Mục lục

Chương 1

Bất đẳng thức Cơ Sở

Để làm quen với bất đẳng thức thì việc nắm vững các bất đẳng thức cơ bản là vô cùng quan trọng. Trên thế giới có rất nhiều các bất đẳng thức, rất nhiều những định lí liên quan tới bất đẳng thức, rất nhiều các kĩ thuật nhỏ chứng minh bất đẳng thức nên để biết hết được chúng là điều không thể, điều quan trọng nhất là chúng ta phải hiểu thật rõ các bất đẳng thức cơ bản, đó cũng là yếu tố quan trọng đầu tiên để bạn học tốt bất đẳng thức. Tác giả sẽ nhấn mạnh tới những bất đẳng thức hết sức cần thiết sau đây : Bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng - trung bình nhân ($AM-GM$), bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ và tổng quát là bất đẳng thức $Holder$, bất đẳng thức $Chebyshev$ và bất đẳng thức $Jensen$.

Đây là 4 bất đẳng thức quen thuộc trong chương trình phổ thông, nhưng để nắm vững được chúng cũng không phải là điều đơn giản, dễ dàng nhất là đối với các bạn mới bắt đầu làm quen với bất đẳng thức. Chương đầu tiên của cuốn sách cung cấp cho các bạn khá đầy đủ những kĩ năng sử dụng 4 bất đẳng thức đó, thêm nữa là một số bài toán liên quan tới các bất đẳng thức đối xứng 3 biến, bất đẳng thức hoán vị, phương pháp cân bằng hệ số và kĩ thuật khai triển $Abel$. Đây là chương cơ bản và rất hiệu quả đối với các bạn học sinh THCS, các bạn học sinh lớp $10, 11$ muốn rèn luyện kĩ năng chứng minh bất đẳng thức của mình.

Đối với mỗi bất đẳng thức cơ bản đó, tác giả đều chọn một kĩ thuật áp dụng đặc biệt nhất để bạn đọc thấy rõ hiệu quả của chúng. Chẳng hạn với bất đẳng thức $AM-GM$ ta có kĩ thuật *Côsi ngược*, với bất đẳng thức $Chebyshev$ ta có kĩ thuật *phân tách Chebyshev* và với bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có *bất đẳng thức Holder*. Theo cách nghĩ của học sinh Việt Nam thì bất đẳng thức $Holder$ có vẻ hơi *xa lạ* và khó áp dụng, ngay cả với các bạn học sinh giỏi toán, nhưng cuốn sách sẽ giúp các bạn có một cách nhìn khác hơn đối với bất đẳng thức quan trọng này, bình thường như chính bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ vậy. Phần sử dụng đạo hàm cũng là phần lí thuyết quan trọng mà các bạn cần phải nắm rõ.

1.1 Bất đẳng thức AM-GM

1.1.1 Bất đẳng thức AM-GM và ứng dụng

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức AM-GM). *Với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

CHỨNG MINH. Rõ ràng bất đẳng thức với $n = 2$, nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với $2n$ số vì

$$a_1 + a_2 + ... + a_{2n} \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + n\sqrt[n]{a_{n+1} a_{n+2} ... a_{2n}} \geq 2n\sqrt[2n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

Do đó bất đẳng thức cũng đúng khi n bằng một luỹ thừa của 2. Mặt khác nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với $n-1$ số, thật vậy ta chỉ cần chọn

$$a_n = s/(n-1)\ ,\ s = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$$

$$\Rightarrow s + \frac{s}{n-1} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 ... a_{n-1} s}{n-1}}$$

$$\Rightarrow s \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}.$$

Từ 2 nhận xét trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến $a_1, a_2, ..., a_n$ bằng nhau. □

Bất đẳng thức $AM - GM$ là bất đẳng thức quen thuộc và có ứng dụng rộng rãi, là bất đẳng thức đầu tiên mà các bạn cần phải ghi nhớ rất rõ và sử dụng một cách thành thạo. Khi sử dụng bất đẳng thức này chúng ta cần hết sức chú ý tới điều kiện của đẳng thức khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ và cần tách các hệ số cho phù hợp.

Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức $AM - GM$, cách chứng minh hay nhất có thể là cách chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp *Cauchy* (như chứng minh trên). Có lẽ vì vậy mà nhiều người lầm lẫn rằng *Cauchy* phát hiện ra bất đẳng thức này. Ông chỉ là người đưa ra chứng minh rất hay của mình chứ không phải là người phát hiện ra đầu tiên, bất đẳng thức mà chúng ta quen gọi là bất đẳng thức *Bunhiacopxki* thực chất là phát minh của 3 nhà toán học *Schwarz*, *BunhiaCopxki* và *Cauchy*. Theo cách gọi tên chung của thế giới, bất đẳng thức *BunhiaCopxki* có tên là bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, còn bất đẳng thức *Côsi* (hay *Cauchy*) có tên là bất đẳng thức $AM - GM$ (*Arithmetic Means - Geometric Means*). Đây là một sự nhầm lẫn khá kì lạ và đáng ngạc nhiên trong một thời gian dài !?

Sau đây là một số bài toán đặc trưng sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$.

Ví dụ 1.1.1. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho 3 số

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9.$$

Bất đẳng thức tổng quát hơn được chứng minh hoàn toàn tương tự

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}. \quad \square$$

Ví dụ 1.1.2 (Bất đẳng thức Nesbitt). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Xét các biểu thức sau

$$S = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},$$
$$M = \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b},$$
$$N = \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}.$$

Ta có $M+N=3$. Mặt khác theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$M+S = \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b} \geq 3,$$
$$N+S = \frac{a+c}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b} \geq 3.$$

Vậy $M+N+2S \geq 3$ suy ra $2S \geq 3$. Đây là điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.1.3 (Bất đẳng thức Nesbitt 4 biến). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Lời giải. Đặt

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b},$$
$$M = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} + \frac{a}{a+b},$$
$$N = \frac{c}{b+c} + \frac{d}{c+d} + \frac{a}{d+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Ta có $M + N = 4$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$M + S = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+d} + \frac{c+d}{d+a} + \frac{d+a}{a+b} \geq 4,$$
$$\begin{aligned} N + S &= \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{a+c}{d+a} + \frac{b+d}{a+b} \\ &= \frac{a+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+d} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{b+d}{a+b} \\ &\geq \frac{4(a+c)}{a+b+c+d} + \frac{4(b+d)}{a+b+c+d} = 4. \end{aligned}$$

Vậy $M + N + 2S \geq 8$ suy ra $S \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$. □

Ví dụ 1.1.4. *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$. Chứng minh với mọi số nguyên dương k ta có bất đẳng thức*

$$a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k \geq a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$(k-1)a^k + 1 = a^k + a^k + ... + a^k + 1 \geq k\sqrt[k]{a^{k(k-1)}} = ka^{k-1}.$$

Thay a bởi $a_1, a_2, ..., a_n$ rồi cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$(k-1)(a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k) + n \geq k(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1}).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1} \geq n.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$

$$a^{k-1} + (k-2) = a^{k-1} + 1 + 1 + ... + 1 \geq (k-1)\sqrt[k-1]{a^{k-1}} = (k-1)a.$$

Thay a bởi $a_1, a_2, ..., a_n$ rồi cộng các bất đẳng thức dạng trên lại

$$a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1} + n(k-2) \geq (k-1)(a_1 + a_2 + ... + a_n) = (k-1)n$$

$$\Rightarrow a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + ... + a_n^{k-1} \geq n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ❑

Nhận xét. Từ các chứng minh trên ta suy ra

$$\frac{a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^k,$$

Với mọi số nguyên dương k. Ngoài ra cả 2 bất đẳng thức này đều đúng khi $k \geq 1$ là một số thực. Nếu xét $k < 1$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[m]{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}} \geq \frac{\sqrt[m]{a_1} + \sqrt[m]{a_2} + ... + \sqrt[m]{a_n}}{n},$$

Với mọi số thực dương $m \geq 1$. Các bạn hãy tự kiểm nghiệm các bất đẳng thức này bằng phương pháp ở trên, thực chất nó chỉ là hệ quả trực tiếp.

Ví dụ 1.1.5 (Bất đẳng thức AM-GM suy rộng). *Với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng 1 ta có*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq a_1^{x_1}a_2^{x_2}...a_n^{x_n}.$$

LỜI GIẢI. Phương pháp chứng minh sử dụng quy nạp *Cauchy* hoàn toàn tương tự như với bất đẳng thức $AM - GM$ thông thường. Tuy nhiên trong trường hợp $n = 2$ chúng ta cần một lời giải chi tiết hơn. Ta phải chứng minh nếu $x + y = 1$ và a, b, x, y là các số thực không âm thì

$$ax + by \geq a^x b^y.$$

Cách làm đơn giản nhất đối với bất đẳng thức này là xét với số hữu tỉ rồi chuyển qua giới hạn. Hiển nhiên nếu x, y hữu tỉ thì bài toán được chứng minh theo bất đẳng thức $AM - GM$ cổ điển

$$ma + nb \geq (m + n)a^{m/(m+n)}b^{n/(m+n)} \Rightarrow ax + by \geq a^x b^y,$$

Trong đó $x = m/(m + n)$ và $y = n/(m + n)$. Còn nếu x, y thực thì sẽ tồn tại dãy các số hữu tỉ $r_n \to x, s_n \to y, r_n + s_n = 1$ và như vậy

$$ar_n + bs_n \geq a^{r_n}b^{s_n} \Leftrightarrow ar_n + b(1 - r_n) \geq a^{r_n}b^{1-r_n}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to +\infty$ ta được $ax + by \geq a^x b^y$. Đây chính là điều phải chứng minh. ❑

Cách chứng minh này khá cơ bản, và nếu bạn chưa được học về giới hạn thì hãy tạm chấp nhận bất đẳng thức với các số x_i hữu tỉ. Lí do rất đơn giản, vì để định nghĩa chính xác cho luỹ thừa với số mũ thực, buộc phải có định nghĩa giới hạn. Các kiến thức cơ sở về giới hạn và hàm liên tục sẽ được định nghĩa trong chương trình toán phổ thông lớp 11, 12.

Ví dụ 1.1.6 (IMO Shortlist 1998). *Với x, y, z là các số thực dương có tích bằng 1, chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 3 số

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq \frac{3x}{4}.$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức với y, z rồi cộng lại suy ra

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{x+y+z}{2} - \frac{3}{4}.$$

Mặt khác $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$ nên ta có *đpcm.* ❑

Ví dụ 1.1.7 (IMO Shortlist 1990). *Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm thoả mãn $ab + bc + cd + da = 1$. Chứng minh*

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 4 số

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{18} + \frac{a}{6} + \frac{1}{12} \geq \frac{2a}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự ta có thêm 3 bất đẳng thức với b, c, d sau đó cộng lại được

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{c+d+a} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3}$$

Chú ý rằng $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ nên

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4(ab+bc+cd+da) = 4 \Rightarrow a+b+c+d \geq 2.$$

Thay kết quả này vào bất đẳng thức ở trên ta có *đpcm.* Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1/2$. ❑

Ví dụ 1.1.8 (Komal Magazine). *Chứng minh với mọi a, b, c dương*

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM - GM$ cho vế trái

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$3^6abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^6.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$3^3abc \leq (a+b+c)^3,$$

$$3^3(a+b)(b+c)(c+a) \leq (a+b+b+c+c+a)^3 = 8(a+b+c)^3.$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh. ❑

Ví dụ 1.1.9. *Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$|a| + |b| + |c| - abc \leq 4.$$

LỜI GIẢI. Ta cũng áp dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM - GM$ như sau

$$a^2b^2c^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow -abc \leq 1,$$

$$(|a| + |b| + |c|)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 9 \Rightarrow |a| + |b| + |c| \leq 3.$$

Cộng vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a, b, c có 2 số bằng 1 và 1 số bằng -1. ❑

Nhận xét. Bạn đọc thử làm bài toán trên nếu ta bỏ đi các dấu giá trị tuyệt đối, tìm max của $a + b + c - abc$. Đây là một bài toán rất thú vị và không dễ.

Ví dụ 1.1.10 (Iran MO 1998). *Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq \max\left(a+b+c+d, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

LỜI GIẢI. Ta phải chứng minh 2 bất đẳng thức sau

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a+b+c+d \qquad (1)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq abc + bcd + cda + dab \quad (2)$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh tương tự như trong ví dụ 1.1.4. Bất đẳng thức (2) có được bằng tổng các bất đẳng thức sau

$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc \qquad b^3+c^3+d^3 \geq 3bcd$$
$$c^3+d^3+a^3 \geq 3cda \qquad d^3+a^3+b^3 \geq 3dab.$$

Chỉ có đẳng thức khi $a=b=c=d=1$. □

Ví dụ 1.1.11 (USA MO 1998). *Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

LỜI GIẢI. Ta có nhận xét sau

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b)$$
$$\Rightarrow \frac{abc}{a^3+b^3+c^3} \leq \frac{abc}{ab(a+b)+abc} = \frac{c}{a+b+c}.$$

Xây dựng thêm 2 bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại suy ra điều phải chứng minh

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc} \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. □

Ví dụ 1.1.12 (France Pre - MO 2005). *Các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=3$. Hãy chứng minh*

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq 3.$$

LỜI GIẢI. Bình phương 2 vế của bất đẳng thức, ta phải chứng minh

$$\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}+2(x^2+y^2+z^2) \geq 3(x^2+y^2+z^2).$$

Chú ý rằng theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$2\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right) = \left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{y^2z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2z^2}{x^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)+\left(\frac{x^2y^2}{z^2}+\frac{z^2x^2}{y^2}\right)$$
$$\geq 2(x^2+y^2+z^2).$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z=1$. □

Nhận xét. Các bạn hãy kiểm nghiệm bất đẳng thức sau

Nếu a, b, c dương thoả mãn $a^3+b^3+c^3=3$ thì $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq 3$?

Vấn đề tổng quát sẽ được giải quyết ở chương sau của cuốn sách.

Ví dụ 1.1.13 (IMO Shortlist 1996). *Các số dương x, y, z có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+zx+x^5}\le 1.$$

LỜI GIẢI. Ta có nhận xét sau

$$x^2+y^2\ge 2xy \Rightarrow x^5+y^5\ge x^2y^2(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{x^5+xy+y^5}\le\frac{xy}{xy+x^2y^2(x+y)}=\frac{1}{1+xy(x+y)}=\frac{z}{x+y+z}.$$

Xây dựng 2 bất đẳng thức tương tự với x, y rồi cộng vế cả 3 bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z=1$. ❑

Ví dụ 1.1.14 (Việt Nam MO). *Các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn*

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Hãy chứng minh rằng

$$x_1x_2...x_n\ge (n-1)^n.$$

LỜI GIẢI. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_{n-1}}=\frac{x_n}{1+x_n}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ với các số hạng ở vế trái

$$\frac{x_n}{1+x_n}\ge\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_{n-1})}}.$$

Ta có $n-1$ bất đẳng thức tương tự với mỗi số $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, sau đó nhân các vế tương ứng của n bất đẳng thức trên lại suy ra *đpcm.* ❑

Ví dụ 1.1.15 (APMO 1998). *Chứng minh với mọi x, y, z dương ta có*

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

LỜI GIẢI. Dễ dàng nhận thấy bất đẳng thức trên là hệ quả từ bất đẳng thức sau

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Ta nhóm và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\left(\frac{2x}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. ❑

Ví dụ 1.1.16 (Canada MO 2002). *Với mọi x,y,z dương, hãy chứng minh*

$$\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{xz}+\frac{z^3}{xy}\geq x+y+z.$$

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho 3 số

$$\frac{x^3}{yz}+y+z\geq 3x\quad,\quad\frac{y^3}{xz}+x+z\geq 3y\quad,\quad\frac{z^3}{xy}+x+y\geq 3z.$$

Cộng vế 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. ❑

Ví dụ 1.1.17 (Macedonia MO 2000). *Chứng minh với mọi x,y,z dương*

$$x^2+y^2+z^2\geq\sqrt{2}(xy+xz).$$

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ với 2 số

$$x^2+y^2+z^2\geq x^2+\frac{(y+z)^2}{2}\geq\sqrt{2}x(y+z).\ ❑$$

Ví dụ 1.1.18. *Chứng minh với mọi a,b,c,d dương ta luôn có*

$$16(abc+bcd+cda+dab)\leq(a+b+c+d)^4.$$

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho 2 số

$$\begin{aligned}16(abc+bcd+cda+dab)&=16ab(c+d)+16cd(a+b)\\&\leq 4(a+b)^2(c+d)+4(c+d)^2(a+b)\\&\leq 4(a+b+c+d)(a+b)(c+d)\\&\leq(a+b+c+d)^3.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$. ❑

Ví dụ 1.1.19. *Chứng minh rằng với các số dương a,b,c có tổng bằng 3 thì*

$$\frac{a(a+c-2b)}{ab+1}+\frac{b(b+a-2c)}{bc+1}+\frac{c(c+b-2a)}{ca+1}\geq 0.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a(1-b)}{ab+1}+1+\frac{b(1-c)}{bc+1}+1+\frac{c(1-a)}{ca+1}+1\geq 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\geq 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho 3 số hạng ở vế trái

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}.$$

Ta sẽ chứng minh $(a+1)(b+1)(c+1)\geq (ab+1)(bc+1)(ca+1)$.
Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$abc+ab+bc+ca+a+b+c+3\geq a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+ab+bc+ca+1$$
$$\Leftrightarrow 3\geq a^2b^2c^2+2abc.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $abc\leq 1$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Như đã nói, chú ý quan trọng nhất khi sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ là phải chọn đúng hệ số khi ghép cặp để đẳng thức có thể xảy ra được. Chẳng hạn, ở ví dụ 1.1.6 ta không thể sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+(y+1)+(z+1)\geq 3x.$$

Theo cảm giác, đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ nên ta chọn được hệ số $1/8$ để các số hạng bằng nhau

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y+1}{8}+\frac{z+1}{8}\geq \frac{3x}{4}.$$

Với các bài toán ở dạng chuẩn như trên, tức là có đẳng thức khi tất cả các biến bằng nhau thì việc ghép cặp như vậy tương đối dễ, nhưng với một số bài toán bất đẳng thức không đối xứng thì công việc này sẽ khó khăn hơn, ta phải dùng phương pháp *Cân bằng hệ số và phải giải các phương trình.* Bạn có thể xem trong phần sau, bài viết về *Phương pháp cân bằng hệ số*, trang 75.

1.1.2 Kĩ thuật Côsi ngược dấu

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét bất đẳng thức $AM-GM$ và một kĩ thật đặc biệt- kĩ thuật *Côsi ngược dấu.* Đây là một trong những kĩ thuật hay, khéo léo, mới mẻ và ấn tượng nhất của bất đẳng thức $AM-GM$. Hãy xem các ví dụ cụ thể sau

Ví dụ 1.1.20. *Các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời Giải. Ta không thể dùng trực tiếp bất đẳng thức $AM-GM$ với mẫu số vì bất đẳng thức sau đó sẽ đổi chiều

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \leq \frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a} \geq \frac{3}{2} \ ?!$$

Tuy nhiên, rất *may mắn* ta có thể dùng *lại* bất đẳng thức đó theo cách khác

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Ta đã sử dụng bật đẳng thức $AM-GM$ cho 2 số $1+b^2 \geq 2b$ ở dưới mẫu nhưng lại có được một bất đẳng thức thuận chiều? Sự *may mắn* ở đây là một cách dùng ngược bất đẳng thức $AM-GM$, một kĩ thuật rất ấn tượng và bất ngờ. Nếu không sử dụng phương pháp này thì bất đẳng thức trên sẽ rất khó và dài.

Từ bất đẳng thức trên, xây dựng 2 bất đẳng thức tương tự với b, c rồi cộng cả 3 bất đẳng thức lại suy ra

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2},$$

vì ta có $ab+bc+ca \leq 3$. Dẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c=1$. ☐

Với cách làm trên có thể xây dựng một bất đẳng thức tương tự với 4 số

Ví dụ 1.1.21. *Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương có tổng bằng 4 ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2} \geq 2.$$

Và nếu không dùng nếu không dùng kĩ thuật *Côsi ngược dấu* thì gần như bài toán này không thể giải được theo cách thông thường được. Kĩ thuật này thực sự hiệu quả với các bài toán bất đẳng thức hoán vị

Ví dụ 1.1.22. *Chứng minh với mọi số dương a, b, c, d thoả mãn điều kiện $a+b+c+d=4$ ta có*

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1\ \text{[illegible]}}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2c} &= a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \ge a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} \\ &\ge a - \frac{b\sqrt{a.ac}}{2} \ge a - \frac{b(a+ac)}{4} \\ \Rightarrow \quad & \frac{a}{1+b^2c} \ge a - \frac{1}{4}(ab+abc). \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta có thêm 3 bất đẳng thức sau

$$\frac{b}{1+c^2d} \ge b - \frac{bc+bcd}{4}, \quad \frac{c}{1+c^2d} \ge c - \frac{cd+cda}{4}, \quad \frac{d}{1+d^2a} \ge d - \frac{da+dab}{4}.$$

Cộng vế cả 4 bất đẳng thức trên

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \ge$$

$$\ge a+b+c+d - \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da+abc+bcd+cda+dab).$$

Từ bất đẳng thức $AM - GM$ dễ dàng suy ra các bất đẳng thức

$$ab+bc+cd+da \le \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 = 4,$$

$$abc+bcd+cda+dab \le \frac{1}{16}(a+b+c+d)^3 = 4.$$

Do đó

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \ge a+b+c+d-2 = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. ❑

Ví dụ 1.1.23. *Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c, d ta luôn có*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \ge \frac{a+b+c+d}{2}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ với 2 số

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \ge a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}.$$

Xây dựng 3 bất đẳng thức tương tự với b, c, d rồi cộng vế các bất đẳng thức lại ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi tất cả các biến bằng nhau. ❑

Một bất đẳng thức cùng dạng trên là

$$\frac{a^4}{a^3+2b^3} + \frac{b^4}{b^3+2c^3} + \frac{c^4}{c^3+2d^3} + \frac{d^4}{d^3+2a^3} \ge \frac{a+b+c+d}{3}.$$

Ví dụ 1.1.24. *Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh*

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

Lời Giải. Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức $AM - GM$ cho 3 số

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2(ab)^{2/3}}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có 2 bất đẳng thức

$$\frac{b^2}{b+2c^2} \geq b - \frac{2}{3}(bc)^{2/3}, \quad \frac{c^2}{c+2a^2} \geq c - \frac{2}{3}(ca)^{2/3}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$a + b + c - \frac{2}{3}\left((ab)^{2/3} + (bc)^{2/3} + (ca)^{2/3}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (ab)^{2/3} + (bc)^{2/3} + (ca)^{2/3} \leq 3.$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vì theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$a + ab + b \geq 3(ab)^{2/3}, \quad b + bc + c \geq 3(bc)^{2/3}, \quad c + ca + a \geq 3(ca)^{2/3},$$

ngoài ra dễ thấy $3 \geq ab + bc + ca$ nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ❑

Kết quả của bài toán vẫn đúng khi thay giả thiết $a+b+c = 3$ bởi $ab+bc+ca = 3$ hoặc $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$, trường hợp sau khó hơn một chút. Ta có thêm một bất đẳng thức khác cùng dạng trên

Ví dụ 1.1.25. *Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1.$$

Lời Giải. Chứng minh tương tự, đưa bất đẳng thức về

$$b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq 3.$$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$

$$ba^{2/3} \leq b(2a+1), \quad cb^{2/3} \leq c(2b+1), \quad ac^{2/3} \leq a(2c+1).$$

Cộng vế cả 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. ❑

Ví dụ 1.1.26. *Chứng minh với mọi số dương a, b, c có tổng bằng 3 thì*

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq 3.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ dễ thấy

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\geq a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}.$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa với b, c rồi cộng lại

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq\left(a+1-\frac{ab+b}{2}\right)+\left(b+1-\frac{bc+c}{2}\right)+\left(c+1-\frac{ca+a}{2}\right)$$

$$=3+\frac{a+b+c-ab-bc-ca}{2}\geq 3.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❑

Sau đây là bài toán tương tự với 4 biến số

Ví dụ 1.1.27. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d dương có tổng bằng 4 thì*

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{d^2+1}+\frac{d+1}{a^2+1}\geq 4.$$

Cũng bằng phương pháp tương tự ta có bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 1.1.28. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d dương có tổng bằng 4 thì*

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geq 2.$$

LỜI GIẢI. Thật vậy, ta có đánh giá sau

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\geq 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}.$$

Sau đó chỉ cần làm tương tự với b, c, d rồi cộng lại. ❑

Kĩ thuật *Côsi ngược* là một kĩ thuật mới giúp giải quyết bài toán theo lối suy nghĩ nhẹ nhàng và trong sáng, các kết quả được làm bằng kĩ thuật này nói chung cũng rất khó có thể làm được theo cách khác, hoặc phải làm theo cách khá dài.

1.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz-Holder

1.2.1 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và ứng dụng

Định lý 1.2 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz). *Với 2 dãy số thực tuỳ ý $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, ta luôn có bất đẳng thức*

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là 2 bộ tỉ lệ, tức là tồn tại số thực k để $a_i = kb_i$ $\forall i = \overline{1, n}$.

CHỨNG MINH. Có 3 cách đơn giản chứng minh bất đẳng thức trên.

Cách 1. Đây là các chứng minh quen thuộc sử dụng phương pháp tam thức bậc 2. Xét tam thức sau đây

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2.$$

Sau khi khai triển ta có

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Mặt khác vì $f(x) \geq 0$ $\forall x \in R$ nên theo định lí về dấu của tam thức bậc 2

$$\Delta_f \leq 0 \Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm, nói cách khác $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là 2 bộ tỉ lệ.

Cách 2. Một cách chứng minh khác cũng rất cần nhớ, vì ta sẽ sử dụng lại trong 1 số bài tập, đó là phương pháp sử dụng đẳng thức. Ta có hằng đẳng thức sau

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_ib_j - a_jb_i)^2.$$

Và do đó hiển nhiên phải có

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2.$$

Cách 3. Ngoài ra bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* cũng có thể chứng minh trực tiếp bằng bất đẳng thức $AM-GM$ chỉ với 2 số, đây là một chứng minh rất hay và dùng để mở rộng cho bất đẳng thức $Holder$.

$$\frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}+\frac{b_i^2}{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$$
$$\geq \frac{2|a_ib_i|}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)}}.$$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng vế cả n bất đẳng thức lại ta có kết quả. Đây cũng là một chứng minh rất ngắn gọn. ❑

Bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ cũng là một bất đẳng thức rất quen thuộc với các bạn học sinh phổ thông và việc nắm chắc sử dụng thành thạo bất đẳng thức này là rất cần thiết cho tất cả bạn đọc, không chỉ với các bạn thi học sinh giỏi, Olympic quốc gia, quốc tế mà ngay cả với các bạn ôn thi vào lớp 10 và thi vào đại học.

Các hệ quả sau đây sẽ củng cố thêm các ứng dụng khác nhau của bất đẳng thức quan trọng này.

Hệ quả 1.1. *Với 2 dãy số* $(a_1,a_2,...,a_n)$ *và* $(b_1,b_2,...,b_n)$, $b_i\geq 0\ \forall i=\overline{1,n}$,

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}.$$

Bất đẳng thức trên thường được gọi là bất đẳng thức $Schwarz$.

Hệ quả 1.2. *Với 2 dãy số thực* $a_1,a_2,...,a_n$ *và* $b_1,b_2,...,b_n$ *ta có*

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+...+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geq\sqrt{(a_1+...+a_n)^2+(b_1+...+b_n)^2}.$$

CHỨNG MINH. Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $n=2$. Với các giá trị khác, bất đẳng thức được suy ra trực tiếp bằng phương pháp quy nạp. Tuy nhiên với $n=2$ thì ta có bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2.$$

Đẳng thức cũng xảy ra khi $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ là 2 bộ tỉ lệ. ❑

Hệ quả 1.3. *Với mọi dãy số thực* $a_1,a_2,...,a_n$ *ta có*

$$(a_1+a_2+...+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2).$$

CHỨNG MINH. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* với 2 bộ số

$$(a_1, a_2, ..., a_n)\ ,\quad (1, 1, ..., 1),$$

Trong đó bộ số thứ 2 gồm n số 1. ❑

Sau đây là những ứng dụng thường gặp và tiêu biểu của bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*. Ta xem xét qua các ví dụ từ đơn giản đến phức tạp.

Ví dụ 1.2.1 (Math Changelles). *Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng 1. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+...+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned}&\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+...+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2\\ &\geq \frac{1}{n}\left(x_1+x_2+...+x_n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)^2,\\ &\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\geq\frac{n^2}{x_1+x_2+...+x_n}=n^2.\end{aligned}$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+...+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2\geq\frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1/n$. ❑

Ví dụ 1.2.2. *Giả sử a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right)\geq\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Lại theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ba+bc}+\frac{c^2}{ca+cb}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}.$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. ❑

Ví dụ 1.2.3. *Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Bài toán đã được giải ở phần trước bằng kĩ thuật *Côsi ngược dấu*, tuy nhiên lại có thể giải khá đơn giản bằng bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz* như sau

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3.$$

Bất đẳng thức này khá quen thuộc, ta có thể dùng chứng minh hoàn toàn chỉ bằng bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz*

$$3(a^3+b^3+c^3) = (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$
$$(a^2+b^2+c^2)(1+1+1) \geq (a+b+c)^2 = 9.$$

Do đó $a^2+b^2+c^2 \geq 3$, suy ra $a^3+b^3+c^3 \geq a^2+b^2+c^2$.

$$(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2) \geq (a^3+b^3+c^3)^2 \Rightarrow a^4+b^4+c^4 \geq a^3+b^3+c^3.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bất đẳng thức trên được chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz*, tuy nhiên với bất đẳng thức khá tương tự khác

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2},$$

Ta chỉ có thể sử dụng phương pháp *Côsi ngược*, không sử dụng được trực tiếp được bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz*.

Ví dụ 1.2.4 (Việt Nam MO 1991). *Giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh*

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2+y^2+z^2.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức *Cauchy − Schwarz* ta có

$$\left(\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y}\right)\left(\frac{x^2z}{y} + \frac{y^2x}{z} + \frac{z^2y}{x}\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2.$$

Mặt khác vì $x \geq y \geq z$ nên

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} - \frac{x^2z}{y} - \frac{y^2x}{z} - \frac{z^2y}{x} = \frac{(xy+yz+zx)(x-y)(x-z)(y-z)}{xyz} \geq 0.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. □

Ví dụ 1.2.5 (Iran MO 1998). *Giả sử $x, y, z \geq 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh*

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

LỜI GIẢI. Vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1.$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned} x+y+z &= (x+y+z)\left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}\right) \\ &\geq \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\right)^2 \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3/2$. □

Ví dụ 1.2.6 (Greece MO 2002). *Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4c^2+1} + \frac{c}{4a^2+1} \geq (a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2.$$

CHỨNG MINH. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} &= \frac{a^3}{4a^2b^2+a^2} + \frac{b^3}{4b^2c^2+b^2} + \frac{c^3}{4c^2a^2+c^2} \\ &\geq \frac{(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2}{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Phần còn lại của bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + a^2+b^2+c^2 \leq 1 = (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow\ & ab(1-4ab) + bc(1-4bc) + ca(1-4ca) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $a+b+c \leq 1 \Rightarrow ab, bc, ca \leq 1/4$.

Đẳng thức xảy ra khi trong 3 số a, b, c có 1 số bằng 1 và 2 số bằng 0. □

Ví dụ 1.2.7 (Crux). *Với mọi $x, y, z \geq 0$, chứng minh*

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

LỜI GIẢI. Áp dụng hệ quả (1.2) ta có

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{(x+y+z)^2+3^2}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$(x+y+z)^2+3^2 \geq 6(x+y+z).$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z=1$. □

Ví dụ 1.2.8. *Xác định điều kiện cần và đủ với các số thực $r_1, r_2, ..., r_n$ sao cho*

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \geq (r_1x_1+r_2x_2+...+r_nx_n)^2$$

đúng với mọi dãy $x_1, x_2, ..., x_n \in R$.

LỜI GIẢI. Cho $x_i = r_i$ ta suy ra dãy (r_i) phải thoả mãn

$$r_1^2+r_2^2+...+r_n^2 \leq 1.$$

Đây cũng là điều kiện đủ, thật vậy, nếu dãy (r_i) thoả mãn điều kiện này thì theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \geq (r_1^2+r_2^2+...+r_n^2)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2) \geq (r_1x_1+r_2x_2+...+r_nx_n)^2.$$

Khẳng định được chứng minh xong. □

Ví dụ 1.2.9 (IMO Shortlist 1993). *Chứng minh với mọi số dương a, b, c, d*

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a^2}{ab+2ac+3ad}+\frac{b^2}{bc+2bd+3ba}+\frac{c^2}{cd+2ca+3cb}+\frac{d^2}{da+2db+3dc} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da+ac+bd)}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)+a^2+b^2+c^2+d^2 \\ &\geq \frac{8}{3}(ab+bc+cd+da+ac+bd). \end{aligned}$$

Từ đó ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=d$. □

Ví dụ 1.2.10. *Chứng minh với mọi a, b, c dương*

$$\frac{a^3b}{1+ab^2}+\frac{b^3c}{1+bc^2}+\frac{c^3a}{1+ca^2}\geq\frac{abc(a+b+c)}{1+abc}.$$

Lời Giải. Với mọi số thực dương k, theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\frac{a^2}{b+kc}+\frac{b^2}{c+ka}+\frac{c^2}{a+kb}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(k+1)(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{k+1},$$

Lấy $k=1/(abc)$ ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Ví dụ 1.2.11 (Bất đẳng thức Nesbitt 6 biến). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d, e, f là các số thực dương*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\geq 3.$$

Chứng Minh. Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\\
=\;&\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+bd}+\frac{c^2}{cd+ce}+\frac{d^2}{de+df}+\frac{e^2}{ef+ea}+\frac{f^2}{fa+fb}\\
\geq\;&\frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{ab+bc+cd+de+ef+fa+ac+ce+ea+bd+df+fb}.\end{aligned}$$

Gọi S là mẫu số của phân thức nói trên

$$2S=(a+b+c+d+e+f)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2bd+2cf).$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2bd+2cf\\
&=(a+d)^2+(b+e)^2+(d+f)^2\\
&\geq\frac{1}{3}(a+b+c+f+e+f)^2.\end{aligned}$$

Do đó $2S\leq 2/3(a+b+c+d+e+f)^2$, ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=d=e=f$. □

Ví dụ 1.2.12 (Korea 2002). *Hai dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thoả mãn*

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=b_1^2+b_2^2+...+b_n^2=1.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2\leq 2|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n-1|.$$

LỜI GIẢI. Trong bài này ta phải sử dụng đẳng thức khai triển bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, đó là

$$(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geq(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

Theo giả thiết $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$ nên theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có $1\geq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq -1$. Do đó

$$(1-a_1b_1-a_2b_2-\ldots-a_nb_n)(1+a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)\geq(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

$$\Rightarrow 2|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n-1|\geq(a_1b_2-a_2b_1)^2.\ \square$$

Ví dụ 1.2.13 (Crux). *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}.$$

Với a,b,c là các số thực dương tuỳ ý.

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng *Cauchy – Schwarz*

$$\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}+(3+4+5)=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(b+c+c+a+a+b)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)\geq\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})^2}{2}.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5})^2-12$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{b+c}{\sqrt{3}}=\dfrac{c+a}{2}=\dfrac{a+b}{\sqrt{5}}$. $\square$

Ví dụ 1.2.14. *Chứng minh rằng nếu $a,b,c\geq 0$ và $abc=1$ thì*

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$1-\frac{2}{2+a}+1-\frac{2}{2+b}+1-\frac{2}{2+c}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}\geq 1.$$

Tồn tại các số thực x, y, z sao cho $a = x/y, b = y/z, c = z/x$. Ta phải chứng minh

$$\frac{x/y}{2+x/y} + \frac{y/z}{2+y/z} + \frac{z/x}{2+z/x} \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} \geq 1.$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(x+2y)+y(y+2z)+z(z+2x)} = 1.$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$. ❑

Ví dụ 1.2.15. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d dương có tích bằng 1 thì*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Do $abcd = 1$ nên tồn tại các số thực x, y, z, t sao cho

$$a = y/x, b = z/y, c = t/z, d = x/t.$$

Thay a, b, c, d bởi x, y, z, t vào bất đẳng thức

$$\frac{1}{y/x(1+z/y)} + \frac{1}{z/y(1+t/z)} + \frac{1}{t/z(1+x/t)} + \frac{1}{x/t(1+y/x)} \geq 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y} \geq 2.$$

Đây là bất đẳng thức $Nesbitt$ 4 biến đã được chứng minh ở trên. ❑

Ví dụ 1.2.16. *Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số thực dương và $r^4 = abcd \geq 1$ bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq \frac{4(1+r^2)}{1+r}.$$

LỜI GIẢI. Chú ý rằng từ giả thiết $abcd = r^4 \geq 1$ ta suy ra tồn tại các số thực dương x, y, z, t sao cho

$$a = \frac{ry}{x}, \quad b = \frac{rz}{y}, \quad c = \frac{rt}{z}, \quad d = \frac{rx}{t}.$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$\frac{\frac{r^2z}{x}+1}{\frac{ry}{x}+1} + \frac{\frac{r^2t}{y}+1}{\frac{rz}{y}+1} + \frac{\frac{r^2x}{z}+1}{\frac{rt}{z}+1} + \frac{\frac{r^2y}{t}+1}{\frac{rx}{t}+1} \geq \frac{4(r^2+1)}{r+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{r^2z+x}{ry+x} + \frac{r^2t+y}{rz+y} + \frac{r^2x+z}{rt+z} + \frac{r^2y+t}{rx+t} \geq \frac{4(r^2+1)}{r+1}.$$

Xét 2 biểu thức

$$A = \frac{x+z}{ry+x} + \frac{y+t}{rz+y} + \frac{x+z}{rt+z} + \frac{y+t}{rx+t},$$
$$B = \frac{z}{ry+x} + \frac{t}{rz+t} + \frac{x}{rt+z} + \frac{y}{rx+t}.$$

Ta phải chứng minh

$$A + (r^2-1)B \geq \frac{4(r^2+1)}{r+1}.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ dễ thấy

$$\begin{aligned}
&4r(xy+yz+zt+tx) + 8(xz+yt)\\
&= 4(r-1)(x+z)(y+t) + 4(x+z)(y+t) + 8xz + 8yt\\
&\leq (r-1)(x+y+z+t)^2 + 2(x+y+z+t)^2\\
&\leq (r+1)(x+y+z+t)^2.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, chú ý rằng $r \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned}
A = &\ (x+z)\left(\frac{1}{ry+x} + \frac{1}{rt+z}\right) + (y+t)\left(\frac{1}{rx+y} + \frac{1}{rz+t}\right)\\
\geq &\ \frac{4(x+z)}{x+z+ry+rt} + \frac{4(y+t)}{y+t+rx+rz}\\
\geq &\ \frac{4(x+y+z+t)^2}{(x+z)^2+(y+t)^2+2r(x+z)(y+t)} \geq \frac{8}{r+1},\\
B \geq &\ \frac{(x+y+z+t)^2}{z(ry+x)+t(rz+y)+x(rt+z)+y(rx+t)}\\
\geq &\ \frac{(x+y+z+t)^2}{r(xy+yz+zt+tx)+2(xz+yt)} \geq \frac{4}{r+1}.
\end{aligned}$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = r$. ❑

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một dạng mở rộng thường gặp và có nhiều ứng dụng của bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$, đó là bất đẳng thức $Holder$.

1.2.2 Bất đẳng thức Holder

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức Holder). *Với m dãy số dương* $(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n})$, $(a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}) \cdots (a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,n})$ *ta có*

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{i,j}}\right)^m$$

Đẳng thức xảy ra khi m dãy đó tương ứng tỉ lệ. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Holder với $m = 2$.

Hệ quả 1.4. *Với* $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ *là các số thực dương ta có*

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3.$$

Chứng Minh. Thực ra đây chỉ là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức *Holder* với $m = n = 3$. Cách chứng minh sau có thể làm lại hoàn toàn tương tự với để chứng minh bất đẳng thức *Holder* dạng tổng quát.

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{a^3}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{x^3}{x^3 + y^3 + z^3} + \frac{m^3}{m^3 + m^3 + p^3}$$
$$\geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3)}}.$$

Xây dựng tương tự 2 bất đẳng thức nữa với (b, y, n) và (c, z, p) rồi cộng theo từng vế ta có điều phải chứng minh. ❑

Một hệ quả của bất đẳng thức *Holder* thường được áp dụng là

Hệ quả 1.5. *Với dãy số dương* $a_1, a_2, ..., a_n$*, chứng minh*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n})^n.$$

Chứng Minh. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + ... + \frac{1}{1 + a_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)}},$$
$$\frac{a_1}{1 + a_1} + \frac{a_2}{1 + a_2} + ... + \frac{a_n}{1 + a_n} \geq \frac{n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}{\sqrt[n]{(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)}}.$$

Cộng theo từng vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. ❑

Bất đẳng thức *Holder* là một bất đẳng thức mạnh và có nhiều ứng dụng, nhưng rất tiếc nó không được dùng phổ biến ở phổ thông hiện nay. Các hệ quả riêng ở trên để minh họa cho bất đẳng thức *Holder* cả về cách chứng minh lẫn cách sử dụng. Việc làm quen và thuần thục với bất đẳng thức này cũng rất cần thiết, vì tuy rằng có một phát biểu hơi khó nhìn, bất đẳng thức *Holder* hoàn toàn dễ hiểu và ứng dụng hiệu quả với nhiều bài toán. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1.2.17 (IMO 2001. Pro A2). *Với mọi* a, b, c *dương ta có*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Xét các biểu thức

$$\begin{aligned}A &= \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}},\\ B &= a(a^2+8bc)+b(b^2+8ac)+c(c^2+8ab)=a^3+b^3+c^3+24abc.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Holder* với 3 dãy (hệ quả 1.4) ta có

$$A.A.B \geq (a+b+c)^3.$$

Ta bây giờ ta chỉ cần chứng minh $(a+b+c)^3 \geq B$, hay

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc \Leftrightarrow c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. ❑

Ví dụ 1.2.18. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1 thì ta có các bất đẳng thức sau đây*

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{7+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{7+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{7+a+b}} &\geq 1,\\ \frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{7+c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{7+a^2+b^2}} &\geq 1.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức sau có đúng hay không ?

$$\frac{a}{\sqrt{7+b^3+c^3}}+\frac{b}{\sqrt{7+c^3+a^3}}+\frac{c}{\sqrt{7+a^3+b^3}} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Với bất đẳng thức đầu tiên, đặt

$$\begin{aligned}A = &\ \frac{a}{\sqrt{7+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{7+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{7+a+b}},\\ B = &\ a(7+b+c)+b(7+a+c)+c(7+a+b).\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Holder* ta có

$$A^2B \geq (a+b+c)^3.$$

Ta phải chứng minh $(a+b+c)^3 \geq B = 7(a+b+c)+2(ab+bc+ca)$.
Theo bất đẳng thức $AM-GM$, $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3$ nên

$$(a+b+c)^3 \geq 7(a+b+c)+\frac{2}{3}(a+b+c)^2 \geq 7(a+b+c)+2(ab+bc+ca).$$

Với bất đẳng thức thứ 2, ta đặt

$$\begin{aligned} C = &\ \frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{7+a^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{7+a^2+b^2}}, \\ D = &\ a(7+b^2+c^2) + b(7+c^2+a^2) + c(7+a^2+b^2). \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Holder* thì $C^2D \geq (a+b+c)^3$.

$$\begin{aligned} D = &\ 7(a+b+c) + (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3, \\ \leq &\ 7(a+b+c) + \frac{(a+b+c)^3}{3} - 3 \leq (a+b+c)^3. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Bất đẳng thức thứ 3 không đúng. Thật vậy, ta chỉ cần cho $a \to 0$ và $b = c \to +\infty$, chẳng hạn $a = 10^{-4}, b = c = 100$. □

Ví dụ 1.2.19 (Junior Banlkan 2000). *Chứng minh với mọi a, b, c dương*

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(b+a+c) \geq (a+b+c)^2,$$

$$\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right)(a+b+c) \geq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)^2.$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. □

Ta có bài toán tổng quát sau

Ví dụ 1.2.20. *Với a, b, c là các số thực, $k \geq 1, k \in N$ thì*

$$\frac{a^{k+1}}{b^k} + \frac{b^{k+1}}{c^k} + \frac{c^{k+1}}{a^k} \geq \frac{a^k}{b^{k-1}} + \frac{b^k}{c^{k-1}} + \frac{c^k}{a^{k-1}}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Holder*

$$\left(\frac{a^k}{b^{k-1}} + \frac{b^k}{c^{k-1}} + \frac{c^k}{a^{k-1}}\right)(b+a+c)^{k-1} \geq (a+b+c)^k$$

$$\Rightarrow \frac{a^k}{b^{k-1}} + \frac{b^k}{c^{k-1}} + \frac{c^k}{a^{k-1}} \geq a+b+c,$$

$$\left(\frac{a^{k+1}}{b^k} + \frac{b^{k+1}}{c^k} + \frac{c^{k+1}}{a^k}\right)^{k-1}(a+b+c) \geq \left(\frac{a^k}{b^{k-1}} + \frac{b^k}{c^{k-1}} + \frac{c^k}{a^{k-1}}\right)^k.$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta rút ra điều phải chứng minh. Kết quả này vẫn đúng nếu k hữu tỉ (chứng minh tương tự), và do đó sẽ đúng với mọi số thực $k \geq 1$, không nhất thiết k là số nguyên. □

Ví dụ 1.2.21 (Singapore MO 2002). *Chứng minh với mọi số dương a, b, c*

$$3(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức *Holder*

$$(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3)(1+1+1) \geq (a^2+b^2+c^2)^3. \quad \square$$

Ví dụ 1.2.22 (Crux). *Với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng 1, hãy tìm giá trị nhỏ nhất cuả biểu thức*

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}.$$

LỜI GIẢI. Xét các biểu thức

$$\begin{aligned} A = & \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}, \\ B = & a_1(1-a_1) + a_2(1-a_2) + ... + a_n(1-a_n). \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Holder* ta có

$$A^2.B \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^3 = 1.$$

Ngoài ra dễ thấy

$$B = 1 - (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \leq 1 - \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Do đó $A \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = \frac{1}{n}\ \forall i = \overline{1,n}$. $\square$

Ví dụ 1.2.23. *Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Xét các biểu thức

$$S = \frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}},$$

$$P = a(a+2b) + b(b+2c) + c(c+2a) = (a+b+c)^2 = 1.$$

Theo bất đẳng thức *Holder*

$$S^3.P \geq (a+b+c)^4 \Rightarrow S^3 \geq (a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow S \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1/3$. $\square$

Ví dụ 1.2.24. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}\geq\sqrt{3},$$

Trong đó a,b,c là các số thực dương sao cho các căn thức tồn tại.

LỜI GIẢI. Gọi biểu thức vế trái là P. Đặt

$$\begin{aligned}S &= a(2b^2+2c^2-a^2)+b(2c^2+2a^2-b^2)+c(2a^2+2b^2-c^2)\\ &= 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)-a^3-b^3-c^3.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $Holder$ ta có

$$P.P.S\geq(a+b+c)^3.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b+c)^3\geq 3S.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$4(a^3+b^3+c^3)+6abc\geq 4\left(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right).$$

Để có bất đẳng thức trên, ta chỉ cần cộng vế 2 bất đẳng thức quen thuộc sau

$$3(a^3+b^3+c^3+3abc)\geq 3\left(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right),$$

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❑

Ví dụ 1.2.25. *Chứng minh rằng nếu $p\geq 2$ và $a,b,c\geq 0$ thì*

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+pabc}{p+1}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+pabc}{p+1}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+pabc}{p+1}}\leq a+b+c.$$

LỜI GIẢI. Gọi P là biểu thức vế trái, áp dụng bất đẳng thức $Holder$ ta có

$$(a+b+c)\left((a^2+pbc)+(b^2+pca)+(c^2+pab)\right)(1+1+1)\geq(p+1)P^3.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh rằng

$$(a^2+pbc)+(b^2+pca)+(c^2+pab)\leq\frac{p+1}{3}(a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên vì

$$VT=(a+b+c)^2+(p-2)(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2+\frac{p-2}{3}(a+b+c)^2=VP.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. ❑

Ví dụ 1.2.26 (Mở rộng IMO 2001 Pro. A2). *Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$. Đặt $y_i = x_1x_2...x_{i-1}x_{i+1}x_{i+2}...x_n$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1}{\sqrt[n-1]{x_1^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_1}}+\frac{x_2}{\sqrt[n-1]{x_2^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_2}}+$$
$$+...+\frac{x_n}{\sqrt[n-1]{x_n^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_n}}\geq 1.$$

Lời Giải. Đặt S là vế trái của bất đẳng thức và

$$\begin{aligned}P &= x_1\left(x_1^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_1\right)+x_2\left(x_2^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_2\right)+\\ &+...+x_n\left(x_n^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_n\right)\\ &= x_1^n+x_2^n+...+x_n^n+(n^{n-1}-n)x_1x_2...x_n.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $Holder$ ta có

$$S^{n-1}P\geq (x_1+x_2+...+x_n)^n.$$

Ta phải chứng minh

$$(x_1+x_2+...+x_n)^n\geq x_1^n+x_2^n+...+x_n^n+(n^n-n)x_1x_2...x_n.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì sau khi tách $x_1^n+x_2^n+...+x_n^n$ ra khỏi $(x_1+x_2+...+x_n)^n$ thì các số hạng còn lại có thể biểu diễn đối xứng thành các tổng lớn hơn hoặc bằng $x_1x_2...x_n$. ❑

Nếu bất đẳng thức giải được bằng $Holder$ thì cũng sẽ giải được bằng bất đẳng thức $AM-GM$, vì thực tế, để chứng minh bất đẳng thức $Holder$ ta cũng chỉ cần dùng bất đẳng thức $AM-GM$. Chẳng hạn với ví dụ 1.2.26 ta có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức $AM-GM$ theo cách sau đây

Đặt $M=a_1+a_2+...+a_n$, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ cho n số

$$\frac{(n-1)x_1}{\sqrt[n-1]{x_1^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_1}}+\frac{x_1\left(x_1^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_1\right)}{M^n}\geq\frac{nx_1}{M}.$$

Làm tương tự các bất đẳng thức với $x_2, x_3, .., x_n$ rồi cộng lại ta được

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)x_i}{\sqrt[n-1]{x_i^{n-1}+(n^{n-1}-1)y_i}}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^n+(n^n-n)x_1x_2...x_n}{M^n}\geq n.$$

Như vậy ta chỉ phải chứng minh

$$M^n \geq x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n + (n^n - n)x_1x_2...x_n.$$

Kết quả này đã được chứng minh ở trên.

Ngoài ra số $k = n^{n-1} - 1$ cũng là hằng số dương tốt nhất (nhỏ nhất) để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\frac{x_1}{\sqrt[n-1]{x_1^{n-1} + ky_1}} + \frac{x_2}{\sqrt[n-1]{x_2^{n-1} + ky_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt[n-1]{x_n^{n-1} + ky_n}} \geq \frac{n}{\sqrt[n-1]{1+k}}.$$

Với các bài toán thông thường thì bất đẳng thức *Holder* lại dùng thuận tiện hơn bất đẳng thức $AM - GM$ vì không cần xét các điều kiện đẳng thức, còn trong trường hợp tổng quát bạn chỉ cần ghi nhớ chứng minh với $m = n = 3$ là đủ. Xem thêm phần sử dụng bất đẳng thức *Holder* để cân bằng hệ số, trang 74.

1.3 Bất đẳng thức Chebyshev

1.3.1 Bất đẳng thức Chebyshev và ứng dụng

Định lý 1.4 (Bất đẳng thức Chebyshev). *Với 2 dãy số thực đơn điệu tăng* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *ta có*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

CHỨNG MINH. Bằng phân tích trực tiếp, ta có đẳng thức sau

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

Vì các dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ đơn điệu nên $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$.

Nếu 2 dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức trên đổi chiều. Chứng minh điều này hoàn toàn tương tự. ❑

Thông thường các bất đẳng thức đối xứng với các biến, nên việc sắp xếp lại các biến luôn có thể thực hiện được. Do đó trước khi sử dụng bất đẳng thức này ta phải có một bước sắp xếp lại các biến mà không làm mất tính tổng quát của bài toán. Lưu ý rằng điều này chỉ đúng khi và chỉ khi bất đẳng thức cần chứng minh hoàn toàn đối xứng với tất cả các biến.

Bất đẳng thức *Chebyshev* có nhiều ứng dụng rất hay, và nói chung làm cho bài toán được giải quyết theo cách đơn giản hơn trong khá nhiều trường hợp. Chúng ta cùng xem xét các ví dụ sau để thấy rõ điều này.

Hệ quả 1.6. *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tổng bằng n thì*

$$a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + ... + a_n^{n+1} \geq a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n.$$

CHỨNG MINH. Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 bộ đơn điệu $a_1, a_2, ..., a_n$ và $a_1^n, a_2^n, ..., a_n^n$ ta có ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.3.1 (Balkan MO). *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Chứng minh*

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + ... + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

LỜI GIẢI. Vì bất đẳng thức đối xứng với tất cả các biến nên ta có thể giả sử được $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Khi đó

$$\frac{1}{2-a_1} \geq \frac{1}{2-a_2} \geq ... \geq \frac{1}{2-a_n}.$$

Theo bất đẳng thức *Chebyshev* thì

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + ... + \frac{1}{2-a_n}\right) \\ &\geq \frac{n}{2n - (a_1 + a_2 + ... + a_n)} = \frac{n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1/n$. □

Ví dụ 1.3.2. *Các số dương a, b, c, d có tổng bình phương bằng 4. Chứng minh*

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}.$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq d$, khi đó

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2,$$

$$\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{1}{c+d+a} \geq \frac{1}{d+a+b} \geq \frac{1}{a+b+c}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* ta có

$$4.VT \geq (a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$
$$\geq \frac{16(a^2+b^2+c^2+d^2)}{3(a+b+c+d)} \geq \frac{4\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+d^2)}}{3}.$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=d=1$. ❑

Ví dụ 1.3.3 (China MO 1996). *Các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+...+\frac{a_1}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_1}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-a_2}} \geq ... \geq \frac{1}{\sqrt{1-a_n}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 bộ đơn điệu trên

$$n.VT \geq (a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right).$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$n = n(a_1+a_2+...+a_n) \geq (\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n})^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n} \leq \sqrt{n}.$$
$$\sqrt{1-a_1}+\sqrt{1-a_2}+...+\sqrt{1-a_n} \leq \sqrt{n(n-a_1-a_2-...-a_n)}$$
$$\leq \sqrt{n(n-1)}.$$

Do đó

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{1-a_1}+...+\sqrt{1-a_n}} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta suy ra

$$VT \geq \frac{1}{n}.\frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} \geq \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi tất cả các biến đều bằng nhau. ❑

Ví dụ 1.3.4 (Crux). *Giả sử các số thực $a, b, c > 1$ thoả mãn*

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* kết hợp với phương pháp chứng minh bằng phản chứng (bạn hãy xem ở chương IV). Nói cách khác, ta sẽ chứng minh rằng, nếu các số thực $a, b, c > 1$ thoả mãn

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1,$$

Thì bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}\ge 1.$$

Thật vậy, từ giả thiết suy ra

$$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1}=0 \qquad (*)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4-a^2}{a^2-1}+\frac{4-b^2}{b^2-1}+\frac{4-c^2}{c^2-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-2}{a+1}.\frac{a+2}{a-1}+\frac{b-2}{b+1}.\frac{b+2}{b-1}+\frac{c-2}{c+1}.\frac{c+2}{c-1}\le 0.$$

Chú ý rằng nếu ta có $a \ge b \ge c$ thì

$$\frac{a-2}{a+1}\ge\frac{b-2}{b+1}\ge\frac{c-2}{c+1},$$
$$\frac{a+2}{a-1}\le\frac{b+2}{b-1}\le\frac{c+2}{c-1}.$$

Do đó ta chỉ cần áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 bộ ngược chiều nói trên và chú ý điều kiện $(*)$ ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$. ❑

Ví dụ 1.3.5 (CWMO 2005). *Cho các số thực dương a, b, c, d, e thoả mãn*

$$\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}\le 1.$$

Lời Giải. Theo giả thiết ta có

$$\frac{1-a}{4+a}+\frac{1-b}{4+b}+\frac{1-c}{4+c}+\frac{1-d}{4+d}+\frac{1-e}{4+e}=0.$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}$$
$$\geq \frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-a}{(4+a)(4+a^2)}+\frac{1-b}{(4+b)(4+b^2)}+\frac{1-c}{(4+c)(4+c^2)}+\frac{1-d}{(4+d)(4+d^2)}\geq 0.$$

Giả sử rằng $a\geq b\geq c\geq d\geq e$, khi đó dễ thấy

$$\frac{1-a}{4+a}\leq\frac{1-b}{4+b}\leq\frac{1-c}{4+c}\leq\frac{1-d}{4+d}\leq\frac{1-e}{4+e}$$
$$\frac{1}{4+a^2}\leq\frac{1}{4+b^2}\leq\frac{1}{4+c^2}\leq\frac{1}{4+d^2}\leq\frac{1}{4+e^2}.$$

Do đó ta chỉ cần áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 bộ đơn điệu giảm trên sẽ có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e=1$. □

Ví dụ 1.3.6. *Giả sử các số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2}\leq\frac{1}{3}.$$

Lời Giải. Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng tương đương

$$\frac{1}{11+a^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+b^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+c^2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{11+d^2}-\frac{1}{12}\leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2-1}{11+a^2}+\frac{b^2-1}{11+b^2}+\frac{c^2-1}{11+c^2}+\frac{d^2-1}{11+d^2}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1).\frac{a+1}{a^2+11}+(b-1).\frac{b+1}{b^2+11}+(c-1).\frac{c+1}{c^2+11}+(d-1).\frac{d+1}{d^2+11}\geq 0.$$

Chú ý rằng nếu $a\geq b\geq c\geq d$ thì ta luôn có

$$\frac{a+1}{a^2+11}\geq\frac{b+1}{b^2+11}\geq\frac{c+1}{c^2+11}\geq\frac{d+1}{d^2+11}.$$

Nên áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho bộ số trên và bộ $(a-1,b-1,c-1,d-1)$ ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. □

Tác giả sẽ không đề cập nhiều đến những bài toán áp dụng trực tiếp bất đẳng thức *Chebyshev* mà sẽ đi sâu hơn đến một kĩ thuật rất hay liên quan đến bất đẳng thức này, kĩ thuật phân tách *Chebyshev*. Các bạn còn gặp lại những ứng dụng đặc biệt hơn của kĩ thuật này trong phần sau của tập sách, phần *Các bài toán sáng tạo*.

1.3.2 Kĩ thuật phân tách Chebyshev

Để các bạn dễ hình dung về phương pháp này, hãy xem một ví dụ sau đây

Ví dụ 1.3.7. *Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn điều kiện*

$$a+b+c+d = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$2(a+b+c+d) \geq \sqrt{a^2+3} + \sqrt{b^2+3} + \sqrt{c^2+3} + \sqrt{d^2+3}.$$

LỜI GIẢI. Nếu nhìn thoáng qua về đề bài, các bạn sẽ cảm thấy khó khăn vì giả thiết của bài toán không thật tường minh. Nếu bạn đã biết nhiều kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức thì lại càng dễ bị nhầm khi đi theo những phương pháp mạnh ví dụ như dồn biến chẳng hạn. Thật bất ngờ, bài toán trên được giải hoàn toàn đơn giản bằng bất đẳng thức *Chebyshev*, tất nhiên với một kĩ thuật áp dụng khá đặc biệt...

Ta trừ tương ứng từng số hạng của 2 vế và chú ý đẳng thức

$$2a - \sqrt{a^2+3} = \frac{3(a^2-1)}{2a+\sqrt{a^2+3}} \qquad (*)$$

Không thể áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* ngay được vì cả tử số và mẫu số của biểu thức đều là các hàm đơn điệu tăng. Tuy nhiên hãy chú ý giả thiết

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = a+b+c+d \\ \Rightarrow &\left(a - \frac{1}{a}\right) + \left(b - \frac{1}{b}\right) + \left(c - \frac{1}{c}\right) + \left(d - \frac{1}{d}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{a^2-1}{a} + \frac{b^2-1}{b} + \frac{c^2-1}{c} + \frac{d^2-1}{d} = 0. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức này bạn đọc có thể thấy một mối liên hệ với $(*)$, đó là chung tử số $a^2 - 1$. Đây chính là chìa khoá để giải bài toán. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{3(a^2-1)}{2a+\sqrt{a^2+3}} + \frac{3(b^2-1)}{2b+\sqrt{b^2+3}} + \frac{3(c^2-1)}{2c+\sqrt{c^2+3}} + \frac{3(d^2-1)}{2d+\sqrt{d^2+3}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a^2-1}{a}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{a^2}}} + \frac{\frac{b^2-1}{b}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{b^2}}} + \frac{\frac{c^2-1}{c}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{c^2}}} + \frac{\frac{d^2-1}{d}}{2+\sqrt{1+\frac{3}{d^2}}} \geq 0.$$

Lưu ý bất đẳng thức đã cho hoàn toàn đối xứng với 4 biến a, b, c, d và các hàm số

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x},$$
$$g(x) = \frac{1}{2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}.$$

Đều là các hàm tăng trên R^+ nên theo bất đẳng thức *Chebyshev*

$$f(a)g(a) + f(b)g(b) + f(c)g(c) + f(d)g(d) \geq$$
$$\frac{1}{4}(f(a) + f(b) + f(c) + f(d))(g(a) + g(b) + g(c) + g(d)) = 0.$$

Vì ta có $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$. ☐

Điều đặc biệt nhất ở lời giải này chính là việc chia cả tử và mẫu mỗi phân số tương ứng các số a, b, c, d tương ứng, sau đó mới dùng bất đẳng thức *Chebyshev*. Nếu ta dùng trực tiếp thì không mang lại hiệu quả. Có thể khái quát phương pháp trên thành dạng tổng quát với n biến

Để chứng minh $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \geq 0$ ta có thể chứng minh

$$\frac{y_1}{a_1} \cdot (x_1a_1) + \frac{y_2}{a_2} \cdot (x_2a_2) + ... + \frac{y_n}{a_n} \cdot (x_na_n) \geq 0,$$

Trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực mà ta phải tìm sao cho

$$\left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, ..., \frac{y_n}{a_n}\right) \quad , \quad (x_1a_1, x_2a_2, ..., x_na_n),$$

Là các bộ đơn điệu cùng chiều để điều kiện bất đẳng thức *Chebyshev* được thoả mãn. Khi đó việc chứng minh bất đẳng thức ban đầu sẽ được quy về chứng minh 2 bất đẳng thức đơn giản hơn là

$$\frac{y_1}{a_1} + \frac{y_2}{a_2} + ... + \frac{y_n}{a_n} \geq 0,$$
$$x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n \geq 0.$$

Một dạng thường sử dụng của kĩ thuật này là áp dụng với dạng phân thức. Giả sử ta phải chứng minh bất đẳng thức dạng

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n} \geq 0.$$

Về lí thuyết thì ta luôn có thể đưa bất đẳng thức về dạng này, thậm chí có thể chọn $y_1, y_2, ..., y_2 \geq 0$. Khi đó ta đi tìm các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho

$$(a_1x_1, a_2x_2, ...; a_nx_n) \ , \ (a_1y_1, a_2y_2, ..., a_ny_n)$$

là các bộ đơn điệu ngược chiều, khi đó bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu 2 điều kiện sau được thoả mãn

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq 0,$$
$$\frac{1}{a_1y_1} + \frac{1}{a_2y_2} + ... + \frac{1}{a_ny_n} \geq 0.$$

Thông thường đối với các bất đẳng thức, trong 2 dãy số $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $(y_1, y_2, .., y_n)$ sẽ có một dãy dương nên khi chọn dãy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ dương thì chỉ cần chứng minh một trong 2 bất đẳng thức cuối. Trong nhiều trường hợp ta có được đẳng thức $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ như trong bài toán trên.

Tuy nhiên việc chọn được bộ số nhân tử $(a_1, a_2, ..., a_n)$ không thể máy móc và vì thế, phương pháp này đôi khi cần đòi hỏi sự khéo léo và tinh ý. Ví dụ sau đây minh hoạ khá rõ kĩ thuật chứng minh này

Ví dụ 1.3.8 (Crux). *Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \le \frac{3}{8}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = bc, y = ca, z = ab$. Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{9-x} + \frac{1}{9-y} + \frac{1}{9-z} \le \frac{3}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{9-x} + \frac{1-y}{9-y} + \frac{1-z}{9-z} \ge 0.$$

Đến đây ta phải tìm các số a_x, a_y, a_z tương ứng để nhân với cả tử và mẫu các phân số trên. Ta lấy $a_x = 6 + x, a_y = 6 + y, a_z = 6 + z$

$$\frac{(1-x)(6+x)}{(9-x)(6+x)} + \frac{(1-y)(6+y)}{(9-y)(6+y)} + \frac{(1-z)(6+z)}{(9-z)(6+z)} \ge 0.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow z \ge y \ge x$. Vì $a + b + c = 3$ nên $z + y = a(b + c) \le 9/4, z + x \le 9/4, x + y \le 9/4$. Ngoài ra, dễ thấy

$$(1-x)(6+x) \ge (1-y)(6+y) \ge (1-z)(6+z),$$
$$(9-x)(6+x) \le (1-y)(6+y) \le (9-z)(6+z).$$

Vậy theo bất đẳng thức *Chebyshev* ta có

$$\frac{(1-x)(6+x)}{(9-x)(6+x)} + \frac{(1-y)(6+y)}{(9-y)(6+y)} + \frac{(1-z)(6+z)}{(9-z)(6+z)}$$
$$\ge \left(\sum_{x,y,z}(1-x)(6+x)\right)\left(\sum_{x,y,z}\frac{1}{(9-x)(6+x)}\right).$$

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sum_{x,y,z}(1-x)(6+x) = 18 - 5(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 5(ab+bc+ca) + (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le 18$$
$$\Leftrightarrow 5(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)^2 \le 18 + 6abc.$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc \Leftrightarrow (3-2a)(3-2b)(3-2c) \le xyz$$

$$\Leftrightarrow 9 + 3abc \ge 4(ab+bc+ca).$$

Thay $3abc \ge 4(ab+bc+ca) - 9$ vào bất đẳng thức trên, ta phải chứng minh

$$5(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)^2 \le 8(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca \le 3.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $a+b+c=3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❑

Ví dụ 1.3.9. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{c^2+a+b} + \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+a+c} \le 1,$$

Với các số thực không âm a, b, c tuỳ ý có tổng bằng 3.

Lời Giải. Hãy chú ý phân tích sau

$$\frac{1}{c^2+a+b} - \frac{1}{3} = \frac{1}{c^2-c+3} - \frac{1}{3} = \frac{c(1-c)}{3(c^2-c+3)}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{a(a-1)}{a^2-a+3} + \frac{b(b-1)}{b^2-b+3} + \frac{c(c-1)}{c^2-c+3} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}} + \frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}} \frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} \ge 0.$$

Giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow a-1 \ge b-1 \ge c-1$ .Vì $a+b+c=3$ nên $ab, bc, ca \le 3$. Do đó

$$\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}} \ge \frac{1}{b-1+\frac{3}{b}} \ge \frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 dãy trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❑

Ví dụ 1.3.10. *Chứng minh bất đẳng thức sau với a, b, c là các số thực không âm cho trước*

$$\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+2a^2} + \frac{b^2-ca}{c^2+a^2+2b^2} + \frac{c^2-ab}{a^2+b^2+2c^2} \ge 0.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức tổng quát hơn với mọi $k \leq 2$

$$\frac{a^2 - bc}{b^2 + c^2 + ka^2} + \frac{b^2 - ca}{c^2 + a^2 + kb^2} + \frac{c^2 - ab}{a^2 + b^2 + kc^2} \geq 0.$$

Thật vậy, nhân thêm các hệ số tương ứng vào mỗi phân số

$$\frac{(a^2 - bc)(b + c)}{(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c)} + \frac{(b^2 - ca)(c + a)}{(c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)} + \frac{(c^2 - ab)(a + b)}{(a^2 + b^2 + kc^2)(a + b)} \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$, khi đó

$$(a^2 - bc)(b + c) - (b^2 - ca)(c + a) = (ab + c^2)(a - b) + c(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$\begin{aligned}&(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c) - (c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)\\ &= (b - a)\left(a^2 + b^2 + c^2 - (k - 1)(ab + bc + ca)\right) \leq 0.\end{aligned}$$

Vậy 2 bộ số sau đơn điệu ngược chiều

$$(a^2 - bc)(b + c)\ ,\ (b^2 - ca)(c + a)\ ,\ (c^2 - ab)(a + b)$$

$$(b^2 + c^2 + ka^2)(b + c)\ ,\ (c^2 + a^2 + kb^2)(c + a)\ ,\ (a^2 + b^2 + kc^2)(a + b).$$

Chú ý rằng

$$(a^2 - bc)(b + c) + (b^2 - ca)(c + a) + (c^2 - ab)(a + b) = 0.$$

Nên từ bất đẳng thức *Chebyshev* ta có điều phải chứng minh. Ngoài ra $k = 2$ cũng là hằng số tốt nhất để bất đẳng thức trên đúng. ❑

Nhận xét. Có một cách chứng minh khác cho bất đẳng thức trên bằng cách sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} &\geq \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2 + 2c^2},\\ \frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} &\geq \frac{(b + c)^2}{b^2 + c^2 + 2a^2},\\ \frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} &\geq \frac{(c + a)^2}{c^2 + a^2 + 2b^2}.\end{aligned}$$

Chỉ cần cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh. ❑

Đây là một chứng minh rất hay và độc đáo, tuy nhiên chỉ sử dụng được trong trường hợp $k = 2$. Ta cũng có thể dùng phương pháp phân tích bình phương S.O.S.

Ví dụ 1.3.11. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm*

$$\sqrt{a^2 + 8bc} + \sqrt{b^2 + 8ca} + \sqrt{c^2 + 8ab} \leq 3(a + b + c).$$

HƯỚNG DẪN. Ta có biến đổi sau đây

$$\begin{aligned}3a - \sqrt{a^2 + 8bc} &= \frac{8(a^2 - bc)}{3a + \sqrt{a^2 + 8bc}} \\ &= \frac{8(a^2 - bc)(b + c)}{(3a + \sqrt{a^2 + 8bc})(b + c)}.\end{aligned}$$

Sau đó sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev*, chú ý rằng tổng các tử số bằng 0. ❑

Kết thúc cho bài viết các bạn hãy thử chứng minh một bất đẳng thức mạnh hơn đẳng thức *Chebyshev* thường gặp. Chứng minh chi tiết sẽ có ở bài sau, trong phần khai triển *Abel*.

Ví dụ 1.3.12. *Giả sử các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn điều kiện*

$$a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq ... \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$
$$b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq ... \geq \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n}.$$

Chứng minh rằng

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n).$$

1.4 Bất đẳng thức với hàm lồi

Hàm lồi là một khái niệm quan trọng trong toán học. Lí thuyết hàm lồi đối với các bất đẳng thức là một lí thuyết rất sâu và rộng, mang nặng tính giải tích, nên tác giả cũng chỉ cố gắng nêu ra những vấn đề cần thiết, quan trọng nhất đối với bất đẳng thức. Với các bạn THCS, hàm lồi vẫn còn là một khái niệm khá xa lạ, nhưng các bạn sẽ không phải lo lắng vì đây là một khái niệm tương đối dễ hiểu và bạn hãy bắt đầu thử áp dụng nó từ bây giờ. Trong phần này sẽ có 2 mục nhỏ : Bất đẳng thức *Jensen* và bất đẳng thức hàm lồi với việc xét các phần tử ở biên.

1.4.1 Hàm lồi với bất đẳng thức Jensen

Định lý 1.5 (Bất đẳng thức Jensen). *Nếu f là hàm lồi trên khoảng I thì với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ ta đều có*

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Chúng ta vẫn quen với việc coi hàm lồi $f : I \to R$ là hàm liên tục, khả vi cấp 2 và $f''(x) \geq 0 \; \forall x \in [I]$. Tuy nhiên với kiến thức THCS thì định lí *Jensen* có thể phát biểu dưới dạng đơn giản và dễ áp dụng hơn.

Hệ quả 1.7. *Cho $f : I \subset R^+ \to R$ thoả mãn $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \; \forall x, y \in I$. Khi đó với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ ta có bất đẳng thức*

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

Chứng Minh. Chứng minh định lí trên ta dùng phương pháp quy nạp *Cauchy*. Định lí trên giúp cho việc kiểm tra bất đẳng thức *Jensen* thuận tiện hơn nếu bạn không biết về đạo hàm. Sau đây là một chứng minh ngắn gọn cho định lí .

Dễ thấy, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng nếu n là một luỹ thừa của 2 và nếu bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, ta lấy $x = x_1 + x_2 + ... + x_k$ và $x_{k+1} = \frac{x}{k}$ thì

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k) + f\left(\frac{x}{k}\right) \geq (k+1)f\left(\frac{x + \frac{x}{k}}{k+1}\right) = (k+1)f\left(\frac{x}{k}\right)$$

Do đó ta có điều phải chứng minh. □

Hiển nhiên nếu thay điều kiện $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ bởi $f(x) + f(y) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ thì bất đẳng thức tổng quát cũng đổi chiều

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \leq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

Bất đẳng thức *Jensen* không phải là một bất đẳng thức quá chặt, nhưng xét một cách tổng quát, nó là công cụ rất cần thiết và rất dễ áp dụng. Đây là bất đẳng thức mà khi bạn mới làm quen về bất đẳng thức thì rất cần phải ghi nhớ. Tổng quát hơn, ta có bất đẳng thức *Jensen* với trọng số

Định lý 1.6 (Bất đẳng thức Jensen suy rộng). *Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng 1 và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực tuỳ ý thì với mọi hàm lồi f trên tập số thực ta luôn có*

$$a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + ... + a_nf(x_n) \geq f(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n).$$

Và như thế bất đẳng thức *Jensen* được trình bày ở trên là một trường hợp riêng với $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1/n$. Cũng tương tự như trước, nếu bạn chưa biết nhiều về các kiến thức của hàm lồi hay đạo hàm, thì hãy ghi nhớ tính chất sau đây

Hệ quả 1.8. *Với các số a_i, x_i $(i = \overline{1,n})$ thoả mãn điều kiện trên, f là một hàm xác định trên tập số thực. Xét bất đẳng thức*

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + ... + a_n f(x_n) \geq f(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n),$$

Bất đẳng thức đúng với n tuỳ ý, $\forall x_i, a_i$ khi và chỉ khi nó đúng với $n = 2$.

Như vậy để kiểm tra tính lồi của f ta chỉ cần kiểm tra trong trường hợp $n = 2$.

Hệ quả 1.9. *Giả sử $f : I \to R$. Xét bất đẳng thức*

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}).$$

Chứng minh rằng bất đẳng thức trên đúng với mọi n và với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ khi và chỉ khi nó đúng với $n = 2$ và với mọi $x_1, x_2 \in I$.

CHỨNG MINH. Đây có thể coi là một dạng phát biểu khác của bất đẳng thức *Jensen*. Ta cũng sử dụng phương pháp chứng minh tương tự, đó là phương pháp quy nạp *Cauchy*, cách chứng minh sau đây cũng hoàn toàn giống chứng minh bất đẳng thức $AM - GM$ ở phần trước.

Điều kiện cần là hiển nhiên, vì bất đẳng thức nếu đúng với n tuỳ ý, với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ thì cũng đúng với $n = 2$và với mọi $x_1, x_2 \in I$.

Điều kiện đủ phải chứng minh khó hơn, ta sử dụng quy nạp.

Giả sử bất đẳng thức đã đúng với n, như thế hiển nhiên nó sẽ đúng với $2n$ số hạng, ta chỉ cần áp dụng giả thiết quy nạp và giả thiết bất đẳng thức đúng với $n = 2$. Như vậy bất đẳng thức đúng với mọi số n có dạng $2^k, k \in N$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với mọi $n + 1$ số $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$, ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n+1}) \geq (n+1)f(\sqrt[n+1]{x_1x_2...x_{n+1}}).$$

Lấy $x_{n+1} = x = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ suy ra

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) + f(x) \geq (n+1)f(x)$$
$$\Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf(x).$$

Điều kiện đủ được chứng minh xong theo phương pháp quy nạp. Bài toán đã được hoàn thành. ❑

Hệ quả 1.10.

a. Khẳng định ở hệ quả 1.7 vẫn đúng nếu ta thay biểu thức trung bình nhân bằng một biểu thức trung bình bất kì giữa các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ chẳng hạn như trung bình cộng, trung bình điều hoà, trung bình nhân...

b, Nếu bất đẳng thức với 2 số đổi chiều thì bất đẳng thức với n số đổi chiều.

CHỨNG MINH. Chứng minh hoàn toàn tương tự như hệ quả 1.9. Với câu (b) thực ra ta đã xét với hàm $-f(x)$. ❑

Hệ quả 1.11 (Bất đẳng thức AM-GM). *Với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta luôn có bất đẳng thức*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

CHỨNG MINH. Xét $f(x) = x$, hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $n = 2$ nên theo hệ quả 1.9, nó cũng đúng với mọi số tự nhiên n và với mọi dãy số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$. ❑

Hệ quả 1.12. *Chứng minh với mọi số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thì*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}.$$

CHỨNG MINH. Đặt $f(x) = 1/x$, dễ thấy hàm $f(x)$ thoả mãn

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Theo hệ quả 1.7, bất đẳng thức đúng với $\forall n$ và mọi dãy số dương $x_1, x_2, ..., x_n$. ❑

Hệ quả 1.13. *Chứng minh rằng với mọi dãy số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thì*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \leq \sqrt{n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)}.$$

CHỨNG MINH. Sử dụng hệ quả 1.10, chỉ cần xét với hàm $f(x) = \sqrt{x}$. ❑

Sau đây là một số ví dụ đơn giản của bất đẳng thức *Jensen*. Thông thường các bài toán dạng này không quá khó, nhưng cần thiết cho các bạn củng cố lí thuyết.

Ví dụ 1.4.1 (IMO Shortlist). *Chứng minh rằng với mọi dãy số thực $x_1, x_2, ..., x_n \geq 1$ ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}}.$$

LỜI GIẢI. Theo hệ quả 1.9, bất đẳng thức sẽ đúng nếu ta chứng minh được với 2 số

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \; \forall a, b \geq 1.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên tương đương với $(a-b)^2(1-ab) \leq 0$, hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$. ❑

Ví dụ 1.4.2. *Chứng minh rằng với mọi $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực trong khoảng $(1/2, 1]$ ta luôn có*

$$\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+a_2+...+a_n)^n} \geq \frac{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}{(n-a_1-a_n-..-a_n)^n}.$$

LỜI GIẢI. Xét hàm số sau với $x \in (1/2, 1]$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x - \ln(1-x) \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \geq 0 \quad (x \in (1/2, 1]). \end{aligned}$$

Vậy f là hàm lồi và theo bất đẳng thức *Jensen* ta có điều phải chứng minh

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right). \quad \square$$

Ví dụ 1.4.3 (India 1995). *Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh*

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_1}{\sqrt{1-x_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

LỜI GIẢI. Không mấy khó khăn ta chứng minh được $f(x)$ là hàm lồi với

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} \quad x \in (0, 1).$$

Và do đó áp dụng bất đẳng thức *Jensen* ta có điều phải chứng minh. $\square$

Sau đây là một tính chất rất đẹp của hàm lồi, bạn đọc hãy thử chứng minh trước khi xem tiếp phần sau.

Ví dụ 1.4.4 (Bất đẳng thức Popoviciu). *Chứng minh rằng nếu f là hàm số lồi trên I thì với mọi $a, b, c \in I$*

$$f(a)+f(b)+f(c)+f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{4}{3}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{b+c}{2}\right)+f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right).$$

Sau ứng dụng của hàm lồi để chứng minh bất đẳng thức dạng chuẩn (tức là đẳng thức xảy ra khi tất cả n biến bằng nhau) ta cũng có một ứng dụng rất quan trọng khác của hàm lồi. Đó là việc xử lí bất đẳng thức với các phần tử ở biên.

1.4.2 Hàm lồi với kĩ thuật xét phần tử ở biên

Hãy bắt đầu bằng bài toán sau đây

Ví dụ 1.4.5 (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ). *Cho các số thực $a, b, c \in [1,2]$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^3 + b^3 + c^3 \le 5abc.$$

LỜI GIẢI. Trước khi sử dụng tính chất mạnh của hàm lồi, ta sẽ đi tìm một lời giải thật sơ cấp cho bất đẳng thức trên. Đầu tiên ta phải giả sử $a \ge b \ge c$. Vì $a, b, c \in [1, 2]$ nên dễ thấy

$$\begin{aligned} a^3 + 2 \le 5a \;&\Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a-1) \le 0 && (1)\\ 5a + b^3 \le 5ab + 1 \;&\Leftrightarrow (b-1)(b^2+b+1-5a) \le 0 && (2)\\ 5ab + c^3 \le 5abc + 1 \;&\Leftrightarrow (c-1)(c^2+c+1-5ab) \le 0 && (3)\end{aligned}$$

Các khẳng định trên hiển nhiên đúng vì

$$\begin{aligned} &b^2 + b + 1 \le a^2 + a + 1 \le 2a + a + 1 \le 5a,\\ &c^2 + c + 1 \le a^2 + a + 1 \le 5a \le 5ab.\end{aligned}$$

Cộng vế 3 bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = c = 1$. ☐

Tiếp theo cũng là một ví dụ rất thú vị trong việc đánh giá trung gian - kĩ thuật quen thuộc của các bất đẳng thức sơ cấp.

Ví dụ 1.4.6 (Olympiad 30-4). *Chứng minh rằng với các số thực $a, b, c \in [1, 2]$ ta có bất đẳng thức*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \le 7.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c) \ge 0 \Leftrightarrow ab + bc \ge b^2 + ac &\Leftrightarrow \frac{a}{c} + 1 \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\\ ab + bc \ge b^2 + ac &\Leftrightarrow \frac{c}{a} + 1 \ge \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Do đó $$a/b + b/c + c/b + b/a \le a/c + c/a + 2,$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \le 2 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Đặt $x = a/c$, ta có $2 \ge x \ge 1$ nên $(x-2)(x-1) \le 0 \Rightarrow x + 1/x \le 5/2$.

Từ đó ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2, c = 1$ hoặc $a = 2, b = c = 1$ hoặc các hoán vị tương ứng của chúng. ❑

Cả 2 lời giải được trình bày ở trên đều khá khéo léo trong các đánh giá trung gian. Chứng minh hoàn toàn phù hợp với trình độ THCS và hoàn toàn có thể tổng quát được. Chẳng hạn với đánh giá tương tự ví dụ 1.4.6 ta có thể tổng quát thành

Ví dụ 1.4.7. *Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n \in [p, q] (p, q \ge 0)$. Chứng minh*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \le n^2 + k_n \frac{(p-q)^2}{4pq},$$

Trong đó $k_n = n^2$ nếu n chẵn và $n^2 - 1$ nếu n lẻ.

Cách đánh giá trung gian như trên hoàn toàn tự nhiên và đơn giản, bạn hãy sử dụng cách này để chứng minh bất đẳng thức 1.4.7, đây là cách sơ cấp và hay nhất.

Nhưng liệu phương pháp đó còn sử dụng lại được trong bài toán sau hay không?

Ví dụ 1.4.8. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_{2005}$ là các số thực trong $[-1, 1]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức*

$$P = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{2004}x_{2005} + x_{2005}x_1.$$

LỜI GIẢI. Khi nhìn vào bất đẳng thức này, ta cũng có "cảm giác" là biểu thức sẽ đạt cực đại khi có 2005 số bằng 1 (dễ), biểu thức sẽ đạt cực tiểu khi các số -1 và 1 xen kẽ nhau trong dãy $x_1, x_2, ..., x_{2005}$ và có vẻ đây là một điều khá hiển nhiên. Tuy nhiên, chứng minh được nhận xét hiển nhiên ấy lại không đơn giản như vẻ ngoài của bài toán. Sẽ rất khó chứng minh nếu bạn không có một định hướng từ trước. Hãy chú ý các biểu thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ hoặc biểu thức bậc hai $f(x) = x^2 + ax + b$ với $x \in [p, q]$ có một tính chất rất quan trọng là

$$\max_{x \in [p,q]} f(x) = \max\{f(p), f(q)\}.$$

Với hàm bậc nhất nó còn có thêm tính chất

$$\min_{x \in [p,q]} f(x) = \min\{f(p), f(q)\}.$$

Sử dụng tính chất trên vào bài toán ban đầu, chỉ cần một nhận xét đơn giản là coi như bài toán đã được giải quyết xong : *Nếu ta cố định tất cả các biến $x_2, x_3, ..., x_{2005}$ và cho x_1 biến thiên trong $[-1,1]$ thì $P = P(x_1)$ là một hàm bậc nhất đối với x_1 nên*

$$\max_{x_1\in[-1,1]} P(x_1) = \max\{P(-1), P(1)\}, \min_{x_1\in[-1,1]} P(x_1) = \min\{P(-1), P(1)\}.$$

Và do đó P đạt max hoặc min khi với một số x_k bất kì ta đều có $x_k \in \{-1, 1\}$. Nói tóm lại, P lấy giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất khi $x_k \in \{-1,1\}$ $\forall k = 1, 2005$. □

Từ cách chứng minh này ta có thể thay thế biểu thức P bằng rất nhiều biểu thức tương tự khác như

Ví dụ 1.4.9. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực trong $[-1,1]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức*

$$P = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + ... + x_{n-1}x_nx_1 + x_nx_1x_2.$$

Ta có thể khái quát phương pháp vừa sử dụng thành một định lí tổng quát là

Bổ đề 1 (Bài toán về phần tử cực biên).

(i). Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n \in I = [a, b]$ và $f : I^n \to R$ là hàm thực thoả mãn với mọi $i = 1, n$, nếu cố định $n-1$ biến $x_j (j \neq i)$ thì f đạt giá trị lớn nhất khi $x_i \in \{a, b\}$. Khi đó $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sẽ lấy giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x_i \in \{a, b\}$ $\forall i = \overline{1,n}$.

(ii). Kết quả tương tự nếu ta thay giá trị lớn nhất thành giá trị nhỏ nhất.

Câu hỏi đặt ra là những hàm số nào thì có tính chất cực biên như vậy? Tất nhiên là không phải mọi hàm số, chỉ hàm bậc nhất mới có cả tính chất chặn trên lẫn chặn dưới. Điều đặc biệt là hoá ra lớp các hàm như vậy lại chính là lớp các hàm lồi, cụ thể là lớp các hàm khả vi cấp 2 và có đạo hàm không âm

Bổ đề 2. *Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $[a, b]$ $(f''(x) \geq 0 \forall x \in [a, b])$ thì*

$$\forall x \in [a, b]\ ,\ f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

Nếu $f(x)$ là hàm lõm thì ta thay max *bởi* min.

Tất nhiên phương pháp trên vẫn được sử dụng trực tiếp như bất đẳng thức *Jensen* mà không cần dùng tới đạo hàm. Sử dụng định lí về phần hàm lồi và các phần tử cực biên thì các ví dụ vừa trình bày ở phần trước trở nên rất đơn giản.

Chẳng hạn ở ví dụ 1.4.7 ta có biểu thức

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right).$$

Dễ thấy với mỗi a_i thì f là một hàm lồi nên biểu thức sẽ đạt giá trị lớn nhất nếu và chỉ nếu $a_i \in \{p, q\}$ $\forall i = \overline{1, n}$.

Công việc cuối cùng cần làm là đặt r là số các số a_i bằng p rồi dùng tam thức bậc 2. Điều này không khó nên bạn có thể tự làm. Tất nhiên, phương pháp này sẽ giúp ta giải những bài toán cồng kềnh hơn, chẳng hạn.

Ví dụ 1.4.10 (Tổng quát). *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau với* $x_i \in [a, b]$ $\forall i = 1, n$ *trong đó* $b \geq a \geq 0$

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)\left(\frac{\beta_1}{x_1} + \frac{\beta_2}{x_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{x_n}\right),$$

Trong đó a, b, α_i, β_i $\forall i = \overline{1, n}$ *là các hằng số dương cho trước.*

Về lí thuyết, bài toán trên luôn giải được vì ta chỉ phải xét trong trường hợp hữu hạn $x_i \in \{a, b\}$ (x_i chỉ lấy 1 trong 2 giá trị a, b với mọi $i = \overline{1, n}$).

