB = WW/UU

V(I) = U(I) + BB.V(I)

UU = WW

UU ≤ ε ?

Qúa trình này được lặp lại mãi đến khi UU ≤ ε (sai số cho phép của bài toán) thì dừng.

Câu hỏi:

1. Hãy cho ví dụ về bài toán nào đó trong thực tế kỹ thuật có ma trận thưa (dạng BAND hay dạng bất kỳ) ?
2. Hãy trình bày một thuật toán lưu trữ tiết kiệm bộ nhớ trong máy tính và giải nó khi ma trận thưa ?
3. Hãy cho một ví dụ cụ thể về ma trận A xác định dương ?
4. Hãy nêu ưu nhược điểm của các phương pháp giải hệ đại tuyến (trực tiếp và lặp) ?

Bài tập:

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a) Bằng phương pháp lặp đơn
b) Bằng phương pháp lặp Dayđen.
(Đối với mỗi phương pháp, tính đến X^3 với $X^0 = \beta$)

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 24{,}21x_1 + 2{,}42x_2 + 3{,}85x_3 = 30{,}24 \\ 2{,}31x_1 + 31{,}49x_2 + 1{,}52x_3 = 40{,}95 \\ 3{,}49x_1 + 4{,}85x_2 + 28{,}72x_3 = 42{,}81 \end{cases}$$

Bằng phương pháp lặp đơn, tính cho tới khi

$$\left\| X^k - X^{k-1} \right\| \le 10^{-4}$$

3) Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn sao cho $\left\| X^k - X^{k-1} \right\| \le \varepsilon$ là số đã cho trước.

$$\begin{bmatrix} 1{,}02 & -0{,}25 & -0{,}30 \\ -0{,}41 & 1{,}13 & -0{,}15 \\ -0{,}25 & -0{,}14 & 1{,}21 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0{,}515 \\ 1{,}555 \\ 2{,}780 \end{bmatrix}; \ \varepsilon = 10^{-3}$$

Đáp số:

1) a) $\begin{cases} x_1 = -0{,}9618359 \\ x_2 = -3{,}9448436 \\ x_3 = -2{,}9398827 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 = -0{,}9922021 \\ x_2 = -3{,}9937418 \\ x_3 = -2{,}9964857 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = 0{,}9444 \\ x_2 = 1{,}1743 \\ x_3 = 1{,}1775 \end{cases}$ $\|X^k - X^{k-1}\| \le 0{,}5.10^{-4}$

3) X=(2,0; 2,5; 3)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB ĐHQG, Hà Nội 1996
2. Phan Văn Hạp, Các phương pháp giải gần đúng, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1981.
3. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
4. Nguyễn Thế Hùng, Phương pháp phần tử hữu hạn trong chất lỏng, NXB Xây Dựng, Hà Nội 2004.
5. Đinh Văn Phong, Phương pháp số trong cơ học, NXB KHKT, Hà Nội 1999.
6. Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB KHKT, Hà Nội 2000.
7. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
8. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
9. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
10. HOFFMAN, J., Numerical Methods for Engineers scientists, McGrawHill, Newyork 1992.
11. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
12. OWEN T. et al., Computational methods in chemical engineering, Prentice Hall, 1995.
13. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://www.info.sciencedirect.com/books
http://db.vista.gov.vn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 6 NGHIỆM GẦN ĐÚNG CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

SOLVING THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

6.1 Mở đầu

Nhiều bài toán khoa học kỹ thuật có phương trình chỉ đạo là (hệ) phương trình vi phân thường cùng với điều kiện biên và điều kiện ban đầu. Nghiệm đúng của chúng thường chỉ áp dụng cho một số lớp bài toán rất hạn chế; đa số các bài toán là phải tìm nghiệm gần đúng.

Có hai loại bài toán là:

(i) Bài toán Cauchy hay còn gọi là bài toán giá trị ban đầu, bao gồm (hệ) phương trình vi phân và điền kiện ban đầu của bài toán.

(ii) Bài toán biên, bao gồm (hệ) phương trình vi phân và điều kiện biên

Để giải gần đúng các bài toán nầy có hai phương pháp là:

(a) Phương pháp giải tích: tìm nghiệm gần đúng dưới dạng biểu thức như phương pháp xấp xỉ liên tiếp Picard, phương pháp chuỗi nguyên, phương pháp tham số bé,…

(b) Phương pháp số: tìm nghiệm gần đúng bằng số tại các điểm rời rạc; nó còn chia ra phương pháp một bước (như phương pháp Euler, Runghe-Kutta,…) và phương pháp đa bước (Adams,…); Với phương pháp một bước tính nghiệm gần đúng y_i thông qua y_{i-1} còn với phương pháp đa bước y_i tính được thông qua nhiều bước trước đó: y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3},…

6.2 Nghiệm gần đúng của bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường

Giả sử ta cần giải bài toán Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.1)$$

Giả sử rằng trong miền ta xét, hàm f(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp n, khi đó nghiệm cần tìm sẽ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp n + 1, và do đó ta có thể viết :

$$\Delta y_0 = y(x_0) - y_0 = (x - x_0)y'_o \; +$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{2!}y''_0 + \ldots\ldots + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}y_0^{(n+1)} + \theta(|x-x_0|^{n+1}) \qquad (6.2.2)$$

Ký hiệu $x - x_0 = h$, với h đủ bé ta có thể bỏ qua $0(|x - x_0|^{n+1})$.

Từ (6.2.2) ta có: $\Delta y_0 = y(x_0+h) - y_0 + hy'_0 +$

$$\frac{h^2}{2!}y''_0 + \dots\dots\dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y_0^{(n+1)} \qquad (6.2.3)$$

Để tính (6.2.3) ta lần lượt tính từ (6.2.1):

$y'_0 = f(x_0,y_0) = f_0$, $y''_0 = \dfrac{\partial f_0}{\partial x} + f_0\dfrac{\partial f_0}{\partial y}$,

Nói chung ta có: $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + f\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^m u = \displaystyle\sum_{K=0}^{n} C_m^K f^K \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-K}\partial y^K}$

Vậy ta tính được: $y(x) \cong \displaystyle\sum_{K=0}^{n} y^{(K)}(x_0)\frac{h^K}{K!}$

Trong thực tế cách tính nầy ít dùng vì cồng kềnh; ta sẽ xét các phương pháp giải khác đơn giản hơn.

6.2.1 Phương pháp xấp xỉ liên tiếp Pica

Một trong những phương pháp giải tích giải gần đúng phương trình vi phân (6.2.1) là phương pháp xấp xỉ liên tiếp Pica.

Mục đích của phương pháp này là xây dựng nghiệm cần tìm là y= y(x)

Từ (6.2.1) ta có: $\displaystyle\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt \quad \Rightarrow \quad y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt$

Hay: $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y)dt \qquad (6.2.4)$$

Giả sử f(x,y) là hàm liên tục theo x,y và $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| < K$.

Để tìm xấp xỉ liên tiếp, trong (6.2.4) thay y bằng y_0, ta có xấp xỉ thứ nhất:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_0)dt,$$

Tương tự có xấp xỉ thứ hai: $$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_1)dt$$

Tổng quát, ta có: $y_n = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1})dt$, với n = 1,2,3,…

Như vậy ta sẽ có: $y(x) \approx y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})dt$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

Sai số: $|y_n(x) - y(x)| \le \dfrac{M(KC)^n}{K.n!}$, trong đó $|f(x,y)| = M$

Với: $|x - x_0| < a \le \infty$, $|y - y_0| < b \le \infty$, thì $C = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$

Ta có:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ và $f(x,y_0) > 0$ thì: $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < y(x)$

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ và $f(x,y_0) < 0$ thì: $y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_n > y(x)$

Trong hai trường hợp nầy ta có dãy xấp xỉ 1 phía.

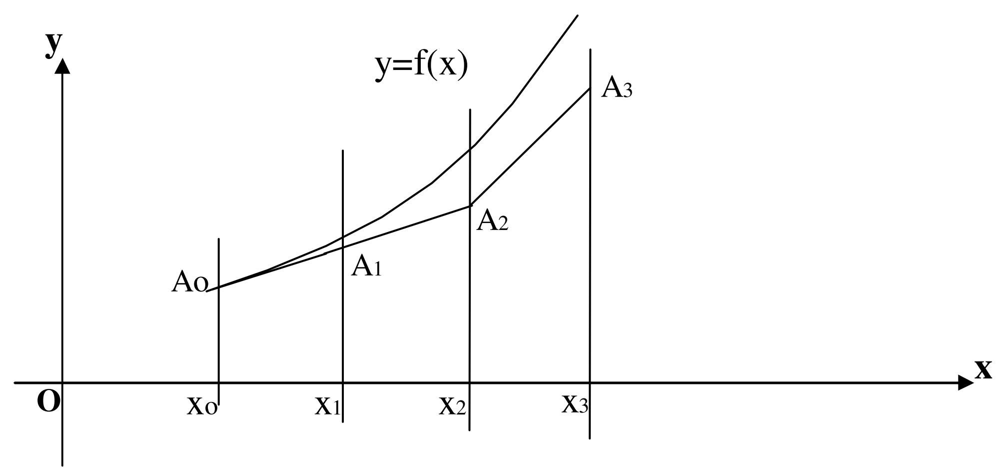
(iii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} < 0$ các xấp xỉ Pica lập thành các xấp xỉ 2 phía.

Ví dụ:

Tìm 2 nghiệm xấp xỉ liên tiếp theo phương pháp Pica của phương trình vi phân:

$$y' = x^2 + y^2 \qquad \text{cho } y(0)=0$$

6.2.2 Phương pháp Euler



Trước hết chia đoạn $[x_o, X]$ thành n đoạn nhỏ:

$x_i = x_o + ih$, với $i = 0,1,2,\ldots,n$

$$h = \frac{(X - x_o)}{n}$$

Đi xây dựng công thức, dùng khai triển Taylor hàm y=f(x) tại x_i ta có:

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i).(x - x_i) + \frac{y''(c_i)}{2!}(x - x_i)^2$$

Với: $c_i = x_i + \theta(x - x_i)$, $0 < \theta < 1$

Thay $x = x_{i+1} = x_i + h$, và $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

Ta có: $$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h.f(x_i, y(x_i)) + h^2.\frac{y''(c_i)}{2!}$$

Khi bước chia h khá bé, số hạng cuối $\cong 0$, khi thay $y(x_i)$ bằng u_i ta được:

$u_{i+1} = u_i + h_i.f(x_i, u_i)$

Biểu thức nầy cho phép tính u_{i+1} khi biết u_i, với điều kiện ban đầu được cho là: $u_o = \eta$

Đánh giá sai số:

Định lý: Gỉa sử $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$ và $\left|y''\right| \le K$, trong đó L, K là những hằng số, khi đó phương pháp Euler hội tụ và sai số là $e_i = u_i - y(x_i)$ có đánh giá:

$$|e_i| = |u_i - y(x_i)| \le M(|e_0| + \alpha h)$$

$$M = e^{L(x_i - x_0)}, \alpha = \frac{K}{2}$$

Ví dụ:

Dùng phương pháp Euler giải phương trình vi phân:

dy/dx=$\frac{xy}{2}$ V ới $0 \le x \le 1$ Cho y(0) =1.

6.2.3 Phương pháp Runghe - Kutta bậc 4

Xét phương trình vi phân: u' = f(x , u)

$$\begin{cases} k_1 = h.f(x_i, u_i) \\ k_2 = h.f(x_i + 0.5h, u_i + 0.5k_1) \\ k_3 = h.f(x_i + 0.5h, u_i + 0.5k_2) \\ k_4 = h.f(x_i + h, u_i + k_3) \end{cases} \Rightarrow u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Với sai số: $u_i - Y(x_i) = 0(h^4)$

Ví dụ1: Cho PTVP

$$y' = \frac{y}{x} - y^2$$

y(1) =1; h=0,2. Tính trong khoảng [1;1,4] Runge-kuta

$f(x,y) = \frac{y}{x} - y^2$

i	x	y	k=hf(x,y)	Δy
0	1	1	0	0
	1,1	1	-0,018	-0,036
	1,1	0,991	-0,0186	-0,162
	1,2	0,984	-0,039	-0,079

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

$$= 1+\frac{1}{6}(0+2(-0.018)+2(-0,081)-0,079 = 0,954$$

i	x	y	k=hf(x,y)	Δy
0	1,2	0,954	-0,058	-0,115
	1,3	0,925	-0,02	-0.046
	1,3	0,940	-0,032	-0,064
	1,4	+0,938	-0,042	-0,042

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

$$= 0,954+\frac{1}{6}(-0,058+2(-0,02)+2(-0,032)+(-0,042))$$

Ví dụ2:

Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

y'= x+y $0 \le x \le 0,5$, y(0) =1, h=0,1

Bằng phương pháp **Runghe - Kutta**

6.2.4 Phương pháp Adam

Giả sử cần giải phương trình vi phân:

Y' = f(x , y), với điều kiện ban đầu: $y(x_0) = y_0$

Cho biến số thay đổi bởi bước h nào đó; xuất phát từ điều kiện ban đầu $Y(x_0) = Y_0$ bằng phương pháp nào đó (ví dụ: phương pháp Runghe-Kutta bậc 4), ta tìm được 3 giá trị tiếp theo của hàm cần tìm y(x): $Y_1 = Y(x_1) = Y(x_0+h)$, $Y_2 = Y(x_0+2h)$, $Y_3 = Y(x_0 + 3h)$.

Nhờ các giá trị x_0 , x_1 , x_2 , x_3 và Y_0 , Y_1 , Y_2 , Y_3 , ta tính được q_0, q_1, q_2, q_3.

Trong đó: $q_0 = h.Y_0' = h.f(x_0 , y_0)$, $q_1 = h.f(x_1 , y_1)$, $q_2 = h.f(x_2 , y_2)$, $q_3 = h.f(x_3 , y_3)$, sau đó ta lập bảng sai phân hữu hạn của các đại lượng y và q

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	-------
x_o	y_o		q_o				
		Δy_o		Δq_0			
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$		
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$	
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$		--------
		Δy_2		Δq_2		--------	
x_3	y_3		q_3				-------
------------	----------	----------	----------	-----------	----------	---------	-------

Biết các số ở đường chéo dưới, ta tìm Δy_3 theo công thức Adam như sau:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}.\Delta q_2 + \frac{5}{12}.\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}.\Delta^3.q_0$$

Tiếp đó ta có:

$$Y_4 = Y_3 + \Delta Y_3 \quad \rightarrow \quad q_4 = h.f(x_4, Y_4)$$

Sau đó viết đường chéo tiếp theo như sau:

$$\Delta q_3 = q_4 - q_3 \ , \ \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2 \ , \ \Delta^3 q_1 = \Delta^2.q_2 - \Delta^2.q$$

Đường chéo mới cho phép ta tính ΔY_4 :

$$\Delta Y_4 = q_4 + 1/2\Delta q_3 + 5/12\Delta^2 q_2 + 3/8\Delta^3 q_1$$

Vì vậy ta có: $Y_5 = Y_4 + \Delta Y_4$ . . . . .

Ví dụ:

Giải lại ví dụ 1 bằng phương pháp Adam.

Tìm $x_4 = 1,8 \rightarrow y_4 =$?

$x_5 = 2,0 \rightarrow y_5 =$?

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
1	1		0			
		-0,016		-0,030		
1,2	0,984		-0,030		0,016	
		-0,038		-0,014		-0,008
1,4	0,946		-0,044		0,008	
		-0,046		-0,006		-0,001
1,6	0,900		-0,05		0,007	
		-0,053		0,001		0,388
1,8	0,847		-0,049		0,395	
		-0,02		0,396		
2	0,827		0,347			

$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$ =-0,050+1/2.(-0,006)+5/12.(0,008)+3/8.(-0,008)

$\Delta y_4 = q_4 + \frac{1}{2}\Delta q_3 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_2 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_1$ =-0,049+1/2.0,001+5/12.0,07+3/8.(-0,001)= -0,02

Câu hỏi:

1. Hãy cho ví dụ cụ thể về bài toán phương trình vi phân thường: Bài toán Cauchy (hay còn gọi là bài toán giá trị ban đầu) và bài toán biên ?
2. Tại sao phương pháp Pica được gọi là phương pháp giải tích gần đúng ?
3. Tại sao phương pháp Euler cho sai số lớn, nhưng các sách về phương pháp tính đều phải đưa phương pháp nầy vào ?
4. Tại sao các sách về phương pháp tính thường trình bày phương pháp Runghe – Kutta bậc 4 để giải phương trình vi phân thường mà không trình bày phương pháp nầy có bậc cao hơn hoặc thấp hơn (bậc 3, bậc 5…) ?
5. Tại sao phương pháp Adam được gọi là phương pháp đa bước ?

Bài tập:

1) Tìm nghiệm gần đúng của phương trình y'=x+y^2 thỏa mãn điều kiện ban đầu y(0) =1, bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp pica(đến xấp xỉ thứ hai)
2) Tìm nghiệm đúng của bài toán vi phân y'=x+y, y(0) =0 trên miền $x \geq 0$ bằng phương pháp dãy pica.
3) Tìm nghiệm gần đúng của phương trình y'=2xycos(x^2) thỏa mãn điều kiện y(0)=1 bằng phương pháp dãy pica.
4) Bằng phương pháp ơle(công thức ơle), tìm nghiệm gần đúng của bài toán côsi y'(y+x)=y-x; y'(0)=1, lấy h=0,1(tìm bốn giá trị đầu tiên của y).
5) Tìm nghiệm gần đúng của bài toán côsi

$y' = \dfrac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}$ y(0)=1 trên [0;1] bằng công thức ơle, lấy h=0,2.

6) Tìm nghiệm gần đúng của bài toán côsi

$y'=y^2+\dfrac{y}{x}$ y(2)=4, h=0,1.

7) Tìm các giá trị của hàm số y=y(x) là nghiệm của bài toán Côsi $y'=y-\dfrac{2x}{y}$; y(0)=1 bằng công thức dạng Runghe-Kutta bậc 4 trên đoạn [0;1] với h=0,2 (Tính hai giá trị y_1=y(0,2); y_2 = y(0,4). So sánh với nghiệm đúng $y=\sqrt{2x+1}$.

8) Bằng phương pháp Runghe-Kutta bậc 4 tìm nghiệm gần đúng của bài toán côsi.

$y'=\dfrac{x}{y}+0,5y$; y(0)=1 lấy với h=0,1; Tính y(0,5).

9) Cho bài toán côsi $y'=x^2+y^2$; y(0)=-1.

Tìm nghiệm gần đúng của y_4 = y(0,4) bừng công thức nội suy Adam.

10) Tìm nghiệm gần đúng của bài toán côsi

$y'=x^2+y^2$; y(0)=0

theo công thức nội suy Adam, tại điểm x=0,4(lấy h=0,1)

Đáp số:

1) Chọn xấp xỉ đầu y_0=y(0)=1

Xấp xỉ thứ nhất $y_1=1+x+\dfrac{x^2}{2}$

Xấp xỉ thứ 2 $y_2=1+x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{20}x^5$

2) Chọn xấp xỉ đầu y_0=y(0)=0, được dãy pica. Dãy đó hội tụ tới nghiệm đúng của bài toán: $y=e^x-x-1$ và $y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

3) $y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin^k(x^2)}{k!}$; nghiệm đúng $y(x)=e^{\sin(x^2)}$.

4)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y(x)	1	1,1	1,18	1,25	1,31

5)

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y(x)	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27

6)

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y(x)	4	5,8	9,44	18,78	54,86

7)

x	0	0,2	0,4
y(x)	1	1,1832	1,1346

8)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y(x)	1	1,05	1,12	1,20	1,29	1,39

9) $y_4 = y(0,4) \approx -0,69$

10) $y_4 = y(0,4) \approx 0,02$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB ĐHQG, Hà Nội 1996
2. Tạ Văn Đĩnh, Phương pháp tính, NXBGD, 1997
3. Phan Văn Hạp và các tác giả khác, Cơ sở phương pháp tính, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1970.
4. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
5. Đinh Văn Phong, Phương pháp số trong cơ học, NXB KHKT, Hà Nội 1999.
6. Lê Đình Thịnh, Phương pháp tính, NXB KHKT, Hà Nội 1995.
7. Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB KHKT, Hà Nội 2000.
8. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
9. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
10. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
11. HOFFMAN, J., Numerical Methods for Engineers scientists, McGrawHill, Newyork 1992.
12. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
13. OWEN T. et al., Computational methods in chemical engineering, Prentice Hall, 1995.
14. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ocw.mit.edu/index.html
http://ebookee.com.cn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end

Chương 7 GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP SỐ

NUMERICAL METHOD FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Các hiện tượng vật lý trong tự nhiên thường rất phức tạp, nên thường phải mô tả bằng các phương trình đạo hàm riêng. Mỗi loại phương trình đạo hàm riêng thường đòi hỏi các điều kiện biên tương ứng để bài toán có nghiệm, phù hợp với hiện tượng vật lý quan sát.

