

Bài giảng môn học Đại số  $A_1$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

## Chương 1:

# MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

[lvluyen@yahoo.com](mailto:lvluyen@yahoo.com)

[www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt](http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt)

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

## Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

# 1. Ma trận

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simp.com>

1.1 Định nghĩa và ký hiệu

1.2 Ma trận vuông

1.3 Các phép toán trên ma trận

## 1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định nghĩa.** Một *ma trận* cấp  $m \times n$  trên  $\mathbb{K}$  là một bảng chữ nhật gồm  $m$  dòng,  $n$  cột với  $mn$  hệ số trong  $\mathbb{K}$  có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Viết tắt:**  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  hay  $A = (a_{ij})$ , trong đó  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ .

$a_{ij}$  hay  $A_{ij}$  là phần tử ở vị trí dòng  $i$  cột  $j$  của  $A$

$M_{m \times n}(\mathbb{K})$  là tập hợp tất cả những ma trận cấp  $m \times n$  trên  $\mathbb{K}$ .

## 1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{K}); \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{K}).$$

▷ Ma trận có các phần tử bằng 0 được gọi là **ma trận không**, ký hiệu  $0_{m \times n}$  ( hay 0)

Ví dụ.

$$0_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.2. Ma trận vuông

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định nghĩa.** Nếu  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  (số dòng bằng số cột) thì  $A$  được gọi là *ma trận vuông*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$M_n(\mathbb{K})$ : Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp  $n$  trên  $\mathbb{K}$ .

**Ví dụ.**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}); \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.2. Ma trận vuông

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định nghĩa.** Nếu  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  thì đường chứa các phần tử  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  được gọi là **đường chéo chính** hay **đường chéo** của  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nếu các phần tử nằm **dưới** đường chéo của  $A$  đều bằng 0 (nghĩa là  $a_{ij} = 0, \forall i > j$ ) thì  $A$  được gọi là ma trận **tam giác trên**.
- Nếu các phần tử nằm **trên** đường chéo của  $A$  đều bằng 0 (nghĩa là  $a_{ij} = 0, \forall i < j$ ) thì  $A$  được gọi là ma trận **tam giác dưới**.
- Nếu mọi phần tử nằm **ngoài** đường chéo bằng 0 thì  $A$  (nghĩa là  $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ ) được gọi là **ma trận đường chéo**, ký hiệu  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**Ví dụ.** 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$C = \text{diag}(-1, 0, 5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$



## Ma trận đơn vị

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Ma trận vuông cấp  $n$  có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là **ma trận đơn vị cấp  $n$** , ký hiệu  $I_n$  (hoặc  $I$ .)

**Ví dụ.**

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Nhận xét.** Ma trận  $A$  là ma trận đường chéo khi và chỉ khi vừa là ma trận tam giác vừa là ma trận tam giác dưới.

## 1.3. Các phép toán trên ma trận

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

### a) So sánh hai ma trận

Cho  $A, B \in M_{m \times n}$ . Khi đó, nếu  $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$  thì  $A$  và  $B$  được gọi là hai ma trận bằng nhau, ký hiệu  $A = B$ .

**Ví dụ.** Tìm  $x, y, z$  để  $\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$ .

**Giải.** Ta có

$$\begin{cases} x+1 = 3y-4; \\ 2x-1 = y-1; \\ z = 2z+2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = -2. \end{cases}$$

## 1.3. Các phép toán trên ma trận

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

### b) Chuyển vị ma trận

Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Ta gọi *ma trận chuyển vị* của  $A$ , ký hiệu  $A^T$ , là ma trận cấp  $n \times m$ , có được từ  $A$  bằng cách xếp các dòng của  $A$  thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

• Nếu  $A^T = A$  thì ta nói  $A$  là *ma trận đối xứng*.

• Nếu  $A^T = -A$  thì nói  $A$  là *ma trận phản xứng*.

**Ví dụ.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  là ma trận đối xứng.

$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  là ma trận phản xứng.

**Tính chất.** Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Khi đó:

i)  $(A^T)^T = A$ ;

ii)  $A^T = B^T \Leftrightarrow A = B$ .

### c) Nhân một số với ma trận

Cho ma trận  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Ta định nghĩa  $\alpha A$  là ma trận có từ  $A$  bằng cách nhân tất cả các hệ số của  $A$  với  $\alpha$ , nghĩa là

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \forall i, j.$$

Ma trận  $(-1)A$  được ký hiệu là  $-A$  được gọi là *ma trận đối* của  $A$ .

**Ví dụ.** Nếu  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  thì

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix};$$

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Tính chất.** Cho  $A$  là ma trận và  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , ta có

- i)  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ ;
- ii)  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ ;
- iii)  $0.A = 0$  và  $1.A = A$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

### d) Tổng hai ma trận

Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Khi đó **tổng** của  $A$  và  $B$ , ký hiệu  $A + B$  là ma trận được xác định bởi:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Như vậy, để tính  $A + B$  thì:

- $A$  và  $B$  cùng cấp;
- Các vị trí tương ứng cộng lại.

**Ký hiệu**  $A - B := A + (-B)$  và gọi là **hiệu** của  $A$  và  $B$ .

**Ví dụ.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Tính chất.** Với  $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  và  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , ta có

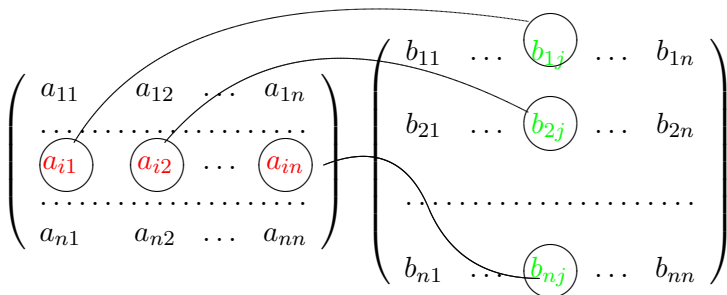
- i)  $A + B = B + A$  (tính giao hoán),
- ii)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (tính kết hợp);
- iii)  $0_{m \times n} + A = A + 0_{m \times n} = A$ ;
- iv)  $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$ ;
- v)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- vi)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;
- vii)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;
- viii)  $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ .



## e) Tích hai ma trận

Cho hai ma trận  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ . Khi đó, tích của  $A$  với  $B$  (ký hiệu  $AB$ ) là ma trận thuộc  $M_{m \times p}(\mathbb{K})$  được xác định bởi:

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}$$



Như vậy, để tính  $AB$  thì:

- Số cột của  $A$  bằng số dòng của  $B$ ;
- Phần tử thứ  $i, j$  của  $AB$  bằng dòng  $i$  của  $A$  nhân cột  $j$  của  $B$ .

Ví dụ. Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix};$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$$

nhưng  $AC$  và  $CB$  không xác định.

**Tính chất.** Với  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B, B_1, B_2 \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{p \times q}(\mathbb{K})$ ,  $D_1, D_2 \in M_{q \times n}(\mathbb{K})$ , ta có

i)  $I_m A = A$  và  $A I_n = A$ . Đặc biệt, với  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , ta có

$$I_n A = A I_n = A.$$

ii)  $0_{p \times m} A = 0_{p \times n}$  và  $A 0_{n \times q} = 0_{m \times q}$ . Đặc biệt, với  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , ta có

$$0_{n \times n} A = A 0_{n \times n} = 0_{n \times n}.$$

iii)  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

iv)  $(AB)C = A(BC)$ .

v)  $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

## f) Lũy thừa ma trận

Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Ta gọi *lũy thừa* bậc  $k$  của  $A$  là một ma trận thuộc  $M_n(\mathbb{K})$ , ký hiệu  $A^k$ , được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \dots; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy  $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k \text{ lần}}$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^2, A^3$ , từ đó suy ra  $A^{200}$ .

**Giải.**

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suy ra  $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^{100}$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Tính  $A^n$  với  $n > 1$ .

**Tính chất.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$  và  $k, l \in \mathbb{N}$ . Khi đó:

- i)  $I^k = I$ ;
- ii)  $A^{k+l} = A^k A^l$ ;
- iii)  $A^{kl} = (A^k)^l$

g) **Đa thức ma trận** Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$  và

Simple PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdf-element.com/>

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức bậc  $m$  trên  $\mathbb{K}$  ( $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ). Khi đó ta định nghĩa

$$f(A) = \alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

và ta gọi  $f(A)$  là **đa thức theo ma trận**  $A$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  và  $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ . Tính  $f(A)$ .

**Giải.** Ta có  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$ .

Suy ra

$$f(A) = 3 \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}$$

## 2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

2.1 [Simpopdf PDF Merge and Split Unregistered Version - http://www.simpopdf.com/](http://www.simpopdf.com/)  
Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

2.2 Ma trận bậc thang

2.3 Hạng của ma trận

## 2.1 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng*, viết tắt là phép **BĐSCTD** trên  $A$ , là một trong ba loại biến đổi sau:

**Loại 1.** Hoán vị hai dòng  $i$  và  $j$  ( $i \neq j$ ).

Ký hiệu :  $d_i \leftrightarrow d_j$

**Loại 2.** Nhân dòng  $i$  cho một số  $\alpha \neq 0$ .

Ký hiệu:  $d_i := \alpha d_i$

**Loại 3.** Cộng vào một dòng  $i$  với  $\beta$  lần dòng  $j$  ( $j \neq i$ ).

Ký hiệu:  $d_i := d_i + \beta d_j$

Với  $\varphi$  là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu  $\varphi(A)$  chỉ ma trận có từ  $A$  qua  $\varphi$ .

**Ví dụ.** 
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$



Ví dụ.

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simp.com>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 := 2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 := d_1 + 2d_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 & 8 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Tương đương dòng

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Nhận xét.

$$1) A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A;$$

$$2) A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := \frac{1}{\alpha} d_i} A;$$

$$3) A \xrightarrow{d_i := d_i + \beta d_j} A' \Rightarrow A' \xrightarrow{d_i := d_i - \beta d_j} A.$$

**Định nghĩa.** Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Ta nói  $A$  *tương đương dòng* với  $B$ , ký hiệu  $A \sim B$ , nếu  $B$  có được từ  $A$  qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy,

$A \sim B \Leftrightarrow$  Tồn tại các phép BDSCTD  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$

**Nhận xét.** Quan hệ tương đương dòng là một quan hệ tương đương trên  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , nghĩa là  $V, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  và  $C \sim B$ .

- i)  $A \sim A$  (tính phản xạ).
- ii)  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$  (tính đối xứng).
- iii)  $A \sim B$  và  $B \sim C \Rightarrow A \sim C$  (tính bắc cầu).

**Ví dụ.** 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B.$$

Vì  $B$  có được từ  $A$  qua lần lượt các phép BDSCTD sau:  $d_1 \leftrightarrow d_3$ ,  $d_2 := d_2 + 2d_1$ ,  $d_3 := 3d_3$ .

**Hỏi.** Làm cách nào kiểm tra hai ma trận tương đương dòng với nhau?

## 2.2 Ma trận bậc thang

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Phần tử khác không đầu tiên của một dòng kể từ bên trái được gọi là *phần tử cơ sở* của dòng đó.

**Ví dụ.** Cho ma trận  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Khi đó:

Dòng 1 có phần tử cơ sở là  $-1$ , dòng 2 có phần tử cơ sở là  $3$ , dòng 3 không có phần tử cơ sở.

**Định nghĩa.** Một ma trận được gọi là *ma trận bậc thang* nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

- Dòng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng;
- Phần tử cơ sở của dòng dưới nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Như vậy ma trận bậc thang sẽ có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$A$  là ma trận bậc thang,  $B$  không là ma trận bậc thang.

## ma trận bậc thang rút gọn

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Ma trận  $A$  được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu thỏa các điều kiện sau:

- $A$  là ma trận bậc thang.
- Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
- Trên các cột có chứa phần tử cơ sở, tất cả các hệ số khác đều bằng 0.

**Ví dụ.**  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$C$  là ma trận bậc thang rút gọn.

$D$  không là ma trận bậc thang rút gọn.

## 2.3 Hạng của ma trận

Dạng bậc thang

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Nếu  $A$  tương đương dòng với một ma trận bậc thang  $B$  thì  $B$  được gọi là một *dạng bậc thang* của  $A$ .

**Ví dụ.** Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó  $B$  là một dạng bậc thang của  $A$  vì  $B$  có được từ  $A$  thông qua các phép biến đổi:  $d_2 := d_2 + 2d_1$ ,  $d_3 = d_3 - 3d_1$ .

**Hỏi.** Dạng bậc thang của một ma trận có duy nhất không?

## Hạng của ma trận

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Nhận xét.** Một ma trận  $A$  thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của  $A$  đều có chung số dòng khác 0. Ta gọi số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của  $A$  là **hạng** của  $A$ , ký hiệu  $r(A)$ .

**Mệnh đề.** Cho  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Khi đó:

- i)  $0 \leq r(A) \leq m, n$ ;
- ii)  $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ;
- iii)  $r(A^T) = r(A)$ ;
- iv) Nếu  $A \sim B$  thì  $r(A) = r(B)$ .



**Định nghĩa.** Nếu  $A$  tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn  $B$  thì  $B$  được gọi là *dạng bậc thang rút gọn* của  $A$ .

**Nhận xét.** Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận  $A$  là duy nhất và ký hiệu  $R_A$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$ . Khi đó

$$R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -18 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$R_A$  có được từ  $A$  thông qua các phép biến đổi:  $d_2 := d_2 + 2d_1$ ,  $d_3 = d_3 - 3d_1$ ,  $d_2 := -1d_2$ ,  $d_1 := d_1 - 2d_2$ .

# Thuật toán Gauss

Tìm một dạng bậc thang của  $A = (a)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Bước 1:**  $i := 1, j := 1$ .

**Bước 2:** Nếu  $i > m$  hoặc  $j > n$  thì kết thúc.

**Bước 3:** Nếu  $a_{ij} = 0$  thì sang Bước 4. Nếu  $a_{ij} \neq 0$  thì thực hiện các phép BDSCTD sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với } k > i.$$

Sau đó  $i := i + 1, j := j + 1$  và quay về Bước 2.

**Bước 4:** Nếu  $a_{kj} = 0$  với mọi  $k > i$  thì  $j := j + 1$  và quay về Bước 2. Nếu  $a_{kj} \neq 0$  với một  $k > i$  nào đó thì chọn một  $k$  như vậy và thực hiện phép BDSCTD:  $d_i \leftrightarrow d_k$  và quay về Bước 3.

**Ví dụ.** Tìm một ma trận dạng bậc thang  $R$  của ma trận

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó xác định hạng của  $A$ .

**Giải.**

$$A \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 2d_1 \\ d_4 := d_4 - 6d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - http://w

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{d_4 := d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R. \end{aligned}$$

Ta có  $A \sim R$  và  $R$  có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên  $A$  có hạng là  $r(A) = 3$ .