Ví dụ 1.4.11 (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ). *Cho các số thực* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. *Tìm giá trị lớn nhất của*

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \cdots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2.$$

Trong bài toán trên, vì x^2 là một hàm lồi nên ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức khi $x_i \in \{a, b\}$.

Sau đây là một ví dụ khác dựa theo tư tưởng hàm lồi

Ví dụ 1.4.12. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với* $n \in N$

$$f(x) = |1 + x| + |2 + x| + \ldots + |n + x|, \quad x \in R$$

LỜI GIẢI. Đặt $I_k = [-k, -k + 1] \forall k \geq 2, I_{n+1} = (-\infty, -n], I_1 = [-1, +\infty)$. Chú ý rằng với mỗi $x \in I_k$ ta có thể bỏ đi các dấu giá trị tuyệt đối của $f(x)$ và $f(x)$ trở thành một hàm bậc nhất với x nên dễ thấy

$$\min_{x \in I_k} f(x) = \min\{f(-k), f(-k + 1)\}$$

Với I_1 và I_{n+1} rõ ràng ta không phải xét với các cận vô cùng vì hiển nhiên khi đó f không đạt giá trị nhỏ nhất. Vậy f chỉ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x \in \{-1, -2, \ldots, -n\}$. Phần còn lại của bài toán là việc tính toán với mỗi $x = -k$ $(k = \overline{1, n})$ sau đó so sánh nên sẽ giành cho bạn đọc tự hoàn chỉnh. ❑

1.5 Khai triển Abel và bất đẳng thức hoán vị

1.5.1 Khai triển Abel

Khai triển *Abel* là công thức khai triển sau đây

Định lý 1.7 (Khai triển Abel). *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ và $y_1, y_2, ..., y_n$ là các số thực tuỳ ý. Đặt $c_k = y_1 + y_2 + ... + y_k$ $\forall k = \overline{1,n}$. Khi đó*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = (x_1 - x_2)c_1 + (x_2 - x_3)c_2 + ... + (x_{n-1} - x_n)c_{n-1} + x_nc_n.$$

Công thức trên là khá hiển nhiên, việc chứng minh không có gì khó khăn vì nó chỉ đơn thuần là đẳng thức. Thật kì lạ là công thức khai triển này lại rất thường xuyên được dùng trong toán học, đặc biệt là trong đại số và bất đẳng thức. Công thức khai triển trên gắn liền với bất đẳng thức *Abel* như sau

Ví dụ 1.5.1. *Cho 2 dãy số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$. Ta đặt*

$$S_k = x_1 + x_2 + ... + x_k,$$
$$M = \max_{k=\overline{1,n}} S_k\ ,\ m = \min_{k=\overline{1,n}} S_k.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$my_1 \leq x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \leq My_1.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng khai triển *Abel* như đã trình bày ở trên

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n &= (y_1 - y_2)S_1 + (y_2 - y_3)S_2 + ... + \\ &\quad + (y_{n-1} - y_n)S_{n-1} + y_nS_n \\ &\geq (y_1 - y_2)m + (y_2 - y_3)m + ... + \\ &\quad + (y_{n-1} - y_n)m + y_nm \\ &\geq my_1. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự đối với bất đẳng thức bên phải. □

Sau đây là một số bất đẳng thức tiêu biểu sử dụng khai triển quan trọng này

Ví dụ 1.5.2. *Cho 2 dãy số dương $a_1, a_2, .., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thoả mãn điều kiện*

$$\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \geq 0 \\ b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \\ a_1 \geq b_1 \\ a_1a_2 \geq b_1b_2 \\ \dots \\ a_1a_2...a_n \geq b_1b_2...b_n \end{cases}$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng khai triển *Abel* ta có

$$\begin{aligned}
& a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n \\
\Leftrightarrow\quad & b_1\left(\frac{a_1}{b_1} - 1\right) + b_2\left(\frac{a_2}{b_2} - 1\right) + \dots + b_n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (b_1 - b_2)\left(\frac{a_1}{b_1} - 1\right) + (b_2 - b_3)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - 2\right) + \dots + \\
& (b_{n-1} - b_n)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - n + 1\right) + b_n\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_n}{b_n} - n\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_k}{b_k} \geq k\sqrt[k]{\frac{a_1a_2...a_k}{b_1b_2...b_k}} \geq k.$$

Ngoài ra từ giả thiết $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ nên mỗi số hạng ở tổng trên đều không âm. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a_i = b_i \forall i = \overline{1, n}$. □

Ví dụ 1.5.3 (USA MO 1994). *Cho các số thực dương $x_1, x_2, .., x_n$ thoả mãn*

$$\forall k \leq n, x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq \sqrt{k}.$$

Chứng minh bất đẳng thức sau

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

LỜI GIẢI. Ta có thể sắp xếp lại dãy với $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Đặt $b_k = \sqrt{k}$.
Sử dụng phép biến đổi *Abel*

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= (x_1 - x_2)x_1 + (x_2 - x_3)(x_1 + x_2) + \dots + \\
&\quad + (x_{n-1} - x_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\
&\geq (x_1 - x_2) + b_2(x_2 - x_3) + \dots + b_3(x_{n-1} - x_n) + b_n x_n \\
&\geq b_1 x_1 + (b_2 - b_1)x_2 + (b_3 - b_2)x_3 + \dots + (b_n - b_{n-1})x_n \\
&\geq (2b_1 - b_2)x_1 + (2b_2 - b_1 - b_3)(x_1 + x_2) + \dots + \\
&\quad + (2b_{n-1} - b_{n-2} - b_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + (b_{n-1} - b_n)(x_1 + \dots + x_n) \\
&\geq (2b_1 - b_2) + b_2(2b_2 - b_1 - b_3) + \dots + \\
&\quad + b_{n-1}(2b_{n-1} - b_{n-2} - b_n) + b_n(b_{n-1} - b_n).
\end{aligned}$$

Ngoài ra dễ thấy

$$b_k(2b_k - b_{k-1} - b_{k+1}) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}})$$
$$= \frac{\sqrt{k}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}.$$

Do đó $b_k(2b_k - b_{k-1} - b_{k+1}) \geq \frac{1}{4k}$. Từ đó dễ dàng suy ra *đpcm.* □

Ví dụ 1.5.4 (Làm mạnh bất đẳng thức Chebyshev). *Giả sử các số thực* $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ *thoả mãn điều kiện*

$$a_1 \geq \frac{a_1+a_2}{2} \geq ... \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$
$$b_1 \geq \frac{b_1+b_2}{2} \geq ... \geq \frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}.$$

Chứng minh rằng

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq \frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n).$$

LỜI GIẢI. Do biểu thức

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) - (a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)$$

Luôn biểu diễn được qua các số hạng $(a_i - a_j)(b_h - b_l)$ nên ta có thể cùng bớt đi ở dãy (a_i) và (b_i) một lượng tương ứng là $(a_1+a_2+...+a_n)/n$ và $(b_1+b_2+...+b_n)/n$, điều đó có nghĩa là ta có thể thể giả sử được

$$a_1+a_2+...+a_n = b_1+b_2+...+b_n = 0.$$

Đặt $S_k = a_1+a_2+...+a_k$, theo công thức khai triển *Abel* ta có

$$\begin{aligned}P &= a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\\ &= (b_1-b_2)S_1 + (b_2-b_3)S_2 + ... + (b_{n-1}-b_n)S_{n-1} + b_nS_n\\ &= (b_1-b_2)S_1 + 2(b_2-b_3)\frac{S_2}{2} + ... + (n-1)(b_{n-1}-b_n)\frac{S_{n-1}}{n-1} + nb_n\frac{S_n}{n}.\end{aligned}$$

Chú ý điều kiện giả thiết $\{S_k/k\}$ là dãy giảm nên ta sử dụng tiếp khai triển *Abel* cho biểu thức trên

$$\begin{aligned}P = &\left(S_1 - \frac{S_2}{2}\right)(b_1-b_2) + \left(\frac{S_2}{2} - \frac{S_3}{3}\right)(b_1+b_2-2b_3) + ...\\ &+ \left(\frac{S_{n-1}}{n-1} - \frac{S_n}{n}\right)(b_1+b_2+...+b_{n-1}-(n-1)b_n) +\\ &+ \left(\frac{S_n}{n}\right)(b_1+b_2+...+b_n).\end{aligned}$$

Theo giả thiết ta có

$$b_1 \geq \frac{b_1+b_2}{2} \geq \ldots \geq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n},$$

Mà điều kiện trên hoàn toàn tương đương với

$$b_1 \geq b_2 \quad , \quad b_1+b_2+\ldots+b_k \geq kb_{k+1}\ \forall k=\overline{1,n-1}.$$

Vậy $P \geq 0$. Ta có điều phải chứng minh. ❑

Ví dụ 1.5.5 (Romania MO, Singapore MO). *Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1}=0$ là dãy số dương cho trước. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i+1}}).$$

Lời Giải. Đặt $c_i=\sqrt{i}-\sqrt{i-1}$ và $a_i=\sqrt{x_i}$. Bất đẳng thức tương đương

$$(a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n)^2 \geq a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Chọn các số dương $b_1,b_2,\ldots,b_n$ sao cho $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$ và

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}
& a_1c_1+a_2c_2+\ldots+a_nc_n \geq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \\
\Leftrightarrow\quad & a_1(c_1-b_1)+a_2(c_2-b_2)+\ldots+a_n(c_n-b_n) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (a_1-a_2)(c_1-b_1)+(a_2-a_3)(c_1+c_2-b_1-b_2)+\ldots.+ \\
& +(a_{n-1}-a_n)(c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}-b_1-b_2-\ldots-b_{n-1})+ \\
& +a_n(c_1+c_2+\ldots+c_n-b_1-b_2-\ldots-b_n) \geq 0.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ và

$$c_1+c_2+\ldots+c_k-(b_1+b_2+\ldots+b_k)=\sqrt{k}-(b_1+b_2+\ldots+b_k) \geq 0,$$

Bởi vì theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$b_1+b_2+\ldots+b_k \leq \sqrt{k(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_k^2)} \leq \sqrt{k}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. ❑

Ví dụ 1.5.6. *Cho 2 dãy số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thoả mãn*

$$\begin{cases} b_1 \le b_2 \le ... \le b_n, \\ \forall k = \overline{1,n} \text{ thì } a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 \le b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \le b_1 + b_2 + ... + b_n.$$

Lời Giải. Ta sử dụng chứng minh bằng quy nạp, hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đã đúng với n, ta chứng minh nó vẫn đúng với $n+1$ số. Thật vậy, theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{n+1}^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n+1}b_{n+1})^2.$$

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} & b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{n+1}^2 \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n+1}b_{n+1} \\ \Leftrightarrow\ & b_1(b_1 - a_1) + b_2(b_2 - a_2) + ... + b_{n+1}(b_{n+1} - a_{n+1}) \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & (b_1 - b_2)(b_1 - a_1) + (b_2 - b_3)(b_1 + b_2 - a_2 - a_2) + ... \\ & +(b_n - b_{n+1})(b_1 + b_2 + ... + b_n - a_1 - a_2 - ... - a_n) + \\ & +b_{n+1}(b_1 + b_2 + ... + b_{n+1} - a_1 - a_2 - ... - a_{n+1}) \ge 0. \end{aligned}$$

Chú ý rằng trong tổng trên tất cả các số hạng trừ số hạng cuối cùng là không dương, do đó ta phải có

$$\begin{aligned} & b_1 + b_2 + ... + b_{n+1} - a_1 - a_2 - ... - a_{n+1} \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & b_1 + b_2 + ... + b_{n+1} \ge a_1 + a_2 + ... + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

Ví dụ 1.5.7. *Giả sử $0 \le x \le y \le z$ và $a, b, c \ge 0$ thoả mãn hệ điều kiện*

$$\begin{cases} c/z & \le 1 \\ a/x + b/y & \le 2 \\ a/x + b/y + c/z & \le 3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$

LỜI GIẢI. Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\\
=\;& \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{a}{x}}-1\right)+\sqrt{y}\left(\sqrt{\frac{b}{y}}-1\right)+\sqrt{z}\left(\sqrt{\frac{c}{z}}-1\right)\\
=\;& (\sqrt{z}-\sqrt{y})\left(\sqrt{\frac{a}{x}}-1\right)+(\sqrt{y}-\sqrt{x})\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{b}{y}}-2\right)\\
+\;& \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{\frac{c}{z}}-3\right)\le 0.
\end{aligned}$$

Vì theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\sqrt{\frac{a}{x}}\le 1\,,\ \sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{b}{y}}\le 2\,,\ \sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{\frac{c}{z}}\le 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=x, b=y, c=z$. □

Hi vọng qua các ví dụ trên các bạn thấy rõ được ý nghĩa của kĩ thuật đặc biệt này. Để kết thúc, các bạn hãy tự chứng minh các bất đẳng thức sau

Ví dụ 1.5.8 (Đề thi HSG Tổng Hợp). *Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z thoả mãn điều kiện*

$$\begin{cases} x\ge y\ge z, a\le x\\ a^2+b^2\le x^2+y^2\\ a^3+b^3+c^3\le x^3+y^3+z^3\end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a^6+b^6+c^6\le x^6+y^6+z^6.$$

HƯỚNG DẪN. Hãy chứng minh trước $a^3+b^3\le x^3+y^3$. □

Ví dụ 1.5.9 (Russia 2000). *Cho $-1<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$ và $y_1<y_2<\ldots<y_n$ sao cho*

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=x_1^{13}+x_2^{13}+\ldots+x_n^{13}.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$x_1^{13}y_1+x_2^{13}y_2+\ldots+x_n^{13}y_n<x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

1.5.2 Bất đẳng thức hoán vị

Định lý 1.8 (Bất đẳng thức Hoán vị). *Cho 2 dãy số đơn điệu tăng $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Giả sử $(i_1, i_2, ..., i_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1, 2, ..., n)$, ta luôn có*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_nb_{i_n}$$

Ngoài ra nếu 2 dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức trên đổi chiều.

CHỨNG MINH. Xét trường hợp các dãy đều là đơn điệu tăng. Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & a_1(b_1 - b_{i_1}) + a_2(b_2 - b_{i_2}) + ... + a_n(b_n - b_{i_n}) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \ (a_1 - a_2)(b_1 - b_{i_1}) + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2 - b_{i_1} - b_{i_2}) + ... \\ & \quad +(a_{n-1} - a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} - b_{i_1} - b_{i_2} - ... - b_{i_{n-1}}) + \\ & \quad +a_n(b_1 + b_2 + ... + b_n - b_{i_1} - b_{i_2} - ... - b_{i_n}) \geq 0. \end{aligned}$$

Vì $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ nên với mọi $k = \overline{1, n}$ thì $b_1 + b_2 + ... + b_k \geq b_{i_1} + b_{i_2} + ... + b_{i_k}$. Vậy mỗi số hạng của tổng trên đều không âm. Ta có *đpcm.* ☐

Nếu 2 dãy đơn điệu ngược chiều thì bất đẳng thức đổi dấu và cũng chứng minh hoàn toàn tương tự.

Chứng minh bất đẳng thức hoán vị bằng khai triển *Abel* rất ngắn gọn, có nhiều cách chứng minh khác cho bất đẳng thức này nhưng nói chung đều mang nhiều tính số học hoặc dài dòng hơn nhiều. Bất đẳng thức hoán vị là một bất đẳng thức rất mạnh, chẳng hạn nó có thể suy ra trực tiếp bất đẳng thức $AM - GM$ như sau

Ví dụ 1.5.10 (Bất đẳng thức AM-GM). *Chứng minh với mọi số thực không âm $a_1, a_2, .., a_n$ ta có*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng bất đẳng thức trên hoàn toàn tương đương với

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Xét bất đẳng thức hoán vị với 2 dãy đơn điệu ngược chiều sau

$$\begin{cases} x_1, x_2, ..., x_n, \\ \dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, ..., \dfrac{1}{x_n}. \end{cases}$$

Khi đó

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_1}{x_1} + \frac{x_2}{x_2} + ... + \frac{x_n}{x_1} = n.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ☐

Ví dụ 1.5.11. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm ta luôn có*

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^4b + b^4c + c^4a.$$

LỜI GIẢI. Ta áp dụng bất đẳng thức hoán vị với 2 bộ đơn điệu sau đây

$$(a, b, c) \ , \ (a^4, b^4, c^4). \ \square$$

Ví dụ 1.5.12 (IMO 1984 Pro. 3). *Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác, hãy chứng minh*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

LỜI GIẢI. Lưu ý rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác thì

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 + bc \geq b^2 + ca.$$

Vậy 2 bộ số sau đây là 2 bộ đơn điệu ngược chiều

$$a^2 + bc \ , \ b^2 + ca \ , \ c^2 + ab,$$
$$\frac{1}{a} \ , \ \frac{1}{b} \ , \ \frac{1}{c}.$$

Theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a^2+bc}{a} + \frac{b^2+ca}{b} + \frac{c^2+ab}{c} \leq \frac{a^2+bc}{c} + \frac{b^2+ca}{a} + \frac{c^2+ab}{b}$$
$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \leq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Đây là điều phải chứng minh. Lưu ý rằng nếu không có giả thiết a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác thì bất đẳng thức không đúng. $\square$

Ví dụ 1.5.13 (IMO 1975). *Cho 2 dãy số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ và $y_1, y_2, ..., y_n$ thoả mãn $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n, y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$. Gọi $z_1, z_2, ..., z_n$ là một hoán vị của $y_1, y_2, ..., y_n$. Chứng minh rằng*

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + ... + (x_n - z_n)^2.$$

LỜI GIẢI. Đây thực chất chỉ là bất đẳng thức hoán vị thông thường. $\square$

Ví dụ 1.5.14 (IMO 1978). *Cho dãy số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, .., a_n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

LỜI GIẢI. Sắp xếp dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ thành dãy đơn điệu tăng $x_1, x_2, ..., x_n$. Theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + ... + \frac{x_n}{n^2}.$$

Vì dãy $(x_i)_{i=1}^n$ là số dãy số nguyên dương đơn điệu tăng nên $x_i \geq i \ \forall i = \overline{1, n}$. Vậy

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + ... + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.5.15. *Chứng minh với mọi số dương a, b, c thì*

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq a + b + c.$$

LỜI GIẢI. Do 2 dãy a^2, b^2, c^2 và $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ luôn là 2 dãy đơn điệu cùng chiều nên theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a} + \frac{a^2}{a + b}.$$

Do đó

$$\frac{a^2 + bc}{b + c} + \frac{b^2 + ca}{c + a} + \frac{c^2 + ab}{a + b} \geq \frac{b^2 + bc}{b + c} + \frac{c^2 + ca}{c + a} + \frac{a^2 + ab}{a + b} = a + b + c.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$. □

1.6 Bất đẳng thức đối xứng 3 biến

Bất đẳng thức đối xứng là một trong các phần quan trọng nhất của bất đẳng thức sơ cấp, cũng là dạng bài quen thuộc trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây là dạng bất đẳng thức rất được yêu thích không chỉ với các bạn đã thành thạo mà còn hấp dẫn với những bạn mới bắt đầu. Có lẽ lí do đơn giản là các bất đẳng thức dạng này đều rất đẹp và chuẩn về mặt hình thức. Tuy nhiên không phải một bài toán với hình thức phát biểu đơn giản cũng có thể giải được theo cách đơn giản, thậm chí rất nhiều bài toán như vậy nhưng lời giải rất lại khó.

Nói chung, các bất đẳng thức đối xứng 3 biến ở dạng tổng quát luôn có biểu diễn dưới dạng sau

$$f(a, b, c) \geq 0$$

LỜI GIẢI. Sắp xếp dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ thành dãy đơn điệu tăng $x_1, x_2, ..., x_n$. Theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + ... + \frac{x_n}{n^2}.$$

Vì dãy $(x_i)_{i=1}^n$ là số dãy số nguyên dương đơn điệu tăng nên $x_i \geq i \; \forall i = \overline{1,n}$. Vậy

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + ... + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.5.15. *Chứng minh với mọi số dương a, b, c thì*

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c.$$

LỜI GIẢI. Do 2 dãy a^2, b^2, c^2 và $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ luôn là 2 dãy đơn điệu cùng chiều nên theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b}.$$

Do đó

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \geq \frac{b^2+bc}{b+c} + \frac{c^2+ca}{c+a} + \frac{a^2+ab}{a+b} = a+b+c.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$. □

1.6 Bất đẳng thức đối xứng 3 biến

Bất đẳng thức đối xứng là một trong các phần quan trọng nhất của bất đẳng thức sơ cấp, cũng là dạng bài quen thuộc trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Đây là dạng bất đẳng thức rất được yêu thích không chỉ với các bạn đã thành thạo mà còn hấp dẫn với những bạn mới bắt đầu. Có lẽ lí do đơn giản là các bất đẳng thức dạng này đều rất đẹp và chuẩn về mặt hình thức. Tuy nhiên không phải một bài toán với hình thức phát biểu đơn giản cũng có thể giải được theo cách đơn giản, thậm chí rất nhiều bài toán như vậy nhưng lời giải rất lại khó.

Nói chung, các bất đẳng thức đối xứng 3 biến ở dạng tổng quát luôn có biểu diễn dưới dạng sau

$$f(a,b,c) \geq 0$$

trong đó $f(a, b, c)$ là hàm đối xứng của 3 biến a, b, c, hay nói cách khác

$$f(a, b, c) = f(c, b, a) = f(b, a, c).$$

Chẳng hạn $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca + 5abc + a^2b^2c^2$.

Tính chất quan trọng nhất của các biểu thức đối xứng là vai trò bình đẳng giữa các biến, và do đó ta có thể xắp xếp lại theo một trật tự tùy ý giá trị các biến số đó trong chứng minh. Đây là một chú ý sẽ được sử dụng rất nhiều.

Các tính chất và định nghĩa này được mở rộng tương tự với các biểu thức của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$. Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu khái quát về các bất đẳng thức đối xứng 3 biến và một số kĩ thuật liên quan. Ta phân chia các bất đẳng thức đối xứng thành 2 dạng chính là các bất đẳng thức có điều kiện và không có điều kiện. Đầu tiên ta sẽ xem xét các bất đẳng thức với các biến tự do.

1.6.1 Bất đẳng thức thuần nhất không có điều kiện

Trước hết ta cần định nghĩa cho một hàm số thuần nhất. Hàm $f(a, b, c)$ được gọi là thuần nhất với các biến trên miền I nếu nó thỏa mãn điều kiện

$$f(ta, tb, tc) = t^k f(a, b, c)$$

với mọi $t, a, b, c \in I$ và k là một hằng số không phụ thuộc vào a, b, c, t mà chỉ phụ thuộc vào bản thân hàm f. Trong phạm vi của đa thức thì một đa thức là thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Chẳng hạn ta có đa thức thuần nhất (không đối xứng) sau đây

$$f(a, b, c) = a^5bc^3 + a^2b^3c^4 + ab^6c^2.$$

Ví dụ một hàm số thuần nhất không là đa thức

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + x^2}} + \frac{x}{x + c}.$$

Định nghĩa trên có thể mở rộng cho hàm số của n biến $x_1, x_2, ..., x_n$.

Lớp các hàm thuần nhất trong bất đẳng thức cũng là một phần rất rộng của bất đẳng thức, và sẽ được nhắc lại rất nhiều lần trong cuốn sách vì tính quan trọng cuả nó. Do đó bạn đọc nên xem kĩ các tính chất của loại hàm này, trong đó tính chất được sử dụng thường xuyên nhất là tính chất *chuẩn hóa được*. Tính chất này cũng sẽ được bàn lại kĩ hơn ngay trong phần sau.

Mở đầu về bất đẳng thức đối xứng 3 biến thuần nhất là một bất đẳng thức cực kì nổi tiếng và có nhiều ứng dụng, đó là bất đẳng thức đối xứng *Schur*

$$a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên thường được phát biểu dưới dạng quen thuộc hơn như sau

Định lý 1.9 (Bất đẳng thức Schur). *Với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có bất đẳng thức*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Chứng Minh. Có rất nhiều cách chứng minh bất đẳng thức trên, ở đây tác giả sẽ giới thiệu một cách chứng minh mà sẽ còn thêm nhiều ứng dụng sau này. Ngoài ra, đây cũng là một cách chứng minh rất đơn giản và ngắn gọn. Do tính đối xứng của bất đẳng thức ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $x = a - b, y = b - c$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$c(x+y)y - (c+y)xy + (c+x+y)x(x+y) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow c(x^2 + xy + y^2) + x^2(x+2y) \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì các biến c, x, y đều không âm. Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 0$ hoặc $x = c = 0$ hay $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$. Do giả sử $a \geq b \geq c$ ở đầu bài toán nên các trường hợp $x = 0, y = z$ và $y = 0, x = z$ cũng có đẳng thức. Về sau ta chỉ nói gọn là $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. Bài toán đã được chứng minh. ☐

Một cách tự nhiên, ta muốn xem xét một mở rộng tương tự

Ví dụ 1.6.1. *Khẳng định hoặc phủ định bất đẳng thức*

$$a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geq a^5(b+c) + b^5(c+a) + c^5(a+b).$$

Lời Giải. Rất tiếc, bất đẳng thức trên không phải luôn đúng. Cho $b = c = x$

$$a^6 + 2x^6 + 3a^2x^4 \geq 3a^5x + 2x^5(a+x)$$
$$\Leftrightarrow a^6 + 3a^2x^4 \geq 2a^5x + 2x^5a$$
$$\Leftrightarrow a^5 + 3ax^4 \geq 2a^4x + 2x^5.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên không đúng nếu ta cho $a = 0$. Để rõ hơn, có thể cho $a = 1$ và $b = c = 4$. ☐

Một vấn đề khác được đặt ra là

Ví dụ 1.6.2. *Liệu có tồn tại một hằng số k sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$a^6 + b^6 + c^6 + ka^2b^2c^2 \geq a^5(b+c) + b^5(c+a) + c^5(a+b).$$

Và nếu có, hãy tìm hằng số tốt nhất (nhỏ nhất) có thể được.

LỜI GIẢI. Đáng tiếc là không tồn tại một hằng số k nào như vậy cả, và do đó cũng không có hằng số tốt nhất. Thật không may mắn là 2 kết quả thử nghiệm mới của chúng ta đều dẫn đến một kết quả phủ định. Nhưng các bạn đừng vì thế mà e ngại việc tự sáng tạo các bất đẳng thức, vì những sự không may mắn như vậy là điều không thể tránh khỏi, thậm chí là rất nhiều. Đối với một bất đẳng thức, sẽ khó hơn rất nhiều nếu câu hỏi đặt ra là *khẳng định hoặc phủ định*, chứ chưa phải là *chứng minh bất đẳng thức*. Thậm chí trong khi chứng minh một bất đẳng thức *không đúng* ta hoàn toàn có thể làm đúng nó để được một bất đẳng thức tốt hơn. ❑

Chúng ta hãy tiếp tục trở lại qua với một kết quả khá hiển nhiên

$$2(a^6+b^6+c^6) \ge a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b).$$

Mục đích bây giờ là ta sẽ thêm đại lượng chứa $a^2b^2c^2$ vào biểu thức vế trái, và giảm hệ số 2 đến mức nhỏ nhất có thể được để có một bất đẳng thức đúng. Theo các suy luận ở trên ta không thể giảm hệ số 2 tới 1. Có một kết quả khá đẹp mắt

Ví dụ 1.6.3. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2 \ge \frac{2}{3}\left(a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\right).$$

LỜI GIẢI. Chứng minh bất đẳng thức trên không quá khó, nhưng việc tìm ra nó lại là một công việc khá vất vả. Sử dụng bất đẳng thức *Schur* ta có

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2 \ge a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2).$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\begin{aligned}(a^6+a^4b^2)+(a^6+a^4c^2) &\ge 2a^5(b+c),\\ (b^6+b^4c^2)+(b^6+b^4a^2) &\ge 2b^5(c+a),\\ (c^6+c^4a^2)+(c^6+c^4b^2) &\ge 2c^5(a+b).\end{aligned}$$

Cuối cùng, cộng cả 4 bất đẳng thức trên lại ta có điều phải chứng minh. ❑

Mở rộng bất đẳng thức *Schur* với bậc nhất ở trên ta có bất đẳng thứ *Schur* với bậc 2 sau đây

Ví dụ 1.6.4. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \ge a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b).$$

LỜI GIẢI. Các bạn hãy xem lại cách chứng minh cho bất đẳng thức *Schur* ở dạng cơ bản (bậc nhất), cả 2 chứng minh đều hoàn toàn giống nhau. Một điều đáng chú ý là bất đẳng thức *Schur* bậc 2 đúng với mọi a, b, c thực. ❑

Từ kết quả trên ta suy ra

Bài toán 1.51 (Russia MO, Crux). *Cho các số thực $a_1, a_2, .., a_n$. Xét các biểu thức sau*

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \ \forall k = 1, n.$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2,$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$C \le D \le 2C.$$

Bài toán 1.52 (Việt Nam MO 2002). *Cho các số thực x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Chứng minh rằng*

$$2(x + y + z) - xyz \le 10.$$

Bài toán 1.53. *Chứng minh rằng với các số dương a, b, c, d ta luôn có*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{c + d + a} + \frac{c^3 + d^3 + a^3}{d + a + b} + \frac{d^3 + a^3 + b^3}{a + b + c} \ge a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Bài toán 1.54 (Indian MO 2003). *Chứng minh rằng $x^3y^3(x^3 + y^3) \le 2$ với các số thực không âm x, y có tổng bằng 2.*

Bài toán 1.55. *Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x + y + z = 5$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Bài toán 1.56 (Mongolia MO 1991). *Cho các số thực a, b, c có tổng bình phương bằng 2. Chứng minh rằng*

$$|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \le 2\sqrt{2}.$$

Bài toán 1.57. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a(b + c)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b(c + a)}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c(a + b)}{a^2 + ab + b^2} \ge 2.$$

Bài toán 1.58. *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \ge \frac{2}{1 + a_1} + \frac{2}{1 + a_2} + \dots + \frac{2}{1 + a_n}.$$

Bài toán 1.59. *Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3 + b^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3 + a^3}{a^2 - ab + b^2} \ge 2(a + b + c).$$

Bài toán 1.38. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(a+c)}{a^2+c^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\geq 2.$$

HƯỚNG DẪN. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, xét

$$\begin{aligned}
&\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(a+c)}{a^2+c^2}-2\\
&=\frac{b(a-b)+c(a-c)}{b^2+ac}+\frac{a(b-a)+c(b-c)}{b^2+c^2}\\
&\geq (a-b)\left(\frac{b}{b^2+c^2}-\frac{a}{a^2+c^2}\right)=\frac{(a-b)^2(ab-c^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\geq 0.
\end{aligned}$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán 1.39 (Crux). *Tìm chặn trên lớn nhất cho biểu thức sau*

$$\frac{x_1}{x_2x_3...x_n+1}+\frac{x_2}{x_1x_3...x_n+1}+...+\frac{x_n}{x_1x_2...x_{n-1}+1}$$

Trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực trong $[0, 1]$.

HƯỚNG DẪN. Sử dụng phương pháp hàm lồi, tìm được chặn trên là $n-1$ với $n \geq 3$. ❑

Bài toán 1.40 (Crux). *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì*

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq abc(a+b+2c)(b+c+2a)(c+a+2b).$$

Bài toán 1.41 (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ). *Giả sử a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq 8(a^2+b^2+c^2).$$

Bài toán 1.42. *Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1+a_2+...+a_n = 1$. Chứng minh rằng*

$$(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)...(a_1+a_2+...+a_{n-1})\geq 4^{n-1}a_1a_2...a_n.$$

Bài toán 1.43 (Poland 1998). *Cho các số thực không âm a, b, c, d, e, f có tổng bằng 1 và $ace + bdf \geq 1/108$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$abc+bcd+cde+def+efa+fba\leq\frac{1}{36}.$$

Bài toán 1.29. *Giả sử a, b, c là các số thực dương thoả mãn*

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2,$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 4(a+b+c).$$

HƯỚNG DẪN. Giả thiết của bài toán tương đương với tồn tại x, y, z để

$$a=\frac{x}{y+z}, b=\frac{y}{z+x}, c=\frac{z}{x+y}.$$

Phần còn lại được chứng minh tương đối dễ dàng. □

Bài toán 1.30. *Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c\leq\sqrt{2}+\frac{9}{4}abc.$$

Bài toán 1.31 (Russia MO). *Giả sử x, y, z là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx.$$

Bài toán 1.32 (Romania TST 1993). *Tìm số thực dương a lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $x, y, z\in R^+$*

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq a.$$

HƯỚNG DẪN. Giá trị tốt nhất của a là 2. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$. □

Bài toán 1.33 (Crux). *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương x, y, z*

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+x)(y+z)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1.$$

HƯỚNG DẪN. Ta có hai cách chứng minh như sau
Cách 1. Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ thì $(x+y)(x+z)\geq(x+\sqrt{yz})^2$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}\leq\frac{x}{2x+\sqrt{yz}}.$$

Do đó ta phải chứng minh nếu $abc=1$ thì

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leq 1.$$

HƯỚNG DẪN. Bất đẳng thức tương đương

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n^2}{a_n}.$$

Sử dụng khai triển *Abel* ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right) \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 - \sum_{i=1}^{k} b_i^2\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = b_i\ \forall i = \overline{1,n}$. □

Bài toán 1.19 (Crux). *Giả sử* $n \geq m \geq 1$ *và* $x \geq y \geq 0$ *thoả mãn* $x^{n+1} + y^{n+1} \leq x^m - y^m$. *Chứng minh rằng* $x^n + y^n \leq 1$.

Bài toán 1.20. *Chứng minh với mọi* $x, y, z \in [0, 1]$ *thì*

$$x^{2y} + y^{2z} + z^{2x} \geq 3/4.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức $x^y \geq x/(x + y - xy)$, đưa bất đẳng thức về

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{y}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{z+x}\right)^2 \geq \frac{3}{4}. \ \square$$

Bài toán 1.21. *Chứng minh rằng với mọi* $a, b, c \geq 0$ *ta có*

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev*. □

Bài toán 1.22 (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ). *Cho các số thực không âm* x, y, z *thoả mãn điều kiện* $x + y + z = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x^2+1}{y^2+1} + \frac{y^2+1}{z^2+1} + \frac{z^2+1}{x^2+1} \leq \frac{7}{2}.$$

Bài toán 1.23 (IMO Shortlist 2004). *Giả sử* a, b, c *là các số thực dương sao cho* $ab + bc + ca = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Bài toán 1.24 (IMO 1995). *Cho* $a, b, c \geq 0$ *và* $abc = 1$. *Chứng minh*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

HƯỚNG DẪN. Ta phải chứng minh với $a, b, c \in [0, k]$ thì

$$a(k-b) + b(k-c) + c(k-a) \leq k^2.$$

Tuy nhiên vế trái là hàm lồi với mỗi biến a, b, c nên ta chỉ cần xét khi $a, b, c \in \{0, k\}$. Khi đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Ngoài ra ta có thể chứng minh trực tiếp không dùng hàm lồi như sau

$$(k-a)(k-b)+(k-b)(k-c)+(k-c)(k-a) \geq 0 \Rightarrow 2k(a+b+c)-(ab+bc+ca) \leq 3k^2.$$

Do đó nếu $a+b+c \geq k$ ta có ngay *đpcm*. Trường hợp ngược lại, dễ thấy

$$k(a+b+c) - (ab+bc+ca) \leq k(a+b+c) \leq k^2. \quad \square$$

Bài toán 1.11 (APMO 2001). *Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $1/a+1/b+1/c = 1$. Chứng minh*

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{c+ab} \geq \sqrt{c} + \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Chú ý rằng theo giả thiết ta có

$$\sqrt{abc} = \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}},$$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 2 số. $\square$

Bài toán 1.12 (Math. Chanlleges). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thuộc đoạn $[-2, 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1.$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng phương pháp hàm lồi. $\square$

Bài toán 1.13. *Tìm hằng số $k = k(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi dãy số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \geq k(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1).$$

HƯỚNG DẪN. Dễ dàng tìm được $k(3) = 3$ và $k(4) = 4$. Với $n \geq 4$ thì $k(n) = 4$. Thật vậy, cho $a_1 = a_2 = 1$ và $a_j = 0\ \forall j \neq 1, 2$ ta suy ra $k(n) \leq 4$. Để chứng minh $k(n) = 4$ thoả mãn ta dùng chứng minh bằng quy nạp. $\square$

Bài toán 1.1 (Balkan MO). *Cho 3 số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+6 \geq 2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

HƯỚNG DẪN. Tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a=x/y, b=y/z, c=z/x$
Bất đẳng thức trở thành

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x). \quad \square$$

Bài toán 1.2 (Russia MO 1999). *Cho các số thực dương x, y, z có tích bằng 1. Chứng minh rằng nếu*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z,$$

Thì với mọi số nguyên dương k ta có

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k} \geq x^k+y^k+z^k.$$

HƯỚNG DẪN. Điều kiện của bài toán tương đương với

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0$$

Suy ra với mọi số nguyên dương k thì

$$(x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) \leq 0. \quad \square$$

Bài toán 1.3. *Cho các số thực x, y, z thuộc $(-1, 1)$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 2.$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM-GM$ cho 2 số hạng ở vế trái ta có điều phải chứng minh, lưu ý rằng

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) \leq 1. \quad \square$$

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Bài toán 1.5 (USA MO 2002). *Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh*

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3) \geq (a+b+c)^3.$$

y_0. Lúc đó $g(y_0) = g(\frac{5}{4}) = \frac{15}{2}$.

Từ đó kết hợp với (3) suy ra $P(x, y, z) \geq g(y) \geq g(y_0) = \dfrac{15}{2}$, đẳng thức xảy ra với $y = \dfrac{5}{4}, x = 3, z = \dfrac{2}{3}$ hay $a = 1/3, b = 4/5, c = 3/2$. □

Tổng quát của bài toán này đã được giải bằng phương pháp cân bằng hệ số ở mục trước. Nhưng nếu xét theo một cách nào đó, chứng minh sử dụng đạo hàm vẫn là đơn giản nhất về mặt ý tưởng. Nó cũng là một ví dụ tiêu biểu cho phương pháp giảm biến - một kĩ thuật quan trọng trong việc dùng đạo hàm để giải bài toán cực trị hàm số nhiều biến. Ta hãy xem bất đẳng thức *Schur* có thể chứng minh bằng phương pháp này như thế nào đơn giản thế nào?

Ví dụ 1.9.6 (Bất đẳng thức ***Schur*****).** *Chứng minh* $\forall a, b, c \geq 0$ *ta có*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Xét hàm số

$$f(a) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a)$$
$$f'(a) = 3a^2 + 3bc - 2ab - b^2 - 2ac - c^2.$$

Dễ thấy $3a^2 \geq b^2 + 2ac$ và $3bc \geq c^2$ nên $f'(a) \geq 0$ với $a \geq b \geq c$. Vậy

$$f(a) \geq f(b) = c^3 + 3a^2c - 2ac(a + c) = c(a - c)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. □

1.9.4 Mở rộng một bài thi toán quốc tế 2004

Mỗi bài toán có một đặc thù riêng. Có những bài toán mà đặc thù của nó chính là cơ sở để các chứng minh mang tính kỹ thuật (chẳng hạn phương pháp cân bằng hệ số) trở nên hữu dụng. Thường là các chứng minh đó rất hấp dẫn, có lẽ bởi vì tính đơn giản của nó. Tuy nhiên việc tìm ra các chứng minh đẹp đẽ theo nghĩa như vậy trong đa số các trường hợp là rất mơ hồ. Trái lại phương pháp sử dụng đạo hàm có vẻ cồng kềnh nặng về tính toán có thể lại là con đường dễ thực hiện nhất. Xin cảm ơn bạn Nguyễn Quốc Khánh đã giúp đỡ hoàn thành bài viết này.

Ví dụ 1.9.7 (IMO 2004 Pro.2). *Giả sử n là một số tự nhiên lớn hơn 2 và n số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn*

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) < n^2 + 1.$$

Chứng minh rằng mọi bộ ba trong số n số đó là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Ví dụ 1.9.8 (Tổng quát). *Giả sử n và k là hai số tự nhiên thoả mãn $n \geq k > 2$. Tìm số thực lớn nhất $g(n,k)$ có tính chất : bất kỳ k trong n số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ sẽ là độ dài k cạnh của một đa giác lồi nếu*

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) < g(n,k).$$

LỜI GIẢI. Chúng ta biết rằng $a_k \geq a_{k-1} \geq .... \geq a_1$ là độ dài k cạnh của một k giác lồi khi và chỉ khi $a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} > a_k$. Do đó bài toán sau có thể diễn đạt lại là: với điều kiện $x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_{k-1}$ và $x_n \geq x_{n-1} \geq ... \geq x_1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) = g(n,k).$$

Để làm điều đó ta sẽ thiết lập hệ thức liên hệ $g(n+1,k)$ và $g(n,k)$.

Giả sử rằng giá trị $g(n,k)$ đã xác định và đẳng thức có xảy ra tại $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ với $\overline{x_n} \geq \overline{x_{n-1}} \geq ... \geq \overline{x_1}$. Xét điều kiện

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n+1} \geq x_1 + x_2 + ... + x_k.$$

Đặt

$$A = x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n,$$
$$B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}.$$

Xét hàm số $f(x) = (x + A)\left(\frac{1}{x} + B\right)$ với $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + B - \frac{x+A}{x^2} = B - \frac{A}{x^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{A}{B}} = x_0 > 0.$$

Do $A \leq nx_{n+1}, B \geq n/x_{n+1} \Rightarrow x_0 \leq x_{n+1}$. Tại x_0, hàm f đạt cực tiểu vì vậy

$$f(x) \geq f(x_0) = \left(\sqrt{\frac{A}{B}} + A\right)\left(\sqrt{\frac{B}{A}} + B\right) = (\sqrt{AB} + 1)^2.$$

Theo giả thiết $AB \geq g(n,k)$ và đẳng thức xảy ra được nên

$$g(n+1,k) \geq \left(\sqrt{g(n,k)} + 1\right)^2.$$

1.9.3 Khảo sát hàm nhiều biến

Các bài toán một biến hầu như luôn có thể giải được bằng đạo hàm theo cách này hay cách khác, nhưng công việc tương tự đối với các bài toán nhiều biến số hơn thì không còn dễ dàng như trước. Đối với các hàm nhiều biến, cách làm thông thường là thay thế các biến từ điều kiện bài toán để có một biểu thức mới mà các biến không còn điều kiện ràng buộc với nhau sau đó tìm cực trị theo từng biến. Bạn đọc có thể thấy rõ tư tưởng này trong chứng minh bài toán sau đây.

Ví dụ 1.9.5 (Việt Nam TST 2001). *Xét các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện $12 \geq 21ab + 2bc + 8ca$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = 1/a, y = 2/b, z = 3/c$ bài toán chuyển thành :

Xét các số thực dương x, y, z thoả mãn $12xyz \geq 2x + 8y + 21z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

Từ giả thiết $z(12xy - 21) \geq 2x + 8y > 0$ từ đó $z \geq \dfrac{2x + 8y}{12xy - 21}$ với $x > \dfrac{7}{4y}$(1). Suy ra

$$P(x, y, z) \geq x + 2y + \frac{2x + 8y}{4xy - 7} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{2x + 8y}{4xy - 7} = \dfrac{4x^2y - 5x + 8y}{4xy - 7}$ với biến $x > \dfrac{7}{4y}$ và y là tham số thực dương

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{16x^2y^2 - 56xy - 32y^2 + 35}{(4xy - 7)^2}.$$

Trên $(\dfrac{7}{4y}, +\infty)$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \dfrac{7}{4y} + \dfrac{\sqrt{32y^2 + 14}}{4y}$ và qua x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0. Suy ra $f(x) \geq f(x_0) = 2x_0 - \dfrac{5}{4y} \Rightarrow P(x, y, z) \geq f(x) + 2y \geq f(x_0) + 2y = g(y) \quad (3)$

Xét hàm số $g(y) = 2y + \dfrac{9}{4y} + \dfrac{1}{2y}\sqrt{32y^2 + 14}$. Sau khi tính $g'(y)$ ta có

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow (8y^2 - 9)\sqrt{32y^2 + 14} - 28 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{32y^2 + 14}$ với $t > 0$ thì phương trình trên trở thành $t^3 - 50t - 112 = 0$. Phương trình này có duy nhất một nghiệm dương $t = 8 \Leftrightarrow y = y_0 = \dfrac{5}{4}$. Vậy $g'(\dfrac{5}{4}) = 0$. Với $y > 0$ và qua y_0 thì $g'(y)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $g(y)$ đạt cực tiểu tại

Thêm chi tiết, các bạn nên xem trong tài liệu sách giáo khoa lớp 11 về giới hạn và 12 về đạo hàm. Các kiến thức và định lí cơ bản liên quan tới đạo hàm hàm số không chỉ rất quan trọng đối với bất đẳng thức mà hầu như luôn có ảnh ưởng lớn đến nhiều ngành khác nhau của toán học. Nó cũng quan trọng với chính các bạn, nhất là khi bạn phải trải qua các kì thi toán quan trọng.

1.9.2 Khảo sát hàm số một biến

Định lý *Fermat* (hay còn gọi là nguyên lý cực trị) là điều kiện cần, thường được áp dụng trong các bài toán tìm cực trị. Ta làm quen với phương pháp chứng minh này qua ví dụ đơn giản sau.

Ví dụ 1.9.1. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{(x+1)^2+1}.$$

Lời Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\left((x+1)^2+1\right) - 2(x+1)(x^2+2)}{\left((x+1)^2+1\right)^2} \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x(x+1)^2 + x = 2x + 2 + x^2(x+1) \\
&\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 2 + 2x + x^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{4}{(1+\sqrt{2})^2+1}$, còn giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{4}{(1-\sqrt{2})^2+1}$. □

Ví dụ 1.9.2. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức x^x, với x là một số thực dương.*

Lời Giải. Xét hàm

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^x = e^{x\ln x} \\
f'(x) &= e^{x\ln x}(\ln x + 1) \\
f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 1/e.
\end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra

$$f(x) \geq f(1/e) = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}. \quad \square$$

Ví dụ 1.8.14. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi dãy số thực* $x_1, x_2, ..., x_n$

$$x_1^2 + \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 \le 4(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2).$$

LỜI GIẢI. Với dãy số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tuỳ ý ta có

$$\left(\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+...+\frac{x_k^2}{\alpha_k}\right)(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k) \ge (x_1+x_2+...+x_n)^2.$$

Do đó

$$\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}\right)^2 \le \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2\alpha_1}x_1^2 + \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2\alpha_2}x_2^2+...+ + \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2\alpha_k}x_k^2.$$

Cho k chạy từ 1 tới n rồi cộng vế n bất đẳng thức dạng trên lại ta được

$$x_1^2 + \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2 \le \gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 x_2^2 + ... + \gamma_n x_n^2.$$

Trong đó các hệ số γ_k được xác định bởi

$$\gamma_k = \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2\alpha_k} + \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k+1}}{(k+1)^2\alpha_k} + ... + \frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n^2\alpha_k}.$$

Ta chọn

$$\alpha_k = \sqrt{k}-\sqrt{k-1} \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k = \sqrt{k},$$

Suy ra

$$\gamma_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{(k+1)^{3/2}} + ... + \frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}} &= \frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}(\sqrt{k-\frac{1}{2}}+\sqrt{k+\frac{1}{2}})} \\ &\ge \frac{1}{2k^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \ge \frac{1}{2k^{3/2}} + \frac{1}{2(k+1)^{3/2}} + .. + \frac{1}{2n^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \gamma_k \le \frac{2}{\alpha_k\sqrt{k-\frac{1}{2}}} = \frac{2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \le 4.$$

1.8.3 Cân bằng hệ số với bất đẳng thức Cauchy - Schwarz - Holder

Ví dụ 1.8.11. *Giả sử $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$x^4 + 2y^4 + 3z^4.$$

LỜI GIẢI. Chọn các số a, b, c dương và $a + b + c = 3$, theo bất đẳng thức *Holder*

$$(x^4 + 2y^4 + 3z^4)(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3 \geq (a^3x + 2b^3y + 3c^3z)^4.$$

Chọn a, b, c sao cho $a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$, khi đó

$$x^4 + 2y^4 + 3z^4 \geq \frac{k^{12}(x + y + z)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3} = \frac{(3k^3)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3}.$$

Xét điều kiện đẳng thức thì

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = 1.$$

Do vậy ta có

$$a + b + c = 3, a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$$
$$\Rightarrow a = k, b = \sqrt[3]{2}k, c = \sqrt[3]{3}k \Rightarrow k = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}.$$

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả bài toán. ❑

Ví dụ 1.8.12. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương có tổng bằng n. $a_1, a_2, ..., a_n$ là các hằng số dương cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + ... + a_nx_n^m,$$

Trong đó $m > 1$ là một số nguyên dương cho trước.

LỜI GIẢI. Bài toán tổng quát trong trường hợp này cũng được chứng minh hoàn toàn tương tự nhờ bất đẳng thức *Holder*. Ta chọn

$$a = \frac{n}{\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}},$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức lả na^{m-1}, xảy ra với

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt[m-1]{a_1}}, x_2 = \frac{a}{\sqrt[m-1]{a_2}}, ..., x_n = \frac{a}{\sqrt[m-1]{a_n}}. \ ❑$$

Bây giờ chúng ta hãy xét đến một ví dụ khó hơn

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x^2 + a^2 \geq 2ax$$
$$y^2 + a^2 \geq 2ay$$
$$z^3 + b^3 + b^3 \geq 3b^2 z$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = a, z = b \\ 2a = 3b^2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = a, z = 2b \\ 2a = 3b^2, 2a + b = 3 \end{cases}$$

Do đó $$3b^2 - b = 3 \Leftrightarrow b = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6},$$

$$a = \frac{3 - b}{2} = \frac{19 - \sqrt{37}}{12}.$$

Và $x^2 + y^2 + z^3 \geq 2a^2 + b^3$ với a, b được xác định như trên. ❑

Sau đây là một bất đẳng thức trong đề thi VMEO, là bất đẳng thức dạng tổng quát của kì thi chọn đội tuyển toán Việt Nam năm 2002.

Ví dụ 1.8.9. *Cho a, b, c là các số thực dương và $x, y, z \geq 0$ là các biến số thoả mãn $ax + by + cz = xyz$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực dương d sao cho*

$$\frac{2}{d} = \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d},$$

Và khi đó hãy chứng minh giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y + z$ bằng

$$\sqrt{d(d+a)(d+b)(d+c)}.$$

LỜI GIẢI. Ý tưởng chính trong chứng minh bài toán trên là dựa vào ước lượng

$$\frac{(ax + by + cz)(x + y + z)^2}{xyz}$$

bằng bất đẳng thức $AM - GM$, tuy nhiên phải là bất đẳng thức $AM - GM$ suy rộng với số mũ thực. Khi đó nếu giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên bằng C thì giá trị nhỏ nhất của $x + y + z$ trong miền xác định của bài toán cũng bằng C.

1.8.3 Cân bằng hệ số với bất đẳng thức Cauchy - Schwarz - Holder

Ví dụ 1.8.11. *Giả sử $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$x^4 + 2y^4 + 3z^4.$$

LỜI GIẢI. Chọn các số a, b, c dương và $a + b + c = 3$, theo bất đẳng thức *Holder*

$$(x^4 + 2y^4 + 3z^4)(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3 \geq (a^3x + 2b^3y + 3c^3z)^4.$$

Chọn a, b, c sao cho $a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$, khi đó

$$x^4 + 2y^4 + 3z^4 \geq \frac{k^{12}(x+y+z)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3} = \frac{(3k^3)^4}{(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3}.$$

Xét điều kiện đẳng thức thì

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = 1.$$

Do vậy ta có

$$a + b + c = 3, a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$$
$$\Rightarrow a = k, b = \sqrt[3]{2}k, c = \sqrt[3]{3}k \Rightarrow k = \frac{3}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}.$$

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả bài toán. ❑

Ví dụ 1.8.12. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương có tổng bằng n. $a_1, a_2, ..., a_n$ là các hằng số dương cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + ... + a_nx_n^m,$$

Trong đó $m > 1$ là một số nguyên dương cho trước.

LỜI GIẢI. Bài toán tổng quát trong trường hợp này cũng được chứng minh hoàn toàn tương tự nhờ bất đẳng thức *Holder*. Ta chọn

$$a = \frac{n}{\frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}} + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt[m-1]{a_1}}},$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức là na^{m-1}, xảy ra với

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt[m-1]{a_1}}, x_2 = \frac{a}{\sqrt[m-1]{a_2}}, ..., x_n = \frac{a}{\sqrt[m-1]{a_n}}. \quad ❑$$

Bây giờ chúng ta hãy xét đến một ví dụ khó hơn

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x^2 + a^2 \geq 2ax$$
$$y^2 + a^2 \geq 2ay$$
$$z^3 + b^3 + b^3 \geq 3b^2 z$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = a, z = b \\ 2a = 3b^2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = a, z = 2b \\ 2a = 3b^2, 2a + b = 3 \end{cases}$$

Do đó $$3b^2 - b = 3 \Leftrightarrow b = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6},$$

$$a = \frac{3 - b}{2} = \frac{19 - \sqrt{37}}{12}.$$

Và $x^2 + y^2 + z^3 \geq 2a^2 + b^3$ với a, b được xác định như trên. □

Sau đây là một bất đẳng thức trong đề thi VMEO, là bất đẳng thức dạng tổng quát của kì thi chọn đội tuyển toán Việt Nam năm 2002.

Ví dụ 1.8.9. *Cho a, b, c là các số thực dương và $x, y, z \geq 0$ là các biến số thoả mãn $ax + by + cz = xyz$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực dương d sao cho*

$$\frac{2}{d} = \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d},$$

Và khi đó hãy chứng minh giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + y + z$ bằng

$$\sqrt{d(d+a)(d+b)(d+c)}.$$

Lời Giải. Ý tưởng chính trong chứng minh bài toán trên là dựa vào ước lượng

$$\frac{(ax + by + cz)(x + y + z)^2}{xyz}$$

bằng bất đẳng thức $AM - GM$, tuy nhiên phải là bất đẳng thức $AM - GM$ suy rộng với số mũ thực. Khi đó nếu giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên bằng C thì giá trị nhỏ nhất của $x + y + z$ trong miền xác định của bài toán cũng bằng C.

Ví dụ 1.6.5. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c*

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Chúng ta hãy xem xét thêm một dạng bất đẳng thức đối xứng 3 biến khác. Bài toán sau đây khá cổ điển và có nhiều ứng dụng

Ví dụ 1.6.6. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm ta luôn có*

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

LỜI GIẢI. Đây là một bất đẳng thức rất quen thuộc và đơn giản vì chứng minh chỉ cần dựa vào bất đẳng thức $AM - GM$. Hiển nhiên bất đẳng thức đúng nếu một thừa số nào đó ở vế trái âm. Ta xét khi cả 3 số hạng đó đều dương. Dễ thấy bất đẳng thức trên được suy ra bằng cách nhân cả 3 bất đẳng thức sau theo từng vế

$$\begin{aligned}(a + b - c)(b + c - a) &\leq b^2\\(b + c - a)(c + a - b) &\leq c^2\\(c + a - b)(a + b - c) &\leq a^2\end{aligned}$$

Có thể nói ví dụ 1.6.6 khá đơn giản so với bất đẳng thức *Schur*, nhưng thật kì lạ là 2 bất đẳng thức này hóa ra lại là một khi ta *chuẩn hóa* hoặc khai triển chúng ?! □

Các bất đẳng thức thuần nhất là đối tượng chủ yếu của bất đẳng thức, hầu hết các bài thi toán Olympiad đều xuất hiện dưới dạng này. Phần còn lại là các bất đẳng thức không thuần nhất (đối xứng hoặc không) tương đối ít và cũng được ít chú ý hơn. Thậm chí nhiều người còn tin rằng để một bất đẳng thức đúng thì chúng buộc phải thuần nhất (đồng bậc). Các bất đẳng thức không thuần nhất luôn rất đặc biệt và đẹp mắt. Hai ví dụ sau đây sẽ làm rõ điều này

Ví dụ 1.6.7. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Ví dụ 1.6.8. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$(2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Sau đây chúng ta sẽ xem xét các bất đẳng thức đối xứng có điều kiện, và một kĩ thuật quan trọng để chứng minh bất đẳng thức : kĩ thuật *chuẩn hóa*.

1.6.2 Bất đẳng thức đối xứng có điều kiện

Các bất đẳng thức đối xứng có điều kiện và không có điều kiện là 2 đối tượng riêng rẽ tồn tại độc lập nhưng thật ra lại có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. Chính mối quan hệ này làm nảy sinh một kĩ thuật mới chứng minh bất đẳng thức : đó là kĩ thuật *chuẩn hoá* với bất đẳng thức thuần nhất đối xứng. Sau đây là một số ví dụ

Ví dụ 1.6.9. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm thì*

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

Lời Giải. Ví dụ trên là một bất đẳng thức rất nổi tiếng và không hề dễ. Cách thông thường là luỹ thừa mũ 6 cả 2 vế rồi khai triển, nhưng cách này rất dài và không nhiều ý nghĩa, thậm chí rất dễ nhầm lẫn. Bạn hãy kĩ xem chứng minh sau

Giả sử $ab + bc + ca = 3$, khi đó $a + b + c \ge 3$ và $abc \le 1$.

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 3(a+b+c) - abc \ge 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} = 1 \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Điểm đáng chú ý trong lời giải trên là việc giả sử $ab+bc+ca = 3$. Ta giả sử được như vậy vì bất đẳng thức trên là *thuần nhất*. Thật vậy, lấy $a' = a/t, b' = b/t, c' = c/t$ rồi chọn t để $a'b' + b'c' + c'a' = 3$. Ta tìm được $t = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$. Bất đẳng thức đúng với a', b', c' nên hiển nhiên nó cũng đúng với a, b, c sau khi nhân a', b', c' với t.

Có thể cách lí luận trên không hoàn toàn dễ hiểu đối với bạn đọc chưa quen với phương pháp này, nhưng thực ra đây là một vấn đề rất đơn giản và các bạn cần phải nắm rõ. Ta hoàn toàn có thể giả sử bất kì một biểu thức nào khác, chẳng hạn $a+b+c = 3$ hoặc $a+b+c = 1$ hoặc $abc = 1$... Điều độc đáo và cũng là điều khó nhất của kĩ thuật này là việc chuẩn hoá biểu thức nào cho hợp lí nhất để có chứng minh đơn giản nhất. Chẳng hạn trong ví dụ trên, ta hoàn toàn có thể giả sử $a + b + c = 3$ hoặc $abc = 1$ hoặc $(a + b)(b + c)(c + a) = 8$ nhưng các cách chuẩn hoá này, hoặc không thể ra được, hoặc phải chứng minh rất dài.

Ví dụ 1.6.10. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta luôn có*

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \ge (ab+bc+ca)\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời Giải. Ý tưởng tự nhiên khi giải bài toán này là tìm cách loại bỏ dấu căn bậc 3 nếu có thể. Bằng cách đó, ta thay đổi bất đẳng thức trên thành một bất đẳng thức có điều kiện như sau :

Giả sử $(a+b)(b+c)(c+a)=8$, *hãy chứng minh*

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq 2(ab+bc+ca).$$

Công việc còn lại trở nên đơn giản hơn, đó là chứng minh 2 bất đẳng thức

$$ab+bc+ca\leq 3,$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq 6.$$

Thật vậy, với bất đẳng thức thứ nhất hãy chú ý rằng

$$8=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\Rightarrow ab+bc+ca=\frac{8+abc}{a+b+c}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$8=(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc\Rightarrow abc\leq 1,$$

$$8=(a+b)(b+c)(c+a)\leq\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3\Rightarrow a+b+c\geq 3.$$

Do đó $$ab+bc+ca\leq (8+abc)/3\leq 3\ .$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)-2abc=8-2abc\geq 6.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. □

Ví dụ 1.6.11 (USA MO 2003). *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Trong đó a,b,c là các số thực không âm.

LỜI GIẢI. Ta chuẩn hoá $a+b+c=3$ để rút gọn các số hạng vế trái trở thành các biểu thức đơn giản hơn đối với 1 biến của a,b,c. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leq 8.$$

Chú ý với điều kiện $a+b+c=3$, ta sẽ tìm một số thực k sao cho

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\leq\frac{8}{3}+k(a-1).$$

Khi đó bất đẳng thức sẽ được chứng minh vì

$$VT \le 8 + k(a+b+c-3) = 8.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} &= \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3} = 1 + \frac{8a+6}{(a-1)^2+2}\\ &\le 1 + \frac{8a+6}{2} = 4a+4.\end{aligned}$$

Vậy $k = 4/3$ và bất đẳng thức được chứng minh. ❑

Ví dụ 1.6.12 (Japan MO 2002). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có bất đẳng thức*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \ge \frac{3}{5}.$$

LỜI GIẢI. Ta chuẩn hoá $a+b+c=3$ và xét riêng từ số hạng của biểu thức

$$\begin{aligned}\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} &= \frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2} = \frac{9-12a+4a^2}{9-6a+2a^2}\\ &= 2 - \frac{9}{2a^2-6a+9}.\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} + \frac{1}{2b^2-6b+9} + \frac{1}{2c^2-6c+9} \le \frac{3}{5}.$$

Ta cũng làm theo phương pháp tương tự là tìm số thực k sao cho

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} \le \frac{1}{5} + k(a-1).$$

Trong bài này, số k không dễ dàng tìm như trước. Hãy để ý cách tính sau đây

$$\frac{5}{2a^2-6a+9} - 1 = \frac{2a^2-6a+4}{2a^2-6a+9} = \frac{2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9},$$

Khi $a=1$ thì biểu thức $(a-2)/(2a^2-6a+9)$ có giá trị bằng $-1/5$, vậy ta sẽ dự đoán rằng

$$\frac{2(a-1)(a-2)}{2a^2-6a+9} \ge \frac{-2(a-1)}{5}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2. Đặt $k = a + b + c$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\begin{aligned} &abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \\ \Rightarrow\ &abc \geq (k-2a)(k-2b)(k-2c). \end{aligned}$$

Rút gọn lại được

$$4(ab+bc+ca) - k^2 \leq \frac{9}{k}abc \quad (*)$$

Bất đẳng thức của bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^2 + 2abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow\ &4(ab+bc+ca) - k^2 \leq 1 + 2abc. \end{aligned}$$

Sử dụng $(*)$, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{9}{k} - 2\right) abc \leq 1.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\left(\frac{9}{k} - 2\right) abc \leq \left(\frac{9}{k} - 2\right) \frac{k^3}{27} = \frac{(9-2k)k^2}{27} \leq 1.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Nhận xét. Một bài toán sử dụng phương pháp tương tự như trên của các tác giả Marian Tetiva, Mircea Lascu, Gabriel Dospinescu

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (1+a)(1+b)(1+c).$$

Bài toán 2.30 (Phạm Kim Hùng). *Với a, b, c là các số thực dương dương tuỳ ý, chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{a+2b}{c+2b} + \frac{b+2c}{a+2c} + \frac{c+2a}{b+2a} \geq 3.$$

LỜI GIẢI. Quy đồng mẫu số rồi rút gọn cho ta bất đẳng thức

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = min(a, b, c)$. Đặt $a = c + p, b = c + q (p, q \geq 0)$. Thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} VT &= 9x^3 + 9(p+q)x^2 + (6p^2 + 6q^2 + 3pq)x + 2(p^3 + q^3), \\ VP &= 9x^3 + 9(p+q)x^2 + 3(p+q)^2x + 3p^2q, \\ VT - VP &= (p^2 + q^2 - pq)x + (2p^3 + 2q^3 - 3p^2q) \geq 0 \quad \text{vì } p, q \geq 0, x \geq 0. \end{aligned}$$

Nếu $xy \geq 0$ thì ta có ngay điều phải chứng minh theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$x^4 + y^4 + 2x^3y \geq y^4 + 2x^3y = \frac{1}{2}|y|^4 + \frac{1}{2}|y|^4 + 2|x^3y| \geq \frac{3}{\sqrt[3]{2}}|xy^3| \geq 2xy^3.$$

Nếu $xy \leq 0$ ta cũng chứng minh tương tự, khi đó

$$x^4 + y^4 + 2x^3y - 2xy^3 \geq x^4 + 2|xy^3| - 2|x^3y| \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức trên đã được chứng minh, từ đó suy ra kết quả của bài toán. ☐

Nhận xét. Bất đẳng thức sau vẫn đúng, với lời giải hoàn toàn tương tự

$$a(a+b)^5 + b(b+c)^5 + c(c+a)^5 \geq 0 \quad \forall a,b,c \in R.$$

Ngoài ra $n = 3, 5$ là 2 số nguyên duy nhất có tính chất

$$a(a+b)^n + b(b+c)^n + c(c+a)^n \geq 0 \quad \forall a,b,c \in R.$$

Bạn đọc hãy tự chứng minh 2 tính chất này.

Bài toán 2.27 (Mathlinks Contests). *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1 thì*

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geq 3.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM - GM$ cho 3 số hạng trên, ta sẽ chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+1)(b+1)(c+1).$$

Thật vậy, cùng với điều kiện $abc = 1$, bất đẳng thức trên tương đương với

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq a + b + c + ab + bc + ca.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ với nhóm 5 số

$$\begin{aligned} a^2b + a^2b + a^2c + a^2c + bc &\geq 5a, \\ b^2a + b^2a + b^2c + b^2c + ac &\geq 5b, \\ c^2b + c^2b + c^2a + c^2a + ab &\geq 5c. \end{aligned}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên lại

$$2.VT \geq 5(a+b+c) - (ab+bc+ca) \quad (1)$$

Sử dụng các kết quả trên, ta có

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n}=1.$$

Đó là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. ❑

Bài toán 2.25 (IMO Shortlist). *Với a,b,c,x,y,z là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=x+y+z$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$ax^2+by^2+cz^2+xyz\ge 4abc.$$

LỜI GIẢI. Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng

Bổ đề. *Nếu $ax^2+by^2+cz^2+xyz=4abc$ thì $x+y+z\le a+b+c$.*

Thật vậy, với đẳng thức trên ta có

$$\frac{x^2}{4bc}+\frac{y^2}{4ca}+\frac{z^2}{4ab}+\frac{xyz}{4abc}=1.$$

Vậy tồn tại một tam giác ABC thoả mãn

$$\cos A=\frac{x}{2\sqrt{bc}},\cos B=\frac{y}{2\sqrt{ca}},\cos C=\frac{z}{2\sqrt{ab}}.$$

Lấy $a_1=\sqrt{a},b_1=\sqrt{b},c_1=\sqrt{c}$. Bất đẳng thức đưa về dạng quen thuộc

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2\ge 2(a_1b_1\cos C+b_1c_1\cos A+c_1a_1\cos B).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{x+y}{2},b=\dfrac{y+z}{2},c=\dfrac{z+x}{2}$. Bài toán ban đầu là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức trên. ❑

Bài toán 2.26 (L. Panaitopol, Micea Lascu, V. Bandila). *Chứng minh rằng với mọi $a,b,c\in R$ ta luôn có*

$$a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3\ge 0.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x=a+b,y=a+c,z=b+c$, ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}&x^3(x+y-z)+y^3(y+z-x)+z^3(z+x-y)\ge 0\\ \Leftrightarrow\quad &x^4+y^4+z^4+x^3y+y^3z+z^3x-xy^3-yz^3-zx^3\ge 0.\end{aligned}$$

Ta tìm cách nhóm thành các tổng nhỏ hơn của 3 số hạng. Cụ thể, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$x^4+y^4+2x^3y-2xy^3=x^4+y^4+2xy(x^2-y^2)\ge 0.$$

Bất đẳng thức trên được chứng minh như sau

$$\begin{aligned}&(a-1)\left(5(a-2)+2a^2-6a+9\right)\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &(a-1)(2a^2-a-1)\geq 0\\ \Leftrightarrow\ &(a-1)^2(2a+1)\geq 0 \quad \text{(đúng!)}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{2a^2-6a+9}\leq \frac{1}{5}-\frac{2}{25}(a-1).$$

Thay a bởi b, c rồi cộng vế các bất đẳng thức ta được *đpcm.* ☐

Các ví dụ trên là các ví dụ điển hình của kĩ thuật chuẩn hoá giúp chúng ta có được lời giải ngắn gọn và đơn giản. Trong hầu hết các trường hợp khác thì các điều kiện mang tính hình thức nhiều hơn, tức là đặt điều kiện trước để có một bất đẳng thức *dễ nhìn* hơn.

Ví dụ 1.6.13. *Giả sử các số thực a, b, c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Hãy chứng minh*

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq 6.$$

Lời Giải. Ta đưa bất đẳng thức về dạng *thuần nhất* là

$$\begin{aligned}&a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)^2\\ \Leftrightarrow\ &2(a^4+b^4+c^4)+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 3ab(a^2+b^2)+\\ &\qquad +3bc(b^2+c^2)+3ca(c^2+a^2).\end{aligned}$$

Với bất đẳng thức trên ta chỉ cần tách ra chứng minh đơn giản theo 2 biến

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+4a^2b^2\geq 3ab(a^2+b^2)\\ \Leftrightarrow\ &(a-b)^4+ab(a-b)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. ☐

Ví dụ 1.6.14. *Chứng minh với các số thực dương a, b, c thoả mãn $ab+bc+ca=3$ ta có bất đẳng thức*

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq 3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Lời Giải. Bạn đọc dễ dàng nhận ra đây chính là là ví dụ 1.6.10 và việc thêm điều kiện $ab+bc+ca=3$ chỉ mang tính hình thức. Riêng với bất đẳng thức trên còn có thêm một cách chứng minh cổ điển nữa bằng cách sử dụng bất đẳng thức *Holder*. Chú ý rằng 3 biểu thức sau hoàn toàn như nhau

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b),$$
$$b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^2(b+c),$$
$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Chỉ cần áp dụng bất đẳng thức *Holder* cho 3 bộ số trên ta có *đpcm*. □

Ví dụ 1.6.15. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 2 ta luôn có*

$$a^4+b^4+c^4+abc \geq a^3+b^3+c^3.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức *Schur* bậc 2 ta có

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$$
$$\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4)+abc(a+b+c) \geq (a^3+b^3+c^3)(a+b+c).$$

Thay $a+b+c=2$ vào bất đẳng thức cuối ta suy ra kết quả bài toán. Chú ý rằng đẳng thức có xảy ra ở bài toán trên khi $a=b=1, c=0$ hoặc các hoán vị (ngoài trường hợp tầm thường $a=b=c=2/3$). □

Ví dụ 1.6.16. *Chứng minh rằng với các số không âm a, b, c có tổng bằng 2 thì*

$$a^3+b^3+c^3+15abc/4 \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Thực chất, ta cần phải chứng minh bài toán

$$a^3+b^3+c^3+\frac{15abc}{4} \geq \frac{(a+b+c)^3}{4}.$$

Đối với bất đẳng thức trên, khai triển cả 2 vế rồi rút gọn ta được bất đẳng thức *Schur* quen thuộc. □

Tuy nhiên đối với rất nhiều bài toán bạn gặp trong cuốn sách này thì điều kiện không chỉ là điều kiện ràng buộc với các biến, mà việc đưa về dạng thuần nhất không phải luôn giúp bất đẳng thức trở nên đơn giản hơn. Ví dụ như

Ví dụ 1.6.17. *Với các số không âm a, b, c có tổng bằng 2, hãy chứng minh*

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \leq 3.$$

Ví dụ 1.6.18. *Với các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 2, chứng minh rằng*

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leq \frac{2^8}{3^5}.$$

Trong cả 2 ví dụ trên, việc thuần nhất 2 vế không có ý nghĩa, chúng ta cần sử dụng các phương pháp khác, đó là dồn biến và phương pháp cổ điển. Các phương pháp này sẽ được xem xét kĩ lưỡng trong chương IV.

1.7 Bất đẳng thức và các đa thức đối xứng sơ cấp

1.7.1 Lí thuyết về các đa thức đối xứng sơ cấp

Khi nói tới những biểu thức đối xứng người ta thường hay xem xét tới các đa thức đối xứng sơ cấp. Đó là các đa thức của các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ có dạng sau

$$\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + ... + x_n \\
S_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... + x_2x_n \\
&\dots \\
S_k &= \sum_{(i_1,i_2,...,i_k)\subset\{1,2,...,n\}} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k} \\
&\dots \\
S_n &= x_1x_2...x_n
\end{aligned}$$

Nói cách khác, chúng là hệ số trong khai triển của các đa thức

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\
&= x^n - S_1x^{n-1} + ... + (-1)^kS_kx^{n-k} + ... + (-1)^nS_n. \\
g(x) &= (x+x_1)(x+x_2)...(x+x_n) \\
&= x^n + S_1x^{n-1} + ... + S_kx^{n-k} + ... + S_n.
\end{aligned}$$

Việc nghiên cứu các biểu thức đối xứng có thể được quy về bằng việc nghiên cứu các đa thức đối xứng được chứng minh qua định lí sau đây

Định lý 1.10 (Định lí cơ bản của đại số). *Mọi đa thức đối xứng luôn có thể biểu diễn qua các đa thức đối xứng sơ cấp.*

Định lí trên không chỉ có nhiều ứng dụng trong bất đẳng thức mà nó còn có rất nhiều ứng dụng trong đại số nói chung. Tất nhiên, định lí có thể chứng minh với kiến thức sơ cấp nhưng không thuộc về bất đẳng thức nên tác giả không nêu lên ở đây, coi đó như một bài tập đại số cho các bạn. Từ định lí này, ta có thể xem việc chứng minh một bất đẳng thức đối xứng về việc đánh giá giữa các đa thức đối xứng sơ cấp. Riêng với các đa thức này ta có một số chú ý quan trọng.

Ví dụ 1.7.1 (Bất đẳng thức Newton). *Với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ không âm ta có*

$$d_{k+1}d_{k-1} \le d_k^2$$

Trong đó $d_k = S_k/C_n^k$, S_k là đa thức đối xứng sơ cấp được xác định như trên.

Ví dụ 1.7.2 (Bất đẳng thức Maclaurin). *Với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ không âm ta có*

$$d_1 \geq \sqrt{d_2} \geq ... \geq \sqrt[k]{d_k} \geq ... \geq \sqrt[n]{d_n}.$$

Chứng Minh. Chứng minh cả 2 bất đẳng thức trên bằng cùng một phương pháp như nhau, đó là phương pháp giảm biến dựa vào định lí *Roll*.

Xét đa thức

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+x_1)(x+x_2)...(x+x_n) \\ &= x^n + S_1x^{n-1} + ... + S_kx^{n-k} + ... + S_n, \\ g'(x) &= nx^{n-1} + (n-1)S_1x^{n-2} + ... + (n-k)S_kx^{n-k-1} + ... + S_{n-1} \\ &= n(x^{n-1} + S_1'x^{n-2} + ... + S_k'x^{n-k-1} + .. + S_{n-1}'),\ nS_k' = (n-k)S_k. \end{aligned}$$

Theo định lí *Roll* thì phương thì $g(x) = 0$ có đủ $n-1$ nghiệm thực $-x_1', -x_2', ..., -x_{n-1}'$ và do đó

$$g'(x) = n(x+x_1')(x+x_2')...(x+x_n').$$

Vậy $\exists S_k'\ \forall k = \overline{1, n-1}$ là các đa thức đối xứng sơ cấp của $x_1', x_2', ..., x_{n-1}'$. Nói cách khác, tồn tại d_k' sao cho $d_k' = d_{k-1}'$. Sau một số hữu hạn lần giảm biến như vậy, ta chỉ cần xét 2 bất dẳng thức trên trong trường hợp có 3 số. Nhưng trường hợp này rất đơn giản vì ta có ngay

$$3abc(a+b+c) \leq (ab+bc+ca)^2,$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Cả 2 bất đẳng thức trên đã được chứng minh xong. ❑

Từ phương pháp chứng minh bất đẳng thức trên ta rút ra hệ quả sau

Bổ đề. *Xét bất đẳng thức $f(d_1, d_2, ..., d_k) \geq 0$ trong đó $n \geq k$ và d_i là các đa thức đối xứng của các biến số dương $x_1, x_2, ..., x_n$. Khi đó nếu bất đẳng thức đúng với mọi $(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \geq 0$ thì cũng đúng với mọi $(x_1, x_2, ..., x_{n+1}), x_i \geq 0$.*

1.7.2 Đa thức đối xứng sơ cấp và các ứng dụng trong giải toán bất đẳng thức

Chúng ta hãy bắt đầu với ví dụ sau đây

Ví dụ 1.7.3 (Bulgari MO 1998). *Cho $a, b, c \geq 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}.$$

LỜI GIẢI. Để cho gọn, ta đặt $S = a + b + c, P = ab + bc + ca, Q = abc$. Ta có

$$\begin{aligned}
VT &= \frac{1}{S+1-a} + \frac{1}{S+1-b} + \frac{1}{S+1-c} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\
\alpha_1 &= \sum_{sym}(1+a+b)(1+a+c) = S^2 + 4S + 3 + P \\
\alpha_2 &= (S+1-a)(S+1-b)(S+1-c) \\
&= S^2 + 2S + PS + P \\
VP &= \sum_{sym} \frac{1}{2+a} = \frac{12+4S+P}{9+4S+2P}
\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}
\frac{S^2+4S+3+P}{S^2+2S+PS+P} &\le \frac{12+4S+P}{9+4S+2p} \\
\Leftrightarrow \frac{P-3}{9+4S+2P} &\le \frac{PS-2S-3}{S^2+2S+PS+P} \\
\Leftrightarrow (P-3)(S^2+2S+PS+P) &\le (PS-2S-3)(9+4S+2P) \\
\Leftrightarrow (3P-5)S^2 + (S-1)P^2 + 6PS &\ge 24S + 3P + 27.
\end{aligned}$$

Vì $abc = 1$ nên $S, P \ge 3$, do đó

$$\begin{aligned}
VT \ge 4S^2 + 2P^2 + 6PS &\ge 12S + 6(P-1)S + 6S + 2P^2 \\
&\ge 24S + 3P + (P^2 + 6S) \ge VP.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $S = P = 3$ hay $a = b = c = 1$. ❑

Ví dụ 1.7.4 (Việt Nam MO 1996). *Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn điều kiện*

$$2(ab + bc + cd + da + ac + bd) + abc + bcd + cda + dab = 16.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$a + b + c + d \ge \frac{2}{3}(ab + bc + cd + da + ac + bd).$$

LỜI GIẢI. Theo định lí *Roll*, tồn tại các số x, y, z để

$$\begin{aligned}
ab + bc + cd + da + ac + bd &= 2(xy + yz + zx) \\
abc + bcd + cda + dab &= 4xyz \\
a + b + c + d &= \frac{4}{3}(x + y + z)
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trở thành : *Nếu* $xy + yz + zx + xyz = 4$ *thì*

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức trên. Sau đây là một chứng minh dùng các đa thức đối xứng sơ cấp.

Với kí hiệu d_1, d_2, d_3 như trước ta có $3d_2 + d_3 = 4$. Theo bất đẳng thức *Schur* dễ thấy rằng

$$\begin{aligned}
&3d_1^3 + d_3 \geq 4d_1d_2\\
\Rightarrow\ &3d_1^2d_2^2 + d_3d_1^3 \geq 3d_1^2d_2^2 + d_2^2d_3/d_1 \geq 4d_2^3\\
\Rightarrow\ &(d_1 - d_2)^3 + 3(d_1^3 - d_2^3) \geq 0 \Rightarrow d_1 \geq d_2.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$. ❑

Sử dụng các đa thức đối xứng trong chứng minh bất đẳng thức có ưu điểm là không tốn nhiều thời gian để nghĩ một cách chứng minh đặc biệt nào đó, không đòi hỏi nhiều kĩ năng nhưng cũng có nhược điểm là dễ nhầm lẫn và nếu số các biến có số mũ cao, từ bậc 2 trở lên thì chứng minh sẽ rất phức tạp. Tuy nhiên, dù sao đây vẫn là một kĩ thuật cần thiết và dễ sử dụng. Các bạn hãy thực hành kĩ năng của mình qua bất đẳng thức khá quen thuộc đã được chứng minh ở mục trước.

Ví dụ 1.7.5. *Chứng minh với các số thực dương* a, b, c *ta luôn có*

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{8}}.$$

1.8 Phương pháp cân bằng hệ số

1.8.1 Bài toán mở đầu

Trong nhiều bài toán bất đẳng thức và cực trị, đôi khi việc ghép và sử dụng các bất đẳng thức cổ điển không được thuận lợi và dễ dàng. Khi sử dụng liên tiếp nhiều bất đẳng thức ta luôn phải chú ý tới điều kiện để bất đẳng thức xảy ra, để điều kiện này luôn được thoả mãn suốt quá trình ta sử dụng các bất đẳng thức trung gian. Trong nhiều trường hợp thì hệ số các bất đẳng thức rất lệch, không đối xứng nên công việc trên trở nên rất khó khăn. Vì thế để chắc chắn có một lời giải chặt chẽ về mặt toán học, chúng ta buộc phải đưa thêm các biến trung gian rồi giải hệ phương trình của các đẳng thức.

Ví dụ 1.8.1. *Giả sử các số thực không âm* x, y, z *thoả mãn điều kiện* $xy+yz+zx = 1$, *chứng minh bất đẳng thức*

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4.$$

Lời Giải. Về mặt hình thức, ta có thể trình bày ngắn gọn lời giải cho bài toán trên bằng bất đẳng thức $AM - GM$ như sau

$$2x^2 + 2y^2 \geq 4xy$$
$$8x^2 + 1/2z^2 \geq 4xz$$
$$8y^2 + 1/2z^2 \geq 4yz$$

Cộng vế cả 3 bất đẳng thức trên lại dẫn đến

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) = 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y \\ 4x = z \\ 4y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{cases}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

Đây là một lời giải đẹp, ngắn gọn nhưng có vẻ hơi thiếu tự nhiên. Các bạn sẽ thắc mắc tại sao lại tách $10 = 2 + 8$, đây là một sự ngẫu nhiên hay may mắn? Và nếu tách theo cách khác, chẳng hạn $10 = 3 + 7$ liệu có giải được không? Tất nhiên, mọi cách tách khác đều không dẫn đến kết quả, và tách $10 = 2 + 8$ cũng không phải là sự may mắn...

Ví dụ 1.8.2. *Giả sử các số thực x, y, z thoả mãn $2xyz = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = 3x + 2y + z.$$

Lời Giải. Đây cũng là một bài toán khá kì lạ, các hệ số lệch nhau nhưng giá trị nhỏ nhất lại đạt được khi $x = y = z = 6$!? □

Kĩ thuật cân bằng hệ số là một kĩ thuật rất cần thiết, thường sử dụng mặc dù đôi lúc ta có các phương trình khá phức tạp. Nhưng với cách bài toán không ở dạng chuẩn, với các biểu thức lệch nhau thì công việc này dường như bắt buộc. Trong kĩ thuật cân bằng hệ số, ta có thể phân chia làm 2 nhóm trong thực hành, đó là cân bằng hệ số với bất đẳng thức $AM - GM$ và cân bằng hệ số với bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$.

1.8.2 Cân bằng hệ số với bất đẳng thức liên hệ trung bình cộng và trung bình nhân (AM - GM)

Với một số bạn, kĩ thuật này còn khá xa lạ nhưng nó cũng rất quen thuộc với nhiều bạn đọc khác. Tuy vậy hầu như các bài toán sử dụng phương pháp này đều không đơn giản với bất kì ai. Trở lại bài toán 1.8.1, chúng ta sẽ lí giải cho chứng minh ở đó, và hãy xét thêm một ví dụ khác tương tự

Ví dụ 1.8.3. *Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 5$ thì*

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10.$$

Lời Giải. Lời giải đơn giản và ngắn gọn cho ví dụ trên là

$$4x^2 + z^2 \geq 4xz$$
$$4y^2 + z^2 \geq 4yz$$
$$2x^2 + 2y^2 \geq 4xy$$

Do đó $2(3x^2 + 3y^2 + z^2) \geq 4(xy + yz + zx)$, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1, z = 2$. □

Bây giờ ta sẽ tìm lí do của việc tách $10 = 2 + 8$ ở bài toán mở đầu và $6 = 4 + 2$ ở ví dụ trên. Ta cần xem xét bài toán dạng tổng quát

Ví dụ 1.8.4. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$k(x^2 + y^2) + z^2$$

Trong đó các số thực x, y, z thoả mãn $xy + yz + zx = 1$ và k là một hằng số dương.

Lời Giải. Ta hãy tách $k = l + (k - l)$ (với $0 \leq l \leq k$) và áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ theo phương pháp tương tự như trên

$$lx^2 + ly^2 \geq 2lxy$$
$$(k - l)x^2 + 1/2z^2 \geq \sqrt{2(k - l)}xz$$
$$(k - l)y^2 + 1/2z^2 \geq \sqrt{2(k - l)}yz$$

Do đó $k(x^2 + y^2) + z^2 \geq 2lxy + \sqrt{2(k - l)}(xz + yz)$.
Trong trường hợp này, ta không phải cân bằng điều kiện đẳng thức mà ta phải cân bằng điều kiện giả thiết, tức là tìm 1 số dương l sao cho $2l = \sqrt{2(k - l)}$. Khi đó

$$k(x^2 + y^2) + z^2 \geq 2l(xy + yz + zx) = 2l.$$

Số l được chọn ở trên thoả mãn phương trình

$$2l^2 = k - l \Leftrightarrow 2l^2 + l = k$$
$$\Leftrightarrow l = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{4}.$$

Và ta suy ra kết quả

$$k(x^2 + y^2) + z^2 \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}. \quad \square$$

Bài toán 1.60. *Cho các số dương a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 1$ và x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây*

$$H = (a+b)^x(b+c)^y(c+a)^z.$$

Bài toán 1.61. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm thì*

$$a\sqrt{a^2+2bc} + b\sqrt{b^2+2ca} + c\sqrt{c^2+2ab} \geq \sqrt{3}(ab+bc+ca).$$

Bài toán 1.62. *Chứng minh với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^2}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^2}{a^2-ab+b^2} \geq 2.$$

Bài toán 1.63 (India 2004). *Các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $|x_i - x_{i+1}| < 1$ và $x_i \geq 1 \forall i = \overline{1,n}$, $x_{n+1} = x_1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1} < 2n - 1.$$

Bài toán 1.64. *Cho các số thực dương $a, b, c \in [-1, 1]$ thoả mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+b^2}{(1-a^2)(1-b^2)} + \frac{b^2+c^2}{(1-b^2)(1-c^2)} + \frac{c^2+a^2}{(1-c^2)(1-a^2)} \geq \frac{9}{2}.$$

Bài toán 1.65 (Poland 1991). *Giả sử các số thực x, y, z thoả mãn $x^2+y^2+z^2 = 2$. Chứng minh*

$$x + y + z \leq 2 + xyz.$$

Bài toán 1.66. *Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 2$ thì*

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc \leq 2.$$

Bài toán 1.67 (Poland 1997). *Các số thực a, b, c thoả mãn $a, b, c \geq -3/4$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}.$$

Bài toán 1.68. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm thì*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{a+b}{c^2+ab} + \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ac}.$$

Bài toán 1.69 (Math. Changelles). *Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$*

$$3\sqrt[3]{abc} + |a-b| + |b-c| + |c-a| \geq a + b + c.$$

Bài toán 1.70 (IMO 1986). *Cho $x_1, x_2 \geq 0$ và $y_1, y_2, z_1, z_2 \in R$ sao cho $x_1y_1 \geq z_1^2, x_2y_2 \geq z_2^2$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geq \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2}.$$

Bài toán 1.71. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm thì*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3 + b^3 + c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Bài toán 1.72 (Balkan 2005 Pro. 3). *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi a, b, c dương*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Bài toán 1.73. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ thì*

$$\left(1 + \frac{4a}{b+c}\right)\left(1 + \frac{4b}{a+c}\right)\left(1 + \frac{4c}{a+b}\right) \geq 25.$$

Bài toán 1.74 (A, IMO Shortlist). *Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$ thì*

$$\frac{1}{a^3(b+c)(c+a)} + \frac{1}{b^3(c+a)(a+b)} + \frac{1}{c^3(a+b)(b+c)} \geq \frac{3}{4}.$$

Bài toán 1.75. *Chứng minh với $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 2$ thì*

$$\frac{ab}{c+2} + \frac{bc}{a+2} + \frac{ca}{b+2} \leq \frac{1}{2}.$$

HƯỚNG DẪN. Quy đồng mẫu số và biến đổi bất đẳng thức trở thành

$$2(ab + bc + ca)^2 + 14(ab + bc + ca) \leq 16 + 21abc$$
$$\Leftrightarrow \quad 2(ab + bc + ca - 1)(ab + bc + ca + 8) \leq 21abc.$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \Rightarrow 8(ab + bc + ca - 1) \leq 9abc.$$

Thay bất đẳng thức trên vào (*) và chú ý rằng $ab + bc + ca \leq \frac{4}{3}$ ta có *đpcm.* □

Bài toán 1.76 (Math Camp. 2000). *Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \geq 4(a^6 + b^6 + c^6).$$

Bài toán 1.77. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$3 \leq \frac{a(3a+1)}{(a+1)^2} + \frac{b(3b+1)}{(b+1)^2} + \frac{c(3c+1)}{(c+1)^2} \leq a+b+c.$$

Bài toán 1.78. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $a, b, c > 0$*

$$\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(b+1-\frac{1}{c}\right)+\left(b+1-\frac{1}{c}\right)\left(c+1-\frac{1}{a}\right)+\left(c+1-\frac{1}{a}\right)\left(a+1-\frac{1}{b}\right) \geq 3.$$

Bài toán 1.79. *Cho các số thực không âm a, b, c, d thoả mãn $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab \leq 8.$$

Bài toán 1.80. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{b+c}{2a^2+bc} + \frac{c+a}{2b^2+ca} + \frac{a+b}{2c^2+ab} \geq \frac{6}{a+b+c}.$$

Bài toán 1.81 (IMO 2005 Pro.2). *Cho $n \in N^*$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực.*

1. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

2. *Chứng minh rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1, x_2, ..., x_n$ là một cấp số cộng.*

1.11 Một số bài toán đáng chú ý

Trước khi xem tiếp chương II, các bạn hãy thử sức với các bài toán cho sau đây. Chúng được chọn ra từ các bài toán ở các chương sau và miêu tả khá đầy đủ nội dung của các bất đẳng thức ở đó. Vẫn là các bài toán có hình thức rất đơn giản nhưng không có bài nào đơn giản như vẻ ngoài của nó, mỗi bài toán đều đặc trưng cho một phương pháp riêng. Có một số bài còn được chứng minh theo rất nhiều cách khác nhau. Chắc chắn chúng sẽ rất có ý nghĩa cho các bạn nắm được nội dung của cuốn cách này. Nào, bây giờ mời các bạn hãy thử sức !!

