TRUNG TÂM LUYỆN THI ĐẠI HỌC VĨNH VIỄN
Chủ biên: Hoàng Hữu Vinh
Biên soạn: Nguyễn Quang Hiển – Nguyễn Văn Hòa
Trần Minh Quang – Trần Minh Thịnh

HÌNH HỌC

DÀNH CHO HỌC SINH 10–11–12
VÀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

Chúng tôi là nhóm giáo viên Toán của Trung tâm luyện thi Vĩnh Viễn có nhiều kinh nghiệm trong việc giảng dạy và biên soạn sách tham khảo. Nhằm mục đích giúp các em học sinh tự học, nâng cao bài tập ở các lớp 10, 11, 12 và nhất là các em đang sắp thi vào Đại học, chúng tôi cùng biên soạn bộ Toán gồm ba quyển.

Quyển 1: Hình học.

Quyển 2: Khảo sát hàm số – Tích phân – Số phức

Quyển 3: Lượng giác – Đại số – Giải tích tổ hợp

Mỗi quyển sách gồm:

• Tóm tắt lý thuyết một cách có hệ thống và đầy đủ.

• Phân loại các dạng toán cùng với cách giải dễ hiểu. Nhiều bài tập mẫu từ dễ đến khó, trong đó có nhiều bài được giải bằng nhiều cách khác nhau.

• Rất nhiều bài tập để học sinh tự luyện được soạn rất công phu, theo sát đề thi tuyển sinh Đại học (có Đáp số hoặc Hướng dẫn).

Chúng tôi hy vọng quyển sách này sẽ giúp các em thích thú, nâng cao học lực và thành công trong kì thi tuyển sinh Đại học sắp đến. Dù đã cố gắng nhiều, nhưng chắc chắn vẫn còn nhiều thiếu sót, mong sự đóng góp ý kiến của các em học sinh và của độc giả.

Nhóm biên soạn

PHẦN 1

HÌNH GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẲNG (Oxy)

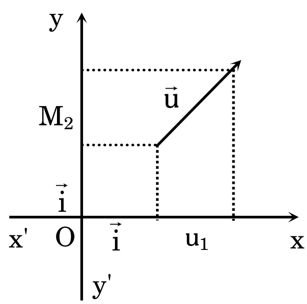
Biên soạn: NGUYỄN QUANG HIỂN
TRẦN MINH QUANG
HOÀNG HỮU VINH

BÀI 1

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRÊN MẶT PHẲNG (Oxy)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy gồm hai trục vuông góc nhau x'Ox và y'Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i}$ và $\vec{j}$ mà: $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$



Gọi x'Ox: trục hoành

y'Oy: trục tung

O: gốc tọa độ

I. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

Đối với hệ tọa độ Oxy, cho hai vectơ: $\vec{u} = (u_1;\ u_2)$ và $\vec{v} = (v_1;\ v_2)$.

Ta có:

1. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1. \\ u_2 = v_2. \end{cases}$

2. $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1; u_2 \pm v_2)$

3. $k.\vec{u} = (k.u_1;\ k.u_2)$. $(k \in R)$

   $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in R$: $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$

4. Tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$

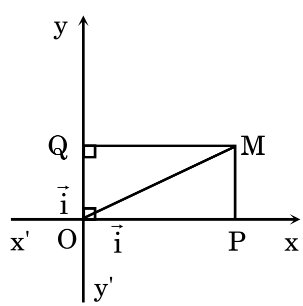
   $\vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{u_1.v_1 + u_2.v_2}$.

   Hệ quả: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

   Độ dài vectơ: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

II. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

Cho hệ tọa độ Oxy và một điểm M tùy ý. Tọa độ (x; y) của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là tọa độ của điểm M và ký hiệu là: M(x; y).



x: hoành độ, y: tung độ.