7.1 PHÂN LOẠI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẬC 2 TUYẾN TÍNH

Từ dạng tổng quát:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=g(x,y) \qquad (7.1)$$

Phân loại với chú ý các đạo hàm bậc cao, khi đó (1) được viết lại:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(u_x,u_y,u,x,y\right) \qquad (7.2)$$

Đơn giản (7.2) bằng cách đổi biến số: $\eta = \eta(x , y)$, $\xi = \xi(x , y)$

Đặt: $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$

Hay: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}=\xi_x\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_x\dfrac{\partial u}{\partial y}$

Tương tự cho các đạo hàm khác ta được:

$$(A\alpha^2+C\beta^2+B\alpha\beta)\frac{\partial u}{\partial \xi}+[2A\alpha\gamma+2C\beta\delta+B(\beta\gamma+\alpha\delta)]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+(A\gamma^2+C\delta^2+B\delta\gamma)\frac{\partial u}{\partial\eta}=f \qquad (7.3)$$

Một cách đơn giản để tìm lời giải của phương trình này, là chọn ξ, η sao cho số hạng thứ nhất và thứ ba trong phương trình (7.3) triệt tiêu:

$$\begin{cases}A\alpha^2+B\beta\alpha+C\beta^2=0\\ A\gamma^2+B\delta\gamma+C\delta^2=0\end{cases}$$

Ta được dạng đơn giản:

$$[2A\alpha\gamma+2C\beta\delta+B(\beta\gamma+\alpha\delta)]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$$

Giả sử: $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$ ta có:

$$A(\alpha/\beta)^2 + B(\alpha/\beta) + C = 0,\quad A(\gamma/\delta)^2 + B(\gamma/\delta) + C = 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1}{2A}(-B+\sqrt{B^2-4AC})\\[2mm] \dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{1}{2A}(-B-\sqrt{B^2-4AC})\end{cases}$$

KẾT LUẬN: $B^2 - 4AC > 0$: Phương trình Hyporbol

$B^2 - 4AC < 0$: Phương trình Ellip

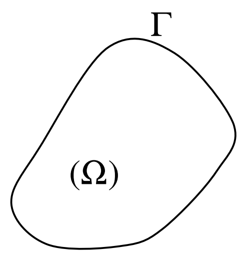
$B^2 - 4AC = 0$: Phương trình Parabol

Chú ý: Không phân biệt biến t, x, y, z

7.2 Các bài toán biên thường gặp

Trong lĩnh vực kỹ thuật, người ta thường hay gặp các bài toán biên sau:

a. Bài toán Dirichlet



Tìm hàm u thoả mãn phương trình:

$$a(u,v) = (f,v) \text{ trong miền } (\Omega)$$

và trên biên Γ của (Ω) cho trước giá trị của u

$$u\big|_{\Gamma} = f(v)$$

Nếu trên biên cho u = 0 thì ta có điều kiện biên Dirichlet thuần nhất. Điều kiện biên Dirichlet được gọi là điều kiện biên cốt yếu (essential boundary conditions).

b. Bài toán Neumann

- Tìm hàm u thoả mãn phương trình:

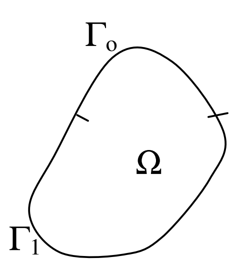
a(u,v) = (f,v) trong (Ω)

và điều kiện biên:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(v)$$

Nếu f(v) = 0 ta có bài toán Neumann thuần nhất. Để cho bài toán Neumann có nghiệm duy nhất ta phải đặt thêm điều kiện g(1) nào đó. Điều kiện biên Neumann còn gọi là điều kiện biên tự nhiên (natural boundary conditions).

c. Bài toán hỗn hợp



Với bài toán hỗn hợp (mixed boundary conditions) là bài toán mà biên Γ của nó gồm hai phần Γ_o và Γ_1. Ví dụ tìm hàm u thoả mãn phương trình:

$$a(u,v) = (f,v) \text{ trong } (\Omega)$$

Với điều kiện biên:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = f_1(v)\,; \qquad u\big|_{\Gamma o} = f_o(v)$$

Trong thực tế kỹ thuật, người ta thường hay gặp điều kiện biên hỗn hợp nầy.

7.3 Tư tưởng cơ bản của các phương pháp gần đúng

Trên thực tế việc tìm nghiệm chính xác của các bài toán biên nói trên là vô cùng khó khăn; toán học hiện nay chỉ cho phép giải các bài toán đó trong một số trường hợp thật đơn giản, còn phần lớn là phải giải theo các phương pháp gần đúng khác nhau.

Tư tưởng của các phương pháp gần đúng (approximation methods) là xấp xỉ không gian vô hạn chiều của nghiệm bằng một không gian con hữu hạn chiều.

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \varphi_n(x)$$

Nghiệm chính xác của bài toán có thể biểu diễn bằng các dạng sau:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots \tag{7.4}$$

Rõ ràng nghiệm chính xác u(x) có thể xem như là một hàm của vô hạn các hệ số:

$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$

Trong khi đó giải theo các phương pháp gần đúng ta chỉ có thể tìm được nghiệm u^h của nó như là hàm của một dãy hữu hạn các hệ số $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n.$ nào đó mà thôi.

Trong chương nầy ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp số mạnh, thường sử dụng để giải các bài toán cơ học:

+ Phương pháp đặc trưng (characteristic method)
+ Phương pháp sai phân (finite difference method)
+ Phương pháp phần tử hữu hạn (finite element method)
+ Phương pháp thể tích hữu hạn (finite volume method)
+ Phương pháp phần tử biên (Boundary element method)

7.4 Phương pháp đặc trưng

Nội dung của phương pháp đặc trưng là biến đổi phương trình vi phân đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường, và tìm lời giải bài toán ở hệ phương trình vi phân thường nầy, từ đó ta dễ dàng thấy được bản chất vật lý của hiện tượng nghiên cứu.

Ví dụ: Xét phương trình truyền sóng: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.5}$$

Ta đặt hàm v(x,t) sao cho: $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7.6}$$

vì $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$

Từ (7.5) ta có: $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Và đặt: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$

Đi đến hệ thống:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=0\\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial v}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1\\ \dfrac{1}{c^2}&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial t}\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ f(t)\end{Bmatrix}$$

Đặt $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&-1\\ \dfrac{1}{c^2}&0\end{bmatrix}$

Phương trình đặc trưng được suy từ:

$$\det(A\lambda - B)=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda&1\\ -\dfrac{1}{e^2}&-\lambda\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^2=\frac{1}{c^2}\rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{c}$$

Từ đó ta có đường cong đặc trưng: $\dfrac{dx}{dt}=\pm c\rightarrow\begin{cases}x=ct+a\\x=-ct+b\end{cases}$

7.5 Phương pháp sai phân

Dựa trên khai triển Taylor, một cách gần đúng ta thay các tỉ vi phân bằng tỉ sai phân.

Ví dụ: Tìm đạo hàm $\left.\dfrac{\partial c}{\partial x}\right|_x$

Ta có: $C(x+\Delta x)=C(x)+\Delta x\left(\dfrac{\partial c}{\partial x}\right)_x+\dfrac{\Delta x^2}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_x+.....$ (7.7)

$$\rightarrow\quad\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_x=\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}-\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)_x+......$$

Tương tự: Có $C(x-\Delta x)=C(x)-\Delta x\left(\dfrac{\partial c}{\partial x}\right)_x+\dfrac{\Delta x^2}{2!}\left(\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right)_x-.....$ (7.8)

Lấy (7.7) - (7.8) suy ra sai phân trung tâm:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_x=\frac{C(x+\Delta x)-C(x-\Delta x)}{2\Delta x}-\frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}\right)_x+......$$

Có thể khai triển:

$$C(x+2\Delta x)=C(x)+2\Delta x\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_x+4.\frac{\Delta x^2}{2!}.\left.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|_x+.......\quad(7.9)$$

Lấy (7.7) nhân với 4 rồi trừ cho (7.9), ta có:

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_x=\frac{-3C(x)+4C(x+\Delta x)-C(x+2\Delta x)}{2\Delta x}+\frac{4\Delta x^2}{3!}\frac{\partial^3 C}{\partial x^3}$$

Lấy (7.7) cộng (7.8) ta được:

$$\left.\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right|_x \approx \frac{C(x+\Delta x)-2C(x)+C(x-\Delta x)}{\Delta x^2}+0(\Delta x^2) \qquad (7.10)$$

Áp dụng các sai phân nầy vào giải phương trình Laplace: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$

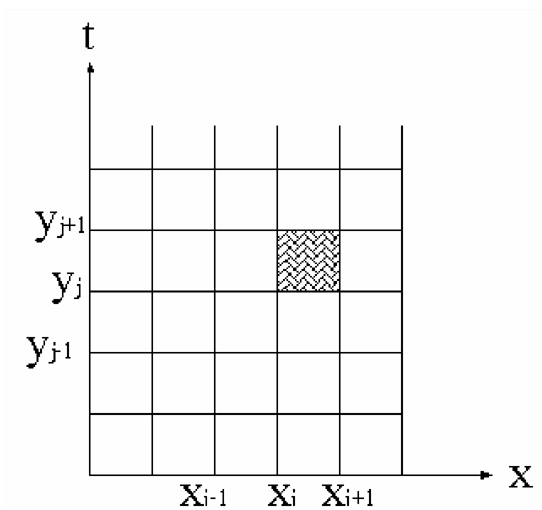
Chọn
$$\begin{cases}\Delta x_i = \Delta X\\ \Delta y_i = \Delta Y\end{cases} \qquad (7.11)$$

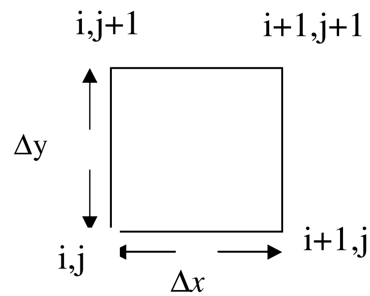
Thay (7.10) vào (7.11), được:

$$\frac{\phi_{i+1,j}-2\phi_{ij}+\phi_{i-1,j}}{\Delta X^2}+\frac{\phi_{i,j+1}-2\phi_{ij}+\phi_{1,j-1}}{\Delta Y^2}=0$$

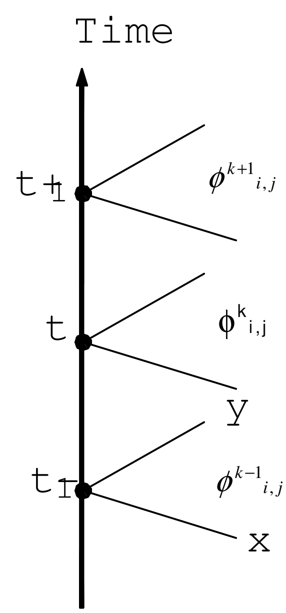
Đơn giản chọn $\Delta x = \Delta y$, ta được:

$$\phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}\right)$$





- **SƠ ĐỒ HIỆN - SƠ ĐỒ ẨN (Explicit - Implicit Scheme)**



Xét phương trình: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial\phi}{\partial t}$

Sai phân tiến: $\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t=\Delta t.K}=\frac{\phi^{K+1}-\phi^{K}}{\Delta t}$

Sai phân lùi: $\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t=\Delta t.K}=\frac{\phi^{K}-\phi^{K-1}}{\Delta t}$

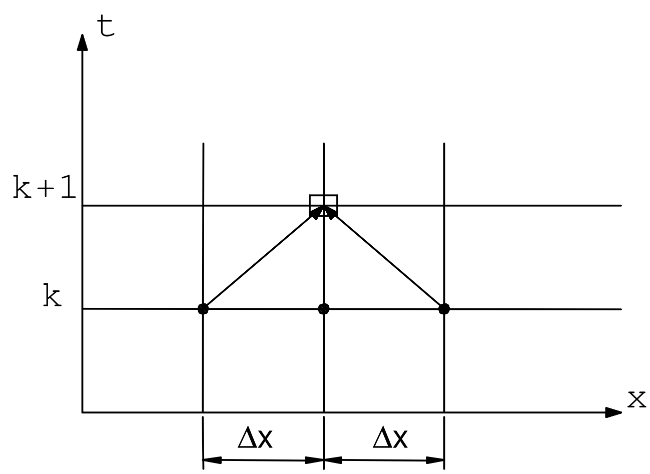
Ở đây $(\Delta t)_K = \Delta t = \text{const}$

$t = \sum_K (\Delta t)_j$, $\phi^K \equiv \phi\Big|_{t=K.\Delta t}$

+ Sai phân tiến theo thời gian t của phương trình trên, ta được:

$$\frac{\phi^K_{i-1,j} - 2\phi^K_{i,j} + \phi^K_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi^K_{i,j-1} - 2\phi^K_{i,j} + \phi^K_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T}\frac{\phi^{K+1}_{i,j} - \phi^K_{i,j}}{\Delta t}$$

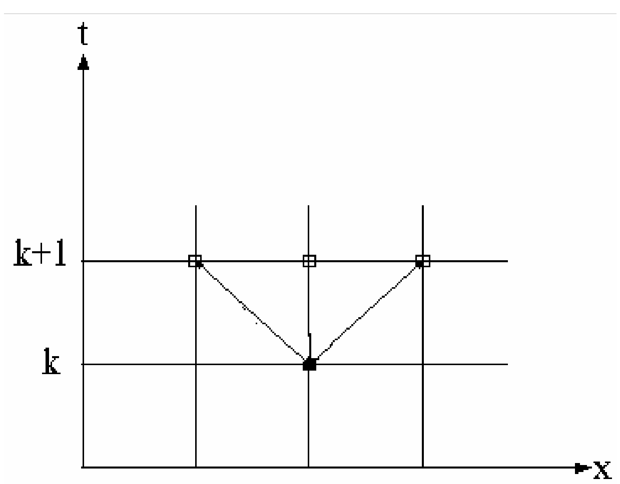
Từ phương trình nầy ta tìm được ngay $\phi^{K+1}_{i,j}$ khi biết các $\phi^K_{i-1,j}$, $\phi^K_{i,j}$ $\phi^K_{i+j,j}$ $\phi^K_{i,j-1}$ $\phi^K_{i,j+1}$ nên gọi là sơ đồ hiện.



+ Sai phân lùi theo thời gian t ta có:

$$\frac{\phi^{K+1}_{i-1,j} - 2\phi^{K+1}_{i,j} + \phi^{K+1}_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi^{K+1}_{i,j-1} - 2\phi^{K+1}_{i,j} + \phi^{K+1}_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{S}{T}.\frac{\phi^{K+1}_{i,j} - \phi^K_{i,j}}{\Delta t}$$

Phương trình trên có 5 ẩn số trong 1 phương trình nên phải thiết lập các phương trình cho tất cả các nút khác bên trong miền bài toán và giải đồng thời các hệ phương trình nầy, thì mới tìm được các ẩn của bài toán ở bước thời gian (t+1), nên ta gọi sơ đồ nầy là sơ đồ ẩn.



- **Sự ổn định của sơ đồ**

Đối với sơ đồ ẩn luôn luôn ổn định với mọi khoảng thời gian Δt chọn; Còn sơ đồ hiện chỉ ổn định với khi:

$\Delta t \leq \Delta t$ giới hạn.

7.5.1 Tính nhất quán của lược đồ sai phân.

Xét phương trình vi phân: $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (1)

Thay các tỉ vi phân bằng các tỉ sai phân:

$\frac{\partial z}{\partial t} \approx \frac{z_j^{n+1} - z_j^n}{\Delta t}$; $\frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{\Delta x}$: Thế vào 1 và đặt r $= \frac{\Delta t}{\Delta x}$

Suy ra: $z_j^{n+1} = (1-r)z_j^n + r.z_{j-1}^n$ (2)

Phương trình (còn gọi là lược đồ) (2) nhận được từ khai triển Taylor của (1) hoặc bằng một lược đồ khác, ta thử xem lược đồ (2) có nhất quán với phương trình vi phân (1) hay không ?

Từ khai triển Taylor ta được:

$$z_j^{n+1} = z_j^n + \frac{\partial z}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 z}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + ...$$

$$z_{j-1}^n = z_j^n + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{(-\Delta x)}{1!} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\frac{\Delta x^3}{3!} + ...$$

Đặt $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

Thay tất cả vào (2), ta được:

$$z_j^n + \frac{\partial z}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 z}{\partial t^3}\frac{\Delta t^3}{3!} + ... = (1-r)z_j^n + r(z_j^n + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + ...(3)$$

Nhân 2 vế của (3) với $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ rồi chuyển vế, rồi nhân tiếp 2 vế với $\frac{1}{\Delta t}$ ta được:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\Delta t}{2!} - ......+ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2!} - ... \quad (4)$$

Khi $\Delta x, \Delta t \to 0$, vế phải của (4) $\to 0$, do đó ta thấy phương trình (4) $\equiv$(1)

Ta nói lược đồ (2) nhất quán với phương trình vi phân.

7.5.2 Sự ổn định của lược đồ.

Xét phương trình sai phân (còn gọi là lược đồ):

$$z_j^{n+1} = (1-r)z_j^n + rz_j^{n-1} \quad (5)$$

Ta nói: ***"Một lược đồ sai phân được gọi là ổn định, nếu tập hợp vô hạn các nghiệm tính được là bị chặn đều, ngược lại gọi là không ổn định".***

Như vậy sự ổn định của lược đồ sai phân không liên quan đến phương trình vi phân (chỉ là riêng của lược đồ).

Ví dụ: Lược đồ (5) có dạng: $z_j^{n+1} = Az_j^n + Bz_{j-1}^n$

Suy ra: $\left|z_j^{n+1}\right| = \left|Az_j^n + Bz_{j-1}^n\right|$

Gọi: $z^n = \max_j z_j^n$, trong tập j

Vậy thì: $\left|z_j^{n+1}\right| \le A\left|z^n\right| + B\left|z^n\right| = (A+B).\left|z^n\right| = \left|z_j^n\right|$

Tức là lớp: $\left|z_j^n\right| \le \left|z_j^{n-1}\right|, \ldots \Rightarrow \left|z_j^1\right| \le \left|z_0\right|$ mà z_0 đã cho trước ở biên.

Vậy các z^n bị chặn đều $\rightarrow$ Ta nói lược đồ ổn định.

Định lý Courant:

"Nếu lược đồ sai phân nhất quán với phương trình vi phân và bản thân lược đồ đó là ổn định thì nghiệm của phương trình sai phân sẽ hội tụ đến nghiệm của phương trình vi phân''.

7.5.3 Các ứng dụng trong cơ học:

Phương trình vi phân dạng ellip: Ta sẽ gặp các phương trình này trong các bài toán truyền nhiệt hoặc các bài toán thẩm thấu của cơ học chất lỏng với phương trình Poisson.

Một dạng khác của phương trình vi phân đạo hàm riêng dạng hyperbol; Ta có thể gặp chúng trong các phương trình dao động của dây u=u(x,t) với x là tọa độ và t là thời gian.

Ta còn có thể gặp các phương trình vi phân đạo hàm riêng ở dạng phức tạp hơn như phương trình trong động lực học chất lưu: Phương trình Navier-stocks, hay phương trình dao động uốn của tấm hay dầm trên nền đàn hồi trong các bài toán sức bền vật liêu

Ví dụ:

Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng dạng Elliptic.

Cho phương trình vi phân đạo hàm riêng $u''_{xx} + u''_{yy} = xy^2$ trên hình chữ nhật D=$[0;0,6]x[0;0,3]$ biết giá trị của hàm u(x, y) trên biên là u(x,y)=x+3y với bước chia Δx=h=0,2; Δy=τ=0,1.

Giải:

Ta có h=0,2 suy ra n=(0,6-0)/h=3; x_i=ih=0,2i

τ=0,1 suy ra m=(0,3-0)/τ=3

Cho các điểm (0,j); (i,0); (3,j), (i,3) là các điểm lưới. Giá trị của hàm trên các điểm lưới là

u_{00}=0; u_{01}=0,3; u_{02}=0,6; $u_{0,3}$=0,9; u_{10}=0,2; u_{20}=0,4; u_{30}=0,6; u_{31}=0,9; u_{32}=1,2; u_{33}=1,5; u_{10}=1,1; u_{20}=1,3.