Problem 1 (Romania TST IMO 1998). *Với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1, hãy chứng minh*

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

Problem 2 (Iran TST 1996). *Với mọi số thực a, b, c không âm, chứng minh*

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Problem 3 (Bất đẳng thức Tukervici). *Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số thực không âm thì*

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2.$$

Problem 4 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tích bằng 1 thì*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{3n}{a_1+a_2+...+a_n}\ge n+3.$$

Problem 5 (Mathlinks Contests). *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1. Tìm hằng số thực $k=k(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_na_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+k_na_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1+k_na_n}}\ge n-1.$$

Problem 6 (Phạm Kim Hùng). *Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng n. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây*

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

Problem 7 (Vasile Cirtoaje). *Cho các số thực không âm a, b, c, d có tổng bằng 4. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1.$$

Problem 8 (Thách Thức). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tích bằng 1. Tìm hằng số thực $k=k(n)$ nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+...+\frac{1}{(1+a_n)^k}\ge\frac{n}{2^k}.$$

Problem 9 (Phạm Kim Hùng). *Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh*

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(c+\frac{a^2}{b}\right)^2\ge\frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}.$$

Problem 10 (Gabriel Dospinescu). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{3}{3a+b}+\frac{3}{3b+c}+\frac{3}{3c+a}.$$

Chương 2

Sáng tạo bất đẳng thức

2.1 Các bài toán chọn lọc

Bài toán 2.1 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c=3$ thì ta có*

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \le 12.$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $a \ge b \ge c$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&b^2-bc+c^2 \le b^2,\\
&a^2-ac+c^2 \le (a+c)^2,\\
&a^2-ab+b^2 \le (a+c)^2-(a+c)b+b^2.
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$M=(a+c)^2b^2\big((a+c)^2-(a+c)b+b^2\big) \le 12.$$

Thật vậy, đặt

$$x=\frac{a+c-b}{2} \ge 0\ ,\ s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2},$$

Khi đó M có thể viết dưới dạng

$$(s^2-x^2)^2(s^2+3x^2).$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}(s^2-x^2).\frac{3}{2}(s^2-x^2).(s^2+3x^2) &\le \left(\frac{4}{3}s^2\right)^3=27\\
&\Rightarrow \frac{9}{4}M \le 27 \Rightarrow M \le 12.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c=0, s^2=9x^2 \Leftrightarrow a=2, b=1, c=0$. □

Bài toán 2.2 (Walther Janous). *Giả sử a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right) \geq \frac{9}{1+abc}.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức *Hoán vị*, dễ thấy rằng

$$\frac{1}{a(1+a)}+\frac{1}{b(1+b)}+\frac{1}{c(1+c)} \geq \frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{a(1+b)},$$

Và do đó bất đẳng thức trên sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng

$$\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{a(1+b)} \geq \frac{3}{1+abc},$$
$$\frac{1}{a(1+c)}+\frac{1}{c(1+b)}+\frac{1}{b(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Chỉ cần chứng minh 1 trong 2 bất đẳng thức trên. Chẳng hạn với bất đẳng thức thứ nhất, đặt $a = ky/x, b = kz/y, c = kx/z$, ta có bất đẳng thức tương đương là

$$\frac{1}{kz/y+k^2x/y}+\frac{1}{kx/z+k^2y/z}+\frac{1}{ky/x+k^2z/x} \geq \frac{3}{1+k^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y}{z+kx}+\frac{z}{x+ky}+\frac{x}{y+kz} \geq \frac{3k}{1+k^3}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ ta có

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{k+1}.$$

Vì thế chỉ cần chứng minh thêm

$$\frac{3}{k+1} \geq \frac{3k}{1+k^3} \Leftrightarrow (k-1)^2(k+1) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z, k = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$. □

Bài toán 2.3 (Russia MO 2000). *Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c = 3$ thì ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca.$$

LỜI GIẢI. Ta có

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - a^2 + b^2 + c^2.$$

Ta phải chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 3 số hạng

$$a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3a,$$
$$b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geq 3b,$$
$$c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c} \geq 3c.$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 3(a + b + c) = 9.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 2.4 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tích bằng 1. Chứng minh rằng*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq \frac{2}{1 + x_1} + \frac{2}{1 + x_2} + ... + \frac{2}{1 + x_n}.$$

Lời Giải. Sử dụng đẳng thức $2 - \dfrac{2}{1 + x_i} = \dfrac{2x_i}{1 + x_i}$, ta phải chứng minh

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + \frac{2x_1}{1 + x_1} + \frac{2x_2}{1 + x_2} + ... + \frac{2x_n}{1 + x_n} \geq 2n.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ dễ thấy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + 1}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{1 + x_i} \geq 2n \sqrt[2n]{x_1 x_2 ... x_n} = 2n,$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - 1}{2} \geq 0.$$

Cộng vế 2 bất đẳng trên ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$. □

Bài toán 2.5 (Japan MO 2001). *Chứng minh bất đẳng thức*

$$(a + b - c)^2 (b + c - a)^2 (c + a - b)^2 \geq (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2),$$

Trong đó a, b, c là các số thực tùy ý.

LỜI GIẢI. Ta chỉ cần xét bài toán khi a^2, b^2, c^2 là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức tương đương với

$$(b^2-(a-c)^2)(c^2-(a-b)^2)(a^2-(b-c)^2) \geq (a^2-b^2+c^2)(b^2-c^2+a^2)(c^2-a^2+b^2).$$

Ta chứng minh

$$(b^2-(a-c)^2)^2 \geq (b^2-a^2+c^2)(b^2-c^2+a^2) \quad (1)$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$b^4-2b^2(a-c)^2+(a-c)^4 \geq b^4-(a^2-c^2)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad (a-c)^2(a^2-b^2+c^2) \geq 0 \quad \text{(đúng!)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên hoán vị với a, b, c cho ta

$$(c^2-(a-b)^2)^2 \geq (c^2-a^2+b^2)(c^2-b^2+a^2) \quad (2)$$
$$(a^2-(b-c)^2)^2 \geq (a^2-b^2+c^2)(a^2-c^2+b^2) \quad (3)$$

Nhân vế các bất đẳng thức $(1), (2), (3)$ ta suy ra kết quả của bài toán. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và hoán vị. ❑

Bài toán 2.6 (Việt Nam TST 2006). *Chứng minh với các số thực $a, b, c \in [1,2]$ ta có bất đẳng thức*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

LỜI GIẢI. Thay vì giả thiết $a, b, c \in [1,2]$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với điều kiện a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Sử dụng các đẳng thức sau

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9 = \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca},$$

$$6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)}+\frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)}.$$

Vậy bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Trong đó các hệ số S_a, S_b, S_c được xác định bởi

$$S_a = \frac{1}{bc}-\frac{3}{(a+b)(a+c)},$$
$$S_b = \frac{1}{ca}-\frac{3}{(b+c)(b+a)},$$
$$S_c = \frac{1}{ab}-\frac{3}{(c+a)(c+b)}.$$

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử rằng $a \geq b \geq c$, khi đó $S_a \geq S_b \geq S_c$. Ta sẽ chứng minh $S_b + S_c \geq 0$, thật vậy

$$S_b + S_c = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{b+c}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{b+c}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right).$$

Do $a \leq b + c$ nên dễ thấy

$$VP \leq \frac{3}{b+c}\left(\frac{b+c}{2b+c} + \frac{b+c}{2c+b}\right) = \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+b}.$$

Phần còn lại của bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+b}$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$\frac{1}{b} + \frac{2}{c} \geq \frac{9}{2c+b},$$
$$\frac{1}{c} + \frac{2}{b} \geq \frac{9}{2b+c}.$$

Do đó $S_b + S_c \geq 0 \Rightarrow S_b \geq 0$. Vậy

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = 2, b = c = 1$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán 2.7 (Phạm Duy Hiệp). *Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ thì*

$$\frac{1}{b(b+a)} + \frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{a(a+c)} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Lời Giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{c(a+b)+ab}{b(b+a)} + \frac{a(b+c)+bc}{c(c+b)} + \frac{b(c+a)+ca}{a(a+c)} \geq \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c+b}{b} + \frac{b+a}{a} + \frac{a+c}{c} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{15}{2}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{a+b}{4a}+\frac{a}{a+b}\ge 1,$$
$$\frac{b+c}{4b}+\frac{b}{b+c}\ge 1,$$
$$\frac{c+a}{4c}+\frac{c}{c+a}\ge 1.$$

Do đó
$$\frac{a+b}{4a}+\frac{a}{a+b}+\frac{b+c}{4b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c+a}{4c}+\frac{c}{c+a}\ge 3.$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\frac{3}{4}\left(\frac{a+b}{a}+\frac{b+c}{b}+\frac{c+a}{c}\right)=\frac{3}{4}\left(3+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\frac{9}{2}.$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. ❑

Bài toán 2.8 (Gabriel Dospinescu). *Chứng minh rằng nếu $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương với tích bằng 1 thì ta có bất đẳng thức sau*

$$\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}+...+\sqrt{1+a_n^2}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n).$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh với mọi $x\ge 0$ thì

$$\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}+\sqrt{x}\le 1+x.$$

Thật vậy, chuyển vế và bình phương

$$\frac{1+x^2}{2}\le(x-\sqrt{x}+1)^2$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-1)^4\ge 0\quad(\text{đúng!}).$$

Sử dụng bất đẳng thức trên cho n số $a_1,a_2,...,a_n$ rồi cộng lại

$$\begin{aligned}\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}+...+\sqrt{1+a_n^2}\le\ &\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)\\ &+\sqrt{2}(n-\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}-...-\sqrt{a_n}).\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}\ge n\sqrt[2n]{a_1a_2...a_n}=n.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n=1$. ❑

Bài toán 2.9 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương và $abc \geq 1$ thì*

$$a + b + c \geq \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}.$$

LỜI GIẢI. Xét trường hợp $abc = 1$. Bất đẳng thức tương đương với

$$a - \frac{a}{1+b} + b - \frac{b}{1+c} + c - \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab}{1+b} + \frac{bc}{1+c} + \frac{ca}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Vì $abc = 1$ nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $a = x/y, b = y/z, c = z/x$. Thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}}{1+\frac{y}{z}} + \frac{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}}{1+\frac{z}{x}} + \frac{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\frac{y}{z}} + \frac{1}{1+\frac{z}{x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-z}{y+z} + \frac{y-x}{z+x} + \frac{z-y}{x+y} \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max(x, y, z)$.

Bất đẳng thức viết được dưới dạng sau

$$(x-z)\left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+z}\right) + (z-y)\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{z+x}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-z)(x-y)}{(x+z)(y+z)} + \frac{(z-y)^2}{(x+y)(y+z)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $x = \max(x, y, z)$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hay $a = b = c = 1$.

Nếu $abc > 1$ thì tồn tại các số dương k, a', b', c' sao cho $a = ka', b = kb', c = kc'$. Ta lấy $k = \sqrt[3]{abc} > 1$ khi đó dễ thấy $a'b'c' = 1$. Ta phải chứng minh

$$ka' + kb' + kc' \geq \frac{1+ka'}{1+kb'} + \frac{1+kb'}{1+kc'} + \frac{1+kc'}{1+ka'}$$
$$\Leftrightarrow a' + b' + c' \geq \frac{1/k + a'}{1+kb'} + \frac{1/k + b'}{1+kc'} + \frac{1/k + c'}{1+ka'},$$

Nhưng bất đẳng thức này đúng, và không có đẳng thức vì theo chứng minh trên

$$a' + b' + c' \geq \frac{1+a'}{1+b'} + \frac{1+b'}{1+c'} + \frac{1+c'}{1+a'} > \frac{1/k + a'}{1+kb'} + \frac{1/k + b'}{1+kc'} + \frac{1/k + c'}{1+ka'}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ☐

Bài toán 2.10 (Mathlinks Contests). *Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực dương a, b, c*

$$\frac{a+b}{a+c}+\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

LỜI GIẢI. Ta có thể chứng minh bài toán theo hai cách.

Cách 1. Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}-\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{ac}{b(b+c)}+\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{cb}{a(a+b)}\ge\frac{a}{a+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}.\end{aligned}$$

Xét các biểu thức

$$\begin{aligned}P&=\frac{ac}{b(b+c)}+\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{cb}{a(a+b)},\\ Q&=\frac{bc}{a(b+c)}+\frac{ac}{b(a+c)}+\frac{ab}{c(a+b)}.\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$PQ\ge\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}\right)^2.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức hoán vị thì

$$P-Q=\frac{1}{abc}\left(\frac{a^2c^2}{b+c}+\frac{a^2b^2}{a+c}+\frac{b^2c^2}{a+b}-\frac{b^2c^2}{b+c}-\frac{a^2c^2}{a+c}-\frac{a^2b^2}{a+b}\right)\ge 0.$$

Từ đó suy ra

$$P\ge\frac{a}{a+c}+\frac{c}{b+c}+\frac{b}{a+b}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Với mọi $a, b, c > 0$ ta luôn có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)(b-c)}{ac}.$$

Do đó bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\right](a-b)^2+\left[\frac{1}{ac}-\frac{1}{(a+c)(a+b)}\right](a-c)(b-c)\ge 0.$$

Chỉ cần giả sử rằng $c=\min(a,b,c)$ ta có ngay *đpcm.* □

Nhận xét. Bạn Nguyễn Việt Anh đã phát hiện ra một bài toán tổng quát thú vị

Bài toán. *Cho các số thực dương a, b, c, k. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+kb}{a+kc}+\frac{b+kc}{b+ka}+\frac{c+ka}{c+kb}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Lời Giải. Đặt

$$X=\frac{1+k\frac{a}{b}}{1+k},\ Y=\frac{1+k\frac{b}{c}}{1+k},\ Z=\frac{1+k\frac{c}{a}}{1+k}.$$

Dễ thấy $xyz\ge 1$. Bất đẳng thức tương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b}-\frac{c+ka}{c+kb}\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c(a-b)}{b(c+kb)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\frac{a}{b}-1}{1+\frac{kb}{c}}\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{1}{k}+1\right)(X-1)}{(k+1)Y}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{X}{Y}+\frac{Y}{Z}+\frac{Z}{X}\ge\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\frac{X}{Y}+\frac{X}{Y}+\frac{Z}{X}\ge 3\sqrt[3]{\frac{XZ}{Y^2}}=\frac{3\sqrt[3]{XYZ}}{Y}\ge\frac{3}{Y}.$$

Cộng hai bất đẳng thức tương tự với Y, Z ta có *đpcm*. □

Bài toán 2.11 (Moldova TST 2006). *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-1\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-1\right)\ge 0.$$

Lời Giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\ge abc(a^2+b^2+c^2).$$

Ta sử dụng đẳng thức sau

$$a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)=a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&2(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)-2abc(a^2+b^2+c^2)\\
&\quad=a^3(b^2-2bc+c^2)+b^3(c^2-2ca+a^2)+c^3(a^2-2ab+b^2)\\
&\qquad-a^2(b^3-c^3)-b^2(c^3-a^3)-c^2(a^3-b^3)\\
&\quad=a^3(b-c)^2+b^3(c-a)^2+c^3(a-b)^2-a^2(b-c)^3-b^2(c-a)^3-c^2(a-b)^3\\
&\quad=a^2(b-c)^2(a-b+c)+b^2(c-a)^2(b-c+a)+c^2(a-b)^2(c-a+b)\ge 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ❑

Bài toán 2.12 (Phạm Kim Hùng). *Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3} \le \frac{1}{2}.$$

LỜI GIẢI. Dễ thấy $a^2+1 \ge 2a,\ b^2+1 \ge 2b,\ c^2+1 \ge 2c$, suy ra

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3} \le \frac{a}{2(a+b+1)}+\frac{b}{2(b+c+1)}+\frac{c}{2(c+a+1)}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1} \le 1.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1} \ge 2 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\\
&=\frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)}+\frac{(c+1)^2}{(c+1)(b+c+1)}+\frac{(a+1)^2}{(a+1)(c+a+1)}\\
&\ge \frac{(a+b+c+3)^2}{(b+1)(a+b+1)+(c+1)(b+c+1)+(a+1)(c+a+1)}.
\end{aligned}$$

Nhưng vì $a^2+b^2+c^2=3$ nên ta có

$$\begin{aligned}
&(b+1)(a+b+1)(c+1)(b+c+1)+(a+1)(c+a+1)\\
&\quad = 3(a+b+c)+ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2+3=\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2.
\end{aligned}$$

Vậy $(*)$ được chứng minh, và do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ❑

Bài toán 2.13 (Phan Thành Nam). *Cho $a_i \in [0, i]\ \forall i = \overline{1, n}$. Chứng minh rằng*

$$a_1(a_1+a_2)...(a_1+a_2+...+a_n) \ge \frac{n+1}{2^n}a_1^2a_2^2...a_n^2.$$

Lời Giải. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + ... + a_k &= 1 \cdot \left(\frac{a_1}{1}\right) + 2 \cdot \left(\frac{a_2}{2}\right) + ... + k \cdot \left(\frac{a_k}{k}\right) \\ &\geq \frac{k(k+1)}{2}\left(\frac{a_1}{1}\right)^{\frac{2}{k(k+1)}} \cdot \left(\frac{a_2}{2}\right)^{\frac{4}{k(k+1)}} \cdot \left(\frac{a_k}{1}\right)^{\frac{2k}{k(k+1)}}. \end{aligned}$$

Cho $k = 1, 2, ..., n$ rồi nhân các bất đẳng thức lại ta được

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n}(a_1 + a_2 + ... + a_k) &\geq \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{i}\right)^{\frac{2i}{k(k+1)}}\right) \\ &= \frac{n!(n+1)!}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i}\right)^{c_i}, \end{aligned}$$

Trong đó các số mũ c_i được xác định bởi

$$\begin{aligned} c_i &= 2i\left(\frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} + ... + \frac{1}{n(n+1)}\right) \\ &= 2i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) \leq 2. \end{aligned}$$

Do $a_i \leq i$ nên từ các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$a_1(a_1 + a_2)...(a_1 + a_2 + ... + a_n) \geq \frac{n!(n+1)!}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i}\right)^2 = \frac{n+1}{2^n}a_1^2 a_2^2 ... a_n^2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dẳng thức xảy ra chỉ khi $a_i = i \ \forall i = \overline{1, n}$. □

Bài toán 2.14 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi là 3. Chứng minh*

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Lời Giải. Đặt $x = \sqrt{b+c-a}, y = \sqrt{c+a-b}, z = \sqrt{a+b-c} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{36}{9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}.$$

Đặt $m = xy, n = yz, p = zx$, ta có bất đẳng thức tương đương

$$(m+n+p)(m^2+n^2+p^2+9) \geq 36\sqrt{mnp}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$m + n + p \geq 3\sqrt[3]{mnp}\ , \ m^2 + n^2 + p^2 + 9 \geq 12\sqrt[6]{mnp}.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta có *đpcm*. □

Bài toán 2.15 (Iran TST 2006). *Chứng minh với mọi dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ ta luôn có*

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_i + a_j| \geq n \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Lời Giải. Phân chia dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ thành các dãy số âm và không âm

$$\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{b_1, b_2, ..., b_r\} \cup \{-c_1, -c_2, ..., -c_s\},$$

Trong đó $n = r + s$, $b_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1, r}$, $c_i > 0 \ \forall j = \overline{1, s}$.

Đặt $R = \sum_{i=1}^{r} b_i$ và $S = \sum_{j=1}^{s} c_j$. Bất đẳng thức tương đương với

$$2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} |b_i - c_j| + 2r\sum_{i=1}^{r} b_i + 2s\sum_{j=1}^{s} c_j \geq n(\sum_{i=1}^{r} b_i + \sum_{j=1}^{s} c_j)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} |b_i - c_j| \geq (s - r)(R - S).$$

Không mất tính tổng quát giả sử $s \geq r$. Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $R \geq S$. Dễ thấy

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} |b_i - c_j| \geq \sum_{i=1}^{r} (sb_i - S) = sR - rS.$$

Ta sẽ chứng minh

$$2(sR - rS) \geq (s - r)(R - S) \Leftrightarrow S(s - r) + r(R - S) + sR - rS \geq 0,$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $s \geq r$ và $r \geq S$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong dãy $a_1, a_2, ..., a_n$, số các số không âm bằng số các số âm và giá trị tuyệt đối của tất cả các số đó bằng nhau. □

Bài toán 2.16 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực a, b, c không âm*

$$3(a + b + c) \geq 2\left(\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab}\right).$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Dễ thấy

$$\sqrt{b^2 + ca} + \sqrt{c^2 + ab} \leq \sqrt{2(b^2 + c^2) + 2a(b + c)}.$$

Ta phải chứng minh

$$2\sqrt{2(b^2+c^2)+2a(b+c)}+2\sqrt{a^2+bc}\le 3(a+b+c).$$

Đặt $s=\frac{b+c}{2}$, bình phương 2 vế ta có bất đẳng thức tương đương

$$8(b^2+c^2+2as)\le 9(a+2s)^2+2(a^2+bc)-12(a+2s)\sqrt{a^2+bc}$$
$$\Leftrightarrow (a-2s)^2+20bc\ge 12(a+2s)\left(\sqrt{a^2+bc}-a\right).$$

Dễ thấy

$$\sqrt{a^2+bc}-a=\frac{bc}{a+\sqrt{a^2+bc}}\le\frac{bc}{2a}.$$

Vậy ta phải chứng minh

$$(a-2s)^2+20bc\ge\frac{6(a+2s)bc}{a}$$
$$\Leftrightarrow (a-2s)^2+2bc+\frac{12(a-s)bc}{a}\ge 0.$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $a\ge s$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. □

Bài toán 2.17 (Phan Thành Nam). *Cho $x,y,z\in[-1,1]$ và $x+y+z=0$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\ge 3.$$

LỜI GIẢI. Trước hết ta sẽ chứng minh rằng nếu $ab\ge 0$; $a,b,a+b\ge -1$ thì

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\ge 1+\sqrt{1+a+b}.$$

Thật vậy, bình phương 2 vế bất đẳng thức trên

$$2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 2+a+b+2\sqrt{1+a+b}$$
$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)\ge 1+a+b\Leftrightarrow ab\ge 0.$$

Trong 3 số $x+y^2, y+z^2, z+x^2$ phải tồn tại ít nhất hai số hạng cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử $(x+y^2)(y+z^2)\ge 0$. Khi đó, theo nhận xét trên thì

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\\
&\ge 1+\sqrt{1+x+y^2+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\\
&=1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1+z}\right)^2+x^2}\\
&\ge 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+(x+y)^2}\\
&=1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2}.
\end{aligned}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2\geq 4$$

$$\Leftrightarrow 2z^2+2\sqrt{1-z^3}\geq 2\Leftrightarrow 1-z^2\geq 1-2z^2+z^4\Leftrightarrow z^2(z^2-1)\geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $-1\leq z\leq 1$, ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$. □

Nhận xét. Bài toán mở rộng cho 4 số có thể được chứng minh theo cách tương tự

Bài toán 1. *Cho các số thực $x,y,z,t\in[-1,1]$ thoả mãn $x+y+z+t=0$. Chứng minh*

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+t^2}+\sqrt{1+t+x^2}\geq 4.$$

Ngoài ra ta cũng có thêm một số kết quả cùng dạng

Bài toán 2. *Cho các số thực $x,y,z\in[-1,1]$ thoả mãn $x+y+z=0$. Chứng minh*

$$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{6}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{6}}+\sqrt{1+z+\frac{x^2}{6}}\leq 3.$$

Bài toán 3. *Cho các số thực $x,y,z\in[-1,1]$ và $x+y+z\geq 0$. Chứng minh*

$$\sqrt{1+x+\frac{7y^2}{9}}+\sqrt{1+y+\frac{7z^2}{9}}+\sqrt{1+z+\frac{7x^2}{9}}\geq 3.$$

Bài toán 4. *Cho các số thực x,y,z,t thoả mãn $\max(xy,yz,zt,tx)\leq 1$. Chứng minh*

$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}\geq 4.$$

Bài toán 2.18 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c,d có tích bằng 1 thì*

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)\geq (a+b+c+d)^2.$$

LỜI GIẢI. Do $abcd=1$ nên trong các số a,b,c,d tồn tại 2 số cùng không lớn hơn 1 hoặc cùng không nhỏ hơn 1. Giả sử 2 số đó là b và d.

Áp bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned}(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)&=(1+a^2+b^2+a^2b^2)(c^2+1+d^2+c^2d^2)\\&\geq (c+a+bd+1)^2.\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$c+a+bd+1\geq a+b+c+d\Leftrightarrow (b-1)(d-1)\geq 0.$$

Nhưng bất đẳng thức đúng theo giả thiết ở trên. Ta có *đpcm.* □

Nhận xét. Bất đẳng thức trên không phải quá khó, nhưng ta có thể làm mạnh thành những bất đẳng thức khó hơn rất nhiều sau đây

Bài toán. *Chứng minh rằng nếu các số dương a, b, c, d có tích bằng 1 thì*

(*i*). $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (a+b+c+d)^2 + 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}-4\right)$.

(*ii*). $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (a+b+c+d)^2 + 6(a+b+c+d-4)$.

Để chứng minh hai bất đẳng thức trên, bạn đọc xem thêm chương IV về phương pháp dồn biến và định lí S.M.V - một định lí rất hiệu quả với các bài toán 4 biến.

Bài toán 2.19 (APMO 2005). *Chứng minh rằng với các số dương a, b, c và $abc = 8$ ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

Lời giải. Dễ thấy rằng với $\forall x \geq 0$ thì $4(1+x^3) \leq (x^2+2)^2$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $x^2(x-2)^2 \geq 0$.

Sử dụng tính chất trên ta suy ra

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}$$
$$\geq \frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} + \frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)} + \frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}.$$

Đặt $x = \frac{a^2}{4}, y = \frac{b^2}{4}, z = \frac{c^2}{4}$, khi đó $xyz = 1$. Ta phải chứng minh

$$\frac{x}{(1+2x)(1+2y)} + \frac{y}{(1+2y)(1+2z)} + \frac{z}{(1+2z)(1+2x)} \geq \frac{1}{3}.$$

Thật vậy, sau khi quy đồng mẫu số, bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(xy+yz+zx) + x + y + z \geq 9.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $xyz = 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 2$. □

Bài toán 2.20. *Giả sử a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geq \frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Lời Giải. Giả sử $c = \min(a, b, c)$. Dễ thấy rằng

$$b^2 + c^2 \le \left(b + \frac{c}{2}\right)^2,$$
$$a^2 + c^2 \le \left(a + \frac{c}{2}\right)^2,$$
$$a^2 + b^2 \le \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
VT &\ge \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{c}{2}\right)^2} \\
&\ge \frac{6}{(a+b+c)^2} + \frac{1}{2(a+\frac{c}{2})(b+\frac{c}{2})} + \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2 + \left(b+\frac{c}{2}\right)^2} \\
&\ge \frac{10}{(a+b+c)^2}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị.

Bài toán 2.21 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng với các số thực không âm a, b, c, d tuỳ ý*

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{a^2+c^2+d^2} + \frac{c}{a^2+b^2+d^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{4}{a+b+c+d}.$$

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{a^2+c^2+d^2} + \frac{c}{a^2+b^2+d^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2}\right)(a+b+c+d) \\
&\ge \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+d^2}} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Phần còn lại ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2+b^2+d^2}} + \sqrt{\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}} \ge 2.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2} + 1\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2a^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{a,b,c,d} \sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} \ge \sum_{a,b,c,d} \frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = 2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 4 số a, b, c, d có 2 số bằng 0, 2 số còn lại bằng nhau. □

Nhận xét. Bài toán tổng quát được chứng minh hoàn toàn tương tự

Bài toán. *Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ và $\forall n \in N$ thì*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1^2 + .. + a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2 + ... + a_n^2} \geq \frac{4}{a_1 + a_2 + ... + a_n},$$

Bài toán 2.22 (Japan TST 2004). *Chứng minh với a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 1$ thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq \frac{2a}{b} + \frac{2b}{c} + \frac{2c}{a}.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$
$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\frac{ac}{b(b+c)} + \frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} = \frac{1}{abc}\left(\frac{a^2c^2}{b+c} + \frac{a^2b^2}{c+a} + \frac{b^2c^2}{a+b}\right)$$
$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài toán 2.23 (Berkeley Math. Circle). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thoả mãn $ab + bc + ca = 1$ ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

LỜI GIẢI. Đầu tiên ta sẽ chứng minh tính chất sau

Bổ đề. $a + b + c + 5/3abc \geq 2$ *với các số a, b, c thoả mãn điều kiện trên.*

Thật vậy, ta giả sử $c \geq b \geq a$. Thay $c = \dfrac{1-ab}{a+b}$, ta phải chứng minh

$$\frac{1-ab}{a+b}\left(1+\frac{5}{3}ab\right) \geq 2-a-b$$
$$\Leftrightarrow ab(2-5ab)+3(a+b-1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $ab \leq 1/3$.

Vào bài toán. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2(a+b)(b+c)+2(b+c)(c+a)+2(c+a)(a+b) \geq 5(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2+5abc+2 \geq 5(a+b+c).$$

Theo chứng minh trên ta có $5abc \geq 6-3(a+b+c)$, do đó

$$2(a+b+c)^2+5abc+2-5(a+b+c) \geq 2(a+b+c)^2+8-8(a+b+c)$$
$$= 2(a+b+c-2)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=c=1, a=0$ hoặc các hoán vị. □

Bài toán 2.24 (China TST 2004). *Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số thực dương với tích bằng 1 thì*

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Dễ thấy với x,y là 2 số thực dương tuỳ ý ta luôn có

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}.$$

Thật vậy, khai triển và biến đổi tương đương

$$(2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy) \geq (1+2x+x^2)(1+2y+y^2)$$
$$\Leftrightarrow 2+2(x+y)+x^2+y^2+2xy+2xy(x+y)+xy(x^2+y^2)$$
$$\geq 1+2y+y^2+2x+4xy+x^2+2xy(x+y)+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow 1+xy(x^2+y^2) \geq 2xy+x^2y^2$$
$$\Leftrightarrow (xy+1)(x-y)^2 \geq 0.$$

Đặt $m=ab, n=cd \Rightarrow mn=1$. Do đó

$$\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n} = \frac{m+n+2}{(m+1)(n+1)} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p = q = 0 \Leftrightarrow a = b = c$. □

Nhận xét. Bài toán tổng quát vẫn là một bài toán mở :

Bài toán. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{a+kb}{c+kb} + \frac{b+kc}{a+kc} + \frac{c+ka}{b+ka}$$

Với k là một hằng số dương, $k \geq 2$ và $a, b, c \geq 0$.

Bài toán 2.31 (Darij Grinberg). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c*

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c} + \frac{\sqrt{b+c}}{a} + \frac{\sqrt{c+a}}{b} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = \sqrt{b+c}, y = \sqrt{c+a}, z = \sqrt{a+b}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{x}{y^2+z^2-x^2} + \frac{y}{z^2+x^2-y^2} + \frac{z}{x^2+y^2-z^2} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}.$$

Nhận xét rằng nếu $x \geq y$ thì $x(y^2+z^2-x^2) \leq y(x^2+z^2-y^2)$. (Bất đẳng thức trên tương đương với $(x-y)(2xy+x^2+y^2-z^2) \geq 0$). Vậy theo bất đẳng thức *Chebyshev* ta có

$$\frac{x}{y^2+z^2-x^2} + \frac{y}{z^2+x^2-y^2} + \frac{z}{x^2+y^2-z^2}$$

$$\geq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}\left(\frac{1}{x(y^2+z^2-x^2)} + \frac{1}{y(x^2+z^2-y^2)} + \frac{1}{z(x^2+y^2-z^2)}\right).$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{1}{x(y^2+z^2-x^2)} + \frac{1}{y(x^2+z^2-y^2)} + \frac{1}{z(x^2+y^2-z^2)}$$

$$\geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(x^2+y^2-z^2)(y^2+z^2-x^2)(z^2+x^2-y^2)}} \geq \frac{3}{xyz}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. □

Bài toán 2.32 (IMO Shortlist 2001). *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2} + ... + \frac{a_n}{1+a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \leq \sqrt{n}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x_0 = 1, x_i = 1 + a_1^2 + .. + a_i^2\ \forall 1 \le i \le n \Rightarrow a_i = \sqrt{x_i - x_{i-1}}$.
Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\sqrt{x_1 - x_0}}{x_1} + \frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} \le \sqrt{n}.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1 - x_0}{x_1^2} + \frac{x_2 - x_1}{x_2^2} + \ldots + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^2} \le 1.$$

Nhưng dễ thấy $VT \le \frac{x_1 - x_0}{x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} + \ldots + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}x_n} \le 1 - \frac{1}{x_n} \le 1$. □

Bài toán 2.33 (Asian Pacific Math. 2004). *Giả sử a, b, c là các số dương tùy ý. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 9(ab + bc + ca).$$

LỜI GIẢI. Đặt $t = \frac{b+c}{2}$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ dễ thấy

$$(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 3 + 2bc + 2(b^2 + c^2) \ge 3 + 6t^2 \quad \text{và} \quad t^2 \ge bc.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2 + 2)(3 + 6t^2) \ge 9(2at + t^2).$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(a - t)^2 + 2(at - 1)^2 \ge 0$, hiển nhiên đúng.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 2.34 (Vasile Cirtoaje). *Chứng minh bất đẳng thức sau với a, b, c, d là các số thực dương*

$$\left(1 + \frac{2a}{b+c}\right)\left(1 + \frac{2b}{c+d}\right)\left(1 + \frac{2c}{d+a}\right)\left(1 + \frac{2d}{a+b}\right) \ge 9.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(1 + \frac{a+c}{a+b}\right)\left(1 + \frac{a+c}{c+d}\right)\left(1 + \frac{b+d}{b+c}\right)\left(1 + \frac{b+d}{a+d}\right) \ge 9.$$

Chú ý rằng với mọi số thực dương x, y thì

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \ge \left(1 + \frac{2}{x+y}\right)^2$$

Từ đó suy ra

$$\left(1+\frac{a+c}{a+b}\right)\left(1+\frac{a+c}{c+d}\right) \ge \left(1+\frac{2(a+c)}{a+b+c+d}\right)^2,$$
$$\left(1+\frac{b+d}{b+c}\right)\left(1+\frac{b+d}{a+d}\right) \ge \left(1+\frac{2(b+d)}{a+b+c+d}\right)^2.$$

Xét các biểu thức
$$x=\frac{a+c}{a+b+c+d}, y=\frac{b+d}{a+b+c+d}.$$
Ta phải chứng minh $(1+2x)(1+2y) \ge 3$ nếu $x+y=1$. Nhưng rõ ràng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=c=0, b=d$ hoặc $a=c, b=d=0$. □

Nhận xét. Bất đẳng thức tổng quát khi thay số 2 bởi k là

Bài toán. *Chứng minh rằng với mọi a,b,c,d,k không âm ta luôn có*

$$\left(1+\frac{ka}{b+c}\right)\left(1+\frac{kb}{c+d}\right)\left(1+\frac{kc}{d+a}\right)\left(1+\frac{kd}{a+b}\right) \ge (k+1)^2.$$

Thật bất ngờ vì bất đẳng thức trên được suy ra trực tiếp từ hai bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \ge 2,$$

$$\frac{ab}{(b+c)(c+d)}+\frac{bc}{(c+d)(d+a)}+\frac{cd}{(d+a)(a+b)}+$$
$$+\frac{da}{(a+b)(b+c)}+\frac{ac}{(b+c)(a+d)}+\frac{bd}{(c+d)(a+b)} \ge 1.$$

Bất đẳng thức đầu tiên thực ra là bất đẳng thức *Nesbitt* suy rộng cho 4 số đã được chứng minh trong chương trước, còn chứng minh bất đẳng thức sau ta sử dụng phương pháp nhóm và khai triển. Chú ý rằng bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}\right)\left(\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}\right)+\frac{ac}{(b+c)(d+a)}+\frac{bd}{(c+d)(a+b)} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2+c^2+ad+bc)(b^2+d^2+ab+cd)+ac(a+b)(c+d)+bd(b+c)(a+d)$$
$$\ge (a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2b^2+\sum_{cyc} a^3b+\sum_{cyc} abc^2 \ge \sum_{cyc} a^2bc.$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$\sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} abc^2 \geq 2\sum_{cyc} a^2bc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = c, b = d = 0$ hoặc $a = c = 0, b = d$.

Bài toán 2.35 (Phạm Kim Hùng). *Cho k là một số thực dương. Các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $a + b + c + d = ab + bc + cd + da$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{c} + \sqrt[k]{d} \geq \min\left(2\sqrt[k]{2}, 4\right).$$

Lời Giải. Theo bất đẳng thức $AM - GM$, dễ thấy

$$(a+b+c+d)^2 \geq 4(a+c)(b+d) = 4(a+b+c+d) \Rightarrow a+b+c+d \geq 4.$$

Vì vậy nếu $k \leq 1$ thì $\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b} + \sqrt[k]{c} + \sqrt[k]{d} \geq a+b+c+d = 4$.

Xét trường hợp $k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh bài toán tương đương là

Bổ đề. *Nếu x, y, z, t là các số thực không âm thoả mãn $x + y + z + t = 2$ thì*

$$x^k + y^k + z^k + t^k \geq 2(x^ky^k + y^kz^k + z^kt^k + t^kx^k).$$

Thật vậy, chuyển bất đẳng thức về dạng

$$(2x^k + 2z^k - 1)(2y^k + 2t^k - 1) \leq 1.$$

Rõ ràng ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp 2 thừa số trên cùng dấu. Nếu chúng cùng âm thì bài toán được hoàn thành vì hiển nhiên

$$(1 - 2x^k - 2z^k)(1 - 2y^k - 2t^k) \leq 1.$$

Vậy ta chỉ cần xét trường hợp cả 2 thừa số đều không âm. Vì $x + y + z + t \leq 2$ nên theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $(x+z)(y+t) \leq 1$, do đó

$$(x+z)^k + (y+t)^k \geq 2\left[\,(x+z)(y+t)\,\right]^{k/2} \geq 2(x+z)^k(y+z)^k$$

$$\begin{aligned}(2x^k + 2z^k - 1)(2y^k + 2t^k - 1) &\leq \left(2(x+z)^k - 1\right)\left(2(y+t)^k - 1\right)\\ &\leq 1 + 4(x+z)^k(y+t)^k - 2(x+z)^k - 2(y+t)^k \leq 1.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong.

Nếu $k \geq 1$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c, d) = (2, 0, 0, 2)$ hoặc $(2, 0, 2, 0)$ hoặc các hoán vị. Nếu $k \leq 1$ thì đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$. □

Nhận xét. Bất đẳng thức vẫn hoàn toàn đúng khi $k \leq 0$ và do đó nó luôn đúng với mọi $k \in R$. Bạn đọc hãy tự kiểm chứng kết quả này.

Bài toán 2.36 (Gabriel Dospinescu). *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ và $a + b + c \geq 2 + \max(a, b, c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\sqrt{4 - a^2} + \sqrt{4 - b^2} + \sqrt{4 - c^2}.$$

LỜI GIẢI. Đây là một phương pháp rất hay ứng dụng hình học.

Giả sử E là biểu thức của bài toán. Ta có công thức

$$\sqrt{3}E = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} + \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2} + \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Từ giả thiết suy ra tồn tại một tam giác với 3 cạnh a, b, c. Gọi m_a, m_b, m_c là 3 đường trung tuyến của nó. Theo một kết quả cổ điển trong hình học thì m_a, m_b, m_c cũng là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Vì $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 9/2$ nên

$$\begin{aligned}
2(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) &\geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \\
\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 &\geq 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 9 \\
\Rightarrow \sqrt{3}E = 2(m_a + m_b + m_c) &\geq 6 \\
\Rightarrow E &\geq 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của E là $2\sqrt{3}$, đạt được khi $a = 2, b = c = 1$ hoặc các hoán vị. □

Bài toán 2.37 (Phạm Kim Hùng, Vasile Cirtoaje). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương và với mọi số thực $k \geq \frac{3}{2}$ ta có*

$$\frac{a^k}{a+b} + \frac{b^k}{b+c} + \frac{c^k}{c+a} \geq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{2}.$$

LỜI GIẢI. Ta có 2 cách chứng minh cho bất đẳng thức trên.

Cách 1. Biến đổi bất đẳng thức thành

$$\begin{aligned}
a^{k-1} - \frac{a^k}{a+b} + b^{k-1} - \frac{b^k}{b+c} + c^{k-1} - \frac{c^k}{c+a} &\leq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{a^{k-1}b}{a+b} + \frac{b^{k-1}c}{b+c} + \frac{c^{k-1}a}{c+a} &\leq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, b + c \geq 2\sqrt{bc}, c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Thay vào bất đẳng thức trên, ta phải chứng minh

$$a^{k-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b^{k-\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{k-\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}} \leq a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}.$$

Bất đẳng thức này được suy trực tiếp từ bất đẳng thức $AM-GM$

$$(2k-3)a^{k-1}+b^{k-1}\ge(2k-2)a^{k-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}.$$

(Tương tự ta có 2 bất đẳng thức với a,b,c rồi cộng lại).

Cách 2. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^{k-1}(a-b)}{a+b}+\frac{b^{k-1}(b-c)}{b+c}+\frac{c^{k-1}(c-a)}{c+a}\ge 0.$$

Sử dụng bất đẳng thức sau với a,b,c ta có ngay kết quả bài toán

$$\frac{a^{k-1}(a-b)}{a+b}\ge\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{2(k-1)}.$$

Dễ thấy bất đẳng thức trên được suy trực tiếp theo $AM-GM$

$$(2k-3)a^k+b^k+ab^{k-1}\ge(2k-1)a^{k-1}b.$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ☐

Bài toán 2.38 (Moldova TST 2005). *Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số thực dương và $a^4+b^4+c^4=3$ thì*

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1.$$

Lời Giải. Quy đồng mẫu số rồi khai triển ta được

$$48-8\sum_{sym}ab+abc\sum_{sym}a\le 64-16\sum_{sym}ab+4abc\sum_{sym}a-a^2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow 16+3abc(a+b+c)\ge a^2b^2c^2+8(ab+bc+ca)\quad (*)$$

Theo bất đẳng thức $Schur$ ta có

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)(a+b+c)\ge(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a))(a+b+c).$$

Khai triển rồi rút gọn cho ta

$$3+3abc(a+b+c)\ge(ab+ac)^2+(ac+bc)^2+(bc+ab)^2.$$

(Sử dụng $a^4+b^4+c^4=3$). Theo bất đẳng thức $AM-GM$ dễ thấy

$$(ab+ac)^2+(ac+bc)^2+(bc+ab)^2+12\ge 8(ab+bc+ca).$$

Vậy $15+abc(a+b+c)\ge 8(ab+bc+ca)$. Chú ý thêm rằng $1\ge a^2b^2c^2$, ta dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ☐

Nếu $a \le \frac{5}{3}$ ta có ngay điều phải chứng minh. Trường hợp ngược lại, ta có

$$2(a-1)^2 + \frac{a+1}{a-1} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{2}} \ge 4.$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức không xảy ra. ❑

Bài toán 2.40 (USA MO 2001). *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thoả mãn đẳng thức*

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$$

Chứng minh rằng $abc + 2 \ge ab + bc + ca \ge abc$.

LỜI GIẢI. Để chứng minh bất đẳng thức bên phải, chỉ cần chú ý rằng có ít nhất 1 trong ba số a, b, c không lớn hơn 1. Do đó $ab + bc + ca \ge abc$. Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c = 2, 0, 0)$ hoặc các hoán vị.

Chứng minh bất đẳng thức vế trái có nhiều cách khác nhau, trong đó cách quen thuộc nhất là sử dụng phương pháp lượng giác. Lời giải thuần tuý đại số sau đây là một lời giải rất đẹp mắt.

Trong 3 số a, b, c tồn tại 2 số hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Giả sử 2 số đó là a, c thì

$$(a-1)(c-1) \ge 0 \Leftrightarrow ac + 1 \ge a + c \Leftrightarrow abc + b \ge ab + bc.$$

Phần còn lại của bài toán, ta chỉ cần chứng minh $2 \ge ac + b$. Theo giả thiết thì

$$a^2 + c^2 + b(ac + b) = 4 \Rightarrow 2ac + b(ac + b) \le 4 \Rightarrow (b+2)(ac + b - 2) \le 0,$$

Do đó ta phải có $ac + b \le 2$, bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ❑

Bài toán 2.41 (Phạm Kim Hùng). *Tìm hằng số dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} + \frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \ge 8 + k,$$

ở đây a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

LỜI GIẢI. Ta sử dụng các biến đổi sau

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - 8 = \frac{c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2}{abc},$$

$$1 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Vậy ta phải tìm k thoả mãn bất đẳng thức

$$\sum_{sym}(a-b)^2\left(\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab}-k\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(a-b)^2 S_c \geq 0 \quad (*)$$

Trong đó các hệ số S_a, S_b, S_c được xác định bởi

$$S_a = 2a(a^2+b^2+c^2) - kabc,$$
$$S_b = 2b(a^2+b^2+c^2) - kabc,$$
$$S_c = 2c(a^2+b^2+c^2) - kabc.$$

(i). *Điều kiện cần :*

Lấy $b=c$, ta có $S_b = S_c$. Để $(*)$ đúng thì phải có

$$S_b \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2+2b^2) \geq kab.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta tìm được ngay giá trị tốt nhất của k là $4\sqrt{2}$.

(ii). *Điều kiện đủ :*

Với $k \leq 4\sqrt{2}$, ta chứng minh bất đẳng thức của đề bài luôn đúng. Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq S_b \geq S_c$.

$$S_a = 2a(a^2+b^2+c^2) - kabc \geq 0 \quad \text{là hiển nhiên.}$$

$$S_b + S_c = 2(b+c)(a^2+b^2+c^2) - 2kabc \geq 4x(a^2+2x^2) - 2kax^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo sự xác định của số k, ở đây $x=\sqrt{bc}$.

Kết luận : Bất đẳng thức đúng với mọi $a,b,c \geq 0$ khi và chỉ khi $k \leq 4\sqrt{2}$.

Nếu $k = 4\sqrt{2}$ thì đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$. Ngoài giá trị đó chỉ có một trường hợp xảy ra đẳng thức là $a=b=c$. ❑

Bài toán 2.42 (Titu Andresscu, Gabriel Dospinescu). *Giả sử a,b,c,d là các số thực thoả mãn điều kiện $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)=16$, chứng minh bất đẳng thức sau đây*

$$-3 \leq ab+bc+ca+da+ac+bd-abcd \leq 5.$$

LỜI GIẢI. Đặt $S = ab+bc+cd+da+ac+bd-abcd$.
Ta có $\qquad S-1 = (1-ab)(cd-1)+(a+b)(c+d)$.
Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$\begin{aligned}(S-1)^2 &\leq \left((1-ab)^2+(a+b)^2\right)\left((1-cd)^2+(c+d)^2\right)\\ &= (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16.\end{aligned}$$

Như vậy $-3 \le S \le 5$. Đẳng thức có thể xảy ra, chẳng hạn với các bộ số $(a,b,c,d) = (1,-1,1,-1)$ và $(1,1,1,1)$. ❑

Bài toán 2.43 (Phạm Kim Hùng). *Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng là 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$P = a(1+b^2+c^2)+b(1+a^2+c^2)+c(1+a^2+b^2)$$
$$\left(\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2}\right)P \ge (a+b+c)^2.$$

Xét biểu thức

$$S_{a,b,c} = ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$

Ta sẽ chứng minh $S_{a,b,c} \le \frac{1}{4}$. Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử $c \ge b \ge a$.
Xét biểu thức

$$\begin{aligned} S_{a,b,c} - S_{a+b,c,0} &= a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-(a+b)^2c-c^2(a+b) \\ &= ab(a+b-2c) \le 0. \end{aligned}$$

Mặt khác $S_{a+b,c,0} = (a+b)c(a+b+c) = (a+b)c \le \frac{1}{4}(a+b+c)^2 = \frac{1}{4}$,
Như vậy $P = a+b+c+S_{a,b,c} \le \frac{5}{4}$. Suy ra

$$\frac{a}{1+b^2+c^2}+\frac{b}{1+a^2+c^2}+\frac{c}{1+a^2+b^2} \ge \frac{4}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c = \frac{1}{2}, a = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán 2.44 (Cezar Lupu). *Giả sử a,b,c là các số thực dương thoả mãn*

$$a+b+c \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},$$

Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \ge \frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\leq\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3abc+ab+bc+ca\geq 3+a+b+c.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên chỉ là tổng tương ứng của các bất đẳng thức sau đây

$$abc\geq 1\quad (1)\qquad ab+bc+ca\geq a+b+c\quad (2)$$

Chứng minh (1) : Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$a+b+c=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\left(2\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)+\frac{1}{3}\left(2\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{3}\left(2\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Chứng minh (2) : Sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$a+b+c\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\Rightarrow (2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ❑

Bài toán 2.45. *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c*

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq 1.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh với mọi $a,b,c\geq 0$ thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\geq\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\qquad (*)$$

Khi đó, với bất đẳng thức trên cộng thêm 2 bất đẳng thức tương tự của b,c ta có điều phải chứng minh.

$$(*)\Leftrightarrow\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}\geq\frac{a^4}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$
$$\Leftrightarrow a^3\left(a^4+2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2)\right)\geq a^7+a^4(b+c)^3$$
$$\Leftrightarrow 2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2\geq a(b+c)^3.$$

Theo bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta có

$$2(b^2+c^2)\geq(b+c)^2\Rightarrow 8(b^2+c^2)^3\geq(b+c)^6.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2\geq 2\sqrt{2a^2(b^2+c^2)^3}\geq a(b+c)^3.$$

Vậy $(*)$ được chứng minh và do đó bài toán được chứng minh xong. ❑

Bài toán 2.46 (Phan Thành Nam, Lê Hồng Quý). *Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c và $ab + bc + ca \geq 3$*

$$(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k) \geq (k + 1)^3.$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng bất đẳng thức không thể đúng với $k < 0$ vì khi đó ta chỉ cần chọn $c = 0$ còn a và b đủ lớn. Ta chỉ cần xét trong trường hợp $k \geq 0$.

Trước hết ta chứng minh rằng nếu bất đẳng thức đúng với $k \geq 0$ nào đó thì nó cũng đúng với mọi $k' \geq k$ vì

$$\begin{aligned}(a^2 + k')(b^2 + k')(c^2 + k') &= \left(a^2 + k + (k' - k)\right)\left(b^2 + k + (k' - k)\right)\left(c^2 + k + (k' - k)\right) \\ &\geq \left(\sqrt[3]{(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k)} + k' - k\right)^3 \geq (1 + k')^3.\end{aligned}$$

Sử dụng đẳng thức sau

$$(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k) = (k(a + b + c) - abc))^2 + k(ab + bc + ca - k)^2,$$

Nếu $k = 1/3$ thì

$$(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k) \geq k(ab + bc + ca - k)^2 \geq k(3 - k)^2 = (k + 1)^3.$$

Do đó bất đẳng thức đúng với mọi $k \geq 1/3$.

Còn nếu $1/3 < k$, chọn a, b, c thoả mãn hệ điều kiện

$$ab + bc + ca = 3\ ,\ k(a + b + c) - abc = 0.$$

Ta lấy $a = 1, b + c = 3 - \frac{4k}{k+1}, bc = \frac{4k}{k+1}$, khi đó

$$\begin{aligned}(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k) &= (k(a + b + c) - abc)^2 + k(ab + bc + ca - k)^2 \\ &= 0 + k(3 - k)^2 = k(3 - k)^2 = (1 + k)^3 - (3k - 1)^2 < (k + 1)^3.\end{aligned}$$

Và do đó, cũng tương tự như trên ta suy ra bất đẳng thức không thể đúng nếu $k \leq 1/3$. $k \geq 1/3$ là tất cả các số cần tìm. ❑

Nhận xét. Đây là một bài có dạng khá gần với bài toán 2.33 (APMO 2004). Bài toán này còn các dạng mở rộng sau đây, các bạn hãy tự chứng minh

Bài toán 1. *Tìm tất cả các số thực k để bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi số thực a, b, c và $a + b + c \geq 3$*

$$(a^2 + k)(b^2 + k)(c^2 + k) \geq (k + 1)^3.$$

Bài toán 2. *Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số $C_k > 0$ sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực a, b, c tuỳ ý*

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq C_k(ab + bc + ca)^k.$$

Bài toán 3. *Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số $C_k > 0$ sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực a, b, c tuỳ ý*

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq C_k(a+b+c)^k.$$

Bài toán 2.47 (Cezar Lupu). *Các số thực dương a, b, c thoả mãn $a+b+c+abc = 4$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

Lời Giải. Ta sử dụng bổ đề sau đây, đã từng là đề thi Việt Nam MO 96.

Bổ đề. *Nếu $a+b+c+abc = 4$ và $a, b, c \geq 0$ thì $a+b+c \geq ab+bc+ca$.*

Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử $c \geq b \geq a$. Ta phải chứng minh

$$a+b-ab \geq \frac{4-a-b}{ab+1}(a+b-1)$$
$$\Leftrightarrow (a+b-2)^2 \geq ab(a-1)(b-1).$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có ngay điều phải chứng minh

$$(a+b-2)^2 \geq 4|(a-1)(b-1)| \geq ab|(a-1)(b-1)|.$$

Từ bổ đề trên, ta suy ra kết quả bài toán như sau :

Theo bất đẳng thức $Cauchy - Schwarz$ thì

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{c\sqrt{a+b}+a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}},$$
$$c\sqrt{a+b}+a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a} \leq \sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Do đó

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq (a+b+c)\sqrt{\frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ❑

Bài toán 2.48 (Phan Thành Nam). *Cho $x, y, z \geq 0$ và $x+y+z = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{12}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \leq \sqrt{3}.$$

LỜI GIẢI. Trước hết ta sẽ chứng minh với $u = y - z, v = x - z, k = 1/12$ thì

$$\sqrt{x + ku^2} + \sqrt{y + kv^2} \le \sqrt{2(x + y) + k(u + v)^2}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$2\sqrt{(x + ku^2)(y + kv^2)} \le x + y + 2kuv$$
$$\Leftrightarrow 4(x + ku^2)(y + kv^2) \le (x + y)^2 + 4k^2u^2v^2 + 4kuv(x + y)$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + 4xkv(u - v) + 4yku(v - u) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + 4k(u - v)(xv - yu) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 (1 - 4k(x + y - z)) \ge 0 \text{ (đúng).}$$

Từ bất đẳng thức trên suy ra

$$\begin{aligned} VT &\le \sqrt{2(x + y) + \frac{(x + y - 2z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x - y)^2}{12}} \\ &= \sqrt{2(1 - z) + \frac{(1 - 3z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x - y)^2}{12}} \\ &\le \sqrt{2(1 - z) + \frac{(1 - 3z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(1 - 3z)^2}{12}} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy chỉ khi $x = y = z = 1/3$. ❑

Nhận xét. Theo kết quả mở rộng của bạn Phan Thành Việt, hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi x, y, z không âm có tổng bằng 1

$$\sqrt{x + k(y - z)^2} + \sqrt{y + k(z - x)^2} + \sqrt{z + k(x - y)^2} \le \sqrt{3},$$

là $k_{max} = 1 - \sqrt{3}/2$. Chứng minh khẳng định này bằng phương pháp dồn biến.

Ngoài ra ta cũng có thêm một bất đẳng thức rất thú vị khác với cùng giả thiết trên

$$\sqrt{x + (y - z)^2} + \sqrt{y + (z - x)^2} + \sqrt{z + (x - y)^2} \ge \sqrt{3}.$$

Bài toán 2.49. *Giả sử a, b, c không âm thoả mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a + b + c + kabc$ với k là một hằng số dương cho trước.*

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh kết quả sau.

$$a + b + c + kabc \ge \min\left(3 + k, 2\sqrt{3}\right).$$

Thật vậy, đặt $a' = a/\sqrt{3}, b' = b/\sqrt{3}, c' = c/\sqrt{3}$ ta có $a'b' + b'c' + c'a' = 1$.

Trong bổ đề bài toán 2.23 ta đã chứng minh $a' + b' + c' + 5/3a'b'c' \geq 2$.
Do đó $a + b + c + 5/9abc \geq 2\sqrt{3}$. Vậy với mọi $k \geq 5/9$ thì

$$a + b + c + kabc \geq a + b + c + 5/9abc \geq 2\sqrt{3}.$$

Xét trường hợp còn lại, ta xét tổng quát với $k \leq 1$. Giả sử $a \geq b \geq c$.

Với t là số thực dương thoả mãn $2tc + t^2 = 3 = ab + bc + ca$. Ta sẽ chứng minh $S = S(a, b, c) \geq S(t, t, c)$, hay tương đương với

$$a + b - 2t \geq kc(t^2 - ab) \quad (*)$$

Theo cách xác định số t ta có

$$t^2 - ab = c(a + b - 2t),$$
$$(t + c)^2 = (a + c)(b + c) \leq \frac{(a + b + 2c)^2}{4}$$

suy ra $2t + 2c \leq a + b + 2c \Rightarrow a + b \geq 2t$.

$$(*) \Leftrightarrow a + b - 2t \geq kc^2(a + b - 2t),$$

Hiển nhiên đúng vì $kc^2 \leq 1$ $(k, c \leq 1)$ và $a + b - 2t \geq 0$. Mặt khác, xét

$$S(t, t, c) = 2t + c + kct^2 = 2t + \frac{3 - t^2}{2t} + kt\frac{3 - t^2}{2}$$
$$\Rightarrow 2S(t, t, c) = f(t) = 3t + \frac{3}{t} + kt(3 - t^2),$$
$$f'(t) = 3 - \frac{3}{t^2} + kt(3 - 3t^2) = 3(1 - t^2)\frac{1 - kt^2}{t^2}$$
$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 1/\sqrt{k}.$$

Chú ý rằng ta có thêm điều kiện $t^2 \leq 3$ nên

$$f(t) \geq \min\left(f(1), f(1/\sqrt{k}), f(\sqrt{3})\right) = \min\left(3 + k, 2\sqrt{3}\right).$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Cho một số trường hợp đặc biệt ta có các bất đẳng thức sau đây, đã xuất hiện trong 1 số kì thi

- Nếu $xy + yz + zx = 1$ thì $\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)} + 2xyz \geq 2$.
- Nếu $ab + bc + ca = 3$ thì $3(a + b + c) + abc \geq 10$.

Bài toán 2.50 (Lê Trung Kiên). *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh*

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

LỜI GIẢI. Giả sử $x = \max(x, y, z)$ và đặt $a = y + z > 0$.
Hiển nhiên $ax = 1 - z \leq 1$. Xét hàm số sau

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{\frac{2x+y+z+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{2x+a+2\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$f'(x) = \frac{yz - x^2 - x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x^2+1)^3(2x+a+2\sqrt{x^2+1})}} \leq 0,$$

nên $f(x)$ nghịch biến. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(\frac{1}{a}) &= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{a}{a^2+1}} \\ &= (\sqrt{a}-1)^2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{2\sqrt{a(a^2+1)} + \sqrt{2}(a^2+1)}\right) + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{2\sqrt{a(a^2+1)} + \sqrt{2}(a^2+1)} > 0.$$

Nên dễ thấy $f(x) \geq f(\frac{1}{a}) \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1, z = 0$ hoặc các hoán vị. ☐

Bài toán 2.51 (Phạm Kim Hùng). *Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bình phương bằng 3. Chứng minh*

$$\frac{1}{3-ab} + \frac{1}{3-bc} + \frac{1}{3-ca} + \frac{1}{3-a^2} + \frac{1}{3-b^2} + \frac{1}{3-c^2} \geq 3.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{3}{3-ab} - 1\right) + \left(\frac{3}{3-bc} - 1\right) + \left(\frac{3}{3-ca} - 1\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{3-a^2}-1\right)+\left(\frac{1}{3-b^2}-1\right)+\left(\frac{1}{3-c^2}-1\right)\geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{3-ab}+\frac{bc}{3-bc}+\frac{ca}{3-ca}+\frac{a^2}{3-a^2}+\frac{b^2}{3-b^2}+\frac{c^2}{3-c^2}\geq 3 \quad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dễ thấy

$$VT^{(*)}\geq \frac{(ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^4+b^4+c^4)}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}
&(ab+bc+ca+3)^2\geq 3\big(3(ab+bc+ca+3)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^4+b^4+c^4)\big)\\
&\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2+6(ab+bc+ca)+9\geq 9(ab+bc+ca)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\
&\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\\
&\Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)(a-b)^2+(b^2+c^2-a^2)(b-c)^2+(c^2+a^2-b^2)(c-a)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo định lí $S.O.S$, có thể chứng minh đơn giản điều này như sau. Giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó $(a-c)^2\geq (a-b)^2+(b-c)^2$, vậy

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2-c^2)(a-b)^2+(b^2+c^2-a^2)(b-c)^2+(c^2+a^2-b^2)(c-a)^2\\
&\geq (a^2+b^2-c^2)(a-b)^2+(b^2+c^2-a^2)(b-c)^2+\\
&\quad +(c^2+a^2-b^2)\big((a-b)^2+(b-c)^2\big)\\
&\geq 2a^2(a-b)^2+2c^2(b-c)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\sqrt{3/2}, c=0$ hoặc các hoán vị. ☐

Bài toán 2.52. *Giả sử a,b,c là các số thực dương và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\geq 3.$$

Lời Giải. Nếu tất cả các số hạng ở vế trái đều lớn hơn 1 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Trong trường hợp ngược lại, ta có thể giả sử rằng

$$x=\frac{a}{a^3+bc}\leq 1\Rightarrow a\geq a^3+bc.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dễ thấy

$$\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\geq \frac{4}{b^2+c^2+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}}=\frac{4}{1+y},$$

Trong đó $y = \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a^2$. Ta sẽ chứng minh $x \geq y$, thật vậy

$$\frac{a}{a^3+bc} \geq \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} - a^2 \Leftrightarrow (a^3+bc)\left(\frac{b^2+c^2}{bc} - a\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (a^3+bc)(1-a^2-abc) \leq bc \Leftrightarrow a^3(1-a^2-abc) \leq bc(a^2+abc)$$

$$\Leftrightarrow a^2(1-a^2) \leq bc(a^3+a+bc).$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $a(1-a^2) \leq bc$. Do đó

$$\frac{a}{a^3+bc} + \frac{b}{b^3+ac} + \frac{c}{c^3+ab} \geq x + \frac{4}{1+x} = (x+1) + \frac{4}{x+1} - 1 \geq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1, b = c = 0$ hoặc các hoán vị. ☐

Nhận xét. Lời giải được trình bày ở trên là một lời giải khá lạ mắt, nhưng bài toán cũng có thể được chứng minh tự nhiên hơn bằng phương pháp khai triển. Thật vậy, đặt $x = \dfrac{bc}{a}, y = \dfrac{ac}{b}, z = \dfrac{ab}{c}$. Ta phải chứng minh nếu $xy + yz + zx = 1$ thì

$$\frac{1}{x+yz} + \frac{1}{y+xz} + \frac{1}{z+xy} \geq 3.$$

Rõ ràng bất đẳng thức hiển nhiên đúng trong trường hợp $x + y + z \leq 2$. Trong trường hợp $x + y + z \geq 2$, khai triển hai vế bất đẳng thức trở thành

$$(x+y+z) + 7xyz(x+y+z) \geq 3x^2y^2z^2 + 2 + 3xyz(x+y+z)^2.$$

Vì $x+y+z \geq 2$ nên $(x+y+z-2)\left((xy+yz+zx)^2 - 3xyz(x+y+z)\right) \geq 0$, suy ra

$$(x+y+z) + 6xyz(x+y+z) \geq 2 + 3xyz(x+y+z)^2.$$

Mặt khác, dễ thấy rằng $xyz(x+y+z) \geq 3x^2y^2z^2$, nên ta có *đpcm.*

Bài toán 2.53 (Phan Thành Nam, VMEO 2005). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c*

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc}}.$$

Lời Giải. Đặt $x = \frac{\sqrt{2bc}}{\sqrt{a(a+b)}}, y = \frac{\sqrt{2ca}}{\sqrt{b(b+c)}}, z = \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{c(c+a)}}$.
Ta phải chứng minh $x + y + z \geq 3$.
Nhưng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$3 \leq xy + yz + zx = \frac{2c}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{2a}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} + \frac{2b}{\sqrt{(c+a)(a+b)}}.$$

Đặt $u = \sqrt{b+c}$, $v = \sqrt{c+a}$, $w = \sqrt{a+b}$, khi đó

$$yz = \frac{w^2+v^2-u^2}{uv}, \quad zx = \frac{u^2+w^2-v^2}{vw}, \quad xy = \frac{v^2+u^2-w^2}{wu}.$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$v(v^2+u^2-w^2)+w(w^2+v^2-u^2)+u(u^2+w^2-v^2) \geq 3uvw$$
$$\Leftrightarrow (u^3+v^3+w^3)+(u^2v+v^2w+w^2u) \geq (v^2u+w^2v+u^2w)+3uvw.$$

Tuy nhiên, dễ thấy bất đẳng thức cuối cùng đúng, vì

$$u^3+v^3+w^3+u^2v+v^2w+w^2u \geq 2(v^2u+w^2v+u^2w),$$
$$v^2u+w^2v+u^2w \geq 3uvw.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài toán 2.54 (Phạm Kim Hùng).. *Chứng minh rằng với mọi số a, b, c, d không âm ta luôn có*

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd \geq 2(a-b)(b-c)(c-d)(d-a).$$

Và nếu a, b, c, d thoả mãn điều kiện $(a-b)(c-d) \leq 0$ thì ta có kết quả mạnh hơn là

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd \geq 17(a-b)(b-c)(c-d)(d-a).$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $d = \min(a,b,c,d)$. Từ chứng minh sau đây trong trường hợp $(a-b)(c-d) \leq 0$, bạn đọc hãy chứng minh cả bài toán theo cách tương tự. Xét trường hợp $d = 0$, ta có $b \geq a$.

$$a^4+b^4+c^4 \geq 17ac(b-a)(b-c).$$

Nếu $(b-a)(b-c) \leq 0$ thì bài toán được chứng minh.
Nếu không, $b \geq a, c$. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$ac(b-a)(b-c) \leq ac(b-t)^2 \leq t^2(b-t)^2,$$

Trong đó $t = (a+c)/2 \leq b$. Ngoài ra $a^4+c^4 \geq 2t^4$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$2t^4+b^4 \geq 17t^2(b-t)^2.$$

Đặt $x = b/t - 1 \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&2+(x+1)^4 \geq 17x^2\\
&\Leftrightarrow x^4+4x^3-11x^2+4x+3 \geq 0\\
&\Leftrightarrow x^4+(x-1)(4x^2-7x-3) \geq 0\\
&\Leftrightarrow 1+y(1-y)(4-7y-3y^2) \geq 0 \quad (y = 1/x)\\
&\Leftrightarrow 1 \geq y(1-y)(3y^2+7y-4).
\end{aligned}$$

Chú ý rằng nếu $y \geq 1$ ta có điều phải chứng minh. Xét $y \leq 1$.

+, Nếu $3y^2 + 7y \leq 8$ thì $VP \leq 4y(1-y) \leq 1$.

+, Nếu $3y^2 + 7y \geq 8$ thì $y \geq 0.8$, do đó

$y(1-y) \leq 0.8(1-0.8) \leq 1/6 \Rightarrow y(1-y)(3y^2+7y-4) \leq 1/6(3y^2+7y-4) \leq 1$.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong trong trường hợp $d = 0$.
Xét khi $a, b, c, d > 0, d = \min(a, b, c, d)$. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned}
VT &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = (a^2-c^2)^2 + (b^2-d^2)^2 + 2(ac-bd)^2 \\
&= (a-c)^2(a+c)^2 + (b-d)^2(b+d)^2 + \frac{1}{2}\left[\,(a-b)(c+d) + (a+b)(c-d)\,\right]^2 \\
&= (a-c)^2(a+c)^2 + (b-d)^2(b+d)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2(c+d)^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{2}(c-d)^2(a+b)^2 + (a^2-b^2)(c^2-d^2) \\
&= \frac{1}{2}(a-c)^2(a+c)^2 + \frac{1}{2}(b-d)^2(b+d)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2(c+d)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}(c-d)^2(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-d)^2(a+d)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2(b+c)^2.
\end{aligned}$$

Từ khai triển trên ta suy ra nếu thay (a, b, c, d) bởi $(a-d, b-d, c-d, 0)$ thì vế trái sẽ giảm đi còn vế phải không thay đổi. Vậy bài toán chỉ phải chứng minh trong trường hợp $d = 0$ như đã nói ở trên. Do đó việc chứng minh đã hoàn tất. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c = d$. ☐

Bài toán 2.55 (Phạm Kim Hùng). *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2) \leq 13 + abc.$$

LỜI GIẢI. **Bổ đề.** *Với $a \geq b \geq c$ thì*

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2) \geq (a^2+b)(b^2+c)(c^2+a).$$

Thật vậy, ta sử dụng 2 đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
a^3b + b^3c + c^3a - (ab^3 + bc^3 + ca^3) &= (a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c), \\
a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 - (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) &= (ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a).
\end{aligned}$$

Vì $a + b + c = 3$ nên ta có

$$\begin{aligned}
a+b+c-(ab+bc+ca) &= \frac{(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)}{3} \\
&= \frac{1}{6}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$a^3b+b^3c+c^3a-(ab^3+bc^3+ca^3)\ge a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3-(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)$$
$$\Rightarrow (a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\ge (a^2+b)(b^2+c)(c^2+a)\quad \text{(đpcm!)}.$$

Từ nhận xét trên, ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $a\ge b\ge c$. Gọi $f(a,b,c)$ là biểu thức vế trái của bất đẳng thức, ta có

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)-abc.\\
&= a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2,\\
f(a,b,c)-f(a+c,b,0) &= a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^3+b^2c^3+\\
&+c^2a^3+a^2b^2c^2-(a+c)^3b-(a+c)^2b^3\\
&= b^3c+c^3a+b^2c^3+c^2a^3+a^2b^2c^2-\\
&-3a^2bc-3ac^2b-2acb^3-c^2b^3.
\end{aligned}$$

Do $a\ge b\ge c$ nên $b^3c\le acb^3, c^3a\le ac^2b, b^2c^3\le c^2b^3$.

Vì thế để chứng minh $f(a,b,c)\ge f(a+c,b,0)$ ta chỉ cần chứng minh tiếp

$$c^2a^3+a^2b^2c^2\le 3a^2bc.$$

Nhưng điều này hiển nhiên đúng vì dễ thấy

$$3a^2bc-c^2a^3-a^2b^2c^2\ge bca^2(3-a-bc)=bca^2(b+c-bc)\ge 0.$$

Vậy $$f(a,b,c)\le f(a+c,b,0)=(a+c)^2b(a+c+b^2).$$

Công việc còn lại của chúng ta là chứng minh bất đẳng thức 2 biến

$$x^2y(x+y^2)\le 13\quad \forall x,y\ge 0, x+y=3.$$

Thay vế trái bằng biểu thức của x, ta có

$$f(x)=(9+x^2-5x)(3x^2-x^3)\le \frac{1}{4}(-x^3+4x^2-5x+9)^2$$
$$-x^3+4x^2-5x+9=(x-1)^2(2-x)+7\le 7+\frac{4}{27}.$$

Từ đó suy ra $f(x)\le 13$, *đpcm.* □

Nhận xét. Hằng số k tốt nhất trong bất đẳng thức

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\le k+abc,\ \forall a,b,c\ge 0, a+b+c=3$$

Là $$\max f(x)=(9+x^2-5x)(3x^2-x^3), x\in[1,3].$$

Cũng bằng cách chứng minh tương tự ta suy ra 2 bất đẳng sau vẫn đúng (chỉ một vài bước cần thêm đánh giá mạnh hơn)

- $(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2) \le 13 + abc(1-2abc)$.
- $(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2) \le 13$.

Bài toán 2.56. *Chứng minh với mọi a, b, c dương thì*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \ge \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2}}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ rồi bình phương 2 vế

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+x^2}} \ge \frac{x+y+z}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2x^4}{x^2+y^2} + \sum_{cyc} \frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}} \ge (x+y+z)^2.$$

Lưu ý rằng

$$\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4-z^4}{y^2+z^2} + \frac{z^4-x^4}{z^2+x^2} = 0,$$

Do đó

$$\frac{2x^4}{x^2+y^2} + \frac{2y^4}{y^2+z^2} + \frac{2z^4}{z^2+x^2} = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4+z^4}{y^2+z^2} + \frac{z^4+x^4}{z^2+x^2}.$$

Mặt khác 2 bộ số sau đây

$$\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z^2x^2}{\sqrt{z^2+x^2}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}},$$

là 2 bộ số đơn điệu ngược chiều, nên theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\sum_{cyc} \frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}} \ge \sum_{sym} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sum_{sym} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + \sum_{sym} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} \ge (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} x^2 + \sum_{sym} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \ge 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} - \sqrt{\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}} \right)^2 \ge 0.$$

Ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$. $\square$

Bài toán 2.57 (Vasile Cirtoaje). *Chứng minh rằng với các số thực a, b, c bất kì ta có bất đẳng thức*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

LỜI GIẢI. Đây là một bất đẳng thức hay, khó và khá quan trọng nên tác giả sẽ nêu ra 3 phương pháp thông thường cơ bản nhất để chứng minh.

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned}
&4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\Big((a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)\Big)\\
&=\Big((a^3+b^3+c^3)-5(a^2b+b^2c+c^2a)+4(ab^2+bc^2+ca^2)\Big)^2\\
&+3\Big((a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2c+c^2a)-2(ab^2+bc^2+ca^2)+6abc\Big)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Cách 2. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min(a,b,c)$. Đặt $b=a+x, c=a+y (x, y \geq 0)$. Bằng khai triển trực tiếp ta có

$$\begin{aligned}
VT-VP=f(a,x,y)&=(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)\\
&=(x^2+y^2-xy)a^2+(x^3+y^3+4xy^2-5x^2y)a+\\
&+x^4+y^4+2x^2y^2-3x^3y.
\end{aligned}$$

Coi đây là 1 tam thức bậc 2 với a. Khi đó

$$\begin{aligned}
\Delta_f &=(x^3+y^3+4xy^2-5x^2y)-4(x^2+y^2-xy)(x^4+y^4+2x^2y^2-3x^3y)\\
&=-3(x^3-x^2y-2xy^2-y^3)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Cách 3. Sử dụng phân tích sau đây

$$\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2)^2-6(a^3b+b^3c+c^3a)\\
&=(a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2+(b^2-2bc+ca-a^2+ab)^2+\\
&+(c^2-2ca+ab-b^2+bc)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $(a,b,c)=\left(k\sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right), k\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right), k\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ hoặc các hoán vị với $k \in R$ tuỳ ý. ❑

Bài toán 2.58 (Mathlinks Contests). *Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực tuỳ ý thoả mãn*

$$(a+b+c)(x+y+z)=3, (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4.$$

Chứng minh rằng $\quad ax+by+cz \geq 0.$

LỜI GIẢI. Dặt $\alpha = \sqrt[4]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}}$ và $a_1 = \dfrac{a}{\alpha}, b_1 = \dfrac{b}{\alpha}, c_1 = \dfrac{c}{\alpha}, x_1 = x\alpha, y_1 = y\alpha, z_1 = z\alpha$. Ta có các đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
&(a_1+b_1+c_1)(x_1+y_1+z_1) = (a+b+c)(x+y+z) = 3,\\
&(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2) = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4.
\end{aligned}$$

Ngoài ra dễ thấy

$$\begin{aligned}
a_1^2+b_1^2+c_1^2 &= \frac{a^2+b^2+c^2}{\alpha^2} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} = 2,\\
x_1^2+y_1^2+z_1^2 &= (x^2+y^2+z^2)\alpha^2 = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} = 2,\\
a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1 &= ax+by+cz.
\end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$(a_1+x_1)^2+(b_1+y_1)^2+(c_1+z_1)^2 \geq 4.$$

Nhưng điều này hiển nhiên vì

$$\begin{aligned}
(a_1+x_1)^2+(b_1+y_1)^2+(c_1+z_1)^2 &\geq \frac{(a_1+b_1+c_1+x_1+y_1+z_1)^2}{3}\\
&\geq \frac{4(a_1+b_1+c_1)(x_1+y_1+z_1)}{3} = 4.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

Bài toán 2.59 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn $(a+c)(b+d) \geq 4abcd$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{ab(1+c)}+\frac{1}{bc(1+d)}+\frac{1}{cd(1+a)}+\frac{1}{da(1+b)} \geq \frac{32}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}.$$

LỜI GIẢI.

$$\begin{aligned}
S &= (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)-(a+c)(b+d)+4abcd\\
&= 1+a+b+c+d+ac+bd+abc+bcd+cda+dab+5abcd.
\end{aligned}$$

Ta chứng minh rằng $\sum_{cyc} \dfrac{S+ab(1+c)}{ab(1+c)} \geq 36$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
S+ab(1+c) =&(1+b)+a(1+b)+c(1+a)+d(1+b)+\\
&+2abc(1+d)+bcd(1+a)+cda(1+b)+dab(1+c).
\end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{S+ab(1+c)}{ab(1+c)}=\sum_{cyc}\frac{(1+b)}{ab(1+c)}+\sum_{cyc}\frac{1+b}{b(1+c)}+\sum_{cyc}\frac{c(1+a)}{ab(1+c)}+$$
$$+\sum_{cyc}\frac{d(1+b)}{ab(1+c)}+\sum_{cyc}\frac{c(1+d)}{1+c}+\sum_{cyc}\frac{c(1+d)}{1+c}+$$
$$+\sum_{cyc}\frac{cd(1+a)}{a(1+b)}+\sum_{cyc}\frac{cd(1+b)}{b(1+c)}+\sum_{cyc}d.$$

Do tính hoán vị vòng quanh nên sau khi sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ trên tất cả các bộ số trên ta có

$$\sum_{cyc}\frac{S+ab(1+c)}{ab(1+c)}\geq 36\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{S}{ab(1+c)}\geq 32.$$

Chú ý rằng từ giả thiết ta có $S\leq(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$ nên

$$\frac{1}{ab(1+c)}+\frac{1}{bc(1+d)}+\frac{1}{cd(1+a)}+\frac{1}{da(1+b)}\geq\frac{32}{S}\geq\frac{32}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}.$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. □

Bài toán 2.60 (Virgil Nicula). *Giả sử* a,b,c *là các số thực thoả mãn* $a^2+b^2+c^2=9$. *Chứng minh rằng*

$$3\min(a,b,c)\leq 1+abc.$$

LỜI GIẢI. Ta giả sử rằng $c\geq b\geq a$. Xét 2 trường hợp.

(i). Nếu $a\leq 0$, đặt $d=-a$ và $e=|b|$. Ta sẽ chứng minh

$$-3d\leq 1-dce$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $d(ce-3)\leq 1$.

Nếu $ce\leq 3$ thì ta có ngay *đpcm*, còn nếu $ce\geq 3$ thì

$$d^2(ce-3)(ce-3)\leq\left(\frac{d^2+2ce-6}{3}\right)^3\leq\left(\frac{d^2+c^2+e^2-6}{3}\right)^3=1.$$

Vậy trường hợp này bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=-1,b=c=2$.

(ii). Nếu $a\geq 0$. Ta phải chứng minh

$$a(a^2+b^2+c^2)\leq 3+3abc.$$

Do $2abc \geq a^3 + ab^2$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$3 + abc \geq ac^2 \Leftrightarrow 3 \geq ac(c-b).$$

Vì $a \leq b$ nên $c \leq \sqrt{9-2a^2}$, suy ra

$$ac(c-b) \leq ac(c-a) \leq a\sqrt{9-2a^2}(\sqrt{9-2a^2}-a).$$

Ta sẽ chứng minh $\quad a(9-2a^2) + a^2\sqrt{9-2a} \leq 3$

$$\Leftrightarrow f(a) = 2a^6 - 9a^4 - (3a-1)^2 \leq 0.$$

+, Nếu $1/3 \leq 3 \leq 1$ thì

$$f(a) = 2a^4(a-1) + 7a^4 - (3a-1)^2 \leq 0.$$

+, Nếu $1 \leq a \leq \sqrt{3/2}$ thì

$$f(a) = (a^4 + \frac{3}{2})(2a^2-3) - 6a^2(a^2-1) - 6a(a - \frac{11}{12}) \leq 0.$$

+, Nếu $\sqrt{3/2} \leq a \leq \sqrt{3}$ thì

$$f(a) = a^2(a^2-3)(2a^2-3) + (1-6a) \leq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. Chỉ có 1 trường hợp của đẳng thức như trên. □

Bài toán 2.61 (Tổng quát RMO 2000). *Tìm hằng số k tốt nhất (nhỏ nhất) trong bất đẳng thức sau*

$$a^k + b^k + c^k \geq (ab + bc + ca),$$

ở đây a, b, c là các số thực không âm và $a + b + c = 3$.

Lời Giải. Theo bài 2.3 ta đã chứng minh bất đẳng thức trên với $k = 1/2$, do đó nó vẫn đúng với mọi $k \geq 1/2$. Bây giờ ta xét bất đẳng thức khi $k \leq 1/2$.

Bổ đề. *Giả sử $a + b = 2t \geq 1$, khi đó*

$$a^k + b^k - ab \geq \min\left((2t)^k, 2t^k - t^2\right).$$

Thật vậy, giả sử $a \geq b$. Tồn tại 1 số không âm x với $a = t + x, b = t - x$.
Xét hàm số

$$\begin{aligned}
f(x) &= (t+x)^k + (t-x)^k - t^2 + x^2\\
f'(x) &= k(t+x)^{k-1} - k(t-x)^{k-1} + 2x\\
f''(x) &= k(k-1)(t+x)^{k-2} + k(k-1)(t-x)^{k-2} + 2\\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)\left((t+x)^{k-3} - (t-x)^{k-3}\right).
\end{aligned}$$

Như vậy $f'''(x)$ có duy nhất nghiệm $x = 0$, do đó $f''(x)$ là hàm đơn điệu và có không quá 1 ngiệm, suy ra $f'(x)$ có không quá 2 nghiệm $(t \geq x \geq 0)$. Vì $f'(0) = 0$ và

$$f''(0) = 2k(k-1)t^{k-2} + 2 = 2 - 2k(1-k) \geq 0,$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của f sẽ lấy tại $x = 0$ hoặc $x = t$. Đó là *đpcm.*

Với bổ đề trên, bài toán được chứng minh như sau.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $a + b = 2t \geq 1$, khi đó

$$a^k + b^k + c^k - (ab + bc + ca) \geq \min\left((2t)^k, 2t^k - t^2\right) - 2ct + c^k.$$

(i). Nếu $(2t)^k \leq 2t^k - t^2$, áp dụng bổ đề với $2t$ và c

$$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \geq (2t)^k+c^k-c.2t \geq \min\left((2t+c)^k, 2(t+\frac{c}{2})^k - (t+\frac{c}{2})^2)\right).$$

Vì $2t + c = 3$ nên

$$a^k + b^k + c^k - (ab + bc + ca) \geq \min\left(3^k, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\right).$$

(ii). Nếu $(2t)^k \geq 2t^k - t^2$. Ta có thể coi trường hợp này giống như $a = b = z \geq 1, c = 3 - 2z$. Xét hàm

$$\begin{aligned}
g(z) &= 2z^k + (3-2z)^k - 2z(3-2z) + z^2 \\
&= 2z^k + (3-2z)^k - 6z + 3z^2 \\
g'(z) &= 2kz^{k-1} - 2k(3-2z)^{k-1} - 6 + 6z \\
g''(z) &= 2k(k-1)\left(z^{k-2} - 2(3-2z)^{k-2}\right) + 6 \\
g'''(z) &= 2k(k-1)(k-2)\left(z^{k-3} - 4(3-2z)^{k-3})\right).
\end{aligned}$$

Dễ thấy $g'''(z)$ vô nghiệm với $z \geq 1$, suy ra $g'(z)$ có không quá 2 nghiệm.

Vì $\lim_{z \to \frac{3}{2}} g(z) = -\infty$, nên giá trị nhỏ nhất của $g(z)$ với $\frac{3}{2} \geq z \geq 1$ lấy ở 2 đầu

$$g(z) \geq \min\left(0, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\right).$$

Kết hợp cả 2 trường hợp ta tìm được

$$a^k + b^k + c^k - (ab + bc + ca) \geq \min\left(0, 2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4}\right).$$

Để có $a^k + b^k + c^k \geq ab + bc + ca$ ta phải có

$$2\frac{3^k}{2^k} - \frac{9}{4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \geq \frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 0.2905.$$

Khi đó sẽ có 2 trường hợp xảy ra đẳng thức là $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ❑

Bài toán 2.62 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức sau*

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+3a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+3b^2} \leq \frac{3}{5}.$$

Ngoài ra hãy chứng minh $k = 3$ là hằng số dương tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm

$$\frac{ab}{a^2+b^2+kc^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+kb^2} \leq \frac{3}{k+2}.$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Đặt $s = k - 1$. Sử dụng biến đổi sau

$$2(a^2 + b^2 + kc^2) - 2(k+2)ab = (k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\frac{ab}{a^2+b^2+kc^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+kb^2} - \frac{3}{k+2} \\
&= -\frac{1}{2(k+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2)}{1 + sc^2}.
\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức tương đương với

$$(k+2)\sum_{sym} \frac{(a-b)^2}{1+sc^2} \geq ks \sum_{sym} \frac{(a-b)^2(a+b)^2}{(1+sa^2)(1+sb^2)} \Leftrightarrow \sum_{sym} S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Trong đó các hệ số xác định bởi

$$\begin{aligned}
S_c &= (s+3)(1+sa^2)(1+sb^2) - s(s+1)(a+b)^2(1+sc^2), \\
S_b &= (s+3)(1+sa^2)(1+sc^2) - s(s+1)(a+c)^2(1+sb^2), \\
S_a &= (s+3)(1+sb^2)(1+sc^2) - s(s+1)(b+c)^2(1+sa^2).
\end{aligned}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, dễ thấy $S_c \geq 0$ và

$$(a+c)^2(1+sb^2) + (b+c)^2(1+sa^2) \leq 2(x+c)^2(1+sx^2).$$

Ta sẽ chứng minh $S_a + S_b \geq 0$, thật vậy

$$\begin{aligned} & S_a + S_b \geq 2(s+3)(1+sc^2)(1+sx^2) - s(s+1)(x+c)^2(1+sx^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (s+3)\left(2x^2+(s+1)c^2\right) \geq s(s+1)(x+c)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & (6+s-s^2)x^2 - 2s(s+1)xc + 3(s+1)c^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Kiểm tra 2 điều kiện

$$6+s-s^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \leq 3,$$
$$\Delta' = s^2(s+1)^2 - 3(s+1)(6+s-s^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow s^2(s+1) \geq 3(6+s-s^2) \Leftrightarrow (s-2)(s+3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \leq 2.$$

Xét với $y = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$, chứng minh hoàn toàn tương tự $S_b + S_c \geq 0$.