Cho hai điểm $A(x_A;\ y_A)$ và $B(x_B;\ y_B)$.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A}; \mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})$$

$$\mathbf{AB} = \sqrt{(\mathbf{x_B} - \mathbf{x_A})^2 + (\mathbf{y_B} - \mathbf{y_A})^2}$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là: $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}; y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

G trọng tâm ΔABC: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho tam giác ABC với: A(1; 0), B(5; 0), C(2; 3). Tìm các điểm sau của tam giác:

a) Trọng tâm G.

b) Trực tâm H.

c) Chân A’ của đường cao hạ từ A xuống cạnh BC.

d) Tâm I của đường tròn ngoại tiếp.

Giải

a) G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{8}{3};\quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1$$

Vậy: G($\frac{8}{3}$; 1)

b) H(x, y) là trực tâm tam giác ABC:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Mà: $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y)$; $\overrightarrow{BC} = (-3; 3)$;

$\overrightarrow{BH} = (x - 5; y)$; $\overrightarrow{AC} = (1; 3)$

Nên điều kiện trên thành:

$$\begin{cases} -3(x-1) + 3y = 0 \\ 1(x-5) + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy: H(2; 1)

c) A'(x, y) là chân đường cao hạ từ A xuống cạnh BC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} \text{ và } \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \end{cases}$$

Mà: $\overrightarrow{AA'} = (x-1;\ y)$; $\overrightarrow{BC} = (-3;\ 3)$; $\overrightarrow{BA'} = (x-5;\ y)$

Nên điều kiện trên thành:

$$\begin{cases} -3(x-1) + 3y = 0 \\ 3(x-5) + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy: A'(3; 2)

d) I(x, y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 24 = 0 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy: I(3; 1).

Bài 2. Cho ba điểm: A(–3; 3), B(–5; 2), C(1; 1)

a) Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Chứng tỏ $\widehat{BAC}$ là góc tù.

c) Tính diện tích tam giác ABC.

d) Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;\ -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4;\ -2)$

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-2).(-2) - (-1).4 = 8 \neq 0.$$

Nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, tức là ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Ta có: $\cos BAC = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{(-2).(4) + (-1).(-2)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}.\sqrt{(4)^2 + (-2)^2}} \equiv \dfrac{-3}{5} < 0.$

Nên $\widehat{BAC}$ là góc tù.

b) Diện tích tam giác ABC:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}AB.AC.\sqrt{1 - \cos^2 BAC}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5}.\sqrt{20}.\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = 4(\text{đvdt})$$

c) Ta có: S = pr

Mà: $p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{37} + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3\sqrt{5} + \sqrt{37})$

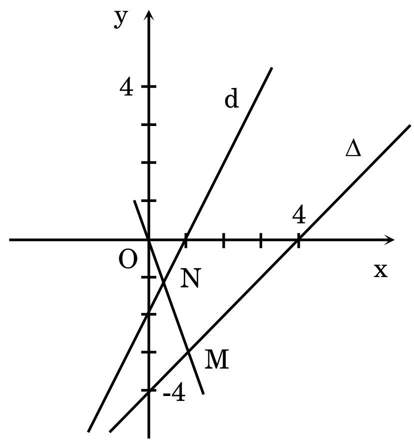
$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = 3\sqrt{5} - \sqrt{37}$.

Bài 3. Tuyển sinh Đại Học khối B/2011

Cho $\Delta: x - y - 4 = 0$, $d: 2x - y - 2 = 0$

Tìm N thuộc d sao cho đường thẳng ON cắt Δ tại M thỏa OM.ON = 8.