**Lưu ý.** Trong quá trình đưa ma trận về dạng bậc thang, ta có thể dùng các phép BDSCTD phù hợp để tránh việc tính toán các số lẻ.

## Ví dụ.

Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Ví dụ.** Tìm tất cả giá trị  $m$  để  $r(A) = 3$  với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

**Ví dụ.** Tìm tất cả giá trị  $m$  để  $r(B) = 2$  với

$$B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

## Thuật toán Gauss-Jordan

Tìm một dạng bậc thang rút gọn của  $A = (a)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

Chỉ khác Thuật toán Gauss ở Bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

$$d_k := d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với } k \neq i;$$

$$d_i := \frac{1}{a_{ij}} d_i.$$

**Ví dụ.** Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 2d_1 \\ d_4 := d_4 - 6d_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} d_1 := d_1 + \frac{1}{2}d_2 \\ d_4 := d_4 - \frac{3}{2}d_2 \\ d_2 := -\frac{1}{2}d_2 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\begin{array}{l} d_1 := d_1 - \frac{1}{2}d_3 \\ d_2 := d_2 - \frac{5}{2}d_3 \\ d_4 := d_4 - \frac{5}{2}d_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.
 \end{aligned}$$

Ta thấy  $R_A$  là ma trận dạng bậc thang rút gọn của  $A$ .



**Ví dụ.**

Tìm dạng ma trận bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

## 3. Hệ phương trình tuyến tính

3.1 **Định nghĩa** [Simpopdf PDF Merge and Split Unregistered Version - http://www.simpopdf.com/](http://www.simpopdf.com/)

3.2 Nghiệm hệ của phương trình tuyến tính

3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính

3.4 Định lý Kronecker - Capelli

## 3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Mở đầu

Simo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1; \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1; \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

## 3.1 Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Một *hệ phương trình tuyến tính* trên  $\mathbb{K}$  gồm  $m$  phương trình,  $n$  ẩn số là một hệ có dạng

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right. \quad (*)$$

trong đó

- $a_{ij} \in \mathbb{K}$ : các hệ số;
- $b_i \in \mathbb{K}$ : các hệ số tự do;
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ : các ẩn số nhận giá trị trong  $\mathbb{K}$ .

Nếu (\*) có các hệ số tự do = 0 thì ta nói (\*) là *hệ phương trình thuần nhất* trên  $\mathbb{K}$ .

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ta gọi  $A$  là **ma trận hệ số**,  $X$  là cột các **ẩn**,  $B$  là cột các **hệ số tự do** của hệ (\*). Khi đó hệ (\*) được viết dưới dạng  $AX = B$ . Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$\tilde{A}$  được gọi là **ma trận mở rộng** (hay ma trận bổ sung) của hệ (\*).

## 3.2 Nghiệm hệ phương trình tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Ta nói  $u = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  là *nghiệm* của hệ phương trình (\*) nếu ta thay thế  $x_1 := \alpha_1, x_2 := \alpha_2, \dots, x_n := \alpha_n$  thì tất cả các phương trình trong (\*) đều thỏa.

**Định nghĩa.** Hai hệ phương trình được gọi là *tương đương* nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

**Nhận xét.** Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- Hoán đổi hai phương trình cho nhau.
- Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0.
- Cộng vào một phương trình một bội của phương trình khác.

**Định lý.** Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.

**Ví dụ.** Giải phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$

**Giải.**  $\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1 \end{array}]{}$   $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$

$\xrightarrow[\begin{array}{l} d_1 := d_1 + d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2 \end{array}]{}$   $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} d_3 := \frac{-1}{7}d_3 \\ d_1 := d_1 - 3d_3 \\ d_2 := d_2 - 5d_3 \end{array}]{}$   $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Ta có  $\tilde{A} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ . Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1; \\ 0x + y + 0z = 2; \\ 0x + 0y + z = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 1. \end{cases}$$

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \quad (2)$$



**Giải.** Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Như vậy,

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 9z = 9 \\ y + 7z = -5 \end{cases}$$

Như vậy nghiệm của (2) là

$$\begin{cases} x = 9 + 9t; \\ y = -5 - 7t; \\ z = t. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (3)$$

**Giải.** Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì  $0x + 0y + 0z = -5$ .

▶ Tiếp tục Gauss-Jordan



## 3.3 Giải hệ phương trình tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Có 2 phương pháp

- Gauss
- Gauss - Jordan

### Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng  $\tilde{A} = (A|B)$ .

Bước 2. Đưa ma trận  $\tilde{A}$  về dạng bậc thang  $R$ .

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang  $R$  mà ta kết luận nghiệm như sau:

- Trường hợp 1. Xuất hiện một dòng

$$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \mid \neq 0).$$

Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.

- Trường hợp 2. Ma trận  $R$  có dạng

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\left( \begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

- Trường hợp 3. Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:

- Ấn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ấn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình sau:

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

**Giải.** Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array} \right)$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_2 := d_2 - d_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_3 := d_3 + 4d_2 \\ d_4 := d_4 + 5d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\
 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\
 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\
 0 & 0 & 10 & 10 & 20
 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_3 \leftrightarrow d_4 \\ d_3 := \frac{1}{10} d_3}} \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\
 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 8 & 10 & 10
 \end{array} \right) \\
 \\
 \xrightarrow{d_4 := d_4 - 8d_3} \left( \begin{array}{cccc|c}
 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\
 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 2 & -6
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\
 \quad x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6; \\
 \quad \quad x_3 + x_4 = 2; \\
 \quad \quad \quad 2x_4 = -6
 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = 2; \\
 x_2 = 1; \\
 x_3 = 5; \\
 x_4 = -3.
 \end{array} \right.$$



**Ví dụ.** Giải hệ phương trình sau:

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4, \end{cases}$$

**Giải.** Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 2d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array} \right)$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_3 := d_3 + d_2 \\ d_4 := d_4 + d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2. \end{cases}$$

Chọn  $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ , ta tính được

$$\begin{cases} x_2 = -2 + 10x_3 - 17x_4 = -2 + 10\alpha - 17\beta; \\ x_1 = 1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 5 - 17\alpha + 29\beta. \end{cases}$$

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

**Giải.** Ta có

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 3d_1 \\ d_3 := d_3 + 2d_1 \\ d_4 := d_4 - 3d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{d_3 := d_3 + 3d_2} \\ \xrightarrow{d_4 := d_4 + 2d_2} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) .$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ -3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 9; \\ 10x_3 - 20x_4 = 18; \\ 0 = 2. \end{array} \right.$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó hệ đã cho cũng vô nghiệm.

## Phương pháp Gauss - Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng  $\tilde{A} = (A|B)$

Bước 2. Đưa ma trận  $\tilde{A}$  về dạng bậc thang rút gọn  $R_{\tilde{A}}$ .

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn  $R_{\tilde{A}}$  mà ta kết luận nghiệm như sau:

- **Trường hợp 1.** Xuất hiện một dòng  $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \mid \neq 0)$ . Kết luận hệ phương trình vô nghiệm.
- **Trường hợp 2.** Ma trận  $R_{\tilde{A}}$  có dạng

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n.$$

- **Trường hợp 3.** Khác 2 trường hợp trên. Khi đó hệ có vô số nghiệm, và:

- Ấn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở 1 sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ấn tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là **bậc tự do** của hệ phương trình.

▶ Xem lại ví dụ đầu tiên

## 3.4 Định lý Kronecker- Capelli

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định lý.** Nếu  $\tilde{A} = (A|B)$  là ma trận mở rộng của hệ gồm  $n$  ẩn dạng  $AX = B$  thì  $r(\tilde{A}) = r(A)$  hoặc  $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ .

Hơn nữa,

- nếu  $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$  thì hệ vô nghiệm;
- nếu  $r(\tilde{A}) = r(A) = n$  thì hệ có nghiệm duy nhất;
- $r(\tilde{A}) = r(A) < n$  thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là  $n - r(A)$ .

**Ví dụ.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số  $m$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m, \end{cases}$$



Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_1 := d_1 - d_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1 \\ d_4 := d_4 - 13d_1 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & 43 & 2m - 13 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} d_3 := d_3 - d_2 \\ d_4 := d_4 - 4d_2 \end{array}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m - 5 \end{array} \right)$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2} \\ \xrightarrow{d_4 := d_4 - 4d_2} \end{array} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m - 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m - 5 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_4 := d_4 - d_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m - 4 \end{array} \right)$$

Biện luận:

- 1)  $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ : Khi đó hệ (1) vô nghiệm nên hệ đã cho cũng vô nghiệm.
- 2)  $m = 2$ : Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1; \\ -x_2 - 3x_3 + 11x_4 = -2; \\ -x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Chọn  $x_4 = \alpha$  ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - \alpha; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14\alpha; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21\alpha. \end{cases}$$

Vậy khi  $m = 2$ , hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21\alpha, -1 + 14\alpha, 1 - \alpha, \alpha)$$

với  $\alpha \in \mathbb{K}$  tùy ý.

**Ví dụ.** Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số  $m$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4, \end{cases}$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\tilde{A} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m - 1 \\ 0 & -1 & 3 & m - 8 & m^2 - 6m \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_3 := d_3 + 2d_2 \\ d_4 := d_4 + d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m + 1 \\ 0 & 0 & 1 & m - 6 & m^2 - 6m + 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_4 := d_4 - d_3 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m + 1 \\ 0 & 0 & 0 & m - 7 & m^2 - 7m \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array} \right)$$

Biện luận:

1)  $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$ : Khi đó hệ (1) cho ta

$$\begin{cases} x_4 = m; \\ x_3 = m + 1 - x_4 = 1; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 3 - 2m; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Suy ra khi  $m \neq 7$  hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3 - 2m, 1, m).$$

2)  $m = 7$ : Hệ (1) tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases} \quad (2)$$

Chọn  $x_4 = \alpha$  ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - \alpha; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4\alpha; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + \alpha. \end{cases}$$

Vậy khi  $m = 7$  hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + \alpha, 17 - 4\alpha, 8 - \alpha, \alpha)$$

với  $\alpha \in \mathbb{K}$  tùy ý.

## 4. Ma trận khả nghịch

4.1 **Định nghĩa** [Simpopdf PDF Merge and Split Unregistered Version - http://www.simpopdf.com/merge-split-pdf-unregistered-version/](http://www.simpopdf.com/merge-split-pdf-unregistered-version/)

4.2 Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

## 4.1 Định nghĩa

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

Mở đầu

Xét trên tập số thực  $\mathbb{K}$ . Cho  $x \in \mathbb{K}$ , hỏi tồn tại hay không  $y$  sao cho

$$xy = 1.$$

**Hỏi.** Trên tập hợp ma trận thì sao?

**Định nghĩa.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Ta nói  $A$  **khả nghịch** nếu tồn tại ma trận  $B$  sao cho  $AB = BA = I_n$ . Nếu  $B$  thỏa điều kiện trên được gọi là **ma trận nghịch đảo** của  $A$ .

**Nhận xét.** Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của  $A$  là  $A^{-1}$ .



Ví dụ. Cho  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Khi đó  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Mệnh đề.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Giả sử  $A$  khả nghịch và có nghịch đảo là  $A^{-1}$ . Khi đó

- i)  $A^{-1}$  khả nghịch và  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- ii)  $A^T$  khả nghịch và  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
- iii)  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha A$  khả nghịch và  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ .

**Mệnh đề.** Cho  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Nếu  $A$  và  $B$  khả nghịch thì  $AB$  khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

## 4.2 Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định lý.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- i)  $A$  khả nghịch.
- ii)  $r(A) = n$ .
- iii)  $A \sim I_n$ .
- iv) Tồn tại các phép BDSCTD  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  biến ma trận  $A$  thành ma trận đơn vị  $I_n$ :

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BDSCTD  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ , ma trận đơn vị  $I_n$  sẽ biến thành ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ :

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

## Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập  $(A|I_n)$  và dùng các phép BSC/D biến  $A$  về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \longrightarrow \dots$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

- **Trường hợp 1:** Tồn tại  $p$  sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận  $A_p$  có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó  $A$  không khả nghịch.
- **Trường hợp 2:** Mọi ma trận  $A_i$  trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng  $(I_n|B)$ . Ta có  $A$  khả nghịch và  $A^{-1} = B$ .

**Lưu ý.** Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận  $A$  có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).

**Ví dụ.** Xét tính khả nghịch của  $A$  và tìm  $A^{-1}$  (nếu có)

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

**Giải.**

$$(A|I_4) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - http://w

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{d_1 := d_1 - 2d_2} \\
 \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_2}
 \end{array}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{d_1 := d_1 - 7d_3} \\
 \xrightarrow{d_2 := d_2 + 2d_3} \\
 \xrightarrow{d_4 := d_4 - 2d_3}
 \end{array}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{d_1 := d_1 + d_4} \\
 \xrightarrow{d_2 := d_2 - d_4} \\
 \xrightarrow{d_3 := d_3 - d_4}
 \end{array}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1
 \end{array} \right) \\
 \\
 \left( \begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1
 \end{array} \right) = (I_4 | A^{-1}).
 \end{array}$$

Như vậy,  $A$  khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Xét tính khả nghịch của  $A$  và tìm  $A^{-1}$  (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Giải.**

$$(A|I_4) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 4d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_3 := d_3 - 2d_2 \\ d_4 := d_4 - 3d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_4 := d_4 - d_3 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Ta có  $r(A) < 4$ . Suy ra  $A$  không khả nghịch.

## 5. Phương trình ma trận

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định lý.** Cho các ma trận  $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$  khả nghịch và  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K}), C \in M_{m \times n}(\mathbb{K}), D \in M_n(\mathbb{K})$ . Khi đó

- i)  $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ ;
- ii)  $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$ ;
- iii)  $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$ .