Phần còn lại, ta sẽ chứng minh $S_b \geq 0$, khi đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b+S_a)(b-c)^2 + (S_b+S_c)(a-b)^2 \geq 0.$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} & S_b = (s+3)(1+sa^2)(1+sc^2) - s(s+1)(a+c)^2(1+sb^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (k+2)(ka^2+b^2+c^2)(kc^2+a^2+b^2) \geq k(k-1)(a+c)^2(kb^2+a^2+c^2). \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng

$$k(k-1)(a+c)^2 - (k+2)(kc^2+a^2+b^2) \leq (k-1)(a^2-b^2),$$
$$(k+2)(kc^2+a^2+b^2) \geq kb^2+a^2+c^2.$$

Vậy

$$\frac{ka^2+b^2+c^2}{kb^2+a^2+c^2} - 1 \geq \frac{k(k-1)(a+c)^2}{(k+2)(kc^2+a^2+b^2)} - 1.$$

Ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra với $a = b = c$, và chỉ trong trường hợp $k = 3$ thì ta có thêm 1 trường hợp khi $b = c = \frac{2}{3}a$. ❑

Bài toán 2.63 (Vasile Cirtoaje). *x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{xy+1} + \frac{y}{yz+1} + \frac{z}{zx+1} \geq \frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng kĩ thuật Côsi ngược

$$\frac{x}{xy+1} = x - \frac{x^2y}{xy+1} \geq x - \frac{1}{2}x^{3/2}y^{1/2}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{xy+1} + \frac{y}{yz+1} + \frac{z}{zx+1} \geq 3 - \frac{1}{2}\left(x^{3/2}y^{1/2} + y^{3/2}z^{1/2} + z^{3/2}x^{1/2}\right).$$

Theo bất đẳng thức bài 2.57 ta có

$$x^{3/2}y^{1/2} + y^{3/2}z^{1/2} + z^{3/2}x^{1/2} \le \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = 3.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = y = z = 1$. □

Bài toán 2.64 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \le 2.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = abc, y = abd, z = acd, t = bcd$. Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3-y} + \frac{1}{3-z} + \frac{1}{3-t} \le 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{3-x} + \frac{1-y}{3-y} + \frac{1-z}{3-z} + \frac{1-t}{3-t} \ge 0 \quad (*)$$

Ta có các đẳng thức sau

$$(1-x)(4x+3) - (1-y)(4y+3) = (x-y)(1-4x-4y),$$
$$(3-x)(4x+3) - (3-y)(4y+3) = (x-y)(9-4x-4y).$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$x + y = ab(c+d) \le \frac{a^2+b^2}{2}\sqrt{2(c^2+d^2)} \le (4/3)^{3/2} < \frac{9}{4}.$$

Gọi A là vế trái của $(*)$. Nếu 2 số phân biệt trong 4 số x, y, z, t đều có tổng lớn hơn $1/4$, theo bất đẳng thức *Chebyshev* ta có

$$A = \sum_{x,y,z,t} \frac{(1-x)(4x+3)}{(3-x)(4x+3)} \ge \frac{1}{4}\left(\sum_{x,y,z,t}(1-x)(4x+3)\right)\left(\sum_{x,y,z,t}\frac{1}{(3-x)(4x+3)}\right),$$
$$S = \sum_{x,y,z,t}(1-x)(4x+3) = \sum_{x,y,z,t}(3+x-4x^2) = 12 + \sum_{x,y,z,t} x - 4\sum_{x,y,z,t} x^2.$$

Theo giả thiết $\sum_{a,b,c,d} a^2 = 4$ nên theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \ge 4 \quad , \quad abcd \le 1$$
$$\Rightarrow x + y + z + t = abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$
$$\ge 4abcd \ge 4a^2b^2c^2d^2.$$

Đặt $m = a^2, n = b^2, p = c^2, q = d^2$, để chứng minh $S \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh với $m + n + p + q = 4$ thì

$$3 + mnpq \geq mnp + npq + pqm + qmn.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $m \geq n \geq p \geq q$. Đặt $r = \frac{m+n+p}{3}$.

$$S' = 3 - q(mn + np + pm) - mnp(1 - q) \geq 3 - q.3r^2 - r^3q.$$

(Vì theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $mn + np + pm \leq 3r^2$ và $q \leq 1$).

Thay $q = 4 - 3r$ và chú ý rằng $r \leq 4/3$ ta có

$$S \geq 3 - 3(4 - 3r)r^2 - r^3(3r - 3) = 3(r - 1)^2(-r^2 + 2r + 1) \geq 0.$$

Nếu có 2 số, chẳng hạn $x + y \leq 1/4$ thì $a \leq 1/2$.

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $t = bcd \leq (4/3)^{3/2}$ và $cd \leq 2$. Suy ra $z \leq 1$
Vì $(3 - x)^{-1}$ là hàm lồi tăng nên

$$\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3-y} + \frac{1}{3-z} + \frac{1}{3-t} \leq \frac{1}{3-1/4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-(4/3)^{3/2}} < 2.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. ☐

Bài toán 2.65 (Titu Andresscu, Gabriel Dospinesscu). *Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} = \frac{n}{2}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_j}.$$

Lời Giải. Đặt $a_i = \dfrac{1 - x_i}{1 + x_i}\ \forall i = \overline{1,n}$.
Khi đó dễ thấy $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$ và $a_i \in [-1, 1]$. Xét biểu thức sau đây

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_j} \Rightarrow 2S = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{(1 + a_i)(1 + a_j)}{1 - a_ia_j},$$

Ngoài ra

$$P = \sum_{i,j=1}^{n} (1 + a_i)(1 + a_j)(1 - a_ia_j) = n^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2a_j^2 \leq n^2.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$2S.P \geq \left(\sum_{i,j=1,n} (1+a_i)(1+a_j) \right)^2 = n^4.$$

Vậy $S \geq \dfrac{n^2}{2}$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. ❑

Bài toán 2.66 (Vasile Cirtoaje). *Chứng minh rằng nếu các số không âm a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ thì*

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \leq 1.$$

LỜI GIẢI. Biến đổi bất đẳng thức trở thành

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 2 + abc.$$

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta giả sử b là số ở giữa số nhỏ nhất và số lớn nhất trong 3 số a, b, c. Khi đó

$$a(b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow a^2b + abc \geq ab^2 + ca^2.$$

Phần còn lại ta chỉ cần chứng minh

$$2 \geq a^2b + bc^2 \Leftrightarrow b(a^2+c^2) \leq 2 \Leftrightarrow b(3-b^2) \leq 2 \Leftrightarrow (b-1)^2(b+2) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 0, b = 1, c = \sqrt{2}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ❑

Bài toán 2.67 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh với các số thực a, b, c, d có tổng bằng 4 thì*

$$\sqrt{\frac{a+1}{ab+1}} + \sqrt{\frac{b+1}{bc+1}} + \sqrt{\frac{c+1}{cd+1}} + \sqrt{\frac{d+1}{da+1}} \geq 4.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM - GM$ cho 4 số hạng ở vế trái

$$VT \geq 4\sqrt[8]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(b+1)}{(ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1)}}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geq (ab+1)(bc+1)(cd+1)(da+1).$$

Thật vậy, khai triển 2 vế bất đẳng thức trên

$$abcd+\sum_{sym}abc+\sum_{sym}ab+\sum_{sym}a+1$$
$$\geq (abcd)^2+abcd\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}ab^2c+\sum_{cyc}ab+1+2abcd$$
$$\Leftrightarrow ac+bd+4+\sum_{sym}abc\geq (abcd)^2+abcd+abcd\sum_{cyc}ab+\sum_{cyc}ab^2c.$$

Chú ý rằng theo giả thiết $a+b+c+d=4$ nên $abcd\leq 1$.

$$ac+bd\geq 2\sqrt{abcd}\geq 2abcd\geq 2(abcd)^2\Rightarrow ac+bd\geq abcd+(abcd)^2 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức $(x+y+z+t)^2\geq 4(xy+yz+zt+tx)$ ta có

$$(abc+bcd+cda+dab)^2\geq 4abcd(ab+bc+cd+da)$$
$$\Rightarrow abc+cda+cda+dab\geq abcd(ab+bc+cd+da) \quad (2)$$
$$(a+b+c+d)^2\geq 4(ab+bc+cd+da)\Rightarrow ab+bc+cd+da\leq 4$$
$$\Rightarrow 16\geq (ab+bc+cd+da)^2\geq 4(ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b)$$
$$\Rightarrow 4\geq ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b \quad (3)$$

Từ các bất đẳng thức $(1),(2),(3)$ cộng lại ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. □

Bài toán 2.68 (UK TST 2005). *Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1+3}{(a_1+1)^2}+\frac{a_2+3}{(a_2+1)^2}+...+\frac{a_n+3}{(a_n+1)^2}\geq 3,$$

Với n là số nguyên dương cho trước lớn hơn 2.

LỜI GIẢI. Thực ra bản chất của bài toán này là chứng minh trong trường hợp $n=3$. Với n lớn hơn, chỉ cần chọn a_1,a_2,a_3 là 3 số nhỏ nhất thì $a_1a_2a_3\leq 1$ và do đó

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+3}{(a_i+1)^2}\geq \frac{a_1+3}{(a_1+1)^2}+\frac{a_2+3}{(a_2+1)^2}+\frac{a_3+3}{(a_3+1)^2}.$$

Chọn các số thực dương a,b,c sao cho $a/a_1=b/b_1=c/c_1=k\geq 1$ và $abc=1$. Khi đó ta dễ dàng nhận thấy

$$\frac{a_1+3}{(a_1+1)^2}+\frac{a_2+3}{(a_2+1)^2}+\frac{a_3+3}{(a_3+1)^2}\geq \frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}.$$

Đặt $a_1 = 2/(1+a), b_1 = 2/(1+b), c_1 = 2/(1+c)$. Ta phải chứng minh

$$a_1 + b_1 + c_1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geq 6.$$

Chú ý rằng điều kiện $abc = 1$ cho ta

$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{abc}{8} = \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow (2 - a_1)(2 - b_1)(2 - c_1) = a_1 b_1 c_1.$$

Đặt $x = a_1 - 1, y = b_1 - 1, z = c_1 - 1$ thì hiển nhiên $x, y, z \geq -1$. Vậy

$$(x+1)(y+1)(z+1) = (1-x)(1-y)(1-z) \Rightarrow x + y + z + xyz = 0.$$

Do $-1 \geq x, y, z \geq 1$ nên $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(xyz)^{2/3} \geq 3xyz$. Vậy

$$\sum_{x,y,z} x(x+3) = \sum_{sym} (a_1 - 1)(a_1 + 2) = a_1 + b_1 + c_1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 6 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = 0, a_2 = a_3 = \ldots = a_n = +\infty$ hoặc các hoán vị.
❑

Bài toán 2.69. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}}.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Holder*

$$\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$, ta sẽ chứng minh

$$(x + y + z)^3 \geq 3(xy + yz + zx)\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Ta chứng minh bằng phương pháp khai triển bình phương

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy + yz + zx} \geq \frac{3\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}}{x + y + z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2(xy + yz + zx)} \geq \frac{3\left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right)}{(x+y+z)\left(x + y + z + \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}\right)}$$
$$\Leftrightarrow 6(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)\left(x + y + z + \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}\right)$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$. $\square$

Nhận xét. Bất đẳng thức với 4 số vẫn còn đúng, bạn đọc hãy tự chứng minh

Bài toán. *Chứng minh với các số thực dương a, b, c, d ta luôn có*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 2\sqrt{2}\sqrt[4]{a^4 + b^4 + c^4 + d^2}.$$

Bài toán 2.70. *Cho các số dương a, b, c tuỳ ý. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2 + 16bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 16ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 16ab}{a^2 + b^2} \geq 10.$$

Lời Giải. Ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy

$$\frac{a^2 + 16bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 16ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 16ab}{a^2 + b^2} \geq 10$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)\left(\frac{1}{b^2 + c^2} - \frac{1}{a^2 + b^2}\right) + \frac{16bc - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{16ac - c^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} - \frac{8(a - b)^2}{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2\left(\frac{(a + b)^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} - \frac{8}{a^2 + b^2}\right) + \frac{16bc - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{16ac - c^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2\frac{(a + b)^2(a^2 + b^2) - 8a^2b^2 - 8c^2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} +$$

$$+\frac{16bc - c^2}{b^2 + c^2} + \frac{16ac - c^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Vì $(a + b)^2(a^2 + b^2) \geq 8a^2b^2$ nên ta có thể chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{15b}{b^2 + c^2} + \frac{15a}{a^2 + c^2} \geq \frac{8c(a - b)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}.$$

(i). Nếu $\dfrac{b}{b^2 + c^2} \leq \dfrac{15a}{a^2 + c^2}$ thì $2b(a^2 + c^2)(a^2 + b^2) \geq b(a^2 + b^2 + c^2)(a - b)^2$

$$\Rightarrow VT \geq \frac{16b}{b^2 + c^2} \geq \frac{8c(a - b)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}.$$

(ii). Trong trường hợp ngược lại ta có

$$\frac{b}{b^2 + c^2} \geq \frac{15a}{a^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow ba^2 \geq 15ab^2 \Rightarrow a \geq 15b.$$

Khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{15b}{b^2+c^2} \geq \frac{8c(a-b)^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow 15b(a^2+c^2)(a^2+b^2) \geq 8c(a-b)^2(a^2+b^2+c^2).$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì $a^2+c^2 \geq (a-b)^2$ và

$$15b(a^2+b^2) \geq 8b(a^2+b^2+c^2) \geq 8c(a^2+b^2+c^2).$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ❑

Bài toán 2.71 (Faruk Zejnulahi). *Cho $a,b,c \geq 0$ thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$1 \leq \frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \leq \sqrt{2}.$$

Lời Giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2 \leq 2(1+bc)^2 \qquad (1)$$

Thật vậy, sử dụng điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$, (1) tương đương với

$$2(ab+bc+ca) \leq 1+4bc+2b^2c^2 \Leftrightarrow 2a(b+c) \leq a^2+(b+c)^2+2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow (b+c-a)^2+2b^2c^2 \geq 0 \text{ (đúng!)}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \leq \frac{\sqrt{2}a}{a+b+c}+\frac{\sqrt{2}b}{a+b+c}+\frac{\sqrt{2}c}{a+b+c}=\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1/\sqrt{2}, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Để chứng minh bất đẳng thức vế trái, hãy lưu ý rằng

$$a+abc \leq a+\frac{a(b^2+c^2}{2}=a+\frac{a(1-a^2)}{2}=1-\frac{(a-1)^2(a+2)}{2} \leq 1,$$

do đó

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}=\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+bca}+\frac{c^2}{c+abc}$$
$$\geq a^2+b^2+c^2=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán 2.72 (Phạm Kim Hùng). *Các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng n. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{3}{n}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n),$$

Với n là 1 số nguyên dương lớn hơn 3.

LỜI GIẢI. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp. Cụ thể là, ta sẽ chứng minh với $k = k_n = \frac{4(n-1)}{n^2}$ thì

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - n \geq k(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).$$

Với $n = 2$, ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} + \frac{1}{2-a} - 2 \geq a^2 + (2-a)^2 - 2 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{2(a-1)^2}{a(2-a)} \geq 2(a-1)^2 \Leftrightarrow (a-1)^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Hiển nhiên đúng và đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 1$.

Giả sử ta đã có bất đẳng thức với n số. Ta chứng minh bất đẳng thức còn đúng với $n+1$ số. Không mất tính tổng quát giả sử $a_{n+1} \geq a_n \geq ... \geq a_2 \geq a_1$.

Đặt $s = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq 1$. Đặt $x_i = \frac{a_i}{s}\ \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n$.

Theo giả thiết quy nạp với n số ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} - n \geq k_n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - n) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{s}{a_1} + \frac{s}{a_2} + ... + \frac{s}{a_n} - n \geq k_n\left(\frac{a_1^2}{s^2} + \frac{a_2^2}{s^2} + ... + \frac{a_n^2}{s^2} - n\right) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{n}{s} \geq \frac{k_n}{s^3}\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - ns^2\right) \\ \Rightarrow\ &\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{n}{s}}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - ns^2} \geq \frac{k_n}{s^3} \geq k_{n+1} \quad (\text{vì } s \leq 1) \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - k_{n+1}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) \geq \frac{n}{s} - k_{n+1}s^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} - n - 1 \geq k_{n+1}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_{n+1} - n - 1).$$

Thay $(*)$ vào bất đẳng thức trên, suy ra ta chỉ cần chứng minh với $s \leq 1$ thì

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{s} + \frac{1}{n+1-ns} - n - 1 \geq k_{n+1}\left(ns^2 + (n+1-ns)^2 - n - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(s-1)^2}{s(n+1-ns)} \geq k_{n+1}n(n+1)(s-1)^2 \\
&\Leftrightarrow k_{n+1} \geq \frac{1}{s(n+1-ns)} = \frac{n}{ns(n+1-ns)} \geq \frac{4n}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Và giá trị tốt nhất cho k_{n+1} chính là $\dfrac{4n}{(n+1)^2}$. Ta có *đpcm.*

Đẳng thức xảy ra, ngoài trường hợp tầm thường $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 1$ thì với (và chỉ với) $k = k_{n+1} = 4n/(n+1)^2$ còn có thêm 1 trường hợp nữa là $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{n+1}{2n}, a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}$ hoặc các hoán vị.

Trong bài toán ban đầu, giá trị của k là $k'_n = \dfrac{3}{n} \leq \dfrac{4(n-1)}{n^2} = k_n$ $\forall n \geq 4$ nên bất đẳng thức đó hiển nhiên đúng. ☐

Bài toán 2.73 (Vasile Cirtoaje). *Cho $a, b, c \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(2-ab)(2-bc)(2-ca) \geq 1.$$

Lời Giải. Đặt $x = 2 - ab, y = 2 - bc, z = 2 - ca$.

Ta phải chứng minh $xyz \geq 1$ nếu các số thực x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\frac{(2-x)(2-y)}{2-z} + \frac{(2-y)(2-z)}{2-x} + \frac{(2-z)(2-x)}{2-y} = 3.$$

Điều kiện trên có thể viết dưới dạng gọn hơn như sau

$$\begin{aligned}
(2-x)(2-y) + (2-y)(2-z) + (2-z)(2-x) &= 3(2-x)(2-y)(2-z) \\
\Leftrightarrow 8(x+y+z) + 3xyz &= 12 + 5(xy+yz+zx).
\end{aligned}$$

Phản chứng, giả sử rằng $xyz < 1$. Ta sẽ chứng minh

$$8(x+y+z) + 3xyz < 12 + 5(xy+yz+zx).$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $2 \geq x \geq y \geq z$. Đặt $t = \sqrt{xy} \Rightarrow t \leq 2$. Ta có

$$\begin{aligned}
(8-5z)(x+y) + 3xyz + 8z = 12 + 5xy &\geq (8-5z)2t + 3zt^2 + 8z \\
\Leftrightarrow 12 + 5t^2 - 16t &\geq z(3t^2 - 10t + 8) \\
\Leftrightarrow (t-2)(5t-6) &\geq z(t-2)(3t-4) \\
\Leftrightarrow 5t - 6 \leq z(3t-4) &\Leftrightarrow 6 - 4z \geq t(5-3z).
\end{aligned}$$

Do $t^2z \le 1$ nên $t \le \frac{1}{\sqrt{z}}$. Vì $z \le 1$ nên dễ thấy

$$(6-4z)\sqrt{z} > 5-3z$$
$$\Leftrightarrow 0 > (\sqrt{z}-1)^2(4\sqrt{z}+5).$$

Điều vô lí này dẫn tới kết quả bài toán. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ❑

Bài toán 2.74 (Darij Grinberg). *Cho a,b,c là các số thực không âm tuỳ ý. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ac} \ge 6.$$

LỜI GIẢI. Vì $(a+b)^2-2(c^2+ab)=(a^2-c^2)+(b^2-c^2)$ nên ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ac}-6\\
&=\sum_{sym}\frac{(a^2-b^2)+(a^2-c^2)}{a^2+bc}\\
&=\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{a^2+bc}-\frac{1}{b^2+ac}\right)\\
&=\sum_{sym}\frac{(a-b)^2(a+b)(a+b-c)}{(a^2+bc)(b^2+ac)}.
\end{aligned}$$

Xét các biểu thức

$$\begin{aligned}
S_a&=(b+c)(b+c-a)(a^2+bc),\\
S_b&=(c+a)(c+a-b)(b^2+ac),\\
S_c&=(a+b)(a+b-c)(c^2+ab).
\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh $S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Dễ thấy $S_c \ge 0$ và

$$\frac{(a-c)^2}{(b-c)^2} \ge \frac{a^2}{b^2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (a-c)^2S_b+(b-c)^2S_a &= (c-b)^2\left(\frac{(a-c)^2}{(c-b)^2}S_b+S_a\right)\\
&\ge \frac{(c-b)^2}{b^2}(a^2S_b+b^2S_a).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
a^2S_b+b^2S_a &= a^2(a+c)(a+c-b)(b^2+ac)+b^2(b+c)(b+c-a)(a^2+bc)\\
&\ge a(a-b)\left(a^2(b^2+ac)-b^2(b^2+ac)\right) \ge 0.
\end{aligned}$$

Ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc hoán vị. ❑

Bài toán 2.75 (Lê Hồng Quý). *Tìm số thực $k = k(n)$ lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi dãy số $x_1, x_2, ..., x_n \in R$*

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + ... + (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \geq k(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2.$$

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ cho 2 số

$$a_1 y_1^2 + \frac{1}{a_1} y_2^2 + 2y_1 y_2 \geq 0$$

$$\dots \quad \dots$$

$$a_{n-1} y_{n-1}^2 + \frac{1}{a_n} y_n^2 + 2y_{n-1} y_n \geq 0$$

Trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương mà ta sẽ chọn sau.
Cộng vế các bất đẳng thức trên lại ta được

$$a_1 y_1^2 + \left(\frac{1}{a_1} + a_2\right) y_2^2 + ... + \left(\frac{1}{a_{n-2}} + a_{n-1}\right) y_{n-1}^2 + \frac{1}{a_{n-1}} y_n^2 +$$

$$+2y_1 y_2 + 2y_2 y_3 + ... + 2y_{n-1} y_n \geq 0 \quad (*)$$

Chọn các số thực dương a_i, $i = \overline{1, n}$ để

$$a_1 = \frac{1}{a_1} + a_2 = ... = \frac{1}{a_{n-1}} - 1.$$

Ta tìm được

$$a_k = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin(k\alpha)}, \ \alpha = \frac{2\pi}{2n+1}.$$

Từ $(*)$ ta có

$$2\cos\alpha(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) + 2(y_1 y_2 + y_2 y_3 + ... + y_{n-1} y_n) + y_n^2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\alpha(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq 2(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) - 2(y_1 y_2 + y_2 y_3 + ... + y_{n-1} y_n) - y_n^2 - y_n^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + \cos\alpha)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq y_1^2 + (y_1 - y_2)^2 + ... + (y_{n-1} - y_n)^2$$

Thay các số y_i, $y = \overline{1, n}$ bởi $y_i = x_1 + x_2 + ... + x_i$ ta được

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2} x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + ... + (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2.$$

Số $k = k(n)$ tốt nhất bằng $\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{2n+1}}$, đẳng thức xảy ra khi

$$x_k = (-1)^k(\sin k\alpha + \sin(k-1)\alpha). \quad \square$$

Nhận xét. Bất đẳng thức sau đã có trên tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*

Bài toán. *Tìm $k = k(n)$ nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi dãy số thực* $x_1, x_2, ..., x_n$

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + ... + (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \le k(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{k} x_i)^2 \le \sum_{k=1}^{n} S_k \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{c_i}$$

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i, \ c_i \ge 0.$$

Chọn các số c_i, $i = \overline{1,n}$ sao cho

$$\frac{S_1 + S_2 + ... + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + S_3 + ... + S_n}{c_2} = \cdots = \frac{S_n}{c_n} = t$$

$$\Rightarrow c_i = \sin i\alpha - \sin(i-1), \ \alpha = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Từ đó suy ra

$$k = k(n) = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}}.$$

Điều kì lạ là một bài toán với chặn trên, một bài toán với chặn dưới, một bài toán sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ còn một bài toán sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* nhưng lại đi đến 2 kết quả rất giống nhau, một hàm của sin còn một hàm của cos. □

Bài toán 2.76 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm* a, b, c *ta luôn có*

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{4}{5}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\left(\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{a^2+c^2} + \frac{c}{a^2+b^2}\right)\left(a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)\right) \ge (a+b+c)^2.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)} \ge \frac{4}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc}.$$

Đặt $S = a^2 + b^2 + c^2, P = ab + bc + ca, Q = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{5(S+2P)}{Q} \geq \frac{4(S+3P)}{Q+2abc}$$
$$\Leftrightarrow SQ + 10abcS + 20abcP \geq 2PQ.$$

Dễ thấy

$$PQ = \sum_{sym} a^2b^2(a+b) + 2abc(S+P),$$
$$SQ \geq \sum_{sym} ab(a+b)(a^2+b^2) \geq 2\sum_{sym} a^2b^2(a+b).$$

Từ đó ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a, b, c có 2 số bằng nhau và 1 số bằng 0. □

Bài toán 2.77. *Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Lời Giải. Xét 2 hằng đẳng thức sau

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{2c}{a+b} - 3 = \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)},$$
$$2 - \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ta phải chứng minh $S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$ với

$$S_a = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)}, S_b = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)}, S_c = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq 0$.
Do a, b, c là 3 cạnh một tam giác nên

$$S_b = \frac{a(b+c-a) + c(b-c)}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{c(b-c)}{(a+b)(b+c)},$$
$$S_c = \frac{a(b+c-a) + b(c-b)}{(a+c)(c+b)} \geq \frac{b(c-b)}{(a+c)(c+b)},$$
$$\frac{a-c}{a-b} \geq \frac{b}{c} \geq \frac{a+b}{a+c}.$$

Từ các bất đẳng thức trên suy ra

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2$$
$$\geq (a-b)^2\left(\frac{b^2}{c^2}S_b + S_c\right) \geq \frac{(a-b)^2}{c^2}\left(\frac{b^2c(b-c)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c^2b(c-b)}{(a+c)(c+b)}\right)$$
$$= \frac{(a-b)^2(b-c)b}{(a+b)(b+c)}\left(\frac{b}{c} - \frac{a+b}{a+c}\right) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán 2.78 (Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinesscu). *Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd.$$

Lời Giải. Ta chứng minh bằng phản chứng.

$$x = \frac{1-a}{a}, y = \frac{1-b}{b}, z = \frac{1-c}{c}, t = \frac{1-d}{d}$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{x+1}, b = \frac{1}{y+1}, c = \frac{1}{z+1}, d = \frac{1}{t+1}.$$

Ta phải chứng minh $xyzt \geq 1$ nếu x, y, z, t thoả mãn

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} = 1.$$

Giả sử ngược lại, $xyzt < 1$. Tồn tại số dương $k > 1$ sao cho $k^4xyzt = 1$.
Mặt khác, theo bài toán 2.24 ta có

$$\frac{1}{(1+kx)^2} + \frac{1}{(1+ky)^2} + \frac{1}{(1+kz)^2} + \frac{1}{(1+kt)^2} \geq 1.$$

Vì $k > 1$ nên

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} > 1.$$

Trái với giả thiết ở trên. Vậy điều giả sử là sai, ta phải có $xyzt \geq 1$ (*đpcm*).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1/2$ hoặc $a = 1, b = c = d = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ❑

Bài toán 2.79 (Phạm Kim Hùng). *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng n. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2}(1 - a_1a_2...a_n).$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp.

Trong trường hợp $n=2$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-2\geq 2(1-a_1a_2)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{2(1-a_1a_2)}{a_1a_2}\geq 2(1-a_1a_2)\\ \Leftrightarrow\ &a_1a_2\leq 1\Leftrightarrow (a_1-a_2)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Giả sử bất đẳng thức đã đúng tới n. Ta xét bài toán với $n+1$ số.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1\geq a_2\geq ...\geq a_n\geq a_{n+1}$. Đặt

$$t=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},\ b_i=\frac{a_i}{t}\ \ \forall i=\overline{1,n}.$$

Ta có $\sum_{i=1}^n b_i=n$ nên theo giả thiết quy nạp thì

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_n}-n\geq c(1-b_1b_2...b_n),$$

Với c là hằng số bất kì và $c\leq\dfrac{8(n-1)}{n^2}$. Thay $b_i=a_i/t$ ta suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{t}{a_1}+\frac{t}{a_2}+...+\frac{t}{a_n}-n\geq c(1-\frac{a_1a_2...a_n}{t^n})\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{c}{t^{n+1}}a_1a_2...a_n\geq\frac{n}{t}+\frac{c}{t}\quad (*)\end{aligned}$$

Với $n+1$ số, ta phải chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{n+1}}-n-1\geq k(1-a_1a_2...a_{n+1}),\quad (k=\frac{8n}{(n+1)^2})\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+(ka_{n+1})a_1a_2...a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\geq n+1+k.\end{aligned}$$

Đặt $ka_{n+1}=\dfrac{c'}{t^{n+1}}$ thì $c'=(ka_{n+1})t^{n+1}$. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$a_{n+1}t^n\leq\left(\frac{a_{n+1}+nt}{n+1}\right)^{n+1}=1.$$

Do đó $\qquad c'\leq kt\leq k=\dfrac{8n}{(n+1)^2}\leq\dfrac{8(n-1)}{n^2}\quad$ (vì $t\leq 1$).

Vì $(*)$ đúng với mọi $c \leq \dfrac{8(n-1)}{n^2}$ nên khi chọn $c = c'$ ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + (ka_{n+1})a_1a_2\ldots a_n \geq \frac{n}{t} + ka_{n+1}t^n.$$

Và phần còn lại của bài toán, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{n}{t} + ka_{n+1}t^n + \frac{1}{a_{n+1}} \geq n + 1 + k.$$

Thay $a_{n+1} = n + 1 - nt$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{n}{t} + \frac{1}{n+1-nt} - (n+1) \geq k\left(nt^{n+1} - (n+1)t^n + 1\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{t(n+1-nt)} \geq k(1 + 2t + \ldots + nt^{n-1})$$
$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{8n}{(n+1)^2} \leq \frac{n(n+1)}{t(n+1-nt)(1+2t+\ldots+nt^{n-1})}.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $t \leq 1$ và $t(n+1-nt) \leq \dfrac{(n+1)^2}{4n}$.

Vậy bài toán đã được chứng minh xong bằng phương pháp quy nạp. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. □

Bài toán 2.80 (Phan Thành Nam). *Cho 3 số thực x, y, z không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+z^2} + \sqrt{z+x^2} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề. *Nếu a, b, c, d không âm thoả mãn $a + b = c + d$ và $|a-b| \leq |c-d|$ thì ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{c} + \sqrt{d}.$$

CHỨNG MINH. Theo giả thiết suy ra

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 \geq (c+d)^2 - (c-d)^2 \Rightarrow ab \geq cd.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a + b + 2\sqrt{ab} \geq c + d + 2\sqrt{cd} \Leftrightarrow ab \geq cd \quad \text{(đúng!)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên suy ra

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y+z^2} \geq (x+y) + \sqrt{z+y^2}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2} &\ge (x+y)+\sqrt{z+y^2}+\sqrt{z+x^2}\\ &\ge x+y+\sqrt{(\sqrt{z}+\sqrt{z})^2+(x+y)^2}\\ &= 1-z+\sqrt{4z+(1-z)^2}=2.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1/3$ hoặc $x=1, y=z=0$ hoặc các hoán vị. □

Bài toán 2.81 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi a,b,c không âm*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\ge 2.$$

LỜI GIẢI. Xét khai triển bình phương sau

$$\begin{aligned}& (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2\ge 0\\ \Rightarrow\quad & (a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2)^2\ge 0\\ \Rightarrow & \sum_{sym}a^4(b^2+c^2)+2abc\sum_{sym}a^2(b+c)\ge 2\sum_{sym}a^3b^3+6a^2b^2c^2+2abc\sum_{sym}a^3 \qquad (*)\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sum_{sym}a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)\ge 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\\ \Leftrightarrow\quad & 2abc\Big(\sum_{sym}a^2(b+c)\Big)+\sum_{sym}a^4(b^2+c^2)+abc\sum_{sym}b^2(a+c)\\ &\ge 4a^2b^2c^2+2\sum_{sym}a^3b^3+2abc\sum_{sym}a^3.\end{aligned}$$

Rõ ràng bất đẳng thức trên được suy ra trực tiếp từ $(*)$,

$$VT-VP=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+2a^2b^2c^2+abc\sum_{sym}a^2(b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc hoán vị. □

Nhận xét. Một bài toán giải theo cách tương tự là

$$\frac{a(b+c-a)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a-b)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b-c)}{c^2+2ab}\ge 0.$$

Bài toán 2.82 (Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinesscu). *Giả sử* $a^4+b^4+c^4=3$, *chứng minh rằng*

$$(ab)^5+(bc)^5+(ca)^5 \le 3.$$

LỜI GIẢI. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$a^4+b^4+2 \le 4ab \Rightarrow 4(ab)^5 = 4a^4b^4.ab \le a^4b^4(a^4+b^4+2).$$

Đặt $x=a^4, y=b^4, z=c^4, t=d^4$, ta phải chứng minh với $x+y+z=3$

$$\begin{aligned}
&xy(x+y+2)+yz(y+z+2)+zx(z+x+2) \le 12\\
&\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)+2(xy+yz+zx) \le 12+3xyz\\
&\Leftrightarrow 5(xy+yz+zx) \le 12+3xyz.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức quen thuộc

$$(3-2x)(3-2y)(3-2z) \le xyz \Rightarrow 3xyz+9 \ge 4(xy+zx+zx).$$

Mặt khác, hiển nhiên $xyz \le 1$, nên từ 2 bất đẳng thức trên ta có *đpcm*.
Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x=y=z=1$, hay $a=b=c=1$. □

Nhận xét. Xét bất đẳng thức tổng quát sau đây

Bài toán. *Giả sử* a, b, c *là các số thực dương có tổng bằng* 3, *hãy tìm số* k *lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k \le 3.$$

LỜI GIẢI. Để giải bài toán trên, ta phải dùng phương pháp dồn biến. Hiển nhiên với mọi $k \le 0$ thì bất đẳng thức trên không đúng. Ta xét trong trường hợp $1 \le k \le 2$. Đặt $t=(a+b)/2, u=(a-b)/2 \Rightarrow a=t+u, b=t-u$. Đặt

$$\begin{aligned}
f(u) &= c^k\left((t+u)^k+(t-u)^k\right)+(t^2-u^2)^k,\\
f'(u) &= kc^k\left((t+u)^{k-1}-(t-u)^{k-1}\right)-2ku(t^2-u^2)^{k-1}\\
f'(u) &= kc^k(t^2-u^2)^{k-1}\left(\frac{1}{(t-u)^{k-1}}-\frac{1}{(t+u)^{k-1}}-\frac{2u}{c^k}\right).
\end{aligned}$$

Theo định lí *Lagrange* với hàm $g(x)=x^{1-k}$, tồn tại $t_0 \in [t-u, t+u]$ sao cho

$$\begin{aligned}
&(t+u)^{1-k}-(t-u)^{1-k} = 2u(1-k)t_0^{-k}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{(t-u)^{k-1}}-\frac{1}{(t+u)^{k-1}} = \frac{2u(k-1)}{t_0^k}.
\end{aligned}$$

Vì $t_0 \geq t - u \geq c$ nên $t_0^k \geq c^k$, mặt khác do $k \leq 2$ nên

$$\frac{1}{(t-u)^{k-1}} - \frac{1}{(t+u)^{k-1}} = \frac{2u(k-1)}{t_0^k} \leq \frac{2u}{c^k}.$$

Do đó $f'(u) \leq 0 \Rightarrow f(u) \leq f(0)$. Với kết quả này ta chỉ cần xét bài toán khi $a = b \geq 1 \geq c$. Xét hàm số một biến của a

$$\begin{aligned} h(a) &= 2a^k(3-2a)^k + a^{2k}, \\ h'(a) &= 2ka^{k-1}(3-2a)^k - 4ka^k(3-2a)^{k-1} + 2ka^{2k-1} \\ &= 2ka^{k-1}(3-2a)^{k-1}\left(3 - 4a + \frac{a^k}{(3-2a)^{k-1}}\right). \end{aligned}$$

Xét phương trình

$$h'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{a^k}{(3-a)^{k-1}} = 4a - 3.$$

Rõ ràng phương trình vô nghiệm khi $a \leq 3/4$, ta chỉ cần xét khi $a \geq 3/4$, khi đó phương trình tương đương với

$$k\ln a - (k-1)\ln(3-2a) = \ln(4a-3).$$

Xét hàm số sau

$$\begin{aligned} q(a) &= k\ln a - (k-1)\ln(3-2a) - \ln(4a-3), \\ q'(a) &= \frac{k}{a} + \frac{2(k-1)}{3-2a} - \frac{4}{4a-3}, \\ aq'(a) &= k + \frac{(k-1)a}{3-a} - \frac{4a}{4a-3}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng các hàm số $a/(3-a)$ và $-a/(4a-3)$ là các hàm tăng nên phương trình $aq'(a) = 0$ có không quá 1 nghiệm, do đó phương trình $q(a) = 0$ có không quá 2 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình $h'(a) = 0$ có không quá 2 nghiệm. Do $h'(1) = 0$ và $q'(1) = k + 2(k-1) - 4 = 3k - 6 \leq 0$ nên từ bảng biến thiên ta suy ra

$$h(a) \leq \max\left(h(1), h\left(\frac{3}{2}\right)\right).$$

Bài toán được chứng minh khi $2 \geq k \geq 1$. Nếu $k \leq 1$ thì

$$3\left((ab)^k + (bc)^k + (ca)^k\right) \leq (a^k + b^k + c^k)^2 \leq 3.$$

Còn nếu $k \geq 2$, với giả thiết $a \geq b \geq c$, ta sẽ chứng minh

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq (ab + ac)^k,$$

Nhưng điều này hiển nhiên vì $VP \geq (ab)^k + (bc)^k + a^{k-2}bc \geq VT$.

Ngoài ra $a(b+c) = a(3-a) \leq 9/4$ nên

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}.$$

Từ các chứng minh trên ta đi đến kết luận sau

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \max\left(3, (\frac{3}{2})^{2k}\right).$$

Và hằng số k tốt nhất cần tìm là $\dfrac{\ln 3}{2(\ln 3 - \ln 2)}$. □

Bài toán 2.83. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d, e ta có*

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{d+e}{2}\cdot\frac{e+a}{2} \geq \frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{b+c+d}{3}\cdot\frac{c+d+e}{3}\cdot\frac{d+e+a}{3}\cdot\frac{e+a+b}{3}.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng tính chất sau

Bổ đề. *Với mọi số thực không âm a, b với $a + b \leq 1$ thì*

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right) \geq \left(\frac{2}{a+b} - 1\right)^2.$$

CHỨNG MINH. Bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq \frac{4}{(a+b)^2} - \frac{4}{a+b}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{ab} - \frac{4}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)^2} \geq \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\\
\Leftrightarrow\ &(a-b)^2(1-a-b) \geq 0.
\end{aligned}$$

Bổ đề đã được chứng minh xong.

Vào bài toán, không mất tính tổng quát giả sử $a + b + c + d + e = 1$, bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a+b+c}{d+e}\cdot\frac{b+c+d}{e+a}\cdot\frac{c+d+e}{a+b}\cdot\frac{d+e+a}{b+c}\cdot\frac{e+a+b}{c+d} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{d+e} - 1\right)\left(\frac{1}{e+a} - 1\right)\left(\frac{1}{a+b} - 1\right)\left(\frac{1}{b+c} - 1\right)\left(\frac{1}{c+d} - 1\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^5.$$

Sử dụng tính chất vừ nêu, ta có

$$\left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{a+b}-1\right) \geq \left(\frac{2}{d+e+a+b}-1\right)^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{d+e}-1\right)\left(\frac{1}{a+b}-1\right) \geq \left(\frac{2}{1-c}-1\right)^2.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\left(\frac{1}{e+a}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right) \geq \left(\frac{2}{1-d}-1\right)^2,$$
$$\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{c+d}-1\right) \geq \left(\frac{2}{1-e}-1\right)^2,$$
$$\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{d+e}-1\right) \geq \left(\frac{2}{1-a}-1\right)^2,$$
$$\left(\frac{1}{c+d}-1\right)\left(\frac{1}{e+a}-1\right) \geq \left(\frac{2}{1-b}-1\right)^2.$$

Bước cuối cùng, ta sẽ chứng minh rằng

$$\left(\frac{2}{1-a}-1\right)\left(\frac{2}{1-b}-1\right)\left(\frac{2}{1-c}-1\right)\left(\frac{2}{1-d}-1\right)\left(\frac{2}{1-e}-1\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^5 \quad (1)$$

Thật vậy, xét hàm số sau với $x \geq 0$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{1-x}-1\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$
$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức *Jensen* ta có

$$f(a)+f(b)+f(c)+f(d)+f(e) \geq 5f\left(\frac{a+b+c+d+e}{5}\right) = 5f(1/5) = 5\ln(3/2).$$

Vậy (1) được chứng minh xong, do đó bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 2.84. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

LỜI GIẢI. Ta có

$$\frac{2a^4}{a^3+b^3}-a=\frac{a(a^3-b^3)}{a^3+b^3}=\frac{a(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^3+b^3}.$$

Do đó

$$\frac{2a^4}{a^3+b^3}-a-\frac{3(a-b)}{2}=(a-b)\left(\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a^3+b^3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{2b^2+ab-b^2}{3(a^3+b^3)}(a-b)^2.$$

Vậy bất đẳng thức được viết dưới dạng tương đương là

$$S_a(b-c)^2+S_b(a-c)^2+S_c(a-b)^2\geq 0,$$

Trong đó các hệ số S_a, S_b, S_c được xác định bởi

$$S_a=\frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3},\qquad S_b=\frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3},\qquad S_c=\frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}.$$

+, Trường hợp 1. $a\geq b\geq c$. Khi đó dễ thấy

$$S_b+2S_c\geq 0\quad (\Leftrightarrow \frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3}+\frac{2(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3}\geq 0),$$
$$a^2S_b+2b^2S_a\geq 0\quad (\Leftrightarrow \frac{a^2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3}+\frac{2b^2(3c^2+bc-b^2)}{b^3+c^3}\geq 0).$$

Do đó

$$\begin{aligned}&2S_a(b-c)^2+2S_b(c-a)^2+2S_c(a-b)^2\\ &\geq (S_b+2S_c)(a-b)^2+(b-c)^2(2S_a+\frac{a^2}{b^2}S_b)\geq 0.\end{aligned}$$

+, Trường hợp 2. $c\geq b\geq a$. Hoàn toàn tương tự

$$S_c+2S_b\geq 0\quad (\Leftrightarrow \frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}+\frac{2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3}\geq 0),$$
$$S_a+2S_b\geq 0\quad (\Leftrightarrow \frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3}+\frac{2(3a^2+ca-c^2)}{c^3+a^3}\geq 0).$$

Do đó

$$\begin{aligned}&2S_a(b-c)^2+2S_b(c-a)^2+2S_c(a-b)^2\\ &\geq (S_a+2S_b)(b-c)^2+(2S_b+S_c)(a-b)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. ☐

Bài toán 2.85 (Lê Trung Kiên). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương*

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{3}}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x^2=a, y^2=b, z^2=c$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}.$$

Bình phương cả 2 vế ta được bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\frac{x^6}{x^4+x^2y^2+y^4}+2\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}$$
$$\geq \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{3}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{6x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}+\frac{3}{2}\sum_{cyc}\frac{x^6-y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$\geq \frac{1}{2}\sum_{sys}\left(x^2+y^2+4xy-\frac{3(x^6+y^6)}{x^4+x^2y^2+y^4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{6x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}} \geq \sum_{sym}\frac{6x^3y^3-(x-y)^4(x+y)^2}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

Mặt khác, dễ thấy

$$\frac{x^3y^3}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}, \frac{y^3z^3}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}}, \frac{z^3x^3}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}, \frac{1}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}}, \frac{1}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}},$$

là 2 bộ đơn điệu ngược chiều, nên theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}} \geq \sum_{sym}\frac{x^3y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c$. ☐

Bài toán 2.86 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử a, b, c không âm thoả mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{1+c^2}+\frac{bc}{1+a^2}+\frac{ca}{1+b^2} \leq 1.$$

LỜI GIẢI. Xét các biểu thức

$$\begin{aligned}
x &= ab+bc+ca, p = abc \Rightarrow x \le 4/3,\\
A &= (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = 4x^2(1-x)+4(9x-8)p-27p^2,\\
B &= \sum_{sym} a^2(a-b)(a-c) = 12p+4(1-x)(4-x).
\end{aligned}$$

Khai triển bất đẳng thức trên về dạng

$$(1-x)(5-2x+x^2)+(6x-2)p-2p^2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 6A+\frac{5}{2}(1+9x)B+(1-x)^2(365-147x) \ge 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2.87 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S = a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

LỜI GIẢI. Bài toán này đã được giới thiệu ở chương trước, đây là một bài toán đại diện cho phương pháp dồn biến cổ điển có nhiều ý nghĩa. Điều đặc biệt là, trong bài giải, chúng ta phải kết hợp được 2 kiểu dồn biến thường dùng.

$$f(a) = f(a_1,a_2,...,a_n) = a_1^2+a_2^2+...+a_n^2+a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

Khi đó ta có 2 đẳng thức rất đặc biệt

$$\begin{aligned}
&f(a_1,a_2,..,a_n)-f(0,a_1+a_2,a_3,...,a_n)\\
&\qquad = a_1a_2\left(a_3a_4...a_n\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_n}\right)-2\right) \qquad (*)\\
&f(a_1,a_2,...,a_n)-f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,...,a_n\right)\\
&\qquad = \frac{(a_1-a_2)^2}{4}\left(2-a_3a_4...a_n\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_n}\right)\right) \ (**)
\end{aligned}$$

Từ 2 đẳng thức trên ta có

$$(f(a)-f(0,a_1,a_2,...,a_n))\left(f(a)-f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,...,a_n\right)\right) \le 0.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Xét phép biến đổi

$$a_i, a_j \rightarrow \frac{a_i + a_j}{2}, \frac{a_i + a_j}{2}.$$

Phép biến đổi này không tăng giá trị của f nếu $\prod_{k \neq i,j} a_k \left(\sum_{k \neq i,j} \frac{1}{a_k}\right) \leq 2$.

Nếu $a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_{n-2}} \left(\frac{1}{a_{i_1}} + \frac{1}{a_{i_2}} + ... + \frac{1}{a_{i_{n-2}}}\right) < 2$ sau mọi phép biến đổi như trên và với mọi tập con $\{i_1, i_2, ..., i_{n-2}\} \subset \{1, 2, ..., n\}$. Thế thì từ đẳng thức $(**)$ ta suy ra f đạt giá trị nhỏ nhất khi tất cả các số đều bằng nhau, lúc đó có thể thấy $n \leq 4$.

Nếu không, tồn tại 1 dãy biến đổi làm cho $\prod_{k=1,n-2} a_{i_k} \left(\sum_{k=1,n-2} \frac{1}{a_{i_k}}\right) \geq 2$.

Khi đó từ $(*)$ ta suy ra f đạt min nếu có số nhỏ nhất bằng 0.
Ta cho $a_n = 0$ và khi đó

$$f = g(a) = g(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2 + a_1 a_2 ... a_{n-1}.$$

Hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng có đẳng thức

$$\left[g(a) - g(0, a_1 + a_2, a_3, ..., a_{n-1})\right] \left[g(a) - g\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, ..., a_{n-1}\right)\right] \leq 0.$$

Và cũng lí luận hoàn toàn tương tự với hàm g ta suy ra $g(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi tất cả $n-1$ số bằng nhau hoặc có 1 số bằng 0 và còn lại $n-2$ số, hiển nhiên sẽ bằng nhau để g đạt min.

Kết luận : Giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là

$$\min\left(2n, \frac{n^2}{n-1} + \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}, \frac{n^2}{n-2}\right).$$

Nhận xét. Một hệ quả hiển nhiên của bài toán này, cũng là 1 phần trong chứng minh trên. Ta lấy cho 1 số a_k một giá trị bất kì, suy ra bất đẳng thức sau

Bài toán. *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n. Khi đó*

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + k a_1 a_2 ... a_n \geq \min\left(n + k, \frac{n^2}{n-1}\right).$$

Bài toán 2.88 (Phạm Kim Hùng). *Giả sử x, y, z là các số thực dương thoả mãn hệ thức $2xyz = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = 3x + 2y + z.$$

LỜI GIẢI. Đặt $a = 3x, b = 2y, z = c$, khi đó

$$a + b + c = 3x + 2y + z\ ,\ a^2 + 3b^2 + 15c^2 = abc.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a + b + c \geq (2a)^{1/2}(3b)^{1/3}(6c)^{1/6},$$

$$a^2 + 3b^2 + 15c^2 \geq (4a^2)^{1/4}(9b^2)^{3/9}(36c^2)^{15/36} = (4a^2)^{1/4}(9b^2)^{1/3}(36c^2)^{5/12}$$

Nhân vế 2 bất đẳng thức trên cho ta

$$(a + b + c)(a^2 + 3b^2 + 15c^2) \geq 36abc \Rightarrow a + b + c \geq 36.$$

Giá trị nhỏ nhất của $3x + 2y + z$ là 36, ứng với $x = y = z = 6$. □

Nhận xét. Ta có bài toán tổng quát như sau

Bài toán. *Giả sử a, b, c là các số thực dương cho trước và $x, y, z \geq 0$ thoả mãn*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = abc.$$

a, Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực dương k sao cho

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+a}} + \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+b}} + \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+c}}.$$

b, Chứng minh rằng khi đó ta có bất đẳng thức

$$x + y + z \geq \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{k+a})(\sqrt{k} + \sqrt{k+b})(\sqrt{k} + \sqrt{k+c})}{\sqrt{k}}$$

Chứng minh. Câu (a) rất đơn giản. Nhân $\sqrt{k}$ vào 2 vế và xét

$$f(k) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k+a}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k+b}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + \sqrt{k+c}} - \frac{1}{2} = 0.$$

Vì $f(k)$ là hàm tăng của $k, f(0) = -1/2, \lim_{k\to\infty} f(k) = 1$. Do tính liên tục nên phương trình $f(k) = 0$ có nghiệm k duy nhất.

Câu (b) ta sử dụng phương pháp cân bằng hệ số.

Lấy m, n, p, m_1, n_1, p_1 là các số thực dương thoả mãn

$$m + n + p = 1, am_1 + bn_1 + cp_1 = 1.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$x + y + z \geq \left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \left(\frac{z}{p}\right)^p,$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \geq \left(\frac{x^2}{m_1}\right)^{am_1} \left(\frac{y^2}{bn_1}\right)^{n_1} \left(\frac{z^2}{p_1}\right)^{cp_1}$$

Nhân vế 2 bất đẳng thức trên cho ta

$$(x+y+z)(ax^2+by^2+cz^2) \geq \frac{x^{m+2am_1}y^{n+2bn_1}z^{p+2cp_1}}{m^m n^n p^p m_1^{am_1} n_1^{bn_1} p_1^{cp_1}}.$$

Bây giờ ta sẽ chọn m, n, p, m_1, n_1, p_1 thoả mãn các điều kiện sau

- $m + 2am_1 = n + 2bn_1 = p + 2cp_1 = 1.$
- $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}, \frac{x^2}{m_1} = \frac{y^2}{n_1} = \frac{z^2}{p_1}.$

Điều kiện (ii) tương đương với tồn tại số l để

$$\frac{m^2}{m_1} = \frac{n^2}{n_1} = \frac{p^2}{p_1} = 8l.$$

Thay vào phương trình (i) suy ra

$$\exists m_2 = \frac{1}{m}, n_2 = \frac{1}{n}, p_2 = \frac{1}{p}, \frac{a}{4l} = m_2^2 - m_2, \frac{b}{4l} = n_2^2 - n_2, \frac{c}{4l} = p_2^2 - p_2.$$

Khi đó $1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \sum_{a,b,c} \frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{l} + \sqrt{l+a}}$,

Suy ra $\frac{1}{2\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{l} + \sqrt{l+a}} + \frac{1}{\sqrt{l} + \sqrt{l+b}} + \frac{1}{\sqrt{l} + \sqrt{l+c}}.$

Do tính duy nhất nên $l = k$. Suy ra

$$x+y+z \geq \frac{1}{m^m n^n p^p m_1^{am_1} n_1^{bn_1} p_1^{cp_1}} = \frac{8l}{mnp} = 8lm_2n_2p_2$$

$$\Rightarrow x+y+z \geq \frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k+a})(\sqrt{k}+\sqrt{k+b})(\sqrt{k}+\sqrt{k+c})}{\sqrt{k}}.$$

Vậy $\min(x+y+z) = \frac{(\sqrt{k}+\sqrt{k+a})(\sqrt{k}+\sqrt{k+b})(\sqrt{k}+\sqrt{k+c})}{\sqrt{k}}.$

Đạt được khi $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{mnp}{am^2+bn^2+cp^2}$,

Sau đây là một cách phát biểu khác

Giả sử a, b, c là các số thực dương cho trước và $x, y, z \geq 0$ thoả mãn hệ thức

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = abc.$$

a, Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực dương φ sao cho

$$\frac{2}{1+\sqrt{1+\varphi a}} + \frac{2}{1+\sqrt{1+\varphi b}} + \frac{2}{1+\sqrt{1+\varphi c}} = 1.$$

b, Chứng minh rằng khi đó ta có bất đẳng thức

$$x+y+z \geq \frac{(1+\sqrt{1+a\varphi})(1+\sqrt{1+\varphi b})(1+\sqrt{1+\varphi c})}{\varphi}.$$

Tuy rằng bài toán đã được chứng minh trong trường hợp tổng quát nhưng dạng phát biểu ban đầu của bài toán với các hệ số $2, 3, 4, 5, 3, 2, 1$ là rất đặc biệt, và kì lạ hơn nữa khi biểu thức lại đạt giá trị nhỏ nhất khi các biến a, b, c đều bằng 6. Kết quả đẹp hơn sự mong đợi ban đầu của tác giả.

Bài toán 2.89 (Jack Grafulkel). *Chứng minh với mọi số thực không âm a, b, c*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

LỜI GIẢI. Đầu tiên ta sẽ chứng minh trong trường hợp 1 trong 3 số a, b, c bằng 0. Thật vậy, giả sử $c = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{4}a+\frac{5}{4}b \geq \sqrt{b(a+b)} \\
\Leftrightarrow\ &(a+b)+4b \geq 4\sqrt{b(a+b)}.
\end{aligned}$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$, đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 3b$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh trong trường hợp tổng quát. Đặt

$$x=\sqrt{\frac{a+b}{2}}, y=\sqrt{\frac{a+c}{2}}, z=\sqrt{\frac{b+c}{2}}, k=\frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Giả sử $x = \max(x, y, z)$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{y^2+z^2-x^2}{z}+\frac{z^2+x^2-y^2}{x}+\frac{x^2+y^2-z^2}{y} \leq \frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x+y+z} \\
\Leftrightarrow\ &x+y+z+(x-y)(x-z)(z-y)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \leq k\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (1)
\end{aligned}$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $z \geq y$. Đầu tiên ta sẽ chứng minh với mọi số $t \geq 0$ thì

$$\begin{aligned}
&k\sqrt{(x+t)^2+(b+t)^2+(z+t)^2} \geq k\sqrt{x^2+y^2+z^2}+3t \quad (2) \\
\Leftrightarrow\ &k\sqrt{x^2+y^2+z^2+2t(x+y+z)+3t^2} \geq k\sqrt{x^2+y^2+z^2}+3t.
\end{aligned}$$

Lưu ý rằng $k^2 \geq 3$ và $x + y + z \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Mặt khác vì $x = \max(x, y, z)$ và $x^2 \leq y^2 + z^2$ nên tồn tại số dương $t \leq \min(a, b, c)$ để $(x - t)^2 = (y - t)^2 + (z - t)^2$, đó đó theo chứng minh ở đầu bài toán (có một trong 3 số $a, b, c = 0$) bất đẳng thức (1) đúng khi thay x, y, z bởi $x' = x - t, y' = y - t, z' = z - t$. Vậy ta có

$$x' + y' + z' + (x' - y')(x' - z')(z' - y')\left(\frac{1}{x'y'} + \frac{1}{y'z'} + \frac{1}{z'x'}\right) \leq k\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad (3)$$

Bất đẳng thức (1) có thể viết dưới dạng

$$(x' - y')(x' - z')(z' - y')\left(\frac{1}{(x' + t)(y' + t)} + \frac{1}{(y' + t)(z' + t)} + \frac{1}{(z' + t)(x' + t)}\right) +$$

$$+x' + y' + z' + 3t \leq k\sqrt{(x' + t)^2 + (y' + t)^2 + (z' + t)^2}.$$

Nhưng rõ ràng bất đẳng thức trên có được trực tiếp khi ta cộng bất đẳng thức (3) và bất đẳng thức (2) (trong đó x, y, z thay bởi x', y', z'). Bất đẳng thức đã được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 3t, y = t, z = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Nhận xét. Cách chứng minh trên được suy ra từ nhận xét đơn giản sau : Nếu thay x, y, z bởi $x - t, y - t, z - t$ thì $VP - VT$ của (1) giảm dần, do đó khi ta lấy t đủ lớn để x, y, z suy biến thành độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông thì bất đẳng thức ban đầu trở về trường hợp đơn giản là có một trong 3 số a, b, c bằng 0.

Bài toán 2.90 (Phạm Kim Hùng). *Với a, b, c là các số thực tuỳ ý, chứng minh bất đẳng thức sau đây*

$$\frac{1}{(2a - b)^2} + \frac{1}{(2b - c)^2} + \frac{1}{(2c - a)^2} \geq \frac{11}{7(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Lời Giải. Đặt $x = 2a - b, y = 2b - c, z = 2c - a$. khi đó

$$a = \frac{4x + 2y + z}{7}, b = \frac{4y + 2z + x}{7}, c = \frac{4z + 2x + y}{7},$$

Suy ra
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2}{7}.$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{11}{2(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Do tính đối xứng, có thể giả sử rằng $x, y \geq 0 \geq z$. Nói cách khác ta phải chứng minh bất đẳng thức (sau khi đã đổi dấu của z)

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{11}{2(x + y - z)^2 + x^2 + y^2 + z^2} \geq 0.$$

(i). Nếu $z \geq x+y$, ta chứng minh $f(x,y,z) \geq f(x,y,x+y)$. Thật vậy

$$\frac{f(x,y,z)-f(x,y,x+y)}{z-x-y} = \frac{11(3z-x-y)}{(x^2+y^2+(x+y)^2)(x^2+y^2+z^2+2(z-x-y)^2)} - \frac{x+y+z}{z^2(x+y)^2} \geq 0.$$

(Sử dụng các bất đẳng thức sau

$$3z-x-y \geq x+y+z,$$
$$2(x+y)^2 \geq x^2+y^2+(x+y)^2,$$
$$4z^2 \geq x^2+y^2+z^2+2(z-x-y)^2).$$

Ngoài ra dễ thấy rằng

$$(x^2+y^2+(x+y)^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right) \geq \frac{27}{2}.$$

Do đó $f(x,y,x+y) \geq 0$. Đó là điều phải chứng minh.

(ii). Nếu $x+y \geq z$. Khi đó $f(x,y,z) \geq f(t,t,z)$ với $t = \dfrac{x+y}{2}$.

$$f(t,t,z) = \frac{2}{t^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{11}{2t^2+z^2+(2t-z)^2}.$$

Lấy $z=1$, quy đồng mẫu số rồi đưa về bất đẳng thức với 1 biến của t

$$5t^4-4t^3+6t^2-8t+3 \geq 0 \quad , \quad t \geq \frac{1}{2}.$$

Kiểm tra trực tiếp suy ra bất đẳng thức trên đúng. □

Nhận xét. Hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức ($\forall a,b,c \in R$)

$$\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2} \geq \frac{k}{7(a^2+b^2+c^2)}$$

Là $\min f(x) = 10x^2+\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{16}{x}-8x+23$ với $x \geq \dfrac{1}{2}$.
Có thể tính gần đúng giá trị này $\min f(x) = 11.6075$.

Hệ quả. *Giả sử a,b,c là các số thực tuỳ ý và $(a+b+c)(2a-b)(2b-c)(2c-a) \geq 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2} \geq \frac{27}{22(a^2+b^2+c^2)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = (4k,k,-5k)$ hoặc các hoán vị ($\forall k \in R$).

Thực chất đây chính là trường hợp $z \geq x+y$ trong chứng minh trên.

Bài toán 2.91 (Phạm Kim Hùng). 1. *Các số thực dương a, b, c thoả mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Xét bất đẳng thức*

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

(i). *Chứng minh bất đẳng thức không thể luôn đúng với mọi a, b, c.*
(ii). *Chứng minh rằng bất đẳng thức sẽ đúng nếu a, b, c thoả mãn điều kiện*

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq abc(a^3 + b^3 + c^3).$$

2. *Tìm hằng số dương k lớn nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3\sqrt[k]{\frac{a^k + b^k + c^k}{3}}.$$

LỜI GIẢI. 1.(i). Cho $a = b = 0.8, c = \sqrt[3]{1.976}$.
(ii). Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$a^2b + b^2a + 1 \geq 3ab,$$
$$b^2c + c^2b + 1 \geq 3bc,$$
$$c^2a + a^2c + 1 \geq 3ca,$$
$$\Rightarrow abc\,(ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)) \geq abc(ab + bc + ca).$$

Từ đó kết hợp với điều kiện $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq abc(a^3 + b^3 + c^3) = 3abc$ ta suy ra

$$(ab + bc + ca)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abc(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3abc \Rightarrow \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

2. Ta xét bài toán ngược lại, giả sử rằng a, b, c là các số thực thoả mãn

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} = 3,$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$S = a^k + b^k + c^k.$$

Đặt $x = ab/c, y = bc/a, z = ca/b$. Khi đó $x + y + z = 3$.

$$S = (xy)^{k/2} + (yz)^{k/2} + (zx)^{k/2}.$$

Theo một kết quả quen biết thì

$$S \leq \max\left(3, \frac{3^k}{2^k}\right).$$

Và do đó giá trị tốt nhất để bất đẳng thức còn đúng là

$$3 = 3^k/2^k \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \approx 2.709511\ldots < 3. \quad \square$$

Bài toán 2.92 (Vasile Cirtoaje). *Các a, b, c, d là các số thực không âm thoả mãn $a+b+c+d=4$. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-abc} \le 1.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = abc, y = bcd, z = cda, t = dab$. Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} + \frac{1}{5-z} + \frac{1}{5-t} \le 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{5-x} + \frac{1-y}{5-y} + \frac{1-z}{5-z} + \frac{1-t}{5-t} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)(x+2)}{(5-x)(x+2)} + \frac{(1-y)(y+2)}{(5-y)(y+2)} + \frac{(1-z)(z+2)}{(5-z)(z+2)} + \frac{(1-t)(t+2)}{(5-t)(t+2)} \ge 0.$$

Dễ thấy nếu $x \ge y$ thì $2 - x - x^2 \le 2 - y - y^2 \Rightarrow (1-x)(2+x) \le (1-y)(2+y)$. Hơn nữa theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$x + y = bc(a+d) \le \frac{1}{3}(b+c+a+d)^3 = \frac{64}{27} < 3.$$

nên ta có $(5-x)(x+2) - (5-y)(y+2) = (x-y)(5-x-y) \ge 0$.

Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev* suy ra

$$4\left(\sum_{x,y,z,t} \frac{(1-x)(x+2)}{(5-x)(x+2)}\right) \ge \left(\sum_{x,y,z,t} (1-x)(x+2)\right)\left(\sum_{x,y,z,t} \frac{1}{(5-x)(x+2)}\right).$$

Và bây giờ ta cần chứng minh

$$\sum_{x,y,z,t} (1-x)(x+2) = 8 - x - y - z - t - x^2 - y^2 - z^2 - t^2 \ge 0$$
$$f(a,b,c,d) = abc + bcd + cda + dab + a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c \ge d$.
Đặt $m = (a+c)/2, u = (a-c)/2, t' = m^2, v = u^2$ và

$$g(u^2) = (m^2 - u^2)(b+d) + 2bdm + (m^2 - u^2)^2(b^2 + d^2) + 2b^2d^2(m^2 + u^2),$$
$$g(v) = (t' - v)(b+d) + (t' - v)^2(b^2 + d^2) + 2b^2d^2(t' + v) + 2\sqrt{t'}bd,$$
$$g'(v) = -(b+d) - 2(t' - v)(b^2 + d^2) + 2b^2d^2.$$

Bởi vì $t' - v = ac \geq bd$ nên $g'(v) \leq 0 \Rightarrow f(a,b,c,d) = g(v) \leq g(0)$.

Vậy ta chứng minh bài toán khi $a = b = c = \alpha, d = 4 - 3\alpha$. Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}
&\alpha^3 + 3\alpha^2(4-3\alpha) + \alpha^6 + 3\alpha^4(4-3\alpha)^2 \leq 8\\
\Leftrightarrow&(\alpha-1)^2(7\alpha^4 - 4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha - 2) \leq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng, vì $\alpha \leq 4/3$ nên $7\alpha^4 - 4\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4\alpha - 2 \leq 0$.
Bài toán đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c = d = 1$. □

Nhận xét. Từ bất đẳng thức trên ta có thể suy ra kết quả tổng quát là

Bài toán. *Chứng minh với mọi dãy số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng $n, n \geq 4$ thì*

$$\frac{1}{n+1-b_1} + \frac{1}{n+1-b_2} + ... + \frac{1}{n+1-b_n} \leq 1,$$

Trong đó $b_k = a_1a_2...a_{k-1}a_{k+1}...a_n \ \forall k = \overline{1,n}$.

Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp, lưu ý rằng trong lời giải đó thì xét với $n = 4$ lại là phần khó nhất, nhưng đã được chứng minh ở trên.

Bài toán 2.93 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh với mọi số thực a, b, c không âm ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}.$$

LỜI GIẢI. Giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $t = \frac{a+b}{2} \geq c$, ta có

$$\begin{aligned}
&(4a^2+bc)(4b^2+ca) \leq (4t^2+tc)^2\\
\Leftrightarrow\ & 16a^2b^2 + 4(a^3+b^3)c + abc^2 \leq (a+b)^4 + (a+b)^3c + \frac{1}{4}(a+b)^2c^2\\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^2\left(\frac{1}{4}c^2 + a^2 + b^2 + 6ab - 3ca - 3cb\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, vì $a \geq b \geq c$. Vậy

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} = f(t,c).$$

Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}
&f(t,c) \geq \frac{4}{a+b+c} = \frac{4}{2t+c}\\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}} - \frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} - \frac{1}{t}\right) \geq \frac{4}{2t+c} - \frac{2}{t}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-c}{\sqrt{4t^2+tc}(2t+\sqrt{2t^2+tc})}+\frac{-4c^2}{t\sqrt{4c^2+t^2}(t+\sqrt{4c^2+t^2})}\geq \frac{-2c}{t(2t+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}(2t+\sqrt{2t^2+tc})}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}(t+\sqrt{4c^2+t^2})}\geq 0.$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh hai bất đẳng thức sau

(i). Chứng minh

$$\frac{1}{3t(2t+c)}\geq \frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}(2t+\sqrt{2t^2+tc})}$$

$$\Leftrightarrow 9t^2(2t+c)^2\leq (4t^2+tc)(2t+\sqrt{4t^2+tc})^2$$

$$\Leftrightarrow t^2+6tc+2c^2\leq 2t\sqrt{4t^2+tc}+c\sqrt{4t^2+tc}.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $t\geq c$.

(ii). Chứng minh

$$\frac{5}{3t(2t+c)}\geq \frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}(t+\sqrt{4c^2+t^2})}$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{4c^2+t^2}(t+\sqrt{4t^2+c^2})\geq 12c(2t+c).$$

Chú ý rằng $\sqrt{5(4c^2+t^2)}\geq 4c+t$ nên ta có

$$VT\geq (4c+t)(4c+(\sqrt{5}+1)t)\geq 12c(2t+c)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5}+1)t^2+(16-4\sqrt{5})tc+4c^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng, vì $\Delta<0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc hoán vị. □

Nhận xét. Xét bài toán mở rộng

Bài toán. *Tìm hằng số dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng với các bộ số thực không âm a,b,c tùy ý*

$$\frac{1}{\sqrt{k^2a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{k^2b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{k^2c^2+ab}}\geq \frac{4+2k}{k(a+b+c)}.$$

Bằng cách tương tự, ta tìm được k là nghiệm dương của phương trình đại số

$$\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4+2k}{3k}.$$

Bài toán 2.94. *Chứng minh với mọi a,b,c không âm thì*

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq \frac{a+b+c}{3}.$$

LỜI GIẢI. Ta có

$$\frac{3a^3}{2a^2+b^2} - a = \frac{a(a+b)(a-b)}{2a^2+b^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{3a^3}{2a^2+b^2} - a - \frac{2(a-b)}{3} = (a-b)\left(\frac{a(a+b)}{2a^2+b^2} - \frac{2}{3}\right) = (a-b)^2\frac{2b-a}{3(2a^2+b^2)}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}(a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2}(b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2}(c-a)^2 \geq 0.$$

Xét các trường hợp sau đây.

+, Trường hợp 1 . $a \geq b \geq c$. Khi đó

$$\frac{4b}{2a^2+b^2} - \frac{c}{2c^2+a^2} \geq 0, \frac{-2a}{2a^2+b^2} + \frac{2a}{2c^2+a^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4b-2a}{2a^2+b^2} + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad .$$

$$\Rightarrow \frac{4b-2a}{2a^2+b^2}(a-b)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2}(c-a)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{(4c-2b)b^2}{2b^2+c^2} + \frac{(2a-c)a^2}{2c^2+a^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4c-2b}{2b^2+c^2}(b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2}(c-a)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Cộng vế (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

+, Trường hợp 2 . $c \geq b \geq a$. Xét thêm 2 trường hợp nhỏ

(i). Nếu $2b \geq a+c$. Ta sẽ chứng minh 2 bất đẳng thức sau

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + 4\frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0.$$

Thật vậy, dễ thấy vế trái là hàm tăng của c nên chỉ cần chứng minh khi $c = b$, hay

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{8a-4b}{2b^2+a^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$4b^3 + 2ba^2 - 2ab^2 - a^3 + 16a^3 - 8a^2b + 8ab^2 - 4b^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 15a^3 - 6a^2b + 6ab^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 2ab + 2b^2 \geq 0 \quad \text{(đúng!)}.$$

Do đó

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}(c-a)^2$$
$$\geq \frac{2b-a}{4(2a^2+b^2)}(c-a)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}(c-a)^2 \geq 0.$$

(ii). Nếu $2b \leq a+c$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{6a-3c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad (3)$$

Thật vậy, vì VT là hàm tăng của c nên chỉ cần chứng minh khi $c = 2b-a$. Bất đẳng thức (3) trở thành

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{9a-6b}{8b^2+3a^2-8ab} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 10b^3-15b^2a+2a^2b+15a^3 \geq 0.$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$

$$10b^3+15a^3 \geq 3\sqrt[3]{5b^3.5b^3.15a^3} \geq 15b^2a$$

$$\frac{2c-b}{2b^2+c^2}+\frac{3}{2}.\frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad (4)$$

Thật vậy, vì biểu thức vế trái là hàm giảm của a nên ta chỉ cần chứng minh khi $a=b$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{4c-2b}{2b^2+c^2}+\frac{6b-3c}{2c^2+b^2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 5c^3+2c^2b-2b^2c+10b^3 \geq 0 \quad \text{(đúng!)}.$$

Từ 2 bất đẳng thức trên, với chú ý rằng $(c-a)^2 \leq 3(b-a)^2+\frac{3}{2}(c-b)^2$ ta có

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}(c-a)^2$$
$$\geq \left(\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+3\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\right)(a-b)^2+\left(\frac{2c-b}{2b^2+c^2}+\frac{3}{2}.\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\right)(b-c)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Bài toán 2.95 (IMO Shortlist 2003). *Cho n là một số nguyên dương và hai dãy số thực dương $(x_1, x_2, .., x_n)$; $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Giả sử rằng $(z_2, z_3, ..., z_{2n})$ là một dãy số dương thoả mãn điều kiện*

$$z_{i+j}^2 \geq x_i y_j \ \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Đặt $M = \max\{z_2, ..., z_{2n}\}$. *Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{M + z_2 + ... + z_{2n}}{2n}\right)^2 \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

LỜI GIẢI. Đặt $X = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và $Y = \max\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $X = Y = 1$ (nếu không thay thế x_i bởi $x_i/X, y_i$ bởi $y_i/Y, z_i$ bởi $z_i/\sqrt{XY}$).

Bằng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$M + z_2 + ... + z_{2n} \geq x_1 + x_2 + ... + x_n + y_1 + y_2 + ... + y_n \quad (*)$$

Để chứng minh bất đẳng thức trên, trước hết ta sẽ chứng minh rằng với mọi $r > 0$, số các số hạng lớn hơn r trong vế phải không vượt quá số các số hạng lớn hơn r trong vế trái. Thật vậy, rõ ràng khẳng định đúng nếu $r > 1$ (vì không có số hạng nào ở vế phải lớn hơn r). Ta xét với $r < 1$. Đặt

$$A = \{i \in N,\ 1 \leq i \leq n \mid x_i > r\},\ a = |A|,$$

$$B = \{i \in N,\ 1 \leq i \leq n \mid y_i > r\},\ b = |B|.$$

Ta có $a, b \geq 1$. Giả sử $A = \{i_1, i_2, ..., i_a\}$ và $B = \{j_1, j_2, ..., j_b\}$ với $i_1 < i_2 < ... < i_a$, $j_1 < j_2 < ... < j_b$. Khi đó có ít nhất $a + b - 1$ số hạng của dãy $z_2, z_3, ..., z_{2n}$ lớn hơn r là

$$z_{i_1+j_1}, z_{i_1+j_2}, ..., z_{i_1+j_b}, z_{i_2+j_b}, ..., z_{i_a+j_b}.$$

Mặt khác, vì $a + b - 1 \geq 1$ nên ít nhất có một số z_i nào đó lớn hơn r, vậy $M > r$. Do đó có ít nhất $a + b$ số hạng ở vế trái của $(*)$ lớn hơn r *(đpcm)*.

Từ tính chất trên suy ra, với mọi $k, 1 \leq k \leq 2n$, số lớn thứ k trong các số hạng ở vế trái không nhỏ hơn số lớn thứ k trong các số hạng ở vế phải. Do đó đương nhiên tổng các số hạng ở vế trái lớn hơn tổng các số hạng ở vế phải. Bất đẳng thức được chứng minh. ❑

Bài toán 2.96 (Vasile Cirtoaje, Phạm Kim Hùng). *(i). Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực tuỳ ý ta luôn có*

$$a^4 + b^4 + c^4 + ab^3 + bc^3 + ca^3 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a).$$

(ii). Giả sử a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$. Chứng minh rằng

$$a^3b + b^3c + c^3a + abc(a + b + c) \leq 6.$$

(iii). Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) sao cho bất đẳng thức sau

$$a^4 + b^4 + c^4 + k(ab + bc + ca)^2 \geq (1 + 3k)(a^3b + b^3c + c^3a)$$

luôn đúng với mọi $a, b, c \in R$.

LỜI GIẢI. Xét khai triển sau

$$(x^2 - kxy + kxz - z^2)^2 + (y^2 - kyz + kyx - x^2)^2 + (z^2 - kzx + kzy - y^2)^2 \geq 0.$$

Từ khai triển trên ta suy ra

$$\begin{aligned} &x^4 + y^4 + z^4 + (k^2 - 1)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + k(xy^3 + yz^3 + zx^3) \\ &\quad \geq 2k(x^3y + y^3z + z^3x) + (k^2 - k)xyz(x + y + z). \end{aligned}$$

(i). Cho $k = 1$ ta được

$$x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq 2(x^3y + y^3z + z^3x).$$

(ii). Cho $k = 2$ ta được

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 + z^2)^2 + (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + (xy^3 + yz^3 + zx^3) \\ &\quad \geq 4(x^3y + y^3z + z^3x) + 2xyz(x + y + z) \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)^2 \geq 6(x^3y + y^3z + z^3x) + 6xyz(x + y + z). \end{aligned}$$

Vậy nếu $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$ thì

$$a^3b + b^3c + c^3a + abc(a + b + c) \leq 6.$$

(iii). Xét khai triển sau

$$\begin{aligned} &\left((a - b)^2 + 2c(a - c)\right)^2 + \left((b - c)^2 + 2a(b - a)\right)^2 + \left((c - a)^2 + 2b(c - b)\right)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 6(a^4 + b^4 + c^4) + 4abc(a + b + c) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 12(a^3b + b^3c + c^3a) \\ \Leftrightarrow\ & a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2 \geq 2(a^3b + b^3c + c^3a). \end{aligned}$$

Vậy hằng số k tốt nhất (lớn nhất) cho bất đẳng thức là $k = 1/3$. □

Nhận xét. Chú ý rằng trong các bất đẳng thức trên, luôn có đẳng thức khi các biến a, b, c bằng nhau nhưng mỗi bất đẳng thức luôn có một trường hợp đẳng thức đặc biệt khác, chẳng hạn ở câu (i) có đẳng thức khi

$$a = 2\cos 20 + 1 \approx 2.88, b = 2\cos 40 \approx 1.532, c = -1.$$

Bài toán 2.97 (Phạm Kim Hùng). *Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng với mọi hằng số dương $k, n \geq 2$ thì*

$$(k + a^n)(k + b^n)(k + c^n)(k + d^n) \geq (k + 1)^4.$$

LỜI GIẢI. Đối với bài toán này, cần có một nhận xét quan trọng giúp cho việc giải bài toán trở nên đơn giản hơn, đó là bất đẳng thức sẽ đúng với mọi $k, n \geq 2$ khi và chỉ khi bất đẳng thức đúng với $k, n = 2$. Thật vậy, với mọi $n \geq 2$ thì

$$\left(\frac{k+a^n}{k+1}\right)^2 \geq \left(\frac{k+a^2}{k+1}\right)^n.$$

Kết quả này có thể chứng minh dùng bất đẳng thức $AM - GM$ nên sẽ dành cho bạn đọc. Đây chỉ là một ước lượng căn bản giữa 2 dạng trung bình bậc 2 và bậc n.

Giả sử bất đẳng thức đúng khi $k = n = 2$. Thế thì

$$\prod_{a,b,c,d} \frac{k+a^n}{k+1} \geq \left(\prod_{a,b,c,d} \frac{k+a^2}{k+1}\right)^{n/2},$$

$$(r+a_1)(r+b_1)(r+c_1)(r+d_1) \geq \left(r + \sqrt[4]{a_1b_1c_1d_1}\right)^4 \ \forall r, a_1, b_1, c_1, d_1 \geq 0.$$

Lấy $r = k-2$ và $a_1 = 2+a^2, b_1 = 2+b^2, c_1 = 2+c^2, d_1 = 2+d^2$, vì $a_1b_1c_1d_1 \geq 1$ theo giả thiết ở trên nên ta có

$$(k+a^2)(k+b^2)(k+c^2)(k+d^2) \geq (k+1)^4.$$

Phần còn lại ta sẽ chứng minh khi $k = n = 2$. Ta phải chứng minh

$$(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)(2+d^2) \geq 81.$$

Cách làm ngắn gọn và đơn giản nhất là sử dụng định lí dồn biến mạnh S.M.V. Dễ thấy rằng nếu $a + b \leq 2$ thì

$$(2+a^2)(2+b^2) \geq \left(2 + \frac{(a+b)^2}{4}\right)^2.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2+b^2) - (a+b)^2 \geq \frac{(a+b)^4}{16} - a^2b^2$$
$$\Leftrightarrow 16 \geq (a+b)^2 + 4ab.$$

Hiển nhiên đúng vì $a + b \leq 2$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $d \geq c \geq b \geq a$. Vì $c + a \leq 2$ nên từ chứng minh trên, kết hợp với định lí S.M.V ta chỉ phải chứng minh bài toán khi $a = b = c = x \leq d = 4 - 3x$. Bất đẳng thức trở thành

$$(2+x^2)^3 \left(2 + (4-3x)^2\right) \geq 81.$$

Đặt $f(x) = 3\ln(2+x^2) + \ln\left(2+(4-3x)^2\right)$. Ta phải chứng minh $f(x) \geq 4\ln 3$.

$$f'(x) = \frac{6x}{2+x^2} - \frac{6(4-3x)}{2+(4-3x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} = 4 - 3x + \frac{2}{4-3x}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(4 - \frac{8}{x(4-3x)}\right) = 0.$$

Nếu $x \neq 1$ thì $x(4-3x) = 2$. Nhưng theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $3x(4-3x) \leq 4 \Rightarrow x(4-3x) \leq 4/3 < 2$. Vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và từ đó dễ dàng suy ra $\max_{x\in[0,1]} f(x) = 4\ln 2$. Đây là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta có thể làm tổng quát hơn bài toán đã cho. Chú ý rằng với mọi $k \geq 1$ và $a + b \leq 2$ ta đều có

$$(k+a^2)(k+b^2) \geq \left(k + \frac{(a+b)^2}{4}\right)^2.$$

Nên với mọi $k \geq 1$ thì biểu thức $(k+a^2)(k+b^2)(k+c^2)(k+d^2)$ sẽ nhận giá trị nhỏ nhất khi $a = b = c = x \leq 1$. Bằng tính toán đơn giản ta có kết quả sau

$$(k+a^2)(k+b^2)(k+c^2)(k+d^2) \geq \min\left((k+1)^4, (k+\alpha^2)^3\left(k+(4-3\alpha)^2\right)\right),$$

Trong đó $\alpha \leq 1$ là nghiệm nhỏ của phương trình $x(4-3x) = k$. Ta có thể tính trực tiếp giá trị của α với điều kiện $k \leq 4/3$ là

$$\alpha = \frac{2-\sqrt{4-3k}}{3},$$

Chẳng hạn ta có thể rút ra các trường hợp riêng rất thú vị sau đây

Nếu $k = 1$ thì

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq 10\left(1+\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{10^4}{9^3}.$$

Nếu $k = 5/4$ thì

$$\left(\frac{5}{4}+a^2\right)\left(\frac{5}{4}+b^2\right)\left(\frac{5}{4}+c^2\right)\left(\frac{5}{4}+d^2\right) \geq \left(\frac{5}{4}+254\right)\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{405}{16}$$

$$\Rightarrow (5+4a^2)(5+4b^2)(5+4c^2)(5+4d^2) \geq 6480.$$

Còn nếu $k = 4/3$ thì

$$\left(\frac{4}{3}+a^2\right)\left(\frac{4}{3}+b^2\right)\left(\frac{4}{3}+c^2\right)\left(\frac{4}{3}+d^2\right) \geq \min\left(\left(\frac{7}{3}\right)^4, \left(\frac{4}{3}+4\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{9}\right)^3\right)$$

$$\Rightarrow (4+3a^2)(4+3b^2)(4+3c^2)(4+3d^2) \geq \min\left(7^4, \frac{2^{16}}{3^3}\right) = 7^4 = 2401.$$

Đây cũng là các bài toán rất khó. Các bạn có thể tự kiểm nghiệm các kết quả này.

Bài toán 2.98 (Phạm Kim Hùng). *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(c+\frac{a^2}{b}\right)^2 \geq \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}.$$

Lời giải. Chuyển bất đẳng thức về dạng

$$a^2+b^2+c^2+\frac{2ab^2}{c}+\frac{2bc^2}{a}+\frac{2ca^2}{b}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^4}{b^2} \geq \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}.$$

Sử dụng các đẳng thức sau

$$\sum_{cyc}\frac{b^4}{c^2} - \sum_{sym} a^2 = \sum_{cyc}(b-c)^2\left(1+\frac{b}{c}\right)^2,$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c} - \sum_{sym} ab = \sum_{cyc}\frac{a(b-c)^2}{c},$$

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c} - \sum_{sym} a^2 = \frac{\sum_{sym}(b+c)(b-c)^2}{a+b+c}.$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(b-c)^2\left(1+\frac{b}{c}\right)^2 + (c-a)^2\left(1+\frac{c}{a}\right)^2 + (a-b)^2\left(1+\frac{a}{b}\right)^2$$

$$+\frac{2a(b-c)^2}{c}+\frac{2b(c-a)^2}{a}+\frac{2c(a-b)^2}{b}+2(ab+bc+ca)-2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\geq \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c} - 4(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\left(\left(1+\frac{b}{c}\right)^2 - 1 - 4\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{2a}{c}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}-4\right) \geq 0.$$

Đặt

$$S_a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} - 4,$$
$$S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{4b}{a+b+c} + \frac{2(b+c)}{a} - 4,$$
$$S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{4c}{a+b+c} + \frac{2(a+c)}{b} - 4.$$

Xét 2 trường hợp

(i). $c \ge b \ge a$. Dễ thấy $S_b \ge 0$.

$$S_a + S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{4(a+b)}{a+b+c} + \frac{2(b+c)}{a} + \frac{2(a+b)}{c} - 8 \ge 0,$$

Vì $$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} \ge \frac{2b}{a} \ge 2, \frac{2c}{a} + \frac{2a}{c} \ge 4, \frac{2b}{a} \ge 2.$$

$$S_c + S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{4(b+c)}{a+b+c} + \frac{2(b+c)}{a} + \frac{2(a+c)}{b} - 8 \ge 0,$$

Vì $$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \ge \frac{2c}{b} \ge 2, \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \ge 4, \frac{2c}{a} \ge 2.$$

$$\Rightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 \ge 0.$$

(ii). $a \ge b \ge c$. Dễ thấy $S_a \ge 1, S_c \ge -1 + \frac{4c}{a+b+c}$.

$$S_a + 2S_b = \frac{2c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{4(b+c)}{a} + \frac{2(a+b)}{c} - 12 \ge 0,$$

Vì $$\frac{8b+4a}{a+b+c} \ge 4, \frac{2b}{a} + \frac{2a}{c} \ge 4, \frac{2c}{a} + \frac{2a}{c} \ge 4.$$

Nếu $2b \ge a + c$ thì

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b + S_c &\ge \frac{4c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{16b+4a+4c}{a+b+c} + \frac{8(b+c)}{a} + \frac{2(a+b)}{c} - 21 \\ &\ge \frac{4c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{8(b+c)}{a} + \frac{2(a+b)}{c} - 13 \\ &\ge \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16c}{a} + \frac{2a}{c} - 10 \ge 2\sqrt{32} - 10 \ge 0. \end{aligned}$$

Có 2 khả năng xảy ra

(1). Nếu $a + c \le 2b$, khi đó $2(b-c) \ge a - c$.

Nếu $S_b \geq 0$ ta có *đpcm*. Nếu $S_b \leq 0$ ta vẫn có

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 4S_b + S_c)(b-c)^2 \geq 0.$$

(2). Nếu $a + c \geq 2b$, khi đó ta sẽ chứng minh $S_c + 2S_b \geq 0$.

$$S_c + 2S_b = g(c) = \frac{2c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{8b+4c}{a+b+c} + \frac{4(b+c)}{a} + \frac{2(a+c)}{b} - 12.$$

Vì $g(c)$ là hàm tăng ($c \geq 0$) nên $g(c) \geq \min\{g(0), g(2b-a)\}$.