Ta cần tính giá trị của hàm u tại 4 điểm là (1;1), (1;2), (2;1), (2;2). Hàm f(x,y)=xy^2 nên f_{11} = 0,002; f_{12}=0,008; f_{21}=0,004; f_{22}=0,016. Ta có hệ 4 phương trình đại số tuyến tính là:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{21} - 2u_{11} + u_{01}}{0,2^2} + \dfrac{u_{12} - 2u_{11} + u_{10}}{0,1^2} = 0,002 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10u_{11}+4u_{12}+\ \ u_{21} \qquad\qquad = -1{,}099992 \\ 4u_{11}\quad -10u_{12}+ \qquad u_{22} = -4{,}99968 \\ u_{11} \qquad\qquad -10u_{21}+4u_{22} = -2{,}499984 \\ \qquad u_{12}+4u_{21}-10u_{22} = -6{,}399936 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được

U_{11}=0,499964132; u_{12}=0,79994444; u_{21}=0,699994356; u_{22}=0,999907868.

7.6 PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Với phương pháp biến phân người ta tìm lời giải xấp xỉ trên toàn miền bài toán; do đó hàm xấp xỉ trên toàn miền bài toán thường là rất khó xây dựng; phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH-The finite element method) khắc phục nhược điểm nầy là chia miền bài toán thành nhiều miền con và tìm hàm xấp xỉ trên miền con, còn gọi là phần tử (element) với thỏa mãn điều kiện cân bằng và liên tục giữa các phần tử. Trong phương pháp PTHH thường dựa trên các phương pháp biến phân **RAYLEIGH – RITZ và GALERKIN.**

7.6.1 PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN RAYLEIGH - RITZ

Bài toán [phương trình đạo hàm riêng] ≈ Bài toán [biến phân]

$$\phi(x,y,F_x,F_y)=0 \approx I(F)=\iint_D \phi(x,y,F_x,F_y)dxdy \qquad (14)$$

với cực tiểu phiếm hàm ϕ và thoả mãn điều kiện trên biên $F = G(s)$.

Giả sử ta có F(x,y) → đi tìm I(F) cực trị, ta biểu diễn hàm F(x,y) như sau:

$$F(x,y) \cong F^x{}_n(x,y) = C_1.\varphi_1(x,,y) + C_2.\varphi_2(x,,y) + \ldots + C_n.\varphi_n(x,,y) = \sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x,y)$$

Các C_i phải xác định sao cho $I(F_n)$ đạt cực trị.

Hàm φ_i (x,y) được chọn trước sao cho thỏa điều kiện biên. Như vậy:

$$I^*(F)=\iint_D \phi^*(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)dxdy=\min \qquad (15)$$

Các hệ số C_i được xác định từ $\dfrac{\partial\phi}{\partial c_i}=0$, i = 1, 2, 3, . . . , n.

7.6.2 PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN GALERKIN

Nếu hàm ϕ không tồn tại phiếm hàm, người ta sử dụng phương pháp biến phân Galerkin như sau:

Cho phương trình: $L(u)=M \Leftrightarrow f_D(u,x_i)=0$ (16)

Cần tìm nghiệm gần đúng: $\hat{U}=\sum_{P=1}^{n}\overline{N_P}.\overline{U_P}$ trong miền D

với $\overline{U_P}(P=1,2,\ldots,n)$ là các hằng số phải xác định

$\overline{N_P}(P=1,2,\ldots,n)$ là các hàm tọa độ tự chọn.

Ta có: $$L(\hat{U}) - M = f_D(\hat{U}, x_i) = R, \qquad R\big|_{n\to\infty} = 0 \tag{17}$$

Có nghĩa phần dư R sẽ triệt tiêu khi n tiến tới vô cùng.

Đặt điều kiện $L(\hat{U}) - M$ phải trực giao với ψ_i trong miền xác định D với ψ_j (j = 1, 2, . . . , n) là các hàm tọa độ tự chọn độc lập tuyến tính.
Như vậy ta có:

$$\int_D \left[L(\hat{U}) - M \right] \Psi_j dD = 0 \qquad \text{hay:} \qquad \int_D \left[L\left(\sum_{P=1}^{n} \overline{N_P}.\overline{U_P} \right) - M \right] \Psi_j dD = 0$$

trong trường hợp $\overline{U}_p$ là hằng số, và $\Psi_j \equiv \overline{N}_p$, ta được phương pháp GALERKIN.
Tóm lại, phương pháp Galerkin được thiết lập có dạng:

$$\int_D \left[L\left(\sum_{P=1}^{n} \overline{N_p}.\overline{U_P} \right) - M \right] \overline{N}_p dD = 0 \quad hay \quad \int_D \overline{N}_p.R.d\text{D} = 0, \quad \text{với } p=1,2,\ldots,n \tag{18}$$

7.6.3 PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chia miền D thành n_e (hữu hạn) miền con D_e :

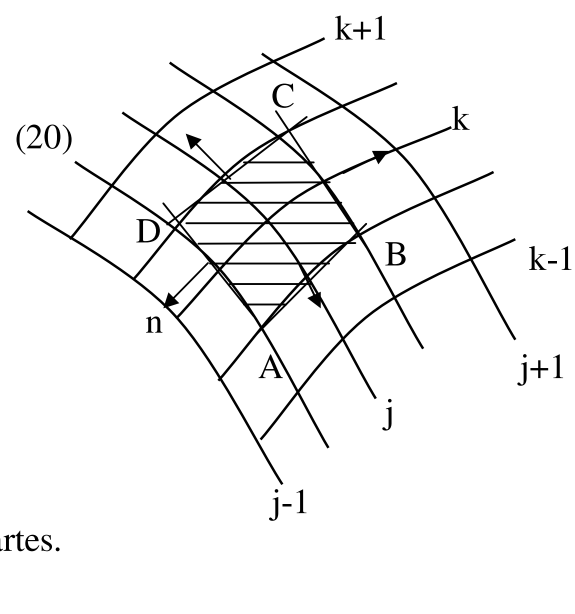
$$\text{D} = \sum_{e=1}^{ne} \text{D}_e, \quad \text{chọn hàm: } \overline{\text{N}_\text{P}} = \sum_{e=1}^{ne} \text{N}_\text{P}^\text{e} \tag{19}$$

Với $\text{N}_\text{P}^\text{e}$ gọi là hàm tọa độ được chọn trong miền con D_e sao cho thoả mãn một số tính chất nào đó (xem chương 8), ta có được Phương pháp phần tử hữu hạn.

7.7 PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH HỮU HẠN

Xét phương trình vi phân:

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{G}}{\partial y} = 0 \tag{20}$$



Áp dụng phương pháp miền con cho thể tích ABCD, ta có:

$$\int_{ABCD} 1.\left(\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{G}}{\partial y} \right) dxdy = 0 \tag{21}$$

Áp dụng định lý Green ta có:

$$\frac{d}{dt}\int \overline{q}dv + \int_{ABCD} H.n.dS = 0 \tag{22}$$

Ở đây H = $\left(\overline{\text{F}}, \overline{\text{G}}\right)$ cho trong tọa độ Descartes.

H.n.dS = $\overline{F}dy - \overline{G}dx$

Vì phương trình (22) dạng bảo toàn với thể tích tùy ý, nên ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{A}.q_{j,k}\right)+\sum_{AB}^{DA}\left(F.\Delta y-G\Delta x\right)=0 \qquad (23)$$

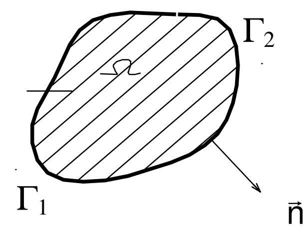
Ở đây, $\overline{A}$ là diện tích của (ABCD), $\Delta y_{AB} = y_B - y_A$, $\Delta x_{AB} = x_B - x_A$, nên:

$$F_{AB} = \frac{1}{2}\left(F_{j,k-1}+F_{j,k}\right),\quad G_{AB} = \frac{1}{2}\left(G_{j,k-1}+G_{j,k}\right)$$

Tương tự cho Δy_{BC}, Δy_{CD}, Δy_{DA}, . . .

Nếu $\overline{A}$ không phụ thuộc thời gian t và $\Delta x_i = \Delta y_i =$ const, ta được:

$$\frac{d}{dt}q_{j,k}+\frac{F_{j+1,k}-F_{j-1,k}}{2\Delta x}+\frac{G_{j,k+1}-G_{j,k-1}}{2\Delta y}$$



7.8 Phương pháp phần tử biên

Xét ví dụ bài toán mô tả dòng chảy thế hai chiều (2 Dimensions) $\nabla^2\phi = 0$ trong miền Ω ta có:

+ Điều kiện biên chủ yếu: $\phi = \bar{\phi}$ trên biên Γ_1 (đk biên Dirichlet)

+ Điều kiện biên tự nhiên: $q = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial n} = \bar{q}$ trên biên Γ_2 (điều kiện biên Neumann)

Với $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

- **Dạng biến phân trọng số dư**

Định nghĩa:

Gọi các phần dư:

$R = \nabla^2\tilde{\phi}$

$R_1 = \phi - \bar{\phi}$

$R_2 = q - \bar{q}$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} R.\tilde{\phi}.d\Omega = -\int_{\Gamma_1} R_1.\tilde{q}.d\Gamma + \int_{\Gamma_2} R_2\,\tilde{\phi}.d\Gamma$$

Dùng tích phân từng phần hai lần liên tiếp, ta có:

$$\int_{\Omega}(\nabla^2\tilde{\phi})\phi.d\Omega = -\int_{\Gamma_2}\bar{q}.\tilde{\phi}.d\Gamma - \int_{\Gamma_2} q.\tilde{\phi}.d\Gamma + \int_{\Gamma_2}\tilde{q}.\phi.d\Gamma + \int_{\Gamma_1}\tilde{q}.\bar{\phi}.d\Gamma$$

Ta có lời giải cơ bản cho phương trình Poisson: $\nabla^2\tilde{\phi} + \delta(x-\bar{x}) = 0$

Với δ là hàm Dirac.

Lời giải cho bài toán 2D, khi $x \neq \bar{x}$ là: $\tilde{\phi} = \frac{1}{2\prod}.\ln(\frac{1}{r})$, với $r = \sqrt{x^2+y^2}$

Với những điểm $\bar{x}$ nằm bên trong Ω, cách thành lập theo phương phá phần tử biên cho bài toán biểu diễn bởi phương trình Laplace là: $\phi(\bar{x}) + \int_{\Gamma}\phi.\tilde{q}.d\Gamma = \int_{\Gamma}\tilde{\phi}\,q.d\Gamma$

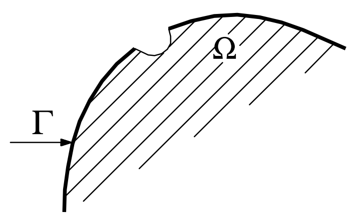
Với những điểm $\bar{x}$ nằm trên biên Γ, phương trình viết cho bài tóan trở thành:

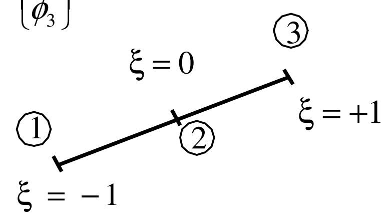
$$c.\phi(\bar{x}) + \oint_{\Gamma} \phi.\tilde{q}.d\Gamma = \oint_{\Gamma} \tilde{\phi}.q.d\Gamma \quad \text{với} \quad c=\frac{\alpha}{2.\Pi} \quad \text{(thông thường c=1/2)}$$

Ta đi rời rạc hóa biên Γ của miền D; dùng phần tử bậc 2 ta được:

$$(c.\phi)_i + \sum_{j=1}^{n} \oint_{\Gamma j} \phi.\tilde{q}.d\Gamma = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\Gamma j} \tilde{\phi}.q.d\Gamma$$

Hàm dạng ϕ được biểu diễn: $\phi(\xi) = [N_1 \ N_2 \ \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = [N]\{\phi\}$, q(ξ)=[N]. $\{q\}$





$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \quad N_2(\xi) = (1-\xi)(1+\xi), \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \quad \text{với } \xi \in [-1,1]$$

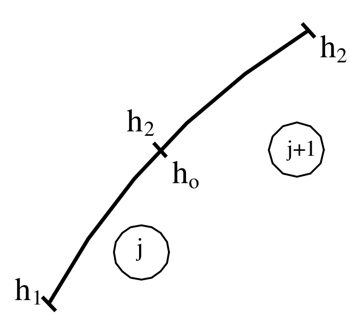
Thiết lập cho một phần tử trên biên, ta có:

$$\oint_{\Gamma_j} \phi.\tilde{q}.d\Gamma = \oint_{\Gamma_j} [N_1 \, N_2 \, N_3].\tilde{q}.\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}.d\Gamma = [h_1 \, h_2 \, h_3].\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\oint_{\Gamma_j} \tilde{\phi}.q.d\Gamma = \oint_{\Gamma_j} [N_1 \, N_2 \, N_3]\tilde{\phi}.\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}.d\Gamma = [g_1 \, g_2 \, g_3].\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

Ở đây: $h_k = \oint_{\Gamma_j} N_k \, \tilde{q} \, d\Gamma$ và $g_k = \oint_{\Gamma_j} N_k \, \tilde{\phi} \, d\Gamma$, $\forall k = 1,2,3$

Chú ý: Ta có Jacobicon biến đổi toạ độ như sau:



$$d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}, \quad d\xi = |G|.d\xi$$

$$h_k = \oint_{\Gamma_j} N_k(\xi).\tilde{q}\,d\Gamma = \int_{-1}^{1} N_K(\xi)\,\tilde{q}.|G|d\xi$$

$$g_k = \oint_{\Gamma_j} N_k(\xi).\tilde{\phi}\,d\Gamma = \int_{-1}^{1} N_K(\xi)\tilde{\phi}.|G|d\xi$$

Cuối cùng thế vào phương trình đã rời rạc hoá, ta có:

$$(c\phi)_i + \hat{H}_{i1} \;\; \hat{H}_{i2} \; .....\hat{H}_{in}] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ ... \\ \phi_n \end{Bmatrix} = [G_{i1} \;\; G_{i2} \; ....G_{i2N}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_{2N} \end{Bmatrix}$$

Với $\hat{\mathrm{H}}_{\mathrm{ij}}$ là tổng của số hạng h_1 của phần tử j+1 và h_2 của phần tử j.
Nếu đặt:

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}\,, & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + c, & i = j \end{cases}$$ thì ta viết lại: $$\sum_{i=1}^{N} H_{ij}.\phi_j = \sum_{j=1}^{2N} G_{ij}.q_j$$

Hay ta có hệ phương trình: **H.U = G.q**

Giải hệ phương trình nầy ta sẽ tìm được các ẩn của bài toán trên biên, từ đó ta sẽ tìm được các ẩn trong miền D tại những nơi cần thiết.

Câu hỏi:

1. Trình bày ý nghĩa vật lý của các phương trình loại Hyperbol, Parabol, Ellip ? Trong thực tế có những phương trình lưỡng tính, nhất là trong cơ học lưu chất; hãy cho vài ví dụ và giải thích ?
2. Từ sự mô tả bản chất vật lý của bài toán của mỗi loại phương trình mô tả, nên số và loại điều kiện biên phải đáp ứng, hãy cho mỗi loại phương trình vài ví dụ ?
3. Phương pháp đặc trưng đóng một vai trò quan trọng trong việc hiểu rõ bản chất vật lý của bài toán, vì sao ?
4. Phương pháp sai phân là phương pháp không bảo toàn, vì sao ?
5. Nêu các điều kiện để sơ đồ sai phân được chấp nhận ?
6. Ưu nhược điểm của sai phân hiện và sai phân ẩn ?
7. Hãy nêu sự giống nhau và khác nhau của các phương pháp Sai phân, Phần tử hữu hạn, Thể tích hữu hạn, Phần tử biên; ưu nhược điểm của chúng ?

Bài tập :

Bài 11:

Bằng phương pháp sai phân giải các phương trình sau

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < 2, \;\; u(x,0) = x^2 - 2x \\ u(0,t) = -u(2,t) = \sin \pi t, \; \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = (1 + 0{,}1.k.\pi).(2 - x) \end{cases}$$

bước chia theo x là **h = 0,5**; theo t là **k= 0,01**.Tính **u(** x **; 0,03)**

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = (4 + 0{,}1.k)(1 - x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

bước chia theo x là **h = 0,25**; theo t là **k= 0,025**.Tính **u(** x **; 0,1)**

3) $$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -1 + 0{,}1.k \\ (x, y) \in G = [0,1] \times [0,1] \\ u(x, y) = 0, \forall (x, y) \end{cases}$$

Thuộc biên của G **h = k = 0,25**

4) Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng dạng PARAPOLIC phương trình $u'_t = u''_{xx}$ trên hình chữ nhật [0;2]x[0;0,3] với điều kiện biên u(0,t)=u(2,t)=0, u(x,0)=x(2-x); bước chia theo t là τ=0,1

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB ĐHQG, Hà Nội 1996
2. Phan Văn Hạp, Các phương pháp giải gần đúng, NXB ĐH-THCN, Hà Nội 1981.
3. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
4. Nguyễn Thế Hùng, Phương pháp phần tử hữu hạn trong chất lỏng, NXB Xây Dựng, Hà Nội 2004.
5. BURDEN, RL, & FAIRES, JD, Numerical Analysis, 5th ed., PWS Publishing, Boston 1993.
6. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
7. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
8. HOFFMAN, J., Numerical Methods for Engineers scientists, McGrawHill, Newyork 1992.
9. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
10. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ebookee.com.cn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu

The end

Chương 8 PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

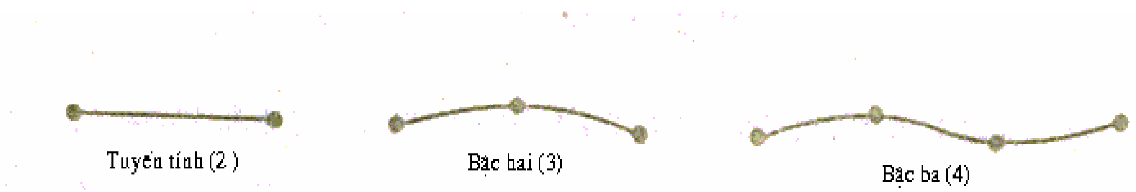
Như đã phân tích ở chương hai, một bài toán có miền hình học phức tạp, có thể xem như là tập hợp của nhiều dạng hình học đơn giản (gọi là miền con hay phần tử –element); để việc xây dựng hàm xấp xỉ (hay còn gọi là hàm nội suy- interpolation function) trên miền con nầy được dễ dàng, hàm xấp xỉ được xây dựng một cách hệ thống cho hầu hết dạng hình học, hàm xấp xỉ nầy chỉ phụ thuộc vào phương trình vi phân, từ đó hình thành phương pháp phần tử hữu hạn.

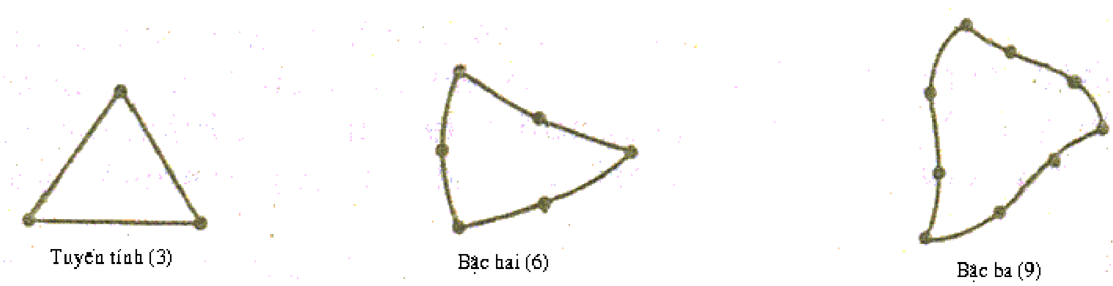
Với phương pháp phần tử hữu hạn, miền tính toán được xem như là tập hợp nhiều miền con hữu hạn (finite element) có dạng hình học đơn giản (simple shape-element). Trên mỗi miền con nầy, phương trình chỉ đạo (governing equation) được thiết lập với sử dụng một phương pháp biến phân nào đó. Các phần tử được liên kết với nhau và phải thoả mãn điều kiện cân bằng và liên tục của các biến phụ thuộc qua biên của các phần tử.