**Ví dụ.** Giải phương trình  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Giải.** Phương trình có dạng  $AX = B$ . Ta có  $A$  khả nghịch, nên

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$



**Ví dụ.** Giải phương trình  $X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Giải.** Phương trình có dạng  $XA = B$ . Ta có  $A$  khả nghịch, nên

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Tìm ma trận  $X$  thỏa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Giải.** Phương trình có dạng  $AXB = C$ . Ta có  $A, B$  khả nghịch, nên

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{aligned}
 X = A^{-1}CB^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ.** Tìm ma trận  $X$  thỏa  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Giải.** Đặt  $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ . Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_5 & x_2 + 2x_4 - x_6 \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 & -2x_2 - 3x_4 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ phương trình 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 = 1; \\ x_2 + 2x_4 - x_6 = -2; \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 = -1 \\ -2x_2 - 3x_4 + x_6 = 1. \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ \sim \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{array} \right)$$

Suy ra

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 - t; \\ x_2 = 4 - s; \\ x_3 = 1 + t; \\ x_4 = -3 + s; \\ x_5 = t; \\ x_6 = s. \end{array} \right. \quad t, s \in \mathbb{K}$$

$$\text{Vậy } X = \begin{pmatrix} -1 - t & 4 - s \\ 1 + t & -3 + s \\ t & s \end{pmatrix} \text{ với } t, s \text{ tự do.}$$

## Chương 2:

# ĐỊNH THỨC

Lê Văn Luyện

[lvluyen@yahoo.com](mailto:lvluyen@yahoo.com)

[www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt](http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt)

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

## Chương 2. ĐỊNH THỨC

1. Định nghĩa và các tính chất
2. Định thức và ma trận khả nghịch
3. Quy tắc Cramer

# 1. Định nghĩa và các tính chất

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://w>

1.1 Định nghĩa

1.2 Quy tắc Sarrus

1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

**Định nghĩa.** Cho  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{K})$ . **Định thức** của  $A$ , được ký hiệu là  $|A|$ , là một số duy nhất được xác định bằng công thức sau như sau:

- Nếu  $n = 1$ , nghĩa là  $A = (a)$ , thì  $|A| = a$ .

- Nếu  $n = 2$ , nghĩa là  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , thì  $|A| = ad - bc$ .

- Nếu  $n > 2$ , nghĩa là  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , thì

$$|A| \stackrel{\text{dòng 1}}{=} a_{11}|A(1|1)| - a_{12}|A(1|2)| + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n}|A(1|n)|.$$

trong đó  $A(i|j)$  là ma trận có được từ  $A$  bằng cách xóa đi dòng  $i$  và cột  $j$  của  $A$ .



Ví dụ. Cho  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Khi đó  $|A| = 4 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 20$ .

Ví dụ. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Giải.**

$$\begin{aligned} |A| &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 - 16 + 15 = 11. \end{aligned}$$

# Quy tắc Sarrus

Theo định nghĩa định thức, khi  $n = 3$ , ta có

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra công thức Sarrus dựa vào sơ đồ sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

$\downarrow$  cột 1     $\downarrow$  cột 2     $\downarrow$  cột 3     $\downarrow$  cột 1     $\downarrow$  cột 2  
 -            -            -            +            +

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Diagram illustrating the expansion of a 5x5 determinant using the Laplace expansion along the first row. The matrix is shown with columns labeled 'cột1' through 'cột5'. A red diagonal line indicates the expansion along the first row, with signs alternating as -, +, -, +, -. Blue dotted lines show the paths for the terms in the expansion.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

(Tổng ba đường chéo **đỏ** - tổng ba đường chéo **xanh**)

## Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 5 = -31.$$

S

## 1.3 Khai triển định thức theo dòng và cột

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{K})$ . Với mỗi  $i, j$ , ta gọi

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$$

là *phần bù đại số* của hệ số  $a_{ij}$ , trong đó  $A(i|j)$  là ma trận vuông cấp  $(n-1)$  có được từ  $A$  bằng cách xoá dòng  $i$ , cột  $j$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ . Khi đó

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

**Định lý.** Cho  $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{K})$ . Với mỗi  $i, j$ , gọi  $c_{ij}$  là phần bù đại số của hệ số  $a_{ij}$ . Ta có

- Công thức khai triển  $|A|$  theo dòng  $i$ :  $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{ik}$ .
- Công thức khai triển  $|A|$  theo cột  $j$ :  $|A| = \sum_{k=1}^n a_{kj}c_{kj}$ .

**Ví dụ.** Tính định thức của  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Lưu ý.** Trong việc tính toán tính định thức ta nên chọn dòng hay cột có nhiều số 0.

**Mệnh đề.** Cho  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Khi đó:

- i)  $|\overline{A}| = \overline{|A|}$ .
- ii) Nếu ma trận vuông  $A$  có một dòng hay một cột bằng 0 thì  $|A| = 0$ .
- iii) Nếu  $A$  là một ma trận tam giác thì  $|A|$  bằng tích các phần tử trên đường chéo của  $A$ , nghĩa là

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

**Định lý.** Nếu  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  thì  $|AB| = |A||B|$ .

**Ví dụ.**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 4 = -120.$$

## 1.4 Định thức và các phép biến đổi sơ cấp

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>**Định lý.** Cho  $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ . Khi đó

- i) Nếu  $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i \leftrightarrow d_j} A'$  thì  $|A'| = -|A|$ ;
- ii) Nếu  $A \xrightarrow{d_i := \alpha d_i} A'$  thì  $|A'| = \alpha |A|$ ;
- iii) Nếu  $A \xrightarrow[i \neq j]{d_i := d_i + \beta d_j} A'$  thì  $|A'| = |A|$ .

**Ví dụ.** Tính định thức của  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & -8 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dòng 2}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{cột 2}} 2.3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2 := d_2 - d_1} 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \\ 5 & -4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{dòng 2}} 6(-11)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -594.$$

**Lưu ý.** Vì  $|A^T| = |A|$  nên trong quá trình tính định thức ta có thể sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên cột.



Ví dụ.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 2 & +1 & 5 & -16 & & & & \\ 3 & -5 & 2 & 4 & \underline{d_2:=d_2-d_1} & 1 & -8 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & \underline{\underline{d_4:=d_4+2d_1}} & 0 & 44 & -27 & 3 \\ -4 & 2 & 5 & 3 & \underline{d_1:=d_1-2d_2} & 0 & 8 & -3 & 13 \\ & & & & \underline{d_3:=d_3-5d_2} & & & & \end{array}$$

$$\underline{\underline{\text{cột 1}}} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 19 & -16 & 7 \\ 44 & -27 & 3 \\ 8 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underline{d_3:=d_3-4d_2} \\ \underline{\underline{d_2:=d_2-3d_3}} \\ \underline{d_1:=d_1-7d_3} \end{array} \begin{vmatrix} 1195 & -751 & 0 \\ 548 & -342 & 0 \\ -168 & 105 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{cột 1}}} - \begin{vmatrix} 1195 & -751 \\ 548 & -342 \end{vmatrix} = -2858.$$

Ví dụ.

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc}
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
 \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}
 \end{array} \right| \\
 \\
 \begin{array}{l}
 d_1 := 6d_1 \\
 d_2 := 12d_2 \\
 d_3 := 60d_3
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc}
 \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{60} \\
 6 & 3 & 2 \\
 6 & 4 & 3 \\
 20 & 15 & 12
 \end{array} \right| \\
 \\
 \begin{array}{l}
 c_1 := c_1 - 2c_2 \\
 c_2 := c_2 - c_3 \\
 c_3 := c_3 - 2c_2
 \end{array}
 \frac{1}{4320}
 \left| \begin{array}{ccc}
 0 & 1 & 0 \\
 -2 & 1 & 1 \\
 -10 & 3 & 6
 \end{array} \right| \\
 \\
 \underline{\underline{\text{dòng 1}}}
 \left| \begin{array}{cc}
 -\frac{1}{4320} & \\
 -10 & 6
 \end{array} \right| = \frac{1}{2160}.
 \end{array}$$

**Nhận xét.** Trong quá trình tính định thức, phép BDSC loại 3 được khuyến khích dùng bởi nó không thay đổi giá trị định thức.

**Ví dụ.** Tính định thức của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kết quả  $|A| = -19$ ,  $|B| = -30$ .

**Ví dụ.** Tính định thức của ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 6 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 8 \\ -4 & -7 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Giải.**  $|C| = 24$ ;  $|D| = -174$ .

## 2. Định thức và ma trận khả nghịch

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

### Định nghĩa.

Cho  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ . Đặt  $C = (c_{ij})$  với  $c_{ij} = (-1)^{i+j}|A(i, j)|$  là phần bù đại số của  $a_{ij}$ . Ta gọi ma trận chuyển vị  $C^T$  của  $C$  là **ma trận phụ hợp** của  $A$ , ký hiệu là  $\text{adj}(A)$ .

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ .

Khi đó  $C = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 11 \\ 10 & -7 & 1 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 7 \\ 10 & -7 & -2 \\ 11 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ .

## Nhận diện ma trận khả nghịch

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định lý.** Ma trận vuông  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi  $|A| \neq 0$ . Hơn nữa, nếu  $A$  khả nghịch thì

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A).$$

**Ví dụ.** Tìm ma trận nghịch đảo của  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Giải.** Ta có  $|A| = -2 \neq 0$ . Suy ra  $A$  khả nghịch.

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_{22} = -3; c_{23} = -1; c_{31} = -2; c_{32} = 1; c_{33} = 1.$$

Suy ra

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Hệ quả.** Ma trận  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  khả nghịch khi và chỉ khi  $ad - bc \neq 0$ . Khi đó

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Ví dụ.** Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp định thức của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 11 & 1 & -5 \\ -7 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để ma trận sau khả nghịch

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Tính:  $|A^{-1}|$ ;  $|5A^{-1}|$ ;  $|\text{adj}(A)|$ .

**Ví dụ.** Cho  $A, B \in M_3(\mathbb{K})$  và  $|A| = 3, |B| = -2$ . Tính  $|(4AB)^{-1}|$  và  $|\text{adj}(AB)|$ .



### 3. Quy tắc Cramer

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định lý.** Cho hệ phương trình tuyến tính  $AX = B$  (\*) gồm  $n$  ẩn và  $n$  phương trình. Đặt

$$\Delta = \det A; \quad \Delta_j = \det(A_j), \quad j \in \overline{1, n},$$

trong đó  $A_j$  là ma trận có từ  $A$  bằng cách thay cột  $j$  bằng cột  $B$ . Khi đó:

i) Nếu  $\Delta \neq 0$  thì (\*) có một nghiệm duy nhất là:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j \in \overline{1, n}.$$

ii) Nếu  $\Delta = 0$  và  $\Delta_j \neq 0$  với một  $j$  nào đó thì (1) vô nghiệm.

iii) Nếu  $\Delta = 0$  và  $\Delta_j = 0 \forall j \in \overline{1, n}$  thì hệ vô nghiệm hoặc vô số nghiệm.

**Ví dụ.** Giải phương trình

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -14; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Vì  $\Delta \neq 0$  nên hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (2)$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -45;$$

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ.** Giải hệ phương trình

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \quad (3)$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 10 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Vì  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$  nên không kết luận được nghiệm của hệ. Do đó ta phải dùng Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải.

## Biện luận hệ phương trình bằng Cramer

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Ví dụ.** Giải và biện luận phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ -2x_1 + (m-2)x_2 + (m-5)x_3 = 2; \\ mx_1 + x_2 + (m+1)x_3 = -2. \end{cases}$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & m-2 & m-5 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3);$$

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & m-5 \\ -2 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -4m + 12;$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & m-5 \\ m & m-1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m-2 & 2 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2m - 6 = 2(m - 3).$$

### Biện luận:

▷ Nếu  $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ . Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{-4}{m-1}, 0, \frac{2}{m-1} \right).$$

▷ Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$

- Với  $m = 1$ , ta có  $\Delta_1 = 8 \neq 0$  nên hệ vô nghiệm.

- Với  $m = 3$ , ta có  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Khi đó hệ phương trình là:

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

Nghiệm của hệ là  $(x_1, x_2, x_3) = (3t - 2, t, 1 - \frac{5}{2}t)$  với  $t$  tự do.

**Ví dụ.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số  $m \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{cases} (m-7)x + 12y - 6z = m; \\ -10x + (m+19)y - 10z = 2m; \\ -12x + 24y + (m-13)z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

**Giải.**  $\Delta = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & -6 \\ -10 & m+19 & -10 \\ -12 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1)$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 12 & -6 \\ 2m & m+19 & -10 \\ 0 & 24 & m-13 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-17)$$

Simple PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m-7 & m & -6 \\ -10 & 2m & -10 \\ -12 & 0 & m-13 \end{vmatrix} = 2m(m-1)(m-14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} m-7 & 12 & m \\ -10 & m+19 & 2m \\ -12 & 24 & 0 \end{vmatrix} = 36m(m-1)$$

### Biện luận:

▷ Nếu  $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$  và  $m \neq 1$ . Khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{m(m^2 - 18m + 17)}{(m-1)(m^2 - 1)} = \frac{m(m-17)}{m^2 - 1}; \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{m(m^2 - 15m + 14)}{(m-1)(m^2 - 1)} = \frac{m(m-14)}{m^2 - 1}; \\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36m(m-1)}{(m-1)(m^2 - 1)} = \frac{-36m}{m^2 - 1}. \end{cases}$$



▷ Nếu  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$

- Với  $m = -1$ , ta có  $\Delta_1 = -36 \neq 0$  nên hệ (1) vô nghiệm.
- Với  $m = 1$ , ta có  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ . Hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} -6x + 12y - 6z = 1; \\ -10x + 20y - 10z = 2; \\ -12x + 24y - 12z = 0 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm.

## Chương 3:

# KHÔNG GIAN VECTƠ

Lê Văn Luyện

[lvluyen@yahoo.com](mailto:lvluyen@yahoo.com)

[www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt](http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt)

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

## Chương 3. KHÔNG GIAN VECTƠ

1. Không gian vectơ
2. Tổ hợp tuyến tính
3. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ
4. Không gian vectơ con
5. Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính
6. Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

# 1. Không gian vectơ

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $V$  là một tập hợp với phép toán  $+$ .  $V$  được gọi là *không gian vectơ* trên  $\mathbb{K}$  nếu mọi  $u, v, w \in V$  và  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  ta có 8 tính chất sau:

- (1)  $u+v = v+u$ ;
- (2)  $(u+v)+w = u+(v+w)$ ;
- (3) tồn tại  $0 \in V$  :  $u+0 = 0+u = u$ ;
- (4) tồn tại  $u' \in V$  :  $u'+u = u+u' = 0$ ;
- (5)  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ ;
- (6)  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ ;
- (7)  $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ ;
- (8)  $1.u = u$ .

Khi đó ta gọi:

- mỗi phần tử  $u \in V$  là một *vectơ*.
- mỗi số  $\alpha \in \mathbb{K}$  là một *vô hướng*.
- vectơ  $0$  là *vectơ không*.
- vectơ  $u'$  là *vectơ đối* của  $u$ .

**Ví dụ.** Xét  $V = \mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}, i \in \overline{1, n}\}$ .

Với  $u = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $v = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  và  $\alpha \in R$ , ta định nghĩa phép cộng  $+$  và nhân  $\cdot$  vô hướng như sau:

- $u+v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ ;
- $\alpha u = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$ .

Khi đó  $\mathbb{K}^n$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$ . Trong đó:

- ▷ Vectơ không là  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ;
- ▷ Vectơ đối của  $u$  là  $-u = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ .

**Ví dụ.** Tập hợp  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường là một không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$ . Trong đó

- ▷ Vectơ không là ma trận không
- ▷ Vectơ đối của  $A$  là  $-A$ .