+, Nếu $a \geq 2b$ thì

$$g(c) \geq g(0) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{8b}{a+b} + \frac{4b}{a} + \frac{2a}{b} - 12 \geq 0$$

bằng cách cộng các bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{b} + \frac{9b}{a+b} \geq 5, \left(\frac{a+b}{b} + \frac{9b}{a+b} \geq 6\right), \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 4, \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} \geq 6, -\frac{b}{a+b} \geq -\frac{1}{3}.$$

+, Nếu $2b \geq a$ thì

$$g(c) \geq g(2b-a) = \frac{8b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{4b}{a} - \frac{4a}{3b} - \frac{14}{3} \geq 0$$

$$\Rightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài toán 2.99 (Gabriel Dospinescu). *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên dương và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực. Chứng minh rằng với một tập con khác rỗng S bất kì của $\{1, 2, ..., n\}$ bất đẳng thức sau đây luôn đúng*

$$\left(\sum_{i \in S} a_i\right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i + ... + a_j)^2.$$

Lời Giải. Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề.

$$\left(\sum_{0 \leq i \leq k} a_{2i+1}\right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2k+1} (a_i + ... + a_j)^2.$$

Chứng Minh. Đặt $s_i = x_1 + x_2 + ... + x_i$, khi đó

$$\sum_{0 \leq i \leq k} a_{2i+1} = s_1 + s_3 - s_2 + s_5 - s_4 + ... + s_{2k+1} - s_{2k}.$$

Vậy vế trái bất đẳng thức có thể khai triển thành

$$\sum_{i=1}^{2k+1} s_i^2 - 2\sum_{i,j} s_{2i}s_{2j+1} + 2\sum_{i<j} s_{2i}s_{2j} + 2\sum_{i<j} s_{2i+1}s_{2j+1} + 2,$$

Và vế phải bất đẳng thức có thể khai triển thành

$$\sum_{i<j}(s_i - s_j)^2 = (2k+1)\sum_{i=1}^{2k+1} s_i^2 - 2\sum_{i<j} s_i s_j.$$

Do đó sau khi tách bớt các số hạng giống nhau ở 2 vế ta được bất đẳng thức tương đương là

$$2k\sum_{i=1}^{2k+1} s_i^2 \geq 4\sum_{i<j} s_{2i}s_{2j} + 4\sum_{i<j} s_{2i+1}s_{2j+1}.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, ta chỉ cần cộng theo vế các bất đẳng thức sau đây

$$s_{2i}^2 + s_{2j}^2 \geq 2s_{2i}s_{2j},$$
$$s_{2i+1}^2 + s_{2j+1}^2 \geq 2s_{2i+1}s_{2j+1}.$$

Bổ đề được chứng minh xong.

Vào bài toán, ta phải xét với tập $S \subset \{1, 2, ..., n\}$. Hiển nhiên nếu S không có các phần tử rời nhau ($S = \{i, i+1, ..., j\}$) thì ta có điều phải chứng minh, vì trong các số hạng của vế phải có chứa cả vế trái. Nếu S gồm các đoạn rời nhau, giả sử

$$S = \{j_1, j_1+1, ..., j_2, j_3, j_3+1..., j_4, ..., j_{2m+1}, j_{2m+1}+1, ..., j_{2m+2}\}.$$

Khi đó ta đặt

$$b_1 = a_{j_1} + a_{j_1+1} + ... + a_{j_2}$$
$$b_2 = a_{j_2+1} + ... + a_{j_3}$$
$$....$$
$$b_{2k+1} = a_{j_{2m+1}} + a_{j_{2m+1}+1} + ... + a_{j_{2m+2}}$$
$$\Rightarrow \sum_{i\in S} a_i = \sum_{j=0}^{k} b_{2j+1} \leq VP.$$

Ngoài ra theo bổ đề thì

$$\left(\sum_{j=1}^{k} b_{2j+1}\right)^2 \leq \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (b_i + ... + b_j)^2 \leq VP.$$

(vì mỗi số $(b_i + ... + b_j)^2$ đã xuất hiện ở trong biểu thức vế phải). Bất đẳng thức được chứng minh xong. □

Bài toán 2.100 (Phạm Kim Hùng). *Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực không âm tùy ý ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} + \frac{5abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng bất đẳng thức có thể chuyển về dạng tương đương là

$$\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{5}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1,$$

Với $x = b/a, y = c/b, z = a/c$ và $xyz = 1$. Đặt

$$m = 1 - \frac{2}{1+x}, n = 1 - \frac{2}{1+y}, p = 1 - \frac{2}{1+z} - 1,\ m, n, p \in [-1, 1].$$

Ta có

$$(1+m)(1+n)(1+p) = (1-m)(1-n)(1-p) \Rightarrow m + n + p + mnp = 0.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$(1-m)^3 + (1-n)^3 + (1-p)^3 + 5(1-m)(1-n)(1-p) \geq 8$$
$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2) + 5(mn+np+pm) \geq 3(m+n+p) + m^3 + n^3 + p^3$$
$$\Leftrightarrow 3(m^2+n^2+p^2) + 5(mn+np+pm) \geq m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp.$$

Chú ý rằng nếu $mn + np + pm \geq 0$ thì $VT \geq 0$, còn nếu $mn + np + mp \leq 0$ thì ta cũng có $VT = (m+n+p)^2 - (mn+np+pm) \geq 0$. Vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $m + n + p \geq 0$. Đặt $t = m + n + p$ và $u = mn + np + pm$, bất đẳng thức trở thành

$$3(t^2 - 2u) + 5u \geq t(t^2 - 3u)$$
$$\Leftrightarrow t^2(3-t) + u(3t-1) \geq 0 \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$m^2 + n^2 + p^2 \geq 3|mnp|^{2/3} \geq -3mnp = 3(a+b+c)$$
$$\Rightarrow t^2 - 2u \geq 3t \Rightarrow 2u \leq t(t-3) \quad (2)$$

Bất đẳng thức sẽ được dễ dàng chứng minh nếu $u \geq 0$, ta chỉ cần xét khi $u \leq 0$ và $3t - 1 \geq 0$, thay (2) vào (1) ta chỉ cần chứng minh

$$2t^2(3-t) + t(t-3)(3t-1) \geq 0 \Leftrightarrow t(3-t)(1-t) \geq 0 \Leftrightarrow t(3-t)(1+mnp) \geq 0.$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $m, n, p \in [-1, 1]$. Đẳng thức xảy ra khi $m = n = p = 0$ hoặc $m = n = 1, p = -1$, hay $a = b = c$ hoặc $b/a = c/b = +\infty$ hoặc các hoán vị. Bất đẳng thức được chứng minh. □

2.2 Bàn về sáng tạo bất đẳng thức

Thế giới toán học còn vô vàn những câu hỏi không có lời giải đáp, những giả thiết mà bề ngoài tưởng chừng đơn giản lại thách thức các nhà toán học hàng trăm năm. Hãy nhớ đến bài toán Fecma nổi tiếng : *"Chứng minh phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên dương trong tập số tự nhiên khi $n \geq 3$"*, chỉ có lời giải sau hơn 300 năm, đã tốn không biết bao nhiêu thời gian và trí tuệ của hàng trăm nhà toán học lớn khắp thế giới. Chúng ta, với kiến thức phổ thông, không nên chỉ biết giải các bài toán do người khác đặt ra mà sẽ tốt hơn nếu có thể tự phát triển các vấn đề cũ hoặc đặt ra các bài toán mới trong tầm kiến thức của mình. Đây là một việc rất ý nghĩa, bổ ích và thú vị.

Trở lại với bất đẳng thức, đây là một đối tượng căn bản và quen thuộc với hầu hết các bạn học sinh phổ thông. Bất đẳng thức xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh đại học, các kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia và quốc tế thường được rất nhiều người quan tâm. Tất nhiên, việc sáng tạo ra các bất đẳng thức cũng là một việc đáng quan tâm và nhiều ý nghĩa.

2.2.1 Bất đẳng thức cũ và mới

Do sự tồn tại từ rất lâu của bất đẳng thức mà hệ thống bất đẳng thức ngày càng phong phú, đa dạng. Tuy nhiên, không phải mọi bài toán đặt ra đều có ý nghĩa thực sự, ta chỉ quan tâm nhiều hơn đến các bất đẳng thức sẽ để lại cho những ý nghĩa nhất định. Chúng ta hãy xem xét một số bất đẳng thức được tạo ra bằng các phương pháp cũ, mà thông thường là suy ra từ những kết quả biết trước.

Sau đây là một vài ví dụ

Ví dụ 2.2.1. *Chứng minh rằng với a, b, c, d là các số thực dương tuỳ ý thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{2a^2}{2a+b} + \frac{3b^2}{6b+c} + \frac{2c^2}{6c+3d} + \frac{d^2}{6d+a} \geq \frac{6a+3b+2c+d}{12}.$$

Lời Giải. Tuy rằng cách phát biểu của bài toán hơn *lộn xộn* và rắc rối, nhưng bản chất thì rất đơn giản. Bất đẳng thức trên được suy ra trực tiếp từ kết quả sau

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Sau đó ta thay a, b, c, d bởi $a, b/2, c/3, d/6$. □

Việc thay đổi các biến số bằng các hàm số đơn giản đã làm bài toán khó hơn vì đã che giấu đi bản chất thật của bài toán.

Ví dụ 2.2.2. *Chứng minh bất đẳng thức sau với $a, b, c \geq 0$*

$$a^4c^4d^4 + b^4c^4d^8 + c^8 + d^4 \geq a^4bc^5 + b^3c^6d^4 + c^2d^3 + c^7ad.$$

LỜI GIẢI. Bài toán gốc của nó là

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq a^3b + b^3c + c^3d + d^3a$$

Sau đó ta thay a, b, c, d bởi $a, bc, 1/c, c/d$. ❑

Từ một bất đẳng thức tuỳ ý, ta có khá nhiều biến đổi để tạo ra một bất đẳng thức mới mà kĩ thuật đổi biến càng khó thì vấn đề càng khó được tìm ra. Tuy nhiên trong cả quyển sách, chúng ta sẽ không dùng cách thức này để sáng tạo hoặc mới hoá một bất đẳng thức cũ, tất cả các bài toán đều được đưa về dạng chuẩn tắc nhất.

Bằng phương pháp sử dụng đẳng thức, Dào Hải Long (học sinh khối chuyên toán Tổng hợp, HCV Olympic Toán quốc tế) có một nhóm các bất đẳng thức khá thú vị.

Ví dụ 2.2.3. *Chứng minh rằng với mọi $x, y, z \in R$ phân biệt thì*

$$\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức trên nhìn khá kì quặc vì lại có hiệu bình phương ở dưới mẫu. Lời giải của tác giả bài toán trên là như sau.

Giả sử $x = \frac{a}{b-c}, y = \frac{b}{c-a}, z = \frac{c}{a-b}$, khi đó ta có

$$(1+x)(1+y)(1+z) = -(1-x)(1-y)(1-z) \Rightarrow xy + yz + zx = -1,$$

Do đó hiển nhiên

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) = 2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ❑

Ví dụ 2.2.4. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c thực ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức này chứng minh giống hệt như trên, chú ý rằng

$$\frac{a+b}{a-b}.\frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c}.\frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a}.\frac{a+b}{a-b} = -1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a+b)(b+c)(c+a) = 8abc$, chẳng hạn $c = 0, a = -b$. ❑

Bớt đi 1 vào mỗi hạng tử vế trái ta được bất đẳng thức mới

Ví dụ 2.2.5. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{bc}{(b-c)^2}+\frac{ca}{(c-a)^2}\geq\frac{-1}{4}.$$

Thêm vào 1 ở mỗi hạng tử vế trái ta được

Ví dụ 2.2.6. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+a^2}{(c-a)^2}\geq\frac{5}{4}.$$

Kết hợp bất đẳng thức ở ví dụ 2.2.3 ta được

Ví dụ 2.2.7. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Cộng 2 kết quả 2.2.5 và 2.2.6 ta suy ra

Ví dụ 2.2.8. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2+bc+c^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2+ca+a^2}{(c-a)^2}\geq\frac{9}{4}.$$

Do đó ta có kết quả đẹp mắt hơn nhưng tương đương là

Ví dụ 2.2.9. *Chứng minh với mọi a, b, c thực*

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}+\frac{b^3-c^3}{(b-c)^3}+\frac{c^3-a^3}{(c-a)^3}\geq\frac{9}{4}.$$

Việc sử dụng liên tiếp các hằng đẳng thức và thêm bớt các biểu thức một cách hợp lí đã giúp chúng ta tạo ra những bất đẳng thức mới khá đẹp mắt. Chúng đứng thành một nhóm trong hệ thống xây dựng chung và nếu thiếu đi khâu trung gian thì sẽ rất khó để nghĩ ra được một lời giải tương tự. Vì thế nên ta cần phải xem xét vấn đề theo cách khác.

2.2.2 Một cách xây dựng bất đẳng thức mới

Để các bạn dễ theo dõi, hãy cùng xem lại một ví dụ phần trước

Ví dụ 2.2.7. *Chứng minh với mọi a, b, c thực ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Thực ra, nếu không biết trước con đường mà tác giả bài toán đã đi thì rất khó xât dựng lần lượt các bất đẳng thức khác để có được bất đẳng thức này. Xét theo một nghĩa nào đó thì các giải có phần hơi chủ quan và thiếu tự nhiên. Nhưng chúng ta hãy nhìn nhận vấn đề theo cách khác, mang tính bất đẳng thức hơn

Ví dụ 2.2.10. *Tìm hằng số k tốt nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geq\frac{k}{a^2+b^2+c^2}.$$

LỜI GIẢI. Nếu gạt bỏ suy nghĩ cho rằng bất đẳng thức không thể làm bình thường hơn thì bạn sẽ rất khó nghĩ ra cách làm đơn giản. Trên thực tế thì bất đẳng thức trên lại rất đơn giản. Hãy chú ý nhận xét nhỏ sau : Cố định $|a|, |b|, |c|$ thì biểu thức nhỏ nhất khi $abc \leq 0$, nói cách khác ta có thể giả sử $a \geq c \geq 0 \geq b$. Điều này tương đương với việc ta chứng minh bất đẳng thức sau (sau khi đã đổi dấu của b) là

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}\geq\frac{k}{a^2+b^2+c^2}\quad(a,b,c\geq 0),$$

Trong đó k vẫn là một hệ số mà ta chưa biết. Việc đầu tiên là ta loại bỏ c khỏi biểu thức vế trái nhờ bất đẳng thức đơn giản sau

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}\geq\frac{8}{(a+b)^2}.$$

Do đó hiển nhiên ta có

$$VT\geq\frac{9}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2)}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Ta tìm được k tốt nhất là $9/2$, bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=-b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét một cách xây dựng khác cho bất đẳng thức phù hợp với hiện nay. Nó khác với phương pháp cũ về cơ bản, đó là bất đẳng thức có trước còn lời giải cho bất đẳng thức sẽ được tìm ra sau.

Chính vì bất đẳng thức được tạo ra trước mà phương pháp chứng minh sẽ tự nhiên hơn, ban đầu chúng ta không biết phải làm thế nào cả (khác với phương pháp cũ là lời giải bài toán có trước so với bất đẳng thức). Nhưng cũng vì thế mà chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn hơn.

Ví dụ sau đây thể hiện rõ quá trình này

Ví dụ 2.2.11. *Chứng minh hoặc phản biện*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2a}{b^3+c^3}+\frac{2b}{c^3+a^3}+\frac{2c}{a^3+b^3}.$$

LỜI GIẢI. Ta coi như bất đẳng thức sau là đúng và thử đi tìm cách chứng minh cho nó. Dạng của bất đẳng thức gợi ý cho chúng ta nghĩ đến phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Để xem và hiểu rõ phương pháp quan trọng này, các bạn phải đọc trong chương III. Ta có đẳng thức sau

$$\frac{2a}{b^3+c^3}-\frac{1}{a^2}=\frac{2a^3-b^3-c^3}{a^2(b^3+c^3)}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}VP-VT&=\sum_{a,b,c}(a^3-b^3)\left(\frac{1}{a^2(b^3+c^3)}-\frac{1}{b^2(a^3+c^3)}\right)\\&=\sum_{a,b,c}\frac{(a^3-b^3)(a-b)\left(a^2b^2-c^3(a+b)\right)}{a^2b^2(a^3+c^3)(b^3+c^3)}\\&=-\sum_{a,b,c}(a-b)^2\frac{\left(c^3(a+b)-a^2b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2b^2c^2(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^2)}.\end{aligned}$$

Khi cho $b=c$, ta phải có

$$b^3(a+b)\geq a^2b^2\Leftrightarrow b(a+b)\geq a^2.$$

Tuy nhiên bất đẳng thức này không thể đúng nếu ta lấy a khá lớn so với b, chẳng hạn $a=4, b=1$. Vậy nếu cho $a=4, b=c=1$ thì bất đẳng thức ban đầu không đúng. ❑

Việc tạo ra bất đẳng thức ở ví dụ trên đã không thành công? Không hẳn như thế, bằng một thay đổi nhỏ ta có kết quả sau đây

Ví dụ 2.2.12. *Chứng minh bất đẳng thức sau nếu a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nhọn*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{2a}{b^3+c^3}+\frac{2b}{c^3+a^3}+\frac{2c}{a^3+b^3}.$$

LỜI GIẢI. Ta cũng dùng chứng minh hoàn toàn tương tự.

$$VT-VP=-\sum_{a,b,c}(a-b)^2\frac{\left(c^3(a+b)-a^2b^2\right)\left(a^2+ab+b^2\right)}{a^2b^2c^2(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^2)}.$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, đặt S_a, S_b, S_c là hệ số tương ứng với $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ trong khai triển ở trên. Khi đó $b^2+c^2 \geq a^2$ nên

$$b^3(a+c) \geq a^2c^2 \leq (b^2+c^2)c^2.$$

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên

$$\frac{a-c}{a-b} \geq \frac{b}{c}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$b^2S_b + c^2S_c \geq 0$$

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$b\left(b^3(a+c) - a^2c^2\right) + c\left(c^3(a+b) - a^2b^2\right) \geq 0.$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$b^4(a+c) + c^4(a+b) \geq a^2bc(b+c),$$

Nhưng vì a^2, b^2, c^2 là 3 cạnh tam giác nên

$$VT \geq 2bc(b^3+c^3) \geq bc(b+c)(b^2+c^2) \geq a^2bc(b+c).$$

Do đó để có $b^2S_b + c^2S_c \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh

$$b^3(a^3+c^3)(a^2+ac+c^2) \geq c^3(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2).$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a^3b^3+b^3c^3)(a^2+ac+c^2) \geq (a^3c^3+b^3c^3)(a^2+ab+b^2)$$
$$\Leftrightarrow a^5(b^3-c^3) + a^4bc(b^2-c^2) + a^3b^2c^2(b-c) \geq ab^3c^3(b-c) + b^3c^3(b^2-c^2).$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. ❑

Cả quá trình xây dựng bất đẳng thức như trên là một quá trình rất tự nhiên và hợp lí, đi từ cái không đúng đến cái đúng, hợp lí. Bất đẳng thức có trước và lời giải theo sau bất đẳng thức ấy. Bằng cách này ta có thể tạo ra rất nhiều những bất đẳng thức hay và thú vị, và tất nhiên quan trọng là ta sẽ giải nó như thế nào.

2.2.3 Từ chứng minh - phản biện đến kết luận

Câu hỏi đầu tiên cho chúng ta khi đặt ra bất kì một bất đẳng thức nào là liệu nó có đúng hay không? Đó không phải là việc sẽ chứng minh như thế nào mà là việc xem xét bất đẳng thức đã đúng trong những trường hợp cụ thể hay chưa? Nói như thế thì thật đơn giản, nhưng đây lại là một công việc khó khăn không kém gì việc chứng minh. Lí do là chúng ta chưa có dấu hiệu gì chắc chắn bất đẳng thức đã đúng và nếu ngay lập tức đi theo một con đường nào đó rõ ràng là một việc làm không hay.

Niềm tin trong quá trình giải bài toán là rất quan trọng, chính vì thế mà việc giải một bất đẳng thức đã được khẳng định là đúng sẽ dễ dàng hơn nhiều so với việc chúng ta phải làm lại từ đầu, nhất là trong những thời điểm mà ta không biết liệu bài toán có thể giải được hay không. Thực tế thì rất nhiều bài toán có hình thức đơn giản nhưng lại là những bài toán mở.

Các bạn hãy thử xây dựng bất đẳng thức mới dựa vào các ý tưởng nêu trên như trong ví dụ sau

Ví dụ 2.2.13. *Chứng minh hoặc phản biện bất đẳng thức sau với $a, b, c \geq 0$*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2a}{b^2+c^2}+\frac{2b}{c^2+a^2}+\frac{2c}{a^2+b^2},$$

Nếu bất đẳng thức sai, liệu có thể cho thêm điều kiện nào của a, b, c để bất đẳng thức trên đúng.

Không phải việc đặt ra một bất đẳng thức bị phủ định là một việc làm vô nghĩa. Và đôi khi việc đặt ra một bài toán *không thể giải được* lại rất có ý nghĩa, thậm chí giúp chúng ta tạo ra các phương pháp chứng minh mới. Bạn hãy xem kĩ lại các bài toán cuối chương I và khảo sát chúng một cách thật cẩn thận. Thật khó để giải được chúng bằng các phương pháp thông thường và đó cũng là nguồn gốc các phép chứng minh bất đẳng thức ở chương sau.

Việc tạo ra một bất đẳng thức đúng đã khó, nhưng để tạo ra một bất đẳng thức hay và đẹp thì còn khó hơn nhiều. Trên thực tế một bài toán bất đẳng thức quá dễ không thể gọi là một bài toán hay được. Và để các bất đẳng thức đó có sức hấp dẫn nhất định thì hình thức phát biểu càng đơn giản bao nhiêu càng tốt. Chúng ta sẽ rất ngại khi phải xem xét một bất đẳng thức với một hệ điều kiện quá dài dòng, thủ công và phức tạp. Quan trọng hơn, ngay cả trong các bất đẳng thức với dạng phát biểu cực kì đơn giản cũng có rất nhiều bài toán khó và đó mới chính là mảnh đất đẹp đẽ nhất của bất đẳng thức sơ cấp. Chúng ta hãy thêm một lần nhìn lại các bất đẳng thức hết sức *đơn giản* sau đây

Ví dụ 2.2.14. *Nếu $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$, chứng minh*

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2) \leq 13.$$

Ví dụ 2.2.15. *Chứng minh với mọi $a, b, c \in R$ ta có*

$$\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2} \geq \frac{11}{7(a^2+b^2+c^2)}.$$

Ví dụ 2.2.16. *Chứng minh với* $a, b, c \geq 0$ *và* $a + b + c = 3$ *thì*

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leq 12.$$

Ví dụ 2.2.17. *Chứng minh nếu* $a, b, c, d \geq 0$ *và* $a + b + c + d = 4$ *thì*

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2) \geq \frac{10^4}{9^3}.$$

Trước khi tìm hiểu kĩ về chúng, các bất đẳng thức trên sẽ được coi chúng là các bài toán đơn giản? Sự phát biểu đơn giản của nó là điểm thú vị và hấp dẫn nhất, mặc dù ban đầu ta chưa biết sẽ chứng minh thế nào và không chắc có thể khẳng định được nó hay không. Chính vì đặt việc tạo ra bất đẳng thức là việc làm trước tiên và khảo sát cách chứng minh sau, chúng ta có thể tạ ra rất nhiều bài toán thú vị. Nhưng... để khẳng định được chúng thì lại là một việc hoàn toàn khác, chúng ta có thể phải mất hàng giờ, hàng ngày, thậm chí hàng tháng để cố gắng chứng minh một bất đẳng thức nào đó. Và thật khó chịu khi phải chấp nhận thua cuộc một bất đẳng thức kiểu *quá đơn giản* như vậy !? Các bạn hãy đọc tới chương sau *Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức*. Đây là chương rất quan trọng, giới thiệu đầy đủ về năm phương pháp quan trọng và cần thiết nhất đối với bất đẳng thức đại số sơ cấp nói chung. Một số vấn đề khác sẽ được bàn thêm trong chương IV.

2.2.4 Sáng tạo bất đẳng thức

Tất nhiên, nếu bạn không phải là người sáng tạo ra các bất đẳng thức mà là người giải các bài toán ấy thì công việc của bạn sẽ nhẹ nhàng hơn khá nhiều. Nếu bạn phải sáng tạo ra các bài toán, bạn chưa biết nó đúng hay sai thì sẽ có những lúc bạn đi đến chân tường, tức là không thể khẳng định hay phủ định một mệnh đề nào đó. Còn nếu bạn là người giải toán? Khi đã chắc chắn bài toán đúng, trong quá trình chứng minh, mỗi mệnh đề rút ra bạn đều chắc chắn rằng nó phải đúng, còn công việc chỉ là áp dụng một phương pháp chứng minh hợp lí mà thôi. Lấy một ví dụ đơn giản, khi bạn gặp một bất đẳng thức 3 biến và bằng một cách nào đó, bạn đã đưa được bất đẳng thức về trường hợp hai trong ba biến bằng nhau. Nói chung, đây luôn là một bước tiến rất lớn để có kết quả cuối cùng. Nhưng rồi... bạn phát hiện ra rằng trong trường hợp này bất đẳng thức sai !? Thực tế thì mọi suy luận của bạn đã hoàn toàn đổ vỡ, và tất nhiên bạn sẽ cảm thấy một chút không hài lòng. Nhưng tất cả những điều đó là những điều bạn phải vượt qua được nếu như bạn muốn có những bất đẳng thức đẹp của riêng mình.

Còn nếu bạn là người giải toán? Nếu một bài toán 3 biến mà bạn đã đưa được về trường hợp hai biến bằng nhau thì nói chung. bạn đã giải xong được bài toán đó. Các chứng minh còn lại chỉ mang tính logic và bắt buộc vì lẽ đơn giản... bất đẳng thức khi đó phải đúng. Việc giải được một bài toán hay và khó là điều thú vị, nhưng chắc chắn rằng nếu bạn có thể tự mình sáng tạo ra các bất đẳng thức như vậy thì niềm vui còn tăng lên rất nhiều lần.

Khuyến khích cho sự sáng tạo các bất đẳng thức cũng là một trong những mục tiêu của cuốn sách, có lẽ đó cũng là cách để chúng ta học tốt môn toán nói chung. Bây giờ, tác giả sẽ nêu ra một số phương pháp thường dùng để quá trình sáng tạo bất đẳng thức hiệu quả hơn.

Phương pháp thứ nhất là ***tổng quát hoá từ các bài toán cụ thể***. Trên thực tế, có rất nhiều các bài toán mà người ta nhắc đến quá nhiều các trường hợp riêng mà không thể nêu lên bài toán tổng quát được. Hãy xem ví dụ sau.

Ví dụ 2.2.18. *Chứng minh nếu a, b, c không âm và $a+b+c=3$ thì*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca.$$

Và ở một thời điểm khác, bạn lại gặp phải một bài toán nữa

Ví dụ 2.2.19. *Chứng minh nếu a, b, c không âm và $a+b+c=3$ thì*

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \geq ab+bc+ca.$$

Rõ ràng, từ hai trường hợp cụ thể này buộc chúng ta phải nêu ra và giải bài toán tổng quát

Ví dụ 2.2.20. *Cho các số thực không âm a, b, c thoả mãn $a+b+c=3$. Tìm số dương k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\sqrt[k]{a}+\sqrt[k]{b}+\sqrt[k]{c} \geq ab+bc+ca.$$

Bất đẳng thức *Nesbitt* suy rộng cũng là một ví dụ.

Ví dụ 2.2.21. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, k không âm*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left(2, \frac{3}{2^k}\right).$$

Người ta thường chỉ đưa ra và giải bất đẳng thức trong rất nhiều giá trị cụ thể của k, chẳng hạn $k=1/2, k=1/3, k=2/3\ldots$ và do đó việc tổng quát bài toán là việc làm rất cần thiết.

Nhưng không phải lúc nào thì tổng quát các bài toán cũng là việc nên làm, trừ khi có nhiều trường hợp riêng buộc ta phải làm việc đó.

Phương pháp thứ hai là ***thay đổi hình thức từ một bài toán biết trước***. Tác giả sẽ không trình bày nhiều về phương pháp này, bạn đọc có thể xem thêm trong bài viết *Suy luận và phát triển* (chương IV). Đặc điểm của phương pháp là dễ dàng tạo ra được các bài toán hình thức phát biểu đẹp, đơn giản nhưng khó khăn chung vẫn là rất dễ dẫn đến các bất đẳng thức sai. Ngoài ra, bạn hoàn toàn có thể sáng tạo một bài toán theo cảm hứng, mà không cần dựa trên hình thức của một bài toán nào cả. Tất nhiên, như thế sẽ khó hơn rất nhiều.

Ngoài ra, ***sử dụng các cặp bất đẳng thức thuận nghịch*** cũng là một cách rất tốt để bạn tạo ra được các bất đẳng thức mới, ưu điểm của phương pháp này là bất đẳng thức của bạn chắc chắn sẽ đúng! Các cặp bất đẳng thức thuận nghịch là : bất đẳng thức thông thường và dạng phản chứng, bất đẳng thức thuận và dạng nghịch với kĩ thuật lấy đạo hàm, bất đẳng thức với đa thức và bất đẳng thức nghịch bậc nhất với giá trị tuyệt đối. Bạn cần xem thêm về phương pháp phản chứng, các cặp thuận nghịch và bất đẳng thức Karamata để hiểu rõ vấn đề này.

Sử dụng phương pháp phân tích bình phương S.O.S để ước lượng các biểu thức 3 biến cũng là một cách làm hay để có một bất đẳng thức mới, chuẩn và đẹp. Nhưng phương pháp này có nhược điểm là sẽ không thể làm khó được những người đã sử dụng S.O.S *chuyên nghiệp*! Ngoài ra, sử dụng phương pháp quy nạp tổng quát bạn cũng tạo ra được các bài toán n biến rất hay.

Tất nhiên, sẽ còn thêm nhiều cách khác nữa để bạn có thể sáng tạo được một bài toán bất đẳng thức đáng quan tâm và điều đó hoàn toàn chỉ phụ thuộc vào các bạn. Trên đây chỉ là những kinh nghiệm bản thân mà tác giả muốn chia sẻ cùng các bạn và hi vọng rằng, dù bạn đã từng làm bất đẳng thức rất nhiều hay đây là lần đầu tiên bạn đọc một cuốn sách bất đẳng thức thì, ít nhất sau khi bạn đã đọc xong toàn bộ cuốn sách này, bạn sẽ có thêm nhiều niềm vui với những bài toán do chính các bạn tạo ra. Chắc chắn bạn sẽ thấy các bất đẳng thức đẹp đẽ hơn rất nhiều.

Chương tiếp theo sẽ nói về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức. Nó không chỉ giúp bạn có thêm nhiều phương pháp khi giải các bài toán, mà nó còn mang lại nhiều ý tưởng hơn cho việc sáng tạo các bất đẳng thức mới của các bạn.

Chương 3

Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Trong chương này tác giả sẽ giới thiệu với các bạn năm phương pháp quan trọng và độc đáo nhất của bất đẳng thức đại số. Đó là phương pháp dồn biến và định lí dồn biến mạnh S.M.V, phương pháp phân tích bình phương S.O.S, phương pháp phản chứng, phương pháp quy nạp tổng quát và phương pháp sử dụng bất đẳng thức cổ điển. Các phương pháp được trình bày giúp hoàn thiện kĩ năng chứng minh bất đẳng thức của các bạn, không phải là những bất đẳng thức trong một dạng nhất định, mà còn bao quát gần như toàn bộ các bất đẳng thức đại số sơ cấp hiện nay.

Năm phương pháp mà chúng ta nói đến sẽ phát triển từ các kĩ thuật cổ điển đến các kĩ thuật mang nhiều tính sáng tạo. Với các bất đẳng thức 3 biến thì dường như S.O.S là kĩ thuật quan trọng và ứng dụng nhiều nhất, nhưng với các bất đẳng thức 4 biến thì phương pháp này sẽ khó sử dụng hơn nhiều. Phương pháp dồn biến mạnh S.M.V lại là sự lựa chọn thông minh và hầu như luôn có hiệu quả. Sau đó, với các bất đẳng thức n biến ta sẽ dùng tới một phương pháp khác, phương pháp quy nạp tổng quát với định lí I.G.I và cuối cùng là hai phương pháp không mới, nhưng sẽ được trình bày với cách nhìn nhận khác đi, đó là phương pháp phản chứng và phương pháp sử dụng bất đẳng thức cổ điển. Như vậy, đối với mỗi dạng bài toán, ta đã có một cách chứng minh hiệu quả.

Các phương pháp S.O.S, quy nạp tổng quát và dồn biến mạnh tác giả lấy ý tưởng trong quá trình giải các bài toán bất đẳng thức. Đây sẽ là lần đầu tiên chúng được đưa ra và nêu lên như là các phương pháp chuẩn tắc nhất để giải các bài toán bất đẳng thức hiện nay. Ngay cả với các bạn THCS thì S.O.S là một phương pháp rất cần phải biết. Chắc chắn bạn đọc sẽ tìm được nhiều điều thú vị và mới lạ sau khi đọc xong năm phương pháp quan trọng này.

3.1 Phương pháp dồn biến và định lí dồn biến mạnh

3.1.1 Bài toán mở đầu

Các bạn học sinh khi học về bất đẳng thức đã tìm hiểu, và ít nhiều cũng biết sơ qua về phương pháp này. Đây là một trong những phương pháp quan trọng và cơ bản nhất của bất đẳng thức đại số. Mục đích của phương pháp này là tìm cách chỉ ra đẳng thức sẽ xảy ra nếu hai hay một số các biến bằng nhau. Rất nhiều những bất đẳng thức đối xứng có thể giải được bằng phương pháp dồn biến, không chỉ là một phương pháp rất hiệu quả mà còn đem lại cho các bạn một cái nhìn tổng hợp về bất đẳng thức đối xứng. Đây cũng là phương pháp xuất hiện rất nhiều trong các bài toán bất đẳng thức của các kì thi học sinh giỏi trên khắp thế giới.

Bất đẳng thức mở đầu cho phương pháp này là hai trong số các bài toán chọn lọc ở cuối chương I.

Problem 1 (Bất đẳng thức Tukervici). *Với mọi số thực dương a, b, c, d thì*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

Problem 2. *Các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1a_2...a_n = 1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \geq n + 3$$

Với mọi số nguyên dương $n \geq 4$.

Nếu đã xem và giải các bài toán ở phần bài toán sáng tạo, các bạn đã bắt gặp một số bài toán phải sử dụng phương pháp dồn biến. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về sự phổ biến rộng rãi của phương pháp này qua một số ví dụ cụ thể, từ đó các bạn hãy rút ra những kinh nghiệm cho bản thân mình. Xin được nhấn mạnh thêm một lần nữa, đây là phương pháp quan trọng và ứng dụng nhiều vào bậc nhất trong bất đẳng thức phổ thông hiện nay.

Nội dung chính của phương pháp này như sau

Định lý 3.1 (Định lí về dồn biến). *Giả sử $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm số liên tục và đối xứng với tất cả n biến $x_1, x_2, ..., x_n$ xác định trên một miền liên thông thoả mãn điều kiện sau*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, ..., x_n\right) \quad (1)$$

Khi đó bất đẳng thức sau sẽ thoả mãn

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f(x, x, ..., x),$$

Trong đó $$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Điều kiện (1) có thể biến đổi thành một số dạng khác, chẳng hạn

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, x_3, ..., x_n\right),$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}, x_3, ..., x_n\right),$$

Và còn rất nhiều dạng khác nữa tuỳ theo yêu cầu của bài toán. (Từ bây giờ ta sẽ gọi (1) là bất đẳng thức điều kiện).

Khái niệm miền liên thông các bạn cũng không cần hiểu quá khắt khe, vì hầu hết trong các bài toán thì điều kiện này luôn thoả mãn. Nếu chỉ xét trong R, miền liên thông các đoạn hoặc khoảng $([a, b], [a, b), (a, b], (b, +\infty), (-\infty, a)...)$.

Chúng ta sẽ mở đầu việc sử dụng *định lí* này qua một số ví dụ ban đầu sau đây. Các bất đẳng thức không quá phức tạp nhưng sẽ giúp các bạn có một cái nhìn tổng quan và dễ hiểu.

Ví dụ 3.1.1 (Bất đẳng thức AM-GM). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta luôn có*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}.$$

Lời Giải. Nếu đặt $f(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 + a_2 + ... + a_n - n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ thì có thể dễ dàng chứng minh được

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(\sqrt{a_1a_2}, \sqrt{a_1a_2}, a_3, ..., a_n)$$

(Bất đẳng thức trên tương đương với $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$).

Và do đó $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(r, r, ..., r) = 0$ với $r = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$). ❑

Ví dụ 3.1.2 (Bất đẳng thức Nesbitt). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời Giải. Đặt $f(a, b, c) = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b}$ và $t = \dfrac{a+b}{2}$.

Khi đó dễ thấy

$$f(a, b, c) = \frac{a^2 + b^2 + c(a+b)}{ab + c^2 + c(a+b)} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2t^2 + 2tc}{t^2 + c^2 + 2ct} + \frac{c}{2t} = f(t, t, c).$$

Và do đó $f(a,b,c) \geq g(t',t',t') = \dfrac{3}{2}$ với $t' = \dfrac{a+b+c}{3}$ (*đpcm*). □

Qua 2 ví dụ đơn giản nhất của phương pháp dồn biến ở trên, tiếp theo chúng ta sẽ cùng tìm hiểu về một số bất đẳng thức mà phép chứng minh thực sự đòi hỏi thêm sự tinh tế.

Ví dụ 3.1.3. *Giả sử $a,b,c,d,e \geq 0$ và $a+b+c+d+e=5$. Chứng minh rằng*

$$abc+bcd+cde+dea+eab \leq 5.$$

LỜI GIẢI. Chú ý rằng

$$P(a,b,c,d,e) = abc+bcd+cde+dea+eab = ab(c+e)+d(bc+ce+ea),$$

Nên rõ ràng

$$P(a,b,c,d,e) \leq P\left(a,b,\frac{c+e}{2},d,\frac{c+e}{2}\right).$$

Từ định lí dồn biến suy ra biểu thức sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $a=c=e=b=d=1$. Đây chính là kết quả bài toán. □

Ví dụ 3.1.4. *Giả sử $a_1,a_2,...,a_n (n \geq 4)$ là các số thực không âm thoả mãn $a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n = n$. Hãy chứng minh rằng*

$$(a_1a_2...a_{n-1})^{n+1} + (a_2a_3...a_n)^{n+1} + ... + (a_na_1a_2...a_{n-2})^{n+1} \leq n.$$

LỜI GIẢI. Trước khi sử dụng phương pháp dồn biến, ta cần biến đổi để đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn. Điều kiện giả thiết gợi ý cho ta đặt $x_i = a_i^n$. Khi đó $x_1+x_2+...+x_n = n$ và ta phải chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i} x_j\right)^{\frac{n+1}{n}} \leq n.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ để loại căn thức

$$\left(\prod_{j\neq i} x_j\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\left(1+\sum_{j\neq i} x_j\right).$$

Phần còn lại, ta sẽ chứng minh $f(x_1,x_2,...,x_n) \leq n$, với

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i} x_j\right)\left(1+\sum_{j\neq i} x_j\right) \\ &= \frac{1}{n}x_1x_2...x_n\left((n+1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)-n\right). \end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức điều kiện sau đây

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, x_3, ..., x_n\right).$$

Tuy không quá đơn giản, nhưng các bạn có thể biến đổi bất đẳng thức trên thành

$$\frac{(x_1-x_2)^2}{4x_1x_2} \ge \frac{(n+1)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{4}{x_1+x_2}\right)}{(n+1)\left(\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_n}\right)-n}.$$

Loại bỏ nhân tử $(x_1-x_2)^2$, ta có

$$(x_1+x_2)\left((n+1)\left(\frac{4}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_n}\right)-n\right) \ge 4(n+1)$$
$$\Leftrightarrow (n+1)\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+...+\frac{1}{x_n}\right) \ge n.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì ta có $x_3+x_4+...+x_n \le n$.

Và do đó bất đẳng thức ban đầu đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$. □

Ví dụ tiếp theo cũng là một bài toán khá khó, mang đậm bản sắc của phương pháp này. Các bạn hãy tự chứng minh và xem như một bài tập cần thiết.

Ví dụ 3.1.5. *Chứng minh với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ta luôn có*

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_ix_j}{(1-x_i)(1-x_j)} \ge \frac{n}{2(n-1)}.$$

Còn để hiểu thêm ý nghĩa của bài toán trên, bạn hãy xem trong một số trường hợp cụ thể của n, chẳng hạn đơn giản nhất với $n=3$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)} + \frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} \ge \frac{3}{4}.$$

Bạn thử ngẫm nghĩ lại những gì vừa đọc!? Bạn có cảm thấy một chút thiếu sót nào đó hay không? Trước khi giải quyết vấn đề hoài nghi đó, chúng ta sẽ xem xét tới dạng ứng dụng cơ bản nhất của định lí về dồn biến, đó là ứng dụng để giải các bất đẳng thức 3 biến. Và chắc chắn, trong phần này sẽ không có điều gì đáng lo ngại vì ta hầu như không cần sử dụng đến định lí đó, mà chỉ sử dụng tư tưởng của nó.

3.1.2 Phương pháp dồn biến đối với các bất đẳng thức 3 biến

Không phải với mọi bài toán thì bất đẳng thức điều kiện luôn đúng, tuy rằng đẳng thức thì vẫn chỉ xảy ra trong trường hợp tất cả các biến bằng nhau. Thông thường, bất đẳng thức điều kiện sẽ đúng nếu ta thêm các điều kiện khác cho các biến. Cách hay làm nhất là sắp xếp lại thứ tự cho các biến số. Đây là sự hạn chế trong trường hợp tổng quát, nhưng với các bài toán 3 biến thì luôn rất hiệu quả.

Chúng ta hãy xem xét từ bất đẳng thức sau đây.

Ví dụ 3.1.6 (MOSP 2001). *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương có tích bằng 1 thì ta có bất đẳng thức*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1).$$

Lời Giải. Ta phải chứng minh

$$f(a,b,c) = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 4(a+b+c) + 6 \geq 0.$$

Ta không thể chứng minh được $f(a,b,c) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c)$, như thế nên bài toán sẽ không thể giải được bằng phương pháp dồn biến? Không hẳn thế, bài toán vẫn được chứng minh hoàn toàn bình thường theo tư tưởng của phương pháp dồn biến, hơn thế nữa ta không cần sử dụng thêm bất kì định lí hay bổ đề nào cả.

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Xét

$$\begin{aligned} & f(a,b,c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) \\ &= (a^2+bc)(b+c-2\sqrt{bc}) + a(b^2+c^2-2bc) - 4(b+c-2\sqrt{bc}) \\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \left[a^2+bc-4+a(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \right] \\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \left[(a+b)(a+c)+2\sqrt{a}-4 \right]. \end{aligned}$$

Vì $(a+b)(a+c) \geq 4\sqrt[4]{a^2bc} \geq 4$ $(a \geq 1)$ nên

$$f(a,b,c) \geq f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}).$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán khi $b = c$, tức là với $b^2 = 1/a$ thì

$$b(a+b)^2 \geq 2(a+2b-1).$$

Thay $a = 1/b^2$ vào bất đẳng thức trên

$$(b^3+1)^2 \geq 2(b+2b^4-b^3) \Leftrightarrow b^6-4b^4+4b^3-2b+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (b-1)^2(b^4+2b^3-b^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow (b-1)^2\left((b^2-1)^2+2b^3+b^2 \right) \geq 0.$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng và đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. □

Bạn đã thấy, chứng minh hoàn thành và ta không cần sử dụng một công cụ mạnh nào cả, thậm chí phù hợp với trình độ THCS. Ý tưởng chính trong phương pháp chứng minh là thực hiện 2 bước sau (đối với bất đẳng thức $f(a,b,c) \geq 0$)

- Chứng minh $f(a,b,c) \geq f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$ nếu $a \geq b \geq c$ (hoặc $a \leq b \leq c$).
- Chứng minh $f(a,b,c) \geq 0$ nếu $b = c$.

Từ 2 bước này thì hiển nhiên sẽ suy ra kết quả bài toán. Ta chú ý nhiều đến chứng minh bước thứ nhất, vì bước thứ 2 luôn luôn đơn giản hơn, và xét về mặt logic thì nó phải đúng theo cách này hay cách khác. Bất đẳng thức đúng với a,b,c tuỳ ý thì nhất định phải đúng khi có một số biến bằng nhau. Và khi đã có 2 biến bằng nhau thì thực tế là ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp 1 biến. Về chứng minh bước thứ nhất, chúng ta hãy xem xét tiếp 2 ví dụ sau đây

Ví dụ 3.1.7. *Chứng minh rằng với a,b,c dương có tổng bằng 3 thì*

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Đặt $t = (a+b)/2, u = (a-b)/2$, ta có $a = t + u$ và $b = t - u$.
Vì $ab = t^2 - u^2 \geq c^2$ nên $2t^2 - 2c^2 - u^2 \geq 0$. Do đó

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= c^2(a^2+b^2) + a^2b^2 = c^2(2t^2 + 2u^2) + (t^2 - u^2)^2 \\ &= -u^2(2t^2 - 2c^2 - u^2) + t^4 + 2c^2t^2 \leq t^4 + 2c^2t^2. \end{aligned}$$

Mặt khác hiển nhiên $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2t^2 + c^2$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$2t^4 + 4t^2c^2 + 3 \leq 3(2t^2 + c^2).$$

Thay $c = 3 - 2t$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} &2t^4 + 4t^2(3-2t)^2 + 3 \leq 6t^2 + 3(3-2t)^2) \\ &\Leftrightarrow 3t^4 - 8t^3 + 3t^2 + 6t - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)^2(3t^2 - 2t - 4) \leq 0. \end{aligned}$$

Hiển nhiên đúng, vì $2t \leq 3$ nên $3t^2 - 2t - 4 \leq 0$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 3.1.8. *Cho a,b,c không âm thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, chứng minh rằng*

$$a + b + c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c$, khi đó $a \le 1, b^2 + c^2 \ge 2 \Rightarrow b + c \ge \sqrt{2}$. Đặt

$$f(a,b,c) = a + b + c - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2.$$

Xét hiệu

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c) - f\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\\
&= (b-c)^2\left(\frac{(b+c)^2}{4} - \frac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}\right)\\
&\ge \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)(b-c)^2 \ge 0.
\end{aligned}$$

Vậy

$$f(a,b,c) \ge f\left(a, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp $b = c$, ta quy về chứng minh bất đẳng thức với 1 biến của a là

$$\begin{aligned}
&a + \sqrt{2(3-a^2)} \ge a^2(3-a^2) + \frac{1}{4}(3-a^2)^2\\
\Leftrightarrow\ &(a-1)^2\left(\frac{3}{4}(a+1)^2 - \frac{3}{3-a+\sqrt{2(3-a^2)}}\right) \ge 0
\end{aligned}$$

Nhưng với $a \le 1$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$\frac{3}{3-a+\sqrt{2(3-a^2)}} \le \frac{3}{4} \le \frac{3}{4}(a+1)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 3.1.9. *Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ thì ta có bất đẳng thức*

$$7(xy + yz + zx) \le 12 + 9xyz.$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \ge y \ge z$.
Đặt $f(x,y,z) = 7(xy + yz + zx) - 9xyz = (7 - 9z)xy + 7z(x + y)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x,y,z) \le f\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, z\right).$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(7-9z)\left(xy-\frac{x^2+y^2}{2}\right)+7z(x+y-\sqrt{2(x^2+y^2)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (9z-7)(x-y)^2 \leq \frac{14z(x-y)^2}{x+y+\sqrt{2(x^2+y^2)}}.$$

Do $x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)}$ nên ta cần phải chứng minh

$$(9z-7)\sqrt{2(x^2+y^2)}\leq 7z \Leftrightarrow (9-\frac{7}{z})\sqrt{2(3-z^2)}\leq 7.$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $z\leq 1$ nên $9-\frac{7}{z}\leq 2$ và $\sqrt{2(3-z^2)}\leq\sqrt{6}$.
Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh bài toán khi $x=y$, nói cách khác là chứng minh

$$\text{Với} \quad t=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \text{thì} \quad 7(t^2+2zt)\leq 12+9t^2z.$$

Thay $z=\sqrt{3-2t^2}$ ta có bất đẳng thức

$$9t^2\sqrt{3-2t^2}-7t^2-14t\sqrt{3-2t^2}+12\geq 0.$$

Đặt $r=1/t^2$, ta phải chứng minh

$$9\sqrt{3-\frac{2}{r}}-7-14\sqrt{3r-2}+12r\geq 0.$$

Công việc của chúng ta bây giờ là khảo sát hàm số trên, điều này chỉ mang tính bắt buộc nên bạn đọc hãy tự kiểm chứng. □

Sau đây là một số ví dụ tương tự.

Ví dụ 3.1.10. *Cho $a,b,c\geq 0$ thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh*

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\leq 27.$$

Ví dụ 3.1.11. *Cho $a,b,c\geq 0$ thoả mãn $ab+bc+ca+6abc=9$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c+3abc\geq 6.$$

Ngoài việc sử dụng kĩ thuật nêu trên để chứng minh các bài toán bất đẳng thức có đẳng thức trong trường hợp $a=b=c$ trong nhiều trường hợp chúng ta chỉ cần sử dụng tới bước 1. Chúng ta không cần máy móc cho rằng chỉ dùng phương pháp dồn biến được khi tất cả các biến bằng nhau. Đôi khi, chúng không hoàn toàn bằng nhau, nhưng phương pháp dồn biến vẫn thực hiện được.

Ví dụ 3.1.12 (Berkeley Mathematcial Circle). *Chứng minh rằng nếu a, b, c không âm thoả mãn $ab + bc + ca = 1$ thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Chọn số $t > 0$ sao cho

$$t^2 + 2tc = ab + bc + ca = 1 \Rightarrow (t+c)^2 = (a+c)(b+c) = 1 + c^2.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{2}{t+c} + \frac{1}{2t}.$$

Dễ thấy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+c}} - \frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2 \geq \frac{(\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c})^2}{2t(a+b)}$$
$$\Leftrightarrow (a+c)(b+c) \leq 2t(a+b).$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $a \geq t \geq b \geq c$. Vậy ta chỉ cần chứng minh bài toán khi $a = b \geq c$. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{2}{t+c} + \frac{1}{2t} \geq \frac{5}{2}$$

Với
$$2tc + t^2 = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Thay c vào bất đẳng thức trên rồi quy đồng mẫu số, bất đẳng thức trở thành $(1-t)(5t^2 - 4t + 1) \geq 0$, hiển nhiên đúng vì $t \leq 1$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Ví dụ 3.1.13. *Chứng minh rằng với các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 2 ta có bất đẳng thức*

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \leq 3.$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a \geq b \geq c$.
Đặt $t = (a+b)/2 \leq 1, u = (a-b)/2$. Khi đó $a = t+u, b = t-u$ và ta sẽ chứng minh

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \leq 3t^2(t^2 + tc + c^2)^2 \qquad (*)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&a^2 + ab + b^2 = 2t^2 + 2u^2 + t^2 - u^2 = 3t^2 + u^2\\
&(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2)\\
&\quad = a^2b^2 + abc(a+b+c) + c^4 + c^2(a^2+b^2) + c^3(a+b)\\
&\quad = (t^2 - u^2)^2 + c(2t+c)(t^2 - u^2) + c^4 + 2c^2(t^2+u^2) + 2tc^3\\
&\quad = t^4 + 2tc(t^2 + c^2) + 3t^2c^2 + c^4 - u^2(2tc - c^2 + 2t^2 - u^2).
\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{3t^2}{a^2+ab+b^2}-1 \geq \frac{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}{(t^2+tc+c^2)^2}-1\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{3t^2+u^2} \leq \frac{2tc+2t^2-c^2-u^2}{(t^2+tc+c^2)^2}\\
\Leftrightarrow\quad &(t^2+tc+c^2)^2 \leq (3t^2+u^2)(2tc+2t^2-c^2-u^2)\\
\Leftrightarrow\quad &t^4+3t^2c^2+c^4+2tc(t^2+c^2) \leq 6t^4+6t^3c-3c^2t^2-u^2(t-c)^2-u^4\\
\Leftrightarrow\quad &5t^4+4t^3c-6t^2c^2-2tc^3-c^4 \geq u^2(t-c)^2+u^4.
\end{aligned}$$

Bởi vì $t \geq c, u$ nên ta có

$$\begin{aligned}
5t^4+4t^3c-6t^2c^2-2tc^3-c^4 &\geq 5t^4-5t^2c^2 = 5t^2(t-c)(t+c)\\
&\geq 5(t-c)t^3 \geq 2(t-c)^4 \geq u^2(t-c)^2+u^4.
\end{aligned}$$

Và do đó $(*)$ được chứng minh. Cuối cùng ta sẽ chứng minh nếu $2t+c=2$ thì

$$3t^2(t^2+tc+c^2) \leq 3 \Leftrightarrow t(t^2+tc+c^2) \leq 1.$$

Thay $c=2-2t$ vào bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh

$$(1-t)(1-3t+3t^2) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ hoặc các hoán vị. □

Trong một số bài toán khó, dồn biến kết hợp đạo hàm thường là lựa chọn tối ưu và dễ sử dụng, nhất là các bài toán tổng quát với số mũ thực. Trong chương II bạn đã gặp 2 bài toán khó dạng này là bài 2.61 và bài 2.82, sau đây cũng là một bài toán với phương pháp như vậy. Tác giả sẽ không đưa lời giải lên (nói chung là khá dài) và các bạn hãy coi đây như một bài toán tự luyện tập.

Ví dụ 3.1.14. *Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 3 và k là một số dương cho trước. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$(i)\qquad a^k(b+c)+b^k(c+a)+c^k(a+b) \leq \max\left(6, \frac{3^{k+1}}{2^k}\right) \text{ với } k \leq 3.$$

$$(ii)\qquad a^k(b+c)+b^k(c+a)+c^k(a+b) \leq \frac{3^{k+1}(\alpha^k+\alpha)}{(\alpha+1)^{k+1}} \text{ với } k \geq 3.$$

Trong đó α là nghiệm dương lớn hơn 1 của phương trình $x^k-kx^{k-1}+kx-1=0$.

Từ đó hãy suy ra bất đẳng thức sau với mọi a, b, c không âm

$$a^4(b+c)+b^3(c+a)+c^4(a+b) \leq \frac{1}{12}(a+b+c)^5.$$

Chú ý rằng trong bài toán đối xứng trên, hệ số $\frac{1}{12}$ xuất hiện một cách khá bất ngờ và đẳng thức cũng xảy ra trong trường hợp các biến hoàn toàn khác nhau. Đây là một điều rất thú vị.

Phương pháp vừa trình bày là phương pháp cơ bản để áp dụng dồn biến chứng minh các bất đẳng thức 3 biến. Ý nghĩa chính của dồn biến là tìm cách giảm tối đa số biến có thể được, và rõ ràng với $n = 3$ thì chỉ cần dùng một lần giảm biến là đủ. Điều cần hoài nghi ở đây lại chính là định lí về dồn biến đã trình bày ở mục trước, chúng ta cần quan tâm liệu phải chứng minh định lí này thế nào đây? Rất tiếc, bằng kiến thức phổ thông thì rất khó làm được điều này, và coi như chúng ta chỉ có thể học từ định lí đó tư tưởng chứng minh chứ không thể sử dụng trực tiếp được. Làm thế nào để giải quyết vấn đề này? Trước khi bạn đọc muốn tìm câu trả lời thì hãy thử làm bài toán sau đây

Ví dụ 3.1.15 (IMO Shortlist 1997, Việt Nam). *Giả sử a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức*

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Và bây giờ chúng ta sẽ đi tới nội dung quan trọng nhất của chương này, đó là định lí dồn biến mạnh (Stronger Mixing Variables).

3.1.3 Định lí dồn biến mạnh S.M.V

Những điều sẽ trình bày tiếp theo chỉ dùng hoàn toàn kiến thức phổ thông. Điều quan trọng là bạn phải hiểu ý nghĩa của định lí và sử dụng, còn cách chứng minh cũng không cần nhớ thật chi tiết.

Bổ đề 3 (Dồn biến tổng quát). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là dãy số thực tuỳ ý. Ta thực hiện liên tiếp phép biến đổi sau*

1. *Chọn $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ là 2 chỉ số sao cho*

$$a_i = \min(a_1, a_2, ..., a_n) \quad , \quad a_j = \max(a_1, a_2, ..., a_n).$$

2. *Thay a_i và a_j bởi $\frac{a_i+a_j}{2}$ (nhưng vẫn giữ đúng thứ tự của chúng trong dãy số).*

Khi đó sau vô hạn lần thực hiện biến đổi nói trên thì mỗi số a_i đều tiến tới giới hạn

$$a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Chứng Minh. Phép biến đổi nói trên, từ bây giờ trở đi ta sẽ gọi là phép biến đổi Δ. Kí hiệu dãy ban đầu là $a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1$. Sau một phép biến đổi ta thu được dãy mới kí hiệu là $(a_1^2, a_2^2, .., a_n^2)$. Làm tương tự, từ dãy $(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$ ta thu được dãy mới kí hiệu là $(a_1^{k+1}, a_2^{k+1}, ..., a_n^{k+1})$. Khi đó với mọi số nguyên $i = \overline{1, n}$ ta phải chứng minh

$$\lim_{k\to\infty} a_i^k = a, \quad a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Ta đặt $m_k = \min(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$ và $M_k = \max(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$.

Dễ thấy phép biến đổi Δ không làm tăng giá trị của M_k và không làm giảm giá trị của m_k. Vì m_k và M_k đều là các dãy bị chặn nên tồn tại

$$m = \lim_{k\to\infty} m_k \qquad M = \lim_{k\to\infty} M_k.$$

Ta phải chứng minh $m = M$. Phản chứng, giả sử $M > m$. Đặt $d_k = M_k - m_k$.

Ta có một nhận xét đơn giản sau đây :

Nhận xét. *Giả sử sau một số phép biến đổi Δ dãy $(a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1)$ trở thành dãy $(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$ sao cho $m_k = \frac{M_1 + m_1}{2}$ thì ta có $m_2 = \frac{M_1 + m_1}{2}$.*

Thật vậy, không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $M_1 = a_1^1 \geq a_2^1 \geq ... \geq a_n^1 = m_1$. Để cho gọn, ta sẽ kí hiệu a_i thay cho a_i^1.

Nếu $m_k = \frac{a_1 + a_n}{2}$ và k là chỉ số nhỏ nhất thoả mãn thì $a_i^2 \geq m_k \ \forall i = 1, n$. Điều này suy ra trực tiếp từ tính chất không giảm của m_i và chú ý rằng $\frac{a_1 + a_n}{2}$ là một số hạng nào đó của dãy $(a_1^2, a_2^2, .., a_n^2)$.

Từ nhận xét trên ta thu được một kết quả quan trọng hơn . Đặt

$$S = \{k : \exists l > k | m_k + M_k = 2m_l\} \Rightarrow S = \{k | m_k + M_k = 2m_{k+1}\},$$
$$P = \{k : \exists l > k | m_k + M_k = 2M_l\} \Rightarrow P = \{k | m_k + M_k = 2M_{k+1}\}.$$

Nếu S hoặc P có vô hạn phần tử, giả sử $|S| = \infty$ thì , với mỗi $k \in S$

$$d_{k+1} = M_{k+1} - m_{k+1} = M_{k+1} - \frac{m_k + M_k}{2} \leq \frac{M_k - m_k}{2} = \frac{d_k}{2}.$$

Vì d_r là dãy giảm nên nếu $|S| = \infty$ thì $\lim_{r\to\infty} d_r = 0$ và do đó $M = m$.

Nếu không, thì $|S|, |P| < +\infty$. Ta có thể giả sử $|S| = |P| = 0$ mà không làm ảnh hưởng đến kết quả bài toán. Khi đó với mọi $k > 1$ thì số $\frac{a_1 + a_n}{2}$ không thể là số nhỏ nhất hay lớn nhất trong dãy $(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$ và như vậy ta có thể xét bài toán hẹp hơn với $n-1$ số , sau khi đã bỏ đi *một* số $(a_1+a_n)/2$. Bằng phương pháp quy nạp đơn giản ta sẽ có *đpcm.* ❑

Từ bổ đề trên ta suy ra một kết quả trực tiếp

Định lý 3.2 (Stronger Mixing Variable - SMV). *Nếu* $f: I \subset R^k \to R$, $I = [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times ... \times [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in R$ *là hàm liên tục đối xứng và bị chặn dưới thoả mãn điều kiện*

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(b_1, b_2, ..., b_n),$$

Với $(b_1, b_2, ..., b_n)$ *là dãy thu được từ dãy* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *theo phép biến đổi* Δ, *thì ta có* $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(a, a, ..., a)$ *với* $a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Bằng định lí này, khi sử dụng dồn biến ta chỉ cần chọn ra số nhỏ nhất và số lớn nhất. Định lí về dồn biến đã được chứng minh chặt chẽ và có một kết quả mạnh hơn hoàn toàn bằng kiến thức sơ cấp, chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng được.

Ngoài ra, phép biến đổi Δ có thể khác hơn, chẳng hạn thay thành $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ hoặc bất kì một dạng trung bình nào khác. Tùy theo giả thiết của bài toán mà ta cần chọn cách dồn biến cho phù hợp.

3.1.4 Định lí S.M.V và một số ứng dụng

Khi bạn chưa từng thử bắt tay vào chứng minh một bất đẳng thức khó từ bốn biến trở nên, thật khó để nhận ra được ý nghĩa và tầm quan trọng của định lí S.M.V. Việc xét dồn biến chỉ với số lớn nhất hoặc bé nhất là một bước tiến rất quan trọng so với việc xét 2 số bất kì, vì nói chung với 2 số bất kì thì bất đẳng thức điều kiện rất khó thoả mãn. Ứng dụng hiệu quả nhất của định lí S.M.V là chứng minh bất đẳng thức 4 biến. Hầu như các bất đẳng thức 4 biến dựa trên định lí này đều có thể được chứng minh rất nhẹ nhàng và đơn giản.

Chẳng hạn, với ví dụ 3.1.15 ta chỉ cần chứng minh như sau.

LỜI GIẢI. **(Ví dụ 3.1.15)**

Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Xét

$$f(a,b,c,d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd$$

$$f(a,b,c,d) = ac(b+d) + bd\left(a + c - \frac{176}{27}ac\right).$$

Từ giả thiết suy ra $a + c \leq \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2}$, do đó

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c} \geq 8 \geq \frac{176}{27} \Rightarrow f(a,b,c,d) \leq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right).$$

Ta chỉ xét các phép biến đổi Δ với (b, c, d) và theo kết quả đã chứng minh

$$f(a, b, c, d) \leq f(a, t, t, t) \quad , \quad t = \frac{b + c + d}{3}.$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh nếu $a + 3t = 1$ thì

$$3at^2 + t^3 \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}at^3.$$

Chứng minh điều này rất đơn giản, khi thay $a = 1 - 3t$ ta có bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$(1 - 3t)(4t - 1)^2(11t + 1) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ☐

Chúng ta sẽ trở lại với bất đẳng thức *Tukervici* đã nói ở phần trước. Như tác giả được biết, các cách chứng minh bất đẳng thức này luôn rất phức tạp và dài dòng. Sử dụng định lí S.M.V, với cách chứng minh tương tự như ví dụ 3.1.14 ta có thể chứng minh bài toán rất dễ dàng.

Ví dụ 3.1.16 (Bất đẳng thức Tukervici). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta có*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

LỜI GIẢI. Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Xét

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2d^2 - d^2a^2 - a^2c^2 - b^2d^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd - a^2c^2 - b^2d^2 - (a^2 + c^2)(b^2 + d^2). \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(a, b, c, d) - f(\sqrt{ac}, b, \sqrt{ac}, d) = (a^2 - c^2)^2 - (b^2 + d^2)(a - c)^2 \geq 0.$$

Do đó theo định lí S.M.V, xét với phép biến đổi Δ của (a, b, c), ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $a = b = c = t \geq d$. Bất đẳng thức lúc này tương đương với

$$3t^4 + d^4 + 2t^3d \geq 3t^4 + 3t^2d^2 \Leftrightarrow d^4 + t^3d + t^3d \geq 3t^2d^2.$$

Hiển nhiên đúng theo bất đăng thức $AM - GM$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$ hoặc $a = b = c, d = 0$ hoặc các hoán vị. ☐

Ví dụ 3.1.17. *Chứng minh với các số thực không âm x, y, z, t có tổng bằng 4*

$$(1 + 3x)(1 + 3y)(1 + 3z)(1 + 3t) \leq 125 + 131xyzt.$$

Lời Giải. Dễ thấy rằng đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = t = 1$ hoặc $x = y = z = 4/3, t = 0$ nên 131 là hằng số tốt (lớn) nhất trong bất đẳng thức sau

$$(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) \leq 256 + 131(xyzt - 1).$$

Xét biểu thức

$$f(x,y,z,t) = (1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t) - 131xyzt.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z \geq t$. Khi đó

$$f(x,y,z,t) - f\left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}, t\right)$$
$$= 9(1+3y)(1+3t)\left(xz - \frac{(x+z)^2}{4}\right) - 131yt\left(xz - \frac{(x+z)^2}{4}\right).$$

Nhận xét rằng nếu $y + t \leq 2$ thì

$$9(1+3y)(1+3t) \geq 131yt \Leftrightarrow 9 + 27(y+t) \geq 50yt.$$

Vì $y + t \leq 2$ nên $yt \leq 1$, do đó

$$9 + 27(y+t) \geq 54\sqrt{yt} \geq 54yt \geq 50yt.$$

Vậy ta có $f(x,y,z,t) \leq f\left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}, t\right)$. Theo định lí $S.M.V$ thì bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu $x = y = z = a \geq 1 \geq t = 4 - 3z$. Trong trường hợp này ta có bất đẳng thức

$$(1+3a)^3(1+3(4-3a)) \leq 125 + 131a^3(4-3a).$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta có bất đẳng thức

$$150a^4 - 416a^3 + 270a^2 + 108a - 112 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(3a-4)(50a+28) \leq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1$ hoặc $a = 4/3$ tương ứng với 2 trường hợp có đẳng thức được nêu ở đầu bài giải. □

Bài toán sau đây thể hiện khá đầy đủ sự độc đáo của phương pháp này

Ví dụ 3.1.18. *Các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1a_2...a_n = 1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \geq n + 3,$$

Với mọi số nguyên dương $n \geq 4$.

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Đặt

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + ... + a_n},$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(a_1, \sqrt{a_2 a_n}, \sqrt{a_2 a_n}, a_3, a_4, ..., a_{n-1}) \quad (*)$$

Thật vậy, khẳng định trên tương đương với

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(a_1, \sqrt{a_2 a_n}, \sqrt{a_2 a_n}, a_3, a_4, ..., a_{n-1})$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 - \frac{3n(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_n})^2}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1 + 2\sqrt{a_2 a_n} + a_3 + ... + a_{n-1})},$$

Và do đó ta phải chứng minh

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1 + 2\sqrt{a_2 a_n} + a_3 + ... + a_{n-1}) \geq 3n a_2 a_n.$$

Vì $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ nên

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(a_1 + 2\sqrt{a_2 a_n} + a_3 + ... + a_{n-1})$$
$$\geq (2a_2 + (n-2)a_n)(a_2 + 2\sqrt{a_2 a_n} + (n-3)a_n)$$
$$\geq (2 + 2\sqrt{n-3})2\sqrt{2(n-2)}a_2 a_n \geq 3n a_2 a_n.$$

Với mọi $n \geq 4$. Còn với $n = 3$ thì bất đẳng thức trên vẫn đúng (với $a_2 \geq a_3$)

$$(a_2 + 2\sqrt{a_2 a_3} + a_3)(2a_2 + a_3) \geq 9a_2 a_3.$$

Vậy $(*)$ được chứng minh xong.

Bất đẳng thức $(*)$ mang lại cho chúng ta một kết quả quan trọng hơn.

Từ định lí S.M.V suy ra

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(a_1, b, b, ..., b), \quad b = \sqrt[n-1]{a_2 a_3 ... a_n}.$$

Và phần còn lại (thay n bởi $n + 1$ cho gọn) ta phải chứng minh $g(b) \geq n + 4$.

$$g(b) = b^n + \frac{n}{b} + \frac{3(n+1)}{nb + 1/b^n} = b^n + \frac{n}{b} + \frac{3(n+1)b^n}{nb^{n+1} + 1}$$
$$g'(b) = nb^{n-1} - \frac{n}{b^2} + \frac{3(n+1)(nb^{n-1}(nb^{n+1} + 1) - (n+1)nb^{2n})}{(nb^{n+1} + 1)^2}$$
$$g'(b) = nb^{n-1} - \frac{n}{b^2} + \frac{3n(n+1)}{(nb^{n+1} + 1)^2}(b^{n-1} - b^{2n}).$$

Do đó

$$g'(b) = 0 \Leftrightarrow (b^{n+1} - 1)((nb^{n+1} + 1)^2 - 3(n+1)b^{n+1}) = 0.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $(nb^{n+1} + 1)^2 \geq 4nb^{n+1} \geq 3(n+1)b^{n+1}$.
Vậy $g'(b) \leq 0\ \forall b \leq 1$ và $g'(1) = 0$, suy ra $g(b) \geq g(1) = n + 4$ (*đpcm*).
Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ❑

Chú ý rằng ở bài toán trên, hằng số tốt nhất để thay cho $3n$ là $4(n-1)$, vì thế ta phải cần thêm điều kiện $n \geq 4$. Tuy nhiên 2 phép chứng minh hoàn toàn tương tự.

Ví dụ 3.1.19. *Cho các số thực không âm a, b, c, d có tổng bằng 4. Với k là một số thực dương cho trước, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k.$$

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a \geq b \geq c \geq d$.
Giả sử $1 \leq k \leq 3$. Đặt $t = \frac{a+c}{2}$ và $u = \frac{a-c}{2}$ suy ra $a = t + u, c = t - u$.

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k = (b^k + d^k)(ac)^k + b^k d^k (a^k + c^k).$$

Đặt $s = b^{-k} + d^{-k}$. Xét hàm số

$$f(u) = s(ac)^k + a^k + c^k = s(t^2 - u^2)^k + (t+u)^k + (t-u)^k.$$

Ta sẽ chứng minh $f(u) \leq f(0)$. Thật vậy

$$\begin{aligned} f'(u) &= -2kus(t^2 - u^2)^{k-1} + k(t+u)^{k-1} - k(t-u)^{k-1} \\ &= ku(t^2 - u^2)^{k-1}\left(-2s + \frac{(t-u)^{-k+1} - (t+u)^{-k+1}}{2u}\right). \end{aligned}$$

Vì $a \geq b \geq c \geq d$ nên $d \leq t - u$. Mặt khác $k \leq 3$ và hàm $\delta(x) = x^{-k+1}$ là hàm giảm nên theo định lí *Lagrange* ta có

$$\begin{aligned} &\frac{(t+u)^{-k+1} - (t-u)^{-k+1}}{2u} = \delta'(\beta) \geq (-k+1)(t-u)^{-k} \\ &\Rightarrow \frac{(t-u)^{-k+1} - (t+u)^{-k+1}}{2u} \leq (k-1)(t-u)^{-k} \\ &\Rightarrow -2s + \frac{(t-u)^{-k+1} - (t+u)^{-k+1}}{2u} \leq \frac{-2}{d^k} + \frac{k-1}{(t-u)^k} \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $f(u) \leq f(0)$. Theo định lí *S.M.V* ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $a = b = c = t \geq d$. Xét hàm

$$g(t) = t^{3k} + 3t^{2k}(4 - 3t)^k,$$

Ta sẽ chứng minh $g(t) \le \max\left(g(1), g(\frac{4}{3})\right)$. Thật vậy

$$g'(t) = 3kt^{3k-1} + 6kt^{2k-1}(4-3t)^k - 9kt^{2k}(4-3t)^{k-1}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^k + 2(4-3t)^k = 3t(4-3t)^k$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t}{4-3t}\right)^k + 2 = \frac{3t}{4-3t}.$$

Đặt $r = r(t) = \dfrac{t}{4-3t} \Rightarrow r(t)$ là hàm đơn điệu tăng. Từ phương trình trên suy ra

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow r^k + 2 = 3r.$$

Dễ thấy phương trình trên có không quá 2 nghiệm thực dương phân biệt, $g'(1) = 0$

$$\Rightarrow g(t) \le \max\left(g(1), g\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \max\left(4, \left(\frac{4}{3}\right)^{3k}\right).$$

Từ kết quả trên ta cũng suy ra (lấy $k = 1$)

$$abc + bcd + cda + dab \le 4,$$

Do đó với mọi $k \le 1$ thì

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \le 4.$$

Xét trường hợp $k \ge 3$. Ta có

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \le (ab)^k(c+d)^k$$
$$\Leftrightarrow (ab)^k\left((c+d)^k - c^k - d^k\right) \ge (a^k + b^k)c^k d^k$$

Bất đẳng thức trên đúng vì $(c+d)^k - c^k - d^k \ge kc^{k-1} \ge 2c^k$.

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$(ab)^k(c+d)^k \le \left(\frac{a+b+c+d}{3}\right)^{3k} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3k}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh xong trong mọi trường hợp

$$(abc)^k + (bcd)^k + (cda)^k + (dab)^k \le \max\left(4, \left(\tfrac{4}{3}\right)^{3k}\right). \ \square$$

3.1.5 Phương pháp dồn biến toàn miền

Trong một số bài toán, công việc chứng minh bất đẳng thức điều kiện để dồn 2 biến số bằng nhau trở nên rất khó khăn, thậm chí không thể thực hiện được. Điều này thường xảy ra trong một số bài toán hoán vị, khi đẳng thức lệch hoàn toàn với các biến chẳng hạn. Có một phương pháp rất hay được sử dụng, đó là phương pháp dồn biến toàn miền. Phương pháp này nhằm làm triệt tiêu một biến về 0, hay nói cách khác là ta cùng trừ đi một lượng nào đó cho tất cả các biến số. Phương pháp thường được sử dụng khi có sự chênh lệch bậc của các đại lượng xấp xỉ 0 (mà ta có thể hiểu đơn giản là các đại lượng $(a-b),(b-c),(c-a)$ nếu có 3 biến).

Các bạn hãy xem các ví dụ sau đây

Ví dụ 3.1.20. *Chứng minh với mọi số thực không âm a,b,c ta luôn có*

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geq 4(a-b)(b-c)(c-a).$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 8(a-b)(b-c)(c-a) \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát của bài toán giả sử $c=\min(a,b,c)$. Cố định các hiệu $a-b, b-c, c-a$ và giảm a,b,c cùng đi một lượng c (tức là thay a,b,c bởi $a-c, b-c, 0$) thì rõ ràng $a-b, a-c, b-c$ không thay đổi còn $a+b+c$ giảm đi. Vậy vế trái của (1) thì giảm đi còn vế phải của (1) thì không đổi. Do đó ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $a,b \geq c=0$. Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$a^3+b^3 \geq 4ab(b-a),$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì

$$4a(b-a) \leq b^2 \Rightarrow 4ab(b-a) \leq b^3 \leq a^3+b^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❑

Bài toán trên khá đơn giản nhưng thể hiện được rất rõ tư tưởng của phép chứng minh. Điểm cần chú ý nhất của lời giải này là nhận xét, nếu giảm các biến a,b,c đi cùng một lượng nhỏ hơn $\min(a,b,c)$ thì một vế không đổi, còn một vế thì giảm đi. Nhận xét được chứng minh rất dễ, vì bậc (xấp xỉ 0) của $(a-b)(b-c)(c-a)$ là 3 còn bậc (xấp xỉ 0) của $(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$ bằng 2. Ta cũng có một bài toán tương tự với 4 biến là

Ví dụ 3.1.21. *Chứng minh với mọi a,b,c,d không âm*

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd \geq 2(a-b)(b-c)(c-d)(d-a).$$

Và trong trường hợp $(a-b)(c-d) \leq 0$, ta có thể thay 2 bằng 17.

LỜI GIẢI. Để giải bài toán trên, ta chỉ cần phân tích

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=\sum_{\{x,y\}\subset\{a,b,c,d\}} s(x,y)(x-y)^2,$$

Trong đó $s(x,y)$ là các đa thức bậc 2 của x,y có tất cả các hệ số đều dương. Từ phân tích đó, ta thấy để chứng minh bất đẳng thức, chỉ cần chứng minh trong trường hợp có một trong các số a,b,c,d bằng 0. Như vậy ta đã vượt qua phần khó khăn nhất của bài toán. ❑

Trong một số trường hợp, khi giảm đồng thời các biến đi một đại lượng, thì cả 2 vế của bất đẳng thức cũng đồng thời thay đổi, tăng hoặc giảm. Xét ví dụ sau đây

Ví dụ 3.1.22. *Cho các số thực a,b,c có tổng bằng 3. Tìm tất cả các giá trị thực của k để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$a^4+b^4+c^4-3abc\geq k(a-b)(b-c)(c-a).$$

LỜI GIẢI. Xét với $c=0$ thì ta có $-6\sqrt{2}\leq k\leq 6\sqrt{2}$.

Thật vậy, với $c=0, a+b=3$, theo bất đẳng thức $AM-GM$

$$VT=a^4+b^4=(a^2-b^2)^2+2a^2b^2\geq 2\sqrt{2}|ab(b^2-a^2)|=6\sqrt{2}|ab(b-a)|.$$

Đẳng thức xảy ra khi $|b^2-a^2|=|ab|$ và $a+b=3, c=0$.

Do bất đẳng thức có dấu bằng với a,b,c phân biệt nên giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của k để bất đẳng thức trên luôn đúng phải là $-6\sqrt{2}$ và $6\sqrt{2}$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mọi a,b,c có tổng bằng 3 thì

$$a^4+b^4+c^4-3abc\geq 6\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a).$$

Để thực hiện ý tưởng dồn biến toàn miền, việc đầu tiên cần làm là đồng bậc hoá 2 vế của bất đẳng thức

$$a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)\geq 2\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

Nếu chỉ đơn giản là cùng giảm đi các biến a,b,c một lượng $t\leq\min(a,b,c)$ ta thấy cả 2 vế đều thay đổi? Nhưng điều đặc biệt ở đây là ta có thể so sánh những sự thay đổi đó. Thật vậy, xét hàm số

$$\begin{aligned}
f(t)= &\ (a+t)^4+(b+t)^4+(c+t)^4-\\
&-(a+t)(b+t)(c+t)(a+b+c+3t)\\
&-2\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+3t)\\
\Rightarrow f(t)= &\ A+Bt+Ct^2.
\end{aligned}$$

Trong đó các hệ số của $f(t)$ là

$$A = a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c) - 2\sqrt{2}(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a),$$
$$B = 4(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc - k(a-b)(b-c)(c-a),$$
$$C = 6(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca).$$

Dễ thấy $C \geq 0$ vì

$$6(a^2+b^2+c^2) \geq 2(a+b+c)^2 \geq (a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca).$$

Giả sử $c = \min(a,b,c)$. Ta sẽ chứng minh

$$4(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \geq 6\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a).$$

Có thể phân tích vế trái dưới dạng tổng các bình phương như sau

$$\begin{aligned} VT &= (a-b)^2(a+b) + (b-c)^2(b+c) + (c-a)^2(c+a) + 2(a^3+b^3+c^3-3abc) \\ &= (a-b)^2(2a+2b+c) + (b-c)^2(2b+2c+a) + (c-a)^2(2c+2a+b). \end{aligned}$$

Từ cách phân tích này, ta chỉ cần xét bài toán khi $c = 0$ (dựa theo ý tưởng ban đầu của phép dồn biến toàn miền). Với $c = 0$ ta phải chứng minh

$$\begin{aligned} &4(a^3+b^3) - ab(a+b) \geq 6\sqrt{2}ab(b-a) \\ \Leftrightarrow\ &a^3 + 4b^3 + (6\sqrt{2}-1)a^2b \geq (6\sqrt{2}+1)ab^2. \end{aligned}$$

Nhưng bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$4b^3 + (6\sqrt{2}-1)a^2b \geq 4\sqrt{6\sqrt{2}-1}ab^2 \geq (6\sqrt{2}+1)ab^2.$$

Vậy trong khai triển của $f(t)$, các hệ số của t, t^2 đều dương, suy ra $f(t)$ là hàm tăng trên miền $t \geq 0$. Với $c = \min(a,b,c)$ ta có

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c) - k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \\ &\geq a'^4 + b'^4 + c'^4 - a'b'c'(a'+b'+c') - k(a'-b')(b'-c')(c'-a'). \end{aligned}$$

Trong đó $a' = a-c, b' = b-c, c' = c-c = 0$, nói cách khác ta chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu nếu $c = 0$. Nhưng trường hợp này đã được xét ở trên, vậy bài toán được chứng minh hoàn chỉnh. Ta có đẳng thức khi $a = b = c$ hoặc trong trường hợp sau và các hoán vị tương ứng

$$c = 0, b = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}a \Leftrightarrow a = \tfrac{3(3-\sqrt{5})}{2}, b = \tfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}, c = 0. \quad \square$$

Đây rõ ràng là một chứng minh khá công phu và phức tạp, nhưng nội dung cơ bản chỉ xoay quanh ý tưởng của phép dồn biến toàn miền. Cách sử dụng hàm số như trên luôn tỏ ra rất hữu ích với các bài dạng này, chẳng hạn với bất đẳng thức Jack Grafukel đã được chứng minh ở phần trước

Ví dụ 3.1.23. *Với mọi a, b, c không âm thì*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

Nói thêm rằng bất đẳng thức trên của Jack Grafukel là một bất đẳng thức rất khó và chắc chắn phương pháp dồn biến toàn miền là một trong những chứng minh đơn giản, độc đáo và sơ cấp nhất. Sẽ còn có thêm nhiều điều thú vị khác đối với phương pháp kì lạ này cần được khám phá và giải quyết. Kết thúc cho bài viết là một bất đẳng thức khá thú vị và rất đáng suy nghĩ.

Ví dụ 3.1.24. *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm. Tìm các số thực k để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$a_1^n+a_2^n+...+a_n^n-na_1a_2...a_n\ge k(a_1-a_2)(a_2-a_3)...(a_{n-1}-a_n)(a_n-a_1).$$

Tuy rằng việc tìm được số k tốt nhất là rất khó, nhưng trong một số trường hợp cụ thể của n ta cũng có được những bài toán khá thú vị. Một số kết quả riêng là

- $a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2\ge 4(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$
- $a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd\ge 2(a-b)^2(c-d)^2.$
- $a^8+b^8+c^8+d^8-4a^2b^2c^2d^2\ge 2(a-b)^2(b-c)^2(c-d)^2(d-a)^2.$

Các bạn hãy tự chứng minh các bài tập nhỏ này. Việc tìm một ước lượng đủ tốt cho số $k=k(n)$ trong bất đẳng thức trên vẫn là một câu hỏi mở dành cho bạn đọc (ta có thể đưa về trường hợp có 1 trong n biến bằng 0 theo ý tưởng dồn biến toàn miền, nhưng để tính chính xác hay tìm một khoảng đủ tốt lại là một vấn đề khác). Những kết quả được trình bày ở đây mới là những kết quả bước đầu trong một thời gian ngắn và chắn chắn rằng chính các bạn sẽ còn làm được nhiều hơn thế nữa.

3.2 Phương pháp phân tích bình phương S.O.S

3.2.1 Bài toán mở đầu

Thông thường khi đứng trước một bài toán bất đẳng thức quen biết, cách mà chúng ta bắt đầu để giải chúng không phải là thử mò mẫm từ các bất đẳng thức đã biết, không phải là tìm ngay một phương pháp dồn biến nào đó mà thường gặp nhất là đưa về các dạng tổng bình phương. Điều này dựa trên tính chất cở bản nhất của số thực: $x^2\ge 0\ \forall x\in R$. Có rất nhiều bài toán, cho dù bạn chủ động hay vô tình, đều đã sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Tuy nhiên, rất có thể những điều bạn sắp đọc được trong mục này sẽ làm bạn thực sự ngạc nhiên...

Chúng ta sẽ mở đầu với bất đẳng thức $AM - GM$, đây có thể coi là bất đẳng thức cơ bản nhất trong những bất đẳng thức cơ bản. Nhưng chúng ta chỉ cần tìm hiểu bất đẳng thức này trong trường hợp các số n rất nhỏ. Với $n = 2$ chẳng hạn, ta có bất đẳng thức

Ví dụ 3.2.1. *Với mọi $a, b \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$.*

Sẽ không có nhiều điều cần phải bàn tới ở bất đẳng thức trên, ngay khi các bạn học về số thực thì việc chứng minh bất đẳng thức đó đã là quá dễ. Bất đẳng thức tương đương với $(a-b)^2 \geq 0$, một điều quá hiển nhiên. Bây giờ, chúng ta xét tiếp khi $n = 3$ và bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 3.2.2. *Với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.*

Khi hỏi về một chứng minh thật cụ thể cho bất đẳng thức này, chúng ta sẽ cảm thấy một chút bối rối. Tất nhiên, bất đẳng thức trên không khó, lời giải chỉ trong duy nhất một dòng ...

$$VT - VP = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right),$$

Và chắc chắn đây là cách làm thông minh nhất, vì chúng ta không phải qua một bước trung gian nào cả. Cả 2 ví dụ trên đều được chứng minh bằng phương pháp phân tích bình phương, nhưng theo một nghĩa tương đối hẹp. Thuận lợi rất lớn trong lời giải bài toán bằng cách này là việc sử dụng rất ít kiến thức cao cấp, thậm chí bạn không cần biết bất kì một định lí về bất đẳng thức nào cả. Ngoài ra, nó còn là một phương pháp rất tự nhiên theo suy nghĩ của chúng ta.

Nếu đọc kĩ các bài toán ở chương trước, các bạn đã gặp không ít những bài toán sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Còn bây giờ, chúng ta sẽ khái quát cách sử dụng và đi tìm bản chất của một phương pháp chứng minh cực kì hiệu quả - *phương pháp phân tích bình phương S.O.S.*

Bài toán quan trọng mà chúng ta phải xem xét đến trong mục này là một bất đẳng thức nổi tiếng đã được giới thiệu ở chương trước, bất đẳng thức *Iran 96.*

Problem 3 (Iran 96). *Với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

Đây cũng là bài toán có hình thức phát biểu rất đơn giản và đẹp mắt. Ngoài ra, nó còn là một bất đẳng thức rất khó khi bạn chưa được tiếp cận trước đó. Nhưng trước tiên, chúng ta hãy xem lại bất đẳng thức trong kì thi IMO 2005 và tìm một chứng minh thật tự nhiên cho nó.

Ví dụ 3.2.3 (IMO 2005 Pro. A3). *Giả sử x, y, z là các số thực dương và $xyz \geq 1$. Hãy chứng minh rằng*

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + y^2 + x^2} \geq 0.$$

LỜI GIẢI. Việc đầu tiên, ta cần đưa bất đẳng thức về dạng chuẩn hoá- đồng bậc.

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2.xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} = \frac{x^4 - x^2yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)}$$

$$\frac{x^4 - x^2yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)} \geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}$$

Nếu đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{a,b,c} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b)\left(\frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (a+c)^2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c} (a-b)^2 \frac{c^2 + c(a+b) + a^2 - ab + b^2}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (a+c)^2)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$. ❑

Chứng minh trên không phải là chứng minh duy nhất, và có thể còn có nhiều chứng minh độc đáo hơn. Nhưng nếu xem xét khách quan thì chứng minh trên hoàn toàn rất tự nhiên và cơ bản. Nói khái quát, khi đứng trước một bất đẳng thức bất kì của 3 biến a, b, c, ta sẽ tìm cách đưa chúng về dạng tổng của các bình phương $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ kí hiệu

$$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq 0.$$

Phần đưa về dạng chính tắc trên là bước đầu tiên trong cách sử dụng phương pháp S.O.S. Nếu bạn đã khá quen với bất đẳng thức thì việc lập công thức trên là tương đối đơn giản, chỉ cần biết qua một số phép biến đổi và hằng đẳng thức, còn nếu bạn chưa quen, thì các thắc mắc sẽ được giải quyết trong mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kĩ thuật phân tích".

Tất nhiên, nếu trong biểu diễn cơ sở đó các hệ số S_a, S_b, S_c đều không âm thì bài toán được chứng minh. Từ trước tới nay, đây vẫn là cách mà cách bạn thường làm nhưng đây chỉ là trường hợp đơn giản nhất trong kĩ thuật chứng minh của phương pháp S.O.S. Điều quan trọng hơn. S.O.S giúp chúng ta giải quyết trong các trường hợp mà theo quan niệm cũ là không thể áp dụng được : Có một số hệ số trong S_a, S_b, S_c là không dương.

Thông thường, trong các bài toán đối xứng ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Với các bài toán hoán vị thì phải xét thêm trường hợp $c \geq b \geq a$. Trong trường hợp $a \geq b \geq c$ ta có các nhận xét sau

- Nếu $S_b \geq 0$: Do $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ nên

  $$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c + S_b)(a-b)^2 + (S_b + S_a)(b-c)^2.$$

  Và phần còn lại của bài toán là chứng minh $S_a + S_b \geq 0$, $S_c + S_b \geq 0$. Thông thường hai bất đẳng thức này luôn có thể chứng minh khá đơn giản, vì chúng không còn phải nhân thêm với các bình phương $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ nữa.

