Khoa Kinh tế-Luật ĐHQG Tp HCM

# GIÁO TRÌNH MÔN TOÁN - THỐNG KÊ
# TOÁN C1

# TẬP HỢP

## I. Khái niệm tập hợp

### 1. Tập hợp và phần tử

Khái niệm tập hợp là một trong những khái niệm đầu tiên của toán học không được định nghĩa.

Do đó ta có thể hiểu một cách đơn giản tập hợp là một gom góp các vật thể mà ta gọi là ***phần tử.***

Người ta kí hiệu tập hợp bởi các chữ in hoa A, B, C, …, X, Y… Các phần tử của tập hợp được kí hiệu bởi các chữ in thường a, b, …,x, y…

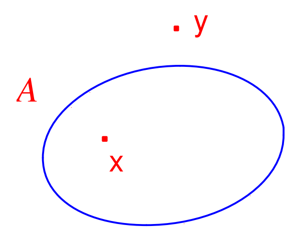
*Ví dụ 1*: ◘ Tập hợp các số tự nhiên từ 1 đến 10.

◘ Tập hợp người Việt Nam.

◘ Tập hợp những người yêu nhau.

◘ Tập hợp những bạn nam trong lớp cao trên 1,65m.

- Nếu $x$ là một phần tử của tập hợp $A$, ta kí hiệu $x \in A$.
- Nếu $y$ không là phần tử của tập hợp $A$ kí hiệu $y \notin A$.




*Biểu đồ Ven của tập hợp A*

### 2. Cách xác định tập hợp

a) ***Liệt kê phần tử:*** Liệt kê các phần tử của tập hợp giữa hai dấu $\{\ \}$.

*Ví dụ 2*: a) Tập hợp $A$ những số tự nhiên từ 1 đến 5 được kí hiệu là $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

b) Tập hợp $B$ những nghiệm thực của phương trình $x^2 - x = 0$ là $B = \{0,\ 1\}$.

*Ví dụ 3*: Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau.

a) Không có gì quý hơn độc lập tự do.

b) Tập hợp $A$ các số chính phương không vượt quá 100.

**b) Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử**

Trong vài trường hợp, chẳng hạn như cho A là tập hợp các số nguyên dương, thì việc liệt kê phần tử trở nên rất khó khăn. Khi đó thay vì liệt kê phần tử ta có thể chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử đó là A = { x | x là số nguyên dương }.

*Ví dụ 4*: Tập hợp $B$ các nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$ được viết theo ***tính chất đặc trưng*** là

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle|\ 2x^2 - 5x + 3 = 0\right\}$$

Tập hợp $B$ được viết theo ***cách liệt kê phần tử*** là: $B = \left\{1,\ \dfrac{3}{2}\right\}$.

*Ví dụ 5*: Cho tập hợp $C=\{-15,\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ 15\}$. Viết tập $C$ bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

*Ví dụ 6*: Xét tập hợp $D=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\ 3\le n\le 20\right\}$. Hãy viết tập $D$ bằng cách liệt kê phần tử của nó

### 3. Tập hợp rỗng

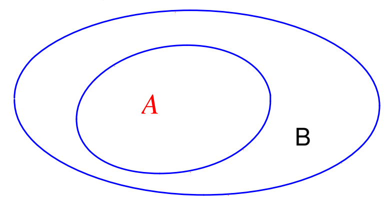
- Tập hợp không chứa phần tử nào là tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$

*Ví dụ 7*: Cho $E=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\ x^2+x+1=0\right\}$ thì $E=\varnothing$ vì phương trình $x^2+x+1=0$ vô nghiệm

## II. Tập hợp con

**1) Định nghĩa:** Tập $A$ được gọi là ***tập con*** của tập $B$ và kí hiệu là $A\subset B$, nếu mọi phần tử của tập hợp $A$ đều là phần tử của tập hợp $B$.

Hay; $\boxed{A\subset B\Leftrightarrow\forall x\left(x\in A\Rightarrow x\in B\right)}$




Thay cho $A\subset B$, ta cũng có thể viết $B\supset A$ (đọc là $B$ chứa $A$)

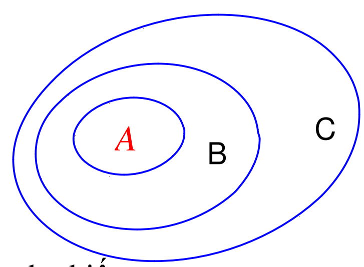
Nếu $A$ không phải là tập con của $B$, ta viết $A\not\subset B$

**2) Tính chất:** Từ định nghĩa ta suy ra

a) $A\subset A$, *với mọi tập hợp* $A$

b) Nếu $A\subset B,\ B\subset C$ thì $A\subset C$

c) $\varnothing\subset A$, với mọi tập hợp $A$




▲ **Câu hỏi:** Cho $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|\ -1\le x\le 3\right\}$. Hãy cho biết:

◘ Các tập con của $A$ có chứa phần tử 2 và 3.

◘ Các tập con của $A$ không chứa 0, 1.

◘ Hãy cho một tập hợp $C$ thoả $C\not\subset A$ và $\{-1,\ 2,\ 3\}\subset C$.

## III. Tập hợp bằng nhau

Khi $A\subset B$ và $B\subset A$ ta nói tập hợp $A$ bằng tập hợp $B$ và viết là $A=B$. Như vậy

$$\boxed{A=B\Leftrightarrow\forall x\left(x\in A\Leftrightarrow x\in B\right)}$$

*Ví dụ 8*: Xét hai tập hợp $A=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\ n \text{ là bội của 4 và } 6\right\}$

$$B=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\ n \text{ là bội của } 12\right\}$$

1) Hãy kiểm tra các kết luận sau:

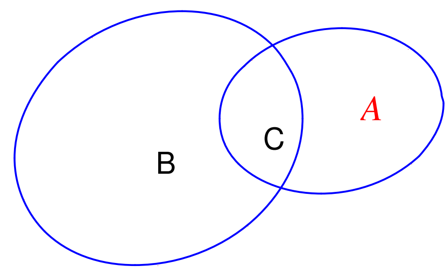
a) $A\subset B$ b) $B\subset A$

2) A có bằng B không?

## IV. Các phép toán trên tập hợp

### 1. Giao của hai tập hợp

Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Giao của $A$ và $B$, kí hiệu là $A \cap B$ là tập hợp các phần tử vừa thuộc $A$ vừa thuộc $B$




Tức là

$$\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}}$$

*Ví dụ 1*: Cho $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} |\ -2 \le x \le 3\}$$

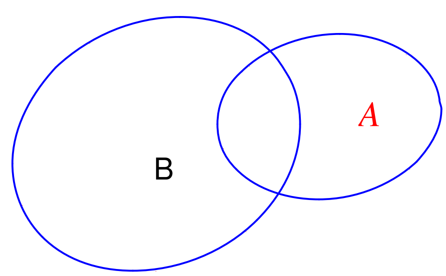
$$C = \{x \in \mathbb{R} |\ 2x^2 - 3x = 0\}$$

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp $B$ và $C$

b) Tìm $A \cap B,\ B \cap C$ và $A \cap C$

### 2. Hợp của hai tập hợp

Cho hai tập hợp $A$ và $B$, hợp của hai tập hợp $A$ và $B$, kí hiệu $A \cup B$ là tập hợp các phần tử thuộc $A$ hoặc thuộc $B$




Tức là

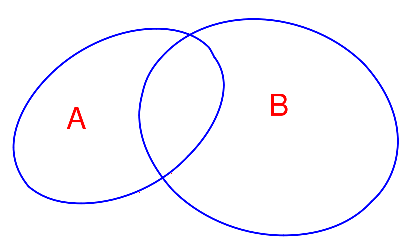
$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.}$$

*Ví dụ 2*: Với các tập hợp $A,\ B$ và $C$ trong ví dụ 1 thì

- $A \cup B = \{................................\}$
- $B \cup C = \{................................\}$
- $(A \cap B) \cup C = \{................................\}$

### 3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Cho hai tập hợp $A$ và $B$. Hiệu của hai tập hợp $A$ và $B$, kí hiệu là $A \setminus B$ là tập hợp các phần tử ***chỉ*** thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$.




Tức là:

$$\boxed{x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}}$$

➢ Đặc biệt: Khi $B \subset A$ thì phần hiệu $A \setminus B$ được gọi là ***phần bù*** của $B$ trong $A$. Kí hiệu là $C_A B$

*Ví dụ 3*: Cho $A$ là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và $B$ là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Hãy diễn đạt bằng lời các tập hợp sau

a) $A \cap B$ c) $A \setminus B$

. b) $A \cup B$ d) $B \setminus A$

**4. Một số các tập con của tập hợp số thực**

Trong các chương sau, ta thường sử dụng các tập con sau đây của tập số thực $\mathbb{R}$

| Tên gọi và kí hiệu | Tập hợp | Biểu diễn trên trục số |
|---|---|---|
| Tập số thực $(-\infty;\ +\infty)$ | $\mathbb{R}$ | |
| Đoạn $[a;\ b]$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ | |
| Khoảng $(a;\ b)$ | ........................................ | |
| Nửa khoảng $[a;\ b)$ | ..................................... | |
| Nửa khoảng $(a;\ b]$ | ..................................... | |
| Nửa khoảng $(-\infty;\ a]$ | .................................... | |
| Nửa khoảng $[a;\ +\infty)$ | .................................... | |
| Khoảng $(-\infty;\ a)$ | ..................................... | |
| Khoảng $(a;\ +\infty)$ | ..................................... | |

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm cô cực, kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực; $a$ và $b$ được gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng .

## Bài tập

1. a) Cho $A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x < 20$ và $x$ chia hết cho $3\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $A$

b) Cho tập hợp $B = \{2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30\}$. Xác định $B$ bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

c) Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp các học sinh lớp em cao dưới 1m60

2. Trong hai tập hợp $A$ và $B$ dưới đây, tập hợp nào là tập hợp con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp $A$ và $B$ có bằng nhau không?

a) $A$ là tập hợp các hình vuông $B$ là tập hợp các hình thoi

b) $A = \{ n \in \mathbb{N} | \, n$ là một ước chung của 24 và 30$\}$

$B = \{ n \in \mathbb{N} | \, n$ là một ước của 6$\}$

3. Tìm tất cả các tập con của tập hợp sau

a) $A = \{a,\ b\}$ b) $B = \{0,\ 1,\ 2\}$

4. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} | \ 2n + 1 < 16\}$. b) $B = \{n \in \mathbb{N} | \ n^2 < 16\}$.

c) $C = \left\{ x | \ x = \dfrac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, \text{và } x \geq \dfrac{1}{8} \right\}$. d) $D = \{x \in \mathbb{R} | \ x(2x+1)(x^2 - 2) = 0\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} | \ x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$. f) $F = \{x \in \mathbb{R} | \ x^2 - 4 = 0\}$.

g) $G = \{x \in \mathbb{N} | \ x > x^2\}$. h) $H = \left\{ x \in \mathbb{R} | \ \begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \right\}$.

i) $K = \{x \in \mathbb{Z} | \ |x| < 4\}$. j) $L = \{x \in \mathbb{N} | \ x(1-x)(x^2 - 2) = 0\}$.

5. Xác định các tập hợp sau bằng phương pháp nêu tính chất đặc trưng:

a) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$. b) $B = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36\}$.

c) $C = \left\{ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{32},\ \dfrac{1}{64} \right\}$. d) $D = \{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$

6. Tập hợp $A$ có bao nhiêu tập con, nếu:

a) $A$ có 2 phần tử. b) $A$ có 3 phần tử.

c) $A$ có 4 phần tử.

7. Cho $A = \varnothing; B = \{a\}; C = \{a, b\}; D = \{a, b, c\}$. Hãy viết ra tất cả các tập hợp con của $A$, $B$, $C$, $D$.

8. Cho hai tập hợp: $A = \{3k + 1 | \ k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{6l + 4 | \ l \in \mathbb{Z}\}$. Chứng tỏ rằng $B \subset A$.

9. Cho tập hợp $A$, hãy xác định $A \cap A,\ A \cup A,\ A \cap \varnothing,\ A \cup \varnothing,\ C_A A,\ C_A \varnothing$.

10. Cho 3 tập hợp

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ $B = \{2,\ 4,\ 6\}$ $C = \{1,\ 3,\ 5\}$

Tìm $A \cup B,\ A \cap B,\ (A \cup B) \cap C,\ (A \cap B) \cup C,\ A \setminus B,\ (B \setminus C) \cap A$.

11. Cho $A = \{0\ ;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$, $B = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ và $C = \{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$. Hãy tìm

a) $A \cap (B \cap C)$ b) $A \cup (B \cup C)$ c) $A \cap (B \cup C)$

d) $(A \cup B) \cap C$ e) $(A \cap B) \cup C$

12. Cho tập hợp *A* các số tự nhiên là ước của 18, tập hợp *B* các số tự nhiên là ước của 30. Xác định các tập hợp $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$.

13. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x^2 < 9\}$.

a) Liệt kê các phần tử của *A*, *B*. b) Tìm tất cả các tập con của *B*.

c) Tìm $A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$.

14. Tìm tất cả các tập *X* sao cho $\{1,\ 2\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

15. Cho $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 10\}$ và các tập con của *E*:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 6\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$.

a) Viết các tập *E*, *A* bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm phần bù trong *E* của *A* và *B*.

c) Tính số tập con có một phần tử và 9 phần tử của *E*.

16. Cho: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)(x^2+x-2) = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$ và $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 4\}$.

a) Liệt kê các phần tử của *A*, *B*, *C*.

b) Xác định $B \setminus (A \cap C); (B \cup C) \setminus A; (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

c) So sánh $B \setminus (A \cup C)$ và $(B \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

# HÀM SỐ

## I. Khái niệm về hàm số

Trong giáo trình này chúng ta chỉ xét trường hợp đặc biệt của hàm số đó là ***hàm số thực.***

### 1. Ánh xạ

Giả sử X, Y là hai tập hợp tùy ý khác rỗng cho trước. Một phép liên kết f tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với duy nhất phần tử $y = f(x) \in Y$ được gọi là *một ánh xạ từ X vào Y.*

Kí hiệu:
$$\begin{aligned} f &: X \to Y \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

Khi đó: 
- X gọi là tập hợp nguồn ( *tập xác định*) .
- Y gọi là tập hợp đích ( *tập giá trị*).

Người ta thường kí hiệu tập xác định là $D_f$, tập giá trị là $R_f$

*Ví dụ 1:*

a) Giả sử X ={1, 2} và Y={a, b, c}. Tương ứng $1 \to a,\ 2 \to b$ cho ta một ánh xạ $f: X \to Y$

b) Giả sử Z={1, 2, 3, 4} và T={a, b, c}. Tương ứng $1 \to a, 2 \to b, 3 \to c, 4 \to a$ cho ta một ánh xạ $f: Z \to T$

c) Giả sử Z ={1, 2, 3, 4} và T={a, b, c}. Tương ứng $1 \to a, 1 \to b, 3 \to c, 4 \to a$ không phải là một ánh xạ

### 2. Định nghĩa hàm số

Ánh xạ f sao cho với mỗi giá trị $x \in D_f$ có một và chỉ một giá trị tương ứng $y \in \mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số thực.***

Kí hiệu:
$$\begin{aligned} f &: X \to \mathbb{R} \\ x &\to y = f(x) \end{aligned}$$

- Ta gọi là $x$ là ***biến số*** và $y = f(x)$ là ***hàm số*** của $x$.
- Tập hợp $D_f$ được gọi là ***tập xác định*** của hàm số

❖ Một hàm số có thể được cho dưới dạng *bảng*, *biểu đồ* hoặc bằng công *thức*.

***Ghi chú*:** Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta có quy ước sau:

***Tập xác định của hàm số*** *$y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực $x$ sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa*

*Ví dụ 2: Xét các biểu thức sau, biểu thức nào là hàm số? Hãy tìm tập xác định của chúng*

a) $\begin{aligned} & f: X \to \mathbb{R} \\ & x \to y = f(x) = x + 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} & f: X \to \mathbb{R} \\ & x \to y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} & f: X \to X \\ & x \to y = f(x) = x \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} & f: X \to \mathbb{R} \\ & x \to y = f(x) = c \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} & f: X \to \mathbb{R} \\ & x \to y = f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \ge 1 \\ x^2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} & f: X \to \mathbb{R} \\ & x \to y = f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \ge 1 \\ 8 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$

*Ví dụ 3:*

*a) Giả sử chi phí cho thức ăn trung bình hàng tuần của hộ gia đình ( C ) phụ thuộc vào mức thu nhập trung bình hàng tuần của hộ gia đình đó ( I ) theo mối quan hệ $C = 12 + 0,3I$.*

*i) Đây có phải là hàm số không? Vì sao?*

*ii) Tìm giá trị của C khi I bằng 800, 1500, 2000?*

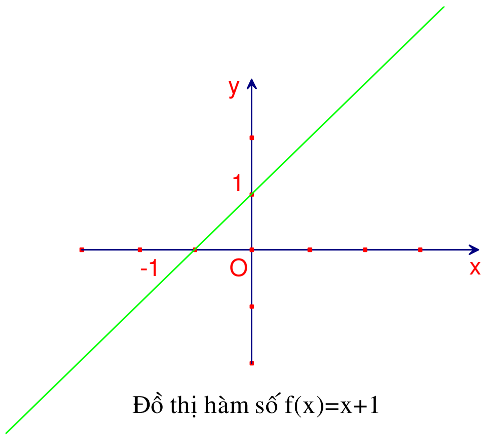
*b) Jeff Simpson lập kế hoạch cho công việc kinh doanh của riêng mình: sản xuất và buôn bán xe đạp. Anh ấy muốn tính điểm hòa vốn – là điểm mà tổng thu nhập bằng với chi phí bỏ ra. Hay nói đơn giản đó là điểm mà Jeff không muốn phải lỗ vốn( tiền).Jeff đã ước tính chi phí cố định hàng tháng như (thuê mặt bằng, gas, nước, điện thoại, bảo hiểm, v.v) là vào khoảng $1000 mỗi tháng. Những chi phí khác như: nguyên vật liệu, sản xuất, tiền trả cho nhân viên được gom vào gọi là biến chi phí và sẽ gia tăng tuyến tính. Mở đầu là biến chi phí cho việc sản xuất 500 chiếc xe đạp với giá $9000 mỗi tháng. Jeff đã xác định rằng nếu bán 500 chiếc xe đạp với giá $25 mỗi chiếc thì anh ấy sẽ thu về số tiền là 25*500=1250$. Hỏi điểm hòa vốn mà Jeff quan tâm có giá trị là bao nhiêu ?.*

## II. Đồ thị của hàm số

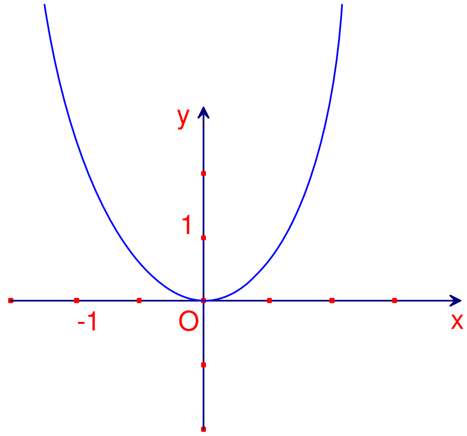
***Đồ thị*** của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $D_f$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in D_f$

*Ví dụ 4:*

*a) Vẽ đồ thị hàm số f(x)=2x+1; g(x)=* $g(x)=\frac{1}{2}x^2$




Đồ thị hàm số f(x)=x+1




Đồ thị hàm số g(x)=1/2x2

*b) Vẽ đồ thị hàm số sau*

$f: X \to \mathbb{R}$

$$x \to y = f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 & \text{khi } x<1 \end{cases}$$

**III. Các phép toán đối với hàm số**

**1. Hàm số mới**

Cho hai hàm số f có tập xác định là $D_f$ và g có tập xác định là $D_g$, ta định nghĩa:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$
$$(\frac{f}{g})(x) = f(x)/g(x)$$

*Lưu ý:* Tập xác định của các hàm số kết hợp này là phần giao nhau giữa tập xác định của hàm số f và g, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

Riêng đối với hàm số $(f/g)(x)$ thì $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g / g(x) \neq 0\}$.