**Ví dụ.** Tập hợp

$$\mathbb{K}[x] = \{p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, i \in \overline{1, n}\}$$

gồm các đa thức theo  $x$  với các hệ số trong  $\mathbb{K}$  là một không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$  với phép cộng vectơ là phép cộng đa thức thông thường và phép nhân vô hướng với vectơ là phép nhân thông thường một số với đa thức.

**Ví dụ.** Tập hợp  $\mathbb{K}_n[x]$  gồm các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng  $n$  theo  $x$  với các hệ số trong  $\mathbb{K}$  là một không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$ .

**Ví dụ.** Cho  $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$ .

Khi đó  $V$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$ .

**Ví dụ.** Cho  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 1\}$ .

Khi đó  $W$  không là không gian vectơ, vì

$$u = (1, 2, 1) \in W, v = (2, 3, 2) \in W,$$

nhưng  $u + v = (3, 5, 3) \notin W$

**Mệnh đề.** Cho  $V$  là một không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$ . Khi đó với mọi  $u \in V$  và  $\alpha \in \mathbb{K}$ , ta có

i)  $\alpha u = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ hay } u = 0)$ ;

ii)  $(-1)u = -u$ .

## 2. Tổ hợp tuyến tính

Simplo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simplo.com/>

### 1.1 Tổ hợp tuyến tính

### 1.2 Độc lập và phụ thuộc tuyến tính



## 2.1 Tổ hợp tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$ . Một *tổ hợp tuyến tính* của  $u_1, u_2, \dots, u_m$  là một vectơ có dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m \quad \text{với } \alpha_i \in \mathbb{K}$$

Khi đó, đẳng thức trên được gọi là *dạng biểu diễn* của  $u$  theo các vectơ  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

### Ví dụ.

- Vectơ  $u = (4, 4, 2)$  là tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $u_1 = (1, -1, 2)$ ,  $u_2 = (2, 3, -1)$ ,  $u_3 = (0, 1, -2)$ , vì

$$u = u_1 + 2u_2 - u_3.$$

- Vectơ  $0$  luôn luôn là một tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, \dots, u_m$  vì

$$0 = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_m.$$

**Hỏi.** Làm cách nào để biết  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, \dots, u_m$ ?

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmergere.com>

Ta có  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, \dots, u_m$  khi phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m \quad (*)$$

có nghiệm  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ .

Xét trường hợp không gian  $\mathbb{K}^n$ . Giả sử

$$\begin{aligned} u &= (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ u_1 &= (u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}); \\ u_2 &= (u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2}); \\ &\dots \\ u_m &= (u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{nm}). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó} \quad (*) \Leftrightarrow \begin{cases} u_{11}\alpha_1 + u_{12}\alpha_2 + \dots + u_{1m}\alpha_m = b_1; \\ u_{21}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + \dots + u_{2m}\alpha_m = b_2; \\ \dots \\ u_{n1}\alpha_1 + u_{n2}\alpha_2 + \dots + u_{nm}\alpha_m = b_n. \end{cases} \quad (**)$$

Ma trận hóa (\*\*\*) ta được

$$\left( \begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} & b_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nm} & b_n \end{array} \right)$$

Tức là

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_m^\top \mid u^\top)$$

Như vậy, để kiểm tra  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, \dots, u_m$  trong  $\mathbb{K}^n$  ta làm như sau:

- Lập ma trận hóa  $(u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_m^\top \mid u^\top)$  (1)
- ▷ Nếu (1) **vô nghiệm**, kết luận  $u$  không phải là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .
- ▷ Nếu (1) **có nghiệm**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  thì  $u$  là tổ hợp tuyến tính và có dạng biểu diễn theo là  $u_1, u_2, \dots, u_m$  :

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m$$

**Ví dụ.** Xét xem  $u = (-3, 1, 4)$  có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $u_1 = (1, 2, 1)$ ,  $u_2 = (-1, -1, 1)$ ,  $u_3 = (-2, 1, -1)$  hay không?

**Giải.**  $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} d_1 := d_1 + d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_3 := \frac{-1}{7}d_3 \\ d_1 := d_1 - 3d_3 \\ d_2 := d_2 - 5d_3 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (1; 2; 1)$ .

Vậy  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ .

Dạng biểu diễn của  $u$  là  $u = u_1 + 2u_2 + u_3$ .

**Ví dụ.** Xét xem  $u = (4, 3, 5)$  có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ

$u_1 = (1, 2, 5)$ ,  $u_2 = (1, 3, 7)$ ,  $u_3 = (-2, 3, 4)$  hay không?

**Giải.**  $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right)$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{d_2:=d_2-2d_1} \\ \xrightarrow{d_3:=d_3-5d_1} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} d_1:=d_1-d_2 \\ d_3:=d_3-2d_2 \end{array}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

Hệ vô nghiệm vì  $0x + 0y + 0z = -5$ . Vậy  $u$  không là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ .

**Ví dụ.** Xét xem  $u = (4, 3, 10)$  có là tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $u_1 = (1, 2, 5)$ ,  $u_2 = (1, 3, 7)$ ,  $u_3 = (-2, 3, 4)$  hay không?

**Giải.**  $(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right)$

$$\begin{array}{l} d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - 5d_1 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - 2d_2 \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nghiệm của hệ là  $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3) = (9 + 9t, -5 - 7t, t)$

Vậy  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ .

Dạng biểu diễn của  $u$  là  $u = (9 + 9t)u_1 + (-5 - 7t)u_2 + tu_3$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^4$  cho các vectơ  $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ ;

$u_2 = (2, 3, -1, 0)$ ;  $u_3 = (-1, -1, 1, 1)$ . Tìm điều kiện để vectơ

$u = (a, b, c, d)$  là một tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ .

**Giải.**

$$\begin{aligned} (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) &= \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & -3 & 2 & c-a \\ 0 & -2 & 2 & d-a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & -4a+3b+c \\ 0 & 0 & 2 & -3a+2b+d \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & -4a+3b+c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-c+d \end{array} \right). \end{aligned}$$

Để  $u$  là một tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$  thì hệ có nghiệm, tức là

$$a + d = b + c.$$

## 2.2 Độc lập và phụ thuộc tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$ . Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m = \mathbf{0}. \quad (*)$$

- Nếu (\*) chỉ có nghiệm tầm thường  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$  thì ta nói  $u_1, u_2, \dots, u_m$  (hay  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ) **độc lập tuyến tính**.
- Nếu ngoài nghiệm tầm thường, (\*) còn có nghiệm khác thì ta nói  $u_1, u_2, \dots, u_m$  (hay  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ) **phụ thuộc tuyến tính**.

Nói cách khác,

- ▷ Nếu phương trình (\*) có nghiệm duy nhất thì  $u_1, u_2, \dots, u_m$  độc lập tuyến tính.
- ▷ Nếu phương trình (\*) có vô số nghiệm thì  $u_1, u_2, \dots, u_m$  phụ thuộc tuyến tính.



**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$  cho các vectơ  $u_1 = (1, 2, -3)$ ;  $u_2 = (2, 5, -1)$ ,  $u_3 = (1, 1, -9)$ . Hỏi  $u_1, u_2, u_3$  độc lập hay phụ thuộc tuyến tính?

**Giải.** Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1(1, 2, -3) + \alpha_2(2, 5, -1) + \alpha_3(1, 1, -9) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 9\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ .

Ta có  $r(A) = 3$  nên hệ có nghiệm duy nhất. Suy ra  $u_1, u_2, u_3$  độc lập tuyến tính.

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$  cho các vectơ  $u_1 = (1, 1, 1)$ ;  $u_2 = (2, 1, 3)$ ;  $u_3 = (1, 2, 0)$ . Hỏi  $u_1, u_2, u_3$  độc lập hay phụ thuộc tuyến tính.

**Giải.** Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha + 3\alpha_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ta có  $r(A) = 2$  nên hệ vô số nghiệm. Suy ra  $u_1, u_2, u_3$  phụ thuộc tuyến tính.

**Nhận xét.** Họ vectơ  $u_1, u_2, \dots, u_m$  phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại vectơ  $u_i$  là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại. Thật vậy,

- Nếu  $u_1, u_2, \dots, u_m$  phụ thuộc tuyến tính thì có  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$  không đồng thời bằng 0 sao cho  $\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j = 0$ . Giả sử  $\alpha_i \neq 0$ , khi đó

$$u_i = -\frac{1}{\alpha_i} \sum_{j \neq i} \alpha_j u_j.$$

- Nếu có  $u_i$  sao cho  $u_i = \sum_{j \neq i} \beta_j u_j$  thì  $\sum_{j=1}^m \beta_j u_j = 0$ , trong đó  $\beta_i = -1 \neq 0$ , điều này chứng tỏ  $u_1, u_2, \dots, u_m$  phụ thuộc tuyến tính.

**Mệnh đề.** Cho  $V$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$  và  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  là tập hợp các vectơ thuộc  $V$ . Khi đó

- Nếu  $S$  phụ thuộc tuyến tính thì mọi tập chứa  $S$  đều phụ thuộc tuyến tính.
- Nếu  $S$  độc lập tuyến tính thì mọi tập con của  $S$  đều độc lập tuyến tính.

**Hệ quả.** Cho  $u_1, u_2, \dots, u_m$  là  $m$  vectơ trong  $\mathbb{K}^n$ . Gọi  $A$  là ma trận có được bằng cách xếp  $u_1, u_2, \dots, u_m$  thành các dòng. Khi đó  $u_1, u_2, \dots, u_m$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi  $A$  có hạng là  $r(A) = m$ .

Từ Hệ quả trên ta sẽ xây dựng thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ trong  $\mathbb{K}^n$

# Thuật toán kiểm tra tính độc lập tuyến tính của các vectơ trong $\mathbb{K}^n$

Simple PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdf-element.com/>

**Bước 1:** Lập ma trận  $A$  bằng cách xếp  $u_1, u_2, \dots, u_m$  thành các dòng.

**Bước 2:** Xác định hạng  $r(A)$  của  $A$ .

- ▷ Nếu  $r(A) = m$  thì  $u_1, u_2, \dots, u_m$  độc lập tuyến tính.
- ▷ Nếu  $r(A) < m$  thì  $u_1, u_2, \dots, u_m$  phụ thuộc tuyến tính.

Trường hợp  $m = n$ , ta có  $A$  là ma trận vuông. Khi đó có thể thay Bước 2 bằng Bước 2' sau đây:

**Bước 2':** Tính định thức  $\det A$ .

- ▷ Nếu  $\det A \neq 0$  thì  $u_1, u_2, \dots, u_m$  độc lập tuyến tính.
- ▷ Nếu  $\det A = 0$  thì  $u_1, u_2, \dots, u_m$  phụ thuộc tuyến tính.

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^5$  cho các vectơ  $u_1 = (1, 2, -3, 5, 1)$ ;  $u_2 = (1, 3, -13, 22, -1)$ ,  $u_3 = (3, 5, 1, -2, 5)$ . Hãy xét xem  $u_1, u_2, u_3$  độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

**Giải.**

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3 := d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có  $r(A) = 2 < 3$ . Suy ra  $u_1, u_2, u_3$  phụ thuộc tuyến tính.

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$  cho các vectơ

$$u_1 = (2m + 1, -m, m + 1);$$

$$u_2 = (m - 2, m - 1, m - 2);$$

$$u_3 = (2m - 1, m - 1, 2m - 1).$$

Tìm điều kiện để  $u_1, u_2, u_3$  độc lập tuyến tính.

**Giải.** Lập  $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m + 1 & -m & m + 1 \\ m - 2 & m - 1 & m - 2 \\ 2m - 1 & m - 1 & 2m - 1 \end{pmatrix}$  Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 2m + 1 & -m & m + 1 \\ m - 2 & m - 1 & m - 2 \\ 2m - 1 & m - 1 & 2m - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 := c_1 - c_3} \begin{vmatrix} m & -m & m + 1 \\ 0 & m - 1 & m - 2 \\ 0 & m - 1 & 2m - 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{cột 1}} m \begin{vmatrix} m - 1 & m - 2 \\ m - 1 & 2m - 1 \end{vmatrix} = m(m - 1)(m + 1).$$

Do đó  $u_1, u_2, u_3$  độc lập tuyến tính khi và chỉ khi

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow m(m - 1)(m + 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq \pm 1.$$

## 3. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

3.1 Tập sinh

3.2 Cơ sở và số chiều



## 3.1 Tập sinh

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định nghĩa.** Cho  $V$  là không gian vectơ và  $S \subset V$ .  $S$  được gọi là **tập sinh** của  $V$  nếu mọi vectơ  $u$  của  $V$  đều là tổ hợp tuyến tính của  $S$ . Khi đó, ta nói  $S$  sinh ra  $V$  hoặc  $V$  được sinh bởi  $S$ , ký hiệu  $V = \langle S \rangle$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)\}.$$

Hỏi  $S$  có là tập sinh của  $\mathbb{K}^3$  không?

**Giải.** Với  $u = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ , kiểm tra xem  $u$  có là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$  không?

Ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x + y \\ 0 & 0 & -1 & -x + z \end{array} \right).$$

Hệ có nghiệm. Suy ra  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ . Vậy  $S$  là tập sinh của  $\mathbb{K}^3$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 3, 1); u_3 = (3, 4, 0)\}.$$

Hỏi  $S$  có là tập sinh của  $\mathbb{K}^3$  không?

**Giải.** Với  $u = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ , ta lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 3 & 4 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & -x + y \\ 0 & 0 & 0 & 4x - 3y + z \end{array} \right).$$

Với  $u_0 = (1, 1, 1)$  thì hệ trên vô nghiệm.

Vậy  $u_0$  không là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ . Suy ra  $S$  không là tập sinh của  $\mathbb{K}^3$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}_2[x]$ , cho

$$S = \{f_1 = x^2 + x + 1; f_2 = 2x^2 + 3x + 1, f_3 = x^2 + 2x + 1\}.$$

Hỏi  $S$  có là tập sinh của  $\mathbb{K}_2[x]$  không?

**Giải.** Với  $f = ax^2 + bx + c \in \mathbb{K}_2[x]$ , kiểm tra xem  $f$  có là tổ hợp tuyến tính của  $f_1, f_2, f_3$  không?

Xét phương trình  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = f$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = a; \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = b; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c. \end{cases}$$

Ma trận hóa,  $\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -a + b \\ 0 & 0 & 1 & -2a + b + c \end{array} \right)$

Hệ có nghiệm. Vậy  $f$  là tổ hợp tuyến tính của  $f_1, f_2, f_3$ . Suy ra  $S$  là tập sinh của  $\mathbb{K}_2[x]$ .

## 3.2 Cơ sở và số chiều

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $V$  là không gian vectơ và  $\mathcal{B}$  là con của  $V$ .  $\mathcal{B}$  được gọi là một **cơ sở** của  $V$  nếu  $\mathcal{B}$  là một tập sinh và  $\mathcal{B}$  độc lập tuyến tính.