- Nếu $S_b \leq 0$: Do $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$ nên

  $$S_c(a-b)^2 + S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 \geq (S_c + 2S_b)(a-b)^2 + (2S_b + S_a)(b-c)^2.$$

  Cũng vậy, việc chứng minh còn lại $S_c + 2S_b \geq 0$ và $2S_b + S_a \geq 0$ sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

Ngoài ra nếu $S_a + S_b + S_c \geq 0, S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ thì theo định lí về dấu của tam thức bậc 2 cũng dễ dàng suy ra được

$$S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Trong nhiều trường hợp, ta cần thêm một số ước lượng mạnh hơn, chẳng hạn ước lượng hay dùng đến là

$$\frac{a-c}{b-c} \geq \frac{a}{b} (a \geq b \geq c).$$

Chẳng hạn khi ta có $S_b, S_c \geq 0$ thì

$$S_b(a-c)^2 + S_a(b-c)^2 = (b-c)^2 \left(S_b \left(\frac{a-c}{b-c} \right)^2 + S_a \right) \geq (b-c)^2 \left(\frac{a^2 S_b}{b^2} + S_a \right).$$

Và như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$.

Ta có thể tóm tắt các kết quả trên thành một định lí chung như sau

Định lý 3.3 (Định lí S.O.S). *Xét biểu thức*

$$S = f(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(a-c)^2 + S_c(a-b)^2,$$

Trong đó S_a, S_b, S_c là các hàm số của a, b, c.

1. *Nếu* $S_a, S_b, S_c \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
2. *Nếu* $a \geq b \geq c$ *và* $S_b, S_b + S_c, S_b + S_a \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
3. *Nếu* $a \geq b \geq c$ *và* $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
4. *Nếu* $a \geq b \geq c$ *và* $S_b, S_c \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.
5. *Nếu* $S_a + S_b + S_c \geq 0$ *và* $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \geq 0$ *thì* $S \geq 0$.

Ngoài ra để $S \geq 0$ với mọi $a, b, c \geq 0$ thì ta phải có $S_a + S_b|_{a=b} \geq 0, S_b + S_c|_{b=c} \geq 0, S_c + S_a|_{c=a} \geq 0$. Trong đó $S_a + S_b|_{a=b}$ có nghĩa là ta xét biểu thức $S_a + S_b$ khi $a = b$. Với các bài toán đối xứng ta có ngay $S_a = S_b$ nếu $a = b$. Nhận xét này rất quan trọng trong các các bài toán tìm hằng số tốt nhất.

Dường như định lí này còn có vẻ quá đơn giản và nếu nói rằng nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến thì thật khó mà tưởng tượng được. Nhưng thực tế thì S.O.S đã làm được điều này và đây là một điều rất ngạc nhiên.

Một câu hỏi nữa đặt ta là với những biểu thức nào thì ta có thể chuyển về dạng chính tắc S.O.S như vậy? Câu trả lời là mọi hàm số đối xứng $f(a, b, c)$ thoả mãn $f(a, a, a) = 0$ và f có thể chứa căn thức, phân thức của a, b, c luôn luôn có biểu diễn ấy. Chứng minh điều này bạn xem trong phần tiếp theo.

Bây giờ là một số ví dụ cụ thể để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp này, và nếu có thể thì trước tiên bạn hãy thử chứng minh chúng theo cách khác.

Ví dụ 3.2.4. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2.$$

LỜI GIẢI. Ta chú ý đến 2 đẳng thức sau đây

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right),$$
$$(a + b)(b + c)(c + a) - 8abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2.$$

Như thế sau khi thêm bớt 1 ở mỗi số hạng vế trái, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{2c(a - b)^2 + 2b(a - c)^2 + 2a(b - c)^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Ta tìm được

$$S_a = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2a = b+c-a-\frac{abc}{ab+bc+ca},$$
$$S_b = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = a+c-b-\frac{abc}{ab+bc+ca},$$
$$S_c = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2c = a+b-c-\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

Do tính đối xứng nên có thể giả sử rằng $a \ge b \ge c$, khi đó dễ thấy $S_b \ge 0, S_c \ge 0$. Dựa vào tiêu chuẩn thứ nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng $S_a + S_b \ge 0$ là xong. Nhưng điều này rất hiển nhiên vì

$$S_a + S_b = 2c - \frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{2c^2(a+b)}{ab+bc+ca} \ge 0.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Chúng ta hãy trở lại với bất đẳng thức Iran 1996.

Ví dụ 3.2.5 (Iran TST 1996). *Chứng minh rằng với các số thực không âm x, y, z ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \ge \frac{9}{4(xy+yz+zx)}.$$

Lời Giải. Đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$. Ta phải chứng minh

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \ge \frac{9}{4}.$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có thể chuyển bất đẳng thức trên về dạng

$$\left(\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}\right)(b-c)^2 + \left(\frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2}\right)(a-c)^2 + \left(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}\right)(a-b)^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow S_a = \frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2},\ S_b = \frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2},\ S_c = \frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}.$$

Giả sử rằng $a \ge b \ge c$ thì $S_a \ge 0$. Sử dụng tiêu chuẩn 4 ta chỉ cần chứng minh $b^2S_b + c^2S_c \ge 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 \ge abc$, nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$a \le b+c \Rightarrow b^3+c^3 \ge bc(b+c) \ge abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. □

Có một vài cách chứng minh khác cho bất đẳng thức Iran 96, cách thông thường chúng ta biết là khai triển và sử dụng bất đẳng thức *Schur*, hoặc dùng cách đa thức đối xứng. Tuy nhiên bạn đọc sẽ đồng ý với tác giả, rằng các phương pháp đó chỉ có ý nghĩa là chứng minh bất đẳng thức đúng về mặt toán học, chứ không để lại nhiều ấn tượng hay mở rộng. Việc biết sử dụng phương pháp S.O.S đã làm bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều, đây thực sự là một lời giải đẹp và ngắn gọn, thoả mãn được mỹ quan toán học của nhiều người.

Phương pháp phân tích bình phương đã từng xuất hiện theo cách này hay cách khác trong một số bài toán bất đẳng thức, vì nó là một hướng suy nghĩ rất tự nhiên đối với bất đẳng thức. Nhưng chắc chắn đây sẽ là lần đầu tiên mà phương pháp này được hệ thống và được coi là phương pháp chính thống cho chúng ta. Nó đem lại cho chúng ta một cách nhìn chủ động và vô cùng hiệu quả đối với các bài toán, mà chỉ một thời gian ngắn trước còn là những bài toán vô cùng khó khăn. Bất đẳng thức Iran 96 được coi là bài toán cơ bản ứng dụng phương pháp này (mặc dù tác giả nghĩ đến S.O.S từ một bất đẳng thức cũ hơn). S.O.S là tên lấy từ chữ cái đầu tiên của cụm từ *Sum of Square* trong tiếng Anh.

3.2.2 Định lí về biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kĩ thuật phân tích

Để khẳng định niềm tin của chúng ta về sự tồn tại một biểu diễn cơ sở cho phương pháp S.O.S ta cần một chứng minh cụ thể cho lớp các hàm đa thức, phân thức cho phép chứa các luỹ thừa hữu tỉ (nói cách khác, có thể chứa căn thức). Ngoài ra, nếu không có gì thay đổi, chúng ra chỉ xét bài toán trong trường hợp các biến số không âm (vì một biểu diễn của đa thức đúng trong tập R^+ thì cũng đúng trong R). Ta có các định nghĩa và định lí sau đây

Định nghĩa 3. *Một hàm phân thức ba biến $F(a,b,c)$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $F(a,b,c) = F(x,y,z)$ đúng với mọi hoán vị (x,y,z) của (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi số thực dương x mà $F(x,x,x) = 0$ thì $F(a,b,c)$ được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.*

Định nghĩa 4. *Hàm nửa đối xứng ba biến Một hàm phân thức ba biến $G(a,b,c)$ được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $G(a,b,c) = G(a,c,b)$ đúng với mọi bộ ba số thực dương (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi cặp hai số thực dương x,y mà $G(x,y,y) = 0$ thì $G(a,b,c)$ được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.*

Định lý 3.4 (Biểu diễn cơ sở đối với lớp hàm đa thức). *Giả sử $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng*

$$F(a,b,c) = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2.$$

CHỨNG MINH. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh định lí trên cần dựa vào một số hiểu biết cơ bản về không gian véctơ. Cách chứng minh rất ngắn gọn và hay nhưng cần sử dụng một số công cụ cao cấp.

Bởi vì định lý chỉ hạn chế trong lớp các đa thức ba biến nên có có thể nói tới bậc của đa thức. Trong đa thức ba biến a, b, c sẽ chứa (và chỉ chứa !) các hạng tử dạng $t_{m,n,p}a^m b^n c^p$ trong đó m, n, p là các số nguyên không âm. Nếu $t_{m,n,p} \neq 0$ thì $m+n+p$ được gọi là bậc của hạng tử này. Trong trường hợp ngược lại ta quy ước bậc của hạng tử này bằng 0. Số $m+n+p$ lớn nhất được gọi là bậc của đa thức đó. Rõ ràng, ta chỉ cần chứng minh định lý cho lớp các đa thức bậc n.

Ký hiệu $S(F)$ là tập hợp tất cả các đa thức ba biến $F(a,b,c)$ đối xứng chuẩn bậc n, $S(Q)$ là tập hợp tất cả các đa thức $Q(a,b,c)$ đối xứng ba biến chuẩn bậc n có dạng $Q(a,b,c) = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2$, ở đây $G(a,b,c)$ là đa thức nửa đối xứng ba biến bậc $n-2$ (ta xét $n \geq 2$ vì với n=1 thì định lý hiển nhiên đúng). Rõ ràng $S(Q) \cup \{0\}$ là không gian véctơ con của không gian véctơ $F(a,b,c)$. Và do đó số chiều của không gian $S(Q) \cup \{0\}$ không vượt quá số chiều của không gian $S(F) \cup \{0\}$. (*)

Với các $\alpha, \beta, \gamma \in N$, kí hiệu $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma)$ và xét các đa thức đặc biệt sau

(i). $F_\lambda(a,b,c) = \sum_{sym} a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}$, trong đó tổng được lấy trên tất cả các bộ hoán vị $(\alpha', \beta', \gamma')$ của (α, β, γ).

(ii). $G_\lambda(a,b,c) = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta$.

(iii). $Q_\lambda(a,b,c) = G_\lambda(a,b,c)(b-c)^2 + G_\lambda(b,c,a)(c-a)^2 + G_\lambda(c,a,b)(a-b)^2$.

Ký hiệu f_n là tập hợp tất cả các bộ số $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ thoả mãn các điều kiện $\alpha+\beta+\gamma = n, \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $F_\lambda(a,b,c)$ với $\lambda(\alpha.\beta,\gamma) \in f_n$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $S(F) \cup \{0\}$ do đó số chiều của $S(F) \cup \{0\}$ bằng số phần tử của f_n. (1)

Ký hiệu q_n là tập hợp tất cả các bộ số $\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ thoả mãn các điều kiện $\alpha+\beta+\gamma = n-2, \alpha+2 \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $Q_\lambda(a,b,c)$ với $\lambda(\alpha,\beta,\gamma) \in q_n$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính của $S(Q) \cup \{0\}$ do đó số chiều của $S(Q) \cup \{0\}$ không nhỏ hơn số phần tử của q_n. (2)

Từ các kết quả (1), (2) với chú ý là f_n và q_n có cùng số phần tử ta suy ra số chiều của $S(Q) \cup \{0\}$ không nhỏ hơn số chiều của $S(F) \cup \{0\}$ (**).

Vậy từ các kết quả (*), (**) suy ra số chiều của hai không gian $S(Q) \cup \{0\}$, $S(F) \cup \{0\}$ là bằng nhau, từ đó suy ra mọi phần tử của không gian $S(F)$ đều có thể biểu diễn qua các phần tử của không gian $S(Q)$. Đây là kết quả cần phải chứng minh. □

Hệ quả 3.1 (Biểu diễn cơ sở với phân thức). *Giả sử rằng $M(a,b,c), N(a,b,c)$ là hai đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương x thì phân số*

$M(x,x,x)/N(x,x,x)$ là một hằng số t. Khi đó tồn tại hàm số nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &= \frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} + \frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)} + \frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)} - 3t. \\ &= G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2. \end{aligned}$$

CHỨNG MINH. Xét đa thức sau đây

$$\begin{aligned} H(a,b,c) =& M(a,b,c)N(b,c,a)N(c,a,b) + M(b,c,a)N(c,a,b)N(a,b,c) \\ &+ M(c,a,b)N(a,b,c)N(b,c,c) - 3tN(a,b,c)N(b,c,a)N(c,a,b). \end{aligned}$$

Chú ý rằng $H(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng chuẩn, nên theo định lí trên thì tồn tại biểu diễn cơ sở cho đa thức này và do hệ quả được chứng minh. ❑

Bổ đề 4 (Biểu diễn chính tắc). *Giả sử α, β, γ là hữu tỉ có tổng bằng $3k$, khi đó tồn tại biểu diễn cơ sở cho biểu thức*

$$f_k(a,b,c) = \sum_{sym} a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} - 6a^k b^k c^k,$$

Trong đó tổng lấy trên tất cả các hoán vị $(\alpha', \beta', \gamma)$ của (α, β, γ).

CHỨNG MINH. Rõ ràng đây chỉ là hệ quả trực tiếp từ định lí về biểu diễn cơ sở đối với hàm đa thức. Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh hệ quả này mà không dùng đến kết quả của định lí. Ngoài ra, ta cũng chứng minh hệ quả với lớp các hàm đa thức mở rộng, theo nghĩa hệ số các biến không nhất thiết nguyên mà có thể là số hữu tỉ. Lưu ý đến các tính chất sau đây

Tính chất. *Với mọi k hữu tỉ thì các đa thức*

$$f_1 = (a^k - b^k)(a-b) \qquad f_2 = a^k + b^k + c^k - 3\sqrt[3]{a^k b^k c^k}$$

luôn có biểu diễn cơ sở S.O.S, tức là tồn tại các đa thức (mở rộng) nửa đối xứng $G(a,b,c)$ sao cho nếu f là một trong 2 đa thức trên thì

$$f = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2.$$

Chứng minh 2 với đa thức trên trên hoàn toàn bằng quy nạp và tương đối đơn giản. Ngoài ra với lớp hàm đa thức (hay k nguyên) thì bổ đề này là khá hiển nhiên. Sử dụng chúng, bài toán của chúng ta được chứng minh như sau

$$\begin{aligned} f_k(a,b,c) =& -a^\alpha(b^\beta - c^\beta)(b^\gamma - c^\gamma) - b^\alpha(a^\beta - c^\beta)(a^\gamma - c^\gamma) - c^\alpha(a^\beta - b^\beta)(a^\gamma - b^\gamma) + \\ &+ a^\alpha(b^\varphi + c^\varphi) + b^\alpha(c^\varphi + a^\varphi) + c^\alpha(a^\varphi + b^\varphi) - 6a^k b^k c^k, \end{aligned}$$

Trong đó $\varphi = \beta + \gamma$. Biểu thức ở dòng trên luôn có biểu diễn cơ sở. Biểu thức dòng dưới có thể viết lại thành

$$-(a^\alpha - b^\alpha)(a^\varphi - b^\varphi) - (b^\alpha - c^\alpha)(b^\varphi - c^\varphi) - (c^\alpha - a^\alpha)(c^\varphi - a^\varphi)$$
$$+ a^{3k} + b^{3k} + c^{3k} - 6a^k b^k c^k.$$

Bài toán của chúng ta đã được chứng minh. Đây là cách chứng minh sơ cấp cho định lí về biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S hoàn toàn bằng sơ cấp, vì từ kết quả này ta cũng suy ra luôn kết quả định lí trên. Ngoài ra, đây cũng là cách tổng quát cho phân tích cơ sở. □

Còn bây giờ là một số đẳng thức thường được sử dụng trong phân tích

- $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$
- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2 = \dfrac{(a-b)^2}{ab}$
- $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2$
- $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{1}{2}(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$
- $a^2 + b^2 + c^2 - \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2 = \dfrac{1}{3}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$
- $(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right)$
- $\sqrt{2(a^2+b^2)} - (a+b) = \dfrac{(a-b)^2}{a+b+\sqrt{2(a^2+b^2)}}$
- $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} - \dfrac{3}{2} = \sum_{sym} \dfrac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)}$

Trong các biểu thức 3 biến bạn học nên chú ý tới các đại lượng $a-b$, $b-c$, $c-a$. Việc nhóm các đại lượng này một cách hợp lí sẽ rút ra được hạng tử $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$.

Bạn hãy xem ví dụ sau đây

Ví dụ 3.2.6. *Phân tích cơ sở S.O.S cho biểu thức*

$$\frac{ab}{a^2+b^2+kc^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+kb^2} - \frac{3}{k+2}.$$

LỜI GIẢI. Đặt $s = k - 1$ và $M = a^2 + b^2 + c^2$. Chú ý rằng

$$2(a^2 + b^2 + kc^2) - 2(k+2)ab = (k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2).$$

Ta có được 2 đại lượng là $c^2 - a^2, c^2 - b^2$ trong số hạng thứ nhất. Các đại lượng này xuất hiện lại trong các số hạng khác nên

$$\frac{ab}{a^2+b^2+kc^2} + \frac{bc}{b^2+c^2+ka^2} + \frac{ca}{c^2+a^2+kb^2} - \frac{3}{k+2}$$
$$= -\frac{1}{2(s+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2 + k(c^2 - a^2 + c^2 - b^2)}{M + sc^2}$$
$$= -\frac{1}{2(s+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2}{M+sc^2} - \sum_{sym} \frac{k(c^2-b^2)}{2(s+3)}\left(\frac{1}{M+sc^2} - \frac{1}{M+sb^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2(s+3)} \sum_{sym} \frac{(k+2)(a-b)^2}{M+sc^2} + \sum_{sym} \frac{ks(b^2-c^2)^2}{2(k+3)(M+sb^2)(M+sc^2)}$$

Vậy biểu thức được viết gọn lại thành

$$\sum_{sym} \left(-\frac{k+2}{M+sc^2} + \frac{ks(a+b)^2}{(M+sa^2)(M+sb^2)}\right)(a-b)^2.$$

Ta tìm được các hệ số tương ứng của $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ trong phân tích cơ sở S.O.S là

$$S_c = -(s+3)(M+sa^2)(M+sb^2) + s(s+1)(a+b)^2(M+sc^2)$$
$$S_b = -(s+3)(M+sa^2)(M+sc^2) + s(s+1)(a+c)^2(M+sb^2)$$
$$S_a = -(s+3)(M+sb^2)(M+sc^2) + s(s+1)(b+c)^2(M+sa^2).\ \square$$

Để có kĩ thuật tốt, bạn hãy xem lại những bất đẳng thức đã biết và thử phân tích chúng. Lưu ý rằng hầu hết các bất đẳng thức đơn giản đều có thể phân tích rất dễ dàng và đó là một sự thực hành tốt với các bạn. Hơn nữa, công việc này cũng rất có ý nghĩa để áp dụng S.O.S vào các bất đẳng thức sau này thuận lợi hơn.

Ví dụ 3.2.7. *Phân tích cơ sở cho các đa thức sau đây*

(i) $(a+b+c)^3 - 27abc.$

(ii) $a^4 + b^4 + c^4 - abc(a+b+c).$

(iii) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a).$

Một câu hỏi thú vị đặt ra là liệu phương pháp phân tích như vậy có duy nhất hay không? Và câu trả lời, tất nhiên là không duy nhất. Lấy ví dụ, ta có đẳng thức đơn giản sau với mọi a, b, c thực

$$(a-b)^2(a-c)(b-c) + (b-c)^2(b-a)(c-a) + (c-a)^2(c-b)(a-b) = 0.$$

Như vậy nếu ở mỗi hệ số trong phân tích cơ sở ta thêm bớt tương ứng các đại lượng $(a-c)(b-c), \ldots$ thì được một biểu diễn mới khác biểu diễn ban đầu.

3.2.3 Những ứng dụng quan trọng của phương pháp S.O.S

Sau đây là một số bài toán điển hình dựa trên phương pháp này

Ví dụ 3.2.8. *Tìm hằng số dương k lớn nhất để ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq k+\frac{3}{2}.$$

đúng với mọi a, b, c không âm.

LỜI GIẢI. Ta sử dụng biến đổi

$$\sum_{sym}\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)},$$

Bất đẳng thức được viết thành

$$\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq k\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(a-b)^2\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(b+c)}-k\right) \geq 0.$$

+, Cho $b=c$, khi đó k phải thoả mãn điều kiện sau với mọi a, b không âm

$$k \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(b+c)}=\frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}.$$

Có thể dễ dàng tìm được với $a, b \geq 0$ thì

$$\min f(a,b)=\frac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh đây là giá trị tốt nhất của k.

+, Với $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

$$S_a=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+c)(a+b)}-k\ ,\ S_b=\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+a)(b+c)}-k\ ,\ S_c=\frac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(c+b)}-k.$$

Khi đó dễ thấy $S_c \geq S_b \geq S_a$. Ngoài ra

$$S_b + S_a = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(a+c)(b+c)} - 2k.$$

Đặt $t = \frac{a+b}{2}$, không mấy khó khăn ta chứng minh được

$$S_b + S_a \geq \frac{(2t^2+c^2)(2t+2c)}{2t(t+c)^2} - 2k = \frac{2t^2+c^2}{t(t+c)} - 2k \geq 0$$

(Theo sự xác định của số k , mà ta không cần tính cụ thể từ trước). Vậy giá trị tốt nhất của k là $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ và có thêm trường hợp $a = b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}c$ (hoặc các hoán vị) khi $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. ❑

Ví dụ 3.2.9. *Tìm hằng số thực k tốt nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{1+bc}{ka^2+bc} + \frac{1+ca}{kb^2+ca} + \frac{1+ab}{kc^2+ab} \geq \frac{12}{k+1}$$

với a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $ab+bc+ca = 1$.

Lời Giải. Đáp số cho bài toán này là $k \geq 2+\sqrt{3}$. ❑

Ví dụ 3.2.10. *Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{c^2+2ab} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}.$$

Lời Giải. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$\begin{aligned}
&2 - \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} - \frac{b(c+a)}{c^2+2ab} - \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{sym} \frac{2a^2+4bc-3a(b+c)}{a^2+2bc} = \frac{1}{3}\sum_{sym} \frac{(a-2c)(a-b)+(a-2b)(a-c)}{a^2+2bc} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{sym}\left(\frac{a-2c}{a^2+2bc} - \frac{b-2c}{b^2+2ac}\right) = \frac{1}{3}\sum_{sym} \frac{(a-b)^2(4ac+4bc-4c^2-ab)}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} \\
&= \sum_{sym} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} + \frac{4}{3}\sum_{sym} \frac{(c-a)(c-b)(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} \\
&= \sum_{sym} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} - \frac{4(c-a)^2(c-b)^2(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{sym} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)} \geq \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}$$

$\Leftrightarrow \left(ab(c^2+2ab) - 2(a-c)^2(b-c)^2\right) + bc(a^2+2bc)(b-c)^2 + ca(c^2+2ab)(c-a)^2 \geq 0.$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng do $ab \geq (a-c)(b-c)$. Ta có *đpcm.*

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$ hoặc $abc = 0$. □

Phương pháp S.O.S không chỉ ứng dụng rất tốt đối với các bất đẳng thức đối xứng mà nó còn được sử dụng hiệu quả trong các dạng bất đẳng thức hoán vị. Sau đây là một ví dụ mở đầu có nhiều ý nghĩa.

Ví dụ 3.2.11. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời Giải. Từ bất đẳng thức cơ bản $a^2/b + b \geq 2a$ ta suy ra đẳng thức sau

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} - \sum_{sym} a = \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b}.$$

Ngoài ra dễ thấy rằng

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} - (a+b+c) = \sum_{sym} \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

Từ đó ta tìm được các hệ số trong phân tích cơ sở là

$$S_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{b} - (a+b) = \frac{a^2+c^2}{b} - a, \quad S_b = \frac{c^2+b^2}{a} - b, \quad S_a = \frac{b^2+a^2}{c} - c.$$

Do tính hoán vị của các biến nên ta phải xét cả 2 trường hợp

+, $a \geq b \geq c$. Khi đó dễ thấy $S_a \geq 0, S_c \geq 0$.

Phần còn lại ta sẽ chứng minh $S_a + 2S_b \geq 0$ và $S_c + 2S_b \geq 0$. Cả 2 bất đẳng thức này rất dễ chứng minh, xin dành cho bạn đọc tự hoàn chỉnh.

+, $a \leq b \leq c$, khi đó $S_b \geq 0, S_c \geq 0$ và cũng không mấy khó khăn ta chứng minh được $S_b + S_a \geq 0$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh xong trong mọi trường hợp. Đây là một bài toán điển hình cho việc áp dụng *trực tiếp* trực tiếp các tiêu chuẩn của phương pháp

S.O.S đã được trình bày ở trên. ❑

Không chỉ dừng lại trong lớp các bài toán 3 biến, phương pháp vẫn được sử dụng trong các bài toán bất đẳng thức tổng quát với n biến

Ví dụ 3.2.12. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tổng bằng n thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{2\sqrt{2}n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \geq n + 2\sqrt{2}.$$

LỜI GIẢI. Ta sử dụng biến đổi sau

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{1}{n}\sum_{i<j}\frac{(a_i - a_j)^2}{a_ia_j},$$

$$1 - \frac{n}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = n\left(\frac{n}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\right) = \frac{\sum_{i<j}(a_i - a_j)^2}{n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}.$$

Đặt
$$S_{ij} = \frac{1}{a_ia_j} - \frac{2\sqrt{2}}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.$$

Ta phải chứng minh $\quad \sum_{i<j} S_{ij}(a_i - a_j)^2 \geq 0.$

Nhóm từng nhóm 3 số hạng và ta sẽ chứng minh 1 bất đẳng thức mạnh hơn

$$S_a(b - c)^2 + S_b(a - c)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0$$

$$S_a = \frac{1}{bc} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$S_b = \frac{1}{ac} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$S_c = \frac{1}{ab} - \frac{2\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Dễ thấy $S_a \geq S_b \geq S_c$,

$$S_b + S_c = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Đặt $t = \dfrac{b + c}{2}$, khi đó $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{2}{t}$ nên ta suy ra

$$S_b + S_c \geq \frac{2}{at} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + 2t^2} \geq \frac{2}{at} - \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}at} = 0.$$

Vậy $S_b \geq 0$ và ta có *đpcm*. Đẳng thức xảy ra chỉ khi tất cả các biến bằng nhau với $n \geq 4$. Khi $n = 3$ còn có thêm 1 trường hợp nữa là $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$ hoặc các hoán vị. □

Sau đây là một số bài toán hay vận dụng phương pháp này

Ví dụ 3.2.13. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}.$$

Ví dụ 3.2.14 (Bất đẳng thức dạng Schur). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2a^2+2b^2} + bc\sqrt{2b^2+2c^2} + ca\sqrt{2c^2+2a^2}.$$

Ví dụ 3.2.15. *Chứng minh rằng cho mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5.$$

Ví dụ 3.2.16. *Tìm hằng số thực dương k nhỏ nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2} + k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{4} + \frac{k}{3},$$

Với a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Ví dụ 3.2.17. *Tìm hằng số thực dương k nhỏ nhất cho bất đẳng thức sau*

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq 1 + \frac{k}{3},$$

Với a, b, c là các số thực không âm tuỳ ý.

Ví dụ 3.2.18. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có*

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4} + \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \geq 5.$$

Ví dụ 3.2.19. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có*

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Ví dụ 3.2.20. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm ta có*

$$\frac{7(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{11}{3}(a+b+c).$$

Ví dụ 3.2.21. *Tìm điều kiện cho các số dương k, l để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+l\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{2}+k+\frac{l}{3}.$$

Ví dụ 3.2.22. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Ví dụ 3.2.23. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Nếu như các bạn đã thực sự hiểu rõ về S.O.S thì chắc chắn những bất đẳng thức như trên sẽ không thể làm khó được các bạn, và ngay lập tức bạn có thể khẳng định rằng chúng được giải bằng S.O.S. Nhưng nếu không quen thì những bất đẳng thức rất đẹp như trên quả là một thử thách không dễ gì vượt qua được.

Hiện nay, phương pháp S.O.S không còn quá xa lạ (dù mới chỉ xuất hiện trong khoảng 1 năm gần đây) và nó đã thực sự chứng tỏ hiệu quả vượt trội của mình với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến mà không có cách nào khác so sánh được. Để kết thúc cho phần này, xin giới thiệu thêm với các bạn một gợi mở về phương pháp S.O.S đối với một lớp các bài toán đặc biệt.

3.2.4 Suy luận từ một bài toán

Hãy mở đầu với bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 3.2.24. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Tất nhiên trong bài toán này ta có thể dùng S.O.S không mấy khó khăn, nhưng lại là *quá mạnh* và còn nhiều cách dễ dàng hơn. Có một cách rất đơn giản, đó là sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev*. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{2a^2-b^2-c^2}{(b+c)^2}+\frac{2b^2-a^2-c^2}{(a+c)^2}+\frac{2c^2-a^2-b^2}{(a+b)^2}\geq 0.$$

Chú ý rằng nếu $a \geq b \geq c$ thì

$$2a^2 - b^2 - c^2 \geq 2b^2 - a^2 - c^2 \geq 2c^2 - a^2 - b^2,$$
$$\frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2},$$

Và do đó áp dụng trực tiếp bất đẳng thức *Chebyshev* ta sẽ có *đpcm*. □

Ví dụ 3.2.25. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương*

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+2ac}{(a+c)^2} + \frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời Giải. Đối với bài toán này ta cũng chưa cần dùng đến S.O.S. Các bạn có thể tự tìm lời giải bằng S.O.S, nếu không muốn chờ xem ở bài tổng quát tiếp theo. Ta dùng một bất đẳng thức sau, cũng rất đáng chú ý

$$\frac{a^2+2bc}{b+c} + \frac{b^2+2ac}{a+c} + \frac{c^2+2ab}{a+b} \geq \frac{3}{2}(a+b+c).$$

Khai triển và rút gọn các thừa số chung, ta được một bất đẳng thức rất đơn giản

$$2(a^4+b^4+c^4)+2abc(a+b+c) \geq a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Sử dụng bất đẳng thức *Schur* và bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\sum_{sym} a^2(a-b)(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{sym} a^4 + abc\sum_{sym} a \geq \sum_{sym} a^3(b+c),$$
$$a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b) \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả bài toán ban đầu

$$\left(\sum_{sym}\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}\right)\left(\sum_{sym}(a^2+2bc)\right) \geq \left(\sum_{sym}\frac{a^2+2bc}{b+c}\right)^2 \geq \frac{9}{4}(a+b+c)^2.$$

Ngoài ra, hãy chú ý rằng $k=2$ là hằng số thực lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c không âm

$$\frac{a^2+kbc}{b+c} + \frac{b^2+kac}{a+c} + \frac{c^2+kab}{a+b} \geq \frac{1+k}{2}(a+b+c).$$

Và hơn nữa,

$$\frac{a^2+kbc}{b+c} + \frac{b^2+kac}{a+c} + \frac{c^2+kab}{a+b} \geq \min\left(\frac{1+k}{2}, \frac{4+k}{4}\right)(a+b+c).$$ □

Ví dụ 3.2.26. *Tìm hằng số thực k lớn nhất cho bất đẳng thức sau với $a, b, c \geq 0$*

$$\frac{c^2+kab}{(a+b)^2}+\frac{b^2+kac}{(a+c)^2}+\frac{a^2+kbc}{(b+c)^2} \geq \frac{3(1+k)}{4}.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ sử dụng phương pháp S.O.S để giải bài toán này.

Cho $c=0$ và $a=b$ rút ra $k \leq \frac{5}{2}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là kết quả tốt nhất của k. Rõ ràng để chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi $k \leq \frac{5}{2}$ ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $k = 5/2$

$$\frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2}+\frac{2b^2+5ac}{(a+c)^2}+\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} \geq \frac{21}{4}.$$

Và với phương pháp S.O.S thì bất đẳng thức này tương đối đơn giản. Ta có

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}-\frac{7}{4}=\frac{8a^2+6bc-7b^2-7c^2}{4(b+c)^2}=\frac{4(2a^2-b^2-c^2)-3(b-c)^2}{4(b+c)^2}.$$

Ta phải chứng minh

$$4\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{(a+c)^2}\right) \geq 3\sum_{sym}\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{sym}\frac{(a-b)^2(a+b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2} \geq 3\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}\left(4(a+b)^3(a+b+2c)-3(a+c)^2(b+c)^2\right)(a-b)^2 \geq 0.$$

Lấy tương ứng S_c, S_a, S_b là các hệ số của $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ trong khai triển cơ sở trên. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

Dễ thấy $S_c \geq S_b \geq S_a$ và như vậy phần còn lại của bài toán ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $S_a + S_b \geq 0$, hay

$$4(a+c)(b+c)\left((a+c)^2+(b+c)^2\right)+4(a+b)\left((a+c)^3+(b+c)^3\right)$$
$$\geq 3(a+b)^2\left((b+c)^2+(a+c)^2\right).$$

Có thể dễ dàng nhận thấy rằng hệ số của c và c^2 ở vế phải nhỏ hơn ở vế trái. Do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trên khi $c=0$, hay

$$4ab(a^2+b^2)+4(a+b)(a^3+b^3) \geq 3(a+b)^2(a^2+b^2).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^4+b^4+2ab(a^2+b^2) \geq 6a^2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2(4ab+a^2+b^2) \geq 0.$$

Hiển nhiên đúng, đẳng thức xảy ra trong trường hợp $k = 5/2$ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Bài toán tổng quát thứ nhất đã được chứng minh xong. Một cách tự nhiên, ta tìm ước lượng cho bất đẳng thức tương tự

Ví dụ 3.2.27. *Tìm hằng số thực k lớn nhất để bất đẳng thức sau*

$$\frac{a^2+kbc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+kac}{a^2+c^2}+\frac{c^2+kab}{a^2+b^2}\geq\frac{3(1+k)}{2},$$

Đúng với mọi a, b, c không âm.

LỜI GIẢI. Ta lấy $c = 0, a = b$ để suy ra $k \leq 1/2$. Ta sẽ chứng minh giá trị này thoả mãn, và do đó bất đẳng thức sẽ vẫn đúng với mọi $k \leq 1/2$.

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{2b^2+ac}{a^2+c^2}+\frac{2c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{9}{2}.$$

Đưa về các tổng bình phương bằng khai triển

$$\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}-\frac{3}{2}=\frac{2(2a^2-b^2-c^2)-(b-c)^2}{2(b^2+c^2)},$$

Và do đó ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$2\sum_{sym}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{a^2+c^2}\right)\geq\sum_{sym}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{sym}\left(2(a+b)^2(a^2+b^2)-(a^2+c^2)(b^2+c^2)\right)(a-b)^2\geq 0.$$

Lấy S_a, S_b, S_c là các hệ số tương ứng của $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ trong bất đẳng thức trên. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $S_c \geq S_b \geq S_a$. Ta phải chứng minh thêm $S_b + S_a \geq 0$, hay tương đương với

$$2(a+c)^2(a^2+c^2)+2(b+c)^2(b^2+c^2)\geq(a^2+b^2)(a^2+b^2+2c^2).$$

Cũng dễ dàng nhận thấy hệ số của c^2 ở vế phải nhỏ hơn vế trái, và do đó ta chỉ cần chứng minh khi $c = 0$, hay

$$2a^4+2b^4\geq(a^2+b^2)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và nếu $k = 1/2$ thì có thêm 1 trường hợp $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ❑

Nếu bạn là người tò mò và thích khám phá, hãy tự mình nghiên cứu thêm một bài toán tương tự

Ví dụ 3.2.28. *Tìm hằng số thực k lớn nhất để bất đẳng thức*

$$\frac{a^2+kbc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+kac}{a^2-ac+c^2}+\frac{c^2+kab}{a^2-ab+b^2}\geq 3(1+k),$$

Đúng với mọi a, b, c không âm.

Và ta cũng có thể làm mạnh hơn bất đẳng thức ban đầu bằng bất đẳng thức

Ví dụ 3.2.29. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có*

$$\frac{4(a^2+bc)}{b^2+c^2}+\frac{4(b^2+ac)}{a^2+c^2}+\frac{4(c^2+ab)}{a^2+b^2}\geq 3+\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Sau đây là một kết quả *tổng quát* nhất từ các bài toán quả đã nói tới. Tác giả sẽ không nêu lời giải cụ thể ở đây, vì lời giải cho bài toán tổng quát cũng không khác với lời giải cho 2 bài toán trên nhiều lắm, và quan trọng hơn là cũng sử dụng phương pháp S.O.S theo cách tương tự.

Ví dụ 3.2.30. *Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm và p, q là các hằng số thoả mãn $p\geq -2,\ q\leq 2p+1$*

$$\frac{a^2+qbc}{b^2+pbc+c^2}+\frac{b^2+qac}{a^2+pac+c^2}+\frac{c^2+qab}{a^2+pab+b^2}\geq\frac{3(q+1)}{p+2}.$$

Cuối cùng, các bạn hãy sử dụng phương pháp S.O.S để giải các bài toán sau đây

Ví dụ 3.2.31. *Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+k\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\geq\frac{3}{8}+\frac{k}{3}.$$

Ví dụ 3.2.32. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm bất đẳng thức sau đây luôn đúng*

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Ví dụ 3.2.33. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có*

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Đây là các bài toán hay và khó giúp bạn tổng kết lại về phương pháp này.

3.3 Phương pháp phản chứng

3.3.1 Bài toán mở đầu

Chắc nhiều bạn sẽ ngạc nhiên khi thấy phương pháp phản chứng cũng dùng được trong các bài toán bất đẳng thức? Điều thú vị là đối với các bài toán sử dụng phương pháp này ta luôn có một lời giải sáng sủa hoặc con đường chứng minh dễ dàng hơn. Hãy bắt đầu bằng bài toán nổi tiếng sau

Problem 4 (Romania TST). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1a_2...a_n = 1$, hãy chứng minh*

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

Chứng Minh. Đây là một bài toán không dễ, nếu bạn lần đầu tiên nhìn thấy nó thì nó thực sự là một bài toán khó. Trong các cách chứng minh cho bài toán này, sử dụng phản chứng là một trong những cách ngắn chứng minh gọn nhất (sau này chúng ta sẽ còn bàn tiếp về nó với phương pháp *quy nạp tổng quát*).

Đặt $x_i = 1/(n-1+a_i)$ và ta phải chứng minh $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq 1$.

Chúng ta hãy nhìn nhận vấn đề ngược lại, nếu *tăng* các số x_i để cho tổng $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ thì điều gì sẽ xảy ra? Lưu ý rằng các số $a_i, i = \overline{1,n}$ liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a_1a_2...a_n = 1$ và do đó

$$\left(\frac{1}{x_1} - n + 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - n + 1\right)...\left(\frac{1}{x_n} - n + 1\right) = 1.$$

Vậy bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán phản chứng như sau :

Bổ đề. *Nếu $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ và $0 < x_i \leq \frac{1}{n-1}$ $\forall i = \overline{1,n}$ thì*

$$\left(\frac{1}{x_1} - n + 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - n + 1\right)...\left(\frac{1}{x_n} - n + 1\right) \leq 1.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(1-(n-1)x_1)(1-(n-1)x_2)...(1-(n-1)x_n) \leq x_1x_2...x_n.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\prod_{j\neq i}(1-(n-1)x_j) \leq \left(\frac{\sum_{j\neq i}(1-(n-1)x_j)}{n-1}\right)^{n-1} = x_i^{n-1}.$$

Cho i chạy từ 1 đến n và sau đó nhân tất cả n bất đẳng thức như trên ta có *đpcm*.

Giả sử $\sum_{i=1}^{n} x_i > 1$ khi đó tồn tại số dương $k > 1$ để $x_i = kr_i$ và $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$.

Theo chứng minh ở trên thì

$$\left(\frac{1}{r_1} - n + 1\right)\left(\frac{1}{r_2} - n + 1\right)\cdots\left(\frac{1}{r_n} - n + 1\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{kr_i} - n + 1\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - n + 1\right) = a_1a_2...a_n < 1.$$

Mâu thuẫn này suy ra *đpcm*. □

Nếu tinh ý thì các bạn có thể thấy bài toán trên và bài toán quen thuộc sau đây là hoàn toàn tương đương

Bổ đề. *Nếu $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các số thực dương thoả mãn*

$$\frac{1}{1+\alpha_1} + \frac{1}{1+\alpha_2} + ... + \frac{1}{1+\alpha_n} = 1,$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\alpha_1\alpha_2...\alpha_n \leq (n-1)^n.$$

Và câu hỏi cần phải đặt ra bây giờ là, phương pháp chung giải một bất đẳng thức bằng phản chứng sẽ như thế nào?

3.3.2 Nhìn nhận một bất đẳng thức dưới góc độ phản chứng

Trong rất nhiều bài toán thì ý tưởng phản chứng đưa chúng ta đến những kết quả rất bất ngờ. Thậm chí 2 bài toán là hoàn toàn tương đương nhau với phương pháp này nhưng ít khi chúng ta lại nhận ra sự tương đương đó. Chẳng hạn, xét bất đẳng thức sau đây.

Ví dụ 3.3.1. *Với a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Hãy chứng minh*

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq 1.$$

Bài toán này đã được nêu lên ở chương trước. Thật bất ngờ là nó trùng với đề chọn đội tuyển IMO 2005 của Trung Quốc (lời giải đã được nêu trong chương trước) nhưng lời giải gốc của bài toán lại hoàn toàn khác và phức tạp hơn khá nhiều. Có rất nhiều ví dụ tương tự, bằng phương pháp phản chứng ta có được một cách chứng minh rất độc đáo. Chẳng hạn, bạn hãy thử giải bài toán sau đây

Ví dụ 3.3.2. *Tìm hằng số dương k tốt nhất sao cho với mọi a, b, c không âm thoả mãn $a + b + c = 3$ thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{2+\sqrt[k]{a}} + \frac{1}{2+\sqrt[k]{b}} + \frac{1}{2+\sqrt[k]{c}} \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Thực ra bất đẳng thức này hoàn toàn giống với bài toán :

Tìm hằng số dương k tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^k \geq 3.$$

Mặc dù, xét về hình thức thì 2 bất đẳng thức không có gì chung nhau. ❑

Như vậy, với mỗi bài toán ta đều xây dựng được một bất đẳng thức phản chứng tương ứng và tương đương với bất đẳng thức ban đầu. Ví dụ sau đây là một bài toán mà sau khi được thay thế bằng kĩ thuật phản chứng trở thành một bài toán hoàn toàn mới và khó hơn hẳn.

Ví dụ 3.3.3. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực nhỏ hơn n^2+1 và có tổng bằng n^3 thì*

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{a_1} - 1} + \sqrt{\frac{n^2+1}{a_1} - 1} + ... + \sqrt{\frac{n^2+1}{a_n} - 1} \leq 1.$$

LỜI GIẢI. Có thể thấy bài toán trên hoàn toàn tương đương với bất đẳng thức *Chứng minh nếu $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ và $x_i \geq 0$ thì*

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + ... + \frac{1}{1+x_n^2} \leq \frac{n^3}{n^2+1}.$$

Chứng minh bất đẳng thức này bằng kĩ thuật chuẩn hoá. ❑

Như ở trong ví dụ trên thì tác giả bài toán đã cố tình giấu vấn đề cũ đi bởi kĩ thuật phản chứng để tạo ra bài toán mới. Câu hỏi đặt ra là : *Làm thế nào để xây dựng được một bất đẳng thức phản chứng đúng?* Chẳng hạn, khi cho giả thiết

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{a_1} - 1} + \sqrt{\frac{n^2+1}{a_2} - 1} + ... + \sqrt{\frac{n^2+1}{a_n} - 1} = 1,$$

Ta lại cần chứng minh $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq \frac{n^3}{n^2+1}$ mà dấu nhỏ hơn lại không thể thay bằng dấu lớn hơn? Câu trả lời là, việc đặt dấu so sánh hoàn toàn phụ thuộc vào bài toán, tuỳ theo ta sẽ tăng hay giảm các biến. Tuy nhiên, thông thường để chắc chắn và dễ nhận biết thì bạn chỉ cần thay thế một số trường hợp cụ thể. Hãy chú ý rằng, nếu đặt

$$x_i = \sqrt{\frac{n^2+1}{a_i} - 1} \Rightarrow a_i = \frac{n^2+1}{x_i^2+1},$$

Ta chứng minh, nếu $\sum_{i=1}^n \frac{n^2+1}{x_i^2+1} = n^3$ thì $\sum_{i=1}^n x_i \leq 1$. Phản chứng, nếu $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, có nghĩa là ta cần tăng giá trị x_i, suy ra giá trị biểu thức $(n^2+1)/(x_i^2+1)$ giảm, vậy ta sẽ phải chứng minh bất đẳng thức phản chứng sau

Bổ đề. *Nếu các số dương* $x_1, x_2, ..., x_n$ *thỏa mãn* $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ *thì*

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + ... + \frac{1}{1+x_n^2} \le \frac{n^3}{n^2+1}.$$

Ta sẽ đặt giữa 2 biểu thức dấu nhỏ hơn hoặc bằng ($\le$). Việc tạo ra bài toán phản chứng tương đương đã hoàn thành và đây là bước đầu tiên cần làm trước khi có được một chứng minh đúng.

3.3.3 Các bài toán áp dụng

Ý nghĩa của phương pháp phản chứng là chuyển điều kiện giả thiết trở thành kết luận và chuyển bất đẳng thức cần chứng minh trở thành đẳng thức. Ví dụ sau đây minh hoạ cho ý tưởng này

Ví dụ 3.3.4. *Giả sử* a, b, c *là các số thực dương thoả mãn* $ab + bc + ca = 3$. *Hãy chứng minh rằng*

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \ge 6.$$

LỜI GIẢI. Phương pháp phản chứng ứng dụng rất rõ vào bài này. Ta chứng minh một bài toán khác nhưng tương đương như sau

Nếu $a, b, c \ge 0$ *và* $\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} = 6$ *thì* $ab + bc + ca \le 3$.

(chuyển kết luận $\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \ge 6$ *thành đẳng thức và chuyển giả thiết thành kết luận, đây chính là ý tưởng phản chứng).*

Bất đẳng thức này rõ ràng là đơn giản hơn nhiều so với bất đẳng thức ban đầu. Ta có thể loại bỏ căn thức bằng cách đặt

$$x = \sqrt{a+3}, y = \sqrt{b+3}, z = \sqrt{c+3} \Rightarrow x + y + z = 6.$$

Và ta phải chứng minh

$$(x^2-3)(y^2-3) + (y^2-3)(z^2-3) + (z^2-3)(x^2-3) \le 3$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 24 \le 6(x^2+y^2+z^2) \qquad (**)$$

Và bây giờ phép chứng minh sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức (*), bạn đọc có thể xem trong phương pháp dồn biến. Sau đây ta sẽ trình bày một lời giải sử dụng S.O.S. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (xy + yz + zx)^2 \le 6(x^2 + y^2 + z^2) - 72 +$$
$$+ 12(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)^2.$$

Chú ý rằng $x+y+z=6$ nên $xy+yz+zx \le 12$, và do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned}3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-(xy+yz+zx)^2 &\le 6(x^2+y^2+z^2)-72+\\ &+12(x^2+y^2+z^2)-12(xy+yz+zx)\\ \Leftrightarrow \sum_{x,y,z}(xy-xz)^2 &\le 2\sum_{x,y,z}(x-y)^2+6\sum_{x,y,z}(x-y)^2\\ \Leftrightarrow (8-z^2)(x-y)^2+(8-y^2)(x-z)^2&+(8-x^2)(y-z)^2 \ge 0.\end{aligned}$$

Từ giả thiết suy ra $x,y,z \ge \sqrt{3}$. Do đó $x,y,z \le 6-2\sqrt{3} < 2\sqrt{2}$. Bất đẳng thức vì vậy được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$. ☐

Ví dụ 3.3.5. *Cho $x,y,z<1$ là các số thực dương thoả mãn $x+y+z=3/2$, chứng minh rằng*

$$\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z} \le \frac{x(1-y)}{y(1-x)}+\frac{y(1-z)}{z(1-y)}+\frac{z(1-x)}{x(1-z)}.$$

LỜI GIẢI. Thực ra đây là một bài toán đã được chứng minh ở phần trước. Đặt

$$a=\frac{x}{1-x}, b=\frac{y}{1-y}, c=\frac{z}{1-z}.$$

Ta phải chứng minh

$$a+b+c \le \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},$$

Trong đó a,b,c là các số dương thoả mãn

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{3}{2}.$$

Phản chứng, giả sử rằng

$$a+b+c \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},$$

Khi đó theo bài toán 2.44 chương II ta có

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \le \frac{3}{2}.$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, bất đẳng thức được chứng minh. ☐

Ví dụ 3.3.6. *Giả sử x,y,z là độ dài 3 cạnh một tam giác và $1/x+1/y+1/z=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=\sqrt{x+y-z}+\sqrt{y+z-x}+\sqrt{z+x-y}.$$

Lời Giải. Xét bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geq\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Cho $a+b+c=\sqrt{10}$, suy ra

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geq 1.$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra bất đẳng thức phản chứng là

Nếu các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}=1,$$

thì ta luôn có $a+b+c\geq\sqrt{10}$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với :

Nếu $a_1, b_1, c_1>0$ thoả mãn $1/a_1+1/b_1+1/c_1=1$ thì

$$\sqrt{a_1+b_1-c_1}+\sqrt{b_1+c_1-a_1}+\sqrt{c_1+a_1-b_1}\geq 2\sqrt{5}.$$

Do đó nếu $1/x+1/y+1/z=3$ thì

$$\sqrt{x+y-z}+\sqrt{y+z-x}+\sqrt{z+x-y}\geq\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\ \square$$

Ví dụ 3.3.7. *Cho các số thực không âm a, b, c, d thoả mãn điều kiện*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd+cda+dab=8,$$

Chứng minh rằng $a+b+c+d\leq 4$.

Lời Giải. Ý tưởng phản chứng giúp ta tạo định hướng cho bài toán này như sau

Nếu $a, b, c, d\geq 0$, $a+b+c+d=4$ thì ta phải chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd+cda+dab\geq 8.$$

Đây chính là một kết quả riêng của bài toán 2.87 chương II. $\square$

Một ví dụ tương tự minh hoạ cho phương pháp này

Ví dụ 3.3.8. *Cho các số thực không âm a, b, c, d thoả mãn điều kiện*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2abcd=6,$$

Chứng minh rằng $a+b+c+d\leq 4$.

Lời Giải. Ta có thể thấy bất đẳng thức trên chỉ là hệ quả của bài toán sau

Nếu $a, b, c, d \geq 0,\ a+b+c+d=4$ thì $a^2+b^2+c^2+d^2+2abcd \geq 6$. □

Ví dụ 3.3.9. *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thoả mãn $1/a+1/b+1/c=3$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \geq 3\sqrt{2}.$$

Lời Giải. Nếu chứng minh trực tiếp bất đẳng thức trên thì sẽ rất khó, nhưng khi ta xét vấn đề ngược lại, đó là chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2+y^2-z^2}+\frac{1}{y^2+z^2-x^2}+\frac{1}{z^2+x^2-y^2} \geq 3,$$

Với x, y, z là các số dương thoả mãn $x+y+z=3$ thì bài toán sẽ dễ dàng hơn nhiều, vì các biểu thức không còn chứa căn thức nữa.

$$x=\sqrt{\frac{a+b}{2}}\quad,\quad y=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\quad,\quad z=\sqrt{\frac{b+c}{2}}.$$

Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM-GM$, ta chỉ cần chứng minh

$$(x^2+y^2-z^2)(y^2+z^2-x^2)(z^2+x^2-y^2) \leq 1,$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$VT \leq x^2y^2z^2 \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 3.3.10 (Tổng quát IMO 2001 Pro. A2). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_n}} \geq 1.$$

Lời Giải. Đặt $x_i=\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_i}}\ \forall i=\overline{1,n}$ và $P=x_1x_2...x_n$.

Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $x_1+x_2+...+x_n<1$, khi đó

$$a_i=\left(\frac{1}{x_i^2}-1\right).\frac{1}{n^2-1}=\frac{1-x_i^2}{(n^2-1)x_i^2}$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(1-x_i^2)=(n^2-1)^nP^2 \quad (*)$$

Vì $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$ nên theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$1 - x_j > -x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{P}{x_j}},$$

$$1 + x_j > x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \geq (n+1)\sqrt[n+1]{x_j.P}.$$

Cho $j = 1, 2, ..., n$ rồi nhân vế tất cả các bất đẳng thức dạng trên ta được

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i^2) > (n^2-1)^n P^2.$$

Điều này mâu thuẫn với $(*)$, vậy ta có *đpcm.* Dễ thấy đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ❑

Sau đây là một ví dụ điển hình nhất cho phương pháp này. Phương pháp phản chứng giúp chúng ta giải quyết vấn đề một cách nhẹ nhàng và đơn giản hơn hầu như tất cả các cách khác.

Ví dụ 3.3.11 (MOP). *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

Lời Giải. Ta chứng minh bài toán hoàn toàn tương đương như sau :

Nếu các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} = 1,$$

Thì ta sẽ có bất đẳng thức

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}.$$

Thật vậy, đặt $x_i = \dfrac{1}{n-1+a_i}$ ta có $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$,

$$a_i x_i = \frac{a_i}{n-1+a_i} = 1 - \frac{n-1}{n-1+a_i} = 1 - (n-1)x_i.$$

Do $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ nên ta có

$$\begin{aligned}
(n-1)x_i &= (n-1)(x_i + 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i) \\
\Leftrightarrow (n-1)x_i &= (n-1)x_i - 1 + \sum_{j=1}^{n} (1 - (n-1)x_j) \\
\Leftrightarrow (n-1)x_i &= -a_i x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \\
\Rightarrow \frac{n-1}{a_i} &= -1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j x_j}{a_i x_i}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$(n-1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \left(-\frac{1}{a_i x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j x_j}\right).$$

Nhưng theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dễ thấy

$$-\frac{1}{a_i x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j x_j} \geq \frac{(n-1)^2}{-a_i x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)x_i} = \frac{n-1}{x_i}.$$

Vậy ta có

$$(n-1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \cdot \frac{n-1}{x_i} = (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Bất đẳng thức cuối cùng này cho ta *đpcm.* Trong bất đẳng thức ban đầu, đẳng thức sẽ xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$. ☐

3.4 Phương pháp quy nạp tổng quát

3.4.1 Bài toán mở đầu

Các nhà toán học thường hay nói đùa rằng *"Khi ta không thể giải được một bài toán cụ thể thì lại có thể giải được những bài toán tổng quát và khó khăn hơn rất nhiều"*. Đó có thực sự là một câu nói đùa, hay là một kinh nghiệm quý báu trong toán học? Khi tìm hiểu qua phương pháp *quy nạp tổng quát* trong chứng minh bất đẳng thức và các bạn sẽ nhận được câu trả lời cho riêng mình.

Bất đẳng thức sau đây đã được nhắc tới khá nhiều lần. Nhưng bạn hãy chú ý tới nó thêm một lần nữa, vì nó là khởi nguồn của phương pháp chứng minh này và định lí I.G.I tổng quát

Problem 5 (Romania TST). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1 thì bất đẳng thức sau luôn được thoả mãn*

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1. \qquad (*)$$

Có khá nhiều lời giải cho bài toán này. Như đã trình bày, phương pháp phản chứng cũng giải quyết được bài toán rất đẹp mắt. Tuy nhiên, khi giải bằng phương pháp phản chứng chúng ta chỉ nhìn thấy cái đẹp *nhiều hơn* sự mong đợi trong bất đẳng thức chứ không thể giải quyết tất cả mọi vấn đề. Việc khái quát lên phương pháp phản chứng cũng là khá mới so với bản thân bài toán trên và trong một thời gian khá lâu tác giả không tìm được chứng minh cho nó. Nhưng đó là lí do để một phương pháp chứng minh khác được hoàn thiện...

Bây giờ chúng ta sẽ thử nhìn lại bất đẳng thức thật cẩn thận và rõ ràng. Với giả dụ bạn chưa từng biết bài toán trên, ý tưởng đầu tiên của bạn khi bắt gặp nó là gì? Với ý tưởng như vậy bạn có đi tới bước cuối cùng hay không? Thật là tuyệt nếu câu trả lời là có, vì dù cho bằng cách này hay cách khác, việc tự mình giải được bài toán cũng là điều rất ấn tượng.

Nếu hỏi về ý tưởng đầu tiên đối với bất đẳng thức, có lẽ sẽ không ít câu trả lời đồng ý là quy nạp. Phương pháp quy nạp rất hay được sử dụng với các bài toán nhiều biến số và đây là một ý nghĩ rất tự nhiên. Nào, bây giờ các bạn hãy thử dùng quy nạp để chứng minh bất đẳng thức trên, vì đây là một ý tưởng rất thông minh và sẽ đi đến kết quả cuối cùng.!

Sau khi thử chứng minh bằng quy nạp, tác giả muốn hỏi bạn thêm một câu hỏi nữa, khó khăn mà bạn gặp phải là gì? Nếu như không nhầm lẫn thì khó khăn lớn nhất là ở điều kiện ràng buộc $a_1a_2...a_n = 1$. Tại sao vậy? Bởi vì từ giả thiết quy nạp tích của $n-1$ số bằng 1 đến điều kiện chứng minh khi tích của n số bằng 1 rất khó liên kết được, dẫn đến việc ta không thể dùng được giả thiết quy nạp. Điều này chứng tỏ ý tưởng chứng minh bằng quy nạp đã hoàn toàn thất bại?

Bạn thử nhớ lại câu nói đùa mà nhiều nhà toán học thường nói, nó sẽ giúp bạn giải quyết được vấn đề này. Chúng ta đang nghĩ đến việc chứng minh một bài toán tổng quát hơn, nhưng thực tế lại dễ dàng hơn so với bài toán ban đầu của nó. Thật vậy, tổng quát đơn giản nhất là thay điều kiện $a_1a_2...a_n = 1$ bởi điều kiện

$a_1a_2...a_n \leq 1$. Điều kiện này có ý nghĩa hơn hẳn điều kiện trước về hình thức quy nạp, vì giả thiết quy nạp được sử dụng dễ dàng hơn rất nhiều. Thật vậy, khi ta sắp xếp lại các biến $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ thì dễ dàng có $x_1x_2...x_{n-1} \leq 1$, đây là giả thiết quy nạp và rõ ràng, điều kiện với bất đẳng thức thì nhẹ nhàng hơn nhiều sao với điều kiện dẳng thức. Như vậy, ta đi tới kết quả sau đây, với ý tưởng chứng minh như đã trình bày ở trên

Bài toán tổng quát. *Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1a_2...a_n = 1$, $\forall i = \overline{1, n}$ và k là một hằng số dương tuỳ ý sao cho $k \geq n-1$, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + ... + \frac{1}{k+a_n} \leq \frac{n}{k+1}.$$

LỜI GIẢI. Thật bất ngờ khi bất đẳng thức này quy nạp được rất dễ dàng. Bạn đọc hãy chú ý tới lời giải thật cụ thể sau đây.

Xét với $n = 2$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} \leq \frac{2}{k+1}$$
$$\Leftrightarrow (k+1)(a_1+a_2+2k) \leq 2(k+a_1)(k+a_2)$$
$$\Leftrightarrow (k-1)(a_1+a_2) \geq 2(k-1),$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $k \geq 1$ và $a_1 + a_2 \geq 1$.

Trường hợp $n = 2$ không có nhiều điều phải bàn tới.

Ta giả sử bất đẳng thức đã đúng tới n và ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n+1$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1}$.

Đặt $t = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ và với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ đặt $b_i = a_i/t$. Khi đó $b_1b_2...b_n = 1$, đây chính là điều kiện của giả thiết quy nạp.

Chú ý rằng tổng $\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + ... + \frac{1}{k+a_n}$ có thể viết lại được như sau

$$\frac{1}{k+tb_1} + \frac{1}{k+tb_2} + ... + \frac{1}{k+tb_n} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{k'+b_1} + \frac{1}{k'+b_2} + ... + \frac{1}{k'+b_n}\right),$$

Với $k' = \frac{k}{t}$. Vì $k \geq n$ nên hiển nhiên $k' \geq n/c > n-1$ vì $t \leq 1$.

Theo giả thiết quy nạp thì

$$\frac{1}{k'+b_1} + \frac{1}{k'+b_2} + ... + \frac{1}{k'+b_n} \leq \frac{n}{k'+1},$$

Và do đó
$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + ... + \frac{1}{k+a_n} \leq \frac{1}{t}.\frac{n}{k'+1} = \frac{n}{k+t}.$$

Phần cuối cùng của chứng minh là

$$\frac{n}{k+t} + \frac{1}{k+a_{n+1}} \le \frac{n+1}{k+1} \qquad (**)$$

Trong đó các số $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ thoả mãn điều kiện $t^n a_{n+1} = a_1 a_2 ... a_{n+1} = 1$.

Có thể chứng minh (*) bằng nhiều cách. Ta sử dụng khai triển là cách sơ cấp nhất. Dễ thấy rằng

$$(**) \Leftrightarrow \frac{n}{k+t} + \frac{t^n}{kt^n+1} \le \frac{n+1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \Big(k(n+1) - (k+1)\Big)t^{n+1} - k(n+1)t^n + (n+1)t - (k-n) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\Big(k(n+1)t^n - (k+1)(t^n + t^{n-1} + ... + t) + k - n\Big) \ge 0.$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2\Big(k(n+1)(t^{n-1} + t^{n-2} + ... + t + 1)$$

$$-(k+1)(t^{n-1} + 2t^{n-2} + ... + n)\Big) \ge 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng vì ta có $k \ge n$ nên mỗi hệ số của t^i với mỗi $i = 1, 2, ..., n$ đều dương trong thừa số thứ 2. Vậy bài toán đã được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$, đặc biệt có thêm trường hợp 1 số bằng $+\infty$ và các số còn lại bằng 0 khi $k = n - 1$. □

Rõ ràng cách chứng minh trên ngoài ý tưởng quy nạp một bài toán tổng quát hơn thì các chi tiết nhỏ hầu như không có gì đặt biệt. Điều quan trọng và có ý nghĩa nhất là việc đặt ra được bài toán tổng quát hợp lí. Đó sẽ là nội dung chính của toàn bộ phần này - trình bày về phương pháp quy nạp tổng quát.

3.4.2 Phương pháp quy nạp tổng quát và định lí I.G.I

Một câu hỏi sẽ được đặt ra là với những dạng bài toán thế nào thì phương pháp chứng minh tương tự bất đẳng thức trên sẽ có thể áp dụng lại được? Trong quá trình giải bạn đọc hãy lưu ý đến 3 điểm chính sau đây.

- Luôn phải có điều kiện $k \ge c_n = n - 1$.
- Ta có thể tách được $\frac{1}{k+a} = \frac{1}{t(k'+b)}$.
- Bất đẳng thức phải đúng khi có $n-1$ biến bằng nhau.

Đây là 3 điểm chú ý quan trọng để cho ta khái quát phương pháp chứng minh thành một định lí tổng quát

Định lý 3.5 (Inequality General Induction). *Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n \in I \subset R$ và $(c_n) \in I' \subset R$ là một dãy số thực không giảm cho trước. Với điều kiện $x_1x_2...x_n = k^n (k = const)$. xét bất đẳng thức sau*

$$f(c, x_1) + f(c, x_2) + ... + f(c, x_n) \geq nf(c, k) \qquad (**)$$

Trong đó $f(c, x) : I' \times I \to R$ thoả mãn hai điều kiện

1. *f là hàm thuần nhất với 2 biến c, x, tức là tồn tại hằng số d sao cho*

$$f(ac, ax) = a^d f(c, x) \ \ \forall a \in I, c \in I'.$$

2. *Bất đẳng thức $(**)$ đúng $\forall c \geq c_n$ trong trường hợp $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1}$.*

Khi đó $(**)$ luôn đúng với mọi $c \geq c_n$ và với mọi dãy $x_1, x_2, .., x_n$.

Chứng Minh. Thực ra chứng minh định lí này hoàn toàn tương tự như cách chứng minh trong bài toán mở đầu.

Vì $(**)$ đúng khi có $n-1$ biến bằng nhau và $c \geq c_n$ nên ta sẽ không cần chứng minh gì cho trường hợp $n = 2$, nó ở trong giả thiết của bài toán.

Giả sử $(**)$ đã đúng với n số và với $c \geq c_n$, ta cần chứng minh với bất đẳng thức với $n+1$ số. Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1}$.

Đặt $t = \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ ta có $t \leq k$. Đặt $y_i = kx_i/t \ \forall i = 1, n$ và $c' = kc/t$. Khi đó $y_1y_2..y_n = k^k$. Vì $c' \geq c \geq c_{n+1} \geq c_n$ nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} f(c, x_1) + f(c, x_2) + ... + f(c, x_n) &= f(c, ty_1) + f(c, ty_2) + ... + f(c, ty_n) \\ &= \left(\frac{t}{d}\right)^d \Big(f(c', y_1) + f(c', y_2) + ... + f(c', y_n)\Big) \\ &\geq n\left(\frac{t}{k}\right)^d f(c', k) = nf(c, t). \end{aligned}$$

Vì vậy với mọi $c \geq c_{n+1}$, theo giả thiết của định lí ta có

$$\begin{aligned} f(c, x_1) + f(c, x_2) + ... + f(c, x_n) + f(c, x_{n+1}) &\geq nf(c, t) + f(c, x_{n+1}) \\ &\geq (n+1)f(c, k). \end{aligned}$$

Đó chính là điều phải chứng minh. □

Định lí *Inequality General Induction* thường được gọi là định lí I.G.I (lấy theo các chữ cái đầu trong tên tiếng Anh của phương pháp quy nạp tổng quát). Đây là một định lí rất trừu tượng và khó nếu bạn chưa quen dùng, vì vậy tốt hơn hết để hiểu và ứng dụng được nó bạn hãy xem lại và đọc thật kĩ chứng minh bài toán mở đầu. Chúng ta hãy phân tích bài toán này đối với điều kiện định lí. Dãy số và hàm số trong bài toán là

$$f(c,x) = \frac{1}{c+x} \quad , \quad c_n = n-1.$$

Hàm số này thỏa mãn 2 điều kiện của định lí. Về mặt logic thì điều kiện 2 chỉ mang tính kiểm tra bắt buộc, vì nó phải đúng nếu muốn bất đẳng thức đúng. Do đã có $n-1$ biến bằng nhau nên việc chứng minh cũng tương tự bài toán chỉ với 1 biến và tương đối dễ dàng.

Thông thường với các bài toán bất đẳng thức, đề bài chỉ rút gọn trong một trường hợp cụ thể $c = c_n$ (thường là giá trị tốt nhất)

$$f(c_n,x_1) + f(c_n,x_2) + \dots + f(c_n,x_n) \geq nf(c_n,k),$$

Mà không đòi hỏi chứng minh đối với mọi $c \geq c_n$ nên trước khi chứng minh ta cần *tổng quát* bài toán để có thể dùng được định lí trên. Từ định lí, ta cũng có thể suy ra các hệ quả sau đây (thực ra chỉ là các phát biểu dạng khác)

Hệ quả 3.2. *Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n \in I \subset R$ và $(c_n) \in I' \subset R$ là một dãy số thực không tăng cho trước. Với điều kiện $x_1x_2...x_n = k^n (k = const)$, xét bất đẳng thức sau*

$$f(c,x_1) + f(c,x_2) + \dots + f(c,x_n) \geq nf(c,k) \qquad (**)$$

Trong đó $f(c,x) : I' \times I \to R$ thoả mãn hai điều kiện

1. *f là hàm thuần nhất với 2 biến c, x, tức là tồn tại hằng số d sao cho*

$$f(ac,ax) = a^d f(c,x) \ \ \forall a \in I, c \in I'.$$

2. *Bất đẳng thức $(**)$ đúng $\forall c \leq c_n$ trong trường hợp $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$.*

Khi đó $(**)$ luôn đúng với mọi $c \leq c_n$ và với mọi dãy $x_1, x_2, .., x_n$.

Hệ quả 3.3. *Các kết quả của định lí I.G.I và hệ quả 3.2 vẫn hoàn toàn đúng nếu ta thay điều kiện $a_1a_2...a_n = k^n$ bởi $a_1 + a_2 + \dots + a_n = kn$ hoặc một số dạng trung bình khác. Các kết quả vẫn tương tự nếu ta đổi các dấu $\geq$ bởi dấu $\leq$ mà có thể hiểu như ta đang xét với hàm $-f$.*

3.4.3 Các bài toán áp dụng

Hãy mở đầu với bất đẳng thức sau đây

và với mọi dãy $(x_1, x_2, .., x_n)$ thoả mãn điều kiện của bài toán. Bất đẳng thức được chứng minh xong, giá trị k được chọn cũng là giá trị tốt nhất. □

Bài toán sau đây đã từng được giới thiệu ở trang trước, phần các bài toán đáng chú ý. Đây cũng là một bài toán rất hay sử dụng phương pháp quy nạp tổng quát.

Ví dụ 3.4.2 (Mathlinks Constest). *Tìm hằng số $k = k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số $x_1, x_2, ..., x_n$, $x_i \geq 0$ $\forall i = \overline{1, n}$ và $x_1 x_2 ... x_n = 1$*

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_n x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+k_n x_n}} \leq n-1.$$

LỜI GIẢI. Cho $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ suy ra

$$\frac{n}{\sqrt{k_n+1}} \leq n-1 \Leftrightarrow k_n \geq \frac{2n-1}{(n-1)^2}.$$

Để chứng minh điều kiện đủ, ta sẽ chứng minh bài toán hoàn toàn tương đương

$$\frac{1}{\sqrt{c_n+x_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_n+x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{c_n+x_n}} \leq \sqrt{2n-1},$$

Với
$$c_n = \frac{1}{k_n} = \frac{(n-1)^2}{2n-1}.$$

Nhưng ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát hơn, đó là

$$\frac{1}{\sqrt{c+x_1}} + \frac{1}{\sqrt{c+x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{c+x_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{c+1}} \ \forall c \geq c_n.$$

Thật vậy, để cho gọn ta xét trong trường hợp có $n+1$ số.

Lấy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ và $x_{n+1} = x^{-n}$. Ta phải chứng minh

$$\frac{n}{\sqrt{c+x}} + \frac{1}{\sqrt{c+x^{-n}}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{c+1}} \quad (*)$$

Giả sử $f(x)$ là vế trái của bất đẳng thức. Sử dụng đạo hàm

$$f'(x) = -\frac{n}{2(c+x)^{3/2}} + \frac{nx^{-n-1}}{2(c+x^{-n})^{3/2}}.$$

Và do đó

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(c+x)^{3/2}} = \frac{x^{-n-1}}{(c+x^{-n})^{3/2}} \Leftrightarrow (cx^n+1)^3 = x^{n-2}(c+x)^3.$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (cx^n+1)^3 - x^{n-2}(c+x)^3 \\ &= c^3x^{3n} + 3c^2x^{2n} - x^{n+1} - 3c^2x^{n-1} - c^3x^{n-2} + 1 \\ &= (x^{n+1}-1)(c^3x^{2n-1} + 3c^2x^{n-1} + c^3x^{n-2} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Do hàm $c^3x^{2n-1} + 3c^2x^{n-1} + c^3x^{n-2} - 1$ đơn điệu tăng nên có duy nhất một nghiệm trong $(0, 1)$. Chú ý rằng $g(1) = 0$ nên ta có

$$\max_{x \geq 0} f(x) = \max\left[\, f(0), f(1)\,\right] = \max\left(\frac{n}{\sqrt{c}}, \frac{n+1}{\sqrt{c+1}}\right).$$

Từ đó, kết hợp với điều kiện $c_{n+1} \geq \dfrac{n^2}{2n+1}$, (*) đã được chứng minh xong.

Đặt $f(c, x) = \dfrac{1}{\sqrt{c+x}}$. Hiển nhiên $f(c, x)$ là một hàm thuần nhất.
Ta phải chứng minh

$$f(c, x_1) + f(c, x_2) + \ldots + f(c, x_n) \leq n f(c, 1) \quad \forall c \geq c_n.$$

Dễ thấy rằng $c_n = \dfrac{(n-1)^2}{2n-1}$ là một số dương tăng.

Theo chứng minh ở trên thì $f(c, x)$ đã thoả mãn điều kiện (2) của định lí I.G.I. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn chỉnh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi cả n số x_i bằng nhau hoặc có $n - 1$ số bằng 0, số còn lại bằng $+\infty$. ❑

Nếu bạn thấy còn mơ hồ hay quá bất ngờ vì ứng dụng của định lí này, hãy đọc lại một lần nữa và xem một bài toán có lời giải cụ thể từ chương trước để đối chiếu với định lí I.G.I. Vấn đề sẽ dần được hé mở.

Ví dụ 3.4.3. *Chứng minh rằng nếu các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tổng bằng n thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{3}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 - n).$$

Lời Giải. Vì đã trình bày ở chương trước nên trong bài này ta chỉ nói về ứng dụng của phương pháp I.G.I để đi tìm một lời giải nhanh nhất.

Ta lấy hàm số $f(c, x)$ như sau

$$f(c, x) = \frac{c}{x} - \frac{x^2}{c^2}.$$

Chọn dãy $c_n = \sqrt[3]{\dfrac{n}{3}}$ thì c_n là dãy tăng của n. Ta phải chứng minh với mọi $c \leq c_n$ bất đẳng thức sau luôn đúng

$$f(c, x_1) + f(c, x_2) + \ldots + f(c, x_n) \geq n f(c, 1).$$

Đầu tiên ta xét trường hợp trong n số $a_1, a_2, ..., a_n$ có $n - 1$ số bằng nhau.

Giả sử rằng $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = a$ và $a_n = n - (n-1)a$. Khi đó không mấy khó khăn ta sẽ chứng minh được bất đẳng thức 3.4.3 đúng trong trường hợp này. Bạn đọc có thể xem chi tiết chứng minh ở chương trước. Do đó hàm $f(c, x)$ thoả mãn điều kiện (2) của định lí đối với dãy $c_n = \sqrt[3]{n/3}$.

Hiển nhiên $f(c, x)$ là hàm thuần nhất nên f thoả mãn điều kiện (1) của định lí. Và do đó theo nội dung của định lí I.G.I thì bất đẳng thức đã được chứng minh. ❑

Khi bạn đã thực sự hiểu rõ về định lí I.G.I, bạn sẽ thấy định lí có ứng dụng rất mạnh đối với các bài toán bất đẳng thức n biến. Có thể nói ý tưởng về dạng thuần nhất để $f(c, x)$ đưa c trở thành một biến dùng trong hầu hết các cách chứng minh các bất đẳng thức tổng quát khó. Chẳng hạn, ta có bài toán đặc trưng sau đây

Ví dụ 3.4.4. *Chứng minh nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n thì ta có*

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + na_1a_2...a_n \geq n^2.$$

LỜI GIẢI. Ta phải chứng minh

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n \geq c(1 - a_1a_2...a_n) \quad \forall c \leq c_n = n/(n-1).$$

Nhận xét rằng nếu bất đẳng thức đúng với c_n thì sẽ đúng với mọi $c \leq c_n$, đây là một nhận xét nhỏ nhưng rất quan trọng trong việc chứng minh tổng quát. Với $n = 2$ thì bất đẳng thức tương đương với

$$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \geq 4$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì nó luôn là đẳng thức.

Giả sử bất đẳng thức đã đúng với n số, ta phải chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp có $n+1$ số.

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n+1}^2 - n - 1 \geq c(1 - a_1a_2...a_{n+1}) \quad \forall c \leq c_{n+1} = 1 + 1/n.$$

Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử rằng $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{n+1}$. Đặt $t = (a_1 + a_2 + ... + a_n)/n \geq 1$ và $b_i = a_i/t \ \forall i = \overline{1, n}$. Khi đó hiển nhiên $b_1 + b_2 + ... + b_n = n$. Theo giả thiết quy nạp thì

$$b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 - n \geq c'(1 - b_1b_2...b_n) \quad \forall c' \leq c_n.$$

Thay $a_i = tb_i$ vào trong bất đẳng thức trên ta được

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - nt^2 \geq \frac{c'}{t^{n-2}}(t^n - a_1a_2...a_n) \quad \forall c' \leq c_n.$$

Ta phải chứng minh

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 - n + c(a_{n+1}t^n - 1) + (a_{n+1}^2 - 1) \geq ca_{n+1}(t^n - a_1a_2...a_n).$$

Vì $a_1 + a_2 + ... + a_{n+1} = n + 1$ nên $a_{n+1}t^n \le 1$, do đó

$$ca_{n+1}t^{n-2} \le \frac{c}{t^2} \le c \le c_{n+1} \le c_n \Rightarrow ca_{n+1} \le \frac{c_n}{t^{n-2}}.$$

Vậy theo chứng minh ở trên ta có

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + ca_{n+1}a_1a_2...a_n \ge nt^2 + ca_{n+1}t^n.$$

Bất đẳng thức còn lại của chúng ta tương đương với

$$nt^2 + c_{n+1}a_{n+1}t^n + a_{n+1} \ge (n+1)^2/n$$

$$\Leftrightarrow n\left((nt^2 + (n+1-nt)^2\right) + (n+1)(n+1-nt)t^n \ge (n+1)^2.$$

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức một biến trên bằng cách lấy hiệu và rút ra thừa số chung là $(t-1)^2(n+1-nt)$. Đẳng thức xảy ra khi tất cả mọi số đều bằng 1 hoặc có một số bằng 0 và các số còn lại bằng nhau. ❑

Trong nhiều trường hợp, khi ta đưa từ bất đẳng thức với n biến về bất đẳng thức ít biến hơn và thay đổi một số điều kiện sẽ có những bất đẳng thức rất khó. Ví dụ sau đây lí giải cho điều đó

Ví dụ 3.4.5. *Cho các số thực dương a, b, c, d thoả mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{1+a+b+c} + \frac{1}{1+b+c+d} + \frac{1}{1+c+d+a} + \frac{1}{1+d+a+b}$$
$$\le \frac{1}{3+a} + \frac{1}{3+b} + \frac{1}{3+c} + \frac{1}{3+d}.$$

Bài toán sau đây là một ví dụ rất hay và khó về ý tưởng I.G.I trong chứng minh. Nó cũng đã đặt cho nó một cái tên rất ấn tượng, bài toán *Thách Thức*.

Ví dụ 3.4.6 (Thách Thức). *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn điều kiện $a_1a_2...a_n = 1$. Tìm giá trị tốt nhất của k để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \ge \frac{n}{2^k} \quad (*)$$

Lời Giải. Trước tiên tác giả sẽ giới thiệu một chút về nguồn gốc và những điều lí thú xung quanh bất đẳng thức đặc biệt này.

Trường hợp $n = 4$ ta có một bài toán rất nổi tiếng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \ge 1 \quad (1)$$

Đây là đề thi chọn đội tuyển IMO của Trung Quốc năm 2004, ngoài ra nó cũng đã được giải ở chương trước của cuốn sách.

Trường hợp $n = 3$ hiện nay vẫn là một bài toán khá mở. Thông thường nó chỉ được xét trong các trường hợp nhỏ và dễ hơn.

Đề thi chọn đội tuyển IMO của Việt Nam 2005 là một trường hợp riêng

$$\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} \geq \frac{3}{8} \qquad (2)$$

Ta chỉ cần lấy $d = 1$ trong bất đẳng thức (1) sẽ có ngay kết quả của (2), thậm chí là kết quả mạnh hơn khi thay số mũ 3 bởi số mũ 2. Vì sự liên quan đến rất nhiều bài toán khác nên vấn đề tổng quát của bài toán (*) là một kết quả rất cần thiết, nhưng cũng rất khó khăn để giải quyết triệt để. Đây cũng là bài toán rất được quan tâm của nhiều bạn hiện nay.

Ta làm điều kiện đủ trước, tức là tìm hằng số tốt nhất có thể.

Ta cho $a_1 \to 0$ và $a_k \to +\infty \quad \forall k \geq 2$, dễ thấy rằng

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \to 1,$$

Và do đó, nếu $k = k_n$ là hằng số thoả mãn thì ít nhất điều kiện sau phải đúng

$$1 \geq \frac{n}{2^k} \Leftrightarrow k \geq \log_2 n.$$

Tuy nhiên nếu $k = \log_2 n$ ta sẽ chứng minh (*) luôn đúng, và đây thực sự là hằng số tốt nhất. Bằng trực giác, ta *cảm thấy* rằng nếu thay điều kiện $a_1a_2...a_n = 1$ bởi $a_1a_2...a_n = \alpha^n \geq 1$ thì bất đẳng sau vẫn đúng

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \frac{n}{(1+\alpha)^k}.$$

Từ đó ta đi đến mệnh đề sau đây

Bổ đề 1. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$ thoả mãn $x_1x_2...x_n = 1$ và $a \leq 1$ là một hằng số dương cho trước, $k = \log_2 n$. Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{(a+x_1)^k} + \frac{1}{(a+x_1)^k} + \dots + \frac{1}{(a+x_n)^k} \geq \frac{n}{(a+1)^k} \qquad (**)$$

Và rõ ràng, bài toán gốc chỉ là một hệ quả của bài toán trên trong trường hợp $a = 1$. Ta chứng minh bất đẳng thức trên dựa theo phương pháp quy nạp tổng quát.

Phần khó khăn nhất trong chứng minh đó là xét trường hợp có $n - 1$ số bằng nhau.

Do ý nghĩa của bài toán, tác giả sẽ đưa ra một chứng minh thật cụ thể trong trường hợp *bắt buộc* này. Và để cho gọn, ta sẽ chứng minh trong trường hợp có $n+1$ số.

Bổ đề 2. *Với $k \geq \log_2(n+1)$ và $0 \leq a \leq 1$ thì ta có*

$$\frac{n}{(a+x)^k} + \frac{1}{(a+x^{-n})^k} \geq \frac{n+1}{(a+1)^k} \quad \forall x \geq 1.$$

CHỨNG MINH. Ta đặt

$$f(x) = \frac{n}{(a+x)^k} + \frac{1}{(a+x^{-n})^k}$$
$$f'(x) = \frac{-nk}{(a+x)^{k+1}} + \frac{nkx^{-n-1}}{(a+x^{-n})^{k+1}}.$$

Và do đó

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^{n+1}(a+x^{-n})^{k+1} = (a+x)^{k+1} \\ &\Leftrightarrow g(x) = (n+1)\ln x + (k+1)\ln(a+x^{-n}) - (k+1)\ln(a+x) = 0. \end{aligned}$$

Xét hàm số

$$\begin{aligned} g(x) &= (n+1)\ln x + (k+1)\ln(a+x^{-n}) - (k+1)\ln(a+x) \\ g'(x) &= \frac{n+1}{x} - \frac{n(k+1)x^{-n-1}}{a+x^{-n}} - \frac{k+1}{a+x} \\ &= \frac{n+1}{x} - \frac{n(k+1)}{ax^{n+1}+x} - \frac{k+1}{a+x} \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow n+1 - \frac{n(k+1)}{ax^n+1} - \frac{(k+1)x}{a+x} = 0 \\ &\Leftrightarrow n-k + \frac{a(k+1)}{a+x} - \frac{n(k+1)}{ax^n+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (n-k)(ax^n+1)(x+a) + (k+1)a(ax^n+1) - n(k+1)(a+x) = 0 \\ &\Leftrightarrow h(x) = a(n-k)x^{n+1} + (n+1)a^2x^n - k(n+1)x + a - ank = 0. \end{aligned}$$

Rõ ràng phương trình $h'(x) = 0$ có không quá một nghiệm nên phương trình $h(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm, do đó phương trình $g'(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm, suy ra phương trình $g(x) = 0$ có không quá 3 nghiệm. Ta sẽ chứng minh trong 3 nghiệm này có không quá một nghiệm lớn hơn 1. Thật vậy, $g(1) = 0$, và

$$g'(1) = n+1 - \frac{n(k+1)}{a+1} - \frac{k+1}{a+1} = (n+1)\left(1 - \frac{k+1}{a+1}\right) \leq 0 \quad (\text{ vì } a \leq 1 \leq k)$$

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = +\infty.$$

Do đó nếu phương trình $g(x) = 0$ có đủ 3 nghiệm thì các nghiệm đó không thể cùng trong $[1, +\infty)$. Vậy phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trong $[1, +\infty)$.

Chú ý rằng $g'(1) \leq 0$ và dấu của $g(x)$ ngược với dấu của $f'(x)$ nên từ bảng biến thiên ta có thể dễ dàng suy ra

$$\min_{x\geq 1} f(x) = \min\left(f(1), \lim_{x\to\infty} f(x)\right) = \min\left(\frac{n+1}{(a+1)^k}, \frac{1}{a^k}\right).$$

Do $a \leq 1$ nên $\frac{a+1}{a} \geq 2$, suy ra

$$\min\left(\frac{n+1}{(a+1)^k}, \frac{1}{a^k}\right) = \frac{n+1}{(a+1)^k}.$$

Đây chính là điều phải chứng minh.

Từ bổ đề trên, bài toán được chứng minh đơn giản như sau.

Giả sử bất đẳng thức (**) đã đúng tới n, ta phải chứng minh nó đúng với $n+1$, nói cách khác ta phải chứng minh với mọi $a \leq 1, k \geq c_{n+1} = \log_2(n+1)$ và $x_1x_2...x_{n+1} = 1$ thì

$$\frac{1}{(a+x_1)^k} + \frac{1}{(a+x_1)^k} + ... + \frac{1}{(a+x_{n+1})^k} \geq \frac{n+1}{(a+1)^k}.$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát giả sử $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{n+1}$. Đặt $x_1x_2...x_n = t^n \geq 1$ và $x'_i = x_i/t$, ta có $x'_1x'_2...x'_n = 1$.

Đặt $a' = a/t$, suy ra $a' \leq a \leq 1$. Vì $k \geq c_{n+1} = \log_2(n+1) \leq c_n = \log_2 n$ nên, sử dụng giả thiết quy nạp với $x'_1, x'_2, ..., x'_n, a', k$ ta có

$$\frac{1}{(a'+x'_1)^k} + \frac{1}{(a'+x'_2)^k} + ... + \frac{1}{(a'+x'_n)^k} \geq \frac{n}{(a'+1)^k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\frac{a}{t}+\frac{x_1}{t})^k} + \frac{1}{(\frac{a}{t}+\frac{x_2}{t})^k} + ... + \frac{1}{(\frac{a}{t}+\frac{x_n}{t})^k} \geq \frac{n}{(\frac{a}{t}+1)^k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+x_1)^k} + \frac{1}{(a+x_2)^k} + ... + \frac{1}{(a+x_n)^k} \geq \frac{n}{(a+t)^k},$$

Và do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{n}{(a+t)^k} + \frac{1}{(a+x_{n+1})^k} \geq \frac{n}{(a+1)^k}.$$

Nhưng đây chính là bổ đề ta vừa chứng minh. Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Cho $a = 1$ ta có kết quả bài toán ban đầu. ❑

Chú ý rằng từ chứng minh trên ta còn suy ra kết quả tổng quát hơn, đó là

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+\ldots+\frac{1}{(1+a_n)^k}\geq \min\left(1,\frac{n}{2^k}\right)\forall k\in R.$$

Như vậy bằng phương pháp quy nạp tổng quát, khi bạn đã xây dựng được một bất đẳng thức tổng quát đúng thì công việc còn lại chỉ là chứng minh trong trường hợp có $n-1$ biến số bằng nhau. Bây giờ chúng ta sẽ nói tiếp đến phương pháp xây dựng bài toán tổng quát đúng.

3.4.4 Xây dựng hàm số và bài toán tổng quát

Sau khi đọc xong 3 mục trước bạn đã thực sự hiểu được nội dung tư tưởng của phương pháp I.G.I? Điều cần lưu ý và chúng ta sẽ bàn tới bây giờ là cách xây dựng bài toán tổng quát và cách xây dựng hàm số thoả mãn điều kiện định lí. Đây chính là tư tưởng của phương pháp, cũng là vấn đề không đơn giản. Việc đầu tiên nói tới là xây dựng bài toán tổng quát từ bài toán cụ thể, nó phụ thuộc nhiều vào khả năng tổng quát hoá vấn đề của bạn, cũng là điểm tinh tế nhất của phương pháp này. Chẳng hạn, hãy quay trở về với bất đẳng thức rất quen thuộc sau đây

Ví dụ 3.4.7. *Nếu $a_1,a_2,...,a_n\geq 0$ và $a_1a_2...a_n=1$ thì*

$$\frac{1}{n-1+a_1}+\frac{1}{n-1+a_2}+...+\frac{1}{n-1+a_n}\leq 1.$$

Ta sẽ có 2 cách tổng quát bài toán trên như sau

Cách 1. Nếu $a_1a_2...a_n=r^n\leq 1$ thì

$$\frac{1}{n-1+a_1}+\frac{1}{n-1+a_2}+...+\frac{1}{n-1+a_n}\leq\frac{n}{n-1+r^n}.$$

Cách 2. Nếu $a_1a_2...a_n=r^n=1$ và $k\geq n-1$ thì

$$\frac{1}{k+a_1}+\frac{1}{k+a_2}+...+\frac{1}{k+a_n}\leq\frac{n}{k+1}.$$

Và trong chứng minh ở trên, ta chọn cách thứ 2 để dễ trình bày hơn. Về cơ bản, 2 bài toán trên là hoàn toàn tương đương. Tuy nhiên, sẽ có 2 câu hỏi được đặt ra. Thứ nhất, tại sao lại tổng quát để tích nhỏ hơn 1 mà không cho ngược lại? Thứ 2, tại sao lại tổng quát $k\geq n-1$ mà không cho ngược lại?