*Ví dụ 4:*

*a) Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \sqrt{4-x^2}$. *Tìm* $(f \pm g)(x); (f.g)(x);$ $(f/g)(x)$ *và tập xác định của các hàm số mới này.*

*Giải:*

*Tập xác định của hàm số* $f(x) = \sqrt{x}$ *bao gồm các giá trị của x sao cho* $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, *như vậy ta được* $D_f = [0,\infty)$, *tương tự ta được* $D_g = [-2,2]$. *Phần giao của hai tập xác định* là $D_f \cap D_g = [0,\infty) \cap [-2,2] = [0,2]$. *Dựa trên cách hình thành các hàm số mới từ hai hàm số f(x) và g(x) ta có*

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x^2}; D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0,2]$$
$$(f.g)(x) = \sqrt{x} * \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x-x^3}; D_{fg} = D_f \cap D_g = [0,2]$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}; D_{\frac{f}{g}} = [0,2)$$

*Ví dụ 5:*

*b) Cho hàm số* $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$, $g(x) = x-3$. *Tìm* $(f \pm g)(x); (f.g)(x); \quad (f/g)(x); 7.f$. *Tìm tập xác định tương ứng của các hàm số vừa tìm được?*

*c) Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \sqrt{x}$. *Tìm (f.g)(x) và tập xác định của hàm số mới .*

## 2. Hàm số hợp

*Ví dụ 6:*

Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3; g(x) = \sqrt{x}$. Ta có: $f_0 g = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$

và $g_0 f = g(f(x)) = \sqrt{x^2+3}$

*Ví dụ 7:*

a) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3; g(y) = \sqrt{y+1}$. Tìm $f_0 g = f(g(y))$ ?.

b) Cho $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1/x, h(x) = x^3$. Tìm $(f_0 g_0 h)(x) = f(g(h(x)))$ ?.

❖ **Vậy nếu biến số của một hàm số này được thay bằng hàm số của một biến số mới nào đó thì ta có *"hàm hợp"*.**

$$(f_0 g)(x) = f(g(x))$$

Tập xác định của hàm hợp là tập hợp tất cả các giá trị của biến số sau cùng sao cho biểu thức thu được có ý nghĩa.

*Ví dụ 8: Giả sử nhu cầu của một mặt hàng được cho bởi hàm* $P = 80 - 0,2Q$, *hàm tổng doanh thu có dạng như thế nào ?*

**Giải:** Vì doanh thu ( $TR$ ) được tính bằng tổng số tiền kiếm được khi bán sản phẩm nên $TR = P.Q$. Vậy $TR$ là một hàm số hợp. Thay $P = 80 - 0,2Q$, ta có $TR = (80 - 0,2.Q).Q = 80Q - 0,2Q^2$.

*Ví dụ 9: Cho hàm số* $F(x)=\cos^2(x+9)$. *Tìm các hàm số f(x), g(x) và h(x) sao cho* $F=f\circ g\circ h$

### 3. Hàm ngược

Hàm số ngược của một hàm số là sự đảo ngược mối quan hệ của hàm số đó. Do đó, nếu hàm số $f: X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho $y=f(x)$ thì hàm ngược x được cho bởi công thức $x=g(y)$.

*Ví dụ 10:*

Cho hàm số: $y=4+5x$ thì hàm số ngược của nó là $x=0,2y-0,8$.

❖ ***Lưu ý:*** Không phải tất cả các hàm số đều có hàm số ngược. Điều kiện cần thiết để một hàm số có hàm số ngược là hàm số đó phải "đơn điệu". Điều này đảm bảo rằng với mỗi giá trị của x ta có một giá trị duy nhất của y và ngược lại.

*Ví dụ 11:*

Xét hàm số $y=9x-x^2$ với $x\in[0;9]$. Mỗi giá trị của x tương ứng với một giá trị duy nhất của y, nhưng có một vài giá trị của y lại tương ứng với hai giá trị của x, chẳng hạn như $y=14;18;20$. Do đó hàm số này không đơn điệu và nó không có hàm ngược.

*Ví dụ 12: Trong các hàm số sau hàm số nào có hàm số ngược?*

a) $\begin{array}{l} f: X\to\mathbb{R} \\ \quad x\to y=f(x)=\sqrt{x+1}\end{array}$

b) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\to y=f(x)=x^2+1\end{array}$

c) $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}\to[0,+\infty) \\ \quad x\to y=f(x)=x^2\end{array}$

d) $\begin{array}{l} f: (-\infty;0]\to[0,+\infty) \\ \quad x\to y=f(x)=x^2\end{array}$

*Ví dụ 13:* Để đổi nhiệt độ từ độ F sang độ C, người ta dùng công thức:

$^0C=\frac{5}{9}\left(^0F-32\right)$. Hãy tìm công thức đổi từ độ C sang độ F?

## IV. Hàm số sơ cấp

Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép toán số học( cộng, trừ, nhân, chia), các phép lấy hàm hợp của các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số, hàm ngược.

*Ví dụ 14:*

a)

$y = 3^x + x^2 - 4;$ $\quad y = \cos 2x + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + 5$

$y = \sqrt[3]{x} - \lg(2x-7) + 2;$ $\quad y = \dfrac{x + \sqrt{1-x^2} + \sin x}{x-3}$ là những hàm số sơ cấp

$y = \arccos x$

$y = \text{arctg}(\sqrt{2x+1})$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{khi } x \geq 0 \\ 2x - 8, \text{khi } x < 0 \end{cases}$ không phải là hàm số sơ cấp

***Chú ý:*** Trong các loại hàm số sơ cấp người ta đặc biệt chú ý đến hai loại hàm số: các đa thức và các phân thức hữu tỉ (còn gọi là hàm số hữu tỉ).

*Ví dụ 13:*

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, a_k \in \mathbb{R}$$

$$P_3(x) = \sqrt{2} + \lg(5) + \sin\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}x + x^2 - \sqrt{5}x^3$$

$$F(x) = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m}$$

**1. Hàm số lũy thừa** $y = f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

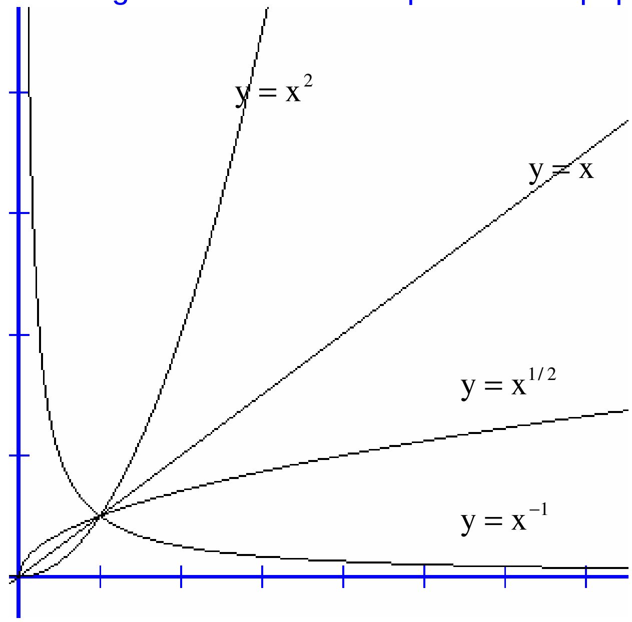
Tập xác định của hàm số lũy thừa phụ thuộc vào $\alpha$.

Với $\alpha \in \mathbb{N}$: tập xác định $D_f = \mathbb{R}$

Với $\alpha$ nguyên âm: tập xác định $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

…

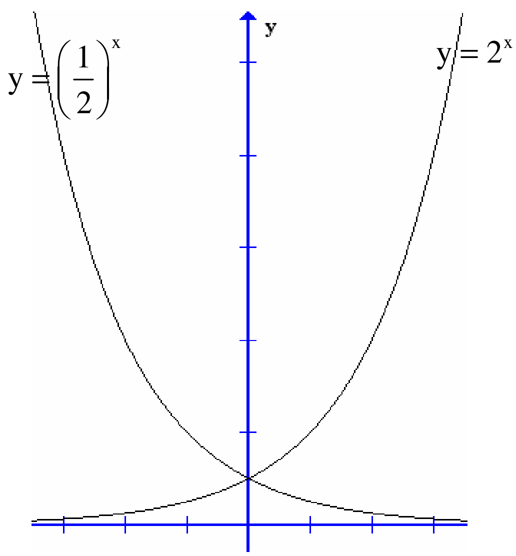
Đồ thị của hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm (1,1) và qua O(0,0) nếu $\alpha > 0$, không đi qua O(0,0) nếu $\alpha > 0$




**2. Hàm số mũ** $y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

Tập xác định của hàm số là $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (0, +\infty)$

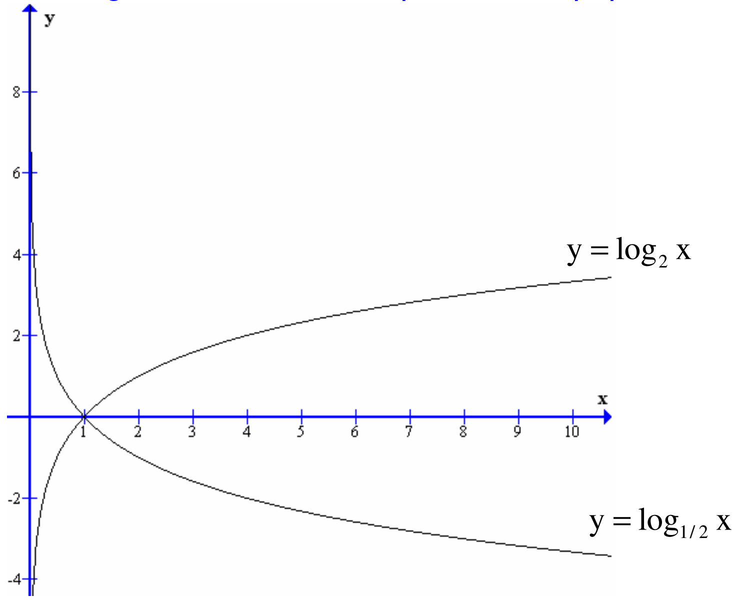
Đồ thị của hàm số $y = a^x$ luôn đi qua điểm (0,1)




**3. Hàm số logarit** $y = f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

Tập xác định của hàm số logarit là $D_f = (0, +\infty)$

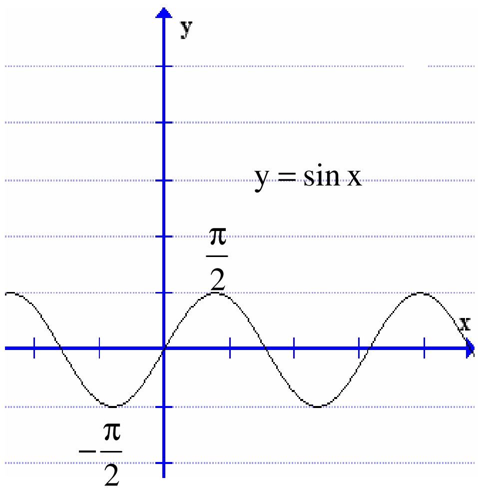
Đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm (1,0)

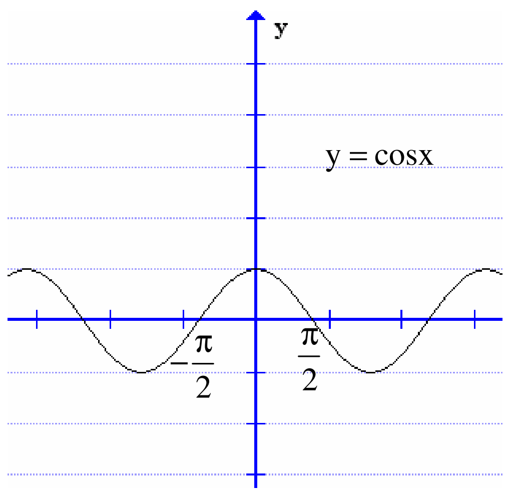



**4. Hàm số lượng giác** $y = f(x) = \sin x, \cos x, tgx, cotgx$

Tập xác định của hàm số y=sinx, y= cosx là $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1,1]$

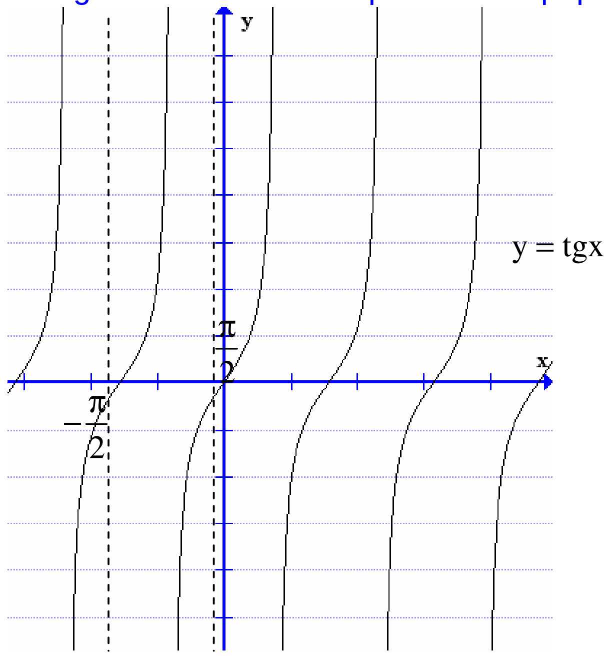
Đồ thị của hàm số y = sinx, y=cosx



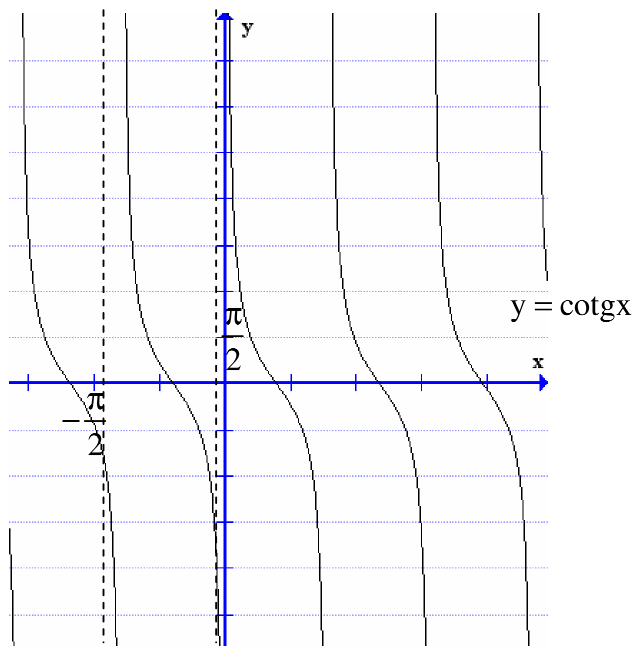

Tập xác định của hàm số y= tgx là $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $R_f = \mathbb{R}$

Đồ thị của hàm số y= tgx




Tập xác định của hàm số y= cotgx là $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $R_f = \mathbb{R}$

Đồ thị của hàm số y=cotgx

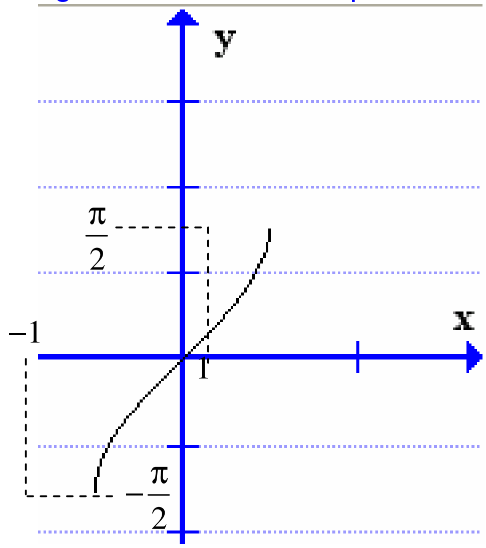



**5. Hàm lượng giác ngược**

**5.1 Hàm số** $y = f(x) = \arcsin x$

Tập xác định của hàm số là $D_f = [-1,1], R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

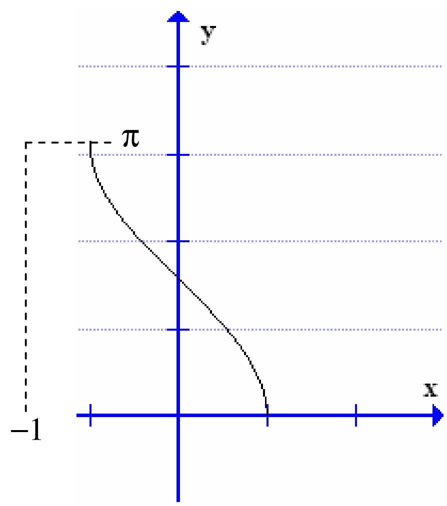
Đồ thị của hàm số y= arcsinx




**5.2 Hàm số** y= f(x)=arccosx

Tập xác định của hàm số là $D_f = [-1,1], R_f = [0,\pi]$

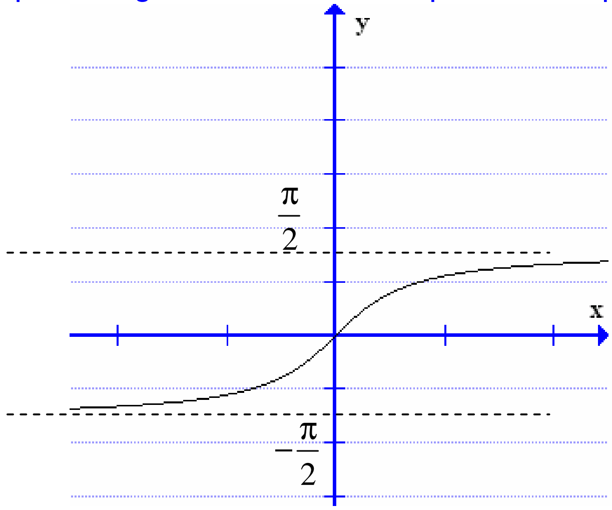
Đồ thị của hàm số y= arccosx




**5.3 Hàm số** y=f(x)=arctg(x)

Tập xác định của hàm số là $D_f = \mathbb{R}, R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Đồ thị của hàm số y=arctg(x)




**5.4 Hàm số** y=f(x) =arccotgx

Tập xác định của hàm số là $D_f = \mathbb{R}, R_f = [0,\pi]$

Đồ thị của hàm số y=arccotg(x)

## V. Một vài tính chất của hàm số

**1. Hàm số đơn điệu:** Cho hàm số $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a;\ b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;\ b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;\ b)$ nếu $\forall x_1,\ x_2 \in (a;\ b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

**Ghi chú:** Từ định nghĩa, ta suy ra:

➢ $f$ ***tăng trên*** $(a;\ b) \Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in (a;\ b), x_1 \neq x_2, \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

➢ $f$ ***giảm trên*** $(a;\ b) \Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2 \in (a;\ b),\ x_1 \neq x_2,\ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

*Ví dụ 14*: Xét tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số trên các khoảng đã cho

a) $y = -3x^2 + 6x + 8$ trên $(-10;\ -2)$

**Giải:** $\forall x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-3x_1^2 + 6x_1 + 8 - (-3x_2^2 + 6x_2 + 8)}{x_1 - x_2} = -3(x_1 + x_2) + 6 \qquad (1)$$

○ Trên $(-10;\ -2)$, ta có $\begin{cases} x_1 < -2 \\ x_2 < -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < -2 - 2 = -4$

$$\Rightarrow -3(x_1 + x_2) > 12$$

Từ (1), trên khoảng đã cho $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 18 > 0$

Và do đó hàm số đồng biến.

b) $y = \dfrac{x}{x-7}$ trên $(-\infty;\ 7)$ và $(7;\ +\infty)$.

**2. Hàm số bị chặn**

Hàm số gọi là bị chặn ( bị chặn trên hoặc chặn dưới) nếu tập giá trị của nó bị chặn ( bị chặn trên hoặc bị chặn dưới).

Ví dụ 15: Xét tính bị chặn của hàm số sau

**3. Hàm số chẵn và lẻ**

Cho hàm số $f$ xác định trên $D$

- $f$ là hàm chẵn $\Leftrightarrow \forall x \in D$ thì $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- $f$ là hàm lẻ $\Leftrightarrow \forall x \in D$ thì $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

*Ví dụ 15*: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = -2x$

**Giải:**

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn

b) $y = 3x^2 - 1$ c) $y = \sqrt{2x+9}$ d) $y = -5x^2 - 3|x| + 8$

**4. Hàm số tuần hoàn**

Hàm số f gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $\mathrm{m} \neq 0$ sao cho

$$(\forall \mathrm{x} \in \mathrm{D_f}) \qquad \mathrm{f(x+m) = f(x)}$$

Số dương bé nhất trong các số $m$ thỏa mãn đẳng thức trên gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn

*Ví dụ 16: Hàm sinx là hàm tuần hoàn với chu kì là* $2\pi$. *Nhưng hàm số f(x) =c là hàm tuần hoàn nhưng lại không có chu kì.*

**Chương 2**

# PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

## §1. GIỚI HẠN – LIÊN TỤC

### I. Dãy số - Giới hạn dãy số.

1. Dãy số

**1.1 Định nghĩa**

*Dãy số là một tập hợp các số được viết theo một thứ tự xác định:* $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$.