8.1 Các loại phần tử

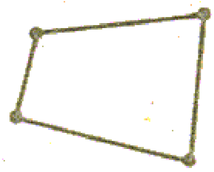
Miền tính toán được chia thành nhiều miền con (còn gọi là phần tử); nếu miền tính toán là một chiều, ta có phần tử một chiều, miền tính toán là hai chiều ta có phần tử hai chiều, miền tính toán là ba chiều ta có phần tử ba chiều.

Các loại phần tử một chiều



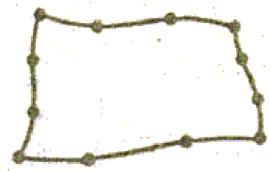


Các loại phần tử hai chiều



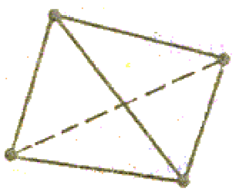
Tuyến tính (4)

Bậc hai (8)

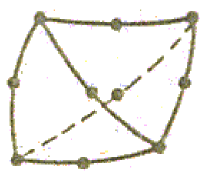


Bậc ba (12)

Các loại phần tử ba chiều

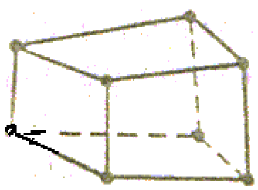


Tuyến tính (4)

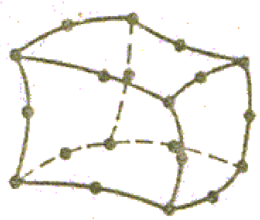


Bậc hai (10)

Bậc ba (16)

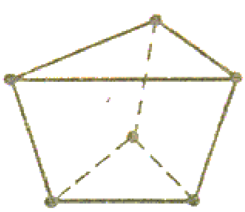


Tuyến tính (8)

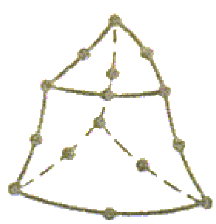


Bậc hai (20)

Bậc ba (32)



Tuyến tính (6)



Bậc hai (16)

Bậc ba (24)

8.2 Hàm nội suy

Lời giải xấp xỉ của ẩn số bài toán được cho bởi:

$$h = \sum_{j=1}^{n} h_j \, . N_j \qquad (3.1)$$

Ở đây N_j là *hàm nội suy* (interpolation functions) và h_j là ẩn của bài toán tại nút của phần tử.

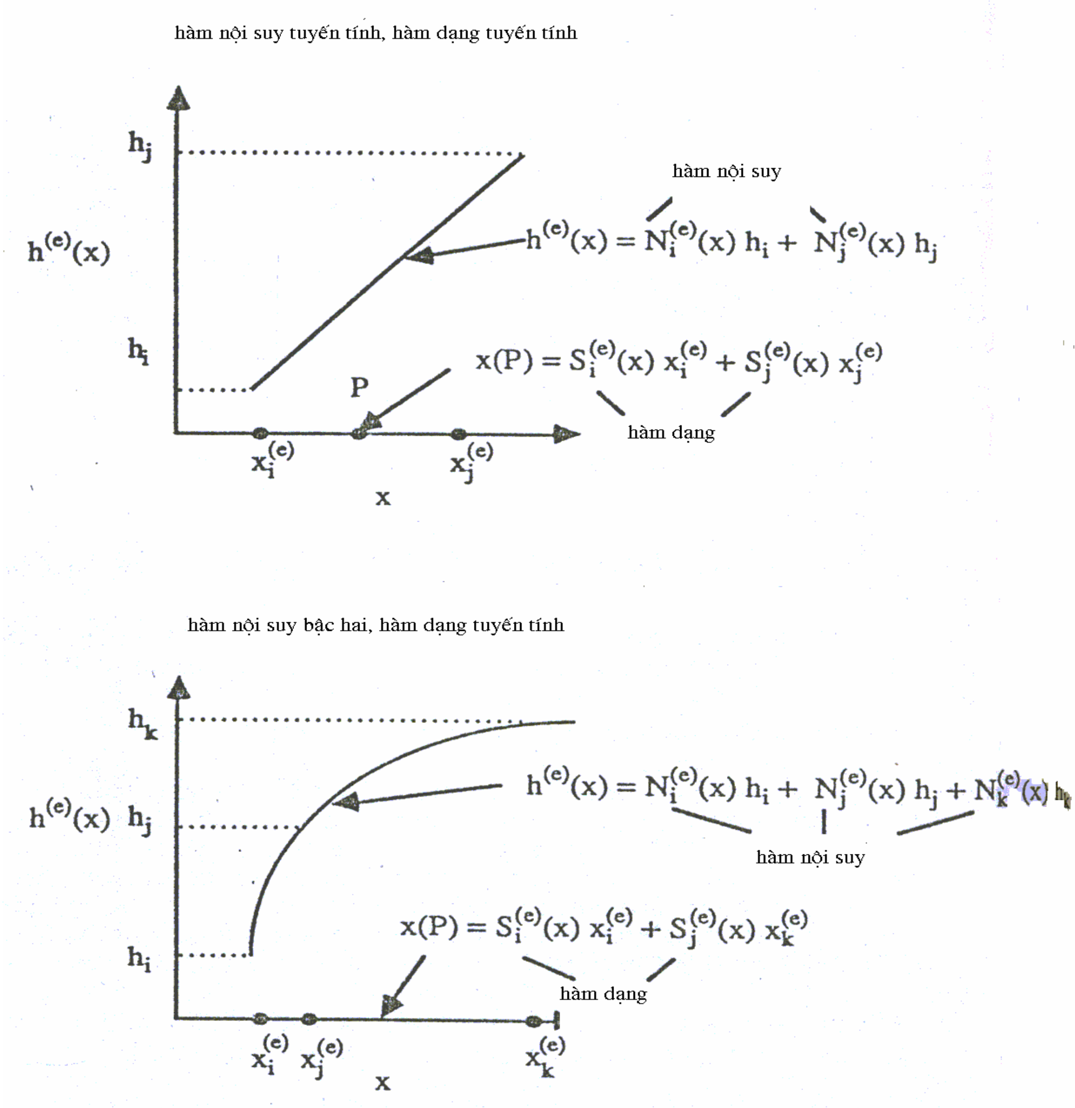
Ta cũng có thể mô tả hình dạng của phần tử bằng cách dùng các toạ độ của mỗi nút trong phần tử (xem Hình 3.1):

$$x(p) = \sum_{j=1}^{n} S_j(p).x_j \qquad (3.2a)$$

$$y(p) = \sum_{j=1}^{n} S_j(p).y_j \qquad (3.2b)$$

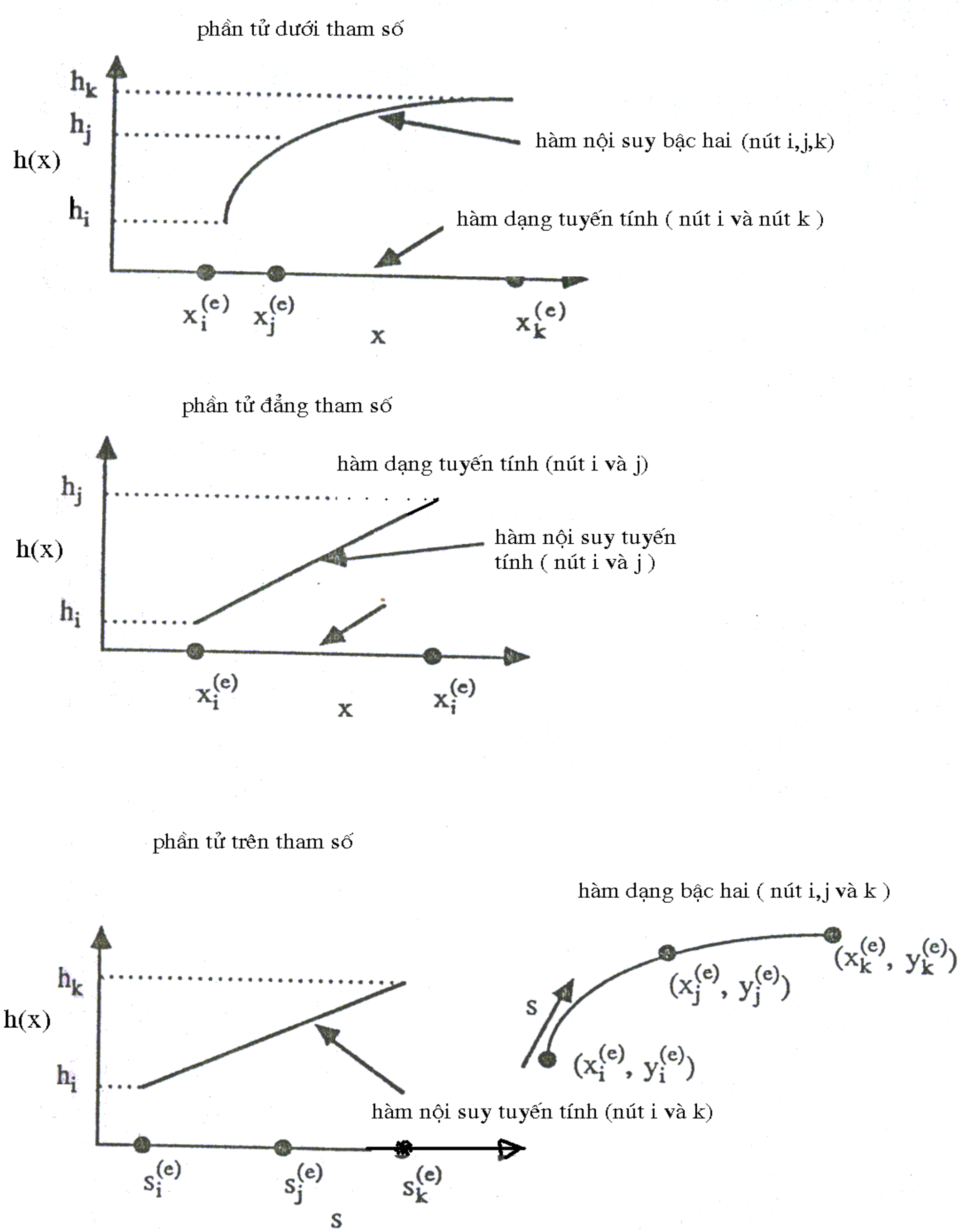
$$z(p) = \sum_{j=1}^{n} S_j(p).z_j \qquad (3.2c)$$

Vì rằng hàm nội suy S_j được dùng xác định hình dạng của phần tử, nên thường được gọi là *hàm dạng* (shape functions).



Hình 3.1: Hàm nội suy và hàm dạng của phần tử một chiều

Bậc của đa thức dùng để nội suy và các hàm dạng bên trong phần tử có thể là khác nhau; người ta phân ra ba loại như sau: Phần tử dưới tham số (subparametric elements) khi bậc đa thức hàm dạng nhỏ hơn bậc đa thức nội suy. Phần tử đẳng tham số (isoparametric elements) khi bậc đa thức hàm dạng bằng bậc đa thức nội suy. Phần tử trên tham số (superparametric elements) khi bậc đa thức hàm dạng lớn hơn bậc đa thức nội suy (xem Hình 3.2).



Đa số các bài toán trong thực tế dùng phần tử đẳng tham số và hàm dạng đồng nhất với hàm nội suy.Hình 3.2: Minh hoạ về định nghĩa các loại phần tử một chiều dưới tham số, đẳng tham số, và trên tham số

Khi tại các nút chỉ chứa ẩn số h của bài toán, thường xử dụng hàm nội suy Lagrange (phần lớn các hàm nội suy trong các bài toán chất lỏng được xử dụng bởi nội suy Lagrange, do đó ở đây chỉ giới thiệu nội suy Lagrange); nếu tại các nút còn có ẩn số là đạo hàm $\partial h / \partial x_i$ thường xử dụng hàm nội suy Hermite.

Hàm nội suy Lagrange được xây dựng từ đa thức như sau:

$$N_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ k \neq m}} \frac{x - x_m}{x_k - x_m} \qquad (3.3)$$

Với m là số nút

x_m là toạ độ nút thứ m

Tính chất của hàm nội suy

Hàm nội suy có các tính chất sau:

- Tính chất 1: Hàm nội suy có giá trị bằng 1 tại nút đó và bằng 0 tại các nút khác.
- Tính chất 2: Các hàm nội suy thoả biểu thức sau:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi).P_j(\xi_i) = P_j(\xi), j = 1,2,\dots n \qquad (3.4)$$

Với $P_j(\xi_i)$ là đa thức cơ sở của hàm nội suy.

Hàm nội suy có thể được xây dựng trong hệ toạ độ tổng thể (global coordinates) hoặc hệ toạ độ địa phương (local coordinates), thông thường với các bài toán phức tạp (nội suy bậc cao ở các bài toán hai hoặc ba chiều) phải sử dụng hàm nội suy trong toạ độ địa phương.

8.2.1 Hàm nội suy cho bài toán một chiều

(i) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ tổng thể:

$$N = [N_1 \quad N_2] \qquad (3.5)$$

Với $N_1 = \frac{x_B - x}{x_{B-}x_A}$, $N_2 = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$

(ii) Nội suy dạng Lagrange bậc hai trong hệ toạ độ tổng thể:

$$N \equiv [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \tag{3.6}$$

trong đó $\qquad N_i(x) = \dfrac{1}{D^e}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e x\right) \qquad$ với $\quad$ i = 1 , 2 , 3

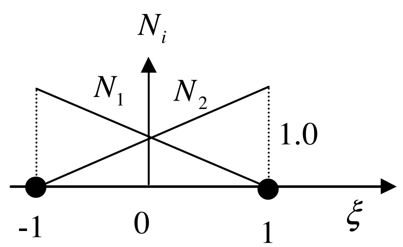
$$\alpha_i^e = x_i^e\left(x_k^e\right)^2 - x_k^e\left(x_j^e\right)^2$$

Trong đó : $\quad \beta_i^e = \left(x_j^e\right)^2 - \left(x_k^e\right)^2$

$$\gamma_i^e = -\left(x_j^e - x_k^e\right), \qquad D^e = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^e$$

(iii) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ địa phương

$$N \equiv [N_1 \quad N_2] \tag{3.7a}$$

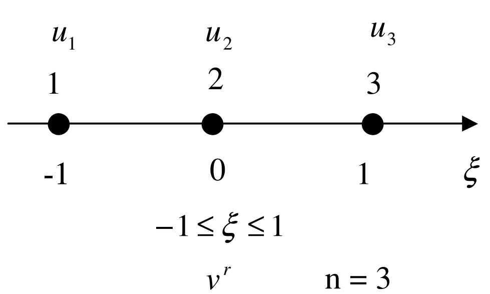


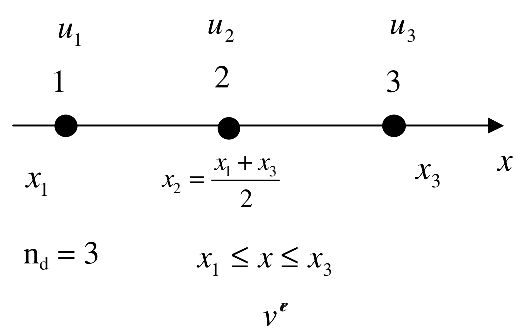
với:

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2 = \dfrac{1}{2}(1+\xi) \end{cases} \tag{3.7b}$$

(iv) Nội suy bậc hai dạng Lagrange trong hệ toạ độ địa phương:

$$N \equiv [N_1 \quad N_2 \quad N_3]$$

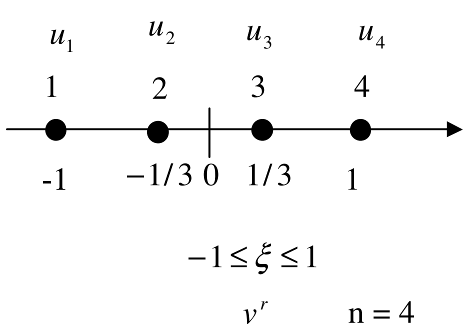


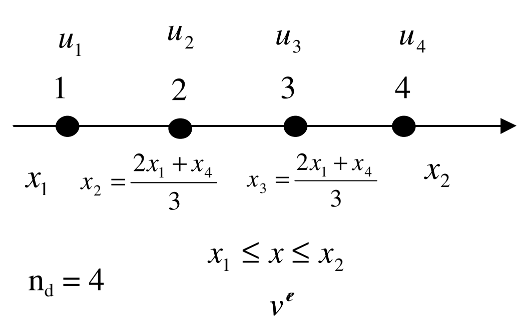


$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \quad N_2 = (1+\xi)(1-\xi), \quad N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \tag{3.7c}$$

(v) Nội suy bậc ba dạng Lagrange trong hệ toạ độ địa phương:

$$N \equiv [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$





$$\begin{cases} N_1 = -\dfrac{9}{16}(1-\xi)\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right) \\ N_2 = \dfrac{27}{16}(1+\xi)(1-\xi)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right) \\ N_3 = \dfrac{27}{16}(1+\xi)(1-\xi)\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right) \\ N_4 = -\dfrac{9}{16}\left(\dfrac{1}{3}+\xi\right)\left(\dfrac{1}{3}-\xi\right)(1+\xi) \end{cases} \qquad (3.7d)$$

8.2.2 Hàm nội suy cho bài toán hai chiều

(i) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ tổng thể cho phần tử tam giác:

$$N \equiv [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \qquad (3.8)$$

ở đây: $$N_1 = \frac{1}{2A}\left(\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y\right) \qquad (3.8a)$$

với: i = 1 , 2, 3 hoán vị vòng tròn

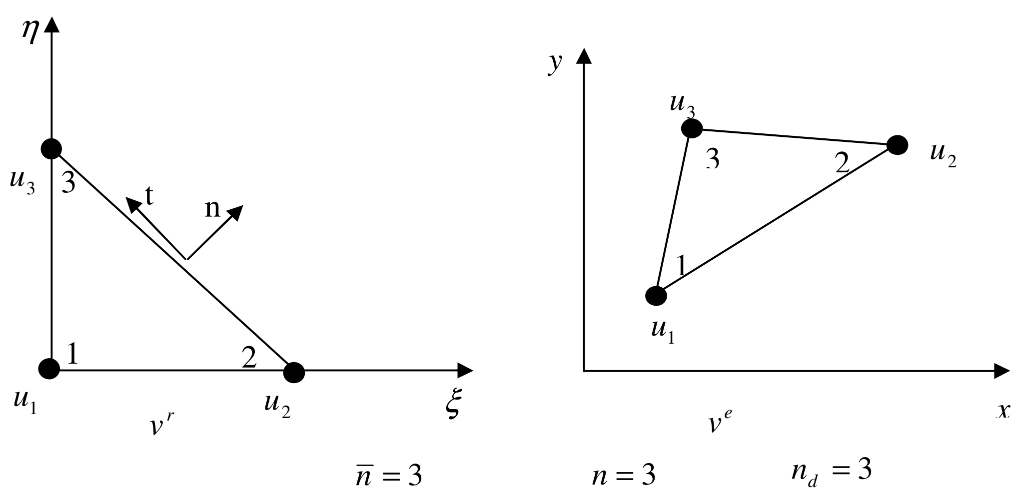
$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_j - y_k$$

$$\gamma_i = -(x_j - x_k)$$

(ii) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử tam giác:

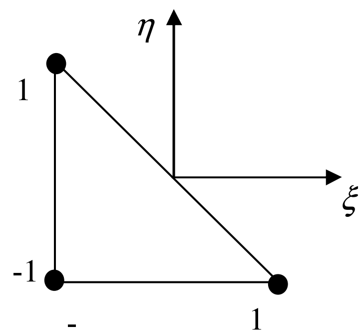
$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \ ] \qquad (3.8b)$$



với:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta$$

Nếu điểm gốc toạ độ địa phương được chọn khác như hình sau, thì hàm nội suy cho phần tử tam giác cũng sẽ thay đổi theo:

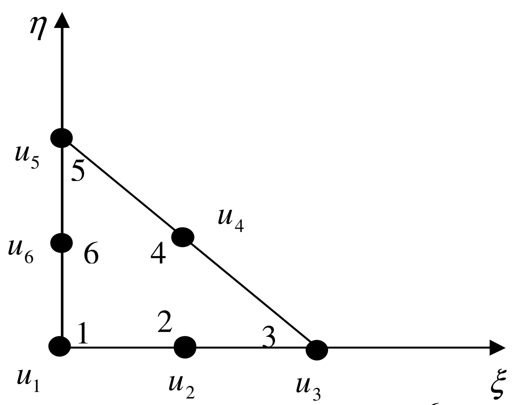


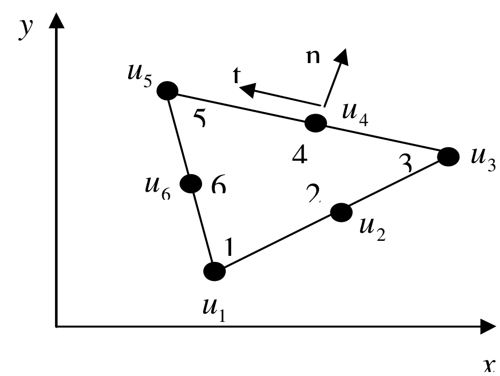
$$N_1 = -\frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \qquad (3.8b')$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

(iii) Nội suy bậc hai trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử tam giác:





$n = 6$ $\qquad n_d = 6$

$$N_1 = \lambda(1 - 2\lambda), \qquad N_4 = 4\xi\lambda$$

$$N_2 = 4\xi\lambda, \qquad N_5 = -\eta(1 - 2\eta)$$

$$N_3 = -\xi(1 - 2\xi), \qquad N_6 = 4\eta\lambda$$

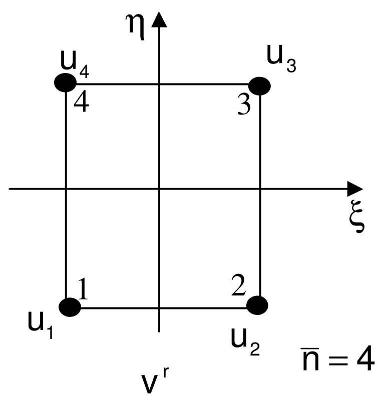
(3.8c) Với: $\lambda = 1 - \xi - \eta$

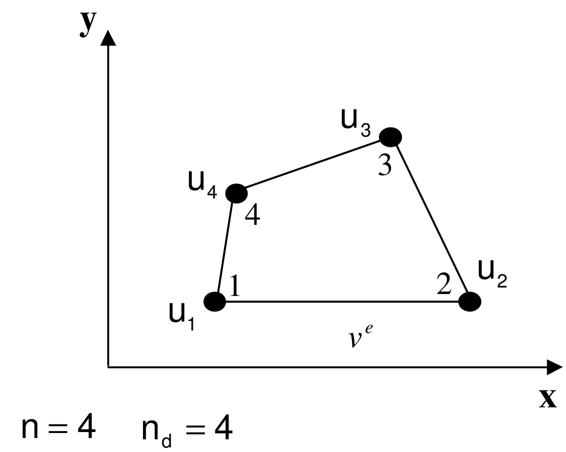
(iv) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử tứ giác:

Hàm dạng: $N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$ (3.8d)

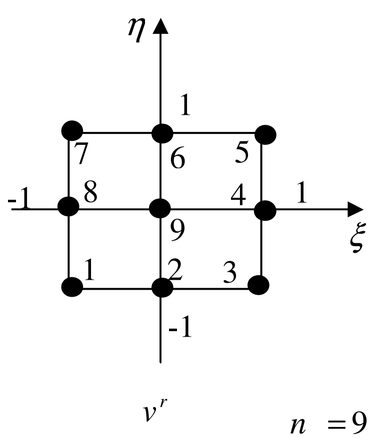
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

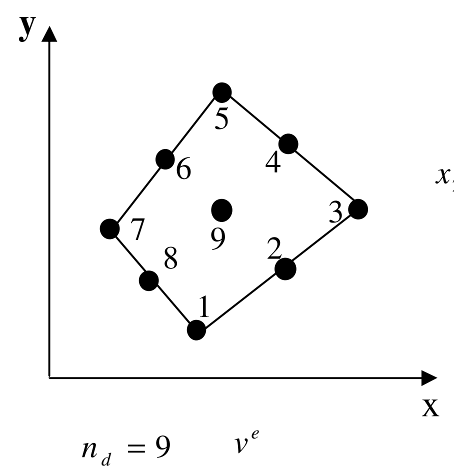
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$





(v) Nội suy bậc hai trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử tứ giác:





$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$$

etc

$$\psi_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1), \quad \psi_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)\ , \ \psi_4 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\xi+1)$$

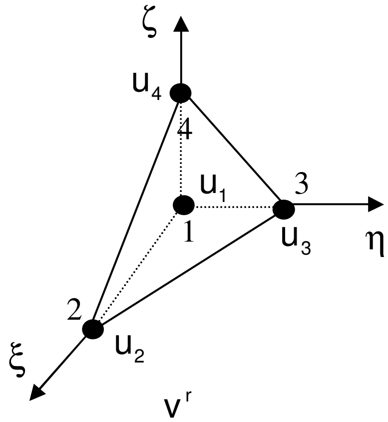
$$\psi_5 = \frac{1}{2}\eta\left(1-\xi^2\right)(\eta-1)\ ,\ \psi_6 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)\left(1-\eta^2\right)$$

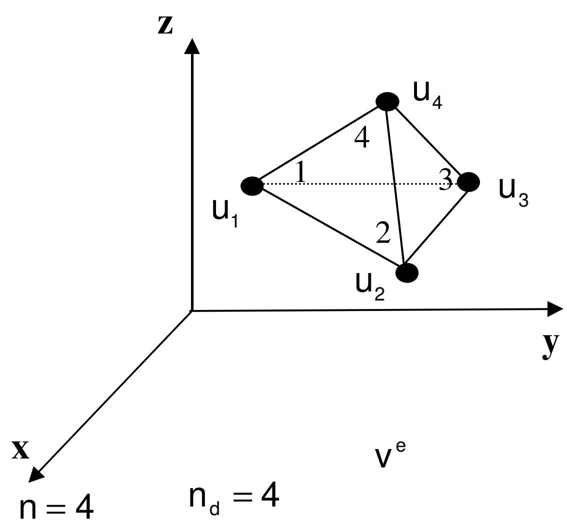
$$\psi_7 = \frac{1}{2}\eta\left(1-\xi^2\right)(\eta+1)\ ,\ \psi_8 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)\left(1-\eta^2\right)$$

$$\psi_9 = \left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta^2\right) \qquad (3.8e)$$

8.2.3 Hàm nội suy cho bài toán ba chiều

(i) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử hình chóp:

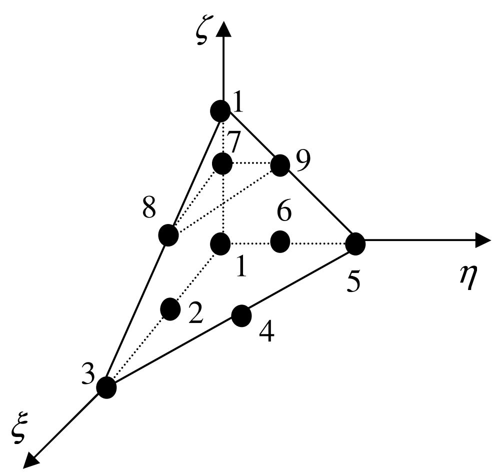




$$N_1 = 1-\xi-\eta-\zeta, \qquad N_3 = \eta$$

$$N_2 = \xi, \qquad N_4 = \zeta \qquad (3.9a)$$

(ii) Nội suy bậc hai trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử hình chóp:

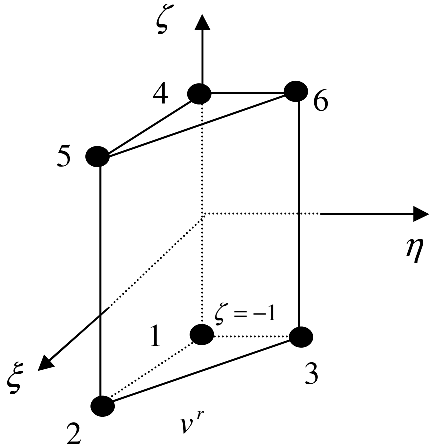


$$N_1 = -\lambda(1-2\lambda)$$
$$N_2 = 4\xi\lambda$$
$$N_3 = -\xi(1-2\xi)$$
$$N_4 = 4\xi\eta \qquad (3.9b)$$
$$N_5 = -\eta(1-2\eta)$$
$$N_6 = 4\eta\lambda$$

$$N_7 = 4\zeta\lambda, \qquad N_8 = 4\xi\zeta$$
$$N_9 = 4\eta\zeta, \qquad N_{10} = -\zeta(1-2\zeta)$$

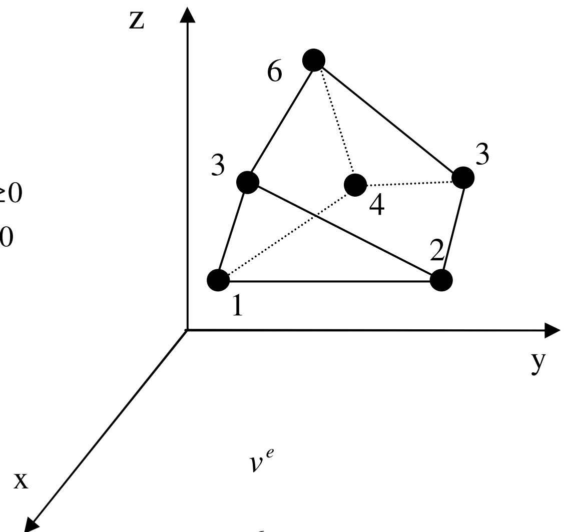
với: $\lambda = 1 - \xi - \eta - \zeta$

(iii) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử ba chiều hình trụ đáy tam giác:



$\xi \geq 0$
$\eta \geq 0$
$1-\xi-\eta \geq 0$
$-1 \leq \zeta \leq 0$

$n = 6$



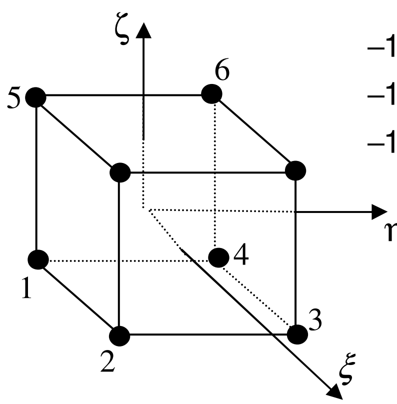
$n_d = 6$

$$N_1 = \lambda a \quad , \quad N_4 = \lambda b$$
$$N_2 = \xi a \quad , \quad N_5 = \xi b \qquad (3.9c)$$
$$N_3 = \eta a \quad , \quad N_6 = \eta b$$

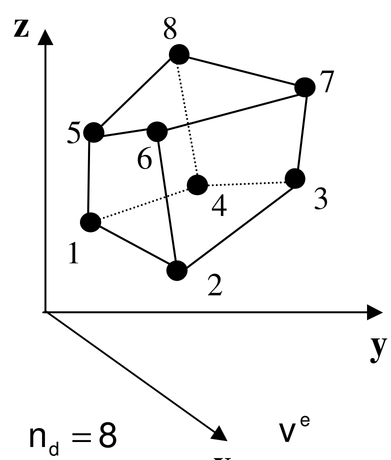
Với:

$$\lambda = 1 - \xi - \eta, \quad a = \frac{1-\zeta}{2}, \quad b = \frac{1+\zeta}{2}$$

(iv) Nội suy tuyến tính trong hệ toạ độ địa phương cho phần tử ba chiều hình trụ có đáy tứ giác:



$-1 \leq \xi \leq 1$
$-1 \leq \eta \leq 1$
$-1 \leq \zeta \leq 1$



$v^r \qquad \bar{n} = 8 \qquad n = 8 \qquad n_d = 8$

$$N_1 = \frac{1}{c}(a_2\ b_2\ c_2),\quad N_2 = \frac{1}{c}(a_1\ b_2\ c_2),\quad N_3 = \frac{1}{c}(a_1\ b_1\ c_2)$$

$$N_4 = \frac{1}{c}(a_2\ b_1\ c_1),\quad N_5 = \frac{1}{c}(a_2\ b_2\ c_1),\quad N_6 = \frac{1}{c}(a_1\ b_2\ c_1)$$

$$N_7 = \frac{1}{c}(a_1\ b_1\ c_1),\qquad N_8 = \frac{1}{c}(a_2\ b_1\ c_1) \qquad (3.9d)$$

Với :

$$a_1 = 1+\xi \ ,\ a_2 = 1-\xi$$
$$b_1 = 1+\eta \ ,\ b_2 = 1-\eta$$
$$c_1 = 1+\zeta \ ,\ c_2 = 1-\zeta$$

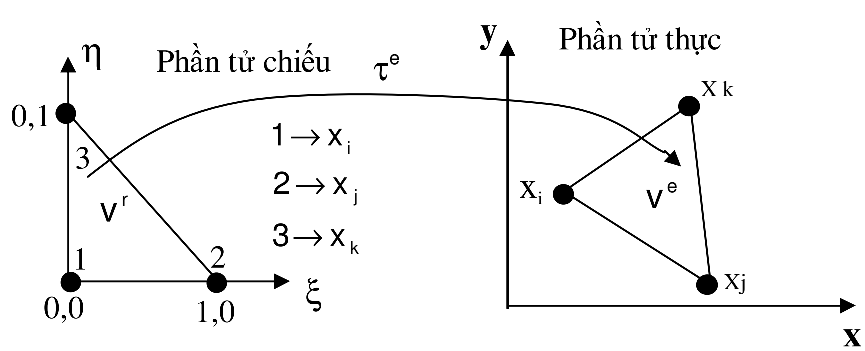
8.3 Tích phân số

8.3.1 Liên hệ giữa các hệ toạ độ tổng thể và hệ toạ độ địa phương

Với phương pháp phần tử hữu hạn miền tính toán Ω được chia nhỏ thành nhiều miền con, phương pháp biến phân trọng số xây dựng trên các miền con này. Do đó dẫn đến tích phân hàm dạng trên miền con.

Nếu tích phân hàm dạng bậc cao với sử dụng hệ toạ độ tổng thể (x,y,z, global coordinate) thì thông thường sẽ xuất hiện các biểu thức đại số rất phức tạp khi phần tử là hai, ba chiều (Irons and Ahmad, 1980).

Thay vào đó nếu chúng ta thực hiện chúng trong hệ toạ độ địa phương (ξ,η,ζ, local coordinate) hay còn gọi là toạ độ chuẩn hay toạ độ tự nhiên (normal coordinate hay natural coordinate) thì sẽ đơn giản hơn rất nhiều (Taig, 1961); bởi lẽ nó thuận lợi trong việc xây dựng hàm nội suy, tích phân số dùng được cách thiết lập của Gauss-Legendre (phổ biến nhất).



Hinh3.3: Biểu thị phần tử chiếu V^r vào phần tử thực V^e

Với phần tử đẳng tham số (isoparametric), ta có thể viết công thức biến đổi toạ độ cho
phần tử tứ giác tuyến tính có bốn điểm nút như sau:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$y = \sum_{j=1}^{4} N_j x_j = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \qquad (3.10)$$

Với phần tử tam giác tuyến tính có ba điểm nút:

ở đây N_i, N_j là hàm dạng hay còn gọi là hàm nội suy (shape function hay

$$x = \sum_{i=1}^{3} N_i x_i = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3$$

$$y = \sum_{j=1}^{3} N_j y_j = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \qquad (3.11)$$

interpolation function).
Từ luật đạo hàm đạo hàm riêng phần, ta có:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (3.12)$$

Hay:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \qquad (3.13)$$

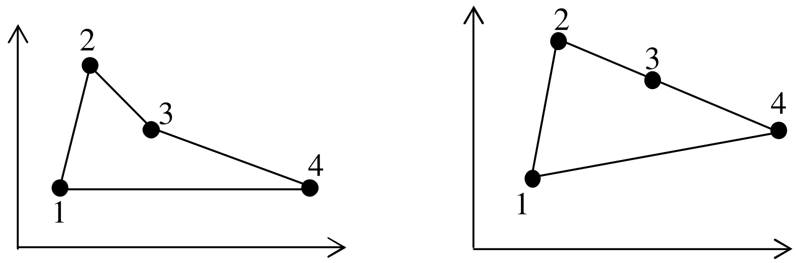
ở đây J là ma trận Jacobian biến đổi toạ độ. Định thức của ma trận nầy, det $|J|$, cũng phải được ước lượng bởi lẽ nó được dùng trong các tích phân biến đổi như sau:

+ Cho phần tử tứ giác tuyến tính:

$$\iint_{\omega^e} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det|J|\, d\xi\, d\eta \qquad (3.14)$$

+ Cho phần tử tam giác tuyến tính:

$$\iint_{\omega^e} dxdy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\xi} \det|J|\, d\eta\, d\xi \qquad (3.15)$$



Hình 3.4: Phần tử tứ giác có ma trận Jacobian không xác định

Trong một số trường hợp, ví dụ như ở Hình 3.4, phần tử tứ giác có 4 điểm nút. Nếu dạng hình học như vậy, ma trận Jacobian trở nên không xác định; để nó có giá trị tốt, các hình dạng phần tử như cạnh và góc của nó cần phải đều đặn hơn (ví dụ tam giác đều, tứ giác đều ≡ hình vuông, đây là các dạng phần tử lý tưởng).

8.3.2 Tích phân số

Một số tích phân của các loại bài toán hai chiều (2D), ba chiều (3D), theo phương pháp phần tử hạn hạn có thể được ước lượng bằng giải tích, nhưng nó không thực dụng cho các hàm số phức tạp, đặc biệt trong trường hợp tổng quát khi (ξ,η) là toạ độ cong. Trong thực hành (3.14), (3.15) được ước lượng bằng số, gọi là tích phân số (numerical integration hay còn gọi là numerical quadrature). Dùng tích phân số của Gauss, với phần tử tứ giác, miền hai chiều ta có:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j) \qquad (3.16)$$

Với phần tử tam giác:

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\xi} f(\xi,\eta)d\eta d\xi \cong \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi^i,\eta^i) \qquad (3.17)$$

Với phần tử tứ giác thì w_i, w_j là hệ số trọng số và ξ_i,η_j là các vị trí toạ độ bên trong phần tử, cho ở Bảng 2 (xem Kopal 1961); còn với phần tử tam giác, tương tự như phần tử tứ giác, nhưng các điểm tích phân là các điểm mẫu (sampling points), Bảng 1.

Thông thường người ta muốn các tích phân số đạt độ chính xác cao, nhưng có những trường hợp đặc biệt lại không cần thiết. Ở tích phân Gauss (3.16), với n = 2, sẽ chính xác khi hàm f là cubic (bậc 3), còn ở tích phân (3.17), n = 1, sẽ chính xác khi đa thức f bậc nhất, còn n = 3 sẽ chính xác khi đa thức f bậc hai.

Bảng 1: Điểm tích phân cho phần tử tam giác
theo công thức (3.17)

n	ξ^i	η^i	w_i
1	1/ 3	1/ 3	1
3	1/ 2 1/ 2 0	1/ 2 0 1/ 2	1/ 3 1/ 3 1/ 3

Bảng 2: Trọng số và điểm tích phân Gauss – Legendre
theo công thức (3.16)

Điểm tích phân ξ_i	**Số điểm tích phân r**	**Trọng số** w_i
0.0000000000	Một điểm	2.0000000000
$\pm$0.5773502692	Hai điểm	1.0000000000
0.0000000000 $\pm$0.7745966692	Ba điểm	0.8888888889 0.5555555555
$\pm$0.3399810435 $\pm$0.8611363116	Bốn điểm	0.6521451548 0.3478548451
0.0000000000 $\pm$0.5384693101 $\pm$0.9061798459	Năm điểm	0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850
$\pm$0.2386191861 $\pm$0.6612093865 $\pm$0.9324695142	Sáu điểm	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

8.4 Các bước tính toán cơ bản và kỹ thuật lập trình cho máy tính số theo phương pháp phần tử hữu hạn

Để áp dụng cách giải bài toán theo phương pháp phần tử hữu hạn người ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Rời rạc hoá miền khảo sát

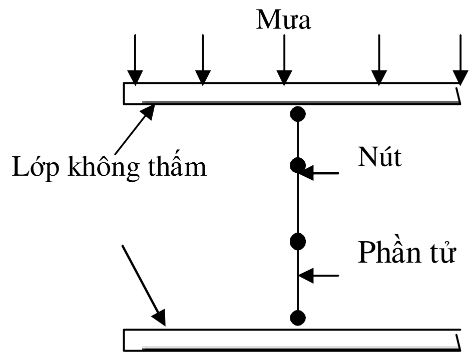
Chia miền khảo sát V thành n_e miền con $V^{(e)}$ hay các phần tử có dạng hình học nhất định.