Giải



Gọi $M(m, m - 4) \in \Delta$

$N(n, 2n - 2) \in d$

Ta có:

O, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & m-4 \\ n & 2n-2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow m(2n - 2) = n(m - 4)$

$\Leftrightarrow mn - 2m = -4n$

$\Leftrightarrow (4 + m)n = 2m$

$\Leftrightarrow n = \frac{2m}{4+m}$

Ta có: $OM^2.ON^2 = 64$

$\Leftrightarrow [m^2 + (m - 4)^2]\left[\frac{4m^2}{(4+m)^2} + \frac{4(m-4)^2}{(m+4)^2}\right] = 64$

$\Leftrightarrow [m^2 + (m - 4)^2][m^2 + (m - 4)^2] = 16(m + 4)^2$

$\Leftrightarrow (2m^2 - 8m + 16)^2 = [4(m + 4)]^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m^2 - 8m + 16 = 4(m+4) \\ 2m^2 - 8m + 16 = -4(m+4) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m^2 - 12m = 0 \\ 2m^2 - 4m + 32 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m = 0 \vee m = 6$

Vậy $M_1(0; -4)$, $N_1(0, -2)$ hay $M_1(6, 2)$ $N_2\left(\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Bài 4. Tuyển sinh Đại Học khối B/2007

Cho A(2, 2). Tìm B trên $d_1: x + y - 2 = 0$

C trên d_2: x + y – 8 = 0 sao cho ΔABC vuông cân tại A.

Giải

Gọi $B(b, 2 - b) \in d_1$

$C(c, 8 - c) \in d_2$

Ta có:

$$\Delta ABC \perp \text{ cân tại A} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (b-2, -b) \perp \overrightarrow{AC} = (c-2, 6-c) \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-2)(c-2) - b(6-c) = 0 \\ (b-2)^2 + b^2 = (c-2)^2 + (6-c)^2 \end{cases}$$

Đặt X = b – 1 và Y = c – 4 ta được hệ

$$\begin{cases} (X-1)(Y+2) = (X+1)(2-Y) \\ (X-1)^2 + (X+1)^2 = (Y+2)^2 + (2-Y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} XY = 2 \\ 2X^2 + 2 = 2Y^2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{2}{X} \\ X^2 = Y^2 + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{2}{X} \\ X^2 = \dfrac{4}{X^2} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{2}{X} \\ X^4 - 3X^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{2}{X} \\ X^2 = -1 \text{ (loại)} \vee X^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2 \\ Y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} X = -2 \\ Y = -1 \end{cases}$$

Do $\begin{cases} b = X + 1 \\ c = Y + 4 \end{cases}$ nên $\begin{cases} b = 3 \\ c = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy $B_1(3, -1)$, $C_1(5, 3)$ và $B_2(-1, 3)$, $C_2(3, 5)$.

Bài 5. Cho ΔABC có trọng tâm G(0, 4), C(–2, –4). Biết trung điểm M của BC nằm trên d: x + y – 2 = 0. Tìm M để độ dài AB ngắn nhất.

Giải

Gọi $M(m, 2 - m) \in d$

Do M trung điểm BC nên

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 2m + 2 \\ y_B = 2y_M - y_C = 2(2 - m) + 4 \end{cases}$$

Vậy $B(2m + 2, 8 - 2m)$

Do G là trọng tâm ΔABC nên

$$\begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C = -2m \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C = 8 + 2m \end{cases}$$

Vậy $A(-2m, 8 + 2m)$

Ta có $\quad AB^2 = (4m + 2)^2 + (-4m)^2$

$$= 32m^2 + 16m + 4 = 32\left(m^2 + \frac{1}{2}m\right) + 4$$

$$= 32\left[\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] + 4 = 32\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 + 2 \geq 2$$

Vậy $AB_{min} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow M\left(-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

Bài 6. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\sqrt{4\cos^2x.\cos^2y + \sin^2(x - y)} + \sqrt{4\sin^2x.\sin^2y + \sin^2(x - y)} \geq 2, \quad \forall x, y$

b) $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}, \qquad \forall x, y, z$

Giải

a/ Trong hệ tọa độ Oxy: Với mọi x, y xét hai vectơ:

$$\vec{a} = (2\cos x.\cos y; \sin(x - y)); \vec{b} = (2\sin x.\sin y; \sin(x - y))$$