Để chỉ dãy số đó, người ta thường dùng kí hiệu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hay gọn hơn $\{x_n\}$.

Trong chương này, ta chỉ xét các dãy số thực. Dãy số thực là một ánh xạ :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto f(n) = x_n$$

Kí hiệu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hay $\{x_n\}$.

Lúc đó:

- $n$ được gọi là *chỉ số.*
- $x_n$ được gọi là *số hạng tổng quát của dãy.*

*Chú ý:* Dãy số còn có thể xác định bởi công thức tổng quát $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2 \\ x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}, \forall n \geq 3 \end{cases}$

<u>**Ghi chú**</u>: Ta thường xét dãy số thực là ánh xạ từ $\mathbb{N}^*$ vào $\mathbb{R}$.

*Ví dụ 1.*

$a)\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$;

$b)\left\{(-1)^n\right\} = \left\{-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...\right\}$;

$c)\left\{n^2\right\} = \left\{1, 4, 9, ..., n^2, ...\right\}$;

$d)\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\right\}$.

➢ Dãy số $\{x_n\}$ gọi là tăng nếu $x_n < x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, gọi là giảm nếu $x_n > x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Trong ví dụ 1, dãy a) là dãy số giảm, dãy c) là dãy số tăng. Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi là *dãy số đơn điệu.*

➢ Dãy số $\{x_n\}$ gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $x_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$; gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $x_n \geq m,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$; gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

*Ví dụ 2.* Trong ví dụ 1

Dãy a) là dãy số giảm, nó bị chặn dưới bởi 0 và bị chặn trên bởi 1;

Dãy b) không phải là dãy số đơn điệu, nó bị chặn dưới bởi -1 và bị chặn trên bởi 1;

Dãy c) là dãy tăng, nó bị chặn dưới bởi 1 nhưng không bị chặn trên, do đó nó không bị chặn;

Dãy d) là dãy số tăng, nó bị chặn dưới bởi 0 và bị chặn trên bởi 1.

**2. Các dãy số đặc biệt**

**2.1 Dãy số cộng**

**2.1.1 Định nghĩa**

Là một dãy số thoả mãn điều kiện: hai phần tử liên tiếp nhau sai khác nhau một hằng số. Chẳng hạn, dãy số 3, 5, 7, 9, 11, ... là một cấp số cộng với các phân tử liên tiếp sai khác nhau hằng số 2.

Hằng số sai khác chung được gọi là **công sai** của cấp số cộng. Các phần tử của nó cũng được gọi là các số hạng.

**2.1.2 Số hạng tổng quát**

Nếu cấp số cộng khởi đầu là phần tử $u_1$ và công sai là $d$, thì số hạng thứ $n$ của cấp số cộng được tính theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

**2.1.3 Tổng**

Tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng được gọi là tổng riêng thứ *n*. Ta có:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

**2.2 Dãy số nhân**

**2.2.1 Định nghĩa**

Là một dãy số thoả mãn điều kiện tỷ số của hai phần tử liên tiếp là hằng số. Tỷ số này được gọi là công bội của cấp số nhân. Các phần tử của cấp số nhân còn được gọi là các số hạng.Như vậy, một cấp số nhân có dạng

$$a, ar, ar^2, ar^3, ...$$

Trong đó $r \neq 0$ là công bội và a là số hạng đầu tiên

**2.2.2 Số hạng tổng quát**

Số hạng thứ n của cấp số nhân được tính bằng công thức

$a_n = ar^{n-1}$ trong đó n là số nguyên thỏa mãn n>1

Công bội khi đó là

$r = \left(\frac{a_n}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}, r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a}}$ trong đó n là số nguyên thỏa mãn $n \geq 1$

**2.2.3 Tổng**

Tổng các phần tử của cấp số nhân :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = ar^0 + ar^1 + ar^2 + ... + ar^n$$

Hay $S_n = \dfrac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$

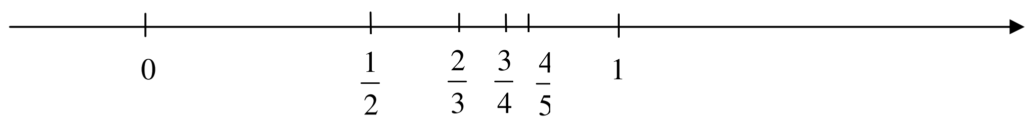
**2.3 Dãy Fibonacci**

**Dãy Fibonacci** là dãy vô hạn các số tự nhiên bắt đầu bằng hai phần tử 0 và 1, các phần tử sau đó được thiết lập theo quy tắc *mỗi phần tử luôn bằng tổng hai phần tử trước nó*. Công thức truy hồi của dãy Fibonacci là:

$$F_n := F(n) := \begin{cases} 0 & ,\text{khi } n = 0 \\ 1 & ,\text{khi } n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & ,\text{khi } n > 1 \end{cases}$$

**3. Giới hạn của dãy số**

Trở lại dãy d) của ví dụ 1. Biểu diễn hình học của nó được cho ở hình sau:




Ta nhận thấy rằng khi n càng lớn thì $x_n$ càng gần 1, tức là khoảng cách $|x_n - 1|$ càng nhỏ, nó có thể nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn.

Ta nói rằng dãy $\{x_n\}$ gần tới 1 ( hay có giới hạn là 1) khi n dần tới vô cùng.

Ta có định nghĩa sau:

**Định nghĩa:** Số a gọi là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ nếu với mọi số $\varepsilon$ dương bé tùy ý cho trước, tồn tại một số tự nhiên $n_0$ sao cho với mọi $n > n_0$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$.

Ta viết: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ hay $x_n \to a$ khi $n \to \infty$.

Khi đó, dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ*. Dãy số không hội tụ được gọi là *phân kì*.

<u>*Chú ý:*</u> Chỉ số $n_0$ phụ thuộc vào $\varepsilon$ , nên ta có thể viết $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

*Ví dụ 3.*

a) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$, ta sẽ chỉ ra rằng tìm được $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ để cho $|x_n - 0| = \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n > n_0$. Ta có, $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ khi $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tức là khi $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Vậy chỉ cần chọn $n_0(\varepsilon) = \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$ thì với $n > n_0$ ta có $|x_n - 0| < \varepsilon$.

b) Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-3}{n+1}$

**4. Các Tính chất và định lý về giới hạn dãy số**

Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số, có thể chứng minh được các định lý sau:

**Định lý 1**. a) *Nếu một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

b) *Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.*

*Chú thích*: Mệnh đề b) của định lý 1 là điều kiện cần của dãy số hội tụ. Từ đó suy ra rằng nếu một dãy số không bị chặn thì nó không có giới hạn. Chẳng hạn, dãy c) trong ví dụ 1 không có giới hạn vì nó không bị chặn.

**Định lý 2**. *Nếu các dãy số* $\{x_n\}$ *và* $\{y_n\}$ *đều có giới hạn (* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to a; \lim\limits_{n\to\infty} y_n \to b$ *) thì*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n . y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n . \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.b$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$ ( với điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$).

*Ví dụ 4.* Tính giới hạn các dãy số sau

a) $\{a_n\} = \frac{1}{n^2}, \{b_n\} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

b) $\{a_n\} = \frac{1}{n^2}, \{b_n\} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$

c) $\{a_n\} = \frac{1}{n^2}, \{b_n\} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

d) $\{a_n\} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \{b_n\} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

*Chú ý*: Trong tính toán về giới hạn, có khi ta gặp các dạng sau đây gọi là dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty-\infty, \ldots$ . Khi đó không thể dùng các kết quả của định lý 2, mà phải dùng các phép biến đổi để khử các dạng vô định đó.

Chẳng hạn, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+5}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Ta biến đổi: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3}$.

**4.1 Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn**

**Định lý 3**. *Cho 3 dãy số* $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$. *Nếu:*

*a)* $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \le y_n \le z_n$;

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

*thì dãy* $\{y_n\}$ *có giới hạn và* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

**Định lý 4.** a) *Nếu dãy số tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.*

b) *Nếu dãy số giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.*

**Định lý 5.** *Dãy số* $\{x_n\}$ *được gọi là dãy cơ bản ( hay dãy Cauchy) nếu với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại số* $n_0 > 0$ *sao cho* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ *với mọi chỉ số n, m >* $n_0$.

Ý nghĩa: *Kể từ một lúc nào đó trở đi hai phần tử bất kỳ của dãy số gần nhau bao nhiêu cũng được.*

### 4.2 Các ví dụ về giới hạn của dãy số

*Ví dụ 5.* Cho dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$. Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$. Với k nào thì $x_k$ nằm ngoài khoảng $L = \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1000}; \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1000}\right)$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{9n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3 - \frac{5}{n}\right)}{n\left(9 + \frac{4}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{n}}{9 + \frac{4}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Khoảng cách từ $x_n$ đến $\dfrac{1}{3}$ bằng $\left|x_n - \dfrac{1}{3}\right| = \left|\dfrac{3n-5}{9n+4} - \dfrac{1}{3}\right| = \left|-\dfrac{19}{3(9n+4)}\right| = \dfrac{19}{3(9n+4)}$;

x nằm ngoài khoảng L khi và chỉ khi $\left|x - \dfrac{1}{3}\right| > \dfrac{1}{1000}$ hay $\dfrac{19}{3(9n+4)} > \dfrac{1}{1000}$.

Do đó $n < \dfrac{18988}{27} = 703\dfrac{7}{27}$. Vậy các số của dãy nằm ngoài khoảng L là $x_1, x_2, \ldots, x_{703}$.

*Ví dụ 6.* Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Ta có $\dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2.2...2}{1.2.3...n} = 2.1.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{4}...\dfrac{2}{n} < 2.1.\dfrac{2}{3}.\underbrace{\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}...\dfrac{1}{2}}_{(n-3)\text{ số}} = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

*Ví dụ 7.* Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$

*Giải.*

a) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n+4}{2+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + 1} = 3$.

b) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{7}{n^2}}\right)=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$.

*Ví dụ 8. Tìm giới hạn của các dãy số $\{x_n\}$ sau:*

*a)* $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$ *b)* $x_n=\sqrt[3]{n^2-n^3}+n$ *c)* $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$.

*Giải.*

a) Khi $n\to\infty$, $x_n=\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$ có dạng vô định $\infty-\infty$. Muốn khử dạng vô định ấy, ta nhân tử và mẫu của $x_n$ với lượng liên hợp $\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}$, ta được:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}=+\infty$$

b) Ta có $n^2-n^3=n^3\left(\dfrac{1}{n}-1\right)\to-\infty$ khi $n\to\infty$, vì vậy $x_n=\sqrt[3]{n^2-n^3}+n$ có dạng $\infty-\infty$. Nhân tử và mẫu của $x_n$ với lượng liên hợp $\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2$, ta được:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}$$

c) Ta có $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\dfrac{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{n}}\right)}=\sqrt[4]{n}.\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{n}}}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{n}.\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\dfrac{1}{n}}}=+\infty$.

*Ví dụ 9. Tìm giới hạn của các dãy số $\{x_n\}$ sau:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n^2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n^2+3n-2)}{4n^3-n^2+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

**4.3 Giới hạn mở rộng**

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$

*Ví dụ 10.*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2+5\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2+5n\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n n^2\right|$

*Giải.*

a) Ta có $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$

**4.4 Một số giới hạn đặc biệt**

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0(\alpha>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0 & ,0<q<1\\ \infty & ,q>1\\ 1 & ,q=1\end{cases}$$

Ngoài ra nếu q =-1 thì giới hạn không tồn tại

*Ví dụ 11.* Tính giới hạn các dãy số sau

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2.4^n}{5.4^n-2^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}...\sqrt[2n]{2}\right)$

## II. Giới hạn của hàm số

*Ví dụ 12.* Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. Khi gán cho x lần lượt các giá trị càng dần về 1 từ 2 phía ( <1, >1) nhưng rất gần 1 thì f(x) càng dần về 3

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0.8 | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1 | 1.000001 | 1.0001 | 1.001 | 1.05 | 1.1 |
| f(x) | 2.8 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | | 3.000001 | 3.0001 | 3.01 | 3.05 | 3.1 |

Tương tự khi gán cho x các giá trị dần về 2 từ 2 phía ( <2, >2) nhưng rất gần 2 thì f(x) càng dần về 4

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1.8 | 1.9 | 1.99 | 1.9999 | 2 | 2.000001 | 2.00001 | 2.001 | 2.05 | 2.1 |
| f(x) | 3.8 | 3.9 | 3.99 | 3.9999 | | 4.000001 | 4.00001 | 4.001 | 4.05 | 4.1 |

*Nhận xét rằng f(x) không tồn tại giá trị tại 2 nhưng các giá trị của f(x) khi x dần về 2 cho ta cảm nhận rằng f(x) sẽ có giá trị xấp xỉ là 4 khi x tiến về 2 từ cả hai phía*

### 1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định ở lân cận điểm a (có thể trừ tại a ). Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là A khi x dần tới a nếu với mọi số $\varepsilon>0$ cho trước, đều tồn tại một số $\delta>0$ sao cho khi $|x-a|<\delta$ thì $|f(x)-A|<\varepsilon$, kí hiệu là $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ hay $f(x)\to A$ khi $x\to a$.

*Ví dụ 13.* Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Ta cần chỉ ra rằng nếu cho trước số $\varepsilon>0$, thì tìm được số $\delta>0$ sao cho $|2x+1-3|<\varepsilon$ hay $|2(x-1)|<\varepsilon$ nếu $|x-1|<\delta$. Ta có $|2(x-1)|=2|x-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vậy lấy $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, ta có $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

*Chú ý:* Trong định nghĩa trên, khi nói x dần tới a, có thể x > a, cũng có thể x < a. Nếu khi x dần tới a về phía trái (tức là x dần tới a và x luôn nhỏ hơn a) mà $f(x)$ dần tới giới hạn A thì A gọi là giới hạn trái tại a, kí hiệu là: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Tương tự, người ta định nghĩa giới hạn phải tại a, kí hiệu là: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Hàm số $f(x)$ có giới hạn A khi $x\to a$ khi và chỉ khi nó giới hạn trái tại a và giới hạn phải tại a và hai giới hạn ấy đều bằng A: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$.

*Ví dụ 14.* Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ 1-x & ,x>0 \end{cases}$. Tìm giới hạn của $f(x)$?

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

Do đó $f(x)$ không có giới hạn khi $x\to 0$.

*Ví dụ 15.* Tính giới hạn các hàm số sau khi $x\to 0$:

a) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

b) $f(x)=\frac{1}{x}$

*Ví dụ 16.* Tính giới hạn 1 phía, 2 phía các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{2x+5}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x-3}{2^x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{|x|}$

f) $\lim\limits_{x\to3}\frac{-1}{(x-3)^2}$

g) $\lim\limits_{x\to1^+}2^{\frac{1}{x-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to1^-}2^{\frac{1}{x-1}}$

l) $f(x)=\begin{cases} x & x>2 \\ 3x & x\le 2\end{cases}$

*Nhận xét:* Hàm số có thể có giới hạn một phía nhưng không phải lúc nào cũng có giới hạn 2 phía suy ra giới hạn không phải tồn tại đối với mọi hàm số

**2. Các phép toán về giới hạn**

**Định lý 5.** Giả sử $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$. Khi đó:

i) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B$

ii) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=A.B$

iii) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$, nếu $B\neq 0$.

iv) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{A};\ A>0$, n chẵn

v) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^k=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^k=A^k, k\in\mathbb{R}$.

vi) $\lim\limits_{x\to a}b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=b^A, b>0$.

vii) $\lim\limits_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)=\log_b A(A>0, 0<b<1 \text{ or } b>1)$.

*Chú ý:* Trong quá trình tìm giới hạn của hàm số ta nếu gặp một số các dạng vô định sau: $\infty-\infty; 0.\infty; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{\frac{1}{\infty}}; \frac{\infty}{\frac{1}{0}}; 1^\infty; 0^0, \infty^0, \ldots$. thì phải tìm cách biến đổi để khử chúng.

*Ví dụ 17.*

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3x^2+x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(3x^2+x-1\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}3x^2+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}1}==\frac{1}{3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}-1}=\frac{4}{3\pi^2+2\pi-4}$

b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\left(x^2-3\right)^2}{5x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2-3).\lim\limits_{x\to2}\left(x^2-3\right)}{\lim\limits_{x\to2}(5x)-\lim\limits_{x\to2}2}=\frac{1.1}{10-2}=\frac{1}{8}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^3}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^3}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}=0$

*Ví dụ 18.*

a) Xét $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Ở đây ta gặp dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Khi $x\to 1$, có thể xem $x\neq 1$,

Ta khai triển $\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

b) Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Vì $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ nên $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

*Ví dụ 19. Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x^5-4x^3+2x-9)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^4-4x^3+2x-9)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-x}{2x^3-5}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+5}-x^3\right)$

g) $f(x)=\begin{cases}2x^2+5 & x<0\\ \dfrac{3-5x^3}{1+4x+x^3} & x\geq 0\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

**3. Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn của hàm số:**

**Định lý 6.**

a) Nếu ở lân cận của a, các hàm số $f_1(x), f_2(x), f(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức: $f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x)$.

b) Nếu các hàm số $f_1(x), f_2(x)$ có giới hạn khi $x\to a$, $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=A$ thì hàm số $f(x)$ cũng có giới hạn khi $x\to a$ và $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A.$

**Định lý 7.**

a) Nếu ở lân cận ở điểm a, hàm số $f(x)$ tăng và bị chặn trên bởi số M thì tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le M$.

b) Nếu ở lân cận ở điểm a, hàm số $f(x)$ giảm và bị chặn dưới bởi số m thì tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ge m$.

Hai định lý này cho phép ta tìm một giới hạn quan trọng, chẳng hạn như: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, ...Từ đó dựa vào những giới hạn này ta có thể giải được nhiều bài toán tính giới hạn khác.

*Ví dụ 20. Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

b) Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. Đặt $\arcsin x = t$, ta có $x = \sin t$. Khi $x \to 0$ thì $t \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}} = 1$

c) Tương tự, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x} = 1$.

*Ví dụ 21. Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^x$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+3}$

*Giải.*

a) $\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^x = \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ có dạng $1^\infty$ khi $x \to \infty$ . Đặt x = 3t, khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$. Vậy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{3}{t}\right)^t = \lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^3 = e^3.$$

b) $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+3}$ có dạng $1^\infty$ khi $x \to \infty$. Ta có $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+3} = \left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Đặt $x-1 = 3t$, ta có $x = 3t+1$. Khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$. Vậy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t+4} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}.\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 = e^3.1 = e^3.$$

*Ví dụ 22. Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2+3x^n}{1-x^m}$; $\quad n, m \in \mathbb{N}^*$

d) $\lim\limits_{x\to 4^+} \sqrt{x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

**4. Một số giới hạn cơ bản**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^\alpha} = 0 \,(\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

*Ví dụ 23. Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{7x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{5\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 - 3\sin x}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x}$

**5. Vô cùng bé và vô cùng lớn**

**5.1 Định nghĩa**

- Hàm số $f(x)$ gọi là một vô cùng bé ( viết tắt là VCB ) khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Trong đó a có thể là hữu han hay vô cùng. Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, ta có thể suy ra rằng nếu $f(x) \to A$ khi $x \to a$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$, với $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

- Hàm số $F(x)$ gọi là một vô cùng lớn ( viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu $\lim_{x\to a}|F(x)| = +\infty$.

Có thể dễ dàng thấy rằng nếu $f(x)$ là một VCB khi $x \to a$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là một VCL và ngược lại.

*Ví dụ 24. Tính các giới hạn sau:*

a) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)$ c) $\lim_{x\to 0}(\sin x)$ e) $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)$ g) $\lim_{x\to 0}\left(3x^4+x\right)$

b) $\lim_{x\to 0}x^2$ d) $\lim_{x\to 0}x$ f) $\lim_{x\to 0}e^x-1$ h) $\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^4+x\right)}{5x^4}$

### 5.2 Tính chất

Nếu $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to a$ thì $f(x) \pm g(x), f(x).g(x)$ cũng là những VCB khi $x \to a$.