Ta có: $V = \sum_{e=1}^{n_e} V^{(e)},$ (3.18)

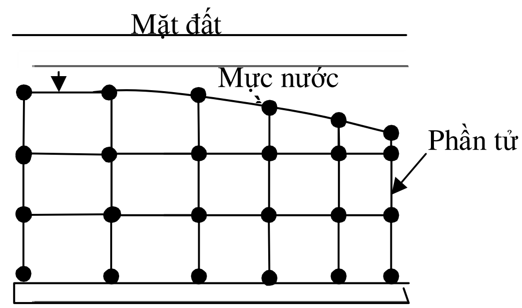
Với cách chia miền tính toán V bằng tổng các miền con $V_{(e)}$, mô hình thực tế được thay bằng mô hình tính toán với n_e phần tử hữu hạn được liên kết với nhau bởi các điểm nút và tại mỗi điểm nút tồn tại các đại lượng thể hiện sự tác động qua lại của các phần tử kề nhau, như vậy bài toán hệ liên tục có bậc tự do vô hạn được thay bằng bài toán tính hệ có bậc tự do hữu hạn đơn giản hơn nhiều.

Ví dụ với các bài toán thấm thường có các dạng sơ đồ sau:

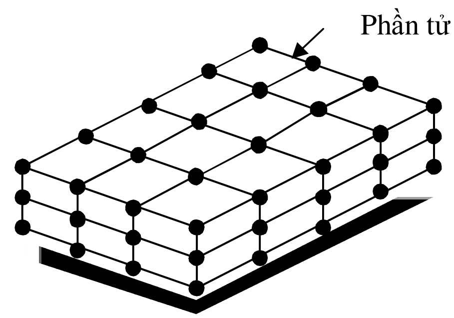
- Một chiều:



- Hai chiều:



- Ba chiều:



- Bước 2: Chọn hàm xấp xỉ thích hợp

Phương pháp phần tử hữu hạn áp dụng ở đây thường là phương pháp Galerkin- gọi tắt là phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin.

Để tìm được nghiệm trên các miền con điều quan trọng là phải chọn hàm toạ độ $N_p^{(e)}$ (hay còn gọi là hàm nội suy, hàm dạng) đảm bảo sự liên tục của các đại lượng cần tìm giữa các phần tử trong miền D.

-Bước 3: Xây dựng phương trình phần tử

Miền V được chia thành n_e phần tử (miền con $V_{(e)}$) bởi R điểm nút. Tại một nút có s bậc tự do, thì số bậc tự do của cả hệ là: n = R.s

Gọi { $\bar{q}$ } là véc-tơ ẩn của toàn hệ, $\{ q \}_e$ là véc-tơ ẩn của mỗi phần tử; giả sử mỗi phần tử có r nút, thì số bậc tự do của mỗi phần tử là: r. s

Ta có liên hệ $\{ q \}_e = [L]_e \cdot \{ \bar{q} \}$ (3.19)

$(n_e.1) = (n_e.n)_x\ (n.1)$

Với $[L]_e$ được gọi là ma trận định vị.

Ứng với mỗi phần tử, ta có phương trình ma trận:

$$[K]_e\{q\}_e = \{C\}_e \qquad (3.20)$$

$[K]_e$ ma trận phần tử , $\{C]_e$ vectơ vế phải phần tử

$\{q\}_e$ là tập hợp các giá trị cần tìm tại các nút của phần tử

-Bước 4 : Ghép nối các phần tử

Tập hợp cho tất cả các phần tử trong miền V, ta có:

$$\sum_{e=1}^{ne} [K]_e\{q\}_e = \sum_{e=1}^{ne} \{C\}_e$$

Viết lại: $$[\overline{K}].\{\overline{q}\} = \{\overline{C}\} \qquad (3.21)$$

Trong đó: $$[\overline{K}] = \sum_{e=1}^{ne}[K]_e = \sum_{e=1}^{ne}[L]_e^T[K]_e[L]_e$$

$$\{\overline{C}\} = \sum_{e=1}^{ne}\{C\}_e = \sum_{e=1}^{ne}[L]_e^T\{C\}_e$$

$\{\overline{K}\}$- Ma trận tổng thể

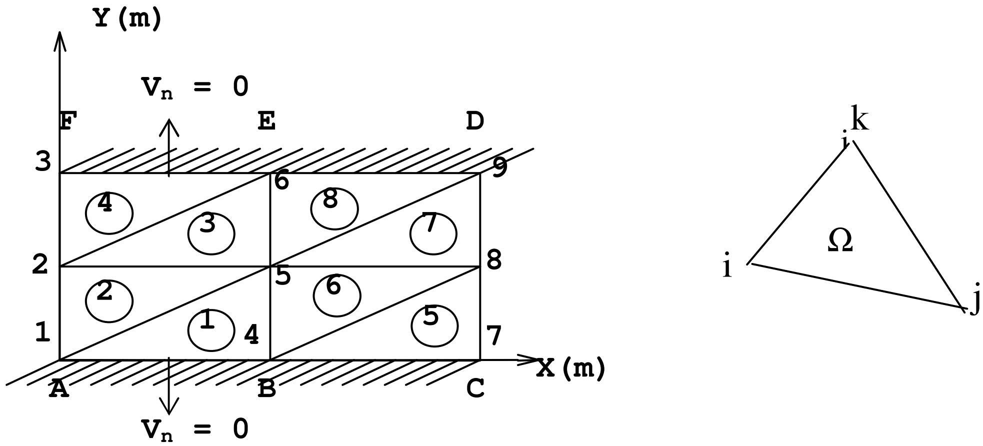
$\{\overline{q}\}$- Vectơ tập hợp tổng các ẩn cần tìm tại các nút (tổng bậc tự do tại các nút)

$\{\overline{C}\}$ Vectơ các số hạng tổng thể ở vế phải

Như vậy việc sử dụng ma trận định vị $[L]_e$ để tính $[\overline{K}]$ và $\{\overline{C}\}$, thực chất là sắp xếp các phần tử $[K]_e$, $\{C\}_e$ vào vị trí của nó ở trong $[\overline{K}]$ và $\{\overline{C}\}$. Tuy nhiên trong thực hành người ta không dùng cách nầy.

Sau đây, sẽ giới thiệu một cách ghép nối trực tiếp để thiết lập ma trận tổng thể và vectơ vế phải tổng thể mà không cần xử dụng ma trận định vị $[L]_e$.

Giả sử xét bài toán thấm có áp trong miền Ω (A B C D E F), miền được chia thành 8 phần tử tam giác (n_e =8), có 9 điểm nút (R =9), tại mỗi điểm nút có s bậc tự do (số ẩn số tại nút), ở đây s =1 là cột nước thấm, mỗi phần tử tam giác có 3 điểm nút (r = 3); thì số bậc tự do của mỗi phần tử là: $r \times s = 3\times1 = 3$ (xem Hình 3.5).



Hình 3.5: Ví dụ bài toán thấm có áp miền tính toán (ABCDEF)

Nếu cũng với phần tử tam giác có ba điểm nút nầy r = 3, tại mỗi nút có ba ẩn h, u, v như bài toán dòng chảy hở hai chiều ngang s = 3, thì số bậc tự do của mỗi phần tử là r. s = 3x3 = 9, ta sẽ được ma trận phần tử (9,9). Để đơn giản ta xét phần tử tam giác tại mỗi nút có một bậc tự do. Mỗi phần tử (ở đây là tam giác) được đánh số các nút (i,j, k), theo chiều được qui ước (chẳng hạn ngược chiều kim đồng hồ), nút i được qui ước là nút ở bên trái và thấp nhất. Với mỗi phần tử bất kỳ n_e ta có ma trận phần tử $[K]_e$ và vectơ vế phải $\{C\}_e$ như sau:

$$[K]_e = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e & K_{ik}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e & K_{jk}^e \\ K_{ki}^e & K_{kj}^e & K_{kk}^e \end{bmatrix} , \qquad \{C\}_e = \begin{Bmatrix} c_i^e \\ c_j^e \\ c_k^e \end{Bmatrix}$$

Với cách đánh số nút và phần tử như trên ta có 8 phần tử với các nút tương ứng (i,j,k) như sau: $e_1(1,4,5)$, $e_2(1,5,2)$, $e_3(2,5,6)$, $e_4(2,6,3)$, $e_5(4,7,8)$, $e_6(4,8,5)$, $e_7(5,8,9)$, $e_8(5,9,6)$

Ví dụ phần tử: $e_4(i,j,k) \equiv e_4(2,6,3)$

$$[K]_{e=4} = \begin{bmatrix} K_{22}^4 & K_{26}^4 & K_{23}^4 \\ K_{62}^4 & K_{66}^4 & K_{63}^4 \\ K_{32}^4 & K_{36}^4 & K_{33}^4 \end{bmatrix} , \quad \text{và} \quad \{C\}_{e=4} = \begin{Bmatrix} c_2^4 \\ c_6^4 \\ c_3^4 \end{Bmatrix}$$

Mỗi hệ số K_{ij}^e chử e chỉ số trên, chỉ hệ số nầy thuộc ma trận phần tử nào; i là hàng nào trong ma trận tổng thể, j là cột nào trong ma trận tổng thể. Ví dụ K_{62}^4 đây là hệ số của ma trận phần tử e = 4, nằm trong hàng 6 cột 2 của ma trận tổng thể.và ma trận tổng thể:

$$[\overline{K}] \;=\sum_{e=1}^{ne}[K]_e \;=\; \sum_{e=1}^{8}[K]_{\mathrm{e}} \;=\; [\mathrm{X}]$$

$$[\mathrm{X}] = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccccc}
K^1_{11}+K^2_{11} & K^2_{12} & & K^1_{14} & K^1_{15}+K^2_{15} & & & & \\
K^2_{21} & K^2_{22}+K^3_{22}+K^4_{22} & K^4_{23} & & K^2_{25}+K^3_{25} & K^3_{26}+K^4_{26} & & & \\
 & K^4_{32} & K^4_{33} & & & K^4_{36} & & & \\
K^1_{41} & & & K^1_{44}+K^5_{44}+K^6_{44} & K^1_{45}+K^6_{45} & & K^5_{47} & K^5_{48}+K^6_{48} & \\
K^1_{51}+K^2_{51} & K^2_{52}+K^3_{52} & & K^1_{54}+K^6_{54} & K^1_{55}+K^2_{55}+K^3_{55}+K^6_{55}+K^7_{55}+K^8_{55} & K^3_{56}+K^8_{56} & & K^6_{58}+K^7_{58} & K^7_{59}+K^8_{59} \\
 & K^3_{62}+K^4_{62} & K^4_{63} & & K^3_{65}+K^8_{65} & K^3_{66}+K^4_{66}+K^8_{66} & & & K^8_{69} \\
 & & & K^5_{74} & & & K^5_{77} & K^5_{78} & \\
 & & & K^5_{84}+K^6_{84} & K^6_{85}+K^7_{85} & & K^5_{87} & K^5_{88}+K^6_{88}+K^7_{88} & K^7_{89} \\
 & & & & K^7_{95}+K^8_{95} & K^8_{96} & & K^7_{98} & K^7_{99}+K^8_{99}
\end{array}\right]\end{array}$$

…..(3.22)

Cọng một cách tương tự cho vectơ vế phải $\{\overline{C}\}$, với chú ý phép cọng nầy giống cọng các số hạng trên đường chéo chính của ma trận tổng thể $[\overline{K}]$:

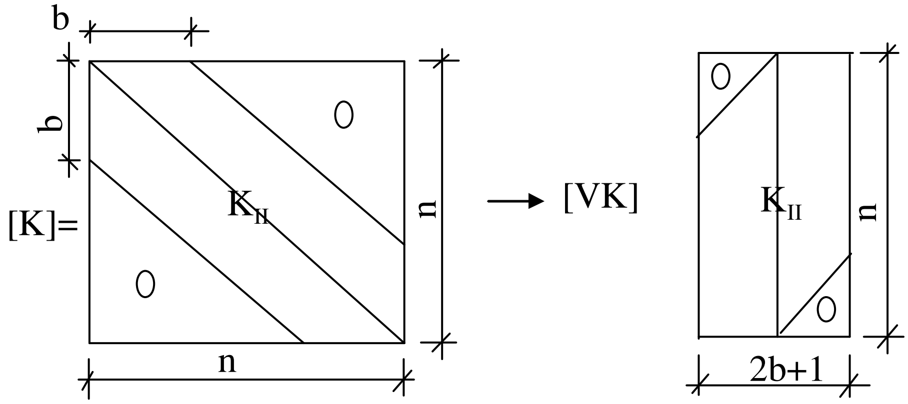
$$\{\overline{C}\} = \sum_{e=1}^{ne} \{\mathrm{C}\}_{\mathrm{e}} \tag{3.23}$$

Ta thấy ở ma trận tổng thể các phần tử khác không có dạng đường chéo (hay còn gọi là dạng Band). Để tiết kiệm bộ nhớ và thời gian tính của máy tính, người ta chỉ lưu trữ các phần tử khác không nầy và thuật toán cũng chỉ tính toán với các phần tử khác không.

Người ta phải lưu trữ cả ma trận dạng band nầy khi ma trận band có chiều rộng Band hẹp (liên quan đến cách đánh số nút của các phần tử), không đối xứng (Hình 3.6). Chỉ cần lưu trữ một nữa band khi ma trận đối xứng. Khi chiều rộng Band lớn và trong các hàng của Band còn nhiều phần tử bằng không, người ta có thể dồn ma trận lại thành ma trận Band hẹp hơn, như vậy sẽ cần thêm ma trận định vị nữa. Tuy nhiên với cách lưu trữ ma trận Band dù theo kiểu nào, thì trong Band vẫn còn một số hệ số phần tử bằng không; do đó để loại bỏ các phần tử bằng không ở trong Band, người ta còn có cách lưu trữ các phần tử khác không nầy ở dạng vectơ gọi là kỷ thuật frontal method.

<u>Thiết lập ma trận tổng thể của bài toán ở dạng ma trận Band</u>

Ở đây ma trận tổng thể được lưu trữ ở dạng Band, ví dụ ma trận tổng thể không đối xứng, nên lưu trữ cả hai Band ($K_{IJ} \neq K_{JI}$)



Hình 3.6: Cách lưu trữ ma trận dạng Band

Ta có $K_{IJ} = VK_{ij}$ (3.24)

Với $i = I$

$j = J - I + 1 + b$

(Nếu ma trận đối xứng chỉ cần lưu trữ một Band, lúc đó $j = J - I + 1$)

Sau đây là thuật toán theo phương pháp khử Gauss, viết cho ma trận Band đối xứng, chỉ lưu trữ một Band có chiều rộng b:

Ước lượng thuận

$$DO \quad k = 1, n = 1$$
$$nbk = \min(n - k + 1,\ b)$$
$$DO \quad i = k + 1, nbk + k - 1$$
$$i1 = i - k + 1$$
$$c = a_{k,i1} / a_{k,1}$$
$$DO \quad j = i, nbk + k - 1$$
$$j1 = j - i + 1$$
$$j2 = j - k + 1$$
$$a_{i,j1} = a_{i,j1} - c a_{k,j2}$$
$$b_i = b_i - c b_k$$

Thế ngược

$$b_n = \frac{b_n}{a_{n,1}}$$
$$DO \quad ii = 1, n = 1$$
$$i = n - ii$$
$$nbi = \min(n - i + 1, b)$$
$$sum = 0$$
$$DO \quad j = 2, nbi$$
$$sum = sum + a_{i,j} b_{i+j-1}$$
$$b_i = \frac{b_i - sum}{a_{i,1}}$$

- **Bước 5:** áp đặt các điều kiện biên của bài toán ta sẽ nhận được hệ phương trình để giải như sau:

Cách áp đặt điều kiện biên

Sau khi có được ma trận hệ thống ở dạng Band, để việc lập chương trình được đơn giản, kích thước ma trận thống thể của bài toán được cố định khi có số điều kiện biên là bất kì.

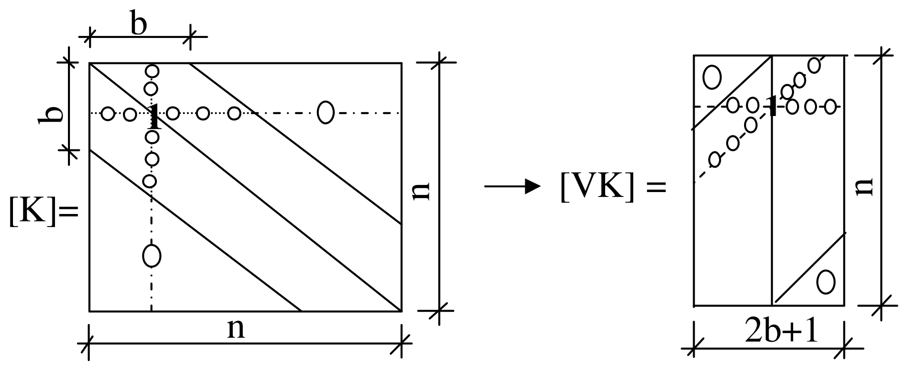
Cách làm như sau:

Dạng phương trình $[K].\{q\} = \{c\}$ (3.25)

Nếu ẩn số thứ $i = r$ được biết là α_i, tức là:

$$q_r = \alpha_i$$

thì các hệ số của ma trận hệ thống được biến đổi như sau:



Hình 3.7: Cách áp đặt điều kiện biên

$$K_{rj} = 0 \quad \text{nếu} \quad j \neq r$$
$$K_{ir} = 0 \quad \text{nếu} \quad i \neq r \qquad (3.26)$$
$$K_{rr} = 1$$

Vec-tơ vế phải của hệ thống sẽ là:

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 - k_{1r\bullet}\,\alpha_i \\ c_2 - k_{2r\bullet}\,\alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ c_n - k_{nr\bullet}\,\alpha_i \end{Bmatrix} \qquad (3.27)$$

Cũng có thể đưa điều kiện biên vào bằng cách nhân hệ số trên đường chéo chính của ma trận [VK] với một số rất lớn (từ 10^8 - 10^{15}), khi ma trận [K] có tính chất trội hoặc không xấu (các hệ số k_{ii} là không quá bé so với các hệ số khác).

- Bước 6: Giải hệ phương trình đại số

$$\{\overline{K}^*\}\{\overline{q}^*\} = \{\overline{C}^*\} \qquad (3.28)$$

Cách giải hệ phương trình ở dạng ma trận (3.28) nầy tuỳ theo từng loại bài toán (dừng hoặc không dừng), tính chất của ma trận lưu trữ, cách lưu trữ ma trận tổng thể mà chọn cách giải thích hợp; chẳng hạn khử Gauss trực tiếp, phép tách LU hay Cholexski hoặc giải lặp Gauss-seidel có hệ số giảm dư hay lặp theo phương pháp gradient liên hợp,… (xem N.T. Hùng, 2000)

8.5 PHƯƠNG PHÁP PHÂN TỬ HỮU HẠN - Áp dụng trong CƠ VẬT RẮN

Phương pháp PTHH là một phương pháp số có hiệu quả để giải các bài toán ứng dụng có điều kiện biên.

Xấp xỉ ẩn trên miền con V_e (phần tử), $\sum V_e = V$ (miền tính toán). Các phần tử nối kết lại các điểm nút. Tại nút chứa ẩn bài toán (còn gọi là bậc tự do).

Phương pháp nầy là chủ đạo trong các bài toán cơ học vật rắn, đặc biệt thích hợp cho bài toán có miền xác định phức tạp, điều kiện biên khác nhau. Lập trình, tự động, tính toán dễ dàng và trở nên thông dụng nhờ sự phát triển của máy tính điện tử.

Với bài toán cơ học VẬT RẮN biến dạng & CƠ KẾT CẤU dùng 3 mô hình:

+ Mô hình tương thích : Xem chuyển vị là đại lượng cần tìm trước
+ Mô hình cân bằng : Xấp xỉ ứng xuất trên từng phân tử, đi tìm ứng suất
+ Mô hình hỗn hợp : Xem chuyển vị & ứng suất là hai yếu tố độc lập.

Hàm xấp xỉ biểu diễn gần đúng dạng phân bố của chuyển vị và ứng suất.