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (2\cos(x - y); 2\sin(x - y))$

Và: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

Nên: $\sqrt{4\cos^2x\cos^2y + \sin^2(x - y)} + \sqrt{4\sin^2x\sin^2y + \sin^2(x - y)} \geq 2; \forall x, y.$

b/ Trong hệ tọa độ Oxy: Với mọi x, y, z, xét hai vectơ:

$$\vec{a} = (x + \frac{y}{2}; \frac{y\sqrt{3}}{2}); \vec{b} = \left(x + \frac{z}{2}; -\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (\frac{y}{2} - \frac{z}{2}; \frac{y\sqrt{3}}{2} + \frac{z\sqrt{3}}{2})$

Và: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} - \vec{b}|$

Nên: $\sqrt{(x+\frac{y}{2})^2 + (\frac{y\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{(x+\frac{z}{2})^2 + (\frac{z\sqrt{3}}{2})^2} \geq \sqrt{(\frac{y}{2}-\frac{z}{2})^2 + (\frac{y\sqrt{3}}{2}+\frac{z\sqrt{3}}{2})^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{x^2+xz+z^2} \geq \sqrt{y^2+yz+z^2}; \forall x, y, z$.

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 2} + \sqrt{\cos^2\alpha + 6\cos\alpha + 13}$$

Giải

Ta có: $y = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + 1} + \sqrt{(\cos\alpha + 3)^2 + 4}$

Trong hệ tọa độ Oxy, xét hai vectơ:

$$\vec{a} = (1-\cos\alpha; 1) \text{ và } \vec{b} = (\cos\alpha + 3; 2), \alpha \in R$$

Thì: $\vec{a} + \vec{b} = (4; 3)$

Và áp dụng bất đẳng thức tam giác ta được:

$$y = |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \forall\alpha$$

$y = 5 \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k > 0 : \vec{a} = k.\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos\alpha = k.(\cos\alpha + 3) \\ 1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{1}{3} \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $\underset{R}{\text{Min}}\, y = 5$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho ba điểm: A(1; –2), B(0; 4), C(3; 2). Tìm điểm D sao cho:

a) $\overrightarrow{CD} = 2.\overrightarrow{AB} - 3.\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AD} + 2.\overrightarrow{BD} - 4.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

c) ABCD là hình bình hành

d) $D \in Ox$ và ABCD là hình thang đáy là AB.

Đáp số: D(–5, –2) (11, 2) (4, –4) $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

BT2. Cho điểm A(3; 1). Tìm các điểm B và C sao cho OABC là hình vuông và điểm B nằm trong góc tọa độ thứ nhất.

Đáp số: B(2, 4); C(–1, 3).

BT3. Cho một tam giác có trung điểm các cạnh là: M(1; 4), N(3; 0), P(–1; 1). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

Đáp số: (–3, 5); (5, 3); (1, –3).

BT4. Cho hai điểm A(1; –1), B(4; 3). Tìm tọa độ những điểm M, N chia AB thành ba đoạn bằng nhau.

Đáp số: $M\left(2, \frac{1}{3}\right)$; $N\left(3, \frac{5}{3}\right)$.

BT5. Cho tam giác ABC có A(–1; 2), B(2; 1) và trực tâm H(1; 2). Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp. *Đáp số:* I(1, 3).

BT6. Cho tam giác đều ABC có A(2; 1) và B(–1; 2). Tìm đỉnh C.

Đáp số: $C\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}\right)$.

BT7. (D/04) Cho A(–1, 0); B(4, 0); C(0, m) gọi G là trọng tâm ΔABC. Tìm m để ΔABG vuông tại G.

Đáp số: $m = \pm 3\sqrt{6}$.

BT8. (A/04) Cho A(2, 0); B($-\sqrt{3}$, –1). Tìm trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB.

Đáp số: H($\sqrt{3}$, –1), I($-\sqrt{3}$, 1).