Nếu $f(x), g(x)$ là hai VCL cùng dấu khi $x \to a$ thì $f(x) \pm g(x)$ cũng là một VCL khi $x \to a$. Tích của hai VCL khi $x \to a$ cũng là một VCL khi $x \to a$.

*Ví dụ 25. Tình giới hạn sau*

$\lim_{x\to 0}(x^{10}-7x^8+x^2\ln(1+2x^2)(1-\cos 3x)$

### 5.3 So sánh các VCB

***a) Bậc của các VCB***

**Định nghĩa**. Giả sử $\alpha(x), \beta(x)$ là hai VCB khi $x \to a$.

Nếu $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ VCB bậc cao hơn $\beta(x)$ hay $\beta(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\alpha(x)$

Nều $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$hay $\beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$

Nều $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A(\neq 0, \neq \infty)$, ta nói rằng $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc. Đặc biệt khi A =1 ta nói $\alpha(x), \beta(x)$ là tương đương với nhau, ký hiệu là $\alpha(x) \sim \beta(x)$

Nếu $\alpha(x)$ là VCB ngang cấp với $\beta^k(x)(k>0)$thì ta nói $\alpha(x)$là VCB cấp k so với VCB $\beta(x)$

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ không tồn tại, ta nói rằng không thể so sánh hai VCB $\alpha(x)$ và $\beta(x)$.

*Ví dụ 26.*

a) $1-\cos x$ và 2x đều là những VCB khi $x\to 0$. Vì

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=0$$

Nên $1-\cos x$ là VCB bậc cao hơn 2x.

b) $x.\sin\frac{1}{x}$ và 2x là những VCB khi $x\to 0$, Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$

nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nên $x\sin\frac{1}{x}$ và 2x là hai VCB khi $x\to 0$ không so sánh được với nhau.

c) 1 –cosx và $x^2$ là hai VCB ngang cấp khi $x\to 0$, và do đó 1 – cosx cũng là VCB cấp hai so với $x^2$, vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

d) sinx và $x^2$ đều là những VCB khi $x\to 0$, vì $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ nên sinx là VCB cấp thấp hơn $x^2$ hay $x^2$ là VCB cấp cao hơn sinx.

***b) Vô cùng bé tương đương***

**Định nghĩa:** Hai VCB khi $x\to a$ gọi là tương đương với nhau nếu

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\ ,$$

*Kí hiệu* : $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Nếu $\alpha(x)\to 0$ khi $x\to a$ thì :

$$\begin{cases}\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\\ acr\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\end{cases}\qquad \begin{cases}tg\alpha(x)\sim\alpha(x),\\ arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{\alpha^2(x)}{2}\\ \ln(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}[1+\alpha(x)]^k-1\sim k\alpha(x)\\ e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\end{cases}$$

**Định lý 8:** Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x\to a,\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\beta(x)\sim\beta_1(x)$ khi $x\to a$ thì $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

- Thật vậy, vì $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\beta(x)\sim\beta_1(x)$, ta có

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1, \lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$

Do đó : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}.\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}.\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

**Định lý 9**: (quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao). Nếu $\alpha(x),\beta(x)$ là các VCB khi $x\to a, \beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$ thì khi $x\to a$

$$\alpha(x)+\beta(x)\sim\alpha(x).$$

- Thật vậy, ta có $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)=1+\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$

*Ví dụ 27. Chứng minh rằng* $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}\sim\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ *khi* $x\to 0$.

Khi $x\to 0$ thì $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}=\sin x^{\frac{3}{4}}\sim x^{\frac{3}{4}}$;

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}=\sqrt{x^2+x^{\frac{3}{2}}}\sim\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}=x^{\frac{3}{4}}.$$

Vì bậc của $x^2$ cao hơn bậc của $x^{\frac{3}{2}}$. Do đó $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}\sim\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ khi $x\to 0$.

*Ví dụ 28.* Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-arctg^2x}{3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{tg^3x-6\sin^2 x+x-5x^3}$

*Giải.*

a) Ta có $\sin 2x+\arcsin^2 x-arctg^2x\sim 2x+x^2-x^2=2x$ khi $x\to 0$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-arctg^2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

b) Ta biến đổi tử số:

$$1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4\sim$$

$$\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2+2x-x^3+3x^4\sim 2x \text{ khi } x\to 0$$

Còn mẫu số tương đương với $x^3-6x^2+x-5x^3\sim x$ khi $x\to 0$

Vậy ta được: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$.

*Ví dụ 29. Tính các giới hạn sau sử dụng các VCB tương đương*

$a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$

$b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$

$c)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$

$d)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}$

$e)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{10}-7x^8+x^2\ln(1+2x^2)(1-\cos 4x)}{\sin^3 x.(e^{x^2}-1).arctg(3x)+x^7-x^8}$

$f)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3\sin^4(x-1).(e^{x-1}-1)}{\left(\left[1+(x-1)^2\right]^3-1\right)\arcsin(x\text{-}1)^6+(x-1)^9}$

### *c)* So sánh các VCL

Giả sử $F(x)$ và $G(x)$ là hai VCL khi $x\to a$.

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\infty$, ta nói $F(x)$ là VCL bậc cao hơn $G(x)$ khi $x\to a$

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=0$, ta nói $F(x)$ là VCL bậc thấp hơn $G(x)$ khi $x\to a$

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=A(\neq 0,\neq\infty)$, ta nói $F(x)$ và $G(x)$ là những VCL cùng bậc.

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=1$, ta nói $F(x)$ và $G(x)$ là hai VCL tương đương khi $x\to a$ kí hệu $F(x)\sim G(x)$ khi $x\to a$ .

Cũng như đối với các VCB, ta dễ dàng chứng minh đượccác định lý sau.

**Định lý 10**: Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai VCL khi $x\to a$, $F(x)\sim F_1(x), G(x)\sim G_1(x)$ khi $x\to a$ thì :

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F_1(x)}{G_1(x)}$$

**Định lý 11:** Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai VCL khi $x\to a$, $G(x)$ là VCL bậc thấp hơn $F(x)$ thì khi $x\to a$, $F(x)+G(x)\sim F(x)$ (Quy tắc ngắt bỏ các VCL).

*Ví dụ 30.* Tính các giới hạn sau

$a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-\sqrt{x^5}+6x}{12x^3+x^2-6\sqrt{x}}$

$b)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{23}-\sqrt{x^5}+6x+4x^{10}-8x^{30}}{12x^{13}+x^2-6\sqrt{x}+x^{25}-1000x^{30}}$

$c)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+3x^2}-\sqrt{x^4-1}\right)$

$d)\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

*Giải.*

a) Ta có $7x^3-\sqrt{x^5}+6x\sim 7x^3$ khi $x\to\infty$

$12x^3+x^2-6\sqrt{x}\sim 12x^3$ khi $x\to\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-\sqrt{x^5}+6x}{12x^3+x^2-6\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3}{12x^3}=\dfrac{7}{12}$.

## III. Hàm số liên tục

### 1. Định nghĩa

**Định nghĩa 1**. Cho f là một hàm số liên tục trong khoảng (a, b ), $x_0$ là một điểm thuộc ( a, b). Người ta nói rằng hàm số f liên tục tại $x_0$ nếu:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

Nếu hàm số f không liên tục tại $x_0$, ta nói rằng nó gián đoạn tại $x_0$.

Nếu đặt: $x=x_0+\Delta x,\ \Delta y=f(x)-f(x_0)$, thì đẳng thức (1) có thể viết là:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0 \text{ hay } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

*Ví dụ 31.* Chứng minh hàm số $y=x^2$ liên tục tại mọi $x_0\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x\in\mathbb{R}$ đặt $x=x_0+\Delta x$ thì $y_0=x_0,\ \Delta y=x^2-x_0^2=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$;

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=2x_0.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$ (đpcm).

*Ví dụ 32.* Chứng minh hàm số $y=\sin x$ liên tục tại mọi $x_0\in\mathbb{R}$.

Ta có: $x_0\in\mathbb{R}$, đặt $x=x_0+\Delta x$ thì $y_0=\sin x_0,|\ \Delta y|=|\sin x-\sin x_0|=|\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0|=$

$$=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

Do đó $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Tương tự như vậy, có thể chứng minh được rằng mọi hàm số sơ cấp cơ bản đều liên tục tại những điểm thuộc miền xác định của nó.

*Nhận xét:* Để dễ dàng trong tính tóan người ta thường phát biểu định nghĩa 1 dưới dạng sau:

i) $f(x_0)$ phải xác định

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ phải tồn tại

iii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

*Ví dụ 33. Xét sự liên tục của các hàm số sau*

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

*Giải.*

a) Ta có $f(x) = x^2 - 2x + 3$ là một hàm số sơ cấp nên xác định, có giới hạn $\forall x \in D_f$. Nên hàm số liên tục tại mọi x thuộc tập xác định $D_f$

b) Ta có $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ là một phân thức hữu tỉ ( là một dạng của hàm số sơ cấp) nên hàm số xác định, có giới hạn $\forall x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$. Nên hàm số cũng liên tục tại mọi x thuộc $D_f$. Riêng tại x=2, 3 ta nghi ngờ rằng hàm số có hoặc không liên tục nên ta làm như sau:

* Khi x= 3 thì ta kiểm tra 3 điều kiện của hàm liên tục:

i) $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow g(3) = \dfrac{0}{0}$ không xác định nên ta có thể bỏ qua 2 điều kiện kia và kết luận hàm số không liên tục tại x=3.

* Tương tự khi x=2.

*Ví dụ 34. Xét tính liên tục của hàm số* $f(x) = |x|$.

**Định nghĩa 2. (Liên tục trái, phải)**

*** Liên tục trái**

Một hàm số f được gọi là liên tục trái tại một điểm x =c thuộc $D_f$ nếu thỏa mãn 3 điều kiện sau

- f(c) được định nghĩa ( xác định).
- $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ phải tồn tại.
- $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.

Ta phát biểu tương tự cho trường hợp liên tục phải.

**Định nghĩa 2**. Hàm số f được gọi là liên tục trong khoảng mở ( a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó; được gọi là liên tục trong khoảng đóng [a, b] nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng mở (a, b), liên tục phải tại a và liên tục trái tại b.

*Ví dụ 35. Tìm tất cả các giá trị của x mà tại đó hàm số f(x) không liên tục*

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & x<1 \\ x^2-3x+4 & 1\le x\le 3 \\ 5-x & x>3 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$c) k(x) = \frac{x+3}{|x^2+3x|}$$

**2. Các phép toán về hàm số liên tục**

Từ các định lý về giới hạn của tổng, tích, thương và từ định nghĩa của hàm số liên tục tại một điểm, có thể dễ dàng suy ra:

**Định lý 12**. Nếu f và g là hai hàm số liên tục tại $x_0$ thì:

a) f + g liên tục tại $x_0$.

b) f.g liên tục tại $x_0$.

c) $\frac{f}{g}$ liên tục tại $x_0$ nếu $g(x)\neq 0$.

**Định lý 13**.Nếu hàm số $u=\varphi(x)$ liên tục tại $x_0$, hàm số $y=f(u)$ liên tục tại $u_0=\varphi(x_0)$ thì hàm số hợp $y=(f\circ g)(x)=f\left[\varphi(x)\right]$ liên tục tại $x_0$.

*Ví dụ 36. Xét tính liên tục của các hàm số sau:*

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{khi } x\neq 0 \\ 1, & \text{khi } x=0 \end{cases} \qquad c) f(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}, & \text{khi } x\neq \pi \\ \frac{1}{2}, & \text{khi } x=\pi \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{khi } x\neq 0 \\ a, & \text{khi } x=0 \end{cases} \qquad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{-1+e^{3x}}, & \text{khi } x>0 \\ \frac{2}{3}, & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$$

**2.1 Tính chất của hàm số liên tục**

Các định lý sau đây nêu lên những tính chất cơ bản của hàm số liên tục.

**Định lý 14.** Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] thì nó bị chặn trong đoạn đó, tức là tồn tại hai số m và M sao cho

$$m\le f(x)\le M \qquad \forall x\in[a,b].$$

**Định lý 15**. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a, b] thì nó đạt giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn đó, tức là tồn tại hai điểm $x_1, x_2\in[a,b]$ sao cho:

$$f(x_1)=m\le f(x) \qquad \forall x\in[a,b];$$

$$f(x_2)=M\ge f(x) \qquad \forall x\in[a,b].$$

**Định lý 16**. ( Định lý về giá trị trung gian) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn [a, b], m và M là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của nó trên đoạn đó thì mọi số $\mu$ nằm giữa m và M, luôn tồn tại điểm $\xi \in [a,b]$ sao cho: $f(\xi)=\mu$.

**Hệ quả.** Nếu $f(x)$ liên tục trên [a, b], $f(a).f(b)<0$ thì trong khoảng (a, b) tồn tại một điểm $\xi$ sao cho $f(\xi)=0$.

*Chú ý:* Dùng tính chất của hàm số liên tục, ta chứng minh được các công thức sau: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a$. Từ đó ta có thể suy ra rằng nếu $\alpha(x)\to 0$ khi $x\to a$ thì khi $x\to a$:

$$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x);$$
$$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x);$$
$$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a.$$

**2.2 Các ví dụ**

*Ví dụ 37.* Tính $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

Khi $x\to\pm\infty$, các tử số và mẫu số đều là các VCL. Theo nguyên tắc ngắt bỏ các VCL

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2x^2}}{4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{2}}{4x}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\qquad\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

*Ví dụ 38.* Tìm $\lim\limits_{x\to\pm\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}=5^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x+3}}=5^2=25$

*Ví dụ 39.* Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$.

Ta phải khử dạng vô định $\frac{0}{0}$. Đặt $26+x=z^3$, suy ra $x=z^3-26$.

Khi $x\to 1$ thì $z^3\to 27$ hay $z\to 3$. Ta có

$$\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\frac{2(z^3-26)-2}{z-3}=\frac{2z^3-54}{z-3}=\frac{2(z^3-27)}{z-3}=\frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3}=2(z^2+3z+9)$$

khi $z\neq 3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim\limits_{z\to 3}2(z^2+3z+9)=54$

*Ví dụ 40.* Tìm $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

Đặt $f(x)=\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$, có dạng $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to\dfrac{\pi}{6}$. Đặt $x-\dfrac{\pi}{6}=z$. Khi $x\to\dfrac{\pi}{6}$ thì $z\to 0$. Ta có

$$f(x)=\frac{\sin z}{\sqrt{3}-2\cos\left(z+\dfrac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sin z}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos z+\sin z}=\frac{2\sin\dfrac{z}{2}\cos\dfrac{z}{2}}{\sqrt{3}.2\sin^2\dfrac{z}{2}+2\sin\dfrac{z}{2}\cos\dfrac{z}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\dfrac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\dfrac{z}{2}+\cos\dfrac{z}{2}} \qquad \text{(khi } z\neq 0\text{)}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos\dfrac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\dfrac{z}{2}+\cos\dfrac{z}{2}}=1$

*Ví dụ 41*. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Đặt $f(x)=\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$, ta có dạng $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to 0$. Ta có

$$f(x)=\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\frac{2\sin x.\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}.$$

khi $x\to 0, \sin x\sim x, \sin^2\dfrac{x}{2}\sim\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{4}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x.\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x.\dfrac{x^2}{4}}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{4\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

*Ví dụ 42*. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$.

Ta gặp dạng $1^\infty$ khi $x\to 0$. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.

*Ví dụ 43*. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$

Ta phải khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Khi $x\to 0$ thì : $\ln(1+x)\sim x$ và $3^x-1\sim x\ln 3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\ln 3}=\dfrac{1}{\ln 3}$.

*Ví dụ 44*. Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

Ở đây, ta có dạng vô định $1^{\infty}$ khi $x \to \infty$. Ta có

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

*Ví dụ 45. Tính các giới hạn sau:*

$$\text{a)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{\frac{x^2-2x+2}{x+1}}$$

$$\text{b)} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{3x^2+3}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$$

$$\text{c)} \lim_{x\to 0}\left[\frac{5^x-4^x}{x^2+x}\right]^x$$

**3. Điểm gián đoạn của hàm số**

- Hàm số $f(x)$ gọi là gián đoạn tại $x_0$ nếu nó không liên tục tại $x_0$. Vậy $x_0$ là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu:
  - Hoặc $f(x)$ không xác định tại $x_0$;
  - Hoặc $f(x)$ xác định tại $x_0$, nhưng $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;
  - Hoặc không tồn tại $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
- Nếu $f(x)$ không xác định tại $x_0$, nhưng $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ thì $x_0$ gọi là điểm gián đoạn bỏ được. Chỉ cần xác định trên hàm f tại $x = x_0$ bằng cách cho $f(x_0)$ bằng giá trị chung của hai giới hạn trên, hàm f trở thành liên tục cả tại $x_0$.
- Nếu tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ thì $x_0$ gọi là điểm gián đoạn loại 1. Hoặc $\left|\lim_{x\to x_0^-} f(x) - \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right|$ gọi là bước nhảy của f tại $x_0$. Những điểm gián đoạn không thuộc loại 1 được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

*Ví dụ 46.* Hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ không xác định tại x = 0, nhưng $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 1$.

Vậy x = 0 là điểm gían đoạn bỏ được. Nếu ta bổ sung giá trị $f(0) = 1$, thì hàm số trở nên liên tục cả tại x = 0.

*Ví dụ 47.* Hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & khi x \le 0 \\ x-1 & khi x > 0 \end{cases}$

Xác định tại mọi $x \in \mathbb{R}$, nhưng

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Vậy x = 0 là điểm gián đoạn loại 1, bước nhảy của hàm f tại x = 0 bằng $|1-(-1)|=2$

*Ví dụ 48.* Hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ không xác định tại x = 0.

Vì $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty, \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, điểm x = 0 là điểm gián đoạn loại 2

*Ví dụ 49. Tìm điểm gián đọan của các hàm số sau:*

a) $f(x)=\frac{5}{x}+\frac{2x}{x+4}$

b) $g(x)=\left|x^3-2x^2\right|$

c) $h(x)=\begin{cases}\frac{3}{x-1} & x\neq 1\\ 3 & x=1\end{cases}$

*Ví dụ 50. Tìm a, b để các hàm số sau liên tục*

a) $f(x)=\begin{cases}ax+1 & x\leq\frac{\pi}{2}\\ \sin x+b & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x & |x|\leq 1\\ x^2+ax+b & |x|>1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3 & x\leq 0\\ ax+b & 0<x<1\\ \sqrt{x} & x\geq 1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\frac{(x-1)^2}{x^2-1} & |x|\neq 1\\ a & x=-1\\ b & x=1\end{cases}$

# §2.ĐẠO HÀM – VI PHÂN

## I. Đạo hàm

### 1. Định nghĩa

*Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(a,b)$ và $x_0 \in (a,b)$. Nếu tồn tại giới hạn của tỉ số*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2.1)$$

*Khi $x \to x_0$ thì giới hạn ấy được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x_0$, kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.*

Đặt $x-x_0=\Delta x$, ta có $x=x_0+\Delta x$ và đặt $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, tỉ số (1) viết được dưới dạng $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Vậy $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Nhận xét:

1) Vì $\Delta x = x - x_0 \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$ nên (2.1) có thể viết dưới dạng

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx} \qquad (2.2)$$

2) Nếu tại $x_0$ hàm số f có đạo hàm $f'(x_0)$ thì số gia của nó có thể biểu diễn thành

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x \qquad (2.3)$$

Trong đó $\alpha$ phụ thuộc vào $\Delta x$ và $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Thật vậy, khi $\Delta x \to 0$ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$. Do đó có thể đặt

$$\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$$

Rõ ràng $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ và $\Delta y = \Delta f(x_0)$ có dạng (2.3)

Mặt khác ta có $\alpha.\Delta x$ là VCB bậc cao hơn $\Delta x$ ( khi $\Delta x \to 0$ ) nên (2.3) còn có dạng

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\vartheta\Delta x \qquad (2.4)$$

3) Từ (2.3) suy ra $\Delta f(x_0) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, tức là hàm số liên tục tại $x_0$. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm(hữu hạn) tại $x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x_0$ điều ngược lại có thể không đúng.