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)\}.$$

Kiểm tra  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ .

**Giải.**  $\mathcal{B}$  là tập sinh của  $\mathbb{K}^3$ . (theo ví dụ trên)

Kiểm tra  $\mathcal{B}$  độc lập tuyến tính.

$$\text{Lập ma trận } A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có  $r(A) = 3$  (hoặc  $|A| = -1$ ). Suy ra  $\mathcal{B}$  độc lập tuyến tính. Vậy  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -2); u_2 = (2, 3, 3); u_3 = (5, 7, 4)\}.$$

Hỏi  $S$  có là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$  không?

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$S = \{u_1 = (1, 1, -1); u_2 = (2, 1, 0); u_3 = (1, 1, 0); u_4 = (1, -4, 1)\}.$$

Hỏi  $S$  có là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$  không?

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}_2[x]$ , cho

$$S = \{f_1 = x^2 + x + 1; f_2 = 2x^2 + x + 1; f_3 = x^2 + 2x + 2\}$$

Hỏi  $S$  có là cơ sở của  $R_2[x]$  không?

## Số chiều

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Bổ đề.** Giả sử  $V$  sinh bởi  $m$  vectơ,  $V = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle$ . Khi đó mọi tập hợp con độc lập tuyến tính của  $V$  có không quá  $m$  phần tử.

**Hệ quả.** Giả sử  $V$  có một cơ sở  $\mathcal{B}$  gồm  $n$  vectơ. Khi đó mọi cơ sở khác của  $V$  hữu hạn và có đúng  $n$  vectơ.

**Định nghĩa.** Cho  $V$  là không gian vectơ, **số chiều** của  $V$ , ký hiệu là  $\dim V$ , là số vectơ của tập cơ sở. Trong trường hợp vô hạn chiều, ta ký  $\dim V = \infty$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1)\}.$$

Khi đó  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ . Do đó  $\dim \mathbb{K}^3 = 3$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^n$ , xét  $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , trong đó

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

.....

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Với  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Ta có

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Do đó  $\mathcal{B}_0$  là tập sinh của  $\mathbb{K}^n$ . Mặt khác  $\mathcal{B}_0$  độc lập tuyến tính nên  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^n$ .  $\mathcal{B}_0$  được gọi là **cơ sở chính tắc** của  $\mathbb{K}^n$ . Như vậy

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

**Ví dụ.** Không gian vectơ  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  có cơ sở

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$\mathcal{B}_0 = \{E_{ij} \mid i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, n}\},$$

trong đó  $E_{ij}$  là ma trận loại  $m \times n$  chỉ có một hệ số khác 0 duy nhất là hệ số 1 ở dòng  $i$  cột  $j$ . Do đó  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  hữu hạn chiều và

$$\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn.$$

**Ví dụ.** Không gian  $\mathbb{K}_n[x]$  gồm các đa thức theo  $x$  bậc không quá  $n$  với hệ số trong  $\mathbb{K}$ , là không gian vectơ hữu hạn chiều trên  $\mathbb{K}$  có  $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$  với cơ sở  $\mathcal{B}_0 = \{1, x, \dots, x^n\}$ .

**Ví dụ.** Không gian  $\mathbb{K}[x]$  gồm tất các đa thức theo  $x$  với hệ số trong  $\mathbb{K}$ , là không gian vectơ vô hạn chiều trên  $\mathbb{K}$  với cơ sở  $\mathcal{B}_0 = \{1, x, x^2, \dots\}$ .



**Hệ quả.** Cho  $V$  là không gian vectơ có  $\dim V = n$ . Khi đó

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

- i) Mọi tập con của  $V$  chứa nhiều hơn  $n$  vectơ thì phụ thuộc tuyến tính.
- ii) Mọi tập con của  $V$  chứa ít hơn  $n$  vectơ không sinh ra  $V$ .

**Bổ đề.** Cho  $S$  là một tập con độc lập tuyến tính của  $V$  và  $u \in V$  là một vectơ sao cho  $u$  không là tổ hợp tuyến tính của  $S$ . Khi đó tập hợp  $S_1 = S \cup \{u\}$  độc lập tuyến tính.

**Định lý.**

Cho  $V$  là một không gian vectơ hữu hạn chiều với  $\dim V = n$ . Khi đó

- i) Mọi tập con độc lập tuyến tính gồm  $n$  vectơ của  $V$  đều là cơ sở của  $V$ .
- ii) Mọi tập sinh của  $V$  gồm  $n$  vectơ đều là cơ sở của  $V$ .

## Nhận diện cơ sở của không gian $V$ có $\dim V = n$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Vì  $\dim V = n$  nên mọi cơ sở của  $V$  phải gồm  $n$  vectơ. Hơn nữa, nếu  $S \subset V$  và số phần tử của  $S$  bằng  $n$  thì

$S$  là cơ sở của  $V \Leftrightarrow S$  độc lập tuyến tính.

$\Leftrightarrow S$  là tập sinh của  $V$ .

**Ví dụ.** Kiểm tra tập hợp nào sau đây là cơ sở của không gian vectơ của  $\mathbb{K}^3$ ?

a)  $B_1 = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (2, 3, 4)\}$ .

b)  $B_2 = \{u_1 = (2, 1, 3), u_2 = (2, 1, 4), u_3 = (2, 3, 1), u_4 = (3, 4, 5)\}$ .

c)  $B_3 = \{u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (1, 3, 2), u_3 = (-2, 1, -2)\}$

d)  $B_4 = \{u_1 = (2, -1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (5, 0, 3)\}$

**Giải.**

a) b)  $B_1, B_2$  không phải là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$  vì số vectơ không bằng 3.

c)  $B_3 = \{u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (1, 3, 2), u_3 = (-2, 1, -2)\}$

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta có  $\det A = 3$ . Suy ra  $B_3$  độc lập tuyến tính. Mặt khác số vectơ của  $B_3$  bằng  $3 = \dim \mathbb{K}^3$  nên  $B_3$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$

d)  $B_4 = \{u_1 = (2, -1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (5, 0, 3)\}$

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ta có  $\det A = 0$ . Suy ra  $B_4$  không độc lập tuyến tính. Vì vậy  $B_4$  không là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}_2[x]$ , cho

$$S = \{f_1 = x^2 + x + 1; f_2 = 2x^2 + 3x + 1; f_3 = x^2 + 2x + 1\}.$$

Hỏi  $S$  có là cơ sở của  $\mathbb{K}_2[x]$  không?

**Giải.** Vì  $\dim R_2[x] = 3$  và số phần tử của  $S$  bằng 3 nên  $S$  là cơ sở của  $\mathbb{K}_2[x]$  khi  $S$  độc lập tuyến tính hoặc  $S$  là tập sinh.

**Cách 1.** Kiểm tra  $S$  độc lập tuyến tính.

$$\text{Xét phương trình } \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ma trận hóa, } \tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Hệ có nghiệm duy nhất  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Vậy  $S$  độc lập tuyến tính. Suy ra  $S$  là cơ sở của  $\mathbb{K}_2[x]$ .

**Cách 2.** Kiểm tra  $S$  là tập sinh. [▶ Xem lại ví dụ](#)

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$S = \{u_1 = (1, m - 2, -2), u_2 = (m - 1, 3, 3), u_3 = (m, m + 2, 2)\}.$$

Tìm điều kiện  $m$  để  $S$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ .

**Giải.** Do số phần tử của  $S$  bằng 3 nên  $S$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$  khi  $S$  độc lập tuyến tính.

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m - 2 & -2 \\ m - 1 & 3 & 3 \\ m & m + 2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Ta có } \det A = m - m^2.$$

Suy ra,  $S$  độc lập tuyến tính khi  $\det A \neq 0$ . Như vậy, để  $S$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$  thì  $m \neq 0$  và  $m \neq 1$ .

## 4. Không gian vectơ con

Simplo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://w>

4.1 Định nghĩa

4.2 Không gian sinh bởi tập hợp

4.3 Không gian dòng của ma trận

4.4 Không gian tổng

## 4.1 Định nghĩa

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $W$  là một tập con khác  $\emptyset$  của  $V$ . Ta nói  $W$  là một *không gian vectơ con* (gọi tắt, *không gian con*) của  $V$ , ký hiệu  $W \leq V$ , nếu  $W$  với phép toán  $(+, \cdot)$  được hạn chế từ  $V$  cũng là một không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$ .

**Ví dụ.**  $W = \{0\}$  và  $V$  là các vectơ con của  $V$ . Ta gọi đây là các *không gian con tầm thường* của  $V$ .

**Định lý.** Cho  $W$  là một tập con khác  $\emptyset$  của  $V$ . Khi đó các mệnh đề sau tương đương:

- i)  $W \leq V$ .
- ii) Với mọi  $u, v \in W$  ;  $\alpha \in \mathbb{K}$ , ta có  $u + v \in W$  và  $\alpha u \in W$ .
- iii) Với mọi  $u, v \in W$ ;  $\alpha \in \mathbb{K}$ , ta có  $\alpha u + v \in W$ .

**Ví dụ.** Cho  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ . Hỏi  $W$  có là không gian con của  $\mathbb{K}^3$  hay không?

**Giải.**

Ta có  $W \subset \mathbb{K}^3$ .

$0 = (0, 0, 0) \in W$  (vì  $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$ ). Suy ra  $W \neq \emptyset$ .

Với mọi  $u = (x_1, x_2, x_3) \in W$ , nghĩa là  $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ ,

$v = (y_1, y_2, y_3) \in W$  nghĩa là  $2y_1 + y_2 - y_3 = 0$

và  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Ta có

- $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ . Ta có

$$\begin{aligned} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) &= \\ (2x_1 + x_2 - x_3) + (2y_1 + y_2 - y_3) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Suy ra  $u + v \in W$ . (1)

- $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ . Ta có

$$2\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 = \alpha(2x_1 + x_2 - x_3) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Suy ra  $\alpha u \in W$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $W \leq \mathbb{K}^3$ .



**Nhận xét.** Cho  $V$  là không gian vectơ và  $W \subset V$ . Khi đó:

- Nếu  $W$  là không gian con của  $V$  thì  $0 \in W$ .
- Nếu  $0 \notin W$  thì  $W$  không là không gian con của  $V$ .

**Ví dụ.** Cho  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1\}$ . Hỏi  $W$  có là không gian con của  $\mathbb{K}^3$  không?

**Giải.** Ta có  $0 = (0, 0, 0) \notin W$  (vì  $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 \neq 1$ ). Suy ra  $W$  không là không gian con của  $\mathbb{K}^3$ .

**Ví dụ.** Cho  $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_1 = 2x_2x_3\}$ . Hỏi  $W$  có là không gian con của  $\mathbb{K}^3$  không?

**Giải.** Với  $u = (2, 1, 1)$  và  $v = (4, 2, 1)$ . Ta có  $u, v \in W$ .

$u + v = (6, 3, 2) \notin W$  (vì  $6 \neq 2 \cdot 3 \cdot 2$ ). Suy ra  $W$  không là không gian con của  $\mathbb{K}^3$ .

**Định lý.** Nếu  $W_1, W_2$  là không gian con của  $V$  thì  $W_1 \cap W_2$  cũng là một không gian con của  $V$ .

**Chứng minh.**

- $W_1 \cap W_2 \subset V$  (vì  $W_1 \subset V, W_2 \subset V$ )
- $0 \in W_1 \cap W_2$  (vì  $0 \in W_1, 0 \in W_2$ )
- Với mọi  $u, v \in W_1 \cap W_2; \alpha \in \mathbb{K}$ .

Vì  $u, v \in W_1$  nên  $\alpha u + v \in W_1$  (vì  $W_1 \leq V$ ).

Vì  $u, v \in W_2$  nên  $\alpha u + v \in W_2$  (vì  $W_2 \leq V$ ).

Suy ra  $\alpha u + v \in W_1 \cap W_2$ .

Vậy  $W_1 \cap W_2 \leq V$ .

**Định lý.** Nếu  $W_1, W_2$  là không gian con của  $V$ , ta định nghĩa

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdf-merge.com/>

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

Khi đó  $W_1 + W_2$  cũng là một không gian con của  $V$ .

**Chứng minh.**

- $W_1 + W_2 \subset V$  (vì  $W_1 \subset V, W_2 \subset V$ )
- $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$  (vì  $0 \in W_1, 0 \in W_2$ )
- Với mọi  $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2 \in W_1 + W_2; \alpha \in \mathbb{K}$ .

Vì  $u_1, v_1 \in W_1$  nên  $\alpha u_1 + v_1 \in W_1$  (vì  $W_1 \leq V$ ).

Vì  $u_2, v_2 \in W_2$  nên  $\alpha u_2 + v_2 \in W_2$  (vì  $W_2 \leq V$ ).

Ta có

$$\alpha u + v = \alpha(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

Vậy  $\alpha u + v \in W_1 + W_2$ .

Vậy  $W_1 + W_2 \leq V$ .

## 4.2 Không gian con sinh bởi tập hợp

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định lý.** Cho  $V$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$  và  $S$  là tập con khác rỗng của  $V$ . Ta đặt  $W$  là tập hợp tất cả các tổ tuyến tính của  $S$ . Khi đó:

- i)  $W \leq V$ .
- ii)  $W$  là không gian nhỏ nhất trong tất cả các không gian con của  $V$  mà chứa  $S$ .

Không gian  $W$  được gọi là không gian con sinh bởi  $S$ , ký hiệu  $W = \langle S \rangle$ .  
Cụ thể, nếu  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  thì

$$W = \langle S \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^2$ , ta xét  $S = \{u = (1, 2)\}$ . Khi đó

$$W = \langle S \rangle = \{a(1, 2) \mid a \in \mathbb{K}\} = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{K}\}.$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , ta xét

$$S = \{u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, 2, 0)\}.$$

Khi đó

$$\langle S \rangle = \{tu_1 + su_2 \mid t, s \in \mathbb{K}\} = \{(t - s, 2t + 2s, t) \mid t, s \in R\}$$

**Nhận xét.** Vì không gian sinh bởi  $S$  là không gian nhỏ nhất chứa  $S$  nên ta quy ước  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$W = \{(a + 2b, a - b, -a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{K}\}$$

- Chứng minh  $W$  là không gian con của  $\mathbb{K}^3$ .
- Tìm một tập sinh của  $W$ .

**Giải.** a) Ta có  $0 \in W$  vì  $0 = (0, 0, 0) = (0 + 2 \cdot 0, 0 - 0, -0 + 2 \cdot 0)$

Với  $u, v \in W$  và  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,

$$u = (a_1 + 2b_1, a_1 - b_1, -a_1 + 2b_1) \text{ với } a_1, b_1 \in \mathbb{K}$$

$$v = (a_2 + 2b_2, a_2 - b_2, -a_2 + 2b_2) \text{ với } a_2, b_2 \in \mathbb{K}. \text{ Khi đó:}$$

- $u + v = ( (a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2), (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2), -(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) ) \in W$  (vì  $a_1 + a_2, b_1 + b_2 \in \mathbb{K}$ ).
- $\alpha u = (\alpha a_1 + 2\alpha b_1, \alpha a_1 - \alpha b_1, -\alpha a_1 + 2\alpha b_1) \in W$  (vì  $\alpha a_1, \alpha b_1 \in \mathbb{K}$ ).