Đối với các bài toán trong cơ học chất lỏng, thường thiết lập bài toán theo dạng theo dạng yếu Galerkin - trên từng phần tử (Xem sách chuyên khảo của cùng Tác giả).

BÀI TOÁN BIÊN (Bài toán có điều kiện biên)

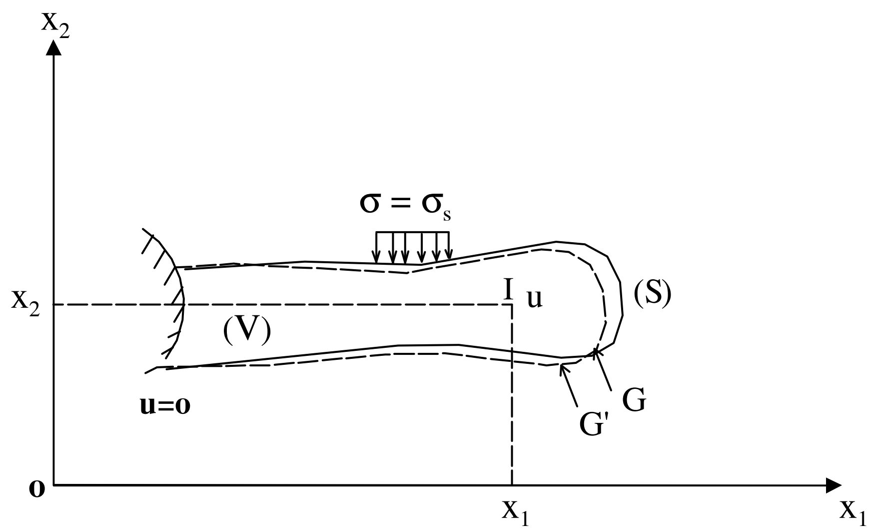
Trạng thái ban đầu G, biên của thể tích V là S

Sau khi có ngoại lực tác dụng nó biến đổi thành trạng thái G'.

Hãy tính tại mọi điểm $I(x_1,x_2)$ những thông số trạng thái như: Chuyển vị u, biến dạng ε, ứng suất σ,...

Biết liên hệ: $[\varepsilon] = [\frac{\partial u}{\partial x}]$ tại 1 điểm

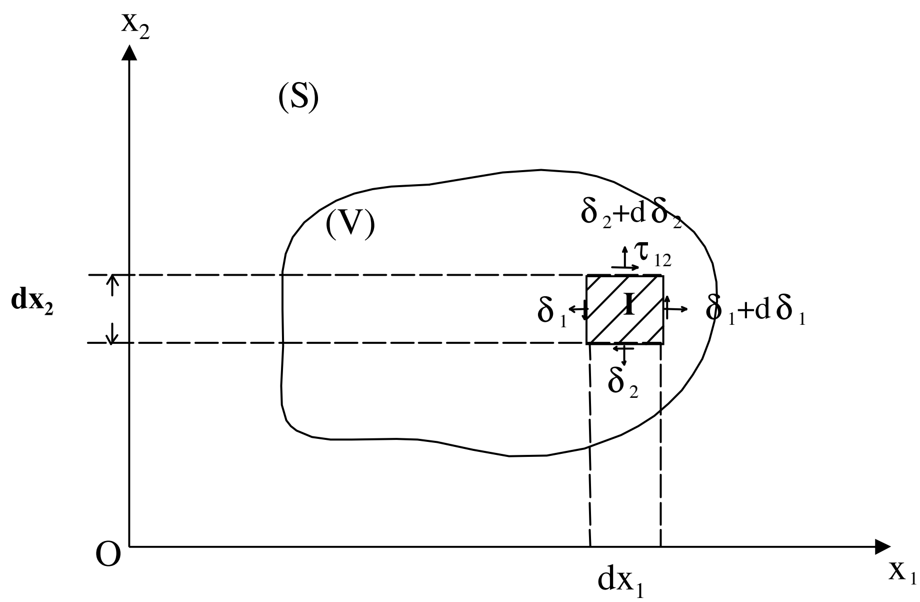
$[\sigma]=[E].[\varepsilon]$,vớiE:Tínhchấtcủavậtliệu



PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN (Integral equation)

Muốn giải bài toán có điều kiện biên như trên, ngoài các liên hệ đã nói trên, ta còn cần các phương trình cân bằng. Có 2 cách thiết lập phương trình cân bằng:

- **Cách thứ nhất: "Phương trình vi phân + Điều kiện biên"**



Xây dựng phương trình cân bằng cho một vi phân diện tích $[dx_1,dx_2]$ bao quanh điểm I bất kỳ.

D{[u],[E]} = 0: Gọi là phương trình vi phân.

Cộng thêm các điều kiện ràng buộc cho trước trên biên (u=0, $\sigma = \sigma_s$)

Trong "Phương pháp sai phân", sử dụng phương trình cân bằng theo cách này

(để giải người ta chuyển dạng VI PHÂN về dạng SAI PHÂN)

- Cách thứ 2: " Nguyên lý biến phân - cực tiểu phiếm hàm "

Dùng lý thuyết biến phân để xây dựng phương trình cân bằng cho cả vùng (V), kể cả biên (S), gọi: Phương trình tích phân và tìm cực tiểu phiếm hàm ở dạng tích phân này $d\Pi = 0$; đây chính la "Phương pháp cân bằng". Giải phương trình này sẽ cho ta lời đáp số của bài toán.

Trong kết cấu hàm Π gọi thế năng và ở đây sử dụng biến phân về chuyển vị.

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN:

Chuyển vị - biến dạng và ứng suất trong phần tử

Ma trận độ cứng phần tử và vectơ tải phần tử

Ta có: $\{u\}_e = [N]\{q\}_e$ (1)

với $\{q\}_e$ chuyển vị nút phần tử.

Từ liên hệ giữa chuyển vị $\{u\}_e$ và biến dạng $\{\varepsilon\}_e$ ta có:

$$\{\varepsilon\}_e = [\partial]\{u\}_e = [\partial][N]\{q\}_e = [B]\{q\}_e \qquad (2)$$

trong đó: $[B]=[\partial][N]$

Khi vật liệu tuân theo định luật Hooke ta có:

$$\{\sigma\}_e = [D](\{\varepsilon\}_e-\{\varepsilon^0\}_e)+\{\sigma^0\}_e \qquad (3)$$

Trong đó : $\{\sigma^0\}_e$, $\{\varepsilon^o\}_e$ là ứng suất và biến dạng ban đầu của phần tử.

Mang (2) vào (3) được: $\{\sigma\}_e = [D][B]\{q\}_e - [D]\{\varepsilon^o\}_e+\{\sigma^0\}_e$ (4)

Hay: $\{\sigma\}_e = [T]\{q\}_e - [D]\{\varepsilon^o\}_e+\{\sigma^0\}_e$ (5)

Trong đó: $[T] = [D][B]$ gọi là ma trận tính ứng suất phần tử.

Từ (1), (2), (5) cho ta biểu diễn chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong phần tử theo vectơ chuyển vị nút phần tử $\{q\}_e$.

Thế năng toàn phần của phần tử:

$$\Pi_e(\{u\}_e) = \int_{V_e}\frac{1}{2}\{\varepsilon\}_e^T.\{\sigma\}_e dV - \int_{V_e}\{g\}^T\{u\}_e dV - \int_{S_e}\{P\}^T.\{u\}_e dS \qquad (6)$$

Thế (1), (2), (5) vào (6) được:

$$\Pi_e(\{q\}_e) = \int_{V_e}\frac{1}{2}\{q\}_e^T([B]^T[D][B]).\{q\}_e dV -$$

$$(\int_{V_e}\{g\}^T\{u\}_e dV + \int_{S_e}\{P\}^T.\{u\}_e dS + \int_{V_e}\frac{1}{2}\{\varepsilon^o\}_e^T.[D][B])dV - \int_{V_e}\frac{1}{2}\{\sigma^o\}_e^T.B.dV)\{q\}_e$$

Hay: $$\Pi_e(\{q\}_e) = \frac{1}{2}\{q\}_e^T[K]_e\{q\}_e - \{q\}_e^T.\{P\}_e \qquad (7)$$

Trong đó: $[K]_e = \int_{V_e}[B]^T[D][B]dV$ gọi là ma trận phần tử

(8)

$$\{P\}_e = \int_{V_e}[N]^T\{g\}_e dV + \int_{S_e}\{N\}^T\{P\}_e dS + \int_{V_e}\frac{1}{2}[B^T].[D].\{\varepsilon^o\}_e)dV -$$

$$\int_{V_e}\frac{1}{2}[B]^T.\{\sigma^o\}_e dV \quad (9)$$

$\{P\}$ gọi là vectơ tải phần tử.

Trong đó: $\{g\}$ là lực khối, $\{P\}$tải trọng bề mặt.

GHÉP NỐI CÁC PHẦN TỬ - MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ

VECTƠ TẢI TỔNG THỂ

Miền V được chia thành ne phần tử (miền con V_e) bởi R điểm nút. Tại 1 nút có S bậc tự do, thì số bậc tự do cả hệ: n = R.S

Gọi { $\bar{q}$ } là vectơ chuyển vị nút tổng thể. Giả sử mỗi phần tử có r nút, thì số bậc tự do của mỗi phần tử là: $n_e = r.S$.

Ta có liên hệ:
$$\underset{(n_e.1)}{\{q\}_e} = \underset{(n_e.n)}{[L]_e} . \underset{(n.1)}{\{\bar{q}\}} \qquad (10)$$

với $[L]_e$ gọi là ma trận định vị.

Sử dụng (7) và (10) ta có thế năng toàn phần của hệ:

$$\prod = \sum_{e=1}^{ne} \Pi_e = \sum_{e=1}^{ne} [\frac{1}{2}\{\bar{q}\}^T [L]_e^T . [K]_e [L]_e \{\bar{q}\} - \{P\}_e^T . [L]_e \{\bar{q}\}^T] \qquad (11)$$

Ap dụng nguyên lý thế năng toàn phần dừng (nguyên lý Lagrange) ta sẽ có điều kiện cân bằng của toàn hệ tại các điểm nút:

$$\delta\Pi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial q_2} = 0 \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial q_n} = 0 \end{cases}$$

hay ở dạng ma trận: $\dfrac{\partial\Pi}{\partial\{\bar{q}\}} = \{0\}$

Và ta có: $\dfrac{\partial\Pi}{\partial\{\bar{q}\}} = [\sum_{e=1}^{ne} [L]_e^T . [K]_e [L]_e] . \{\bar{q}\} - \sum_{e=1}^{ne} [L]_e^T . \{P\}_e = \{0\}$

Viết lại:
$$[\bar{K}] . \{\bar{q}\} - \{\bar{P}\} = \{0\} \qquad (12)$$

Trong đó: $[\bar{K}] = \sum_{e=1}^{ne} [L]_e^T . [K]_e . [L]_e]$ gọi là ma trận cứng tổng thể.

$\{\bar{P}\} = \sum_{e=1}^{ne} [L]_e^T . \{P\}_e$ gọi là vectơ tải tổng thể.

Ghi chú: Việc sử dụng ma trận định vị $[L]_e$ để tính $[\bar{K}]$ và $\{\bar{P}\}$, thực chất là sắp xếp các phần tử $[K]_e$, $\{P\}_e$ vào vị trí của nó trong $[\bar{K}]$ và $\{\bar{P}\}$. Tuy nhiên trong thực hành ta không dùng cách này.

Phép chuyển trục tọa độ

Ở trên đây đã xây dựng [N], $[K_e]$, $\{P\}_e$ trong hệ tọa độ thích hợp của mỗi phần tử, gọi là hệ tọa độ địa phương (và do đó các bậc tự do của phần tử cũng lấy theo hệ tọa độ này).

Tuy nhiên trong thực tế, thường gặp các kết cấu mà các phần tử khác nhau thì có các hệ tọa độ địa phương khác nhau và do đó các bậc tự do của phần tử cũng khác nhau về phương.

Do vậy cần thiết có hệ tọa độ chung cho toàn hệ.

Gọi (x, y, z) là hệ tọa độ địa phương tương ứng $\{q\}_e$, $\{P\}_e$, $[K]_e$

(x', y', z') là hệ tọa độ tổng thể tương ứng $\{q'\}_e$, $\{P'\}_e$, $[K']_e$

Ta có quan hệ: $\{q\}_e=[T]_e\{q'\}_e$ (13)

$\{P\}_e=[T]_e.\{P'\}_e$ (14)

$[T]_e$ là ma trận biến đổi tọa độ từ (x', y', z') về (x, y, z).

Mặt khác: $\prod_e=\frac{1}{2}\{q\}^T_e[K]_e\{q\}_e - \{P\}^T_e\{q'\}_e$. Thế (13) vào đây ta được:

$$\prod_e=\frac{1}{2}\{q'\}^T_e[T]^T_e[K]_e[T]_e\{q'\}_e - \{P\}^T_e[T]_e\{q'\}_e$$

hay $$\prod_e=\frac{1}{2}\{q'\}^T_e[K']_e\{q'\}_e - \{P'\}^T_e[T]_e\{q'\}_e$$

Trong đó: $[K']_e=[T]^T_e[K]_e[T]_e$ và $\{P'\}_e=[T]_e\{P\}_e$ (16)

So sánh 14 và 16 ta thấy $[T]^T_e[T]_e=[J]$: Ma trận đơn vị

Khi $[T]_e$ là ma trận vuông thì $[T]_e^T=[T]_e^{-1}$, $[T]_e$ là ma trận trực giao

Tương tự khi áp dụng nguyên lý thế năng toàn phần dùng cho toàn hệ ta được :

$\left[\bar{K}'\right]\left\{\bar{q}'\right\}=\left\{\bar{P}'\right\}$, trong đó : $\left[\bar{K}'\right]=\sum_{e=1}^{ne}\left[K'\right]_e$ trong hệ tọa độ (x', y', z') (17)

$$\left\{\bar{P}'\right\}=\sum_{e=1}^{ne}\left[P'\right]_e+\left\{\bar{P}'\right\}n \qquad (18)$$

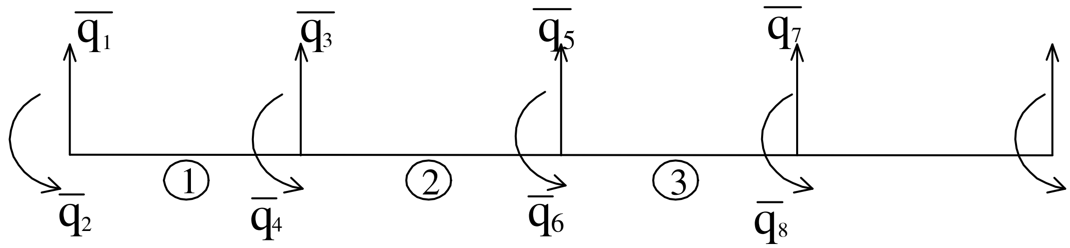
Ở đây số hạng thứ 2: $\left\{\bar{P}'\right\}_n$ trong (18) là véc tơ tải trọng tập trung đặt tại các nút tác dụng theo các phương tương ứng của các thành phần trong véc tơ chuyển vị nút kết cấu $\{q'\}_e$, gọi véc tơ tải trọng nút.

Ghép nối phần tử hay sử dụng ma trận chỉ số để xấy dựng

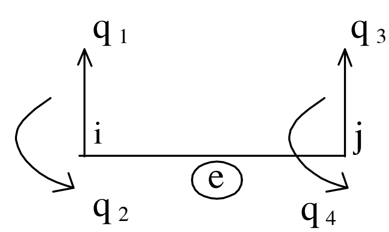
Ma trận độ cứng tổng thể và vectơ tải tổng thể

Để xác định sự tương ứng của mỗi phần tử thuộc $\{q\}_e$ trong đó $\overline{\{q\}}$ (hoặc $\{q\}_e$ trong $\overline{\{q\}}$). Người ta lập ma trận chỉ số [b] (còn gọi là ma trận liên hệ Boolean) mà giá trị của mỗi thành phần b_{ij} chính là chỉ số tổng thể tương ứng bậc tự do thứ j của phần tử thứ i. Ma trận chỉ số [b] có số hàng bằng số phần tử của hệ, số cột bằng số bậc tự do của một phần tử.

Ví dụ :



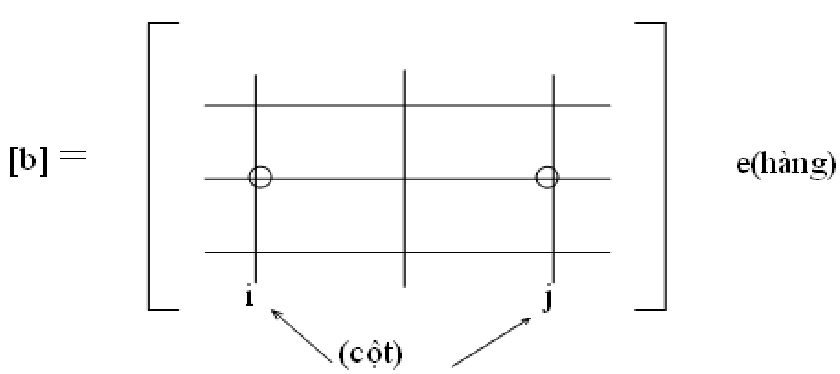
Chèsä ú cuû bäü / Phaöön tæí	Nuït i		Nuït j	
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
3	5	6	7	8



$K_{1,3}^{(2)}$ gộp thêm => $\overline{K}(b_{21,}\, b_{23}) \equiv \overline{K}_{3,5}$

$K_{2,4}^{(3)}$ gộp thêm => $\overline{K}(b_{32,}\, b_{34}) \equiv \overline{K}_{6,8}$

Mỗi thành phần K_{ij}^{e} của ma trận phần tử $[K]_e$ sẽ phải gộp thêm vào phần tử $\overline{K}_{m,n}$ của ma trận tổng thể $[\overline{K}]$ với m = b_{ei}, n = b_{ej} (nhớ là b_{ei}, b_{ej} là các giá trị của phần tử hàng e, cột i và hàng e cột j) của ma trận [b]



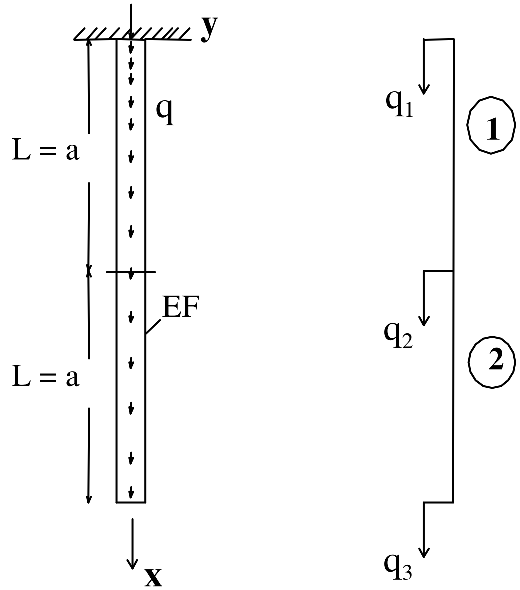
Ví dụ: Tính toán hệ thanh

1. Phần tử thanh chịu biến dạng dọc trục

Đi biểu diễn chuyển vị dọc thanh:

$$U(x) = [N].\{q\}_e$$

trong đó: $\{q\}_e = \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix}_e \equiv \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}_e$



Chọn hàm chuyển vị có dạng bậc nhất:

$$[N] = [N_1 \quad N_2] = [(1-\frac{x}{L}) \quad \frac{x}{L}],$$

với biến dạng và ứng suất chỉ có theo phương trục ox:

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x\} \\ \{\sigma\} = \{\sigma_x\} \end{cases}$$

Ký hiệu: $[\partial] = \left[\dfrac{d}{dx}\right]$,

$$[D] = [E] \quad => \quad \sigma_x = E.\varepsilon_x$$

với E - modun đàn hồi Young của vật liệu

D- là ma trận liên hệ giữa ứng suất và biến dạng: $[\sigma] = [D].\{\varepsilon\}$