*Ví dụ 51.*

a) Hàm số f(x) =ax +b có đạo hàm tại mọi $x_0 \in D_f$

b) Hàm số f(x)= |x| không có đạo hàm tại $x_0$=0 vì $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\begin{cases}1 & ,\text{khi } x>0\\ -1 & ,\text{khi } x<0\end{cases}$.

c) Hàm số f(x) = sinx có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và (sinx)’=cosx

*Ví dụ 52.* Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1} - x - 2}{x+1}, & \text{khi } x \neq -1 \\ m, & \text{khi } x = -1 \end{cases}$

a) Xác định m để hàm số liên tục tại x =-1

b) Tìm f'(-1) ứng với m vừa tìm được trong câu a

*Ví dụ 53.* Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \cos x}{x}, & \text{khi } x \neq 0 \\ m, & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

a) Xác định m để hàm số liên tục tại x=0

b) Tìm f'(0) ứng với m vừa tìm được trong câu a

**2. Các quy tắc tính đạo hàm**

**2.1 Đạo hàm của tổng, tích, thương của hai hàm số**

Nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại x thì:

a) $u(x) + v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $(u+v)' = u' + v'$.

b) $u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và $(u.v)' = u'.v + v'.u$.

c) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x, trừ khi $v(x) \neq 0$ và $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$.

**2.2 Đạo hàm của hàm số hợp**

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm $y = f(x)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f[g(x)]$ có đạo hàm theo x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$.

*Ví dụ 54.* Cho $y = \sin(\cos x)$. Tính y'?

Đặt $u = \cos x, y = \sin x$. Vậy $y'(x) = y'(u).u'(x) = \cos u.(-\sin x) = -\cos(\cos x).\sin x$.

**2.3 Đạo hàm của hàm số ngược**

**Định lý 17.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x, $f'(x) \neq 0$, và nếu hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược $x = \varphi(y)$ thì hàm số $x = \varphi(y)$ có đạo hàm tại $y = f(x)$ và ta có $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Áp dụng định lý này ta có thể tìm đạo hàm của một số hàm lượng giác ngược sau;

a) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $, x \neq \pm 1.$

b) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $, x \neq \pm 1.$

c) $(\mathrm{arc}\,tgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ .

d) $(\mathrm{arc}\,cotgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ .

*Ví dụ 55.* Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $f(x) = \arcsin(3x - 3) + \cos(x^2 - x + 1)$

b) $g(x) = \text{acrtg}(3x^2 - 3x + 2) + e^{5x^3 - 1} + \ln(3x^2 + 3x)$

**2.4 Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản**

| **Hàm số** | **Đạo hàm** | **Hàm số** | **Đạo hàm** |
|---|---|---|---|
| C | 0 | cosx | -sinx |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | tgx | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $a^x\ (0 < a \neq 1)$ | $a^x \ln a$ | cotgx | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | arcsinx | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | arccosx | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | arctgx | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | arccotgx | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

*Ví dụ 56. Tính đạo hàm các hàm số sau*

a) $y = x^x$ d) $y = x^{x^2}$

b) $y = 2^{x^x}$ b) $y = x^{x^x}$

c) $y = x^{e^x}$ c) $y = |\sin x|^{\cos x}$

**2.5 Ý nghĩa hình học của đạo hàm**

Về mặt hình học, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0$ biểu diễn hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến với đường cong của hàm số f(x) tại $M_0$ là

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**2.6 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm**

Về mặt cơ học, nếu phương trình chuyển động của một chất điểm trên đường thẳng là $s = f(t)$ thì đạo hàm $f'(t_0)$ biểu diễn vận tốc tức thời của chuyển động đó ở thời điểm $t_0$. Với ý nghĩa đó, ta cũng có thể xem đạo hàm $f'(x_0)$ là vận tốc biến thiên của hàm số $f(x)$ theo x tại điểm $x_0$.

**2.7 Đạo hàm một phía, đạo hàm vô cùng**

**2.7.1 Đạo hàm một phía**

Cho hàm số f và $x_0 \in D_f$. Các giới hạn hữu hạn

$$f'(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, f'(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Gọi là các đạo hàm một phía, lần lượt là đạo hàm trái, phải của f tại $x_0$

*Nhận xét:*

i) Có những hàm số không có đạo hàm tại một điểm theo định nghĩa.

ii) Nếu f xác định trên [a,b] thì việc đòi hỏi đạo hàm hai phía tại a, b là vô nghĩa.

**Định lí 17**

Hàm số f có đạo hàm tại $x_o$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm trái, phải tại $x_o$ và chúng bằng nhau

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$$

*Nhận xét:*

1) Nếu $f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+)$ thì $f(x)$ không có đạo hàm tại $x_0$. Về mặt hình học, tiếp tuyến trái và tiếp tuyến phải của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$ không trùng nhau.

2) Người ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng ( a, b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn [ a, b] nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng (a, b), có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

*Ví dụ 57. Tìm đạo hàm phải, đạo hàm trái của các hàm số sau tại điểm đã chỉ ra*

a) $f(x) = |x|, x = 0$

b) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|, x = 2, x = 3$

c) $f(x) = |2^x - 2|, x = 1$

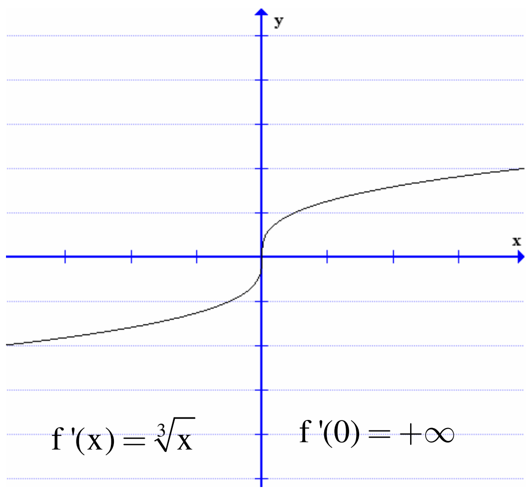
d) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}, x = 0, x = \sqrt{\pi}$

*Ví dụ 58. Cho hàm số* $y = f(x) = \begin{cases} (x+a)e^{-bx} & ,\text{khi } x < 0 \\ ax^2 + bx + 1 & ,\text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

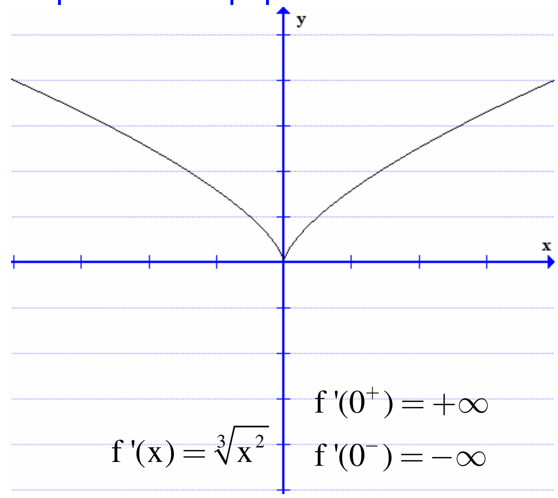
*Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$.*

### 2.7.2 Đạo hàm vô cùng

Nếu tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$ khi $\Delta x \to 0$ thì ta bảo f có đạo hàm vô cùng tại $x_0$. Tương tự ta cũng có khái niệm đạo hàm một phía vô cùng. Nếu hàm số f liên tục tại, có đạo hàm vô cùng ( hoặc đạo hàm một phía vô cùng) tại $x_0$, thì đồ thị của nó tại $x_0$ có tiếp tuyến song song với Oy ( hình 2.1) ( hoặc 2 tiếp tuyến như vậy (hình 2.2)).




Hình 2.1




Hình 2.2

## 3 Đạo hàm cấp cao

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y' = f'(x)$ gọi là đạo hàm cấp 1 của x. Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp 1 gọi là đạo hàm cấp 2, kí hiệu là $y'' = f''(x)$.

Vậy $y'' = f''(x) = \left[f'(x)\right]'$ .

Tương tự đạo hàm của đạo hàm cấp ( n-1) của f(x) gọi là đạo hàm cấp n, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$. Vậy $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$.

*Ví dụ 59.* $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$. Ta có:

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},$$
..........................................
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n.}$$

Đặc biệt, nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ thì $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}, \ldots$

$$y^{(n)} = n.(n-1).(n-2)...2.1 = n!$$

Do đó $y^{(m)} = 0$ nếu m > n.

*Ví dụ 60.* $y = \sin x$. Tính $y^{(n)}$?

Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
................................
$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

*Ví dụ 61.Tính đạo hàm cấp n các hàm số sau*

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = \cos x$

❖ **Công thức Leibniz**

Giả sử các hàm số u(x), v(x) có đạo hàm liên tiếp đến cấp n. Khi đó, ta có

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}.v^k, \text{ trong đó } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ u^{(0)} = u, v^{(0)} = v.$$

Công thức trên gọi là công thức Leibniz, được chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ngòai ra ta còn một vài quy tắc tính đạo hàm cấp cao khác như sau:

$$(cu)^n = cu^{(n)}$$

$$(u+v)^n = u^n + v^n$$

*Ví dụ 62.* Tính $y^{(n)}$ nếu $y = (x^2+2x-3)e^x$.

Đặt $u = e^x, v = (x^2+2x-3)$. Ta có $u^{(n)} = e^x$, $v' = 2x+2, v'' = 2, v''' = 0$.

Do đó: $y^{(n)} = C_n^0 (e^x)^{(n)}.(x^2+2x-3) + C_n^1 (e^x)^{(n-1)}(2x+2) + C_n^2 (e^x)^{(n-2)}.2$

$$= e^x(x^2+2x-3) + ne^x(2x+2) + \frac{n(n-1)}{2}e^x.2$$

$$= e^x\left[x^2+2(n+1)x+2n-3+n(n-1)\right] = e^x\left[x^2+2(n+1)x+n^2+n-3\right].$$

*Ví dụ 63. Tính đạo hàm cấp n các hàm số sau:*

a) $y = x^3 + x + e^{3x}$

b) $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$

c) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

## II. Vi phân

### 1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x, theo định nghĩa của đạo hàm: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, trong đó $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Vậy khi $\Delta x \to 0, \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ với $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$.

Do đó: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \alpha\Delta x$.

Số hạng $\alpha\Delta x$ là một VCB bậc cao hơn $\Delta x$. Do đó, $\Delta y$ và $f'(x)\Delta x$ là hai VCB tương đương. Biểu thức $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là dy hay df(x). Vậy $dy = f'(x)\Delta x$.

Nếu hàm số có vi phân tại x, ta nói f(x) khả vi tại x. Như vậy, đối với hàm số một biến số, khái niệm hàm số có đạo hàm tại x và hàm số khả vi tại x tương đương nhau.

Nếu $y = x$ thì $dy = dx = 1.\Delta x$. Vậy đối với biến số độc lập x, ta có $dx = \Delta x$. Do đó, ta có thể viết: $dy = f^{'}(x)dx$.

**Định lí 18.** Hàm số f khả vi tại $x_0$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại điểm đó

*Ví dụ 64*: Nếu $y = \sqrt{1+\ln x}$, thì $y^{'} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}.\dfrac{1}{x}$. Do đó $dy = \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

*Ví dụ 65. Tìm m,n để các hàm số sau:*

$$a)f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, \text{khi } x \le 1 \\ x^2 \quad , \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$b)f(x) = \begin{cases} m + nx^2 & \text{khi} |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{khi} |x| \ge 1 \end{cases}$$

*i) Liên tục trên* $\mathbb{R}$

*ii) Khả vi trên* $\mathbb{R}$

**2. Vi phân của tổng, tích, thương**

Từ công thức đạo hàm của tổng, tích, thương của hai hàm số suy ra:

$$d(u+v) = du + dv$$

$$d(u.v) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0.)$$

**3. Vi phân cấp cao**

Vi phân cấp hai của hàm số f tại một điểm nào đó là vi phân tại điểm ấy của vi phân ( cấp một) df và kí hiệu $d^2f$. Vậy

$$d^2f = d(df)$$

Tương tự, vi phân cấp n của f là vi phân của vi phân cấp n-1 của nó

$$d^nf = d(d^{n-1}f)$$

*Chú ý:* Khi tính vi phân cấp cao thì dx là một số bất kì không phụ thuộc vào x, nên đạo hàm ( hoặc vi phân) của nó sẽ bằng 0. Vậy

$$d^2f = d(df) = d(f'dx) = df'.dx = (f''dx)dx = f''dx^2$$

$$d^3f = d(d^2f) = d(f''dx^2) = f'''dx^3$$

...

Dễ thấy là

$$d^nf = f^ndx^n$$

Một số quy tắc đối với vi phân cấp cao

$$d^n(cu) = cd^n(u)$$

$$d^n(u+v) = d^nu + d^nv$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u.d^kv \ \ (d^0u = u, d^0v = v)$$

**4. Ứng dụng vi phân vào tính gần đúng**

Vì khi $\Delta x \to 0$, $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ là VCB tương đương với $f'(x_0)\Delta x$, nên khi $|\Delta x|$ khá nhỏ, ta có công thức gần đúng $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

*Ví dụ 66. Tính $\Delta y$ và $dy$ nếu $y=f(x)=x^3+x^2-2x+1$, nếu x biến thiên từ 2 đến 2,01.*

Ta có

$f(2)=9;$

$f(2{,}01)=9{,}140701;$

$\Delta y=f(2{,}01)-f(2)=0{,}140701;$

$f'(x)=3x^2+2x-2;$

$f'(2)=14;$

$dy=f'(2).\Delta x=14.0{,}01=0{,}14.$

*Ví dụ 67.* Tính gần đúng $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Ta cần tính gần đúng $y=f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ tại 16 – 0,2. Đặt $x_0=16,\Delta x=-0{,}2$. Ta có:

$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$. Vì $f(x_0)=\sqrt[4]{16}=2, f'(x)=\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$, f'(x_0)=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{32}$, ta được $\sqrt[4]{15{,}8}\approx\sqrt[4]{16}-\frac{0{,}2}{32}=2-0{,}0062\approx 1{,}9938.$

*Ví dụ 68. Tính gần đúng* $\sqrt[3]{28}$

**5. Các định lý giá trị trung bình**

**5.1 Định lý Rolle**. Nếu f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b) và $f(a)=f(b)$ thì $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$.

*Ý nghĩa hình học của định lý Rolle:*

Nếu f khả vi trên (a, b), liên tục trên [a, b] và $f(a)=f(b)$ thì $C(c,f(c))$ trên cung AB với $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ sao cho vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại C cùng phương với vectơ Ox ( hoặc cùng phương với vectơ AB).

**5.2 Định lý Lagrange ( Định lý giá trị trung bình)**

Nếu f liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b) $(a\neq b)$ thì $\exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

hay $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

**5.3 Định lý Cauchy**.

Nếu $f,g$ liên tục trên [a, b], khả vi trên (a, b) và $g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$ thì:

$$\exists c\in(a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**6. Công thức Taylor – Maclaurin.**

**Định lý 19.** Nếu f có đạo hàm cấp n là $f^{(n)}$ liên tục trên [a, b] và f có đạo hàm cấp n + 1 trên (a, b) thì $\exists c\in(a,b)$ sao cho: $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Công thức trên được gọi là *công thức khai triển Taylor* của f tại a .

$R_{n=}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ gọi là *sai số ( dư số ) bậc n* của công thức khai triển Taylor của f tại a.

*Nhận xét:*

- Khi n = 0 thì công thức trên trở thành công thức Lagrange.
- Khi a = 0 thì công thức Taylor gọi là công thức Maclaurin.

$$f(b)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}b+\frac{f''(0)}{2!}b^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}b^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}b^{n+1}.$$

<u>Phát biểu khác:</u>

Cho hàm số f có đạo hàm cấp n + 1 trên khoảng mở I chứa a. Khi đó $\forall x\in I,\exists c\in(a,x)$ hoặc $c\in(x,a)$ sao cho

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

*Ví dụ 69. Viết công thức khai triển Taylor của f(x) tại x = 0 với*

a) $f(x)=e^x$      b) $f(x)=\sin x$      c) $f(x)=\ln(1+x)$.

*Giải.*

a) $f(x)=e^x$ , $f'(x)=e^x,...,f^{(n)}(x)=e^x$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=1,\forall n$$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

với $c\in(0,x)$ hoặc $c\in(x,0)$.

$$\Rightarrow e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\text{ với } 0<\theta<1.$$

b) $f(x)=\sin x$ . Ta có: $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ (-1)^k & (n=2k+1)\end{cases}$$

Vậy công thức khai triển Taylor của sinx tại 0 là:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{(-1)^{k+1}\cos\theta x}{(2k+3)!}x^{2k+3} \text{ với } 0<\theta<1.$$

Nếu sai số dừng lại ở đạo hàm bậc 2k + 2 ta có:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{\sin\left(\theta x+(2k+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+2)!}x^{2k+2}$$

$$= x-\frac{x^3}{3!}+...+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{(-1)^{k+1}\sin(\theta x)}{(2k+2)!}x^{2k+2}.$$

c) $f(x)=\ln(1+x)$,

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}, f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}, f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3},..., f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\Rightarrow f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ với } 0<\theta<1.$$

$$\Rightarrow \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \text{ với } 0<\theta<1.$$

*Ví dụ 70.* Tính gần đúng $\sqrt{e}$ với sai số nhỏ hơn 0,0001.

Ta có: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0<\theta<1$.

Với $x=\frac{1}{2}$ thì:

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!}+...+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}+\frac{e^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Nhận xét $\frac{e^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{e}{2^{n+1}(n+1)!}<\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}$ với $0<\theta<1$

Để sai số nhỏ hơn 0,0001 ta cần chọn n thỏa $\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}<0,0001\Rightarrow 2^{n+1}(n+1)!>30000$

(*)

(*) đúng với mọi $n\ge 5$. Vậy chọn n = 5 ta có:

$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{4!2^4}+\frac{1}{5!2^5}=A$ thỏa điều kiện $\left|\sqrt{e}-A\right|=\sqrt{e}-A<0,0001$.

*Ví dụ 71.* Tính gần đúng $\sin 1$ với sai số nhỏ hơn $10^{-6}$.

Ta có: với $0<\theta<1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k \cos(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Cho x = 1 ta được

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^k \cos(\theta)}{(2k+1)!}$$

Sai số $\left| \frac{(-1)^k \cos(\theta)}{(2k+1)!} \right| < \frac{1}{(2k+1)!} < 10^{-6}, \forall k \geq 5$

Chọn k = 5 ta có $\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^4 \frac{1}{9!} = B$ thỏa điều kiện $|\sin 1 - B| < 10^{-6}$.

**7. Qui tắc L'Hospital**

**7.1 Dạng $\frac{0}{0}$**

Cho $f, g$ liên tục trên khoảng mở I chứa a và $f(a) = g(a) = 0$. Giả sử $f, g$ khả vi tại $\forall x \in I \setminus \{a\}, g^{'}(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{a\}$ và $\lim\limits_{x \to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = L$ ( L hữu hạn hoặc vô hạn) thì $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \left( = \lim\limits_{x \to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \right)$.

*Ví dụ 72.* Tính $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{x - \sin x}$

Ta có

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\sin x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos x}{\cos x} = 4.$$

*Ví dụ 73.*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^2 - 4x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

**7.2 Dạng $\frac{\infty}{\infty}$**

Cho I là một khoảng mở chứa a. Giả sử $f, g$ xác định và có đạo hàm hữu hạn trên $I \setminus \{a\}, g^{'}(x) \neq 0 \ \ \forall x \in I \setminus \{a\}$. Nếu $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ($L$ hữu hạn hoặc vô hạn) thì

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

*Ví dụ 74.*

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$ (vì $\alpha > 0$)

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2 - \cot^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x + x\cos x)}{x} . \frac{(\sin x - x\cos x)}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{2}{3}$$

*Ví dụ 75. Tìm giới hạn các hàm số sau:*

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{3x^3}$

# §3. ỨNG DỤNG

## I. Ứng dụng của Cấp số cộng và cấp số nhân

### 1. Tỉ suất

**Đặt vấn đề:** Trong toán tài chính hay trong ngân hàng, kinh tế người ta thường nói với nhau là cái này có giá trị tăng 10% so với giá cũ hoặc lãi suất ngân hàng là 5% trong thời hạn 1 năm hay nền kinh tế tăng trưởng là 12% trong năm nay v.v…

Vậy thì phần trăm có ý nghĩa là gì và tại sao người ta hay dùng nó?.

Tỉ suất chỉ đơn giản là sự biểu thị một số r theo dạng r/100 gọi là r% của một số.