BT9. (A/05) Tìm các đỉnh hình vuông ABCD biết $A \in d_1$: $x - y = 0$, $C \in d_2$: $2x + y - 1 = 0$, B và D trên trục hoành.

Đáp số: A(1, 1); B(0, 0); C(1, –1); D(2, 0).

BT10. (DB/D07) Cho A(2, 1). Tìm B $\in$ Ox, C $\in$ Oy sao cho ΔABC vuông tại A và có diện tích nhỏ nhất.

Đáp số: B(2, 0); C(0, 1).

BT11A/02. Cho ΔABC vuông tại A, phương trình BC: $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$

A và B trên trục hoành, bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC bằng 2. Tìm các đỉnh ΔABC.

Đáp số: A($2\sqrt{3} + 2$, 0); C($2\sqrt{3} - 2$, 0).

BT12. Cho hình thang ABCD có AB // CD. A(0, 1); B(2, 0); C(3, 2) và diện tích (ABCD) bằng 14. Tìm tọa độ D. *Đáp số:* $\left(-\frac{31}{5}, \frac{33}{5}\right)$.

BT13. Cho ΔABC có A trên trục tung, BC đi qua O, trung điểm AB; AC lần lượt là M(–1, 1); N(3, –1). Tìm A, B, C.

Đáp số: A(0, 1); B(–2, 1); C(6, –3).

BT14. Tìm các đỉnh hình vuông ABCD, biết A trên d_1: y = x, B trên d_2: y = 1 – 2x, C, D nằm trên trục tung.

Đáp số: $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, C(0, 0), $D\left(0, \frac{1}{2}\right)$

hay $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $D\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

BT15. Cho hai điểm A(–3; 2) và B(1; 1). Tìm điểm M trên Oy sao cho:

a) Diện tích tam giác ABM bằng 3.

b) $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đáp số: a) $M\left(0, \frac{11}{4}\right)$, $M\left(0, -\frac{1}{4}\right)$; b) $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

BT16. Cho hai điểm A(1, –1) và B(3, 2). Tìm điểm M trên Oy sao cho:

a) $AMB = 45^0$ b) AMB nhỏ nhất.

Đáp số: a) M(0, –1), (0, 4); b) $M\left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

BT17. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \geq 2\sqrt{5}$, $\forall x$.

b) $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} \geq 5$, $\forall x, y$.

c) $\sqrt{2(x+y)+6} + \sqrt{22-6(x+y)} \geq 4\sqrt{2}$, với mọi x, y thỏa $x^2 + y^2 = 4$.

d) $\sqrt{(a-b)^2+c^2} + \sqrt{(a+b)^2+c^2} \geq 2\sqrt{a^2+b^2}$, a, b, c $\in$ R.

BT18. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{x^2-2x+2} + \sqrt{x^2-8x+32}$$

Đáp số: $\sqrt{34}$.

BÀI 2
ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của đường thẳng

a/ Một vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ được gọi là một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với (Δ).

b/ Một vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (Δ).

c/ $\vec{a} = (p, q)$ là vectơ chỉ phương của (Δ)

$\Leftrightarrow$ $\vec{n} = (q, -p)$ là vectơ pháp tuyến của (Δ)

2. Các dạng phương trình đường thẳng

a/ Phương trình tham số: $\boxed{(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}}$ $\quad (t \in R)$

Trong đó $M(x_0, y_0)$ là một điểm trên (Δ); $\vec{u} = (u_1, u_2)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ).

b/ Phương trình chính tắc: $\boxed{(\Delta): \dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}}$ $\quad (u_1.u_2 \neq 0)$

Trong đó $M(x_0, y_0)$ là một điểm trên (Δ); $\vec{u} = (u_1, u_2)$ là một vectơ chỉ phương của (Δ).

c/ Phương trình tổng quát: $\boxed{(\Delta): Ax + By + C = 0}$ $\quad (A^2 + B^2 \neq 0)$