Thực ra, để trả lời 2 câu hỏi này rất khó. Thông thường, trong quá trình chứng minh sẽ nổi rõ điều kiện tổng quát nào là quan trọng hơn. Cũng có một cách khác khá đơn giản là xuất phát từ những trường hợp tương đối nhỏ để xét. Chẳng hạn, với bài toán trên, cho $n = 2$ ta đã suy ra $k \geq 1$ và đây chính là ý tưởng cho sự tổng quát. Xây dựng dãy số là bước đầu tiên trong việc tìm được bài toán tổng quát.

Bạn hãy xem lại bài toán *Thách thức*. Khi xây dựng bài toán tổng quát, ta đưa thêm biến số a thay bởi số 1, nhưng cần có thêm điều kiện $a \leq 1$. Tại sao vậy? Vì khi chúng ta lấy $a \geq 1$ và cho $a, x_2, ..., x_n \to \infty, x_1 \to 0$ thì bất đẳng thức không đúng. Bạn hãy suy nghĩ kĩ về điều này.

Sau khi đã xây dựng bài toán tổng quát thì việc xây dựng được hàm số thoả mãn định lí là khá đơn giản. Bạn chỉ cần chú ý đến điều kiện hàm thuần nhất, luỹ thừa hoặc khai căn biến c hợp lí theo từng bài toán là được. Xem lại một chút từ các ví dụ trên bạn sẽ thấy rõ điều này.

3.5 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức cổ điển

Bạn đọc sẽ tò mò khi phương pháp sử dụng bất đẳng thức *cổ điển* lại được đặt ở sau cùng của 5 phương pháp. Khi bạn đã được trang bị đầy đủ các kiến thức mạnh và ứng dụng được quá nhiều, thì các bài toán chỉ sử dụng bất đẳng thức cổ điển mới thực sự trở thành các bài toán độc đáo nhất. Bạn cũng đừng ngạc nhiên về điều này, và trước tiên hãy thử sức mình qua các ví dụ sau. Nếu bạn vẫn nghĩ đây là phương pháp quá đơn giản, chắc chắn rằng bạn sẽ phải nghĩ lại, ít nhất sau khi bạn đọc và thử làm hết các bài toán trong phần này.

Ví dụ 3.5.1. *Nếu a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 1$ thì ta có*

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2.$$

Lời Giải. Đặt $m = \frac{1}{a}, n = \frac{1}{b}, p = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1.$
Ta phải chứng minh

$$(m^2 + n^2)(n^2 + p^2)(p^2 + m^2) \geq 8(m^2 + n^2 + p^2)^2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + n^2)(n^2 + p^2)(p^2 + m^2)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^2 \geq 8(m^2 + n^2 + p^2)^2.$$

Đặt $m^2 + n^2 = 2x, n^2 + p^2 = 2y, p^2 + m^2 = 2z$, bất đẳng thức tương đương với

$$\sqrt{\frac{xyz}{x+y-z}} + \sqrt{\frac{xyz}{y+z-x}} + \sqrt{\frac{xyz}{z+x-y}} \geq x + y + z \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức *Schur* ta có

$$xyz(x + y + z) \geq (x + y - z)z^3 + (y + z - x)x^3 + (z + x - y)y^3 \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức *Holder* thì

$$\begin{aligned}
&(x+y-z)z^3+(y+z-x)x^3+(z+x-y)y^3\\
&=\frac{x^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{y+z-x}}\right)^2}+\frac{y^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+z-y}}\right)^2}+\frac{z^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+y-z}}\right)^2}\\
&\geq \frac{(x+y+z)^3}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+y-z}}+\frac{1}{\sqrt{y+z-x}}+\frac{1}{\sqrt{z+x-y}}\right)^2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh. □

Đây là một lời giải rất khó và độc đáo của Gabriel Dospinescu - tác giả bài toán. Chứng minh (1) còn nhiều cách khác nhau nhưng sử dụng bất đẳng thức cổ điển luôn luôn là phương pháp ấn tượng nhất.

Ví dụ 3.5.2. *Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện*

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n^2}=1,$$

Chứng minh bất đẳng thức sau

$$x_1+x_2+\ldots+x_n \geq (n-1)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right).$$

Lời Giải. Đặt $a_i=\dfrac{1}{1+x_i^2}$ thì $x_i=\sqrt{\dfrac{1-a_i}{a_i}}$ $\forall i=\overline{1,n}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{1-a_1}{a_1}}+\sqrt{\frac{1-a_2}{a_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1-a_n}{a_n}} \geq (n-1)\left(\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}}+\sqrt{\frac{a_2}{1-a_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{1-a_n}}\right)$$

Trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm và $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a_1(1-a_1)}}+\frac{1}{\sqrt{a_2(1-a_2)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n(1-a_n)}}\\
&\geq n\left(\sqrt{\frac{a_1}{1-a_1}}+\sqrt{\frac{a_2}{1-a_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{1-a_n}}\right).
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* cho 2 dãy a_i và $\dfrac{1}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$ ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}\right)\geq n\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}.$$

Đó là điều phải chứng minh. ❑

Chú ý rằng từ kết quả trên, kết hợp với phương pháp phản chứng ta suy ra được một bất đẳng thức rất thú vị

Ví dụ 3.5.3. *Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+a_1^2} + \frac{1}{n-1+a_2^2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n^2} \leq 1.$$

Sau đây ta sẽ trở lại với một bất đẳng thức đã rất nhiều lần được nhắc tới

Ví dụ 3.5.4 (Romania TST). *Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương có tích bằng 1 thì*

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1.$$

LỜI GIẢI. Bài toán đã được giải bằng phương pháp phản chứng hoặc phương pháp quy nạp tổng quát. Về 2 phương pháp này, các bạn có thể xem lời giải ở các phần 3, 4. Sau đây là một chứng minh rất hay chỉ dùng bất đẳng thức $AM - GM$.

Đặt $a_i = x_i^n$. Ta có, theo bất đẳng thức $AM - GM$

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n-1+a_i} &= 1 - \frac{a_i}{n-1+a_i} \\ &= 1 - \frac{x_i^n}{x_i^n + (n-1)x_1x_2...x_n} \\ &\leq 1 - \frac{x_i^{n-1}}{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + ... + x_n^{n-1}}.\end{aligned}$$

Cho $i = 1, 2, ..., n$ rồi cộng các bất đẳng thức trên lại ta có *đpcm.* ❑

Ví dụ 3.5.5. *Chứng minh rằng nếu $k \geq 1$ và a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1 thì*

$$\frac{1}{a+b^k+c^k} + \frac{1}{b+a^k+c^k} + \frac{1}{c+a^k+b^k} \leq 1.$$

LỜI GIẢI. Ta chọn số thực r để

$$\frac{1}{a+b^k+c^k} \leq \frac{a^{r-1}}{a^r+b^r+c^r}.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$a^r + b^r + c^r \le a^{r-1}a + b^k + c^k$$
$$\Leftrightarrow (b^r + c^r)(bc)^{r-1} \le b^k + c^k.$$

Bất đẳng thức này sẽ luôn đúng nếu $3r - 2 = k$ hay $r = \dfrac{k+2}{3} \ge 1$.
Phần còn lại ta chỉ cần chứng minh

$$a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1} \le a^r + b^r + c^r.$$

Nhưng vì $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \ge 3$ nên theo bất đẳng thức *Chebyshev*

$$3(a^r + b^r + c^r) \ge (a + b + c)(a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1}) \ge 3(a^{r-1} + b^{r-1} + c^{r-1}).$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ❑

Bạn đọc hãy tự chứng minh lại một bất đẳng thức ở phần trước

Ví dụ 3.5.6. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực không âm thì*

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \ge \frac{4}{5}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right).$$

Điều khó khăn nhất của phương pháp này là hầu như không có một dạng thức chuẩn nào cho một dạng bài toán cả. Mọi chứng minh đều do sự nhanh nhạy tư duy của các bạn. Trước kia, phương pháp này luôn được sử dụng và thường được coi là *sơ cấp* nhất, *dễ dàng* nhất, nhưng qua các ví dụ vừa rồi chắc các bạn cũng đã thấy được sự đa dạng muôn hình muôn vẻ của phương pháp.

Ví dụ 3.5.7 (Tổng quát USA MO 1998). *Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương có tích bằng 1 thì*

$$\frac{1}{1 + x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}} + \frac{1}{1 + x_2 + x_3 + .. + x_n} + ... + \frac{1}{1 + x_n + x_1 + ... + x_{n-2}} \le 1.$$

Lời giải. Đặt $x_i = a_i^n\ \forall i = \overline{1, n}$. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$1 + x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_n = 1 + a_1^n + a_2^n + ... + a_{k-1}^n + a_{k+1}^n + ... + a_n^n$$
$$\ge 1 + a_1a_2...a_{k-1}a_{k+1}...a_n(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_{k+1} + ... + a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_k}$$

Và do đó

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_n} \le \frac{a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

Cho $k = 1, 2, ..., n$ và cộng các bất đẳng thức lại ta có *đpcm*. ❑

Ví dụ 3.5.8. *Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thoả mãn $a + b + c + d = abc + bcd + cda + dab$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$a + b + c + d \geq \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{d^2+1}{2}}.$$

LỜI GIẢI. Chú ý rằng từ đẳng thức ban đầu ta suy ra 2 đẳng thức sau

$$(a+b)(a+c)(a+d) = (a^2+1)(a+b+c+d),$$

Dẫn tới

$$\frac{a^2+1}{a+b} + \frac{b^2+1}{b+c} + \frac{c^2+1}{c+d} + \frac{d^2+1}{d+a} = a+b+c+d,$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta suy ra

$$a+b+c+d \geq \frac{\left(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} + \sqrt{d^2+1}\right)^2}{2(a+b+c+d)}.$$

Và đây chính là điều phải chứng minh. □

Ví dụ 3.5.9. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d dương và $abcd = 1$ ta luôn có*

$$2^8(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \leq (a+b+c+d)^6.$$

LỜI GIẢI. Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2, d = t^2$. Ta phải chứng minh

$$2^8(x^4+1)(y^4+1)(z^4+1)(t^4+1) \leq (x^2+y^2+x^2+t^2)^6$$

$$\Leftrightarrow 2^8(x^3+yzt)(y^3+zxt)(z^3+xyt)(t^3+xyz) \leq (x^2+y^2+z^2+t^2)^6.$$

Theo bất đăng thức $AM - GM$ ta có

$$4(x^3+yzt)(y^3+xzt) \leq (x^3+y^3+xzt+yzt)^2 = (x+y)^2(x^2-xy+y^2+zt)^2,$$

$$4(t^3+xyz)(z^3+xyt) \leq (z^3+t^3+xyz+xyt)^2 = (z+t)^2(z^2-zt+t^2+xy)^2.$$

Ngoài ra

$$4(x^2-xy+y^2+zt)(z^2-zt+t^2+xy) \leq (x^2+y^2+z^2+t^2)^2,$$

$$(x+y)(z+t) = xz+yt+xt+yz \leq x^2+y^2+z^2+t^2.$$

Từ 4 bất đẳng thức trên dễ dàng suy ra *đpcm.* Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. □

Ví dụ 3.5.10. *Chứng minh rằng nếu a, b, c, d dương có tích bằng 1 thì*

$$4^4(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1) \geq \left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^4.$$

LỜI GIẢI. Thực ra ta chỉ cần chứng minh một bất đẳng thức đơn giản sau

$$(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1) \geq (a+\frac{1}{a})^4.$$

Tuy nhiên điều này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Holder*

$$(a^4+1)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (a+bcd)^4 = (a+\frac{1}{a})^4.$$

Do đó

$$\sqrt[4]{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)(d^4+1)} \geq a+\frac{1}{a}.$$

Cộng thêm 3 bất đẳng thức tương tự với b, c, d ta có *đpcm*. □

Bạn có tìm được điểm chung gì sau mỗi lời giải trên? Đó có lẽ là việc sử dụng một lượng kiến thức rất nhỏ và biết khéo léo kết hợp chúng lại theo những cách khác nhau? Thông thường kiến thức ta sử dụng không vượt quá các bất đẳng thức trung bình cộng - trung bình nhân, bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* hoặc cao hơn nữa là *Holder*. Vì thế lời giải rất dễ được chấp nhận, thậm chí với trình độ THCS.

Ví dụ 3.5.11. *Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bình phương bằng n. Hãy chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1^3}{x_2^2+x_3^2+...+x_{n-1}^2}+\frac{x_2^3}{x_3^2+x_4^2+...+x_n^2}+...+\frac{x_n^3}{x_1^2+x_3^2+...+x_{n-2}^2} \geq \frac{n}{n-2}.$$

LỜI GIẢI. Đặt S là biểu thức ban đầu của bài toán và

$$P = x_1(x_2^2+x_3^2+...+x_{n-1}^2)+x_2(x_3^2+x_4^2+...+x_n^2)+...+x_n(x_1^2+x_3^2+...+x_{n-2}^2).$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$S.P \geq (x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)^2 \qquad (1)$$

Ngoài ra có thể viết P dưới dạng

$$P = (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i^2) - \sum_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n x_i^2 x_{i+1}.$$

$= x_1^2(x_3 + x_4 + ... + x_n) + x_2^2(x_4 + x_5 + ... + x_n + x_1) + ... + x_n^2(x_2 + x_4 + ... + x_{n-1})$.

Lại theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* thì

$$P^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) \sum_{k=1}^n x_k^2(x_{k+2} + x_{k+3} + ... + x_{k-1})^2 \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k^2(x_{k+2} + x_{k+3} + ... + x_{k-1})^2 \le (n-2) \sum_{k=1}^n x_k^2(x_{k+2}^2 + ... + x_{k-1}^2) \qquad (3)$$

Và đặc biệt

$$\sum_{k=1}^n x_k^2(x_{k+2}^2 + ... + x_{k-1}^2) = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2(x_k^2 + x_{k+1}^2)$$

$$\le (\sum_{k=1}^n x_k^2)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k^2 + x_{k+1}^2)^2 \le \frac{n-2}{n} (\sum_{k=1}^n x_k^2)^2 \qquad (4)$$

Bởi vì

$$\sum_{i=1}^n (x_k^2 + x_{k+1}^2)^2 \ge \frac{4}{n}(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^2.$$

Từ $(2), (3)$ và (4) suy ra

$$P^2 \le \frac{(n-2)^2}{n}(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^3.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (1) ta có điều phải chứng minh

$$S \ge \frac{n}{n-2}\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}.$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$. □

Bất đẳng thức ở trên là một bất đẳng thức hay và khó. Trường hợp $n = 5$ đã từng là đề bài trên báo *Toán học và Tuổi trẻ*.

Ví dụ 3.5.12. *Chứng minh rằng với số thực dương x, y, z, ta luôn có*

$$3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \ge xyz(x + y + z)^3.$$

Lời Giải. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{1}{3} + \frac{x^2y}{x^2y + y^2z + z^2x} + \frac{x^2z}{xy^2 + yz^2 + zx^2} \ge 3x\sqrt[3]{\frac{xyz}{3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2)}}.$$

Làm tương tự 2 bất đẳng thức nữa với y, z ta suy ra

$$3(x+y+z)\sqrt[3]{\frac{xyz}{3(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)}} \le 3$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2) \ge xyz(x+y+z)^3.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y = z$. ☐

Một điều đặc biệt của phương pháp này là bạn đọc sẽ luôn cảm thấy dễ hiểu và thoải mái vì không phải đau đầu với những tính toán phức tạp phải đạo hàm dài dòng. Tuy nhiên, bạn hãy tự trả lời câu hỏi là, tại sao lại có thể làm được như vậy?

Ví dụ 3.5.13 (Russia). *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thì bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{1}{a^3(1+b^3)} + \frac{1}{b^3(1+c^3)} + \frac{1}{c^3(1+a^3)} \ge \frac{3}{abc(1+abc)}.$$

Lời Giải. Ta có

$$\frac{a^3b^3c^3+1}{a^3(1+b^3)} + 1 = \frac{b^3(1+c^3)}{1+b^3} + \frac{a^3+1}{a^3(1+b^3)}$$

Vậy theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$3 + (a^3b^3c^3+1)\left(\frac{1}{a^3(1+b^3)} + \frac{1}{b^3(1+c^3)} + \frac{1}{c^3(1+a^3)}\right)$$

$$= \sum_{cyc}\frac{a^3+1}{a^3(1+b^3)} + \sum_{cyc}\frac{b^3(1+c^3)}{1+b^3} \ge \frac{3}{abc} + 3abc.$$

Mặt khác ta luôn có

$$\frac{a^3b^3c^3+1}{abc(1+abc)} \le \frac{1}{abc} + abc - 1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ☐

Ví dụ 3.5.14 (IMO 2002 Pro. A2). *Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực dương tuỳ ý ta luôn có*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1.$$

Lời Giải. Ta sẽ chọn số dương r sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{2r}}{a^{2r}+2(bc)^r},$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a^2(a^{2r} + 2b^r c^r)^2 \geq a^{4r}(a^2 + 8bc)$$

$$\Leftrightarrow b^{2r}c^{2r} + a^{2r}b^r c^r \geq 2a^{4r-2}bc.$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì $VT \geq 2a^r b^{3r/2} c^{3r/2}$.
Và ta chỉ cần chọn r để

$$4r - 2 = r \quad , \quad 3r/2 = 1 \quad \Leftrightarrow r = 2/3.$$

Khi đó theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{a^{2r}}{a^{2r}+2b^r c^r} + \frac{b^{2r}}{b^{2r}+2c^r a^r} + \frac{c^{2r}}{c^{2r}+2a^r b^r}$$

$$\geq \frac{a^{2r}}{a^{2r}+b^{2r}+c^{2r}} + \frac{b^{2r}}{a^{2r}+b^{2r}+c^{2r}} + \frac{b^{2r}}{a^{2r}+b^{2r}+c^{2r}} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Qua các ví dụ trên, hi vọng các bạn sẽ tự rút ra thêm những kinh nghiệm cho bản thân mình, và phương pháp cuối cùng này sẽ thực sự hoàn chỉnh khả năng chứng minh bất đẳng thức của các bạn.

3.6 Nhìn lại 5 phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Trong chương III, tác giả đã giới thiệu với các bạn 5 phương pháp quan trọng và ứng dụng nhiều nhất trong bất đẳng thức sơ cấp hiện nay, có thể nói 5 phương pháp đã bao quát khá đầy đủ các dạng bất đẳng thức thường gặp, đặc biệt là các bất đẳng thức hay và khó thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi trong nước, quốc gia và quốc tế. Nếu đánh giá một cách khách quan thì các phương pháp được trình bày là những phương pháp rất mới và tương đối khó, nhất là đối với các bạn ít có điều kiện tiếp xúc với *Internet* hoặc chưa quen với bất đẳng thức. Vì thế tác giả đã cố gắng chọn ra những ví dụ và kết quả ứng dụng quan trọng nhất để các bạn hiểu được nội dung chính của mỗi phương pháp đó. Bài tổng kết về 5 phương pháp này sẽ giúp các bạn có được những cảm nhận sâu sắc và thấu đáo hơn.

3.6.1 Phương pháp dồn biến

Đối với các bất đẳng thức nhiều biến, người ta thường rất hay dùng kĩ thuật giảm dần số biến trong chứng minh. Để giảm biến, cách thông thường là chuyển các biến về hằng số hay cho một số giá trị bằng nhau. Tất nhiên, trong các bài toán với

2, 3 biến thì kĩ thuật này luôn được sử dụng rất thuận lợi nhưng với 4 biến trở lên thì mọi thứ lại khó khăn hơn rất nhiều. Để hiểu được tư tưởng dồn biến (*cổ điển*) thì tốt nhất là bạn nên thử nghiệm với các bài toán 3 biến. Và khi bạn đã thực sự thuần thục, bạn sẽ hiểu được tại sao với 4 biến kĩ thuật này lại rất khó sử dụng được, đôi khi trở thành vô hiệu. Chính vì thế mà từ trước tới giờ, các lời giải khác cho các bài toán 4 biến (*được trình bày* trong cuốn sách) thường rất phức tạp và dài dòng, quan trọng hơn là không có một điểm chung nào trong mỗi lời giải cho mỗi bài toán như vậy cả. Khi đứng trước các bài toán đó, chúng ta thường rất lúng túng không biết phải làm thế nào, đây là một thực tế vì phép dồn biến thông thường rất "trơ" với các bài toán như vậy. Chẳng hạn, bạn hãy xem kĩ các ví dụ từ 3.1.14 đến 3.1.18 và thử giải chúng theo cách khác.

Nói thêm một chút về ý tưởng dồn biến cổ điển, định lí 3.1 cho ta một cơ sở vững chắc để thực hiện tư tưởng phép dồn biến. Tư tưởng này không bắt chúng ta buộc phải làm với một dạng trung bình nào, trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hoà, trung bình bình phương... tất cả đều được. Nhưng bạn cũng nên chú ý rằng, điều này vẫn luôn phụ thuộc vào giả thiết của bài toán. Với các bài toán mà các biến không bị ràng buộc gì thì ta có thể chọn một dạng trung bình bất kì và thử chứng minh với bất đẳng thức điều kiện, nhưng nếu các biến đã bị ràng buộc bởi một điều kiện nào đó thì mọi chuyện sẽ khác. Chẳng hạn nếu các biến bị ràng buộc bởi $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ thì bạn không thể dồn biến với trung bình nhân hay trung bình điều hoà được, vì khi đó các biến mới sẽ không có tổng bằng n nữa. Ta chỉ có thể dồn biến bằng trung bình cộng được thôi.

Tư tưởng dồn biến là một tư tưởng khó hơi tiếp nhận đối với các bạn THCS, nhất là đối với các bạn ít có điều kiện tìm hiểu về bất đẳng thức. Nhưng các bạn hãy yên tâm và tự tin, rằng phương pháp này hoàn toàn không có gì quá khó cả. Đây là một phương pháp cơ bản mà thôi. Vì thế các bạn hãy chú ý nhiều đến mục 3.1.2, ở đó sẽ cung cấp cho các bạn tư tưởng chính của dồn biến là gì. Hãy thử giải một số bài toán, những khó khăn e ngại sẽ dần được xoá bỏ.

Trở lại với phương pháp dồn biến trong trường hợp tổng quát, bài toán có 4 biến hay n biến. Rõ ràng việc kiểm tra bất đẳng thức điều kiện đúng chỉ là chuyện rất may mắn, vì ta phải chọn với 2 biến bất kì. Minh chứng rõ nhất cho điều này là với các bất đẳng thức 4 biến, và rõ ràng để tháo gỡ được khó khăn này ta cần phải thay đổi ít nhiều trong tư tưởng phép dồn biến. Đó chính là các phép biến đổi Δ, trong phép dồn biến này ta chỉ cần chọn ra số nhỏ nhất hoặc và nhất để tiến hành kiểm tra bất đẳng thức điều kiện mà thôi. Với các bài toán toán 4 biến, ta sẽ sắp xếp các biến theo thứ tự tăng hoặc giảm, nhưng chỉ tiến hành trên 3 biến (thường là 3 biến nhỏ nhất hoặc lớn nhất). Trong ví dụ 3.1.18, ta chọn số lớn nhất và số nhỏ thứ 2 để kiểm tra bất đẳng thức điều kiện. Điểm đặc biệt hơn của ví dụ này các bạn có thể thấy trong bài toán sau

Ví dụ 3.6.1. *Nếu $a, b, c, d \geq 0$ và $a + b + c + d = 4$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của* *các biểu thức*

$$(i) \qquad (2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)(2+d^2).$$
$$(ii) \qquad (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2).$$

Câu (i) đẳng thức vẫn xảy ra khi có 4 biến bằng nhau, nhưng câu (ii) lại khác, chỉ có 3 biến bằng nhau mà thôi và như vậy chúng ta sẽ không thể áp dụng cách dồn biến cũ để giải được, mà chỉ có thể dùng định lí $S.M.V$.

Những điều vừa trình bày có thể coi là nội dung của toàn bộ mục 3.1 *Phương pháp dồn biến và định lí dồn biến mạnh.* Hi vọng bạn đọc sẽ thực sự nắm bắt được nội dung này, nhất là hiểu rõ được giá trị quan trọng của định lí S.M.V.

3.6.2 Phương pháp phân tích bình phương S.O.S

Bất đẳng thức Iran 96 là một trong những bất đẳng thức đẹp nhất của bất đẳng thức sơ cấp. Trước kia, người ta vẫn quen với việc giải các bất đẳng thức như vậy hoặc cùng dạng bằng phương pháp nhân khai triển rồi sử dụng bất đẳng thức *Muihard*. Mỗi người có một nhận xét khác nhau về cách giải này, nhưng riêng đối với tác giả thì đây là một cách làm hoàn toàn không hay. Khối lượng tính toán quá lớn, rõ ràng đã làm mất đi phần nào vẻ đẹp của bài toán. Hơn thế nữa, như các bạn đã thấy với các bài toán hoán vị thì việc khai triển và sử dụng các dạng bất đẳng thức *Schur*, *Muihard* không mấy khi có hiệu quả, hoặc vô hiệu (bạn hãy xem lại các bài toán chương II). Dồn biến cũng là một phương pháp có thể thực hiện được, nhưng có vẻ quá cồng kềnh và dài dòng, nhất là chứng minh đưa về trường hợp 2 biến bằng nhau. Thật là khó chịu khi mọi cách chứng minh đều có vẻ khá xấu về mặt thẩm mĩ như vậy, nhất là đối với các bất đẳng thức đối xứng đẹp như bất đẳng thức *Iran* chẳng hạn.

Phải làm sao để khắc phục những khiếm khuyết này? Hãy nhớ lại bất đẳng thức cơ bản nhất của đại số $x^2 \geq 0$. Việc đưa một bất đẳng thức trở thành các tổng bình phương không phải là một ý tưởng quá mới, thậm chí đã từng xuất hiện rất nhiều, hay trong các chứng minh của chúng ta đối với các bất đẳng thức cơ bản. Đối với các bất đẳng thức đối xứng 3 biến, ta luôn có thể đưa một bất đẳng thức tuỳ ý về dạng sau
$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Việc khẳng định sự tồn tại biểu diễn cơ sở này đã được chứng minh ở mục 3.2.2, bằng chứng minh tương tự ta cũng có thể chứng minh đối với lớp các bài toán hoán vị nữa. Tất nhiên, khi giải toán ta không cần đưa lại chứng minh này mà nó chỉ giúp các bạn có niềm tin vững chắc trong khi phân tích, mà theo kinh nghiệm bản thân, tác giả thấy niềm tin ấy rất quan trọng. Sau khi đưa về biểu diễn kia thì sao, *các biểu thức*

(*i*) $(2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2)(2 + d^2)$.

(*ii*) $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2)$.

Câu (i) đẳng thức vẫn xảy ra khi có 4 biến bằng nhau, nhưng câu (ii) lại khác, chỉ có 3 biến bằng nhau mà thôi và như vậy chúng ta sẽ không thể áp dụng cách dồn biến cũ để giải được, mà chỉ có thể dùng định lí $S.M.V$.

Những điều vừa trình bày có thể coi là nội dung của toàn bộ mục 3.1 *Phương pháp dồn biến và định lí dồn biến mạnh.* Hi vọng bạn đọc sẽ thực sự nắm bắt được nội dung này, nhất là hiểu rõ được giá trị quan trọng của định lí S.M.V.

3.6.2 Phương pháp phân tích bình phương S.O.S

Bất đẳng thức Iran 96 là một trong những bất đẳng thức đẹp nhất của bất đẳng thức sơ cấp. Trước kia, người ta vẫn quen với việc giải các bất đẳng thức như vậy hoặc cùng dạng bằng phương pháp nhân khai triển rồi sử dụng bất đẳng thức *Muihard*. Mỗi người có một nhận xét khác nhau về cách giải này, nhưng riêng đối với tác giả thì đây là một cách làm hoàn toàn không hay. Khối lượng tính toán quá lớn, rõ ràng đã làm mất đi phần nào vẻ đẹp của bài toán. Hơn thế nữa, như các bạn đã thấy với các bài toán hoán vị thì việc khai triển và sử dụng các dạng bất đẳng thức *Schur*, *Muihard* không mấy khi có hiệu quả, hoặc vô hiệu (bạn hãy xem lại các bài toán chương II). Dồn biến cũng là một phương pháp có thể thực hiện được, nhưng có vẻ quá cồng kềnh và dài dòng, nhất là chứng minh đưa về trường hợp 2 biến bằng nhau. Thật là khó chịu khi mọi cách chứng minh đều có vẻ khá xấu về mặt thẩm mĩ như vậy, nhất là đối với các bất đẳng thức đối xứng đẹp như bất đẳng thức *Iran* chẳng hạn.

Phải làm sao để khắc phục những khiếm khuyết này? Hãy nhớ lại bất đẳng thức cơ bản nhất của đại số $x^2 \geq 0$. Việc đưa một bất đẳng thức trở thành các tổng bình phương không phải là một ý tưởng quá mới, thậm chí đã từng xuất hiện rất nhiều, hay trong các chứng minh của chúng ta đối với các bất đẳng thức cơ bản. Đối với các bất đẳng thức đối xứng 3 biến, ta luôn có thể đưa một bất đẳng thức tuỳ ý về dạng sau

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0.$$

Việc khẳng định sự tồn tại biểu diễn cơ sở này đã được chứng minh ở mục 3.2.2, bằng chứng minh tương tự ta cũng có thể chứng minh đối với lớp các bài toán hoán vị nữa. Tất nhiên, khi giải toán ta không cần đưa lại chứng minh này mà nó chỉ giúp các bạn có niềm tin vững chắc trong khi phân tích, mà theo kinh nghiệm bản thân, tác giả thấy niềm tin ấy rất quan trọng. Sau khi đưa về biểu diễn kia thì sao, chúng ta thường nghĩ rằng nếu các hệ số S_a, S_b, S_c không âm thì quá tốt, còn nếu trong chúng có số âm thì coi như việc phân tích và chứng minh đã *phá sản*?

Các hệ số S_a, S_b, S_c là các hệ số rất *đáng yêu*. Thực sự là như vậy, vì hầu như trong mọi bài toán, chúng luôn đứng về phía chúng ta để đi đến kết quả cuối cùng. Điều quan trọng là chúng ta sẽ áp dụng định lí S.O.S (3.3) theo cách này và cách khác mà thôi. Có nhiều bài toán ta phải áp dụng cùng một lúc khá nhiều tiêu chuẩn nhưng chắc chắn rằng bạn sẽ đi tới kết quả cuối cùng, chỉ cần kết hợp chúng lại một cách khéo léo. Chỉ những bài toán rất khó thì ta mới cần kết hợp nhiều tiêu chuẩn, còn hầu hết ta chỉ cần dùng một tiêu chuẩn là đủ. Các bài toán 3 biến, không phân biệt hoán vị hay đối xứng, đều có thể chứng minh được bằng phương pháp này. Các chứng minh bằng S.O.S luôn rất tự nhiên, đơn giản và hợp lí đến mức không thể nào khác đi được.

Bất đẳng thức Iran 96 trở thành bất đẳng thức tiêu biểu cho phương pháp S.O.S (mặc dù ý tưởng này xuất hiện khi tác giả chứng minh ví dụ 3.2.4). Nếu bạn muốn nắm thật chắc về S.O.S, hãy tự chứng minh các bất đẳng thức từ 3.2.12 đến 3.2.21. Đây đều là những bất đẳng thức rất đẹp mắt, mà chắc chắn trước kia người ta chỉ quen với việc chứng minh chúng bằng khai triển hoặc dồn biến mà thôi.

3.6.3 Phương pháp phản chứng

Chúng ta quen với việc dung phản chứng trong toán học, nhưng đối với bất đẳng thức thì đó còn là một vấn đề khá mới lạ. Nếu bạn chưa từng biết thì nó dường như còn là một chuyện vô lí nữa, nhưng đây lại là một phương pháp khá ấn tượng. Mọi chuyện sẽ đơn giản thôi, bạn chỉ cần lật ngược lại kết luận và suy ra môt kết luận mới trái với giả thiết là được. Tuy nhiên trong phương pháp này, bạn cần suy luận rất chặt chẽ và chính xác.

Toàn bộ các bài toán trong mục 3.3 đều được giải theo phương pháp này. Điểm đặc biệt là mỗi bài toán đều có một giả thiết đẳng thức, một kết luận bất đẳng thức. Chúng ta hãy xem mỗi bài toán theo cách ngược lại, biến kết luận làm đẳng thức còn giả thiết lại trở thành bất đẳng thức. Cần đặc biệt lưu ý việc thay đổi điều kiện như thế nào, xem xét kĩ lưỡng bất đẳng thức mới có tương đương với bất đẳng thức cũ hay không. Việc xác định rõ cần chứng minh cái gì rõ ràng là quan trọng nhất trước khi chứng minh.

Phương pháp phản chứng cũng là một phương pháp để sáng tạo bất đẳng thức. Ta luôn có thể biến đổi từ một bất đẳng thức điều kiện để được một bất đẳng thức mới với hình thức khác hẳn và có thể chứng minh sẽ khó hơn rất nhiều. Tất nhiên, ta cũng có thể làm ngược lại khi phải giải một bài toán nào đó. Lập bất đẳng thức phản chứng và tìm lấy một bất đẳng thức dễ hơn có thể giúp chúng ta nghĩ được lời giải nhanh nhất. Thực tế thì, có nhiều trường hợp khi 2 bất đẳng thức hoàn toàn tương đương nhau qua kĩ thuật phản chứng nhưng rất lâu người ta mới nhận ra được điều đó, sau khi chứng minh mỗi bất đẳng thức theo một cách khác nhau.

3.6.4 Phương pháp quy nạp tổng quát

Phương pháp S.O.S và S.M.V đã giải quyết một cách tương đối đầy đủ các bất đẳng thức 3 và 4 biến số. Nhưng không phải lúc nào bài toán của chúng ta cũng chỉ có ít biến số như vậy, có nhiều bài toán chứa n biến số và công việc chứng minh có thể sẽ khó khăn hơn nhiều. Nhiều bất đẳng thức đơn giản thì chúng ta dễ dàng sử dụng quy nạp để đi đến kết quả, nhưng với các bất đẳng thức thực sự hay và khó thì cần phải có thêm nhiều sự thay đổi nữa. Hãy xem lại các ví dụ trong mục 3.4, đây đều là các bài toán rất khó chứng minh.

Về ý tưởng rút ngắn số biến đến mức có thể cũng được nói lại khá nhiều trong tập sách này. Với các bài toán n biến số thì công việc rút ngắn số biến sẽ có rất nhiều phức tạp, thậm chí tất cả các cách chứng minh trước đều không làm được. Làm thế nào để đưa về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau? Đây là công việc rất khó khăn và nếu xong thì coi như bài toán đã được hoàn thành (sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức một biến mà thôi). Phương pháp quy nạp tổng quát cũng dựa trên quy tắc này, nhưng nó còn làm được nhiều hơn kết quả mà bài toán đem lại vì đã chứng minh một bài toán tổng quát hơn.

Định lí I.G.I có hiệu quả rất rộng, với hầu hết các dạng bất đẳng thức phân tách

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\ge c.$$

Hơn thế nữa, tư tưởng của phép quy nạp tổng quát còn được sử dụng nhiều hơn khi bài toán có thêm các biểu thức hợp giữa các biến như $x_1+x_2+...+x_n$ hay $x_1x_2...x_n$ chẳng hạn. Trước kia, khi gặp phải các bất đẳng thức n biến, chúng ta thường rất lúng túng khi giải các bài toán khó không sử dụng được phương pháp cổ điển, chẳng hạn các bài toán thuộc dạng sau

Ví dụ 3.6.2. *Chứng minh với mọi số thực không âm $a_1,a_2,...,a_n$ có tích bằng 1 thì ta có*

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ge \frac{2n}{n-1}\sqrt[n]{n-1}(a_1+a_2+...+a_n-n).$$

Bất đẳng thức trên có thể coi như một hệ quả trực tiếp từ định lí I.G.I. Bạn hãy đọc thật kĩ ví dụ mở đầu và nắm chắc tư tưởng của nó để có thể áp dụng lại trong các bài toán tương tự. Định lí I.G.I cũng giúp chúng ta tạo được các bài toán mới từ các biểu thức thuần nhất đơn giản, mà công việc chính của chúng ta chỉ là thử nghiệm khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau.

Chẳng hạn, ta có một số ví dụ sau đây

Ví dụ 3.6.3. (*i*). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n. Tìm hằng số thực dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng luôn đúng*

$$\frac{1}{k+a_1^2}+\frac{1}{k+a_2^2}+...+\frac{1}{k+a_n^2}\geq\frac{n}{k+1}.$$

(*ii*). *Giải bài toán tương tự khi thay dấu $\geq$ bởi dấu $\leq$.*

Ví dụ 3.6.4. *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tích bằng 1. Tìm hằng số thực dương k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$a_1^3+a_2^3+...+a_n^3-n\geq k(a_1+a_2+...+a_n-n).$$

Nếu xét trong 5 phương pháp, phương pháp I.G.I là một phương pháp chứng minh đầy *nghệ thuật*. Ngay cả với tác giả, khi dùng phương pháp này để chứng minh, vẫn luôn phải bất ngờ vì sự độc đáo của nó. Một lớp rất lớn các bất đẳng thức n biến đã có một phương pháp chung và phương pháp này còn luôn làm được nhiều hơn kết quả mà bài toán yêu cầu. Chắc chắn khi đã hiểu rõ về phương pháp này, bạn sẽ thực sự ấn tượng vì vẻ đẹp của nó.

3.6.5 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức cổ điển

Đối với đa số các bạn học sinh thì việc sử dụng các bất đẳng thức cổ điển trong chứng minh là một việc làm rất quen thuộc, thậm chí nhiều người còn tưởng rằng để giải một bất đẳng thức thì công việc duy nhất là kết hợp các bất đẳng thức đã biết trước để đi đến lời giải. Nhiều người có kĩ thuật này rất điêu luyện, nhưng tất nhiên trong bất đẳng thức không phải chỉ có những sự kết hợp đơn thuần như vậy.

Mỗi bất đẳng thức đều có một cấu trúc riêng, mà hầu như các bất đẳng thức hay đều có cấu trúc rất đẹp. Nếu tận dụng được cấu trúc đó và tìm ra được một chứng minh đơn giản chỉ cần dùng các bất đẳng thức quen biết lại là điều thú vị. Tuy nhiên, nếu xem kĩ các bài tập chương II thì hiếm khi một bài toán nào lại được chứng minh trực tiếp như vậy hoặc phải qua một vài bước nữa, nhưng dẫu sao, phương pháp cổ điển vẫn luôn được dùng rất nhiều theo cách này hay cách khác trong mỗi bước của một lời giải hoàn chỉnh.

Mục 4.5 giới thiệu các bài toán hay sử dụng phương pháp chứng minh cổ điển. Nhiều người nghĩ rằng các bất đẳng thức như vậy chắc chắn sẽ dễ, vì đó vẫn là cách hay làm với bất đẳng thức đại số hiện nay. Nhưng nếu thử giải các bài toán trong mục này bạn sẽ cảm thấy nó không đơn giản như vậy, mặc dù chứng minh đích thực chỉ dùng bất đẳng thức cổ điển. Hãy đặt ra câu hỏi, tại sao lại có được những chứng minh đơn giản và hay như vậy? Khi bạn tìm được câu trả lời hoặc tự giải được chúng bạn đã hiểu được cái đẹp và nội dung của bài toán.

Chương 4

Một số vấn đề chọn lọc về bất đẳng thức

Sau khi đọc xong 3 chương đã trình bày, chắc chắn các bạn đã có thêm rất nhiều ý tưởng và nhận xét mới về bất đẳng thức. Thế giới của các bất đẳng thức thật là tuyệt vời, có rất nhiều thú vị và độc đáo để chúng ta khám phá. Tới chương tiếp theo, chúng ta sẽ quan tâm đến bất đẳng thức ở góc độ sâu sắc hơn, tổng hợp hơn từ những kĩ thuật và phương pháp chứng minh đã học. Có thể nói, sau khi đã xong những phần kiến thức quan trọng về bất đẳng thức, bây giờ là lúc để chúng ta cảm nhận về vẻ đẹp tuyệt vời của các bất đẳng thức.

4.1 Bất đẳng thức Schur suy rộng

Bất đẳng thức *Schur* đã không còn xa lạ với các bạn, nó thực sự là một công cụ hiệu quả cho các bài toán đối xứng 3 biến. Trong phần này, chúng ta sẽ xem lại và mở rộng bất đẳng thức quan trọng này. Kiến thức sắp trình bày rất nhẹ nhàng, không quá trình độ trung học cơ sở, nhưng ứng dụng lại rất có hiệu quả.

Dạng phát biểu thông thường của nó với số mũ thực là như sau

Định lý 4.1 (Bất đẳng thức Schur). *Với các số thực dương a, b, c và $k \in R^+$ bất kì ta luôn có*

$$a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) + c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

CHỨNG MINH. 2 trường hợp quen thuộc được sử dụng nhiều là $k = 1, 2$.

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq a^3(b+c) + b^3(a+c) + c^3(a+b)$$

Lưu ý rằng cả 2 bất đẳng thức trên đều có thể chứng minh dễ dàng bằng phương pháp S.O.S. Tuy nhiên ta sẽ không đề cập đến phương pháp này ở đây, vì ngay cả chứng minh bất đẳng thức *Schur* với số mũ thực được trình bày ở trên cũng rất đơn giản. Các bạn hãy đọc kĩ chứng minh, sau đó chúng ta sẽ có một mở rộng cực kì quan trọng : Bất đẳng thức *Schur* suy rộng hay còn gọi là bất đẳng thức *Vornicu – Schur*.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$, suy ra

$$(c-a)(c-b) \ge 0 \Rightarrow c^k(c-a)(c-b) \ge 0$$
$$a^k(a-c) - b^k(b-c) = (a^{k+1} - b^{k+1}) + c(a^k - b^k) \ge 0$$
$$\Rightarrow a^k(a-b)(a-c) + b^k(b-a)(b-c) \ge 0.$$

Cộng 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Điều đặc biệt là bất đẳng thức này vẫn còn đúng khi $k \le 0$.
Thật vậy, với $k \le 0$ ta có (vẫn giả sử rằng $a \ge b \ge c$)

$$(a-b)(a-c) \ge 0 \Rightarrow a^k(a-b)(a-c) \ge 0$$
$$c^k(a-c) - b^k(a-b) \ge c^k(a-b-b^k(a-b) = (c^k - b^k)(a-b) \ge 0$$
$$\Rightarrow c^k(c-a)(c-b) + b^k(b-a)b-c) \ge 0.$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và đặc biệt nếu $k > 0$ thì còn một trường hợp của đẳng thức nữa là $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. Chính điều này tạo ra độ mạnh và sát cho bất đẳng thức *Schur*. ❑

Định lí sau đây là mở rộng quan trọng nhất cho bất đẳng thức *Schur*

Định lý 4.2 (Bất đẳng thức Schur suy rộng). *Cho các số dương a, b, c, x, y, z sao cho (a, b, c) và (x, y, z) đều là các bộ đơn điệu. Khi đó bất đẳng thức sau luôn thoả mãn*

$$x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b) \ge 0.$$

Chứng Minh. Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Xét 2 trường hợp

(i). Nếu $x \ge y \ge z$ thì

$$(c-a)(c-b) \ge 0 \Rightarrow z(c-a)(c-b) \ge 0$$
$$x(a-c) - y(b-c) \ge x(b-c) - y(b-c) = (x-y)(b-c) \ge 0$$
$$\Rightarrow x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) \ge 0.$$

Cộng vế 2 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

(ii). Nếu $z \geq y \geq x$ thì

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a-c) \geq 0 \Rightarrow x(a-b)(a-c) \geq 0\\
&z(a-c) - y(a-b) \geq z(a-b) - y(a-b) = (z-y)(a-b) \geq 0\\
&\Rightarrow z(c-a)(c-b) + y(b-a)(b-c) \geq 0.
\end{aligned}$$

Cộng vế 2 bất đẳng thức trên ta cũng có điều phải chứng minh. □

Bạn đọc có thể thấy cách chứng minh bất đẳng thức này và chứng minh bất đẳng thức *Schur* dạng chính tắc ở trên là hoàn toàn như nhau. Tuy nhiên các áp dụng của nó thì đa dạng và phong phú hơn bất đẳng thức *Schur* ban đầu rất nhiều.

Hãy cùng xem trong các ví dụ sau đây.

Ví dụ 4.1.1. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có*

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ac}{(a+c)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Ta có một bất đẳng thức mạnh hơn như sau

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ac}{(a+c)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Thật vậy, chú ý rằng

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} - \frac{a}{b+c} = \frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2},$$

Với

$$x = \frac{1}{(b+c)^2},\ y = \frac{1}{(a+c)^2},\ z = \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Ta phải chứng minh

$$x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức *Schur* suy rộng vì nếu ta giả sử $a \geq b \geq c$ thì sẽ có điều kiện hiển nhiên là $x \geq y \geq z$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Ví dụ 4.1.2. *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c thì*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ac} + \frac{a+b}{c^2+ab}.$$

Lời Giải. Dễ thấy rằng

$$\frac{1}{a} - \frac{b+c}{a^2+bc} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc},$$

Đặt

$$x = \frac{1}{a^3+abc}, \ y = \frac{1}{b^3+abc}, \ z = \frac{1}{c^3+abc}.$$

Ta phải chứng minh

$$x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

Dễ thấy rằng nếu $a \geq b \geq c$ thì $x \leq y \leq z$ và do đó theo bất đẳng thức *Schur* suy rộng ta có điều phải chứng minh. ❑

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức *Schur* suy rộng, các bất đẳng thức trên được chứng minh một cách tương đối đơn giản và rất dễ hiểu. Ngay cả các bạn học sinh *Trung học cơ sở* thì các chứng minh này cũng không hề quá sức. Một điều khá thú vị trong phương pháp này, nó dường như là có quan hệ mật thiết với phương pháp S.O.S nhưng xét theo cách đơn giản hơn. Thay vì xét các biểu thức của $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ ta xét với các biểu thức của $(a-b)(a-c), (b-c)(b-a), (c-a)(c-b)$ giới hạn trong trường hợp các hệ số của chúng đơn điệu. Các bất đẳng thức tạo ra từ bất đẳng thức *Schur* suy rộng thường không quá khó nhưng lại đẹp và cũng là một sự *thư giãn* tốt với bất đẳng thức. Nắm bắt được định lí *Schur* suy rộng là một điều rất cần thiết. Nếu bạn không biết về định lí trên, thì chắc chắn các bài toán vừa trình bày không dễ dàng chút nào.

Ví dụ 4.1.3. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c có tích bằng 1 thì*

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)} + \frac{b^2+ac}{b^2(a+c)} + \frac{c^2+ab}{c^2(a+b)} \geq ab+bc+ca.$$

Lời Giải. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)} + \frac{b^2+ac}{b^2(a+c)} + \frac{c^2+ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Chú ý rằng

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)} - \frac{1}{a} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^2(b+c)},$$

Dễ dàng kiểm tra được nếu bộ số (a, b, c) là bộ đơn điệu tăng thì bộ số

$$\left(\frac{1}{a^2(b+c)}, \frac{1}{b^2(a+c)}, \frac{1}{c^2(a+b)}\right)$$

là bộ đơn điệu giảm. Vậy theo bất đẳng thức *Schur* suy rộng ta có *đpcm*. ❑

Ví dụ 4.1.4. *Chứng minh rằng nếu a, b, c có tổng bình phương bằng 3 thì*

$$\frac{a^3+abc}{(b+c)^2}+\frac{b^3+abc}{(a+c)^2}+\frac{c^3+abc}{(c+a)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

LỜI GIẢI. Bài toán được chứng minh theo 2 bước.

Bước 1. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^3+abc}{(b+c)^2}+\frac{b^3+abc}{(a+c)^2}+\frac{c^3+abc}{(c+a)^2}\geq\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\quad(1)$$

Bước 2. Ta chứng minh bài toán khá quen thuộc

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}\quad(2)$$

Chứng minh (1).
Ta có đẳng thức sau

$$\frac{a^3+abc}{(b+c)^2}-\frac{a^2}{b+c}=\frac{a}{(b+c)^2}(a-b)(a-c).$$

Chú ý rằng nếu $a\geq b\geq c$ thì hiển nhiên

$$\frac{a}{(b+c)^2}\geq\frac{b}{(a+c)^2}\geq\frac{c}{(a+b)^2}.$$

Theo bất đẳng thức *Schur* mở rộng ta có ngay điều phải chứng minh.

Chứng minh (2).
Sử dụng bất đẳng thức *Chebyshev* và bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}&\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\\&\geq3\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}.\end{aligned}$$

Ta áp dụng được bất đẳng thức *Chebyshev* vì nếu giả sử $a\geq b\geq c$ thì

$$a^2\geq b^2\geq c^2\quad,\quad\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}.$$

Các bất đẳng thức (1) và (2) suy ra trực tiếp kết quả bài toán. □

Ví dụ 4.1.5. *Chứng minh rằng nếu các số dương a, b, c có tổng bằng 3 thì ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{2a^2+bc}+\frac{3}{2b^2+ac}+\frac{3}{2c^2+ab}.$$

Lời Giải. Ta phải chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{a+b+c}{2a^2+bc}+\frac{a+b+c}{2b^2+ac}+\frac{a+b+c}{2c^2+ab}.$$

Chú ý rằng

$$\frac{1}{a}-\frac{a+b+c}{2a^2+bc}=\frac{(a-b)(a-c)}{2a^3+abc},$$

Đặt $x=\dfrac{1}{2a^3+abc}, y=\dfrac{1}{2b^3+abc}, z=\dfrac{1}{2c^3+abc}$. Ta phải chứng minh

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Dễ thấy nếu $a \geq b \geq c$ thì $x \leq y \leq z$ nên theo bất đẳng thức *Schur* suy rộng ta có điều phải chứng minh. ❑

Bất đẳng thức sau đây vẫn đúng : *Nếu $a+b+c=3$ và $a, b, c \geq 0$ thì*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{a^2+2bc}+\frac{3}{b^2+2ac}+\frac{3}{c^2+2ab}.$$

Cách chứng minh bất đẳng thức này hoàn toàn giống bất đẳng thức ban đầu.

Một cách tự nhiên, ta muốn so sánh 2 biểu thức

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ac}+\frac{1}{2c^2+ab} \quad , \quad \frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}.$$

Tuy nhiên, rất tiếc 2 biểu thức trên không so sánh được. Các bạn hãy tìm phản ví dụ bác bỏ nhận xét trên.

Ví dụ 4.1.6. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^2+2bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+2ac}{(a+c)^2}+\frac{c^2+2ab}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}.$$

Lời Giải. Bài toán đã được đề cập một lần trong các chương trước. Bây giờ chúng ta đưa ra một chứng minh khác bằng cách áp dụng bất đẳng thức *Schur* suy rộng và bất đẳng thức *Iran 98*.

Ta có $a^2+2bc=ab+bc+ca+(a-b)(a-c)$. Bất đẳng thức có thể viết dưới dạng

$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}+\frac{(b-a)(b-c)}{(a+c)^2}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)^2}$$

$$+(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}.$$

Biểu thức ở dòng trên ≥ 0 theo bất đẳng thức *Schur* mở rộng còn biểu thức ở dòng dưới $\geq 9/4$ theo bất đẳng thức *Iran.* ❑

Hoàn toàn tương tự ta có bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 4.1.7. *Với mọi a, b, c không âm*

$$\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2+ac}{a^2+ac+c^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2}\geq 2.$$

Chứng minh bằng cách kết hợp bất đẳng thức *Schur* suy rộng và phương pháp S.O.S.

Việc sử dụng bất đẳng thức *Schur* suy rộng đối với các bài toán đối xứng 3 biến là định hướng đầu tiên dễ dàng nhất trước khi ta phải tìm những con đường phức tạp hơn, chẳng hạn phương pháp S.O.S hay dồn biến. Đơn giản bởi vì chứng minh bất đẳng thức *Schur* khá dễ so với việc tìm cách đưa về dạng chính tắc của phương pháp S.O.S và nếu bạn chưa làm quen được với S.O.S thì đây lại là một công việc khó khăn. Tuy nhiên, S.O.S rất mạnh vì nó có thể giải hầu như quyết triệt để mọi bài toán bất đẳng thức đối xứng 3 biến dạng phân thức hoặc đa thức, không chứa căn thức.

Sau đây là một mở rộng thú vị cho bất đẳng thức dạng *Schur* với nhiều biến số hơn.

Ví dụ 4.1.8 (IMO 1971). *Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d, e là các số thực tuỳ ý ta có bất đẳng thức*

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)+(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)+$$
$$+(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\geq 0.$$

LỜI GIẢI. Chứng minh bất đẳng thức này khá giống với chứng minh bất đẳng thức *Schur* suy rộng. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a \geq b \geq c \geq d \geq e$. Thế thì

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)\geq 0,$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)\geq 0,$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\geq 0.$$

Cộng vế 3 bất đẳng thức trên ta có ngay điều phải chứng minh. ❑

Trường hợp đặc biệt, lấy $d = e$ ta có kết quả sau

$$(a-b)(a-c)(a-e)^2+(b-a)(b-c)(b-e)^2+(c-a)(c-b)(c-e)^2\geq 0.$$

Nhưng thực ra đây lại chính là bất đẳng thức *Schur* với bậc 2.

Tổng quát hơn, trong bất đẳng thức ở *ví dụ 4.1.8* ta có thể đặt trước mỗi hiệu một hàm số $f : R \to R$, cụ thể là

$$\sum_{a,b,c,d,e} f(a-b)f(a-c)f(a-d)f(a-e) \geq 0,$$

Trong đó hàm số f thoả mãn 2 điều kiện sau

- f là hàm đơn điệu tăng.
- $xf(x) \geq 0 \; \forall x \in R$.

Đơn giản nhất, lấy $f(x) = x^3$ thì

$$\sum_{a,b,c,d,e} (a-b)^3(a-c)^3(a-d)^3(a-e)^3 \geq 0.$$

Sau các kết quả mở rộng bất đẳng thức *Schur* với 3 biến hoặc 5 biến, sau rất nhiều cố gắng người ta vẫn chưa tìm ra được một kết quả tương tự với số biến khác, chẳng hạn với 4 biến số. Như vậy phần định lí này vẫn còn mở và sẽ thử tài của các bạn từ bây giờ, nếu bạn thích tìm tòi sáng tạo.

Phần cuối của bài viết một kết quả ở dạng bất đẳng thức *Schur*.

Ví dụ 4.1.9. *Xét bất đẳng thức sau với $a, b, c, x, y, z \geq 0$*

$$x(a-b)(a-c) + y(b-a)(b-c) + z(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Để bất đẳng thức đúng với mọi a, b, c thì các số x, y, z phải thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$. Đây cũng là điều kiện đủ.

Vì thông thường x, y, z luôn là hàm phụ thuộc vào a, b, c nên điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2(xy + yz + zx)$ không thể sử dụng được một cách linh hoạt. Đây là lí do mà bất đẳng thức này ít được áp dụng hơn.

4.2 Những bất đẳng thức kì lạ !

Các bất đẳng thức đối xứng 3 biến đã được xem xét rất nhiều trong cuốn sách này và các kiến thức đưa ra là tương đối đầy đủ cho các bạn. Bây giờ chúng ta sẽ quay trở lại một dạng bất đẳng thức cơ bản nhất trong các bất đẳng thức 3 biến, đó là các bài toán bất đẳng thức như $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ hay $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, nhưng tất nhiên ở dạng biểu diễn khác đi. Chúng ta đang xét trong một thế giới khác của số thực, mà hầu như những bất đẳng thức đơn giản nhất cũng trở nên vô cùng phức tạp, nhưng chúng lại là những bất đẳng thức đẹp tuyệt vời...

Thế giới mà chúng ta nói tới, là thế giới mà các số a, b, c không quyết định hoàn toàn giá trị của biểu thức. Lí do rất đơn giản, chúng không đứng độc lập mà là các số mũ của một biểu thức số hạng khác:

Vấn đề mở đầu cho chương này là một vấn đề dường như rất đơn giản, nếu $a+b+c=3$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức $2^{ab}+2^{bc}+2^{ca}$ hay $4^{ab}+4^{bc}+4^{ca}$ là bao nhiêu? Bạn đừng vội kết luận rằng giá trị đó là 6 và 10 tương ứng khi $a=b=c=1$. Luỹ thừa đã làm đổ vỡ quan hệ bất đẳng thức tưởng như hiển nhiên và không thể sai khác được, đó là bất đẳng thức dạng $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

Ví dụ 4.2.1. *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$(a) \qquad S_2 = 2^{ab}+2^{bc}+2^{ca}.$$

$$(b) \qquad S_4 = 4^{ab}+4^{bc}+4^{ca}.$$

LỜI GIẢI. Trước khi đọc lời giải sau đây, bạn hãy thử suy nghĩ và phát triển về bất đẳng thức và luỹ thừa? Đây là vấn đề khá mới và nói chung là rất khó.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Giả sử $k \geq 1$ là một hằng số dương và xét hàm số

$$f(a,b,c) = k^{ab}+k^{bc}+k^{ca}.$$

Đặt $t=(a+b)/2, u=(a-b)/2$ khi đó $a=t+u, b=t-u$.

$$f(a,b,c) = g(u) = k^{t^2-u^2}+k^{c(t-u)}+k^{c(t+u)}$$
$$g'(u) = 2u\ln k.k^{t^2-u^2}+\ln k.ck^{ct}(k^{cu}-k^{-cu}).$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{k^{cu}-k^{-cu}}{2cu} \leq k^{t^2-u^2-ct}.$$

Theo định lí *Lagrange* thì tồn tại số thực r với $u \geq r \geq -u$ sao cho

$$\frac{k^{cu}-k^{-cu}}{2u} = ck^{cr} \leq ck^{cu}.$$

Vì $c \leq 1$ và $c(t+u) \leq (t-u)(t+u) = t^2-u^2$ nên dễ thấy $g'(u) \leq 0$. Suy ra

$$g(u) \leq g(0) = k^{t^2}+2k^{ct}$$
$$g(0) = h(t) = k^{t^2}+2k^{t(3-2t)}.$$

Ta sẽ chứng minh $h(t) \leq \max\left(h(\frac{3}{2}), h(1)\right)$ $\forall k \geq 1$. Thật vậy

$$h'(t) = 2t \ln k . k^{t^2} + 2(3-4t) \ln k . k^{t(3-2t)}$$
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{4t-3}{t} = k^{3t(t-1)}.$$

Xét trong trường hợp $t \geq 1$, ta có phương trình

$$q(t) = 3t(t-1) \ln k - \ln(4t-3) + \ln t = 0,$$
$$q'(t) = (6t-3) \ln k - \frac{4}{4t-3} + \frac{1}{t}$$
$$= (6t-3) \ln k - \frac{3}{t(4t-3)}.$$

Chú ý rằng khi $t \geq 1$ thì $q'(t)$ hiển nhiên là một hàm giảm đối với t, do đó phương trình $q'(t) = 0$ có không quá một nghiệm $t \geq 1$, theo định lí *Roll* thì phương trình $h'(t) = 0$ có không quá 2 nghiệm $t \geq 1$. Do $h'(1) = 0$ nên

$$h(t) \leq \max\left(h(1), h(\frac{3}{2})\right).$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn chỉnh. ❑

Từ đó ta có bài toán tổng quát là

Ví dụ 4.2.2. *Nếu a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 3 thì $\forall k \geq 1$ ta có*

$$k^{ab} + k^{bc} + k^{ca} \leq \max\left(3k, k^{9/4} + 2\right).$$

Và do đó hằng số tốt nhất để có bất đẳng thức $k^{ab} + k^{bc} + k^{ca} \leq 3k$ Là nghiệm của phương trình đại số

$$3k = k^{9/4} + 2.$$

Bây giờ ta chuyển sang một ước lượng cơ bản khác, đó là đối với biểu thức dạng $a^2 + b^2 + c^2$. Ta có bài toán sau

Ví dụ 4.2.3. *Giả sử các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 3, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$3^{-a^2} + 3^{-b^2} + 3^{-c^2}.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh với bài toán tổng quát hơn. Đặt

$$P = k^{a^2} + k^{b^2} + k^{c^2}.$$

Lưu ý rằng với $k \geq 1$ thì hiển nhiên $P \geq 3k$ theo bất đẳng thức *Jensen*. Ta chỉ cần xét khi $k \leq 1$. Đây là một bất đẳng thức rất khó.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $t = (a+b)/2, u = (a-b)/2$, ta có $a = t+u, b = t-u$. Đặt $k' = 1/k \geq 1$. Xét hàm số

$$\begin{aligned} g(u) &= k^{(t-u)^2} + k^{(t+u)^2} + k^{c^2}, \\ g'(u) &= 2\ln k.(t+u)k^{(t+u)^2} - 2\ln k.(t-u)k^{(t-u)^2} \\ g'(u) &= 0 \Leftrightarrow (t+u)k^{(t+u)^2} = (t-u)k^{(t-u)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{t+u}{t-u} &= k^{-4tu} \Leftrightarrow \ln(t+u) - \ln(t-u) = -4tu\ln k. \end{aligned}$$

Xét hàm số

$$\begin{aligned} h(u) &= \ln(t+u) - \ln(t-u) + 4tu\ln k \\ h'(u) &= \frac{1}{t+u} + \frac{1}{t-u} + 4\ln k.t = \frac{2t}{t^2-u^2} + 4t\ln k. \end{aligned}$$

Vậy $h'(u) = 0 \Leftrightarrow 2(t^2-u^2)\ln k = -1 \Leftrightarrow 2ab\ln k = -1 \Leftrightarrow 2ab\ln k' = 1.$

+, Nếu $ab, bc, ca \leq \frac{1}{2\ln k'}$ thì

$$k^{a^2} + k^{b^2} + k^{c^2} \geq k^{9/4} + 2k^{\frac{1}{2\ln k'}} = k^{9/4} + 2e^{-1/2}.$$

+, Nếu không, ta phải có $ab \geq \frac{1}{2\ln k'}$ và từ chứng minh ở trên

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow g(u) \geq g(0) = 2k^{t^2} + k^{(3-2t)^2} = f(t).$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ trên miền $3/2 \geq t \geq 1$.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t\ln k.k^{t^2} - 4(3-2t)\ln k.k^{(3-2t)^2} \\ f'(t) &= 0 \Leftrightarrow k^{(3-2t)^2-t^2} = \frac{t}{3-3t} \\ \Leftrightarrow k'^{(3-3t)(3-t)} &= \frac{3-2t}{t} \Leftrightarrow (3-3t)(3-t)\ln k' = \ln(3-2t) - \ln t. \end{aligned}$$

Đặt $q(t) = (3-3t)(3-t)\ln k' - \ln(3-2t) - \ln t$. Ta có

$$q'(t) = (6t-12)\ln k' + \frac{2}{3-2t} + \frac{1}{t} = (6t-12)\ln k' + \frac{3}{t(3-2t)}.$$

Chú ý rằng với $3/2 \geq t \geq 1$ thì hàm số $t(3-2t)(2-t) = 2t^3 - 7t^2 + 6t$ là hàm đơn điệu giảm, nên phương trình $q'(t) = 0$ có không quá một nhiệm, suy ra $f'(t) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên $[1, 3/2]$.

Lập bảng biến thiên của các hàm $f(t), q(t)$ ta suy ra

$$f(t) \geq \min\left(f(1), f(\tfrac{3}{2})\right) = \min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}\right).$$

Từ các chứng minh trên suy ra

$$k^{a^2} + k^{b^2} + k^{c^2} \geq \min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}, 2e^{1-/2} + k^{9/4}\right).$$

Chú ý rằng nếu $k \leq 1/3$ thì

$$\min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}, 2e^{1-/2} + k^{9/4}\right) = 3k.$$

Còn nếu $k \geq 1/3$ thì

$$1 + 2k^{9/4} \leq 2e^{-1/2} + k^{9/4}$$

$$\Rightarrow \min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}, 2e^{1-/2} + k^{9/4}\right) = \min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}\right).$$

Hay nói cách khác

$$\min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}, 2e^{1-/2} + k^{9/4}\right) = \min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}\right). \quad \square$$

Ta đi đến kết luận chung cho bài toán là

Ví dụ 4.2.4. *Nếu a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 3 thì $\forall k \in R^+$ ta có*

$$k^{a^2} + k^{b^2} + k^{c^2} \geq \min\left(3k, 1 + 2k^{9/4}\right).$$

Và do đó hằng số tốt nhất để có bất đẳng thức

$$k^{a^2} + k^{b^2} + k^{c^2} \geq 3k$$

là nghiệm của phương trình đại số $3k = 1 + 2k^{9/4}$.

Trường hợp đặc biệt, ở bài toán ban đầu ta có bất đẳng thức

$$3^{-a^2} + 3^{-b^2} + 3^{-c^2} \geq 1.$$

Nhưng với $k = 1/2$ thì ta lại có một bất đẳng thức khá kì lạ

$$2^{-a^2} + 2^{-b^2} + 2^{-c^2} \geq 1 + 2^{-5/4}.$$

Cả 2 bài toán tổng quát vừa trình bày đều là các bài toán hay và khó, tuy rằng vấn đề khởi đầu lại vô cùng đơn giản. Chính những điều này làm nổi bật nét đẹp của bất đẳng thức sơ cấp, đó là sự phức tạp và phong phú ẩn chứa trong những vấn đề rất thô sơ và dễ hiểu.

Một phát triển tự nhiên, ta muốn đánh giá với bất đẳng thức *Schur* hoặc thêm một số bất đẳng thức khác. Ta có một bất đẳng thức dạng *Schur* sau đây

Ví dụ 4.2.5. *Giả sử $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$2^{4ab} + 2^{4bc} + 2^{4ca} - 2^{3abc}.$$

Lời Giải. Thực ra bài toán dựa trên ví dụ 4.2.1, với chú ý rằng

$$2^{4ab} + 2^{4bc} + 2^{4ca} = 16^{ab} + 16^{bc} + 16^{ca} \leq 16^{9/4} + 2$$

và bất đẳng thức hiển nhiên $2^{3abc} \geq 1$. □

Ví dụ 4.2.6. *Chứng minh hoặc phản biện bất đẳng thức sau*

$$k^{4ab} + k^{4bc} + k^{4ca} - k^{3abc} \leq k^9 + 1,$$

Trong đó a, b, c là các số không âm có tổng bằng 3.

Mặc dù xuất phát ý tưởng rất đơn giản, nhưng lớp các bất đẳng thức dạng này rất ít và chắc chắn sẽ còn nhiều điều bí ẩn, thú vị chờ các bạn tìm ra !!!

4.3 Bất đẳng thức Nesbitt và một số dạng mở rộng

Các bạn học sinh phổ thông chắc chắn không còn xa lạ với bất đẳng thức nổi tiếng này. Có lẽ cũng không cần nói gì thêm về phương pháp chứng minh vì nó quá đơn giản. Bây giờ chúng ta sẽ cùng xem xét những bài toán mở rộng và các dạng tổng quát của nó.

Problem 6 (Bất đẳng thức Nesbitt). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Một mở rộng đơn giản nhất cho bất đẳng thức trên, đó là

Ví dụ 4.3.1. *Nếu $k \geq 1$ và a, b, c là các số thực dương thì*

$$\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{a+c} + \frac{c^k}{a+b} \geq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{2}.$$

Hay có thể tổng quát hơn cho n số

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{s - a_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1}}{n-1},$$

Với $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ và k là hằng số lớn hơn 1.

Cả 2 bất đẳng thức trên đều rất dễ chứng minh nên sẽ không được trình bày ở đây. Ta sẽ khảo sát một mở rộng thứ hai, đó là các hạng tử được gắn với số mũ. Cụ thể hơn, ta có bài toán sau

Ví dụ 4.3.2. *Cho a, b, c là các số thực dương và k là một hằng số cho trước. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất cho biểu thức sau*

$$S = \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k.$$

Lời Giải. Với $k = 1$ ta có bất đẳng thức *Nesbitt*. Sẽ không mấy khó khăn khi ta chứng minh cho trường hợp $k \geq 1$. Còn nếu $k \leq 0$ thì bài toán cũng vô cùng đơn giản, ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức $AM - GM$

$$S \geq 3\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^{k/3} \geq \frac{3}{2^k},$$

Vì $k \leq 0$ và $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ theo bất đẳng thức $AM - GM$.

Trong trường hợp $k = \frac{1}{2}$ thì cũng là một bài toán khá quen thuộc

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$$

Bạn có thể xem thêm trong bài toán 2.21 phần II.

Trường hợp khó khăn duy nhất là chứng minh bài toán khi $0 < k < 1$. Ta sẽ chứng minh kết quả sau bằng phương pháp dồn biến

$$f(a,b,c) = \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left(2, \frac{3}{2^k}\right).$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Đặt $a = t + u, b = t - u$ với $t = \frac{a+b}{2} \geq u = \frac{a-b}{2} \geq 0$.

Đặt
$$g(u) = \left(\frac{u+t}{t-u+c}\right)^k + \left(\frac{t-u}{u+t+c}\right)^k + \left(\frac{c}{2t}\right)^k$$

$$g'(u) = k\left(\frac{u+t}{u-t+c}\right)^{k-1}\frac{2t+c}{(u-t+c)^2} + k\left(\frac{t-u}{u+t-c}\right)^{k-1}\frac{-2t-c}{(u+t+c)^2}.$$

Và do đó $g'(u) = 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&(u+t)^{k-1}(u+t+c)^{k+1} = (u-t)^{k-1}(t-u-c)^{k+1}\\
&\Leftrightarrow (k-1)\ln(t+u) + (k+1)\ln(u+t+c)\\
&\quad = (k-1)\ln(t-u) + (k+1)\ln(t-u+c).
\end{aligned}$$

Xét hàm số

$$
\begin{aligned}
h(u) &= (k-1)\ln(t+u) + (k+1)\ln(u+t+c) - \\
&\quad - (k-1)\ln(t-u) - (k+1)\ln(t-u+c),\\
h'(u) &= \frac{k-1}{t+u} + \frac{k+1}{t+u+c} + \frac{k-1}{t-u} + \frac{k+1}{t-u+c}\\
&= \frac{2t(k-1)}{t^2-u^2} + \frac{2(k+1)(t+c)}{(t+c)^2-u^2}.
\end{aligned}
$$

Vì $t \geq c$ nên $t(t+c)(t-c) \geq (t+2c)u^2 \Rightarrow 2(t+c)(t^2-u^2) \geq t\left((t+c)^2-u^2\right)$ Với $k > 1/3$ thì $k+1 > 2(1-k)$ nên ta có $h'(u) > 0$. Do đó $h(u) \geq h(0) = 0$. Suy ra $g(u) \geq 0$. Vậy g là một hàm đơn điệu với $u \geq 0$ nên

$$
g(u) \geq g(0) = \frac{2t^k}{(t+c)^k} + \frac{c^k}{(2t)^k}.
$$

Do $g(0)$ là một hàm thuần nhất với 2 biến t, c, ta có thể giả sử $t = 1$.

Xét hàm số sau với $c \leq 1$

$$
\begin{aligned}
p(c) &= \frac{2^{k+1}}{(1+c)^k} + c^k,\\
p'(c) &= \frac{-k.2^{k+1}}{(1+c)^{k+1}} + kc^{k-1}\\
p'(c) = 0 &\Leftrightarrow (1+c)^{k+1}c^{k-1} = 2^{k+1}\\
&\Leftrightarrow (k+1)\ln(c+1) + (k-1)\ln c = (k+1)\ln 2.
\end{aligned}
$$

Lại xét với hàm số

$$
q(c) = (k+1)\ln(c+1) + (k-1)\ln c - (k+1)\ln 2 \Rightarrow q(1) = 0.
$$

Vì $q'(c) = \dfrac{k+1}{c+1} + \dfrac{k-1}{c} = \dfrac{(k+1)c + (c+1)(k-1)}{c(c+1)}$ nên hàm số $q'(c)$ có không quá một nghiệm, suy ra $p'(c) = 0$ có không quá 1 nghiệm trong $(0, 1)$. Chú ý rằng $\lim_{c \to 0} p(c) = +\infty$ nên từ bảng biến thiên ta suy ra

$$
p(c) \geq \min\left(p(1), \lim_{c\to 0} p(c)\right) = \min\left(3, 2^{k+1}\right)
$$

$$
\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{a+c}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left(\frac{3}{2^k}, 2\right).
$$

Bài toán đã được chứng minh xong với $k > 1/3$. Xét với $k \leq 1/2$.

Chọn các số thực α, β, γ thoả mãn $\sqrt{\alpha} = a^k$, $\sqrt{\beta} = b^k$, $\sqrt{\gamma} = c^k$. Khi đó

$$\frac{a^k}{(b+c)^k} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^{2k} \leq b^{2k} + c^{2k} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c}\right)^{2k} + \left(\frac{c}{c+b}\right)^{2k} \geq 1.$$

Hiển nhiên đúng. Ta có 2 bất đẳng thức tương tự, rồi cộng lại

$$\frac{a^k}{(b+c)^k} + \frac{b^k}{(c+a)^k} + \frac{c^k}{(a+b)^k} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha+\gamma}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}} \geq 2.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn chỉnh

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{a+c}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left(\frac{3}{2^k}, 2\right).$$

Hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{2b}{a+c}\right)^k + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^k \geq 3.$$

là số

$$2^k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1. \quad \square$$

Trong chương I ta cũng đã chứng minh bất đẳng thức *Nesbitt* với 4 số và 6 số

Ví dụ 4.3.3. *Chứng minh với $a, b, c, d, e, f \geq 0$ thì*

(i) $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

(ii) $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

Ta đã có một kết quả đẹp về so sánh 2 bất đẳng thức dạng *Nesbitt*

Ví dụ 4.3.4. *Với mọi a, b, c không âm thì*

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Và bài toán tổng quát với n biến là

Ví dụ 4.3.5. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thì*

$$\frac{a_1^2}{a_2^2 + ... + a_n^2} + ... + \frac{a_n^2}{a_1^2 + ... + a_{n-1}^2} \geq \frac{a_1}{a_2 + ... + a_n} + ... + \frac{a_n}{a_1 + ... + a_{n-1}}.$$

Lời Giải. Có nhiều cách giải bài toán trên, sau đây là một chứng minh trực tiếp sử dụng đạo hàm và tính chất đơn điệu. Đặt

$$f(t) = \sum_{i=1,n} \frac{a_1^t}{a_2^t + a_3^t + \dots + a_n^t},$$
$$S = a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t.$$

Ta chứng minh f(t) đơn điệu tăng với $t \geq 0$.

$$f'(t) = \sum_1^n \frac{a_1^t \ln a_1 (a_2^t + a_3^t + \dots + a_n^t) - a_1^t (a_2^t \ln a_2 + a_3^t \ln a_3 + \dots + a_n^t \ln a_n)}{(S - a_1^t)^2}$$
$$f'(t) = \sum_1^n \frac{a_1^t a_2^t (\ln a_1 - \ln a_2) + a_1^t a_3^t (\ln a_1 - \ln a_3) + \dots + a_1^t a_n^t (\ln a_1 - \ln a_n)}{(S - a_1^t)^2}.$$

Vậy ta có thể viết $f'(t)$ dưới dạng

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{a_i^t a_j^t (\ln a_i - \ln a_j)}{(S - a_i^t)^2} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i^t a_j^t (\ln a_i - \ln a_j) \left(\frac{1}{(S - a_i^t)^2} - \frac{1}{(S - a_j^t)^2} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i^t a_j^t (\ln a_i - \ln a_j)(a_i^t - a_j^t) \frac{2S - a_i^t - a_j^t}{(S - a_i^t)^2 (S - a_j)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi mỗi số a_i hoặc bằng nhau hoặc bằng 0. □.

Ta muốn tìm một ước lượng tương tự với bất đẳng thức dạng *Nesbitt* của các biểu thức dạng

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}.$$

Đi đến bài toán sau

Ví dụ 4.3.6. *Chứng minh các bất đẳng thức sau với a, b, c, d không âm*

$$(i) \qquad 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} < 3.$$

$$(ii) \qquad \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a}\right)^2 \geq 1.$$

Lời Giải. Câu (i) thì rất đơn giản còn cậu (ii) thực chất là bài toán quen thuộc

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{(d+1)^2}\geq 1,$$

Với các số thực a,b,c,d không âm và $abcd=1$. ❑

Trong phần cuối của bài viết, bạn đọc hãy tự giải bài toán bài toán sau đây.

Ví dụ 4.3.7. *Tìm ước lượng cho biểu thức sau*

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2,$$

Trong đó a,b,c,d là các số thực không âm.

4.4 Suy luận và phát triển

Nội dung sắp trình bày trong bài viết này đặc trưng cho mạch phát triển chung của cuốn sách, đó là sự tự đặt vấn đề, tìm tòi và tự giải hoặc xây dựng những bất đẳng thức từ một dạng bất đẳng thức tương tự. Việc không thể giải quyết một vấn đề nào đó lại làm nảy sinh được rất nhiều bài toán hay. Mở đầu, chúng ta hãy bắt đầu với bài toán tưởng chừng rất đơn giản sau đây

Problem 7. *Giả sử a,b,c là các số thực không âm thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\geq 2\sqrt{2}.$$

Bạn hãy tự mình thử sức với bài toán trên. Rõ ràng, hình thức của nó quá đơn giản và không có gì mới mẻ, nhưng trên thực tế, bất đẳng thức lại là một bất đẳng thức quá khó và hiện nay, một lời giải được chấp nhận về mặt toán học cho nó lại quá phức tạp và dài dòng nên tác giả không muốn ghi ra ở đây. Khi đứng trước một vấn đề đẹp đẽ thế này, nhất định chúng ta sẽ không dừng lại và bỏ qua. Sẽ còn rất nhiều điều thú vị xung quanh nó mà các bạn sẽ được biết ngay dưới đây.

Trước hết ta xét một trường hợp biến đổi đơn giản nhất, bỏ đi các căn thức. Ta có bất đẳng thức

Ví dụ 4.4.1. *Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi a,b,c không âm*

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Lời Giải. Chứng minh bất đẳng thức trên không khó lắm, phương pháp gần giống với S.O.S. Ta chuyển về dạng tương đương như sau

$$\frac{a(b+c-a)}{a^2+bc}+\frac{b(a+c-b)}{b^2+ac}+\frac{c(a+b-c)}{c^2+ab}\geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Ta chỉ cần xét khi $a\geq b+c$. Khi đó

$$\frac{b}{b^2+ac}-\frac{a}{a^2+bc}=\frac{(a-b)(ab-ca-cb)}{(b^2+ac)(c^2+ab)}\geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. □

Khi thay đổi hệ số dưới mẫu, ta có một bất đẳng thức khác như sau

Ví dụ 4.4.2. *Chứng minh rằng với mọi a,b,c không âm ta có*

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq\frac{2}{ab+bc+ca}.$$

Lời Giải. Các bạn hãy tự chứng minh bất đẳng thức này. □

Thực ra bài toán trên chỉ là hệ quả của một bất đẳng thức mạnh hơn như sau

Ví dụ 4.4.3. *Với mọi số thực không âm a,b,c ta luôn có*

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lời Giải. Lời giải cho bài toán này sử dụng một khai triển rất đặc biệt

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}-\frac{2}{ab+bc+ca}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$
$$=\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(ab+bc+ca+a^2+b^2+c^2)}{(a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)}.$$

Đẳng thức xảy ra ở bất đẳng thức trên khi và chỉ khi trong 3 số a,b,c có ít nhất 2 số bằng nhau. Đây là một trường hợp rất đặc biệt. □

Ngoài ra, cách phân tích trên dựa vào nhận xét sau : Nếu cho 2 biến bất khi trong 3 biến a,b,c bằng nhau thì ta luôn có $VT=VP$. Do đó hiệu giữa chúng phải có thừa số $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$. Thừa số còn lại sẽ được xác định sau.

Một cách tự nhiên, ta mong muốn một ước lượng tương tự với bất đẳng thức dạng tổng quát. Ta có bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 4.4.4. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c và $p \geq 3 + \sqrt{7}$ là một hằng số dương tuỳ ý, ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{pa^2+bc} + \frac{1}{pb^2+ac} + \frac{1}{pc^2+ab} \geq \frac{9}{(p+1)(ab+bc+ca)}.$$

LỜI GIẢI. Lời giải quen thuộc cho bất đẳng thức trên là sử dụng phương pháp S.O.S. Giả sử rằng $a \geq b \geq c$, ta có

$$\frac{(p+1)(ab+bc+ca)}{pa^2+bc} - 3 = \frac{3pa(b+c-2a) + (p-2)(2bc - a(b+c))}{2(pa^2+bc)}$$
$$= \frac{(3pa+(p-2)c)(b-a) + (3pa+(p-2)b)(c-a))}{2(pa^2+bc)}.$$

Vậy ta phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sum_{a,b,c}(b-a)\left(\frac{3pa+(p-2)c}{pa^2+bc} - \frac{3pb+(p-2)c}{pb^2+ac}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{a,b,c}(a-b)^2 \frac{2p^2ab + p(p-5)c(a+b) - (p-2)c^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ac)} \geq 0.$$

Do $p \geq 3 + \sqrt{7}$ nên $p(p-5) \geq p-2$, $2p^2 \geq p(p-2)$ do đó

$$2p^2ab + p(p-5)c(a+b) - (p-2)c^2 \geq (p-2)c(a+b-c).$$

Phần còn lại ta phải chứng minh

$$\frac{pab(a-b)^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ac)} + \sum_{a,b,c} \frac{c(a+b-c)(a-b)^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ac)} \geq 0.$$

Chú ý rằng

$$\sum_{a,b,c} \frac{c(a+b-c)(a-b)^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ac)} \geq \frac{a(b-a)(b-c)^2}{(pb^2+ac)(pc^2+ab)} + \frac{b(a-b)(a-c)^2}{(pa^2+bc)(pc^2+ab)}$$
$$\geq \frac{a(b-a)(b-c)^2}{(pb^2+ac)(pc^2+ab)} + \frac{b(a-b)(b-c)^2a^2}{(pa^2+bc)(pc^2+ab)b^2}$$
$$\geq -\frac{a(a-b)^2(b-c)^2(pab-ca-cb)}{b(pa^2+bc)(pb^2+ac)(pc^2+ab)} \geq \frac{-ab(a-b)^2(pab)}{(pa^2+bc)(pb^2+ac)(pc^2+ab)}$$
$$\geq \frac{-pab(a-b)^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ac)}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh xong. Lưu ý rằng với trường hợp $p = 3 + \sqrt{7}$ có thêm một trường hợp xảy ra đẳng thức là $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. □

Bây giờ ta sẽ nhìn nhận bất đẳng thức theo một cách khó hơn, tức là vẫn giữ nguyên dấu căn thức. Có một kết quả rất bất ngờ là

Ví dụ 4.4.5. *Chứng minh rằng với mọi số a, b, c không âm bất đẳng thức sau đây luôn đúng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \geq \frac{6}{a+b+c}.$$

Lời Giải. Thực ra bài toán này lại có một cách chứng minh rất đơn giản và khá bất ngờ. Ta trực tiếp bất đẳng thức $AM-GM$ với các số hạng ở vế trái

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \geq \frac{3}{\sqrt[6]{(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)}}.$$

Phần còn lại ta chỉ phải chứng minh

$$(a+b+c)^6 \geq 64(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab).$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sys} a^6 + 6\sum_{sys} a^5(b+c) + 15\sum_{sys} a^4(b^2+c^2) + 60abc\sum_{sys} a^2(b+c)$$
$$\geq 38a^2b^2c^2 + 34abc\sum_{sys} a^3 + 44\sum_{sys} a^3b^3.$$

Sử dụng đẳng thức sau

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$
$$= \sum_{sys} a^4(b^2+c^2) + 2abc\sum_{sys} ab(a+b) - 2\sum_{sys} a^3b^3 - 2abc\sum_{sys} a^3 - 6a^2b^2c^2,$$

do đó

$$15\sum_{sys} a^4(b^2+c^2) + 30abc\sum_{sys} ab(a+b) \geq 30\sum_{sys} a^3b^3 + 30abc\sum_{sys} a^3 + 90a^2b^2c^2.$$

Theo bất đẳng thức *Schur* ta suy ra

$$\sum_{sys} a^6 + abc\sum_{sys} a^3 \geq \sum_{sys} a^5(b+c).$$

Và như vậy, bài toán được sẽ suy ra từ kết quả cuối cùng sau

$$7\sum_{sys} a^5(b+c) + 3abc\sum_{sys} ab(a+b) \geq 6abc\sum_{sys} a^3 + 14\sum_{sys} a^3b^3.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sys} (a-b)^2 ab(a+b)(7a+7b-3c) \geq 0.$$

Nhưng điều này hiển nhiên đúng theo định lí S.O.S. Đẳng thức xảy ra khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. ❑

Nếu áp dụng một bất đẳng thức $AM - GM$ theo một cách khác cho cho bất đẳng thức trên

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \geq \frac{9}{\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab}}.$$

Và do đó ta sẽ có một bất đẳng thức mới

Ví dụ 4.4.6. *Chứng minh với mọi số thực không âm a, b, c ta có*

$$3(a+b+c) \geq 2\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ac}+\sqrt{c^2+ab}\right).$$

LỜI GIẢI. Chú ý rằng ví dụ 4.4.5 chỉ là hệ quả của ví dụ 4.4.6 và bản thân bài toán 4.4.6 cũng là một bài toán rất khó. Các bạn hãy xem lại bài 2.16 chương II. ☐

Một kết quả tương tự của ví dụ 4.4.5 là

Ví dụ 4.4.7. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có*

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ac}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}.$$

Đây là một bài toán khó. Bạn đọc hãy xem thêm trong bài 2.93 chương II.

Một tổng quát theo hướng khác của ví dụ 4.4.2 là

Ví dụ 4.4.8. *Tìm hằng số dương p tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c không âm sao cho $a+b+c=3$*

$$\frac{1}{pa^2+bc}+\frac{1}{pb^2+ac}+\frac{1}{pc^2+ab} \geq \frac{3}{p+1}.$$

Chứng minh bài toán bằng định lí S.O.S.

4.5 Bất đẳng thức thuận nghịch

4.5.1 Phương pháp tích phân đối với bất đẳng thức

Trong nhiều bài toán, các tính chất của tích phân và nguyên hàm giúp chúng ta có được những chứng minh rất ngắn gọn và đẹp mắt. Vì tích phân, vi phân là đối tượng nghiên cứu chính của toán học cao cấp và giải tích hiện đại, tác giả cũng không đi quá sâu vào các định lí mang tính lí thuyết. Trong phần này, ta chỉ sử dụng tính chất cơ bản nhất, đơn giản nhất của tích phân đối với bất đẳng thức là

1. Nếu $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Nếu $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Trong phần này, tác giả chỉ đưa ra 2 bài toán quan trọng và tiêu biểu nhất về ứng dụng của tích phân đối với bất đẳng thức phổ thông.

Ví dụ 4.5.1 (Romanian MO). *Chứng minh rằng với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ tuỳ ý ta luôn có bất đẳng thức*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0.$$

LỜI GIẢI. Với bài toán này, các phương pháp thông thường khó mang lại hiệu quả vì biểu thức của nó tương đối phức tạp. Việc có hệ số $i + j$ ở dưới mẫu giúp chúng ta định hướng được sử dụng phương pháp tích phân. Xét hàm số sau đây

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j x^{i+j-1} = \frac{1}{x}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i x^i\right)^2 \geq 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$. Nhưng ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j}$$

Nên bất đẳng thức được chứng minh xong. ❑

Ví dụ sau đây khó hơn một chút về các chi tiết nhỏ trong chứng minh, nhưng phương pháp thì tương tự như trên

Ví dụ 4.5.2. *Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ tuỳ ý*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{1+|i-j|} \geq 0.$$

Nhưng chúng ta sẽ không bàn quá kĩ về kĩ thuật dạng này, mà sẽ chuyển tới một ứng dụng khác tinh tế và đặc biệt hơn, đó là phương pháp tích phân đối với các bất đẳng thức thuận nghịch.