*Ví dụ 76.*

a) $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b) $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

c) $50\% = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

*Ví dụ 77.* Tính các giá trị sau

a) 15% của 10

b) 99% của 25

c) 150% của 250.

### 2. Lãi tức-Tiền lời ( Interest):

Lãi tức= Tổng vốn tích lũy – Vốn gốc ban đầu ( Principal).

*Ví dụ 78.* Vốn đầu tư ban đầu bỏ ra ban đầu là 12 000 USD. Sau 1 năm vốn đầu tư là 14 000 USD. Hỏi lãi tức là bao nhiêu?.

### 3. Lãi suất

Khi lãi tức biểu thị theo tỉ lệ % đối với số vốn ban đầu cho một đơn vị thời gian thì được gọi là lãi suất

$$\text{Lãi suất} = \frac{\text{Lãi tu'c}}{\text{Vô'n gô'c}} * 100\%$$

*Ví dụ 79.* Nếu lãi suất là 12% trong thời hạn 1 năm thì 1 triệu đồng hôm nay sẽ là bao nhiêu sau 1 năm.

Tổng vốn tích lũy = Vốn gốc ban đầu + Lãi tức= 1+1*12%=1.12 triệu

*Ví dụ 80.*

a) Vốn đầu tư tăng từ \$2500 lên \$3375. Biểu thị sự gia tăng về vốn đầu tư theo %.

b) Vào thời điểm đầu năm 2007 dân số của ấp Long Hòa là 8400. Nếu dân số gia tăng lên 12% vào thời điểm cuối năm 2007. Xác định số dân ấp Long Hòa hiện có.

c) Trong một cửa hàng, giá của hàng hóa đang được bán là $580. Nếu giá được giảm xuống là 20%. Tìm giá của hàng hóa sau khi giảm giá.?

**4. Yếu tố tăng trưởng( scale factor).**

**4.1 Khi r% tăng:**

*Ví dụ 81. Giá của một mặt hàng là $80 thì khi tăng giá lên 9% hỏi giá của mặt hàng này là bao nhiêu ?.*

**Cách 1:**

$$9\% = \frac{9}{100} = 0.09$$
$$0.09*80 = 7.2$$
$$7.2 + 80 = 87.2$$

**Cách 2:**

100% $\longleftrightarrow$ 80 USD

Giá tăng

9% $\longleftrightarrow$ 9%*80=7.2 USD

Vậy theo % thì ta có 100%+9%= $\frac{100}{100}+\frac{9}{100}=1+0.9=1.09$

Suy ra giá của mặt hàng này là 80*1.09=87.2 USD

Hay ta có thể tính như sau:

100% $\longleftrightarrow$ 80 USD

109% $\longleftrightarrow$ x USD

Vậy $x = \frac{80*1.09}{1} = 87.2$ USD

Ta có công thức của yếu tố tăng trưởng là

$$\frac{100}{100}+\frac{r}{100}=1+\frac{r}{100}=1+r\%$$

*Ví dụ 82.* Giá của một mặt hàng khi tăng giá lên 9% là 87.2 USD tìm giá ban đầu khi chưa tăng giá.

Ta có công thức tăng trưởng là 1+r%=1+9%=1.09. Vậy để tìm giá lúc sau ta có thể áp dụng mô hình sau

109% $\longleftrightarrow$ 87.2 USD

100% $\longleftrightarrow$ x USD

Vậy $x = \frac{87.2*1}{1.09} = 80\,\text{USD}$ hay đơn giản hơn ta chỉ việc lấy $\frac{87.2}{1+r\%} = \frac{87.2}{1.09} = 80$ USD

*Ví dụ 83.*

a) Vào thời điểm đầu năm 2007 giá của một mặt hàng là \$29 nhưng do yếu tố lạm phát giá của nó tăng lên 5% trong suốt năm 2007 . Tìm giá của mặt hàng vào thời điểm cuối năm.

b) Giá của một chiếc TV LCD là 850SD bao gồm 9.%VAT. Tìm giá gốc của TV LCD ?.

c) Biểu thị sự gia tăng của vốn đầu tư theo % khi tăng từ \$850 lên \$950.

**4.2 Khi r% giảm:**

*Ví dụ 84.* Giả sử rằng vốn đầu tư là \$80 cho mua cổ phiếu. Do giá cổ phiếu bị sụt giảm dẫn đến vốn đầu tư bị giảm xuống 20%. Hỏi vốn đầu tư còn lại là bao nhiêu?.

*Giải.*

100% $\longleftrightarrow$ 80 USD

Giảm 20% Suy ra % còn lại là 100%-20%=80% và

80% $\longleftrightarrow$ x USD

Vậy $x = \frac{80*80\%}{100\%} = 64\,\text{USD}$ hay x = 80* $(\frac{100}{100} - \frac{20}{100}) = (1 - r\%) = (1 - 0.2) = 0.8$

Công thức của yếu tố tăng trưởng

$$\frac{100}{100} - \frac{r}{100} = 1 - \frac{r}{100} = 1 - r\%$$

*Ví dụ 85.*

a) Vào thời điểm đầu năm 2007 giá của một chiếc xe hơi là \$ 43 000. Nếu giá của chiếc xe hơi bị sụt giảm đi 27% trong suốt năm 2007 thì hỏi giá của nó sẽ còn lại là bao nhiêu vào thời điểm cuối năm?.

b) Sau khi cửa hàng giảm giá 15% thì giá của hàng hóa là \$39.95 . Vậy trước khi cửa hàng giảm giá thì giá của hàng hóa là bao nhiêu?

c) Số lượng khách hàng đi ăn gà rán bị giảm từ 190 295 xuống 174 989. Xác định % khách hàng bị mất.

**5 Sự kết hợp các yếu tố tăng trưởng:**

*Ví dụ 86.* Giá của một mặt hàng có mức tăng trưởng là 32% trong sáu tháng đầu năm 2007 và trong sáu tháng cuối năm 2007 có mức tăng trưởng là 10%. Tìm mức tăng trưởng theo % trong cả năm 2007. Nếu giá của mặt hàng là 50 USD thì giá tăng trưởng thêm vào là bao nhiêu.

*Giải.*

*Cách 1:*

Yếu tố tăng trưởng trong sáu tháng đầu năm là 1 +r% =1+32%=1.32

Yếu tố tăng trưởng trong sáu tháng cuối năm là 1+r%=1+10%=1.1

Vậy mức tăng trưởng theo cả năm là 1.32*1.1=1.452 =1+45.2% Suy ra mức tăng trưởng là 45.2% và tương đương với mức giá là 45.2%*50=22.6 USD.

*Cách 2:* Tính theo giá của mặt hàng

Yếu tố tăng trưởng trong sáu tháng đầu năm là 1 +r% =1+32%=1.32

Lúc này giá của mặt hàng là 1.32 * 50=66

Trong sáu tháng cuối năm giá mặt hàng tăng lên nhưng giá lúc này được tăng lên không phải là giá ban đầu mà là giá đã tăng trong sáu tháng trước nghĩa là 66 được tăng tiếp thêm 10%.

Yếu tố tăng trưởng trong sáu tháng cuối năm là 1+10%=1.1 và ta có được 66*1.1=72.6 USD. Hay mức tăng trưởng về giá so với giá ban đầu là 72.6-50=22.6 USD.

*Ví dụ 87* Tìm sự thay đổi về giá của một mặt hàng theo % nếu giá tăng lên 5% trong vòng 6 tháng đầu năm nhưng trong 6 tháng cuối năm lại bị giảm giá xuống 30%.

## 6 Lãi tích lũy

### 6.1 Lãi đơn ( Simple interest):

Khi lãi tức chỉ tính theo số vốn gốc mà không tính thêm lãi tức lũy tích, phát sinh từ lãi ở các thời đoạn trước, người ta gọi là lãi tức đơn.

*Ví dụ 88.* Bạn gửi ngân hàng $200 với lãi suất hàng năm là 5%. Hỏi trong một năm,2 năm, 3 năm bạn nhận được bao nhiêu tính theo lãi tức đơn?. Mất bao lâu để nhận được số tiền là $300?.

*Giải.*

Sau một năm bạn nhận được là $200+200*\frac{5}{100}=210$

Sau hai năm bạn nhận được là $200+2*200*\frac{5}{100}=220$

Sau ba năm bạn nhận được là $200+3*200*\frac{5}{100}=230$

Sau n năm bạn nhân được là $200+n*200*\frac{5}{100}=300 \Leftrightarrow 200+10n=300 \Rightarrow n=10$

**6.2 Lãi tức ghép (Compound Interest)**

Trong tính toán lãi tức ghép, lãi tức ở mỗi thời đoạn được tính theo số vốn gốc và cả tổng số tiền lãi lũy tích được trong các thời đoạn trước đó.

Như vậy, lãi tức ghép phản ánh được hiệu quả giá trị theo thời gian của đồng tiền cho cả phần tiền lãi trước đó.Cách tính lãi tức ghép thường được dùng cho thực tế.

**Trường hợp 1: Theo năm**

*Ví dụ 89.* Bạn gửi ngân hàng $200 với lãi tức ghép là 5%. Hỏi trong 1 năm, 2 năm, 3 năm bạn nhận được bao nhiêu theo lãi tức ghép?. Mất bao lâu để nhận được số tiền là $300?.

*Giải.*

Sau một năm bạn nhận được là $200+200*\frac{5}{100}=210$ cũng tương tự như trường hợp ở lãi tức đơn.

Nhưng trong năm thứ hai tất cả số tiền kiếm được là 210 ( tổng vốn lũy tích)  vì vậy cũng với mức lãi suất là 5% nhưng lúc này là $210*\frac{5}{100}$=10.50 USD. Sau hai năm bạn nhận được là 220.50USD. Chúng ta có thể thực hiện phép tính này theo công thức sau.

$$200*\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)=220.5$$

Sau mỗi năm chúng ta có mức tăng trưởng là (1+r%)= (1+5%)=1.05

Vậy sau n năm chúng ta có công thức tổng quát là $200*(1.05)^n=300$

$$200(1.05)^n=300\Rightarrow(1.05)^n=1.5$$

$$n\log 1.05=\log 1.5\Rightarrow n=\frac{\log 1.5}{\log 1.05}$$

Áp dụng lấy log với cơ số 10 ta có

n=8.31

Vì n là số chẵn nên ta làm tròn được là n=9 năm.

Với n=8 thì $200\times 1.05^8=295.49$ và n=9 thì $200\times 1.05^9=310.27$

**Tổng quát:** Trước khi đi đến một vài ví dụ kế tiếp chúng ta tìm hiểu thử xem công thức tính lãi tức kép để có thể áp dụng cho bất kỳ trường hợp nào liên quan đến lãi tức kép.

**Giải thuật:** Với số vốn ban đầu là P (principal) được đầu tư trong n năm, mức lãi suất hàng năm là r% theo lãi tức kép. Giá trị cuối cùng của số vốn được gọi là Tổng vốn lũy tích (Amount) hay giá trị tương lai S (Future Value).

1. Sau một năm ta có được

$$P_1 = P + P*\frac{r}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

2. Sau hai năm ta được

$$P_2 = P\left(1+\frac{r}{100}\right) + P\left(1+\frac{r}{100}\right)*\frac{r}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right) = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 = P_1(1+\frac{r}{100})$$

3. Sau n năm ta được S là

$$S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

*Ví dụ 90.* Nếu số tiền 1000$ được đầu tư với lãi suất ghép là 8% năm ghép lãi theo năm thì sau 5 năm thì tổng vốn tích lũy (gồm cả vốn lẫn lãi) sẽ là bao nhiêu?

**Trường hợp 2: Theo quý**

**Vấn đề:** Khi lãi tức ghép được kết hợp với nhau thường xuyên hơn. Nghĩa là lúc này ta xét lãi tức ghép theo từng quý trong năm và người ta chia 1 năm ra làm 4 quý với mức lãi suất ghép là 5% trong một năm thì lãi suất ghép ở từng quý sẽ chỉ là 5%:4=1.25%

Lúc này quay lại ví dụ trên ta có

Sau quý đầu tiên với số vốn là 200$ ta có được

$$P_1 = P + P*\frac{r}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right) = 200\left(1+\frac{1.25}{100}\right)$$

Sau quý thứ hai

$$P_2 = 200\left(1+\frac{1.25}{100}\right) + 200\left(1+\frac{1.25}{100}\right)\times\frac{1.25}{100} = 200\left(1+\frac{1.25}{100}\right)\left(1+\frac{1.25}{100}\right) = 200\left(1+\frac{1.25}{100}\right)^2$$

Sau n quý ta được

$$200\left(1+\frac{1.25}{100}\right)^n$$

Lúc này nếu chúng ta muốn có 300 USD thì ta cần

$$200\left(1+\frac{1.25}{100}\right)^{n}=300 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1.25}{100}\right)^{n}=1.5$$

$$n\log_{10}\left(1+\frac{1.25}{100}\right)=\log_{10}(1.5)$$

$$n=\frac{\log_{10}(1.5)}{\log_{10}(1.0125)}=32.64$$

Vậy chúng ta cần 33 quý hay chính xác là 8 năm thêm 1 quý. So sánh với giá trị ở trên ở Ví dụ 89?.

**Kết luận:** Ta cũng có công thức tính lãi suất ghép theo từng quý cũng là

$$S=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

Nhưng ở đây n là quý và r% là lãi suất theo quý.

**Trường hợp 3: Theo 1/m của năm ( m đây có thể là ngày)**

*** Lãi tích lũy - Lãi suất liên tục ( continuos compound)**

Công thức tính lãi tức ghép theo năm là

$$S=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

Bây giờ nếu lãi suất hàng năm là a% và lãi tức ghép theo 1/m của 1 năm thì lãi suất được tính là $\frac{a}{m}\%$ cho mỗi 1/m . Vậy S lúc này được tính là

$$S=P\left(1+\frac{a}{100m}\right)^{n}$$

Giả sử chúng ta chọn lựa n cũng chỉ trong vòng một năm thì ta có n=m. Lúc này giả sử lãi suất hằng năm là a=5%, P=100 thì giá trị S trong theo m sẽ là

| $m$ | $S=P\left(1+\frac{a}{100m}\right)^{m}$ | |
|---|---|---|
| 1 | $P\left(1+\frac{5}{100}\right)$ | $=105.00$ |
| 2 | $P\left(1+\frac{5}{2\times 100}\right)^{2}$ | $=(1.025)^{2}P=105.06$ |
| 4 | $P\left(1+\frac{5}{4\times 100}\right)^{4}$ | $=(1.0125)^{4}P=105.09$ |
| 12 | $P\left(1+\frac{5}{12\times 100}\right)^{12}$ | $=(1.0041667)^{12}P=105.11$ |
| 52 | $P\left(1+\frac{5}{52\times 100}\right)^{52}$ | $=(1.0009615)^{52}P=105.12$ |
| 365 | $P\left(1+\frac{5}{365\times 100}\right)^{365}$ | $=(1.00013698)^{365}P=105.13$ |

( m=1 thì đây là 1 năm, m=2 là nửa năm, m=4 là quý, m=12 là tháng, m =52 là tuần, m =365 là ngày).

Chúng ta có nhận xét rằng khi m càng lớn thì S càng dần đến một giá trị cố định trong trường hợp này đó là 105.13

Với một mức lãi suất r trong thời gian t =1 năm thì ta có được lãi tích lũy là

$$S = Pe^{r/100}$$

Và khi điều tra lãi tích lũy trong vòng t năm ta có công thức tổng quát là

$$S = Pe^{rt/100}$$

ở đây t là năm

*Ví dụ 91.* ới P =10$ và r =12% trong suốt một năm. Tìm S nếu lãi tức ở đây là lãi tức ghép

a) trong 1 năm
b) nửa năm 1 lần
c) hàng tháng
d) hàng tuần
e) hàng quý

**Giải.**

Ta có công thức tổng quát cho lãi tức ghép là

$$S = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

a) r=12 và n=1 Vậy S= 10*(1.12)$^1$=11.20$
b) r=12/2 %=6% và n =2 . Vậy S =10* (1.06)$^2$=11.24
c) r=12/12 %=1% và n =12. Vậy S =10*(1.01)$^{12}$=11.27$
d) r=12/52 %=0.23% và n =52. Vậy S =10 *(1.0023)$^{52}$=11.27
e) r=12/4 % = 3% và n =4. Vậy S =10*(1.03)=11.26

*Ví dụ 92.* Nếu chúng ta đầu tư $2000 với mức lãi tích lũy là 6%. Hỏi sau bao nhiêu ngày thì vốn đầu tư sẽ tăng lên $2100.

Lãi tích lũy được tính theo công thức

$$S = Pe^{rt/100}$$
$$\Leftrightarrow 2100 = 2000e^{6*t/100}$$
$$\Leftrightarrow \ln 2100 = \ln(2000e^{6*t/100}) = \ln(2000) + \ln(e^{6*t/100})$$
$$\Leftrightarrow 6t/100 = \ln 2100 - \ln 2000 = \ln\frac{2100}{2000}$$
$$\text{Vậy } t = \frac{100}{6}\times(\ln\frac{2100}{2000}) = 0.8132$$

Số ngày được tính là =0.8132 * 365 =297 ngày.

**Nhận xét:** Truớc quá nhiều cách tính lãi suất gây ra một vấn đề khó khăn cho các doanh nghiệp khi đầu tư hoặc các hộ gia đình gửi tiết kiệm. Các doanh nghiệp và hộ gia đình cần có một chuẩn mực mà cho phép họ có thể so sánh giữa việc để tiết kiệm hay cho ngân hàng vay. Một trong những hình thức này là sử dụng lãi suất hàng năm gọi là APR.

*Ví dụ 93. B*ạn muốn mượn 150 ngàn đô, trả trong vòng 30 năm:

(1) Ngân hàng A ra giá 6.5%, với lệ phí $5,000 và không có "Discount Point".

(2) Ngân hàng B ra giá 6.25%, với lệ phí là $5,500 và 1 discount point (tức 1% hay là $1,500). Tổng cộng "point" và "fee" là $7,000.

Quả là khó lựa chọn nếu bạn không biết qua cách tính toán. Có người chọn ngân hàng B vì họ chỉ quan tâm vào lãi suất thấp; hoặc có người chọn ngân hàng A vì muốn đóng lệ phí thấp.

Vậy đâu là cách tính trung thực, nói lên tất cả những chi phí mà người vay tiền phải trả?

Bạn phải nhớ hỏi hoặc nhìn vào cái khoản APR để phân biệt khế nào là khế chua, khế nào là khế ngọt. Ngân hàng A cho bạn biết APR của họ là 6.83%, và ngân hàng B có APR là 6.71%. Vậy thì ngân hàng B là khế ngọt, và món nợ bạn mượn mua nhà sẽ có lợi về lâu về dài.

Nhưng đó là chuyện về lâu về dài.

Nếu tính về ngắn hạn thì ngân hàng A có thể sẽ là khế ngọt. Bởi vì chương trình mượn nợ của ngân hàng B, bạn phải đóng thêm $2,000 lệ phí. Nếu bạn không có sẵn 2 ngàn đô tiền mặt thì sao? hoặc giả như xe hư, nhà dột, gia đình bên Việt Nam cần gửi tiền về gấp... thì lại là chuyện khác. Ngân hàng A có thể là chọn lựa thích hợp, mặc dầu APR có cao hơn ngân hàng B.

Hoặc nếu bạn có ý định chỉ mượn nợ mua nhà ở trong vài năm, thì với ngân hàng A, bạn chỉ phải trả $948.10 một tháng (vốn lẫn lời), nhiều hơn chương trình của ngân hàng B mỗi tháng $24.52. Rồi bạn lấy lệ phí $2,000 phải trả thêm cho chương trình của ngân hàng B, chia cho $24.52, ra số thành là 82. Đây là số tháng mà bạn tính phải "gỡ gạc" từ số tiền 2000 đô phải đóng thêm (82 tháng vị chi là 6 năm rưởi). Điều này có nghĩa là nếu bạn có ý định ở trong căn nhà dưới 6 năm rưởi, thì ngân hàng A cho giải pháp rẻ hơn. Và nếu bạn có ý định mua nhà ở dài hơi, thì thay vì cân nhắc lãi suất, bạn nên tính tất cả các chi phí phải trả cho món nợ.

*Ví dụ 94.* Xác định lãi suất hàng năm của một tài khoản mà có lãi suất danh nghĩa ( lãi suất không thực) là 8% ghép lãi theo tháng.