Vậy  $u + v, \alpha u \in W$ . Suy ra  $W \leq \mathbb{K}^3$ .

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } W &= \{(a + 2b, a - b, -a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{K}\} \\ &= \{a(1, 1, -1) + b(2, -1, 2) \mid a, b \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Vì mọi vectơ thuộc  $W$  đều là tổ hợp tuyến tính của

$u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (2, -1, 2)$  nên  $S = \{u_1, u_2\}$  là tập sinh của  $W$ .

**Định lý.** Cho  $V$  là không gian vectơ và  $S_1, S_2$  là tập con của  $V$ . Khi đó, nếu mọi vectơ của  $S_1$  đều là tổ hợp tuyến tính của  $S_2$  và ngược lại thì  $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$

**Chứng minh.** Vì mọi vectơ của  $S_1$  đều là tổ hợp tuyến tính của  $S_2$  nên  $S_1 \subset \langle S_2 \rangle$ . Mặt khác  $\langle S_1 \rangle$  là không gian nhỏ nhất chứa  $S_1$  nên  $\langle S_1 \rangle \subset \langle S_2 \rangle$ . Lý luận tương tự ta có  $\langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$  cho

$$S_1 = \{u_1 = (1, -1, 4), u_2 = (2, 1, 3)\},$$

$$S_2 = \{u_3 = (-1, -2, 1), u_4 = (5, 1, 10)\}.$$

Chứng minh  $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$ .

**Định lý.** [về cơ sở không toàn vẹn] Cho  $V$  là một không gian vectơ hữu hạn chiều và  $S$  là một tập con độc lập tuyến tính của  $V$ . Khi đó, nếu  $S$  không là cơ sở của  $V$  thì có thể thêm vào  $S$  một số vectơ để được một cơ sở của  $V$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^4$ , cho

$$S = \{u_1 = (1, 0, 2, 1), u_2 = (1, 0, 4, 4)\}.$$

Chứng tỏ  $S$  độc lập tuyến tính và thêm vào  $S$  một số vectơ để  $S$  trở thành cơ sở của  $\mathbb{K}^4$ .

**Giải.** Lập  $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Ta có  $r(A) = 2$  bằng số vectơ của  $S$ . Suy ra  $S$  độc lập tuyến tính.

Dựa vào  $A$  ta có thể thêm vào  $S$  hai vectơ

$$u_3 = (0, 1, 0, 0), u_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Rõ ràng  $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  đlnt. Suy ra  $S$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^4$ .



**Định lý.** Cho  $V$  là một không gian vectơ hữu hạn chiều sinh bởi  $S$ .

Khi đó tồn tại một cơ sở  $\mathcal{B}$  của  $V$  sao cho  $\mathcal{B} \subset S$ . Nói cách khác, nếu  $S$  không phải là một cơ sở của  $V$  thì ta có thể loại bỏ ra khỏi  $S$  một số vectơ để được một cơ sở của  $V$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho  $W$  sinh bởi

$$S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, 1, 3), u_3 = (1, 2, 0)\}.$$

Tìm một tập con của  $S$  để là cơ sở của  $W$ .

**Giải.** Xét phương trình

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha + 3\alpha_2) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ có nghiệm là  $\alpha_1 = -3t, \alpha_2 = t, \alpha_3 = t$ . Vậy

$$-3tu_1 + tu_2 + tu_3 = 0.$$

Cho  $t = 1$ , ta có  $-3u_1 + u_2 + u_3 = 0$  nên

$$u_2 = 3u_1 - u_3.$$

Suy ra  $u_2$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_3$ . Do đó  $\{u_1, u_3\}$  là tập sinh của  $W$ , hơn nữa nó độc lập tuyến tính nên nó là cơ sở của  $W$ .

## 4.3 Không gian dòng của ma trận

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho ma trận  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}); \\ u_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}); \\ &\dots \\ u_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

và

$$W_A = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle.$$

Ta gọi  $u_1, u_2, \dots, u_m$  là các **vectơ dòng** của  $A$ , và  $W_A$  là **không gian dòng** của  $A$ .

**Bổ đề.** Nếu  $A$  và  $B$  là hai ma trận tương đương dòng thì  $W_A = W_B$ , nghĩa là hai ma trận tương đương dòng có cùng không gian hàng.

**Định lý.** Giả sử  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Khi đó,  $\dim W_A = r(A)$  và tập hợp các vectơ khác không trong dạng ma trận bậc thang của  $A$  là cơ sở của  $W_A$ .

**Ví dụ.** Tìm số chiều và một cơ sở của không gian dòng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

**Giải.** 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 11 & -2 & 8 \\ 9 & 20 & -3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra  $\dim W_A = r(A) = 3$  và một cơ sở của  $W_A$  là

**Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>**  
 $\{u_1 = (1, 2, -1, 0), u_2 = (0, 1, 3, 2), u_3 = (0, 0, 0, 1)\}$ .

**Thuật toán tìm số chiều và cơ sở của một không gian con của  $\mathbb{K}^n$  khi biết một tập sinh**

Giả sử  $W = \langle u_1, u_2, \dots, u_m \rangle \leq \mathbb{K}^n$  ( $u_1, u_2, \dots, u_m$  không nhất thiết độc lập tuyến tính). Để tìm số chiều và một cơ sở của  $W$  ta tiến hành như sau:

**Bước 1.** Lập ma trận  $A$  bằng cách xếp  $u_1, u_2, \dots, u_m$  thành các dòng.

**Bước 2.** Dùng các phép BDSCTD đưa  $A$  về dạng bậc thang  $R$ .

**Bước 3.** Số chiều của  $W$  bằng số dòng khác 0 của  $R$  (do đó bằng  $r(A)$ ) và các vectơ dòng khác 0 của  $R$  tạo thành một cơ sở của  $W$ .

**Ví dụ.** Cho  $W$  sinh bởi  $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  trong đó  $u_1 = (1, 2, 1, 1)$ ;  $u_2 = (3, 6, 5, 7)$ ,  $u_3 = (4, 8, 6, 8)$ ,  $u_4 = (8, 16, 12, 20)$ . Tìm một cơ sở của không gian  $W$ .

**Giải.** Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó  $W$  có  $\dim W = 3$  và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

**Nhận xét.** Vì  $\dim W = 3$ , hơn nữa, có thể kiểm chứng  $u_1, u_2, u_3$  độc lập tuyến tính nên ta cũng có  $\{u_1, u_2, u_3\}$  là một cơ sở của  $W$ .

**Ví dụ.** Tìm một cơ sở cho không gian con của  $\mathbb{K}^4$  sinh bởi các vectơ  $u_1, u_2, u_3$ , trong đó  $u_1 = (1, -2, -1, 3)$ ,  $u_2 = (2, -4, -3, 0)$ ,  $u_3 = (3, -6, -4, 4)$ .

**Giải.** Lập

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do đó có  $\dim W = 3$  và có một cơ sở

$$\{v_1 = (1, -2, -1, 3); v_2 = (0, 0, -1, -6); v_3 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

**Nhận xét.** Trong ví dụ trên, vì  $r(A) = 3$  nên  $u_1, u_2, u_3$  độc lập tuyến tính, và do đó  $\{u_1, u_2, u_3\}$  cũng là một cơ sở của  $W$ .

## 4.4 Không gian tổng

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định lý.** Cho  $V$  là không gian vectơ trên  $\mathbb{K}$  và  $W_1, W_2$  là không gian con của  $V$ . Khi đó:

- i)  $W_1 + W_2$  là không gian con của  $V$ .
- ii) Nếu  $W_1 = \langle S_1 \rangle$  và  $W_2 = \langle S_2 \rangle$  thì

$$W_1 + W_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle.$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^4$  cho các vectơ  $u_1 = (1, 2, 1, 1)$ ;  $u_2 = (3, 6, 5, 7)$ ;  $u_3 = (4, 8, 6, 8)$ ;  $u_4 = (8, 16, 12, 16)$ ;  $u_5 = (1, 3, 3, 3)$ ;  $u_6 = (2, 5, 5, 6)$ ;  $u_7 = (3, 8, 8, 9)$ ;  $u_8 = (6, 16, 16, 18)$ .

Đặt  $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$  và  $W_2 = \langle u_5, u_6, u_7, u_8 \rangle$ . Tìm một cơ sở và xác định số chiều của mỗi không gian  $W_1, W_2$  và  $W_1 + W_2$ .

**Giải.**



- Tìm cơ sở của  $W_1$

$$\text{Lập } A_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 7 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 16 & 12 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó  $W_1$  có số chiều là 2 và một cơ sở là

$$\{v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2)\}.$$

- Tìm cơ sở của  $W_2$

$$\text{Lập } A_2 = \begin{pmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 8 & 9 \\ 6 & 16 & 16 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Do đó  $W_2$  có số chiều là 2 và một cơ sở là

$$\{v_3 = (1, 3, 3, 3); v_4 = (0, 1, 1, 0)\}$$

- Tìm cơ sở của  $W_1 + W_2$

Ta có  $W_1 + W_2$  sinh bởi các vectơ

$$v_1 = (1, 2, 1, 1); v_2 = (0, 0, 1, 2); v_3 = (1, 3, 3, 3); v_4 = (0, 1, 1, 0).$$

$$\text{Lập } A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra  $W_1 + W_2$  có số chiều là 3 và một cơ sở là

$$\{w_1 = (1, 2, 1, 1); w_2 = (0, 1, 1, 0); w_3 = (0, 0, 1, 2)\}.$$

## 5. Không gian nghiệm của hệ phương trình

### tuyến tính

Simple PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

#### 5.1 Mở đầu

#### 5.2 Tìm cơ sở của không gian nghiệm

#### 5.3 Không gian giao

## 5.1 Mở đầu

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Ví dụ.** Cho  $W$  là tập tất cả các nghiệm  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy hệ có nghiệm là

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{K}$$

Do đó

$$\begin{aligned} W &= \{(-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{K}\} \\ &= \{(-17t, 10t, t, 0) + (29s, -17s, 0, s) \mid t, s \in \mathbb{K}\} \\ &= \{t(-17, 10, 1, 0) + s(29, -17, 0, 1) \mid t, s \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Đặt  $u_1 = (-17, 10, 1, 0)$ ,  $u_2 = (29, -17, 0, 1)$ . Theo biểu thức trên, với  $u \in W$  thì  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2$ . Suy ra

$$W = \langle u_1, u_2 \rangle.$$

Hơn nữa  $\{u_1, u_2\}$  độc lập tuyến tính, nên  $\{u_1, u_2\}$  là cơ sở của  $W$ . Suy ra  $\dim W = 2$ .

**Nhận xét.** Vectơ  $u_1$  và  $u_2$  có được bằng cách cho lần lượt  $t = 1, s = 0$  và  $t = 0, s = 1$ . Ta gọi nghiệm  $u_1, u_2$  được gọi là **nghiệm cơ bản** của hệ.



## 5.2 Tìm cơ sở của không gian nghiệm

Thuật toán Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Bước 1.** Giải hệ phương trình, tìm nghiệm tổng quát.

**Bước 2.** Lần lượt cho bộ ẩn tự do các giá trị  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$  ta được các nghiệm cơ bản  $u_1, u_2, \dots, u_m$ .

**Bước 3.** Khi đó không gian nghiệm có cơ sở là  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ .

**Ví dụ.** Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0, \end{cases}$$

**Giải.** Ma trận hóa hệ phương trình, ta có

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 12 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 := d_2 - d_1 \\ d_3 := d_3 - 3d_1 \\ d_4 := d_4 - 2d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 15 & 17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \\ 0 & -1 & 10 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - 2d_2 \\ d_3 := d_3 + d_2 \\ d_4 := d_4 + d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & -29 \\ 0 & 1 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17t + 29s, 10t - 17s, t, s) \text{ với } t, s \in \mathbb{K}.$$

Các nghiệm cơ bản của hệ là

$$u_1 = (-17, 10, 1, 0), u_2 = (29, -17, 0, 1).$$

Do đó, nếu  $W$  là không gian nghiệm thì  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$  cơ sở của  $W$  và  $\dim W = 2$ .



## 5.3 Không gian giao

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Cho  $V$  là không gian vectơ và  $W_1, W_2$  là không gian con của  $V$ . Khi đó  $W_1 \cap W_2$  là không gian con của  $V$ . Hơn nữa nếu  $W_1 = \langle S_1 \rangle, W_2 = \langle S_2 \rangle$  thì  $u \in W_1 \cap W_2$  khi và chỉ khi  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $S_1$  và  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $S_2$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^4$  cho các vectơ  $u_1 = (1, 2, 1, 1), u_2 = (1, 2, 2, 3), u_3 = (2, 4, 3, 4), u_4 = (1, 3, 3, 3), u_5 = (0, 1, 1, 0)$ . Đặt  $W_1 = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, W_2 = \langle u_4, u_5 \rangle$ . Tìm cơ sở của không gian  $W_1 \cap W_2$ .

**Giải.** Gọi  $u = (x, y, z, t) \in W_1 \cap W_2$

• Vì  $u \in W_1$  nên  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3$ .

$$\left( u_1^\top \quad u_2^\top \quad u_3^\top \mid u^\top \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 2 & 4 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \\ 1 & 3 & 4 & t \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & x - z \\ 0 & 0 & 0 & -2x + y \\ 0 & 0 & 0 & x - 2z + t \end{array} \right)$$

Suy ra để  $u \in W_1$  thì  $-2x + y = 0$  và  $x - 2z + t = 0 \Rightarrow (1)$

- Vì  $u \in W_2$  nên  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $u_4, u_5$ .

$$\left( u_4^\top \quad u_5^\top \mid u^\top \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -3x + y \\ 0 & 0 & -y + z \\ 0 & 0 & -3x + t \end{array} \right)$$

Suy ra để  $u \in W_2$  thì  $-y + z = 0$  và  $-3x + t = 0$  (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} -2x + y & = 0 \\ x - 2z + t & = 0 \\ -y + z & = 0 \\ -3x + t & = 0 \end{cases}$$

Ma trận hóa  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_1 := d_1 - d_2 \\ d_2 := d_2 - d_1 \\ d_4 := d_4 - 3d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{d_2 := -d_2 \\ d_1 := d_1 - d_2 \\ d_3 := d_3 - d_2 \\ d_4 := d_4 - 3d_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_3 := \frac{1}{3}d_3 \\ d_1 := d_1 + 2d_3 \\ d_2 := d_2 - 2d_3 \\ d_4 := d_4 + 6d_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suy ra nghiệm của hệ là

$$u = (x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a, a\right) \text{ với } a \in \mathbb{K}.$$

Nghiệm cơ bản của hệ là  $u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ .

Suy ra  $W_1 \cap W_2$  có cơ sở là  $\{u_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\}$ .

**Định lý.** Cho  $W_1, W_2$  là hai không gian con hữu hạn chiều của  $V$ . Khi đó

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

## 6. Tọa độ và ma trận chuyển cơ sở

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

### 6.1 Tọa độ

### 6.2 Ma trận chuyển cơ sở

## 6.1 Tọa độ

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $V$  là không gian vectơ và  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là một cơ sở của  $V$ . Khi đó  $\mathcal{B}$  được gọi là **cơ sở được sắp** của  $V$  nếu thứ tự các vectơ trong  $\mathcal{B}$  được cố định. Ta thường dùng ký hiệu

$$(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

để chỉ cơ sở được sắp theo thứ tự  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

**Định lý.** Cho  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  là cơ sở của  $V$ . Khi đó mọi vectơ  $u \in V$  đều được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n.$$

**Chứng minh.**

• **Sự tồn tại.** Vì  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $V$  nên  $\mathcal{B}$  là tập sinh. Với  $u \in V$  thì  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $\mathcal{B}$ . Suy ra, tồn tại  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  để

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n.$$

- Sự duy nhất.

Giả sử  $u$  có một dạng biểu diễn khác

$$u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Nghĩa là:

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Khi đó

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + (\alpha_2 - \beta_2)u_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0.$$

Do  $\mathcal{B}$  là cơ sở nên  $\mathcal{B}$  độc lập tuyến tính, ta có

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

hay

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

Điều này chứng tỏ  $u$  có một dạng biểu diễn duy nhất.

## Tọa độ

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Như vậy, nếu  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  là cơ sở của  $V$  và  $u \in V$  thì  $u$  sẽ có dạng biểu diễn duy nhất là:

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Ta đặt

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó  $[u]_{\mathcal{B}}$  được gọi là **tọa độ** của  $u$  theo cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , ta có cơ sở chính tắc

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Với  $u = (x_1, x_2, x_3)$  ta có:  $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ .



Suy ra  $[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = u^\top$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Nhận xét.** Đối với cơ sở chính tắc  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  của không gian  $\mathbb{K}^n$  và  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  ta có

$$[u]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = u^\top.$$

**Ví dụ.** Không gian  $R_2[x]$  có cơ sở chính tắc là

$$\mathcal{B}_0 = \{x^2, x, 1\}.$$

Với  $f = ax^2 + bx + c$ , ta có  $[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

## Phương pháp tìm $[u]_B$

Cho  $V$  là không gian vectơ có cơ sở là  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  và  $u \in V$ .

Để tìm  $[u]_B$  ta đi giải phương trình

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \quad (*)$$

với ẩn  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ . Do  $\mathcal{B}$  là cơ sở nên phương trình  $(*)$  có nghiệm duy nhất

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Khi đó  $[u]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ .

**Lưu ý.** Khi  $V = \mathbb{K}^n$ , để giải phương trình  $(*)$  ta lập hệ

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_n^\top \mid u^\top)$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho các vectơ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a) Chứng minh  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ .  
 b) Tìm tọa độ của vectơ  $u = (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  theo cơ sở  $\mathcal{B}$ .

**Giải.**

a) Lập  $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Ta có  $|A|=1$ , suy ra  $u_1, u_2, u_3$

độc lập tuyến tính. Vậy  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ .

b) Với  $u = (a, b, c)$ , để tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$  ta lập hệ phương trình

$$(u_1^{\top} \ u_2^{\top} \ u_3^{\top} \mid u^{\top}) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 5 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4a - b - c \\ 0 & 1 & 0 & -a + b - c \\ 0 & 0 & 1 & -a + c \end{array} \right)$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4a - b - c \\ -a + b - c \\ -a + c \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $R_2[x]$  cho

$$f_1 = x^2 + x + 1, f_2 = 2x^2 + 3x + 1, f_3 = x^2 + 2x + 1$$

a) Chứng minh  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{K}_2[x]$ .

b) Tìm tọa độ của vectơ  $f = x^2 + 3x + 3$  theo cơ sở  $\mathcal{B}$ .

c) Cho  $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ , tìm  $g$ ?

**Giải.**

a) Kiểm tra  $\mathcal{B}$  là cơ sở (tự làm)

b) Với  $f = x^2 + 3x + 3$ , để tìm  $[f]_{\mathcal{B}}$  ta đi giải phương trình

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1; \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 3; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Ma trận hóa,  $\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$

Vậy  $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

c) Ta có  $[g]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ , suy ra  $g = 2f_1 + 3f_2 - 4f_3$

$$\begin{aligned} g &= 2(x^2 + x + 1) + 3(2x^2 + 3x + 1) - 4(x^2 + 2x + 1) \\ &= 4x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

**Mệnh đề.** Cho  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $V$ . Khi đó, với mọi  $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$  ta có:

- $[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$ .
- $[\alpha u]_{\mathcal{B}} = \alpha[u]_{\mathcal{B}}$ .

## 6.2 Ma trận chuyển cơ sở

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $V$  là một không gian vectơ và

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

là hai cơ sở của  $V$ . Đặt

$$P = ([v_1]_{\mathcal{B}_1} \ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ \dots \ [v_n]_{\mathcal{B}_1}).$$

Khi đó  $P$  được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ cơ sở  $\mathcal{B}_1$  sang cơ sở  $\mathcal{B}_2$  và được ký hiệu  $(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, -2, 3), u_2 = (2, 3, -1), u_3 = (3, 1, 3))$$

là cơ sở của  $\mathbb{K}^3$ . Gọi  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{K}^3$ . Khi đó

$$(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = ([u_1]_{\mathcal{B}_0} \ [u_2]_{\mathcal{B}_0} \ [u_3]_{\mathcal{B}_0}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Nhận xét.** Nếu  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  là một cơ sở của  $\mathbb{K}^n$  và  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{K}^n$  thì

$$(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_n^\top)$$

### Phương pháp tìm $(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)$

Giả sử  $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  và  $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là hai cơ sở của  $V$ . Ta thực hiện như sau:

- Cho  $u$  là vectơ bất kỳ của  $V$ , xác định  $[u]_{\mathcal{B}_1}$ .
- Lần lượt thay thế  $u$  bằng  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ta xác định được

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1}, [v_2]_{\mathcal{B}_1}, \dots, [v_n]_{\mathcal{B}_1}.$$

Khi đó

$$(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = ([v_1]_{\mathcal{B}_1} \ [v_2]_{\mathcal{B}_1} \ \dots \ [v_n]_{\mathcal{B}_1})$$

Đặc biệt, khi  $V = \mathbb{K}^n$ , để xác định  $(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)$  ta có thể làm như sau:

- Thành lập ma trận chuyển cơ sở  $(u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_n^\top \ | \ v_1^\top \ v_2^\top \ \dots \ v_n^\top)$
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận trên về dạng  $(I_n | P)$ .
- Khi đó  $(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = P$ .

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{K}^3$ , cho hai cơ sở

$$\mathcal{B}_1 = (u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 1), u_3 = (2, 3, 1))$$

và

$$\mathcal{B}_2 = (v_1 = (1, -3, 2), v_2 = (-1, -2, 4), v_3 = (3, 3, -2)).$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $\mathcal{B}_1$  sang  $\mathcal{B}_2$ .

**Giải.** Cho  $u = (a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ , xác định  $[u]_{\mathcal{B}_1}$ . Ta lập

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a - b + c \\ 0 & 1 & 0 & -2a + b + c \\ 0 & 0 & 1 & a - c \end{array} \right)$$



Như vậy  $[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} a - b + c \\ -2a + b + c \end{pmatrix}$ .

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

Thay lần lượt  $u$  bởi  $v_1, v_2, v_3$  ta được

$$[v_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vậy } (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

### Cách khác

Lập ma trận mở rộng

$$\begin{aligned} (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid v_1^\top \ v_2^\top \ v_3^\top) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 5 \end{array} \right). \text{ Suy ra } (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Định lý.** Cho  $V$  là một không gian vectơ hữu hạn chiều và  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$  là ba cơ sở của  $V$ . Khi đó

$$\text{i) } (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1) = I_n.$$

$$\text{ii) } \forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)[u]_{\mathcal{B}_2}.$$

$$\text{iii) } (\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)^{-1}.$$

$$\text{iv) } (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_3) = (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)(\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_3).$$

**Hệ quả.** Cho  $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n); \mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  là hai cơ sở của không gian  $\mathbb{K}^n$ . Gọi  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{K}^n$ . Ta có

$$\text{i) } (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1) = (u_1^\top \ u_2^\top \ \dots \ u_n^\top).$$

$$\text{ii) } (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1)^{-1}.$$

$$\text{iii) } \forall u \in V, [u]_{\mathcal{B}_1} = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1)^{-1}[u]_{\mathcal{B}_0}.$$

$$\text{iv) } (\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2) = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1)^{-1}(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_2).$$

**Ví dụ.** Cho  $W$  là không gian con của  $\mathbb{K}^4$  sinh bởi các vectơ:

$u_1 = (1, 2, 2, 1), u_2 = (0, 2, 0, 1), u_3 = (-2, 3, -4, 1)$ .

a) Chứng minh  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $W$ .

b) Cho  $u = (a, b, c, d)$ , tìm điều kiện để  $u \in W$ . Khi đó tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$ .

c) Cho  $v_1 = (1, 0, 2, 0); v_2 = (0, 2, 0, 1); v_3 = (0, 0, 0, 1)$ . Chứng minh  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  cũng là một cơ sở của  $W$ . Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $\mathcal{B}$  sang  $\mathcal{B}'$ .

**Giải.**

a) Chứng minh  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $W$ .

Lập  $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ . Ta có  $r(A) = 3$ , suy ra  $\mathcal{B}$

độc lập tuyến tính. Vì  $W = \langle \mathcal{B} \rangle$  nên  $\mathcal{B}$  là cơ sở của  $W$ .

b) Cho  $u = (a, b, c, d)$ , tìm điều kiện để  $u \in W$ . Khi đó tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$ .

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

Ta có  $u \in W$  khi  $u$  là tổ hợp tuyến tính của  $\mathcal{B}$ .

Lập hệ phương trình

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top | u^\top) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a + 2b - 4d \\ 0 & 1 & 0 & -a - 3b + 7d \\ 0 & 0 & 1 & b - 2d \\ 0 & 0 & 0 & -2a + c \end{array} \right)$$

Dựa vào hệ phương trình, để  $u \in W$  thì  $-2a + c = 0$ . Suy ra

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a + 2b - 4d \\ -a - 3b + 7d \\ b - 2d \end{pmatrix}$$

c) Cho  $v_1 = (1, 0, 2, 0)$ ;  $v_2 = (0, 2, 0, 1)$ ;  $v_3 = (0, 0, 0, 1)$ . Chứng minh  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  độc lập tuyến tính và tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $\mathcal{B}$  sang  $\mathcal{B}'$ .

Ta thấy các vectơ  $v_1, v_2, v_3$  đều thỏa điều kiện  $-2a + c = 0$  nên theo câu a), các vectơ này thuộc  $W$ .

Mặt khác, dễ thấy rằng  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  độc lập tuyến tính nên  $\mathcal{B}'$  cũng là cơ sở của  $W$  (do  $\dim W = |\mathcal{B}| = 3 = |\mathcal{B}'|$ ). Dùng kết quả ở câu b) ta có

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Suy ra } (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$ , cho

$S = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, -2, 1), u_3 = (1, -1, 2))$

$T = (v_1 = (1, -2, 2), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (1, -1, 2))$

- a) Chứng tỏ  $S$  và  $T$  là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $S$  sang  $T$  (kí hiệu  $(S \rightarrow T)$ ).

c) Cho  $u \in \mathbb{R}^3$  thỏa  $[u]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Tính  $[u]_S$ .

## Chương 4:

# ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Lê Văn Luyện

[lvluyen@yahoo.com](mailto:lvluyen@yahoo.com)

<http://www.math.hcmus.edu.vn/~lvluyen/09tt>

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

## Chương 4. ẢNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa
2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính
3. Ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính



# 1. Định nghĩa

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://w>

## 1.1 Ảnh xạ

## 1.2 Ảnh xạ tuyến tính

## 1.1 Ánh xạ

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmergere.com/>

**Định nghĩa.** Cho  $X$  và  $Y$  là hai tập hợp khác rỗng. **Ánh xạ** giữa hai tập  $X$  và  $Y$  là một qui tắc sao cho mỗi  $x$  thuộc  $X$  tồn tại duy nhất một  $y$  thuộc  $Y$  để  $y = f(x)$ .

Ta viết

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Nghĩa là  $\forall x \in X, \exists! y \in Y, y = f(x)$ .

### Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  là ánh xạ.
- $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi  $g(x, y, z) = (2x + y, x - 3y + z)$  là ánh xạ.
- $h : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$  xác định bởi  $h\left(\frac{m}{n}\right) = m$  không là ánh xạ.

**Định nghĩa.** Hai ánh xạ  $f$  và  $g$  từ  $X$  vào  $Y$  được gọi là *bằng nhau* nếu  $\forall x \in X, f(x) = g(x)$ .

**Ví dụ.** Xét ánh xạ  $f(x) = (x - 1)(x + 1)$  và  $g(x) = x^2 - 1$  từ  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Ta có  $f = g$ .

**Định nghĩa.** Cho hai ánh xạ  $f : X \rightarrow Y$  và  $g : Y' \rightarrow Z$  trong đó  $Y \subset Y'$ . *Ánh xạ tích*  $h$  của  $f$  và  $g$  là ánh xạ từ  $X$  vào  $Z$  xác định bởi:

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto h(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Ta viết:  $h = g \circ f$ .

**Ví dụ.** Cho  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi  $f(x) = 2x + 1$  và  $g(x) = x^2 + 2$ .  
Khi đó

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 2(x^2 + 2) + 1 = 2x^2 + 5.$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 3.$$

## Ảnh và ảnh ngược của ánh xạ

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $f : X \rightarrow Y$  là ánh xạ,  $A \subset X, B \subset Y$ . Khi đó:

- $f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in A, y = f(x)\}$  được gọi là **ảnh** của  $A$ .
- $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$  được gọi là **ảnh ngược** của  $B$ .
- $f(X)$  được gọi là **ảnh của ánh xạ**  $f$ , ký hiệu **Imf**.