4.5.2 Bất đẳng thức thuận nghịch

Chúng ta hãy trở lại với bất đẳng thức sau

Problem 8 (Gabriel Dospinesscu). *Chứng minh với mọi a, b, c dương ta có*

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{3}{3a+b}+\frac{3}{3b+c}+\frac{3}{3c+a}.$$

Lời Giải. Đây là một bài toán rất khó, hiện nay chưa có một lời giải nào thuần tuý đại số cho bất đẳng thức này. Lời giải bằng tích phân là một chứng minh rất đẹp.

Xét bất đẳng thức quen thuộc sau đây

$$(x^2+y^2+z^2)^2\ge 3(x^3y+y^3z+z^3x).$$

Dặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, thay vào bất đẳng thức trên

$$\left(t^{2a}+t^{2b}+t^{2c}\right)^2\ge 3\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right).$$

Lấy tích phân cả 2 vế ta được

$$\int_0^1\frac{1}{t}\left(t^{2a}+t^{2b}+t^{2c}\right)^2dt\ge 3\int_0^1\frac{1}{t}\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right)dt.$$

Và từ đó ta suy ra

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{3}{3a+b}+\frac{3}{3b+c}+\frac{3}{3c+a}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ☐

Việc đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$ rồi lấy nguyên hàm đối với t không phải là một công việc đơn giản và dễ dàng nghĩ được ra. Thậm chí đây còn là một kĩ thuật rất mới và khó. Tuy nhiên, chúng ta sẽ không tìm hiểu tại sao có thể làm như vậy, mà sẽ nói nhiều đến việc học được gì từ các chứng minh đó. Có một ví dụ tương tự là

Ví dụ 4.5.3. *Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực dương a, b, c*

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}+\frac{1}{2b+a}+\frac{1}{2c+b}+\frac{1}{2a+c}.$$

Lời Giải. Xuất phát từ bất đẳng thức *Schur* ta có

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x).$$

Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ ta được

$$\frac{1}{t}\left(t^{3a} + t^{3b} + t^{3c} + 3t^{a+b+c}\right) \geq \frac{1}{t}\left(t^{a+b}(t^a + t^b) + t^{b+c}(t^b + t^c) + t^{c+a}(t^c + t^a)\right).$$

Lấy tích phân 2 vế trong đoạn $[0, 1]$ ta có điều phải chứng minh. ❑

Sau đây là một ví dụ khó hơn

Ví dụ 4.5.4. *Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$ thì*

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{\sqrt{2}}{3a+b} + \frac{\sqrt{2}}{3b+c} + \frac{\sqrt{2}}{3c+a} \geq \frac{1+\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{1+\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{1+\sqrt{2}}{c+3a}.$$

LỜI GIẢI. Xuất phát từ bất đẳng thức sau đây

$$x^4 + y^4 + z^4 + \sqrt{2}(x^3y + y^3z + z^3x) \geq (1 + \sqrt{2})(xy^3 + yz^3 + zx^3).$$

Do đó với $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ thì

$$t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + \sqrt{2}\left(t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}\right)$$
$$\geq (1 + \sqrt{2})\left(t^{a+3b-1} + t^{b+3c-1} + t^{c+3a-1}\right).$$

Lấy tích phân 2 vế trong $[0, 1]$ ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ❑

Ví dụ 4.5.5. *Chứng minh $\forall a, b, c \geq 0$ ta có*

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{8}{3(a+b+c)} \geq \frac{17}{9}\left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a}\right).$$

LỜI GIẢI. Đặt $k = 8/9$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{3k}{a+b+c} \geq (k+1)\left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a}\right).$$

Xét bất đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz \geq (k+1)\left(x^2y + y^2z + z^2x\right) \quad (*)$$

Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ rồi chuyển vế bất đẳng thức tương đương

$$t^{3a-1} + t^{3b-1} + t^{3c-1} + 3kt^{a+b+c-1} \geq (k+1)\left(t^{2a+b-1} + t^{2b+c-1} + t^{c+a-1}\right).$$

Lấy tích phân 2 vế trong $[0,1]$ suy ra

$$\int_0^1 \left(t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+3kt^{a+b+c-1}\right)dt \geq (k+1)\int_0^1 \left(t^{2a+b-1}+t^{2b+c-1}+t^{c+a-1}\right)dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{8}{3(a+b+c)} \geq \frac{17}{9}\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right).$$

Đây là *đpcm*. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Chú ý rằng hằng số k tốt nhất trong bất đẳng thức $(*)$ là

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}-1 \approx 0,88988... \geq \frac{8}{9} = 0,8888...$$

Qua các ví dụ trên, ta nhận thấy đối với mỗi bất đẳng thức thông thường dạng đa thức hoặc phân thức luôn có một bất đẳng thức tương ứng bằng kĩ thuật tích phân lấy qua luỹ thừa. Các bất đẳng thức tạo thành những cặp thuận nghịch với nhau và nếu có một bất đẳng thức thuận thì sẽ có một bất đẳng thức nghịch đúng (nhưng không có điều ngược lại). Chúng ta thường nghiên cứu nhiều hơn các bất đẳng thức ở dạng *thuận*, và thông thường thì các bất đẳng thức dạng *nghịch* lại khó hơn hẳn. Kĩ thuật này rất có ý nghĩa với việc sáng tạo bất đẳng thức, vì mỗi bất đẳng thức thuận sẽ tạo ra được một bất đẳng thức nghịch. Điều quan trọng là phải biết nhìn nhận được bất đẳng thức nghịch và đưa nó về bất đẳng thức thuận dễ chứng minh hơn.

Có thể tổng quát điều này thông qua bổ đề sau đây

Bổ đề 5. *Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thoả mãn*

$$\sum_{(a_1,a_2,...,a_n)\in S} c_{a_1,a_2,...,a_n} x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} \geq \sum_{(b_1,b_2,...,b_n)\in T} d_{a_1,a_2,...,a_n} x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n},$$

Thì ta có

$$\sum_{(a_1,a_2,...,a_n)\in S} \frac{c_{a_1,a_2,...,a_n}}{a_1+a_2+...+a_n} \geq \sum_{(b_1,b_2,...,b_n)\in T} \frac{d_{b_1,b_2,...,b_n}}{b_1+b_2+...+b_n}.$$

Nhưng bổ đề này chỉ mang tính hình thức, vì cách phát biểu quá phức tạp để nhận biết. Điều quan trọng chỉ cần chúng ta hiểu được tư tưởng phép chứng minh.

Sau đây là một số ví dụ sử dụng phương pháp này.

Ví dụ 4.5.6. *Chứng minh với mọi $a,b,c \geq 0$ thì*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{4}{5a+b}+\frac{4}{5b+c}+\frac{4}{5c+a}+\frac{4}{5b+a}+\frac{4}{5c+b}+\frac{4}{5a+c}.$$

LỜI GIẢI. Xây dựng từ bất đẳng thức thuận sau đây

$$a^6+b^6+c^6+a^2b^2c^2 \geq \frac{2}{3}\left(a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)\right).$$

Ví dụ 4.5.7. *Chứng minh với các số dương a,b,c,d tuỳ ý thì*

$$\frac{3}{4}\left(\sum_{sym}\frac{1}{4a}+\sum_{sym}\frac{2}{a+b}\right) \geq \sum_{cyc}\frac{1}{3a+b}.$$

LỜI GIẢI. Xây dựng từ bất đẳng thức thuận sau đây

$$\frac{3}{4}\left(\sum_{sym}a^2\right)^2 \geq \left(\sum_{sym}a^3(b+c+d)\right)^2.$$

Ví dụ 4.5.8. *Chứng minh với mọi a,b,c,d dương và $a+b+c+d=4$ thì*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+2 \geq \frac{8}{(a+b)(c+d)}+\frac{8}{(b+c)(d+a)}+\frac{8}{(c+a)(b+d)}.$$

LỜI GIẢI. Xây dựng từ bất đẳng thức *Tukervici*

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2.$$

Ví dụ 4.5.9. *Chứng minh với các số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ thì*

$$\frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{(n-1)a_i+a_j}.$$

Ví dụ 4.5.10. *Chứng minh với các số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ ta có*

$$\frac{n(n-1)}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{S-a_i+a_j},$$

Trong đó $S=a_1+a_2+...+a_n$.

4.6 Đi tìm lời giải sơ cấp

4.6.1 Trở lại vấn đề cổ điển

Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét một bất đẳng thức dường như *khá cũ* sau đây

Ví dụ 4.6.1. *Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, chứng minh*

$$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \leq 3.$$

LỜI GIẢI. Những bài toán 3 biến dạng đơn giản như trên đã rất quen thuộc với chúng ta, và đã có rất nhiều cách khác nhau có thể ứng dụng để giải các bài toán như vậy. Tuy nhiên, bạn hãy xem lại và thử một lần suy nghĩ thật nghiêm túc về nó, bạn sẽ thấy đây là một bài toán rất khó. Lời giải sau đây được trình bày dựa vào những kiến thức cơ bản của phương pháp nhân tử *Lagrange* và hi vọng bạn đọc sẽ tìm ra được một phương pháp sơ cấp hơn để chứng minh trọn vẹn bài toán này trong thời gian tới. Lời giải sau đây chỉ có ý nghĩa là khẳng định bất đẳng thức trên đúng về mặt toán học.

Chú ý rằng bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu $abc = 0$. Giả sử rằng $a, b, c > 0$, xét hàm số sau

$$f(x, y, z) = x^ky + y^kz + z^kx - \varphi(x + y + z - 3),$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = kx^{k-1}y + z^k - \varphi\ , \ \frac{\delta f}{\delta y} = ky^{k-1}z + x^k - \varphi\ , \ \frac{\delta f}{\delta z} = kz^{k-1}x + y^k - \varphi.$$

Rõ ràng nếu $x \geq y \geq z$ và $k = 3/2$ thì $ky^{k-1}z + x^k \geq kz^{k-1}x + y^k$, và đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ (bạn đọc hãy tự kiểm tra tính chất này), từ đó giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y, z)$ với $x \geq y \geq z, x + y + z = 3$ và $k = 3/2$ chỉ có thể xảy ra trong trường hợp $x = y = z = 1$. Nói cách khác

$$f(x, y, z) \leq 3\ \forall x \geq y \geq z \geq 0, x + y + z = 3, k = 3/2.$$

Nhưng mặt khác cũng dễ dàng chứng minh được rằng nếu $x \geq y \geq z$ thì

$$x^ky + y^kz + z^kx \geq xy^k + yz^k + zx^k.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$, trong đó x, y, z tương ứng với a^2, b^2, c^2 trong bài toán ban đầu. ❑

Từ kết quả bài toán trên ta suy ra

Ví dụ 4.6.2. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$ ta có*

$$a^kb + b^kc + c^ka \leq 3,$$

Trong đó k là số thực dương tuỳ ý, $k \leq 3/2$.

LỜI GIẢI. Thực ra bài toán chỉ là hệ quả từ nhận xét sau

Bổ đề. *Nếu $a^kb + b^kc + c^ka \leq 3$ với $k \geq 0$ nào đó và a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện trên thì với mọi số dương $l \leq k$ ta có bất đẳng thức*

$$a^lb + b^lc + c^la \leq 3.$$

Chứng Minh. Sử dụng bất đẳng thức *Holder* ta có

$$(a^kb + b^kc + c^ka)^m(b + c + a)^n \geq (a^{\frac{km}{m+n}}b + b^{\frac{km}{m+n}}c + c^{\frac{km}{m+n}}a)^{m+n}.$$

Do đó nếu l là một số hữu tỉ tuỳ ý, $l \leq k$ thì tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho $l = \frac{km}{m+n}$, từ bất đẳng thức ở trên suy ra

$$a^kb + b^kc + c^ka \leq 3.$$

Nói cách khác, ta đã chứng minh bất đẳng thức đúng với mọi l hữu tỉ nhỏ hơn k. Nhưng vì hàm số $a^lb + b^lc + c^la$ là hàm liên tục với $l \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng với mọi $0 \geq l < k$ (vì tập các số hữu tỉ trù mật trong R). Khẳng định được chứng minh xong. ❑

Xét bất đẳng thức tổng quát hơn sau đây

Ví dụ 4.6.3. *Tìm hằng số dương k tốt nhất để bất đẳng thức*

$$a^kb + b^kc + c^ka \leq 3,$$

Đúng với mọi $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$.

Chỉ sử dụng kiến thức toán phổ thông thì đây là một bài toán rất khó. Xin nêu ra đáp số để các bạn suy nghĩ thêm

$$a^kb + b^kc + c^ka \leq \max\left(3, \frac{3^{k+1}k^k}{(k+1)^{k+1}}\right).$$

Và nếu ta xét bài toán tổng quát hơn nữa, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(r, s) = a^rb^s + b^rc^s + c^ra^s.$$

Thì dường như là một việc không tưởng, vì ngay cả trong các trường hợp cụ thể bài toán cũng đã rất phức tạp. Chẳng hạn đơn giản với $r = 3/2, s = 1/2$ là một bất đẳng thức trong chương II

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a).$$

Nếu $s = 1$ thì chưa có lời giải hoàn thiện bằng phương pháp toán phổ thông, chỉ riêng trường hợp $r = s$ bài toán mới được giải quyết xong. Đây là một vấn đề mở rất khó và tác giả hi vọng nhận được sự trao đổi thêm từ bạn đọc.

4.6.2 Thêm một bài toán 4 biến

Các vấn đề của bất đẳng thức 4 biến đã được định lí *S.M.V* giải quyết một cách khá trọn vẹn, nhưng đôi khi vẫn có những bài toán không thuộc vào phạm vi ấy.

Hãy bắt đầu với bài toán sau đây

Ví dụ 4.6.4. *Cho các số dương a, b, c, d thoả mãn điều kiện $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$a^3+b^3+c^3+d^3.$$

Lời Giải. Đối với bài toán trên, định lí *S.M.V* chỉ chứng minh được rằng giá trị lớn nhất chỉ đạt được khi 3 biến nhỏ nhất bằng nhau, tức là đã giúp đưa bài toán về dạng đơn giản hơn rất nhiều là : *Nếu $3a^2+d^2 = 3a+d$ và $a, d \geq 0$, hãy tìm giá trị lớn nhất của $3a^3+d^3$*. Tuy nhiên bước cuối cùng *đơn giản* này xem ra rất khó để chứng minh hoàn toàn bằng kiến thức toán sơ cấp. Với định lí *Lagrange* ta có thể kiểm tra được rằng giá trị lớn nhất của biểu thức đạt được khi

$$a = b = c = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, d = \frac{1+\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

Vì thế một lời giải sơ cấp vẫn chờ các bạn tìm kiếm. Thêm nữa, ta có bài toán

Ví dụ 4.6.5. *Cho các số dương a, b, c, d thoả mãn điều kiện $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$, chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+d^3+a+b+c+d \leq 8.$$

Rất may mắn, bài toán này hoàn toàn có thể chứng minh được bằng phương pháp S.O.S ! Một câu hỏi tiếp tục được đặt ra là

Ví dụ 4.6.6. *Cho các số dương a, b, c, d thoả mãn điều kiện $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$, tìm giá trị tốt nhất của k để bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$a^3+b^3+c^3+d^3+k(a+b+c+d) \leq 4(k+1).$$

Đây cũng là một vấn đề chờ các bạn khám phá (với phương pháp toán phổ thông).

4.7 Lý thuyết các bộ trội và bất đẳng thức Karamata

4.7.1 Các bộ trội và một số tính chất liên quan

Tính chất bất đẳng thức của các bộ trội và hàm lồi là một phần khá quan trọng và sâu của bất đẳng thức, có nhiều ứng dụng rất mạnh. Phần chính được đề cập đến là bất đẳng thức *Karamata*.

Định nghĩa 5. *Cho 2 bộ số $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ và $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Ta nói bộ a trội hơn bộ b, kí hiệu $a \gg b$ nếu chúng thoả mãn các điều kiện sau đây*

$$\begin{aligned}
&a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \\
&b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \\
&a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k \ \forall k = 1, 2, ...n - 1 \\
&a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n
\end{aligned}$$

Với dãy $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ bất kì ta kí hiệu (a^*) là dãy gồm các phần tử của (a) sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Với 2 bộ số $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ ta có định nghĩa (a^*) trội hơn (b^*) tương tự.

Sau đây là một số tính chất cơ bản liên quan đến các bộ trội

Bổ đề 1. *Với bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ bất kì ta có*

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \gg (a, a, ..., a)\ ,\ a = (a_1 + a_2 + ... + a_n)/n.$$

Bổ đề 2. *Giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ và $\pi = (\pi_1, \pi_2, ...\pi_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1, 2, ..., n)$, khi đó .*

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \gg (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, ..., a_{\pi(n)}).$$

Bổ đề 3. *Nếu 2 bộ số $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b) = (b_2, b_2, ..., b_n)$ thoả mãn*

$$\begin{aligned}
&b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \\
&a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k \ \forall k = 1, 2, ..., n - 1 \\
&a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n
\end{aligned}$$

Thì bộ (a^*) trội hơn bộ (b).

Các tính chất trên khá hiển nhiên và có thể chứng minh dễ dàng theo định nghĩa của bộ trội.

Bổ đề 4. *Nếu $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$ sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$ và $\dfrac{x_i}{x_j} \geq \dfrac{y_i}{y_j}$ $\forall i < j$ thì*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \gg (y_1, y_2, ..., y_n).$$

Chứng Minh. Ta sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp.

Do $x_i/x_1 \leq y_i/y_1$ nên khi lấy $i = \overline{1, n}$ rồi cộng tất cả các bất đẳng thức lại ta sẽ có

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{x_1} \leq \frac{y_1 + y_2 + ... + y_n}{y_1} \Rightarrow x_1 \geq y_1.$$

Lại xét với bộ mới $(x_1 + x_2, x_3, ..., x_n)$ và $(y_1 + y_2, y_3, ..., y_n)$. Theo chứng minh quy nạp thì

$$(x_1 + x_2, x_3, ..., x_n) \gg (y_1 + y_2, y_3, ..., y_n).$$

Kết hợp với chứng minh $x_1 \geq y_1$ ở trên ta có *đpcm.* ❑

Sau đây là định lí quan trọng nhất của lí thuyết này

Định lý 4.3 (Symmetric Majorization Criterion). *Cho* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *là 2 dãy số thực. Khi đó ta có thể sắp xếp lại 2 dãy đó thành 2 dãy tương ứng* $(a'), (b')$ *và* $(a') \gg (b')$ *khi và chỉ khi với mọi số thực* x *ta luôn có*

$$|a_1 - x| + |a_2 - x| + ... + |a_n - x| \geq |b_1 - x| + |b_2 - x| + ... + |b_n - x|.$$

CHỨNG MINH. Ta phải chứng minh 2 mệnh đề

1. Điều kiện cần :

   Giả sử $(a^*) \gg (b^*)$, ta sẽ chứng minh với mọi x thì

   $$|a_1 - x| + |a_2 - x| + ... + |a_n - x| \geq |b_1 - x| + |b_2 - x| + ... + |b_n - x| \quad (1)$$

   Thật vậy, khẳng định trên có thể suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức *Karamata* với hàm lồi $f(x) = |x - a|$, tuy nhiên ta sẽ chứng minh trực tiếp khẳng định trên bằng kiến thức thuần tuý đại số.

   Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$. Theo giả thiết ta có $(a) \gg (b)$.

   Hiển nhiên (1) sẽ đúng khi $x \geq b_1$ hoặc $x \leq b_n$, vì trong 2 trường hợp này ta đều có

   $$\begin{aligned} VP &= |b_1 + b_2 + ... + b_n - nx| \\ &= |a_1 + a_2 + ... + a_n - nx| \leq VT. \end{aligned}$$

   Xét trường hợp tồn tại số nguyên k để $b_k \geq x \geq b_{k+1}$, khi đó ta có thể bỏ đi các dấu giá trị tuyệt đối của biểu thức vế phải

   $$|b_1 - x| + |b_2 - x| + ... + |b_k - x| = b_1 + b_2 + ... + b_k - kx,$$
   $$|b_{k+1} - x| + |b_{k+2} - x| + ... + |b_n - x| = (n - k)x - b_{k+1} - b_{k+2} - ... - b_n.$$

   Xét với dãy (a) thì

   $$\begin{aligned} & |a_1 - x| \geq a_1 - x \\ & |a_2 - x| \geq a_2 - x \\ & ... \\ & |a_k - x| \geq a_k - x \\ \Rightarrow\ & |a_1 - x| + |a_2 - x| + ... + |a_k - x| \geq a_1 + a_2 + ... + a_k - kx. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự

$$|a_{k+1}-x|+|a_{k+2}-x|+\ldots+|a_n-x|\geq (n-k)x-(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n).$$

Từ các bất đẳng thức trên suy ra

$$\begin{aligned} VT &\geq a_1+a_2+\ldots+a_k-a_{k+1}-a_{k+2}\ldots-a_n+(n-2k)x\\ &\geq 2(a_1+a_2+\ldots+a_k)-(a_1+a_2\ldots+a_n)+(n-2k)x\\ &\geq 2(b_1+b_2+\ldots+b_k)-(b_1+b_2+\ldots+b_n)+(n-2k)x\\ &\geq VP. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

2. Điều kiện đủ :

Giả sử bất đẳng thức

$$|a_1-x|+|a_2-x|+\ldots+|a_n-x|\geq |b_1-x|+|b_2-x|+\ldots+|b_n-x|$$

thoả mãn với mọi số thực x, ta phải chứng minh $(a^*)\gg(b^*)$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$ và $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$. Vì bất đẳng thức đúng với mọi x nên khi cho $x\geq \max_{i=\overline{1,n}}\{a_i,b_i\}$ ta được

$$\begin{aligned} nx-(a_1+a_2+\ldots+a_n)&\geq nx-(b_1+b_2+\ldots+b_n)\\ \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n&\leq b_1+b_2+\ldots+b_n. \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự cho $x\leq \min_{i=\overline{1,n}}\{a_i,b_i\}$ ta được

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\ldots+a_n-nx&\leq b_1+b_2+\ldots+b_n-nx\\ \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n&\geq b_1+b_2+\ldots+b_n. \end{aligned}$$

Từ 2 bất đẳng thức trên rút ra được $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Lấy $x\in[a_{k+1},a_k]$, ta có thể bỏ đi các dấu trị tuyệt đối ở vế trái

$$\begin{aligned} |a_1-x|+|a_2-x|+\ldots+|a_k-x|&=a_1+a_2+\ldots+a_k-kx,\\ |a_{k+1}-x|+|a_{k+2}-x|+\ldots+|a_n-x|&=(n-k)x-a_{k+1}-a_{k+2}-\ldots-a_n. \end{aligned}$$

Xét với biểu thức vế phải, dễ thấy

$$\begin{aligned} |b_1-x|+|b_2-x|+\ldots+|b_k-x|&\geq b_1+b_2+\ldots+b_k-kx,\\ |b_{k+1}-x|+|b_{k+2}-x|+\ldots+|b_n-x|&\geq (n-k)x-b_{k+1}-b_{k+2}-\ldots-b_n. \end{aligned}$$

Từ các bất đẳng thức trên suy ra

$$\begin{aligned} &a_1+a_2+\ldots+a_k-kx+(n-k)x-a_{k+1}-a_{k+2}-\ldots-a_n\\ &\geq b_1+b_2+\ldots+b_k-kx+(n-k)x-b_{k+1}-b_{k+2}-\ldots-b_n\\ &\Leftrightarrow a_1+a_2+\ldots+a_k\geq b_1+b_2+\ldots+b_k. \end{aligned}$$

Đây là *đpcm*. Định lí được chứng minh xong. ❑

Với định lí này, khi xét tính trội của các bộ ta chỉ cần xét một bất đẳng thức tổng quát chứa x là đủ. Điều này rất quan trọng vì nếu làm theo cách thông thường thì phải xét khá nhiều trường hợp.

Nếu như bạn chưa quen với các bộ trội, bạn sẽ cảm thấy các giả thiết của định nghĩa quá ép buộc và rắc rối.Tuy nhiên những vướng mắc này sẽ dần dần được tháo gỡ khi bạn tiếp cận với 2 định lí rất quan trọng liên quan đến các bộ trội, đó là bất đẳng thức $Muihard$ và bất đẳng thức $Karamata$, trong đó chúng ta sẽ nghiên cứu sâu hơn đến bất đẳng thức $Karamata$.

Định lý 4.4 (Định lí Muihard). *Nếu bộ $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ trội hơn bộ $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ thì với mọi dãy số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ ta luôn có*

$$\sum_{(\pi(1),\pi(2),...,\pi(n))} x_1^{a_{\pi(1)}} x_2^{a_{\pi(2)}} x_n^{a_{\pi(n)}} \geq \sum_{(\pi(1),\pi(2),...,\pi(n))} x_1^{b_{\pi(1)}} x_2^{b_{\pi(2)}} x_n^{b_{\pi(n)}},$$

Tổng trên lấy trên tất cả các dãy hoán vị $(\pi(1), \pi(2), ..., \pi(n)$ của $(1, 2, ..., n)$.

Ngoài ra nếu cho $(a), (b)$ là 2 bộ số bất kì sao cho bất đẳng thức trên được thoả mãn với mọi dãy số dương $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì ta phải có $(a) \gg (b)$.

Chẳng hạn, hệ quả trực tiếp là

$$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 \geq a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b + a^3c^2b + b^3a^2c + c^3b^2a.$$

(bất đẳng thức dạng trên thường được viết gọn lại thành $[4, 2, 0] \gg [3, 2, 1]$).

4.7.2 Bất đẳng thức Karamata

Với các bộ trội, ta có một định lí rất quan trọng thường hay sử dụng, đó là bất đẳng thức $Karamata$

Định lý 4.5 (Bất đẳng thức Karamata). *Nếu $a \gg b$ và f là một hàm lồi khả vi cấp 2 thì*

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n).$$

Chứng Minh. Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức trên nhưng có lẽ ngắn gọn và dễ chấp nhận nhất là phương pháp sử dụng khai triển *Abel*.

Vì f là một hàm lồi nên

$$f(x) - f(y) \geq (x - y).f'(y) \quad \forall x, y.$$

Thật vậy, nếu $x \geq y$ thì $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) \geq f(y)$ với $c \in (x, y)$.
Nếu $x \leq y$ thì $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c') \leq f(y)$ với $c' \in (x, y) \Rightarrow$ *đpcm.*
Do đó $\quad f(a_i) - f(b_i) \geq (a_i - b_i)f'(b_i) \quad \forall i = \overline{1,n}.$
Sử dụng khai triển *Abel*

$$\begin{aligned}
&(a_1 - b_1)f'(b_1) + (a_2 - b_2)f'(b_2) + ... + (a_n - b_n)f'(b_n)\\
&= (a_1 - b_1)(f'(b_1) - f'(b_2)) + (a_1 + a_2 - b_1 - b_2)(f'(b_2) - f'(b_3)) + ...\\
&+ (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} - b_1 - b_2 - ... - b_{n-1})(f'(b_{n-1}) - f'(b_n)+\\
&+ (a_1 + a_2 + ... + a_n - b_1 - b_2 - ... - b_n)f'(b_n)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Vì $f'(b_i) \geq f'(b_{i+1})$, $a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i = b_i \ \forall i = \overline{1,n}$. ❑

Chú ý rằng ta có thể thay điều kiện $(a) \gg (b)$ bởi điều kiện $(a) \gg (b^*)$, bất đẳng thức vẫn đúng. Còn nếu f là hàm không giảm thì hiển nhiên giả thiết cuối cùng có thể thay bằng giả thiết mạnh hơn $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Kết quả tương tự được suy ra đối với hàm lõm

Hệ quả 4.1. *Nếu $a \gg b$ và f là một hàm lõm khả vi cấp 2 thì*

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \leq f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n).$$

CHỨNG MINH. Ta chỉ cần xét bất đẳng thức với hàm lồi $-f(x)$. ❑

Hàm lồi của chúng ta cũng có thể được hiểu rộng hơn, đó là các hàm thoả mãn điều kiện $\alpha f(a) + \beta f(b) \geq f(\alpha a + \beta b) \quad \forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$. Khi đó chúng không cần điều kiện khả vi và bất đẳng thức *Karamata* vẫn hoàn toàn đúng (bạn đọc hãy tự chứng minh).

Nếu bạn mới làm quen với bất đẳng thức *Karamata* và các bộ trội thì hẳn đây là một định lí rất khó tiếp nhận. Phần nhiều là do điều kiện của các bộ trội không thể dễ dàng áp dụng. Để bước đầu làm quen với bất đẳng thức trên ta sẽ giải quyết các bài toán đơn giản trước, việc áp dụng định lí *Karamata* được áp dụng trực tiếp. Đầu tiên là một chứng minh cho bất đẳng thức *Popoviciu* đã nói ở chương trước.

Hệ quả 4.2 (Bất đẳng thức Popoviciu). *Nếu f là một hàm lồi thì*

$$f(a) + f(b) + f(c) + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{4}{3}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right) + f\left(\frac{c+a}{2}\right)\right).$$

Lời Giải. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Xét các bộ số sau đây

$$(x) = (a, a, a, b, t, t, t, b, b, c, c, c) \quad , \quad (y) = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma)$$

Với $\quad t = \dfrac{a+b+c}{3}, \alpha = \dfrac{a+b}{2}, \beta = \dfrac{a+c}{2}, \gamma = \dfrac{b+c}{2}.$

Khi đó dễ thấy (y) là một bộ đơn điệu. Ngoài ra

$$a \geq \alpha, 3a + b \geq 4\alpha, 3a + b + t \geq 4\alpha + 2\beta, 3a + b + 3t \geq 4\alpha + 3\beta$$
$$3a + 2b + 3t \geq 4\alpha + 4\beta, 3a + 3b + 3t \geq 4\alpha + 4\beta + \gamma$$
$$3a + 3b + 3t + c \geq 4\alpha + 4\beta + 2\gamma, 3a + 3b + 3t + 3c \geq 4\alpha + 4\beta + 4\gamma.$$

Vậy $(x^*) \gg (y)$, theo bất đẳng thức *Karamata* ta có

$$3\left(f(x) + f(y) + f(z) + f(t)\right) \geq 4\left(f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)\right).$$

Kết quả này cho ta điều phải chứng minh. □

Chú ý rằng trong chứng minh trên ta cần đặt b vào giữa a, t nếu để theo thứ tự bình thường thì sẽ không có hiệu quả.

Hệ quả 4.3 (Bất đẳng thức Jensen). *Nếu f là một hàm lồi thì*

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right).$$

Lời Giải. Dựa vào bổ đề 1, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ thì

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \gg (a, a, \dots, a) \ , \ a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Ví dụ 4.7.1. *Cho các số thực $a, b, c, x, y, z \in I$ thoả mãn*

$$a + b + c = x + y + z, \max(a, b, c) \geq \max(x, y, z), \min(a, b, c) \leq \min(x, y, z),$$

Khi đó với mọi hàm lồi f trên I ta luôn có

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f(x) + f(y) + f(z).$$

Lời Giải. Kết quả trên hoàn toàn suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức *Karamata*. Giả sử rằng $x \geq y \geq z$, khi đó

$$a \geq x, c \leq z \Rightarrow (x, y, z) \gg (a, b, c). \ \square$$

Khi thay hàm f bởi một số hàm lồi cơ bản như $\sin x$ hay x^2... ta đều có các kết quả thường được áp dụng. Chẳng hạn với $f = \sin x$ ta có bài toán quen thuộc sau

Nếu ΔABC gần đều hơn $\Delta A'B'C'$ thì

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \sin A' + \sin B' + \sin C'.$$

Trong đó ΔABC gần đều hơn $\Delta A'B'C'$ có nghĩa là

$$\max(A, B, C) \le \max(A', B', C'), \min(A, B, C) \ge \min(A', B', C').$$

Các bài toán vừa trình bày giúp các bạn có định hướng tốt khi sử dụng bất đẳng thức với bộ trội, phần nào mang nặng tính lí thuyết. Sau đây là một số ứng dụng mang tính *thực tế* hơn của bất đẳng thức dạng này

Ví dụ 4.7.2. *Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \le \left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)...\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\ln(1+a_1)+\ln(1+a_2)+...+\ln(1+a_n) \le \ln\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)+\ln\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)+...+\ln\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Ta xét bộ $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ là bộ hoán vị của dãy $(\ln a_1, \ln a_2, ..., \ln a_n)$ xếp theo thứ tự giảm dần. Ta có thể coi $b_i = \ln a_{k_i}$ với $(k_1, k_2, ..., k_n)$ là hoán vị nào đó của $(1, 2, .., n)$.

Khi đó bộ $c = (2\ln a_1 - \ln a_2, 2\ln a_2 - \ln a_3, ..., 2\ln a_n - \ln a_1)$ có thể xắp xếp lại thành một dãy mới là

$$c^* = (2\ln a_{k_1} - \ln a_{k_1+1}, 2\ln a_{k_2} - \ln a_{k_2+1}, ..., 2\ln a_{k_n}^2 - \ln a_{k_n+1}).$$

Do $b = (a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_n})$ là một bộ đơn điệu giảm, và dễ thấy rằng $c^* \gg b$ nên

$$f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n) \ge f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n),$$

với $c_i = 2\ln a_{k_i} - \ln a_{k_i+1}$ và $b_i = \ln a_{k_i}$.

Lấy $f(x) = \ln(1 + e^x)$, f hiển nhiên là một hàm lồi và ta có *đpcm.* □

Việc chọn hàm $f(x)$ có thể tạo ra các bài toán khác nhau, chẳng hạn với hàm lồi $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$ ta có

$$\sqrt{1 + a_1} + \sqrt{1 + a_2} + ... + \sqrt{1 + a_n} \le \sqrt{1 + \frac{a_1^2}{a_2}} + \sqrt{1 + \frac{a_2^2}{a_3}} + ... + \sqrt{1 + \frac{a_n^2}{a_1}}.$$

Ví dụ 4.7.3. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thì*

$$\frac{a_1^2}{a_2^2+...+a_n^2}+...+\frac{a_n^2}{a_1^2+...+a_{n-1}^2} \geq \frac{a_1}{a_2+...+a_n}+...+\frac{a_n}{a_1+...+a_{n-1}}.$$

LỜI GIẢI. Đặt

$$y_i = \frac{a_i}{a_1+a_2+...+a_n} \quad , \quad x_i = \frac{a_i^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

Khi đó $x_1+x_2+...+x_n = y_1+y_2+...+y_n = 1$. Ta phải chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{1-y_i}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, khi đó $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$. Ngoài ra với mọi $i \geq j$

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{a_i^2}{a_j^2} \geq \frac{a_i}{a_j} = \frac{y_i}{y_j}.$$

Theo bổ đề 4 về các bộ trội thì $(x_1, x_2, ..., x_n) \gg (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Vì hàm $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ là hàm lồi nên ta có *đpcm* theo bất đẳng thức *Karamata*. □

Ví dụ 4.7.4 (Canada Open Competion). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ là một hoán vị của $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_{2n} \geq 0$. Chứng minh*

$$(1+a_1a_2)(1+a_3a_4)...(1+a_{2n-1}a_{2n})$$
$$\leq (1+b_1b_2)(1+b_3b_4)...(1+b_{2n-1}b_{2n}).$$

LỜI GIẢI. Xét $f(x) = \ln(1+e^x)$ và $x_i = \ln a_i, y_i = \ln b_i$. Ta phải chứng minh

$$f(x_1+x_2)+f(x_3+x_4)+...+f(x_{2n-1}+x_{2n})$$
$$\leq f(y_1+y_2)+f(y_3+y_4)+...+f(y_{2n-1}+y_{2n}).$$

Xét bộ $x = (x_1+x_2, x_3+x_4, ..., x_{2n-1}+x_{2n})$. Ta giả sử x^* là 1 hoán vị nào đó các phần tử của x sao cho chúng được sắp xếp giảm dần.

Nhưng dễ thấy rằng $(y_1+y_2, y_3+y_4, ..., y_{2n-1}+y_{2n}) \gg x^*$ vì với mọi k thì

$$y_1+y_2+...+y_{2k} \geq x_1^*+x_2^*+...+x_{2k}^*.$$

Vậy theo bất đẳng thức *Karamata* ta có điều phải chứng minh. □

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét các vấn đề khó hơn của lí thuyết này, áp dụng định lí của các bộ trội (định lí Symmetric Majorization Criterion). Các bạn sẽ thấy rõ tầm quan trọng của định lí và các ứng dụng hiệu quả của bất đẳng thức *Karamata* qua những bất đẳng thức sau đây

Ví dụ 4.7.5 (Bất đẳng thức Turkevici). *Chứng minh với mọi số thực không âm a, b, c, d ta có*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2.$$

Lời Giải. Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề. Với mọi x, y, z, t thực thì

$$2(|x|+|y|+|z|+|t|)+|x+y+z+t| \geq |x+y|+|y+z|+|z+t|+|t+x|+|x+z|+|y+t|.$$

Chứng Minh. Ta chỉ cần xét các trường hợp trong các số x, y, z, t cùng dấu, có 1 số khác dấu, 2 số khác dấu hoặc 3 số khác dấu.

Xét chi tiết xin dành cho bạn đọc, vì nó chỉ mang tính liệt kê. Chứng minh cụ thể cho bất đẳng thức với n số được trình bày ngay dưới đây.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với bổ đề trên thì bài toán sẽ được chứng minh xong. Đặt $a = e^{a_1}, b = e^{b_1}, c = e^{c_1}, d = e^{d_1}$, ta phải chứng minh

$$\begin{aligned} & e^{4a_1} + e^{4b_1} + e^{4c_1} + e^{4d_1} + 2e^{a_1+b_1+c_1+d_1} \\ \geq\ & e^{2a_1+2b_1} + e^{2b_1+2c_1} + e^{2c_1+2d_1} + e^{2d_1+2a_1} + e^{2b_1+2d_1} + e^{2c_1+2a_1}. \end{aligned}$$

Do hàm $f(x) = e^x$ là hàm lồi nên theo bất đẳng thức *Karamata* ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & (4a_1, 4b_1, 4c_1, 4d_1, a_1 + b_1 + c_1 + d_1, a_1 + b_1 + c_1 + d_1)^* \\ \gg & (2a_1 + 2b_1, 2b_1 + 2c_1, 2c_1 + 2d_1, 2d_1 + 2a_1, 2a_1 + 2c_1, 2b_1 + 2d_1)^*. \end{aligned}$$

Trong đó $(\alpha)^*$ là bộ các phần tử của (α) được sắp tăng dần (ta làm vậy để hợp với định nghĩa các bộ trội). Theo định lí về các bộ trội, ta phải chứng minh với mọi $x_1 \in R$ thì

$$2|a_1 + b_1 + c_1 + d_1 - 4x_1| + \sum_{sym} |4a_1 - 4x_1| \geq \sum_{sym} |2a_1 + 2b_1 - 4x_1|.$$

Đặt $x = a_1 - x_1, y = b_1 - x_1, z = c_1 - x_1, t = d_1 - x_1$, bất đẳng thức trên chuyển về bổ đề đã nói ở phần trước. Ta có điều phải chứng minh. ❑

Ví dụ 4.7.6. *Chứng minh với mọi $a_1, a_2, ..., a_n$ không âm ta luôn có*

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + n\sqrt[n]{a_1^2a_2^2...a_n^2} \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2.$$

LỜI GIẢI. Bài toán trên thực chất là một dạng mở rộng cho bất đẳng thức *Turkevici*, với $n = 4$ ta có bất đẳng thức *Turkevici*. Để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$(\underbrace{2x_1, 2x_1, ..., 2x_1}_{n-1}, \underbrace{2x_2, 2x_2, ..., 2x_2}_{n-1}, \underbrace{2x, 2x, ..., 2x}_{n})$$

$$\gg (x_1 + x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_3, ..., x_1 + x_n, x_2 + x_1, x_2 + x_2, ..., x_2 + x_n, ..., x_n + x_n).$$

Trong đó $x = (x_1 + x_2 + ... + x_n)/n$. Khẳng định trên tương đương với

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n}|x_i| + |\sum_{i=1}^{n}x_i| \geq \sum_{i<j}^{n}|x_i + x_j|.$$

Đặt $A = \{i \mid x_i \geq 0\}, B = \{i \mid x_i < 0\}, |A| = m, |B| = k = n - m$. Như vậy ta phải chứng minh bất đẳng thức tương đương sau với $x_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$$(n-2)\sum_{i\in A,B} x_i + |\sum_{i\in A}x_i - \sum_{j\in B}x_j| \geq \sum_{(i,j)\in A,B}(x_i + x_j) + \sum_{i\in A, j\in B}|x_i - x_j|.$$

Vì $k + m = n$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$(k-1)\sum_{i\in A}x_i + (m-1)\sum_{j\in B}x_j + |\sum_{i\in A}x_i - \sum_{j\in B}x_j| \geq \sum_{i\in A, j\in B}|x_i - x_j|.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\sum_{i\in A}x_i \geq \sum_{j\in B}x_j$.

Với mỗi $i \in A$, đặt $r_i = |A_i = \{j \in B|x_i \leq x_j\}$.
Với mỗi $j \in B$, đặt $s_j = |B_j = \{i \in A|x_j \leq x_i\}$.

Khi đó biểu thức vế phải được viết gọn thành

$$\sum_{i\in A}(k - 2r_i)x_i + \sum_{j\in B}(m - 2s_j)x_j.$$

Do đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\sum_{i\in A}(2r_i - 1)x_i + \sum_{j\in B}(2s_j - 1)x_j + |\sum_{i\in A}x_i - \sum_{j\in B}x_j| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in A}r_ix_i + \sum_{j\in B}(s_j - 1)x_j \geq 0.$$

Dễ thấy nếu $s_j \geq 1 \forall j = \overline{1,n}$ thì ta có điều phải chứng minh. Trường hợp ngược lại, giả sử $\exists s_l = 0$, khi đó

$$\max_{i\in A\cup B} x_i \in B \Rightarrow r_i \geq 1 \quad \forall i = \overline{1,m}.$$

Vậy

$$\sum_{i\in A} r_i x_i + \sum_{j\in B}(s_j - 1)x_j \geq \sum_{i\in A} x_i - \sum_{j\in B} x_j \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ☐

Ví dụ 4.7.7. *Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$, chứng minh bất đẳng thức*

$$a_1^n+a_2^n+...+a_n^n+n(n-1)a_1a_2...a_n \geq a_1a_2...a_n(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right).$$

Lời Giải. Bất đẳng thức có thể viết dưới dạng

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n(n-1)\prod_{i=1}^{n} a_i \geq a_1a_2...a_n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i}{a_j}.$$

Bổ đề 6. *Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ và $x = (x_1 + x_2 + ... + x_n)/n$. Khi đó*

$$\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n, x, x, ..., x) \gg \beta = (y_1, y_1, ..., y_1, y_2, y_2, ..., y_2, ..., y_n, y_n, ..., y_n)$$

Trong đó α chứa $n(n-2)$ phần tử x còn β chứa $n-1$ phần tử y_k $\forall k = \overline{1,n}$. Các số b_k được xác định bởi

$$b_k = \frac{nx - x_i}{n-1}.$$

Chứng Minh. Theo định lí về các bộ trội, ta chỉ cần chứng minh với mọi z thì

$$\begin{aligned}
&|x_1 - z| + |x_2 - z| + ... + |x_n - z| + n(n-2)|x - z|\\
&\geq (n-1)(|y_1 - z| + |y_2 - z| + ... + |y_n - z|\\
&\Leftrightarrow |x_1 - z| + |x_2 - z| + ... + |x_n - z| + (n-2)|x_1 + x_2 + ... + x_n - nz|\\
&\geq |x_2 + x_3 + ... + x_n - (n-1)z| + |x_1 + x_3 + ... + x_n - (n-1)z| + ...+\\
&+ |x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} - (n-1)z|.
\end{aligned}$$

Rõ ràng trong chứng minh trên, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| + (n-2)|S| \geq |S - x_1| + |S - x_2| + ... + |S - x_n|.$$

Trong đó $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Chú ý rằng với $n = 3$ thì đây là một bất đẳng thức quen thuộc

$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

Bất đẳng thức trên có thể chứng minh như sau :

Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$. Nếu $x_i \geq S\ \forall i = \overline{1,n}$ thì

$$VP = \sum_{i=1}^{n}(x_i - S) = -(n-1)S.$$

Rõ ràng $|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \geq |x_1 + x_2 + ... + x_n| = |S|$ nên ta có *đpcm*.
Trường hợp tương tự nếu $x_i \leq S\ \forall i = \overline{1,n}$. Ta xét trường hợp còn lại, tồn tại số $1 \leq k \leq n-1$ sao cho $x_k \geq S \geq x_{k+1}$, khi đó biểu thức vế trái có thể viết dưới dạng

$$x_1 + x_2 + ... + x_k - x_{k+1} - ... - x_n + (n-2k)S,$$

Mặt khác

$$|x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \geq x_1 + x_2 + ... + x_k - x_{k+1} - ... - x_n,$$

Ngoài ra hiển nhiên $(n-2)|S| \geq (n-2k)S$ nên ta có điều phải chứng minh.

Từ bổ đề trên suy ra trực tiếp kết quả của bài toán. ❑

Hai chứng minh của 2 ví dụ trên là 2 chứng minh rất khó, mặc dù bất đẳng thức cuối cùng của chúng chỉ là các bất đẳng thức bậc nhất. Sau khi đưa về bất đẳng thức với giá trị tuyệt đối, các ước lượng sẽ không mang nhiều màu sắc đại số nữa mà sẽ mang tính số học nhiều hơn.

Sau đây là một ví dụ khác sử dụng phương pháp tương tự

Ví dụ 4.7.8 (V.Adya Asuren). *Cho các số thực dương $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdots\frac{a_n+a_1}{2} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdots\frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

HƯỚNG DẪN. Hãy chứng minh rằng

$$(x_1, x_2, ..., x_n)^* \ll (y_1, y_2, ..., y_n)^*$$

Trong đó

$$x_1 = \frac{a_1+a_2}{2}, x_2 = \frac{a_2+a_3}{2}, ..., x_n = \frac{a_n+a_1}{2},$$
$$y_1 = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}, y_2 = \frac{a_2+a_3+a_4}{3}, ..., y_n = \frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

Phương pháp sử dụng bất đẳng thức *Karamata* cùng với lý thuyết về các bộ trội như trên mà một phương pháp chứng minh độc đáo của bất đẳng thức đại số. Lúc này, các bài toán nguyên mẫu đại số được đưa về các bất đẳng thức bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối. Vì thế mà trong các chứng minh, chúng mang nhiều màu sắc tổ hợp và số học hơn, dù rằng cách phát biểu ban đầu là thuần tuý đại số, và theo cách nhìn thông thường của chúng ta thì thật khó lại có một sự liên quan tuyệt vời đến vậy. Đây là một phương pháp rất mới đối với bất đẳng thức và cần thêm nhiều sự đóng góp hoàn thiện của bạn đọc.

4.8 Dồn biến không xác định

Trong thời gian chuẩn bị hoàn thành cuốn sách trước khi xuất bản, tác giả đã nhận được sự cộng tác và giúp đỡ của rất nhiều các bạn học sinh trên khắp đất nước. Một số kết quả mới đã được tìm ra, một số bài toán hay đã được bổ sung, trong đó tác giả đặc biệt ấn tượng với phương pháp dồn biến không xác định và định lí UMV của bạn Đinh Ngọc An - học sinh chuyên Toán trường THPT Lương Văn Tụy- Ninh Bình. Chứng minh ban đầu phải sử dụng một số kết quả toán cao cấp, nhưng sau đó với việc sử dụng bổ đề dồn biến mạnh trong chương III ta có thể chứng minh được hoàn toàn với kiến thức toán sơ cấp. Sau khi trao đổi thêm với bạn Đinh Ngọc An và hoàn thiện một số thiếu sót nhỏ, xin giới thiệu với các bạn về kết quả này như sau.

4.8.1 $a \geq b$ hay $a \leq b$

Đối với các bài toán mở đầu, ta sử dụng một tính chất rất hiển nhiên của tập số thực R là

Tính chất 1. *Với các số thực a, b tuỳ ý thì ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng*

- $a \geq b$
- $a \leq b$

Có thể mở rộng cho tính chất này với 3 số

Tính chất 2. *Với các số thực a, b, c tuỳ ý và $b \geq c$ thì ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng*

- $b \geq a$
- $a \leq c$

Chứng minh điều này rất đơn giản, nếu cả 2 bất đẳng thức đều sai thì

$$\begin{cases} a > b \\ a < c \end{cases} \Rightarrow c > a > b \geq c \quad \text{(vô lí !)}.$$

Thật đặc biệt là tính chất rất đơn giản và hiển nhiên này lại có ứng dụng rất hiệu quả trong khá nhiều các bài toán bất đẳng thức. Đầu tiên chúng ta sẽ xem xét lại một bài toán đã được nói tới ở chương trước với một cách nhìn khác.

Ví dụ 4.8.1. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right).$$

LỜI GIẢI. Ta đã giải bài toán với quan điểm hàm lồi, chứng minh sau đây mang một tư tưởng khác.

Với mỗi $i = 1, 2, ..., n$, đặt $S_i = \sum_{j \neq i} x_j$ và $T_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_j}$. Ta có

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_i + S_i)\left(T_i + \frac{1}{x_i}\right) \leq (1 + S_i)(1 + T_i) \\ \Leftrightarrow\ & (x_i - 1)\left(T_i - \frac{S_i}{x_i}\right) \leq 0 \Leftrightarrow T_i \leq \frac{S_i}{x_i}. \end{aligned}$$

Cũng tương tự như vậy

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 2, x_{i+1}, ..., x_n) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x_i + S_i)\left(T_i + \frac{1}{x_i}\right) \leq (2 + S_i)(2 + T_i) \\ \Leftrightarrow\ & (x_i - 2)\left(T_i - \frac{S_i}{2x_i}\right) \leq 0 \Leftrightarrow T_i \geq \frac{S_i}{2x_i}. \end{aligned}$$

Và từ 2 kết quả trên ta suy ra

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \max\left(f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n), f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 2, x_{i+1}, ..., x_n) \right).$$

Từ đó $\exists a_1, a_2, ..., a_n \in \{1, 2\}$ sao cho

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(a_1, a_2, ..., a_n)\ \forall x_1, x_2, ..., x_n \in [1, 2].$$

Giả sử $t \leq n$ là số các số 1 trong dãy $a_1, a_2, ..., a_n$, suy ra

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, ..., a_n) &= (t + 2(n - t))\left(t + \frac{n - t}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2n - t)(n + t) \leq f(n) \end{aligned}$$

Trong đó $f(n) = \frac{9n^2}{8}$ với n chẵn và $\frac{9n^2 - 1}{8}$ với n lẻ. □

Ví dụ 4.8.2. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n}{x_1 x_2 ... x_n}.$$

Lời Giải. Với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$ đặt $S_i = \sum_{j \neq i} x_j^n$.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_i^n + S_i}{x_i} \leq 1 + S_i \Leftrightarrow (x_i - 1)\left(S_i - \sum_{j=0}^{n-2} x_j^{n-1-j}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow S_i \geq \sum_{j=0}^{n-2} x_j^{n-1-j}.$$

Tương tự

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 2, x_{i+1}, ..., x_n) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_i^n + S_i}{x_i} \leq \frac{2^n + S_i}{2} \Leftrightarrow (x_i - 2)\left(S_i - \sum_{j=0}^{n-2} 2^j x_j^{n-1-j}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow S_i \leq \sum_{j=0}^{n-2} 2^j x_j^{n-1-j}.$$

Chú ý rằng $\sum_{j=0}^{n-2} x_j^{n-1-j} \leq \sum_{j=0}^{n-2} 2^j x_j^{n-1-j}$ nên ít nhất một trong hai bất đẳng thức (1) và (2) phải đúng. Làm hoàn toàn tương tự bài toán 4.8.1 ta suy ra kết quả

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{2^n + n - 1}{2}. \ \square$$

Lời giải hai bài toán vừa trình bày vẫn mang một chút tư tưởng hàm lồi, vì điều kiện ràng buộc các biến khá lỏng (chỉ đơn giản là các biến số thuộc một khoảng nào đó), tuy nhiên đó không phải là ý định chính mà tác giả muốn đề cập đến trong bài viết này và cũng không phải là ý tưởng để xây dựng lời giải ở trên. Phần tiếp sau đây cũng là phần chính của bài viết, trình bày về định lí dồn biến không xác định UMV (lấy theo các chữ cái đầu tiên của cụm từ Undefined Mixing Variables).

4.8.2 Dồn biến không xác định

Định lý 4.6 (Định lí dồn biến không xác định UMV). *Cho f là một hàm liên tục đối xứng xác định trên tập $U(\subset R^n) \mapsto R$ thoả mãn điều kiện*

$$f(..., x, ..., y, ...) \geq \min\left(f(..., \frac{x+y}{2}, ..., \frac{x+y}{2}, ...), f(..., 0, ..., x+y, ...)\right).$$

Khi đó với mọi bộ $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U$ thì

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \min\{C_t\}_{t=0}^{n-1},$$

Trong đó C_t là giá trị của hàm f khi có t số bằng 0 và các số còn lại bằng nhau.

Nói cách khác, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sẽ đạt được khi và chỉ khi trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$ có t số bằng 0, các số còn lại bằng nhau. Ở đây t là một giá trị nguyên nào đó trong $\{0, 1, ..., n-1\}$.

LỜI GIẢI. Để có một chứng minh thực sự sơ cấp cho định lí trên, ta cần sử dụng đến bổ đề dồn biến tổng quát. Xét phép biến đổi sau

- Chọn ra số lớn nhất và nhỏ nhất giữa các số $x_1, ..., x_n$, kí hiệu là α và β.
- Nếu $f(..., \alpha, ..., \beta, ...) \geq f(..., \frac{\alpha+\beta}{2}, ..., \frac{\alpha+\beta}{2}, ...)$ thì ta thay các số α, β bởi trung bình cộng của chúng, nhưng vẫn giữ nguyên thứ tự trong dãy.
- Nếu $f(..., \alpha, ..., \beta, ...) \geq f(..., 0, ..., \alpha + \beta, ...)$ thì quá trình dừng lại.

Nếu quá trình trên không dừng lại, theo bổ đề dồn biến tổng quát ta suy ra các số x_i đều tiến đến giới hạn

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Do đó $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq C_n$, ta có điều phải chứng minh.

Nếu quá trình trên dừng lại sau một số hữu hạn bước, ta có thể coi trường hợp này giống như trong dãy ban đầu có một số bằng 0. Lại xét riêng với $n-1$ biến còn lại, bằng phương pháp quy nạp đơn giản ta có *đpcm.* ❑

Việc dồn biến các biểu thức của x, y đối với $\frac{x+y}{2}$ và $0, x+y$ không phải là một ý tưởng quá mới, thậm chí ngay trong cuốn sách này phương pháp tương tự cũng được sử dụng tương đối nhiều. Điều bất ngờ ở đây là định lí UMV lại được liên hệ với hàng loạt những đẳng thức dồn biến kì lạ và đặc biệt. Ngoài ra, thuận lợi khi sử dụng định lí trên là ta hoàn toàn không cần quan tâm nhiều đến số biến, mà chỉ cần xem xét với 2 biến. Chẳng hạn, hãy xem lại bài toán sau đây, lưu ý rằng nó đã từng được chứng minh với định lí IGI trong phương pháp quy nạp tổng quát.

Ví dụ 4.8.3. *Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n thì*

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + na_1a_2...a_n \geq n^2.$$

LỜI GIẢI. Xét biểu thức

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + na_1a_2...a_n.$$

Dễ dàng suy ra hai đẳng thức sau

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) - f\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, ..., a_n\right)$$
$$= \frac{n(a_1-a_2)^2}{4}\left(\frac{2(n-1)}{n} - a_3a_4...a_n\right),$$
$$f(a_1, a_2, ..., a_n) - f(0, a_1+a_2, a_3, ..., a_n)$$
$$= -na_1a_2\left(\frac{2(n-1)}{n} - a_3a_4...a_n\right).$$

Rõ ràng biểu thức $\frac{2(n-1)}{n} - a_3a_4...a_n$ đã được lặp lại *khá tình cờ* trong 2 cách dồn biến trên. Từ đó suy ra ít nhất một trong hai bất đẳng thức

$$\begin{cases} f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, ..., a_n\right) \\ f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f(0, a_1+a_2, a_3, ..., a_n) \end{cases}$$

phải đúng. Vậy

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq \min\left(f(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, ..., a_n), f(0, a_1+a_2, a_3, ..., a_n)\right).$$

Theo định lí UMV, ta chỉ cần chứng minh bài toán khi có ít nhất một trong n số $a_1, a_2, ..., a_n$ bằng 0 hoặc tất cả các số đều bằng 1. Trong các trường hợp này bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta có *đpcm.* □

Và sau đây là bài toán tổng quát cho bài toán trên

Ví dụ 4.8.4. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n và m là một số nguyên dương cho trước. Tìm số thực dương k tốt nhất (lớn nhất) sao cho bất đẳng thức sau đây luôn đúng*

$$x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m + k(x_1x_2...x_n - 1) \geq n.$$

LỜI GIẢI. Ta chứng minh tương tự như ví dụ 4.8.3 và tìm được

$$k = k_m = \left(\frac{n}{n-1}\right)^m - n. \ \square$$

Sau đây là một mở rộng khác cho bài toán 3.1.17, bài toán đã được nhắc tới trong chương III về phương pháp dồn biến mạnh đối với 4 số.

Ví dụ 4.8.5. *Tìm hằng số dương $k = k_m$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi dãy số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng n*

$$(1+mx_1)(1+mx_2)...(1+mx_n) \leq (m+1)^n + k_m(x_1x_2...x_n - 1).$$

Lời Giải. Đặt

$$f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = (1 + mx_1)(1 + mx_2)...(1 + mx_n) - k_m x_1 x_2 ... x_n.$$

Với mỗi $i \neq j$ và $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ đặt

$$S_{ij} = \prod_{l \neq i,j} (1 + mx_l),$$
$$T_{ij} = \prod_{l \neq i,j} x_l.$$

Để cho gọn, ta kí hiệu $S = S_{i,j}, T = T_{i,j}$. Dễ thấy rằng

$$f_m(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \leq f_m\left(x_1, ..., \frac{x_i + x_j}{2}, ..., \frac{x_i + x_j}{2}, ..., x_n\right)$$

$$\Leftrightarrow S\left[(1 + mx_i)(1 + mx_j) - \left(1 + m\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2\right)\right] + k_m T\left[\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)^2 - x_i x_j\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-Sm^2}{4}(x_i - x_j)^2 + \frac{k_m T}{4}(x_i - x_j)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k_m T \leq Sm^2. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$f_m(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \leq f(x_1, ..., 0, ..., x_i + x_j, ..., x_n)$$

$$\Leftrightarrow S\left[(1 + mx_i)(1 + mx_j) - (1 + m(x_i + x_j))\right] - k_m x_i x_j \leq 0$$

$$\Leftrightarrow Sm^2 x_i x_j - k_m T x_i x_j \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k_m T \geq Sm^2. \quad (2)$$

Và rõ ràng từ các kết quả $(1), (2)$ suy ra

$$f_m(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \leq \max \begin{cases} f\left(x_1, ..., \frac{x_i+x_j}{2}, ..., \frac{x_i+x_j}{2}, ..., x_n\right) \\ f(x_1, ..., 0, ..., x_i + x_j, ..., x_n) \end{cases}$$

Và do đó biểu thức $f_m(x_1, ..., x_n)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$ hoặc ít nhất có 1 trong các số $x_1, x_2, ..., x_n$ bằng 0.

Từ đó dễ dàng suy ra kết quả là

$$\max f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\left((m + 1)^n - k_m, \left(1 + \frac{mn}{n - 1}\right)^{n-1}\right).$$

Vậy hằng số k_m tốt nhất cần tìm là

$$(m + 1)^n - (1 + \frac{mn}{n - 1})^{n-1}. \quad \square$$

Ví dụ 4.8.6 (IMO Shortlist). *Cho a, b, c, d là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh bất đẳng thức*

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

LỜI GIẢI. Xét

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd \\ &= ab(c+d) + cd(a+b) - \frac{176}{27}abcd. \end{aligned}$$

Dễ thấy,

$$f(a,b,c,d) \leq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)$$

$$\Leftrightarrow (c+d)\left(ab - \frac{(a+b)^2}{4}\right) + \frac{176}{27}cd\left(\frac{(a+b)^2}{4} - ab\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{176}{27}cd \leq c+d.$$

$$f(a,b,c,d) \leq f(0, a+b, c, d)$$

$$\Leftrightarrow ab(c + d - \frac{176}{27}abcd) \leq 0 \Leftrightarrow c + d \leq \frac{176}{27}cd.$$

Từ các chứng minh trên suy ra

$$f(a,b,c,d) \leq \max\left(f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right), f(0, a+b, c, d)\right).$$

Theo định lí UMV suy ra $\max f(a,b,c,d)$ đạt được khi trong các số a, b, c, d có một số bằng 0 hoặc $a = b = c = d = 1$. Từ đó ta có *dpcm.* ☐

Nhận xét. Phương pháp tương tự có thể được sử dụng để chứng minh bài toán tổng quát hơn sau đây

Cho các số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng n. Tìm hằng số dương $k = k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$x_1x_2...x_n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \leq n + k_n(x_1x_2...x_n - 1).$$

Phần cuối cùng của bài viết các bạn hãy chứng minh bất đẳng thức sau đây, nó là sự tổng quát của 2 bài toán rất khó của các chương trước.

Ví dụ 4.8.7. *Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng n và k là số thực dương tuỳ ý. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau*

(i) $$S_{k,n-1} = (x_1x_2...x_{n-1})^k + (x_2x_3...x_n)^k + ... + (x_nx_1x_2...x_{n-2})^k.$$

(ii) $$S_{k,p} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} x_{i_1}^k x_{i_2}^k ... x_{i_p}^k.$$

Kết quả cho câu (ii) là

$$\max S_{k,p} = \max_{t=\overline{0,n-p}} C_{n-t}^{p}\left(\frac{n}{n-t}\right)^{kp}.$$

4.9 Bất đẳng thức và các vấn đề mở

Không có phần nào trong toán học mà các vấn đề khó lại luôn được thể hiện dưới các biểu diễn cực kì đơn giản như đối với bất đẳng thức. Nhưng cũng thật kì lạ là trong thế giới những bất đẳng thức đơn giản ấy còn rất nhiều mở, không thể giải được trong một thời gian rất dài (đến khi quyển sách này đã được hoàn thành). Sau đây tác giả sẽ giới thiệu một số vấn đề khó, hiện nay chưa có lời giải hoặc chỉ có lời giải trong một số trường hợp đặc biệt. Rất mong sự trao đổi đóng góp ý kiến của các bạn về các bất đẳng thức này.

4.9.1 Một lời giải hoàn chỉnh?

Bài toán mở 1. *Với những giá trị nào của k thì bất đẳng thức*

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a} \geq \frac{a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}}{2}$$

luôn đúng với mọi $a, b, c \geq 0$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ.

Như đã đề cập đến ở phần trước, bất đẳng thức đúng với mọi số dương $k \geq 3/2$, ở bài toán 2.37 chương II. Tuy nhiên $k = 3/2$ chưa phải là giá trị tốt nhất của k. Trong bài toán 2.84 chương II ta đã chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Điều này cũng có nghĩa là bất đẳng thức đã được chứng minh trong trường hợp $k = 4/3$. Ngoài ra các bạn hãy tự chứng minh (tương tự như bài 2.84) với $k = 5/4$ bất đẳng thức

$$\frac{a^5}{a^4+b^4}+\frac{b^5}{b^4+c^4}+\frac{c^5}{c^4+a^4} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Câu hỏi đặt ra là, phải chăng với mọi $n \in N$ thì

$$\frac{a^{n+1}}{a^n+b^n}+\frac{b^{n+1}}{b^n+c^n}+\frac{c^{n+1}}{c^n+a^n} \geq \frac{a+b+c}{2}. \quad (*)$$

Nhưng rất tiếc, kết quả trên không chính xác. Thật vậy, nếu bất đẳng thức trên đúng thì

$$\frac{a^{k_n}}{a+b}+\frac{b^{k_n}}{b+c}+\frac{c^{k_n}}{c+a}\geq\frac{a^{k_n-1}+b^{k_n-1}+c^{k_n-1}}{2}.$$

Với $k_n=1+1/n$. Rõ ràng cả 2 biểu thức đều là các hàm liên tục đối với k nên khi cho $n\to+\infty$ ta có

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\geq\frac{3}{2}\ \forall a,b,c\geq 0.$$

Do tính hoán vị nên bất đẳng thức trên phải trở thành đẳng thức

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{3}{2}\ \forall a,b,c\geq 0.$$

Đẳng thức trên rõ ràng là vô lí $(a=0,b=1,c=2)$. Vậy không thể có $(*)$ được.

Trở lại (1), có một kết quả khá thú vị là, nếu bất đẳng thức (1) đúng với số dương k nào đó thì nó sẽ đúng với mọi số dương $k'\geq k$. Thật vậy, chuyển bất đẳng thức về dạng

$$\frac{a^{k-1}(a-b)}{a+b}+\frac{b^{k-1}(b-c)}{b+c}+\frac{c^{k-1}(c-a)}{c+a}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a^{k-1}-c^{k-1})(a-b)}{a+b}+\frac{(b^{k-1}-c^{k-1})(b-c)}{b+c}+c^{k-1}\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a^{k-1}-c^{k-1})(a-b)}{a+b}+\frac{(b^{k-1}-c^{k-1})(b-c)}{b+c}\geq c^{k-1}\frac{(a-b)(a-c)(c-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Vậy ta chỉ cần xét trong trường hợp $a\geq c\geq b$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a-b}{a+b}\geq\left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}\frac{c-b}{b+c}+\left(\frac{c}{a}\right)^{k-1}\frac{a-c}{a+c}.$$

Vì $b/a\leq 1, c/a\leq 1$ nên bất đẳng thức trên đúng với k thì cũng đúng với mọi $k'\geq k$. Như vậy để tìm tất cả các số k thoả mãn ta chỉ cần tìm số k nhỏ nhất là đủ.

Để giải quyết triệt để bài toán trên là điều rất khó, tuy nhiên ta có thể tạm hài lòng với bất đẳng thức $(*)$ đối với các giá trị nguyên dương của n.

4.9.2 Một bất đẳng thức đối xứng thú vị

Bài toán mở 2. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với $a,b,c\geq 0$ và $ab+bc+ca=1$, k là một hằng số dương cho trước*

$$\frac{1}{\sqrt{ka^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{kb^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{kc^2+ab}}.$$

MỘT SỐ KẾT QUẢ.

Ta có một số kết quả khá đẹp gần tương tự với các bất đẳng thức trên.

1. Bỏ dấu căn, chọn $k = 1$.

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}.$$

2. Thay đổi hệ số.

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\geq\frac{2}{ab+bc+ca}.$$

Và kết quả mạnh hơn là

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\geq\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

3. Tổng quát.

$$\frac{1}{pa^2+bc}+\frac{1}{pb^2+ca}+\frac{1}{pc^2+ab}\geq\frac{9}{(p+1)(ab+bc+ca)}.$$

Với mọi $p \geq 3+\sqrt{7}$.

4. Thay đổi điều kiện.

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\geq\frac{4}{a+b+c}.$$

Các bất đẳng thức trên được phát triển từ bài toán mở ban đầu, chúng rất gần nhưng không giúp chúng ta giải quyết bài toán ban đầu được. Ngay với trường hợp tưởng như đơn giản nhất $k = 1$, bài toán chỉ được giải với một lời giải quá dài và phức tạp (mà chỉ có ý nghĩa khẳng định kết quả $2\sqrt{2}$ đúng về mặt toán học). Xem thêm về lớp các bài toán này trong bài viết *Suy luận và phát triển* ở mục trước.

4.9.3 $a/b + b/c + c/a \geq 3$?

Bài toán mở 3. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{a+kb}{c+kb}+\frac{b+kc}{a+kc}+\frac{c+ka}{b+ka},$$

Trong đó a, b, c là các số thực dương và k là hằng số dương cho trước.

Một số kết quả.

Đầu tiên khi cho $k = 0$ ta có bất đẳng thức rất hiển nhiên là

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3.$$

Cũng hoàn toàn tương tự với $k = 1$ vì nó chính là bất đẳng thức $AM - GM$

$$\frac{a+b}{c+b} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{c+a}{b+a} \geq 3.$$

Trong chương II ta cũng đã giải bài toán với $k = 2$. Tất nhiên từ 3 kết quả ứng với $k = 0, 1, 2$ để suy ra min $= 3$ là chưa đủ, và thực tế với $k \geq 4$ giá trị nhỏ nhất của biểu thức không phải là 3 nữa, mà nhỏ hơn. Câu hỏi đặt ra là, hãy xét bất đẳng thức trong một số trường hợp riêng, chẳng hạn tìm một số k nào đó để có thể thay 3 bởi 2 và tìm chặn dưới nhỏ nhất cho mọi $a, b, c, k \geq 0$ của biểu thức

$$\frac{a+kb}{c+kb} + \frac{b+kc}{a+kc} + \frac{c+ka}{b+ka}.$$

4.9.4 Bất đẳng thức hoán vị tổng quát

Vấn đề sau đây đã được nói tới ở trang trước, bạn hãy xem kĩ lại phần *Trở lại vấn đề cổ điển.*

Bài toán mở 4. *Xét các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 3 và biểu thức*

$$P(r,s) = a^r b^s + b^r c^s + c^r a^s,$$

Hãy khảo sát giá trị lớn nhất và bé nhất (nếu có) của $P(r,s)$ theo $r, s \in R$.

Một số kết quả.

Tất nhiên, hai trường hợp ta quan tâm chính là $r, s \geq 0$ và $rs < 0$. Có thể nói việc giải quyết trọn vẹn bài toán này dường như là một việc *không tưởng*, nhưng trong những trường hợp cụ thể ta đã có nhiều kết quả rất ấn tượng. Chẳng hạn, chúng ta đã làm xong trong các trường hợp nhỏ sau đây

- $r = s \geq 0$.
- $r = \frac{3}{2}, s = \frac{1}{2}$.
- $r \geq 3/2, s = 1$ (với $r \geq 0$ tuỳ ý, cần giải bằng một số kiến thức cao cấp).
- $r = 1/2, s = -1/4$.

Lưu ý rằng mỗi trường hợp riêng ở trên đều là các bài toán rất hay và khó.

4.9.5 Chỉ là các bất đẳng thức bậc nhất ?

Bài toán mở 5. *Xây dựng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức bậc nhất có chứa dấu giá trị tuyệt đối, tương tự như đối với các phương pháp S.O.S, dồn biến, quy nạp... của bất đẳng thức đại số thông thường.*

MỘT SỐ KẾT QUẢ.

Trước khi đọc bài toán mở này, các bạn hãy xem thêm phần *Lí thuyết bộ trội và bất đẳng thức Karamata* để hiểu bản chất của vấn đề. Việc đưa từ một bất đẳng thức đại số trở thành một bất đẳng thức số học qua các bộ trội là một phương pháp rất mạnh của bất đẳng thức, nhưng chưa được nghiên cứu kĩ.

Vì thế, tuy rằng một bất đẳng thức bậc cao khi đưa về bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối tưởng rằng sẽ đơn giản hơn nhưng thực chất lại khó hơn hẳn, vì ta chưa có một hệ thống phương pháp chung để giải các bài toán như vậy. Đó cũng chính là dụng ý của tác giả khi nêu lên bài toán trên và rất mong nhận được sự trao đổi thêm của các bạn đối với vấn đề này.

4.9.6 Các dạng tổng bình phương

Việc phân tích một biểu thức thành tổng của các bình phương được nhắc tới rất nhiều trong cuốn sách và nó cũng gắn liền với một phương pháp giải toán rất quan trọng, đó là phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Tuy rằng S.O.S là một phương pháp rất mạnh đối với các bất đẳng thức 3 biến nhưng không phải nó có thể giải được mọi bài toán như vậy. Hãy xem lại một bất đẳng thức nổi tiếng sau

Ví dụ 4.9.1. *Chứng minh với mọi a, b, c không âm ta luôn có*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a^3b + b^3c + c^3a)}.$$

Tuy bất đẳng được tồn tại dưới dạng phát biểu rất đơn giản và đẹp, nhưng một cách giải đẹp và tự nhiên lại dường như không tồn tại. Ngoài cách làm quen thuộc sử dụng tam thức bậc hai thì cách làm còn lại là phân tích biểu thức dưới dạng tổng các bình phương. Tất nhiên, phân tích đặc biệt này hoàn toàn ở bên ngoài suy nghĩ của tác giả bài toán (Vasilc Cirtoajc).

$$\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2)^2 - 6(a^3b+b^3c+c^3a)\\
&= (a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2 + (b^2-2bc+ca-a^2+ab)^2+\\
&+ (c^2-2ca+ab-b^2+bc)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Và lí do mà phương pháp S.O.S không thể sử dụng được ở đây chính là dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra quá lệch nhau. Ngoài trường hợp $a = b = c$ thì đẳng thức còn xảy trong trường hợp sau hoặc các hoán vị

$$(a, b, c) = k\left(\sin^2\frac{4\pi}{7}, \sin^2\frac{2\pi}{7}, \sin^2\frac{\pi}{7}\right).$$

Hãy xét thêm hai bài toán khó sau đây

Ví dụ 4.9.2. (*i*). *Tìm hằng số thực k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c thực*

$$a^4 + b^4 + c^4 + kabc(a + b + c) \geq (k + 1)(a^3b + b^3c + c^3a).$$

(*ii*). *Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 thoả mãn $a^3b + b^3c + c^3a = 0$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{abc(a + b + c)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq \frac{1}{6}.$$

Tác giả sẽ không nêu ra lời giải cụ thể ở đây. các bạn có thể tự giải dựa trên phân tích sau

$$\sum_{cyc}(a^2 - 2b^2 + c^2 + kbc - kca)^2 \geq 0.$$

Chú ý rằng nếu lấy $k = 3$ ta lại thu được ví dụ 4.9.1.

Ví dụ 4.9.3. *Giải hệ phương trình sau trên tập số thực*

$$\begin{cases} 2b^3 - a^3 - c^3 = 3b^2c - 3c^2a \\ 2c^3 - b^3 - a^3 = 3c^2a - 3a^2b \\ 2a^3 - c^3 - b^3 = 3a^2b - 3b^2c \end{cases}$$

Tuy rằng bài toán trên không liên quan tới bất đẳng thức nhiều lắm nhưng nó dựa trên một phân tích rất đặc biệt

$$\sum_{cyc}(a^3 - 2b^3 + c^3 + 3b^2c - 3c^2a)^2 = 6\sum_{cyc} a^3(a - b)^3 - 18\prod_{cyc} a(a - b).$$

Nếu may mắn chọn được những đa thức hợp lí để bình phương ta có thể thu được những kết quả rất đẹp. Nhưng câu hỏi ngược lại là, khi có bất đẳng thức rồi, làm sao để có thể tìm được những đa thức đó thì lại là vấn đề hoàn toàn khác. Do đó cuốn sách này cũng không hề khuyến khích các bài toán dạng này, trừ khi có một lời giải tự nhiên hơn để giải nó. Việc đưa ra các bài toán như vậy chỉ là việc làm cần thiết, vì có thể chính các bạn sẽ gặp bất đẳng thức dạng này trong một số kì thi.

Câu hỏi được đặt ra là

Bài toán mở 6. *(i). Cho $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một đa thức thuộc $R^n[x]$ của n biến thực $x_1, x_2, ..., x_n$. Có tồn tại hay không một thuật toán để phân tích $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ thành tổng các bình phương của các đa thức bậc nhỏ hơn nếu đã biết chắc chắn rằng có một phân tích như vậy. Nói cách khác, tồn tại hay không một thuật toán xác định đa thức $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ có hay không có một phân tích thành tổng các bình phương của các đa thức bậc nhỏ hơn và nếu có, hãy xác định phân tích ấy.*

(ii). Giải bài toán trên trong lớp các đa thức bậc nhỏ 4 hoặc 6 đối với 3 biến a, b, c.

Chỉ giải được câu *(ii)* (mặc dù *(ii)* chỉ là hệ quả của *(i)*) cũng là một bước tiến rất quan trọng. Trên thực tế, chỉ với các biểu thức bậc 4 của 3 biến ta cũng tìm được hàng loạt bất đẳng thức khó dựa trên cách phân tích các bình phương. Bạn đọc hãy xem lại bài toán 2.96 chương II để thấy rõ hơn về vấn đề này.

Hi vọng các câu hỏi mở trong cuốn sách này sẽ nhận được sự cộng tác giúp đỡ của bạn đọc và sẽ dần dần được giải đáp trong các lần xuất bản tiếp theo.

4.10 Tản mạn với bất đẳng thức

4.10.1 Các cặp thuận nghịch

Ít nhất khi đọc được hết cuốn sách bạn sẽ tìm được 3 cặp bất đẳng thức thuận nghịch quan trọng, đó là bất đẳng thức thông thường và dạng phản chứng của nó, bất đẳng thức thuận và dạng nghịch với kĩ thuật lấy đạo hàm, bất đẳng thức với đa thức và bất đẳng thức với các giá trị tuyệt đối bậc nhất. Việc hiểu và nắm rõ về các cặp thuận nghịch này sẽ giúp các bạn có định hướng tốt hơn khi gặp các bài toán bất đẳng thức, hơn thế nữa nó cũng giúp bạn rất nhiều trong việc sáng tạo ra các bài toán. Bất đẳng thức thuận nghịch với tích phân đã được trình bày ở mục trước của cuốn sách, phương pháp phản chứng cũng đã được trình bày khá cụ thể ở chương III nhưng việc biến đổi từ bất đẳng thức đại số thông trường về các bất đẳng thức bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối là một phương pháp mới rất hiệu quả (tác giả vô tình đọc được định lí *Symmetric majorization criterion* ngay trong thời gian viết cuốn sách này). Phải nói rằng đây là một phương pháp chuyển đổi rất kì lạ và tuyệt vời đối với bất đẳng thức. Chẳng hạn bất đẳng thức *Schur* có thể viết lại dưới dạng *gần tương đương* như sau

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|.$$

Lưu ý rằng bất đẳng thức trên suy ra bất đẳng thức *Schur* nhưng không có chiều ngược lại. Rõ ràng, nếu nhìn nhận theo một cách nào đó, thì các bất đẳng thức dạng trên có phần dễ hơn hẳn các bất đẳng thức bậc cao thông thường, nhưng các phương pháp giải các bài toán dạng này lại chưa được nghiên cứu và hệ thống một cách chính xác. Đây chính là câu hỏi 5 trong phần các bài toán mở và hi vọng các bạn sẽ chính là người tìm được chiếc chìa khoá quan trọng này.

4.10.2 Sáng tạo bất đẳng thức

Việc sáng tạo các bất đẳng thức đã rất nhiều lần được nói tới trong cuốn sách này, và đó cũng là một mục tiêu của cuốn sách khi ra mắt bạn đọc. Rõ ràng việc tự sáng tạo ra được một bài toán sẽ thú vị hơn nhiều việc chỉ giải các bài toán do một người khác đặt ra. Tuy nhiên khi các bạn đã hiểu với một mức độ nhất định về bất đẳng thức thì các bạn sẽ nhận ra để nghĩ được một bài toán hay và đẹp là một việc rất khó khăn. Rất nhiều bài toán mà người ra đề tưởng rằng sẽ rất khó nhưng người làm toán chỉ cần giải trong vài dòng.

Điều khó khăn nhất khi chúng ta tiếp cận với bất đẳng thức là sự khẳng định nó có đúng hay không. Thực tế thì khi giải một bài toán mang tính "giả thuyết" là một việc khá mạo hiểm và mất nhiều thời gian, thậm chí sau những cố gắng như vậy thì kết quả thu được chỉ là một phản ví dụ chứng minh bất đẳng thức sai. Nhưng trong toán học thì những điều như thế này hoàn toàn rất bình thường và các bạn không cần phải e ngại khi *tự phủ định* một bài toán mình đặt ra như vậy cả, vì đó sẽ là bước đầu tiên để bạn sáng tạo ra được một bài toán hay và có ý nghĩa.

Chính vì việc đặt ra bài toán trước và giải sau nên các bài toán trong sách sẽ không mang nhiều màu sắc cá nhân hay chủ quan của một ai đó (khi giải các bài toán của các tác giả khác, lời giải trong cuốn sách luôn được nghĩ ra hoàn toàn độc lập với lời giải ban đầu của tác giả bài toán đó). Không có mục đích gì khi tác giả nói như vậy, nhưng nó sẽ giúp các bạn trong khi đọc sách thấy được sự tự nhiên và *không thể khác được* của các lời giải cũng như các vấn đề khác trong cuốn sách, và các bạn cũng có thể tự tin hơn khi chính bạn là người giải các bài toán đó.

4.10.3 Quan điểm về một bài toán bất đẳng thức hay

Theo bạn, thế nào sẽ được coi là một bất đẳng thức hay? Trong khi càng ngày càng nhiều lên các bất đẳng thức như hiện nay, chọn ra được một bài toán hay để giải sẽ là hữu ích. Có lẽ một bất đẳng thức hay, điều kiện đầu tiên nó phải là một bất đẳng thức đẹp, theo nghĩa hình thức phát biểu đơn giản, không có những điều kiện rắc rối phức tạp và ở dạng chuẩn. Dạng chuẩn ở đây theo nghĩa là dạng đối xứng hoặc hoán vị, hoặc là một bài toán tổng quát nếu bài toán mang quá nhiều màu sắc cá thể, chẳng hạn một bất đẳng thức với hệ số lệch sẽ được coi là *hay* khi chúng ta có thể giải được bài toán tổng quát.

Trước kia, người ta hay đề cập đến các bất đẳng thức "khó" theo nghĩa điều kiện quá phức tạp hoặc các biến đổi từ một bài toán cụ thể, nhưng đây không phải là cách làm với bất đẳng thức hiện nay. Rõ ràng khi còn quá nhiều những bất đẳng thức chuẩn cần chúng ta giải quyết thì giải các bài toán kiểu trên là một việc khá mất thời gian và không giúp ích nhiều lắm cho chúng ta. vì nó luôn cố giấu đi một cách gượng ép bản chất thật của bài toán. Chẳng hạn, bạn sẽ nhìn nhận thế nào đối với bất đẳng thức như sau

Ví dụ 4.10.1. *Chứng minh với mọi $a, b, c \geq 0$ ta có*

$$\frac{ab^2(bc-1)}{a^3c+b^2}+\frac{bc^2(ca-1)}{b^3a+c^2}+\frac{ca^2(ab-1)}{c^3b+a^2} \geq \frac{(a+b+c)(abc-1)}{abc+1}.$$

Giải bài toán trên không hề dễ, nhưng ta chỉ quan tâm đến bản chất của nó, là bất đẳng thức sau đây với $a, b, c \geq 0$

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+kb^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+kc^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ka^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{k+2}.$$

Và chỉ cần thay $k = 1/(abc)$ ta sẽ được bài toán ban đầu, nói theo một cách khác, bài toán trên không thể coi là một bài toán hay được.

4.10.4 Học toán trên mạng

Công nghệ thông tin và truyền thông đã ảnh hưởng nhiều tới mọi mặt của đời sống, ngay cả đối với toán học. Hiện nay, để cùng trao đổi thông tin và thảo luận một vấn đề nào đó của toán học dễ dàng hơn nhiều so với một vài năm trước kia, khi mạng Internet chưa phát triển. Có khá nhiều trang web hay về toán để các bạn thảo luận trao đổi và lấy tài liệu, ví dụ như

- **www.mathlinks.ro**
- **www.diendantoanhoc.net**
- **www.kalva.demon.co.uk**
- **www.mathnfriend.net**

Việc học tập và lấy tài liệu trên mạng Internet ngày càng trở nên một việc bắt buộc đối với chúng ta hiện nay, nó cũng giúp chúng ta tiếp cận với những cái mới nhanh hơn và hiệu quả hơn. Bạn nên vào trang *www.google.com.vn* để seach tìm kiếm nguồn tài liệu vô hạn của cả thế giới về tất cả các lĩnh vực. Hai trang web *www.mathlinks.ro* và *www.diendantoanhoc.net* cũng là 2 trang thảo luận về toán sơ cấp, đặc biệt là toán Olympiad rất tốt cho các bạn. Cũng trong thời gian cuốn sách được hoàn thành và ra mắt với bạn đọc, tác giả đã nhận được sự cộng tác giúp đỡ của rất nhiều bạn trên khắp miền đất nước qua trang web *www.diendantoanhoc.net*. Hi vọng rằng thế giới toán học trên mạng sẽ ngày càng gần gũi và trở thành một công cụ hiệu quả, bổ ích với tất cả các bạn trong thời gian không xa.

Phụ lục

Tác giả các bài toán trong sách

- Chương I
  - Gabriel Dospinescu [1.1] Mircea Lascu [1.26] [1.29] [1.73].
  - Vasile Cirtoaje [1.1.20] [1.2.16] [1.2.25] [1.38] [1.46] [1.57] [1.59] [1.75].
  - Trần Nam Dũng [1.9.5] [1.25] [1.45] [1.52] [1.55].
  - Murray Klamkin [1.2.8] [1.2.13] [1.4.7] [1.3] [1.19].
  - Phạm Kim Hùng [1.1.19] [1.1.22] [1.1.24] [1.2.3] [1.2.18] [1.2.23] [1.3.7] [1.4] [1.16] [1.21] [1.41] [1.58] [1.62] [1.66] [1.71] [1.79].
  - Lê Hữu Điền Khuê [1.18] [1.53] Phan Thành Việt [1.42].
  - Walther Janous [1.39] Virgil Nircula [1.1.9].
  - Ho Joo Lee [1.68] Poruh Loh [1.3.4].
  - Manlio Marrangelli [1.2.10] Darij Grinberg [1.2.2].
  - Phạm Duy Hiệp [1.20] Nguyễn Quốc Khánh [1.8.9].
  - Đinh Quang Huy [1.48] [1.64] [1.77] Nguyễn Việt Anh [1.60].
- Chương III
  - Titu Andreescu [3.5.1].
  - Gabriel Dospinescu [3.1.4] [3.1.5] [3.3.3] [3.4.2] [3.5.1] [3.5.8] [3.5.10].
  - Vasile Cirtoaje [3.2.30] [3.1.5] [3.1.4] [3.4.4] [4.4.3] [4.4.4] [4.7.7].
  - Murray Klamkin [3.1.13].
  - Manlio Marrangelli [3.5.12].
  - Hyunsoo Kim [3.5.5].
  - Phạm Kim Hùng [2] [3.1.17] [3.1.18] [3.1.19] [3.2.24] [3.3.6] [3.3.9] [3.4.1] [3.4.3] [3.5.6] [3.5.9] [7].
  - Lê Trung Kiên [3.1.11] [3.2.10].
  - Nguyễn Việt Anh [3.2.23].

Tài liệu tham khảo

- **www.mathlinks.ro.**
- **www.diendantoanhoc.net.**
- **www.kalva.demon.co.uk.**
- **www.mathnfriend.net.**
- **Old and New Inequality, Gil publishing House.**
  Tác giả : Titu Andrcsscu, Vasilc Cirtoajc, Gabriel Dospinescu, Mircca Lascu.
- **Problems and Solutions around the World, 1996 - 2001.**
  Tác giả : Titu Andrcsscu, Zuming Fcng.
- **Bài giảng Giải tích tập I.**
  Tác giả : GS-TSKH Nguyễn Duy Tiến.
- **Bất đẳng thức.**
  Tác giả : GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu.
- **Bài giảng về Bất đẳng thức Cauchy.**
  Tác giả : Nguyễn Vũ Lương, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng.
- **Bất đẳng thức.**
  Tác giả : G.H. Hardy, J.E. Littlcwood, G. Polya.
- **Mathematical Olympiad Challenges.**
  Tác giả : Titu Andrcsscu, Răzvan Gclca.
- **Crux Mathematicorum and Crux with Mayhem.**
  Tạp chí toán học Canada.
- **Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.**
- **Tạp chí American Mathematical Monthly.**
- **IMO Shortlist, 1990-2004.**
- **Seclected Problems from International Mathematical Olympiads, XXX-XXXVI.**
- **Olympic Toán học châu Á Thái Bình Dương, 1989-2002.**
- **Các đề thi Olympic Toán học Quốc tế, 1965-2005.**
- **Tuyển tập đề thi Olympiad 30-4.**

SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC
Phạm Kim Hùng
NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC
53 Nguyễn Du – Hà Nội
Tel: (844) 945 4661
Fax: (844) 945 4660
Email: lienhe@nxbtrithuc.com.vn

Chịu trách nhiệm xuất bản
CHU HẢO

Biên tập: NGUYỄN BÍCH THUỶ
Trình bầy: PHẠM KIM HÙNG
Vẽ bìa: TRẦN PHƯƠNG
Sửa bản in: TRẦN PHƯƠNG