Ta có: $[B] = [\partial].[N] = \left[\dfrac{d}{dx}\right].\left[(1-\dfrac{x}{L}) \quad \dfrac{x}{L}\right] = \left[\dfrac{-1}{L} \quad \dfrac{1}{L}\right] = \dfrac{1}{L}[-1 \quad 1]$

$$[K]_e = \int_{Ve} [B]^T.[D].[B].dV = \int_0^L \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.E.\frac{1}{L}[-1 \quad 1].F.dx = \frac{EF}{L}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Trong trường hợp chỉ có lực phân bố dọc trục p(x) = q, vectơ tải được tính:

$$\{P_e\} = \int_0^L [N]^T.\{p(x)\}.dx = \int_0^L \begin{bmatrix} (1-\dfrac{x}{L}) \\ \dfrac{x}{L} \end{bmatrix}.p(x).dx = \int_0^L \begin{bmatrix} (1-\dfrac{x}{L}) \\ \dfrac{x}{L} \end{bmatrix}.q.dx = \frac{q.L}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{q.a}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận tổng thể (có được khi cộng hai phần tử thanh):

$$[\overline{K}] = \frac{EF}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & (1+1) & -1 \\ & sym & 1 \end{bmatrix} = \frac{EF}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ & 2 & -1 \\ & sym & 1 \end{bmatrix}$$

Vectơ tải trọng nút: $\left\{\bar{P}\right\}_n = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$,

Vectơ tải tổng thể: $\left\{\bar{P}\right\} = \dfrac{qa}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{qa}{2}+R \\ qa \\ \dfrac{qa}{2} \end{Bmatrix}$

Ta có hệ phương trình: $\left[\bar{K}\right]\left\{\bar{q}\right\} = \left\{\bar{P}\right\}$ được tính cụ thể như sau:

$$\frac{EF}{a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 2 & -1 \\ sym & & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\dfrac{qa}{2}+R) \\ qa \\ \dfrac{qa}{2} \end{Bmatrix}$$

Điều kiện biên chuyển vị: $\bar{q}_1 = 0$

Giải hệ này ta được: $\begin{cases} \bar{q}_2 = \dfrac{3}{2}.\dfrac{qa^2}{EF} \\ \bar{q}_3 = \dfrac{4}{2}\dfrac{qa^2}{EF} \end{cases}$

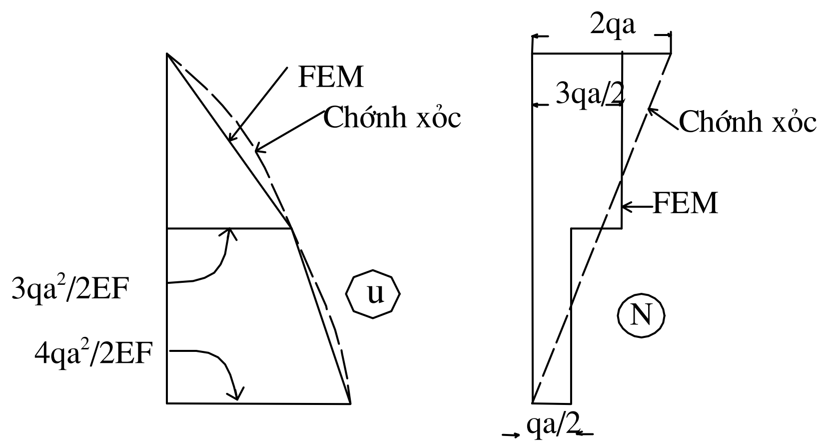
Xác định nội lực:

$\varepsilon_x = du/dx$

$\sigma_x = E\varepsilon_x = const$,

lực dọc:

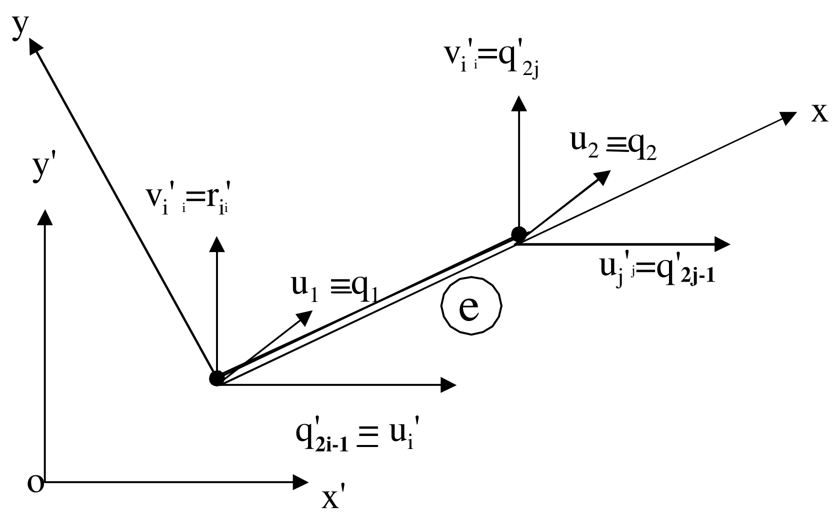
$N_c = F.\sigma_x = E.F.\varepsilon_x$



$$N_1 = EF.\left.\frac{du}{dx}\right|_1 = EF\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{2}\dfrac{qa^2}{EF} \end{Bmatrix} = \frac{3qa}{2}$$

$$N_2 = EF.\left.\frac{du}{dx}\right|_2 = EF\begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \frac{3qa^2}{2EF} \\ \frac{4}{2}\frac{qa^2}{EF} \end{Bmatrix} = \frac{qa}{2}$$

2. Phần tử thanh trong dàn phẳng



Trong dàn phẳng xem mỗi mắt dàn là một đỉnh nút, mỗi thanh dàn là một phần tử chịu biến dạng dọc trục:

$$q_1 = q'_{2i-1} l_{ij} + q'_{2i}.m_{ij}$$
$$q_2 = q'_{2j-1} l_{ij} + q'_{2j}.m_{ij}$$

Trong đó: l_{ij}, m_{ij} là cosine chỉ phương của trục phần tử (trục x) đối với hệ trục tổng thể x'o'y'.

Ta có: $\{q\}_e \equiv \{u_1, u_2\}_e^T \equiv \{q_1, q_2\}_e^T$

$$\{q'\}_e \equiv \{u'_i, v'_i, u'_j, v'_j\}^T \equiv \{q'_{2i-1}, q'_{2i}, q'_{2j-1}, q'_{2j}\}^T$$

nên: $\{q\}_e = [T]_e.\{q'\}_e$ trong đó ma trận chuyển trục,

$$[T]_e = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

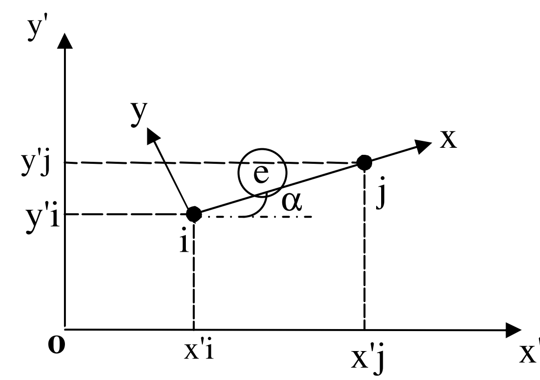
Vậy ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể:

$$[K']_e = [T]^T{}_e.[K]_e.[T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & 0 \\ m_{ij} & 0 \\ 0 & l_{ij} \\ 0 & m_{ij} \end{bmatrix} \times \frac{EF}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

Cuối cùng:

$$[K']_e = \frac{EF}{L}\begin{bmatrix} l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} & -l_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} \\ & m_{ij}^2 & -l_{ij}m_{ij} & -m_{ij}^2 \\ & & l_{ij}^2 & l_{ij}m_{ij} \\ & sym & & m_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

Chú ý:



$$l_{ij} = \cos(x,x') = \frac{x_j' - x_i'}{L}$$

$$m_{ij} = \cos(x,y') = \frac{y_j' - y_i'}{L}$$

Với: $L = \sqrt{(x'_j - x'_i)^2 + (y'_j - y'_i)^2}$

Theo hình vẽ:

$l_{ij} = \cos(\alpha)$, $m_{ij} = \sin(\alpha)$

Nên $[T]_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

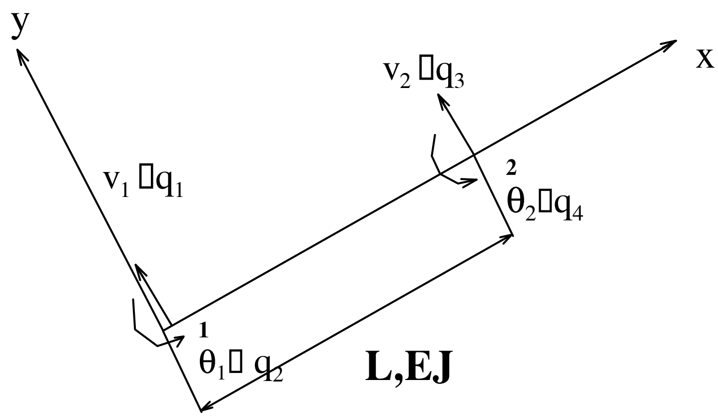
Nội lực thanh dàn: $\varepsilon_x = [B]\{q\}_e$, $\sigma_x = E\varepsilon_x$, $N = \sigma_x.F = EF.[B].\{q\}_e$

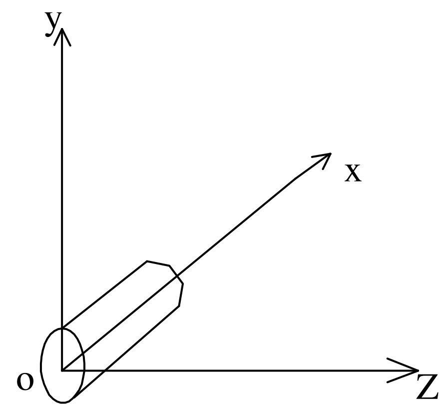
Nên $N_e = EF[B][T]_e\{q'\}_e = [S_e']\{q'\}_e$ với: $[S_e'] = EF[B][T_e]$;

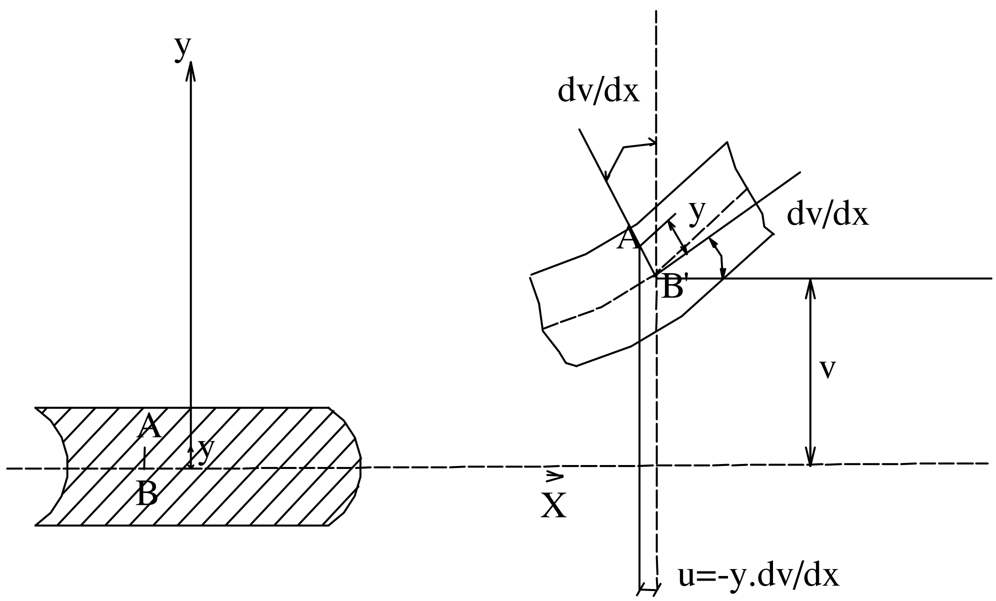
$$[S_e'] = EF.\begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix} = \frac{EF}{L}\begin{bmatrix} -l_{ij} & -m_{ij} & l_{ij} & m_{ij} \end{bmatrix}$$

$$[S_e'] = \frac{EF}{L}\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

KHUNG PHẲNG







Ta có vectơ chuyển vị nút phần tử:

$$\{q\}^e = \{v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}_e^T = \{q_1 \ \ q_2 \ \ q_3 \ \ q_4\}_e^T$$

Với góc xoay: $\theta = \dfrac{dv}{dx}$

Quan hệ giữa chuyển vị dọc trục u và độ võng v là:

$$U = -y.\frac{dv}{dx}$$

Trong đó y là khoảng cách từ điểm xét tới trục trung hòa.

Khi đó biến dạng dọc trục:

$\varepsilon_x = \dfrac{du}{dx} = -y.\dfrac{d^2v}{dx^2}$, với: $v = [N].\{q\}_e$

Với: [N] là ma trận hàm dạng

$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$

Với: $N_1(x) = 1\text{-}3\dfrac{x^2}{L^2} + 2\dfrac{x^3}{L^3}$, $N_2(x) = x.(1\text{-}2\dfrac{x}{L} + \dfrac{x^2}{L^2})$

$N_3(x) = 3.\dfrac{x^2}{L^2} - 2\dfrac{x^3}{L^3}$, $N_4(x) = x.(-\dfrac{x}{L} + \dfrac{x^2}{L^2})$

Viết lại: $\varepsilon_x = -y.\dfrac{d^2N}{dx^2}\{q\}_e = [B]\{q\}_e$, trong đó: $[B] = -y\dfrac{d^2}{dx^2}[N]$

Hay: $[B] = -y\left[(\dfrac{-6}{L^2} + 12\dfrac{x}{L^3})(\dfrac{-4}{L} + 6\dfrac{x}{L^2})(\dfrac{6}{L^2} - \dfrac{12x}{L^3})(\dfrac{-2}{L} + \dfrac{6x}{L^2}) \right]$

Ứng suất tại mọi điểm của dầm chịu uốn: $\sigma_x = E.\varepsilon_x$, biểu diễn dạng ma trận: $\{\sigma\} = [D].\{\varepsilon\}$, ở đây: $[D] = [E]$

Ma trận phần tử của dầm chịu uốn: $[K]_e = \int_{Ve} [B]^T[D][B]dV = E\iint_{LF} [B]^T[B]dF.dX$

Tính cụ thể được:

$$[K]_e = \frac{EJ_z}{L_3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ sym & & & 4L^2 \end{bmatrix},$$

với $J_z = \int_F y^2 dF$: Momen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục z.

Vectơ tải $\{P\}_e$ tính theo công thức:

$$\{P\}_e = \int_L [N]^T q(x)dx + \sum_{i=1}^{na} [N(x_{Qi})]^T.Q_i + \sum_{i=1}^{nM} [\frac{dN}{dx}(x_{Mi})]^T.M_i$$

Với q(x): tải trọng phân bố; Q_i : Lực tập trung (có hoành độ x_{Qi}), M_i : Mômen tập trung có hoành độ x_{Mi}, nQ, n_M số lực tập trung và số mômen tập trung.

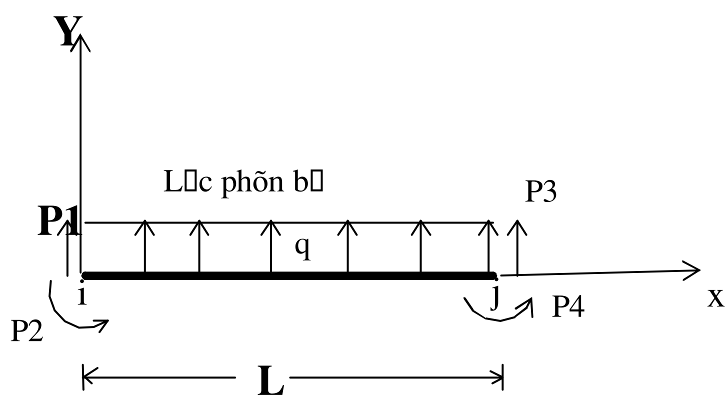
$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \int_L \begin{bmatrix} 1-\dfrac{3x^2}{L^2}+2\dfrac{x^3}{L^3} \\ x-\dfrac{2x^2}{L}+\dfrac{x^3}{L^2} \\ \dfrac{3x^2}{L^2}-\dfrac{2x^3}{L^3} \\ -\dfrac{x^2}{L}+\dfrac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} q\,dx = \begin{Bmatrix} \dfrac{qL}{2} \\ \dfrac{qL^2}{12} \\ \dfrac{qL}{2} \\ \dfrac{-qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

$$\{P\}_e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = [N(a)]^T.Q = Q.\begin{bmatrix} 1-\dfrac{3a^2}{L^2}+\dfrac{2a^3}{L^3} \\ a-\dfrac{2a^2}{L}+\dfrac{a^3}{L^2} \\ \dfrac{3a^2}{L^2}-\dfrac{2a^3}{L^3} \\ \dfrac{-a}{L}+\dfrac{a^3}{L^2} \end{bmatrix}$$

Mômen uốn:

$$M = EJ.\frac{d^2v}{dx^2} = EJ\frac{d^2}{dx^2}[N]\{q\}_e$$

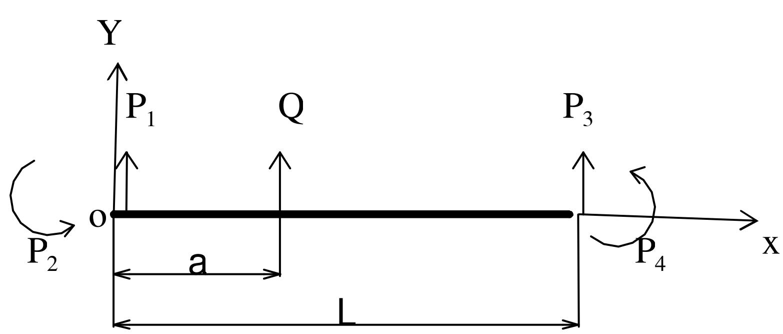
$$M = EJ[N^{"}]\{q\}_e$$



Với:

$$[N^{"}] = \frac{d^2}{dx^2}[N]$$

$$[N^{"}] = [N^{"}_1 \;\; N^{"}_2 \;\; N^{"}_3 \;\; N^{"}_4]$$



Gọi $\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M\,(tai\,nut\,1) \\ M\,(tai\,nut\,2) \end{Bmatrix}$ là mômen uốn tại đầu nút phần tử

$$\{M\}_e = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Có lực tập trung Q đặt ở toạ độ $x_O = a$

$$\{M\}_e = EJ.\begin{bmatrix} N''(x=0) \\ N''(x=L) \end{bmatrix}.\{q\}_e$$

$$\{M\}_e = [S]_e\{q\}_e$$

Vậy: $[S]_e = EJ\begin{bmatrix} [N''\ (0)] \\ [N''\ (L)] \end{bmatrix} = \frac{EJ}{L^3}\begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$

Câu hỏi:

1. Trong trường hợp nào hàm dạng đồng nhất với hàm nội suy ?
2. Nêu đặc tính của hàm dạng ?
3. Trong phương pháp PTHH bước quan trọng nhất là thiết lập phương trình phần tử (hay còn gọi tính ma trận phần tử), vì sao ?
4. Tại sao trong thực hành lập trình tính toán, người ta không sử dụng ma trận định vị để thiết lập ma trận tổng thể ?

Bài tập

Bài 1:

Hãy trình bày phương pháp Phần tử hữu hạn Galerkin tổng quát và áp dụng cho bài toán một chiều (one dimension 1D) nào đó, do em tự chọn, có số phần tử ne = 3 ÷ 7, tự cho các phương trình ma trận phần tử (element matrix equations) $[K]^e.\{X\}=\{c\}^e$. Hãy thiết lập hệ phương trình ma trận cho toàn hệ: $\Sigma\,[K]^e.\{X\} = \Sigma\,\{c\}^e$

Bài 2:

Giải phương trình $\frac{d^2T}{dx^2} = -f(x)$ với chiều dài thanh l = 10cm với điều kiện biên T(0,t) = 50, T(10,t) = 100 và hàm phân bố nhiệt độ f(x) = 20, theo phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thế Hùng, Giáo trình Phương pháp số, Đại học Đà Nẵng 1996.
2. Nguyễn Thế Hùng, Phương pháp phần tử hữu hạn trong chất lỏng, NXB Xây Dựng, Hà Nội 2004.
3. CHAPRA S.C, Numerical Methods for Engineers, McGraw Hill, 1998.
4. GURMUND & all, Numerical Methods, Dover Publications, 2003.
5. JAAN KIUSAALAS, Numerical Methods in Engineering with Mathlab, Cambridge University Press, 2005.
6. STEVEN T. KARRIS, Numerical Analysis, Using Matlab and Excell, Orchard Publications, 2007.

Website tham khảo:

http://ebookee.com.cn
http://dspace.mit.edu
http://ecourses.ou.edu
http://www.dbebooks.com

The end