*Giải.*

APR là lãi suất hàng năm mà có thể tính dựa trên yếu tố tăng trưởng. Nếu một tài khoản được đề nghị trả lãi suất là 8% ghép lãi theo tháng thì mỗi tháng lãi suất phải trả là $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=0.67\%$. Yếu tố tăng trưởng theo tháng là 1+ 0.67%=1.0067. Nếu thời gian là một năm thì ta có được yếu tố tăng trưởng sẽ là $(1.0067)^{12}$=1.0834 = 1+ $\frac{8.34}{100}$ vì đây là ghép lãi theo tháng.

*Ví dụ 95.. Nếu lãi suất danh nghĩa là 1.75% ghép lãi theo tháng của một khỏan vay thì APR tương ứng là bao nhiêu?.*

**7. Vốn chìm**

*Ví dụ 96.* Giả sử rằng bạn tiết kiệm 100$ mỗi tháng trong vòng 2 năm và gửi số tiền đó trong 1 tài khoản với tiền lời là 12% ghép lãi hàng tháng. Tài khoản như thế được gọi là Vốn chìm. Giả sử rằng bạn phải trả 100$ hàng tháng để có thể nhận được đầy đủ tiền lời trong tháng. Một lần nữa chúng ta nhớ lại công thức tính cho 1 khoản đầu tư là

$$S=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$$

ở đây r% là lãi suất theo tháng, và n là số tháng =24 tháng. Vậy lãi suất theo tháng là 12% : 12=1%. Đầu tiên bạn gửi tiết kiệm 100$ vào trong tài khoản của bạn cho 24 tháng.

Bạn sẽ có được số tiền là

$$S=100*(1+1\%)^{24}$$

Tiếp theo bạn gửi 100$ trong tháng thứ 2 bạn sẽ tiết kiệm được là

$$S=100*(1+1\%)^{23}$$

Vậy $S=100(1.01)^{24}+100(1.01)^{23}+...+100(1.01)^{2}+100(1.01)^{1}$

Lúc này ta có được tổng đây là một cấp số nhân.

$S=100(1.01)^{1}+100(1.01)^{2}+...+100(1.01)^{23}+100(1.01)^{24}$

Xác định a=100(1.01) , r =1.01, n=24. Ta có công thức tổng quát là

$$S=\frac{100(1.01)\left(1.01^{24}-1\right)}{(1.01-1)}=\frac{101(1.26973-1)}{0.01}=2724.32$$

*Ví dụ 97.* Giả sử rằng ở thời điểm kết thúc của 2 năm của tài khoản trong ví dụ trên bạn quyết định tiếp tục gửi tiết kiệm số tiền đó cũng với lãi suất như trên ghép lãi theo tháng. Mất bao lâu để bạn có thể có được quỹ chìm(vốn chìm) là 3000$?

**8. Tiền cho vay- Tiền thế chấp (Loans / Mortgages):**

*Ví dụ 98.* Bạn phải trả số tiền là bao nhiêu trong mỗi tháng nếu bạn vay 50000$ trong vòng 20 năm với mức lãi suất 6% ghép lãi theo năm.

*Giải.* Khoảng thời gian trả tiền lời giữa các tháng là liên tục. Mỗi tháng trả một lần và tháng sau được tính dựa trên số tiền lời phải trả của tháng trước. Đây là một cách tính tiêu biểu trong tài chính được các ngân hàng cho vay thực hiện. Lúc này là một người đi vay chúng ta phải biết mỗi tháng chúng ta phải trả bao nhiêu tiền lời chứ không thể quan tâm đến vấn đề là tháng này thì trả 500$ tháng sau lại trả 550$ số tiền cứ tăng dần mà không biết chính xác đến bao giờ kết thúc. Lúc này với cách tính trung bình số tiền hàng tháng phải trả chúng ta có thể yên tâm với số tiền chúng ta phải trả hàng tháng

Lãi suất hàng năm là 6% vì vậy tổng số tiền phải trả với mức lãi suất trong năm đầu tiên là 6%

50000*6%=3000.

Gọi x là số tiền trung bình phải trả hàng tháng.

Trong năm đầu tiên mỗi tháng phải trả số tiền là x thì 12 tháng số tiền phải trả là 12x . Số tiền vay nợ lúc này phải trả ở thời điểm cuối năm là

$$50000 + 3000 - 12x = 50000(1.06) - 12x$$

*( vì 50000+3000=53000 là số tiền vay nợ gồm lãi suất ở thời điểm kết thúc năm đầu tiên, mỗi tháng trả được một lượng là x thì 12 tháng trả được 12x nên số tiền vay nợ lúc này chỉ còn là 50000+3000 -12x)*

Trong năm thứ 2 mỗi tháng cũng phải trả số tiền x thì sau 12 tháng số tiền phải trả là 12x nhưng với tổng số tiền vay nợ lúc này chỉ còn $50000(1.06) - 12x$ . Số tiền vay nợ phải trả là

$$\begin{aligned}&\left(50000(1.06) - 12x\right) + \left(50000(1.06) - 12x\right) * 6\% - 12x = \\ &= \left(50000(1.06) - 12x\right) * (1.06) - 12x = 50000 * (1.06)^2 - 12x(1.06) - 12x\end{aligned}$$

**Nhận xét:** Mỗi năm chúng ta * 1.06 và -12x vì vậy ở năm thứ 3 ta có công thức

$$50000 \times (1.06)^3 - 12x(1.06)^2 - 12x(1.06) - 12x = 50000 \times (1.06)^3 - 12x(1 + 1.06 + 1.06^2)$$

Và cứ tiếp tục như vậy. Vậy số tiền vay nợ phải trả ở năm thứ 20 là. Vì đây là năm cuối cùng nên chắc chắn là sau khi trả tiền chúng ta sẽ hết nợ nên biểu thức này sẽ bằng không

$$50000\times(1.06)^{20}-12x(1.06)^{19}-...-12x(1.06)-12x=$$
$$50000\times(1.06)^{20}-12x(1+1.06+1.06^2+...+1.06^{19})$$

*(Biểu thức này cho kết quả =0 vì sau 20 năm đã trả hết được số tiền nợ).*

Lúc này theo cách tính giá trị tương lai ta dễ dàng tính được số tiền phải trả trong vòng 20 năm với lãi suất 6% ghép lãi hàng năm là

$$S=P(1+r)^{20}=50000(1+6\%)^{20}=160356.77 \quad (1)$$

$$12x(1+1.06+1.06^2+...+1.06^{19})=\frac{12x(1.06^{20}-1)}{1.06-1}=441.43x \quad (2)$$

Vậy số tiền phải trả hàng tháng là x được tính từ (1) và (2)

$$160356.77=441.43x \Rightarrow x=160356.77/441.43=363.27$$

**9. Xác định đầu tư**

**9.1 Giá trị hiện tại (P):**

$$S=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$S=Pe^{rt/100}$$

P: *vốn gốc*

S: *giá trị tương lai*

r: *lãi suất*

t: *thời gian*

- *Đối với trường hợp liên tục: t chính là n là số năm*
- *Đối với trường hợp đầu thì t đgl là số khoảng trong n năm.*

Trường hợp xảy ra là cho S, r, t xác định P. Khi đó quá trình này gọi là quá trình khấu trừ(discounting) và giá trị gốc P đgl giá trị hiện tại. Lãi suất trong trường hợp này đgl là lãi suất khấu trừ- lãi suất chiết khấu- tỉ lệ chiết khấu (*discount rate*). Công thức tính toán ở trên lúc này được viết lại thành

$$P=\frac{S}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}=S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$$

$$P=\frac{S}{e^{rt/100}}=Se^{-rt/100}$$

*Ví dụ 99.* Tìm giá trị hiện tại (P) của 2000$ trong thời gian 5 năm nếu lãi suất chiết khấu là 10% theo các trường hợp ghép lãi sau

a) hàng năm
b) từng quý
c) liên tục
d) nửa năm 1 lần.

*Giải.*

a) Trong trường hợp này S=2000, r =10% và n=5. Vậy

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} = 2000(1+10\%)^{-5} = 2000*(1.1)^{-5} = 1241.84$$

b) Trong trường hợp này S=2000, r =10% : 4=2.5% và n = 4*5 = 20. Vậy

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} = 2000(1+2.5\%)^{-20} = 2000*(1.025)^{-20} = 1220.54$$

c) Trong trường hợp này S=2000, r= 10% và t =5

$$P = Se^{-rt/100} = 2000e^{-10*5/100} = 1213.06$$

d) Trong trường hợp này S=2000, r=10%/2=5%,n=5*2=10

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} = 2000(1+5\%)^{-10} = 2000*(1.05)^{-10} = 1227.83$$

**9.2 Giá trị hiện tại ròng ( Net Present Value –NPV).**

*Giá trị hiện tại ròng là hiệu số của giá trị hiện tại dòng doanh thu (cash inflow) trừ đi giá trị hiện tại dòng chi phí (cash outflow) tính theo lãi suất chiết khấu lựa chọn. Khái niệm giá trị hiện tại ròng được sử dụng trong hoạch định ngân sách đầu tư (capital budgeting), phân tích khả năng sinh lợi của một dự án đầu tư, hay cả trong tính toán giá cổ phiếu )*

Ý nghĩa: Giá trị hiện tại ròng thường được sử dụng để đánh giá hoặc thẩm định vốn đầu tư của dự án

(*Việc tính toán NPV rất hữu ích khi chuẩn bị ngân sách cho một dự án, bằng phép tính này nhà đầu tư có thể đánh giá liệu tổng giá trị hiện tại dòng doanh thu dự kiến trong tương lai có bù đắp nổi chi phí ban đầu hay không. Với một dự án cụ thể, nếu NPV dương thì nhà đầu tư nên tiến hành dự án và ngược lại khi NPV âm* )

**NPV=Giá trị hiện tại của tiền vào – Giá trị hiện tại của tiền ra**

**Giá trị hiện tại của tiền vào:** Là các khoản tiền được nhận bởi nhà đầu tư P ( dòng tiền dương).

**Giá trị hiện tại của tiền ra:** Là các khoản tiền ban đầu được chi ra bởi nhà đầu tư (dòng tiền âm).

Thông thường trong các dự án đầu tư, tiền được đầu tư trong giai đoạn đầu ( dòng tiền âm trước) thì sau đó lợi nhuận mới được sinh ra( dòng tiền dương sau).

$$S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} \Rightarrow P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$$

P: được gọi là **Giá trị hiện tại của tiền vào.**

*Nhận xét:*Việc tính toán NPV phụ thuộc rất nhiều vào tham số tỉ lệ chiết khấu r, mỗi nhà đầu tư lại có cách đánh giá r riêng của mình. Ngoài ra dòng doanh thu, dòng chi phí không đồng đều, giá trị thanh lý tài sản cố định giữa các năm cũng sẽ làm cho việc tính toán trở nên phức tạp hơn nhiều.

*Ví dụ 100.* Một nhà đầu tư lựa chọn đầu tư vào một trong ba dự án sau:

Dự án A có chi phí đầu tư là 2000$ và thu được 3000$ trong vòng 4 năm

Dự án B có chi phí đầu tư là 2000$ và thu được 4000$ trong vòng 6 năm

Dự án C có chi phí đầu tư là 3000$ và thu được 4800$ trong vòng 5 năm

Dựa vào NPV cho biết nhà đầu tư nên chọn dự án nào với lãi suất là 10% ghép lãi theo năm.

Giải.

NPV của dự án A = $3000(1.1)^{-4} - 2000 = 49.04$

NPV của dự án B = $4000(1.1)^{-6} - 2000 = 257.90$

NPV của dự án C = $4800(1.1)^{-5} - 3000 = -19.58$

Vậy dự án B có NPV lớn nhất nên đây là sự lựa chọn đầu tư tốt nhất. Riêng dự án C có NPV< 0 nên ta có thể không quan tâm và so sánh với các dự án còn lại

*Ví dụ 101.* Một nhà đầu tư nhận được một lời đề nghị là nếu đầu tư 4000$ bây giờ sẽ thu được 10000$, 30000$, 2000$ lần lượt ở cuối năm 1, 2, 3. Hỏi nhà đầu tư có nên chọn lựa biết lãi suất là 10%.

*Ví dụ 102.* Một khoản đầu tư yêu cầu số tiền ban đầu là 7500$ và sẽ được trả lần lượt là 2000$ ở thời điểm kết thúc của năm trong vòng 5 năm. Hỏi nhà đầu tư có nên tham gia với mức lãi suất là 12%.

**9.3 Tỷ lệ lợi nhuận nội tại (Internal Rate of Return -IRR) – Tỉ suất hoàn vốn nội bộ**

IRR là chỉ tiêu đo lường tỷ suất sinh lợi mà bản thân dự án tạo ra.

**Ý nghĩa của IRR**

i) Về khả năng sinh lời IRR biểu thị tỉ lệ sinh lời lớn nhất mà bản thân dự án đạt được , phụ thuôc vào đặc điểm phát sinh dòng lợi ích và dòng chi phí trong tòan bộ thời gian thực hiên dự án.

ii) Về khả năng thanh toán: IRR biểu thị mức lãi vay cao nhất mà dự án khả năng thanh toán.

**Ứng dụng**

-IRR là chỉ tiêu hiệu quả tài chính quan trọng nhất của dự án

- IRR là chỉ tiêu bắt buộc trong thẩm định dự án

$$S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} \Rightarrow \left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} = \frac{P}{S} \Rightarrow 1+\frac{r}{100} = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/n} \Rightarrow r = ?$$

r: được gọi là IRR.

*Nhận xét:* IRR là tỉ lệ khấu trừ được sử dụng trong tính toán nguồn vốn để quy giá trị thuần của dòng tiền hiện tại của một dự án cụ thể về 0. Hiểu một cách chung nhất, tỉ lệ hoàn vốn nội bộ càng cao thì khả năng thực thi dự án là càng cao. IRR còn được sử dụng để đo lường, sắp xếp các dự án có triển vọng theo thứ tự, từ đó khiến cho công ty có thể dễ dàng hơn trong việc cân nhắc nên thực hiện dự án nào. Nếu giả định rằng tất cả các yếu tố khác của các dự án là như nhau thì dự án nào có tỉ suất hoàn vốn nội bộ cao nhất thì dự án đó có thể được ưu tiên thực hiện đầu tiên. IRR đôi khi còn được gọi là tỉ suất hoàn vốn kinh tế ERR (economic rate of return).

*Ý nghĩa:* Kế hoạch được xem là có lãi nếu IRR lớn hơn lãi suất hiện thời của thị trường (market rate).

*Ví dụ 103.* Giả sử bạn đầu tư 1000$ cho một dự án kinh doanh mà chắc chắn sẽ được hoàn trả lại $2000 trong thời gian 5 năm. Dựa vào 2 cách tính

a) NPV

b) IRR

hãy đưa ra quyết định chính xác có nên đầu tư với lãi suất thị trường là 10% ghép lãi theo năm.

*Giải.*

a) Với cách tính NPV ta có S =2 000, t =5, r =10%. Áp dụng công thức tính giá trị hiện tại ta có

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n} = 2000(1+10\%)^{-5} = 2000*(1.1)^{-5} = 1241.84$$

Vậy giá trị NPV =P-$1000=241.84

b) Với cách tính IRR ta áp dụng công thức $S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$ với S= 2000, P= 1000, t=5 suy ra

$$2000 = 1000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{100}\right)^{5} = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{100}\right) = 2^{1/5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{100} = 1.25 = 1.25 - 1 = 0.25$$

Vậy IRR =25%.

Với cả 2 cách tính chúng ta đều thấy rằng nhà đầu tư đều thu lợi

**Vấn đề:** *Câu hỏi đặt ra là nếu lãi suất là 15% thì nhà đầu tư có quyết định đầu tư không. Câu trả lời là với cách tính NPV chúng ta phải lặp lại tất cả các bước tính rồi mới quyết định là NPV dương hay âm. Nhưng với cách tính IRR thì ta chỉ việc so sánh với 25% và thấy rằng nó vẫn còn nhỏ hơn IRR nên suy ra được nhà đầu tư vẫn còn thu lợi.*

**Vấn đề:** *Trong việc tính toán phân bổ nguồn vốn có rất nhiều cách khác nhau để đánh giá một dự án. Mỗi cách thức đều có những ưu nhược điểm riêng. IRR là một chỉ số thường xuyên được sử dụng. Nhưng vì chỉ sử dụng một tỉ lệ chiết khấu duy nhất trong việc tính toán IRR nên sẽ có nhiều tình huống ảnh hưởng tới IRR. Nếu một nhà đầu tư tiến hành định giá hai dự án, cả hai đều sử dụng chung một tỉ suất chiết khấu, cùng dòng tiền ước tính, cùng chịu rủi ro như nhau và thời gian thực hiện ngắn, IRR có thể là một chỉ số hiệu quả. Nhưng vấn đề là ở chỗ tỉ suất chiết khấu luôn thay đổi theo thời gian. Ví dụ sử dụng lãi suất trái phiếu kho bạc làm tỉ suất chiết khấu. Mức lãi suất này có thể thay đổi từ 1% đến 20% trong vòng 20 năm, do đó dẫn đến sai lệch trong tính toán.*

*Ví dụ 104.* Giả sử nhà đầu tư có hai dự án A và B cần phải chọn lựa. Dự án A yêu cầu số vốn đầu tư là 1000$ và sẽ thu được lợi nhuận là 1200$ trong vòng 4 năm. Dự án B yêu cầu là 30000 $ và sẽ thu được lợi nhuận là 35 000$ cũng sau 4 năm. Bạn sẽ chọn lựa dự án nào nếu mức lãi suất thị trường là 3% ghép lãi theo năm?.

*Giải.*

Với cách tính NPV ta có

Đối với dự án A: NPV =$1200(1.03)^{-4}$ – 1000=66.18

Đối với dự án B: NPV =$35000(1.03)^{-4}$ – 30 000=1097.15

*Nhận xét:* Với NPV như trên cả hai dự án đều thích hợp để đầu tư. Hơn nữa, dự án B được chú ý nhiều hơn vì lợi nhuận mang lại cao hơn. Ta có thể xem xét đề nghị này bằng cách xem xét một giả thiết sau. Giả sử chúng ta có thể đầu tư 30 000$. Lúc này với dự án A ta có thể bỏ ra 1000$ để thu được 1200$ sau 4 năm. Số tiền còn lại là 29 000$ sẽ được dùng để đầu tư cho dự án B với mức lãi suất là 3% để thu được lợi nhuận sau 4 năm là 29 000$(1.03)^{-4}$= 32 639.76$

Vậy tổng lợi nhuận thu được sau 4 năm là 1 200 + 32 639.76=33 839.76$

Trong khi chỉ với mức đầu tư 30000$ cho toàn dự án B chúng ta có thể thu được lợi nhuận là 35 000$ và như vậy 35 000 -33 839.76= 1160.24$

Do đó lựa chọn dự án B là thích hợp nhất do đó có thể áp dụng NPV.

Tuy nhiên điều này sẽ trái ngược khi tiến hành với IRR.

Đối với dự án A

$$1200 = 1000\left(1+\frac{r_A}{100}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{r_A}{100}\right)^4 = 1.2$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{r_A}{100} = (1.2)^{1/4} = 1.047 \Rightarrow r_A = 4.7\%$$

Đối với dự án B

$$35000 = 30000\left(1+\frac{r_B}{100}\right)^4 \Rightarrow r_B = 3.9\%$$

Với tỷ lệ lợi nhuận nội tại như trên thì A là tốt hơn nhưng rõ ràng là chọn B sẽ thích hợp hơn.

**9.4 Giá trị hiện tại của dòng tiền phân bố đều (Present value of an Annuity):**

*Ví dụ 105.* Tìm giá tri hiện tại của dòng tiền phân bố đều ( giá trị hiện tại của dòng tiền trả hằng năm) sao cho lợi nhuận nhận được là 10000$ mỗi năm tính trong vòng 10 năm, giả sử mức lãi suất là 7% ghép lãi theo năm.