**Ví dụ.** Cho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $f(x) = x^2 + 1$ . Khi đó:

$$f([1, 3]) = [2, 10]$$

$$f([-2, -1]) = [2, 5]$$

$$f([-1, 3]) = [1, 10]$$

$$f((1, 5)) = (2, 26)$$

$$f^{-1}(1) = \{0\}$$

$$f^{-1}(2) = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}(-5) = \emptyset$$

$$f^{-1}([2, 5]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

## Phân loại ánh xạ

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

a) **Đơn ánh.** Ta nói  $f : X \rightarrow Y$  là một **đơn ánh** nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của  $X$  đều có ảnh khác nhau.

Nghĩa là:  $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ .

### Ví dụ.

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $f(x) = x^2 + 1$  (là đơn ánh)
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $g(x) = x^2 + 1$  (không đơn ánh)

b) **Toàn ánh.** Ta nói  $f : X \rightarrow Y$  là một **toàn ánh** nếu  $f(X) = Y$ .

Nghĩa là:  $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ .

### Ví dụ.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $f(x) = x^3 + 1$  (là toàn ánh)
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $g(x) = x^2 + 1$  (không toàn ánh)

c) **Song ánh.** Ta nói  $f : X \rightarrow Y$  là một **song ánh** nếu  $f$  là đơn ánh và toàn ánh.

**Ví dụ.**

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $f(x) = 2x + 1$  (là song ánh)
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định  $g(x) = x^2 + 1$  (không song ánh)

## Ánh xạ ngược

Xét  $f : X \rightarrow Y$  là một song ánh. Khi đó, với mọi  $y \in Y$ , tồn tại duy nhất một phần tử  $x \in X$  thỏa  $f(x) = y$ . Do đó tương ứng  $y \mapsto x$  là một ánh xạ từ  $Y$  vào  $X$ . Ta gọi đây là ánh xạ ngược của  $f$  và ký hiệu  $f^{-1}$ . Như vậy:

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x \text{ sao cho } f(x) = y$$

**Ví dụ.** Cho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  với  $f(x) = 2x + 1$ . Khi đó  $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$ .

## 1. 2. Ánh xạ tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $V$  và  $W$  là hai không gian vectơ trên trường  $\mathbb{R}$ . Ta nói  $f : V \rightarrow W$  là một **ánh xạ tuyến tính** nếu nó thỏa hai điều kiện dưới đây:

- i)  $f(u + v) = f(u) + f(v), \forall u, v \in V,$
- ii)  $f(\alpha u) = \alpha f(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$

**Nhận xét.** Điều kiện i) và ii) trong định nghĩa có thể được thay thế bằng một điều kiện :

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$$

**Ký hiệu.**

- $L(V, W)$  là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ  $V \rightarrow W$ .
- Nếu  $f \in L(V, V)$  thì  $f$  được gọi là một **toán tử tuyến tính** trên  $V$ . Viết tắt  $f \in L(V)$ .

**Nhận xét.** Nếu  $f \in L(V, W)$  thì

- $f(0) = 0$ ;
- $f(-u) = -f(u), \forall u \in V$ .

**Ví dụ.** Cho ánh xạ  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x + z).$$

Chúng ta chứng tỏ  $f$  là ánh xạ tuyến tính.

**Giải.**  $\forall u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ . Ta có

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 - 3z_1 - 3z_2, 2x_1 + 2x_2 + z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + 2y_1 - 3z_1, 2x_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - 3z_2, 2x_2 + z_2) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Tính chất  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha u) = \alpha f(u)$  kiểm tra tương tự.



**Định lý.** Cho  $V$  và  $W$  là hai không gian vectơ,  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là cơ sở của  $V$ . Khi đó, với  $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  là một tập lập của  $W$ , tồn tại duy nhất một  $f \in L(V, W)$  sao cho

$$f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, \dots, f(u_n) = v_n.$$

Hơn nữa, nếu  $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  thì

$$f(u) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \dots + \alpha_n f(u_n)$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho các vectơ:

$$u_1 = (1, -1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (2, -1, 3).$$

- i) Chứng tỏ  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .
- ii) Tìm ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

**Giải.**

a) Chứng tỏ  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$

Lập  $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ . Ta có  $|A| = 1$ . Suy ra  $\mathcal{B}$  độc lập

tuyến tính. Vì  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  bằng số vectơ của  $\mathcal{B}$  nên  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ .

b) Tìm ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  thỏa:

$$f(u_1) = (2, 1, -2); f(u_2) = (1, 2, -2); f(u_3) = (3, 5, -7).$$

Cho  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$ .

Lập

$$(u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \ | \ u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array} \right).$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x + y - z \\ -x + z \end{pmatrix}.$$

Simple PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdf-element.com/>

Suy ra  $u = (x - y - z)u_1 + (2x + y - z)u_2 + (-x + z)u_3$ .

Vậy, ta có

$$\begin{aligned} f(u) &= (x - y - z)f(u_1) + (2x + y - z)f(u_2) + (-x + z)f(u_3) \\ &= (x - y - z)(2, 1, -2) + (2x + y - z)(1, 2, -2) \\ &\quad + (-x + z)(3, 5, -7) \\ &= (x - y, y + 2z, x - 3z). \end{aligned}$$

## 2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

1.1 Không gian nhân

1.2 Không gian ảnh

## 2.1 Không gian nhân

Simp PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

**Định nghĩa.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\text{Ker } f = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$$

Khi đó  $\text{Ker } f$  là không gian con của  $V$ , ta gọi  $\text{Ker } f$  là *không gian nhân* của  $f$ .

**Nhận xét.** Dựa vào Định nghĩa, ta được

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(u) = 0.$$

**Ví dụ.** Cho  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của  $\text{Ker } f$ .

**Giải.** Gọi  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(u) = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ma trận hóa, } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ phương trình có nghiệm  $(x, y, z) = (2t, -t, t)$  với  $t \in \mathbb{R}$ .

Nghiệm cơ bản của hệ là  $u_1 = (2, -1, 1)$ .

Vậy,  $\text{Ker } f$  có cơ sở là  $\{u_1 = (2, -1, 1)\}$ .

## 2.1 Không gian ảnh

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

**Định nghĩa.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Ta đặt

$$\text{Im}f = \{f(u) \mid u \in V\}$$

Khi đó  $\text{Im}f$  là không gian con của  $W$ , ta gọi  $\text{Im}f$  là *không gian ảnh* của  $f$ .

**Định lý.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, nếu

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

là tập sinh của  $V$  thì

$$f(S) = \{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$$

là tập sinh của  $\text{Im}f$ .

**Nhận xét.** Dựa vào định lý trên, để tìm cơ sở  $\text{Im}f$ , ta chọn một tập sinh  $S$  của  $V$  (để đơn giản ta có thể chọn cơ sở chính tắc). Khi đó  $\text{Im}f$  sinh bởi tập ảnh của  $S$ .

**Ví dụ.** Cho  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y - z, 3x + 5y - z)$$

Tìm một cơ sở của  $\text{Im}f$ .

**Giải.** Gọi  $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ . Ta có

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 3, 5)$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, -1, -1)$$

Ta có  $\text{Im}f$  sinh bởi  $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ .



Lập ma trận  $A = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó,  $\text{Im}f$  có cơ sở là  $\{v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (0, 1, 2)\}$ .

**Định lý.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là ánh xạ tuyến tính và  $V$  hữu hạn chiều.  
Khi đó

$$\dim \text{Im}f + \dim \text{Ker}f = \dim V.$$

**Mệnh đề.** Cho  $f : V \rightarrow W$  là ánh xạ tuyến tính. Khi đó

- i)*  $f$  là đơn cấu khi và chỉ khi  $\text{Ker}f = \{0\}$ .
- ii)*  $f$  là toàn cấu khi và chỉ khi  $\text{Im}f = W$ .
- iii)*  $f$  là đẳng cấu khi và chỉ khi  $\text{Ker}f = \{0\}$  và  $\text{Im}f = W$ .

**Định nghĩa.** Cho  $V$  có cơ sở  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $W$  có cơ sở  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$  và  $f \in L(V, W)$ . Đặt

$$P = ([f(u_1)]_{\mathcal{B}'} \ [f(u_2)]_{\mathcal{B}'} \ \dots \ [f(u_n)]_{\mathcal{B}'})$$

Khi đó ma trận  $P$  được gọi là **ma trận biểu diễn** của ánh xạ  $f$  theo cặp cơ sở  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ , ký hiệu  $P = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  (hoặc  $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ).

Nếu  $f \in L(V)$  thì ma trận  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  được gọi là **ma trận biểu diễn** toán tử tuyến tính  $f$ , ký hiệu  $[f]_{\mathcal{B}}$

**Ví dụ.** Xét ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y, 2x + y + z)$$

và cặp cơ sở  $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (1, 1, 1))$ ,  
 $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5))$ . Tìm  $[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ .

Ta có

$$f(u_1) = (0, 3)$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com/>

$$f(u_2) = (-1, 3)$$

$$f(u_3) = (0, 4)$$

Với  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , tìm  $[v]_{\mathcal{C}}$ .

$$\text{Lập } (v_1^\top \ v_2^\top | v^\top) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & b \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5a + 2b \\ 0 & 1 & 3a - b \end{array} \right)$$

$$\text{Suy ra } [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -5a + 2b \\ 3a - b \end{pmatrix}$$

Lần lượt thay  $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$  ta có

$$[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, [f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}, [f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Ví dụ.** Cho ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  định bởi

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.pdfmerge.com>

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y + z - t, x + 2y + z + t, 2x + 2z).$$

Tìm ma trận biểu diễn ánh xạ tuyến tính  $f$  theo cặp cơ sở chính tắc.

**Giải.**

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ví dụ.** Cho  $f \in L(\mathbb{R}^2)$  xác định bởi  $f(x, y) = (2x + y, x - 4y)$ . Khi đó ma trận biểu diễn  $f$  theo cơ sở chính tắc  $\mathcal{B}_0$  là:

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Định lý.** Cho  $V$  và  $W$  là các không gian vectơ hữu hạn chiều;  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  và  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  tương ứng là các cơ sở của  $V$  và  $W$ . Khi đó, với mọi ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  ta có

$$i) \quad \forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} [u]_{\mathcal{B}}.$$

$$ii) \quad [f]_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}')^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$$

**Hệ quả.** Cho  $\mathcal{B}$  và  $\mathcal{B}'$  là hai cơ sở của không gian hữu hạn chiều  $V$ . Khi đó đối với mọi toán tử tuyến tính  $f \in L(V)$  ta có

$$i) \quad \forall u \in V, [f(u)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}} [u]_{\mathcal{B}}.$$

$$ii) \quad [f]_{\mathcal{B}'} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}')^{-1} [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}').$$

**Ví dụ.** Trong không gian  $\mathbb{R}^3$  cho cơ sở

$$\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 1))$$

và ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  định bởi:

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y - z, 2x - y + 3z). \text{ Tìm } [f]_{\mathcal{B}}$$

**Giải.** Gọi  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$ , ta có

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

$$[f]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng hệ quả, ta có

$$[f]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} [f]_{\mathcal{B}_0} (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}),$$

trong đó  $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , do đó

$$(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 [f]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -8 & 7 & -13 \\ -3 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Ví dụ.** Cho ánh xạ tuyến tính  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , biết ma trận biểu diễn của  $f$  trong cặp cơ sở  $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1); u_2 = (1, 0, 1); u_3 = (1, 1, 0))$  và  $\mathcal{C} = (v_1 = (1, 1); v_2 = (2, 1))$  là

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tìm công thức của  $f$ .

**Giải.**

**Cách 1.** Do  $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Ta có

- $[f(u_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $f(u_1) = 2v_1 + 0v_2 = (2, 2)$
- $[f(u_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $f(u_2) = v_1 + 3v_2 = (7, 4)$
- $[f(u_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Suy ra  $f(u_3) = -3v_1 + 4v_2 = (5, 1)$

Cho  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tìm  $[u]_{\mathcal{B}}$ .

$$\text{Lập } (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top \mid u^\top) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 1 & 0 & 2x + y - z \\ 0 & 0 & 1 & -x + z \end{array} \right).$$

$$\text{Vậy } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -x + y + z \\ x - y \\ x - z \end{pmatrix}.$$



Suy ra  $u = (-x + y + z)u_1 + (x - y)u_2 + (x - z)u_3$ .

Vậy, ta có [Simplo PDF Merge and Split Unregistered Version - http://www](http://www.SimploPDFMergeandSplitUnregisteredVersion.com)

$$\begin{aligned} f(u) &= (-x + y + z)f(u_1) + (x - y)f(u_2) + (x - z)f(u_3) \\ &= (-x + y + z)(2, 2) + (x - y)(7, 4) + (x - z)(5, 1) \\ &= (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z). \end{aligned}$$

**Cách 2.** Gọi  $\mathcal{B}_0$  và  $\mathcal{C}_0$  lần lượt là cơ sở chính tắc của  $\mathbb{R}^3$  và  $\mathbb{R}^2$ . Áp dụng công thức ta có

$$[f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} = (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0).$$

Ta có

$$\bullet (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} = (\mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}) = (v_1^\top \ v_2^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Suy ra } (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) = (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Simpo PDF Merge and Split Unregistered Version - <http://www.simpo.com>

Vậy

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0} &= (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f(x, y, z) = (10x - 5y - 3z, 3x - 2y + z).$$

**Mệnh đề.** Cho  $V, W$  là hai không gian vectơ  $n$  chiều và  $f \in L(V, W)$ . Khi đó  $f$  là song ánh khi và chỉ khi tồn tại các cơ sở  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  của  $V$  và  $W$  sao cho  $[f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$  khả nghịch.

Hơn nữa, khi đó  $f^{-1} : W \rightarrow V$  cũng là một ánh xạ tuyến tính và

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}, \mathcal{A}} = [f]_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{-1}.$$

Đặc biệt, nếu  $V = W$  và  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  thì

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

**Ví dụ.** Cho  $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 2), u_3 = (1, 2, 1))$  là cơ sở của  $\mathbb{R}^3$ . Với  $f$  là toán tử tuyến tính trong  $\mathbb{R}^3$  có

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chứng minh  $f$  là song ánh và tìm  $f^{-1}$ .

**Giải.** Ta có  $|[f]_{\mathcal{B}}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$ . Suy ra  $[f]_{\mathcal{B}}$  khả nghịch. Vậy  $f$  là song ánh.

Gọi  $\mathcal{B}_0$  là cơ sở chính tắc ta có

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}_0} &= (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0)^{-1} [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0) \\ &= (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) [f]_{\mathcal{B}} (\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} \end{aligned}$$

Ta có  $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}) = (u_1^\top \ u_2^\top \ u_3^\top) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Suy ra  $(\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Vậy

$$\begin{aligned}
 [f]_{\mathcal{B}_0} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } [f^{-1}]_{\mathcal{B}_0} = [f]_{\mathcal{B}_0}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy  $f^{-1}(x, y, z) = (3x - 2z, -5x + y + 3z, -x + y)$ .