*Giải.*

Để nhận được lợi nhuận là 10 000$ sau năm đầu tiên thì số tiền phải đầu tư là

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-t}, S = 10000, r = 7\%, t = 1 \Rightarrow P = 10000(10.7)^{-1} = 9345.79\$$$

Để nhận được lợi nhuận là 10 000$ sau năm thứ hai thì số tiền phải đầu tư là

$$P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-t}, S = 10000, r = 7\%, t = 2 \Rightarrow P = 10000(10.7)^{-2} = 8734.39\$$$

Vậy sau t năm số tiền phải đầu tư tương ứng $10\,000(1.07)^{-t}$

Trong 10 năm thì số tiền phải đầu tư hay gọi là tổng giá trị hiện tại của dòng tiền phân bố đều là

$10000(1.07)^{-1} + 10000(1.07)^{-2} + ... + 10000(1.07)^{-10}$. Đây là một dãy cấp số nhân. Áp dụng công thức $a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$. Trong trường hợp này a=10 000(10.7)$^{-1}$, r=1.07$^{-1}$ và n =10. Vậy giá trị hiện tại của dòng tiền phân bố đều theo năm là

$$10000(1.07)^{-1}\left(\frac{1.07^{-10} - 1}{1.07^{-1} - 1}\right) = 70\,235.82$$

**Vấn đề:** Một vấn đề mà có lẽ sẽ phù hợp hơn với thực tế chúng ta thường gặp đó là không phải lúc nào NPV cũng là giống nhau trong mỗi năm. Các NPV sẽ có các giá trị riêng lẻ theo từng năm. Lúc này sự lựa chọn thực hiện dự án đầu tư nào của công ty cũng sẽ không còn chỉ phụ thuộc vào một NPV mà sự phụ thuộc đó là vào nhiều NPV nữa. Vậy họ sẽ làm thế nào để đưa ra quyết định cuối cùng là sẽ chọn dự án đầu tư nào. Câu trả lời sẽ được xuất hiện trong ví dụ sau.

*Ví dụ 106.* Một công ty quyết định đầu tư 20 000$ cho một trong hai dự án Avà B. Giá trị tương lai (lợi nhuận) được cho theo bảng số liệu sau

| | Lợi nhuận | |
|---|---|---|
| Thời điểm kết thúc của năm | Dự án A | Dự án B |
| 1 | 6000 | 10000 |
| 2 | 3000 | 6000 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 10000 | 9000 |
| 4 | 8000 | 1000 |
| Tổng cộng | 27000 | 26000 |

Lãi suất là 11% ghép lãi theo năm.

Giá trị hiện tại (P) của từng năm được tính tương ứng với giá trị tương lai(Lợi nhuận) theo công thức

P= S(1.11)$^{-t}$

Ta có bảng lợi nhuận chiết khấu P là

| | Lợi nhuận chiết khấu | |
|---|---|---|
| Thời điểm kết thúc của năm | Dự án A | Dự án B |
| 1 | 5405.41 | 9000.01 |
| 2 | 2434.87 | 4869.73 |
| 3 | 7311.91 | 6580.72 |
| 4 | 5269.85 | 658.73 |
| Tổng cộng | 20422.04 | 21109.19 |

Vậy NPV của Dự án A là 20 422.67-20000=422.67

Vậy NPV của Dự án B là 21 109.19-20000=1109.19

Dự án B sẽ được chọn vì NPV của nó tốt hơn.

**Vấn đề:** Lúc này ta sẽ xem xét trường hợp của IRR cũng với những gì đã xảy ra cho NPV thì ta nhận xét rằng quá trình đó không phải là dễ dàng hay nói chính xác là khó để mà tính toán đúng giá trị mong muốn.

*Ví dụ 107.*

1) Tính toán IRR của một dự án mà yêu cầu vốn đầu tư ban đầu là 20 000$ và lần lượt có doanh thu là 8000 trong năm thứ nhất và 15 000 trong năm thứ 2

2) Tính toán IRR của một dự án mà yêu cầu vốn đầu tư là 5000 và lần lượt có doanh thu là 1000, 2000, 3000 ở thời điểm kết thúc năm thứ 1, 2 và 3.

*Giải.*

Áp dụng công thức $S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} \Rightarrow P = S\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}$

Giá trị hiên tại của 8000$ trong năm thứ nhất là $8000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1}$

Giá trị hiện tại của 12000$ trong năm thứ hai là $12000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2}$

Tổng của các giá trị hiện tại trong năm thứ 1 và thứ 2 phải bằng tổng vốn đầu tư ban đầu là 20 000$.Hiểu theo nghĩa khác thì IRR là giá trị của r thỏa mãn phương trình

$$20000=8000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-1}+12000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 20000\left(1+\frac{r}{100}\right)^{2}=8000\left(1+\frac{r}{100}\right)+15000$$

Ta biết $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{2}=\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)=1+\frac{r}{50}+\frac{r^2}{10000}$

$$20000+400r+2r^2=8000+80r+15000 \Leftrightarrow 2r^2+320r-3000=0$$

Giải phương trình này ta được r =8.9% và r =-168.9%. Vậy ta có IRR là 8.9%

*Câu 2 giải tương tự*

## II. Ứng dụng của Đạo hàm trong Kinh tế

### 1. Hàm biên tế ( Đại lượng biên tế)

Đại lượng biên tế của y=f(x) tại $x_o$ là lượng thay đổi của đại lượng y khi đại lượng x tăng lên một đơn vị, kí hiệu là $M_x y(x_o)$ hoặc $My(x_o)$.

*Nhận xét:*

i) Doanh thu biên là tỉ lệ thay đổi của doanh thu ứng với sự thay đổi một đơn vị sản phẩm ( nói cách khác là lượng doanh thu gia tăng khi bán được thêm một đơn vị sản phẩm Q) ở mức sản lượng là Q, kí hiệu là TR'(Q), MR(Q), MR, và được tính tóan như sau:

$$MR=\frac{dTR}{dQ} \text{ với } TR = P.Q$$

ii) Chi phí biên là tỉ lệ thay đổi của chi phí ứng với sản lượng tăng thêm một đơn vị sản phẩm ( nói cách khác là lượng chi phí gia tăng khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm Q) ở mức sản lượng là Q, kí hiệu là TC'(Q), MC(Q), MC, và được tính tóan như sau:

$$MC=\frac{dTC}{dQ}$$

iii) Lợi nhuận biên, kí hiệu là $\pi'(Q)$, $\pi'$, MP(Q), và được tính tóan như sau:

$$\pi'(Q)=TR'(Q)-TC'(Q)=MR-MC$$

*Ví dụ 108.* Bộ phận nghiên cứu thị trường của Công ty sản xuất radio xác định phương trình của đường cầu như sau:

Q = 10000 – 1000P (Số lượng sản phẩm là Q ở mức giá P$)

hay P =10– Q/1000

Với Q là số lượng máy radio được tiêu thụ hàng tuần ở mức giá P$/mỗi radio.

Bộ phận tài chánh của Công ty ước tính phương trình tổng chi phí như sau:

TC(Q) = 7000 + 2Q

Hãy tìm TC'(Q), TR(Q), TR'(Q), $\pi$(Q) và $\pi$'(Q).

*Giải.*

+ *Chi phí:*

Tổng chi phí: TC(Q) = 7000 + 2Q

Chi phí biên tế: TC'(Q)=MC(Q) = 2. Nhận xét TC'(Q) >0. Vậy TC(Q) đồng biến với Q

+ *Doanh thu*

Tổng doanh thu

$$TR(Q) = PQ = \left(10 - \frac{Q}{1000}\right)Q = 10Q - \frac{Q^2}{1000}$$

Doanh thu biên

MR(Q) = 10 – Q/500

MR(2000)=6

MR(5000) =0

**Nhận xét:** Ở mức Q =2000 nếu Q tăng 1 đơn vị thì TR(Q) tăng 6$ị. Suy ra TR dần đến max.

+ *Lợi nhuận*

Tổng lợi nhuận

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -\frac{Q^2}{1000} + 8Q - 7000$$

Lợi nhuận biên

$$\pi'(Q) = -\frac{Q}{500} + 8$$

$$\pi'(4000) = 0$$

$$\Rightarrow \pi(Q) \to \max \pi'(1000) = 6\$$$

$$\pi'(6000) = -4$$

+ Điểm hòa vốn. Khi TR(Q) = TC(Q) hay $\pi(Q)=0$

**2. Hệ số co giãn tức thời**

Hệ số co giãn tức thời của đại lượng y theo đại lượng x tại $x_o$ là độ biến đổi tương đối của y khi x thay đổi tương đối 1%. Kí hiệu hệ số co giãn tức thời là $\varepsilon_{yx}(x_0)$.

Nhận xét:

* Độ co giãn của cầu là tỉ lệ giữa phần trăm thay đổi của lượng cầu và phần trăm thay đổi của giá.

$$E_D = \text{\% thay đổi lượng cầu / \% thay đổi về giá} = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta P}$$

Vậy Độ co giãn tức thời của cầu là

$$\varepsilon_D = \frac{p}{f(p)} * f'(p)$$

*Ví dụ 109.* Cho phương trình đường cầu x = f(p) = 500(20 - p)

a/ Tìm phương trình của độ co giãn cầu tức thời $\varepsilon_D$.

b/ Tìm $\varepsilon_D$ tại p = 4\$, P = 16\$ và p = 10\$. Giải thích ý nghĩa.

*Giải.*

$$a)\varepsilon_D = \frac{p}{f(p)} * f'(p) = \frac{p}{500(20-p)} * (-500)$$

$$\varepsilon_D = \frac{-p}{20-p}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \varepsilon_D < 0 \\ p \geq 0 \end{cases} \Rightarrow p \leq 20$$

$$b)\varepsilon_D(4) = -.025$$

$$\varepsilon_D(16) = -4$$

$$\varepsilon_D(10) = -1$$

Ở mức giá p = 4 nếu giá p tăng 1% thì lượng sản phẩm giảm 0.25%

Ở mức giá p = 6 nếu giá p tăng 1% thì lượng sản phẩm giảm 4%

Ở mức giá p = 10 nếu giá p tăng 1% thì lượng sản phẩm giảm 1%

**Kết luận:** Cho phương trình cầu: x = f(p). Độ giãn tức thời của cầu là:

$$\varepsilon_D = (-1)\frac{p}{f(p)} * f'(p) \text{ và } \varepsilon_D \leq 0$$

+ Nếu $-1 \leq \varepsilon_D \leq 0$ Cầu không (hoặc ít) co giãn ( theo giá)

+ Nếu $\varepsilon_D < -1$ Cầu co giãn theo giá

+ Nếu $\varepsilon_D = -1$ Cầu có độ co giãn đơn vị

*Ví dụ 110.* Tìm độ co giãn của cầu khi giá là 12 và hàm cầu là p=60-3q

*Ví dụ 111.* Tìm độ co giãn của cầu khi số lượng sản phẩm là 8 và hàm cầu là $q = 60 - 2p^{0.5}$

**3. Tối ưu hóa các hàm kinh tế**

a) Toán học

**Định lý 1** *( điều kiện cần)*

Nếu hàm số y=f(x) đạt cực trị tại $x_o$ và có đạo hàm tại điểm đó thì $f'(x_o)=0$

**Định lý 2.1** *( điều kiện đủ thứ nhất)*

Cho f xác định tại $x_o$ và khả vị trong lân cận của $x_o$. Khi qua $x_o$

i) Nếu f'(x) đổi dấu từ âm sang dương thì f(x) đạt cực tiểu tại $x_o$

ii) Nếu f''(x) đổi dấu từ dương sang âm thì f(x) đạt cực đại tại $x_o$

iii) Nếu f'(x) không đổi dấu thì f(x) không đạt cực trị tại $x_o$.

**Định lý 2.1** *( điều kiện đủ thứ hai)*

Cho

i) f khả vi đến cấp (n-1) trong lân cận của $x_o$

ii) tồn tại $f^n(x_o)$

iii) $f'(x_o)=f''(x_o)=\ldots=f^{n-1}(x_o)=0,\ f^n(x_o) \neq 0$

Khi đó

a) Nếu n lẻ, f(x) không đạt cực trị tại $x_o$

b) Nếu n chẵn và $f^n(x_o) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu tại $x_o$

b) Nếu n chẵn và $f^n(x_o) < 0$ thì f(x) đạt cực đại tại $x_o$

**Bài toán 1:( Tìm sản lượng để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa)**

**Giả thiết:** Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm với hàm cầu là

$$Q_D = D(P)$$

$Q_D$: lượng hàng cầu

P: giá bán

Và hàm tổng chi phí là

$$TC=TC(Q)$$

Q là tổng sản lượng sản xuất trong một đơn vị thời gian

**Kết luận:** Tìm mức sản lượng Q để xí nghiệp có lợi nhuận tối đa

**Lược đồ giải:**

$$Q = Q_D = D(P)$$
$$\Rightarrow P = D^{-1}(Q) = P(Q)$$

Tổng doanh thu của xí nghiệp

$$TR(Q)=P(Q)*Q$$

Lợi nhuận của xí nghiệp

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) \Rightarrow \pi(Q)_{max}$$
$$\Leftrightarrow \pi'(Q) = TR'(Q) - TC'(Q) = 0$$
$$\Leftrightarrow MR(Q) - MC(Q) = 0$$
$$*MR(Q) = MC(Q)$$

**Bài toán 2: (Bài toán đánh thuế doanh thu)**

**Giả thiết:** Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm với hàm cầu là

$$Q_D = D(P)$$

Và hàm tổng chi phí là

$$TC=TC(Q)$$

**Kết luận:** Tìm mức thuế trên 1 đơn vị sản phẩm để nhà nước thu được của xí nghiệp nhiều thuế nhất

**Lược đồ giải:**

$$Q = Q_D = D(P)$$
$$\Rightarrow P = D^{-1}(Q) = P(Q)$$

Tổng doanh thu của xí nghiệp

$$TR(Q)=P(Q)*Q$$

Thuế của xí nghiệp phải trả

$$T=Q*t$$

Lợi nhuận của xí nghiệp

$$\pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) - T$$

Để $\pi(Q)_{max}$ thì ta sẽ tìm được một mức sản lượng Q phụ thuộc vào t: Q(t)

Với mức sản lượng để $\pi(Q)_{max}$ ta có thể tìm được T=Q(t)*t.

**Nhận xét:** Q(t) là một hàm giảm theo t và mức thuế xác định trên rất cao. Với mức thuế như vậy nên xí nghiệp sẽ sản xuất cầm chừng , không tận dụng hết khả năng sản xuất của họ. Do đó sẽ dẫn đến thất nghiệp,.. Vì lý do đó nhà nước thường định ở mức thuế nhập khẩu thấp hơn để khuyến khích sản xuất.

**Bài toán 3: (Đinh mức thuế nhập khẩu)**

**Giả thiết:** Cho hàm cung và hàm cầu về 1 loại sản phẩm cho thị trường nội địa

$$Q_S = S(P) \text{ và } Q_D = D(P)$$

Giá bán sản phẩm trên thị trường quốc tế với chi phí nhập khẩu( chưa kể thuế) là

$\overline{P} < P_0$ ( tại điểm cân bằng của thị trường nội địa). Một công ty được độc quyền nhập loại hàng trên và khối lượng nhập khẩu không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế.

**Kết luận:** Tìm t để mức thuế trên 1 sản phẩm thu được của công ty là nhiều nhất

**Lược đồ giải:**

Gọi t là mức thuế nhập khẩu ( t >0 và $\overline{P} + t < P_0$)

Gọi P là giá bán của công ty suy ra $P - \overline{P} + t < P < P_0$

Lượng hàng nhập về tương ứng với P sẽ là Q sao cho

$Q + S(P) = D(P) \Leftrightarrow Q = D(P) - S(P)$

Lợi nhuận của xí nghiệp

$$\begin{aligned}\pi(P) &= TR(P) - TC(P) - T \\ &= P[D(P) - S(P)] - [D(P) - S(P)]\overline{P} - [D(P) - S(P)]t \\ &= (P - \overline{P} - t)[D(P) - S(P)]\end{aligned}$$

Đây là hàm theo giá P. Vậy P tìm được để $\pi(P)_{max}$ là một hàm phụ thuộc t

Với mức giá P(t) này ta có sẽ tìm được T = t*[D(P(t) – S(P(t))]

**Bài toán 4: (Đinh mức thuế xuất khẩu) (SGK)**

*Ví dụ 112.* Hàm sản xuất trong một thời gian ngắn của công ty là $Q = 6L^2 - 0.2L^3$, ở đây L biểu thị số lượng công nhân.

a) Xác định số lượng công nhân cần thiết để hàm sản xuất đạt giá trị max và vẽ đồ thị của hàm sản xuất này

b) Xác định số lượng công nhân cần thiết để hàm sản xuất trung bình max. Tính $MP_L$ và $AP_L$ ở giá trị L max. Bạn có nhận xét gì về $MP_L$ và $AP_L$?.

**Giải:**

a/ $Q = 6L^2 - 0.2L^3$ ta có $\dfrac{dQ}{dL} = 12L - 0.6L^2 = 0 \Leftrightarrow L = 0 \text{ or } L=20$

$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1.2L$. Khi L =0 thì $\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 > 0$. Vậy hàm sản xuất có giá trị cực tiểu tại L=0 giá trị của hàm sản xuất lúc này là Q =0

Khi L =20 thì $\frac{d^2Q}{dL^2} = -12 < 0$. Vậy hàm sản xuất đạt cực đại tại L =20, giá trị của hàm sản xuất lúc này là $Q_{max}$= 800.

b/ Hàm sản xuất trung bình $AP_L = \frac{Q}{L}$. Vậy hàm sản xuất $AP_L = \frac{6L^2 - 0.2L^3}{L}$

$AP_L$(max)=45. Mà ta có $MP_L$= 12L – 0.6$L^2$ , khi L =15 $MP_L$= 45

Kết luận: $MP_L$= $AP_L$

*Ví dụ 113.* Hàm cung của một mặt hàng có dạng như sau

P + Q =30

Và hàm chi phí là TC = ½ $Q^2$ 6Q +7

a/ Tìm sản lượng sản xuất ra để tổng doanh thu TR là max

b/ Tìm sản lượng sản xuất để lợi nhuận là cực đại. Tính MR và MC ở giá trị Q. Bạn có nhận xét điều gì?.

**Giải:**

a/ TR =PQ suy ra TR = (30 –Q)Q =30Q – $Q^2$. $TR_{max}$ khi Q =15

b/ $\pi = TR - TC$. Từ câu a ta có TR= 30Q – $Q^2$, TC = ½ $Q^2$ 6Q +7. Suy ra

$\pi = -\frac{3}{2}Q + 24Q - 7$.

Kết luận: MR = MC.

*Ví dụ 114.* Giá xây dựng cao ốc văn phòng gồm x tầng được chia làm 3 thành phần sau:

a/ \$10 triệu USD cho tiền mua đất

b/ $\frac{1}{4}$ triệu USD \$ mỗi tầng

c/ chi phí thiết kế cho mỗi tầng là 10 000x \$.

Hỏi có bao nhiêu tầng trong tòa nhà này sẽ được xây dựng để chi phí trung bình cho mỗi tầng là min?.

**Giải:**

Chi phí 10 triệu USD để xây dựng mỗi tầng là cố định

Mỗi tầng có giá là 250000 \$. Vậy nếu xây dựng x tầng thì số tiền sẽ là 250000x.

Chi phí mỗi tầng phải là 10000x$. Vậy nếu xây dựng x tầng thì số tiền là $10000x^2$..

Tổng chi phí TC =10 000 000 + 250 000x+ 10 $000x^2$.

Chi phí trung bình cho mỗi tầng là $AC = \frac{TC}{x}$.

Ta ra được kết quả là chỉ nên thiết kế 32 tầng thôi.

*Ví dụ 115.* Cho hàm cung và hàm cầu như sau

$P = Q_S + 8$

$P = -3Q_D + 80$

Chính phủ quyết định đánh thuế là t$ cho mỗi đơn vị sản phẩm. Tìm t để tổng doanh thu về thuế của chính phủ là max giả sử rằng điều kiện cân bằng của thị trường là xảy ra trong thị trường.

**Giải:**

$P - t = Q_S + 8$

$P = -3Q_D + 80$

Thị trường cân bằng khi cung và cầu gặp nhau $Q = 18 - \frac{1}{4}t$

Tổng doanh thu về thuế của chính phủ là $T = tQ = t\,(18 - \frac{1}{4}t)$

Tính ra được t =36$

*Ví dụ 116.* Hàm sản xuất trong một thời gian ngắn được cho bởi

$Q = L^2 e^{-0.01L}$

Tìm giá trị của L mà hàm sản xuất trung bình max.

*Ví dụ 117.* Một công ty ước lượng tổng doanh thu từ việc bán Q sản phẩm được cho bởi $TR = \ln(1 + 1000Q^2)$

Tính toán doanh thu biên khi Q =10.

*Ví dụ 118.* Tìm lợi nhuận cực đại với hàm tổng chi phí là

$$TC = 4 + 97q - 8.5q^2 + \frac{1}{3}q^3$$

Và hàm tổng doanh thu là

$$TR = 58q - 0.5q^2$$