Trong đó $\vec{n} = (A, B)$ là một vectơ pháp tuyến của (Δ).

d/ Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$, có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B)$

$$\boxed{(\Delta): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

e/ Phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$, có hệ số góc k

$$\boxed{(\Delta): y = k(x - x_0) + y_0}$$

f/ Phương trình đoạn chắn: $\boxed{(\Delta): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ $\quad (a.b \neq 0)$

với A(a, 0); B(0, b) là hai điểm thuộc (Δ).

g/ Phương trình chứa hệ số góc và tung độ gốc $\boxed{(\Delta): y = kx + m}$

☞ ***Lưu ý:***

a/ d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A, B)$

- Nếu D song song d thì $\vec{n} = (A, B)$ cũng là vectơ pháp tuyến của D
- Nếu (Δ) vuông góc d thì $\overrightarrow{m} = (B, -A)$ là vectơ pháp tuyến của (Δ)

b/ Nếu d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (u_1, u_2)$ $(u_1 \neq 0)$ thì hệ số góc của d là $k = \dfrac{u_2}{u_1}$.

c/ Nếu d cắt trục hoành tại M và α là góc tạo bởi tia Mx với phần đường thẳng d nằm phía trên trục hoành thì hệ số góc của d là $k = \tan\alpha$.

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng:

$(\Delta_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $(\Delta_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Đặt: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$; $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1$;

$$D_y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = c_1a_2 - c_2a_1$$

Ta có:

1. (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau khi và chỉ khi $D \neq 0$. Tọa độ giao điểm là:

$$\left(x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}\right).$$

2. $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ khi và chỉ khi D = 0 và $D_x \neq 0$ hay $D_y \neq 0$.

3. $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $D = D_x = D_y = 0$.

* Đặc biệt nếu a_2, b_2, c_2 khác 0 thì:

1. (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

2. $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

3. $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$ khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

III. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) (với $0^0 \le \varphi \le 90^0$).

Nếu Δ_1, Δ_2 có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ thì

$$\boxed{\cos\varphi = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}}$$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm $M_0(x_0; y_0)$ và đường thẳng

$$(\Delta): ax + by + c = 0 \qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

Khoảng cách từ điểm M_0 tới đường thẳng (Δ) là:

$$\boxed{d(M_0; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

☞ ***Chú ý:*** Cho hai điểm $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$ và đường thẳng

$$(\Delta): ax + by + c = 0$$

Ta có:

M và N nằm cùng phía đối với (Δ) khi và chỉ khi:

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$$

M và N nằm cùng phía đối với (Δ) khi và chỉ khi:

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$$

B. BÀI TẬP MẪU

VẤN ĐỀ 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài 1.

a) Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC biết trung điểm ba cạnh AB, BC, AC lần lượt là: M(2; 1), N(5; 3), P(3; -4)

b) Cho tam giác ABC biết A(-2; 1), B(2; 5), C(4; 1). Viết phương trình của: đường cao BH và đường trung trực của cạnh AB.

Giải

a/ Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có: NP // AB.

Cạnh AB chính là đường thẳng đi qua M(2; 1) nhận $\overrightarrow{NP} = (-2; -7)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-7} \Leftrightarrow 7x - 2y - 12 = 0$$

Tương tự phương trình các cạnh BC và AC lần lượt là:

$5x + y - 28 = 0$ và $2x - 3y - 18 = 0$

b/ Đường cao BH chính là đường thẳng qua B(2; 5) nhận $\overrightarrow{AC} = (6; 0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình của đường cao BH là:

$$6(x-2) + 0(y-5) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$$

Đường trung trực của cạnh AB là đường thẳng vuông góc với cạnh AB tại trung điểm I của AB, nên chính là đường thẳng đi qua I(0; 3) nhận $\overrightarrow{AB} = (4; 4)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình của đường trung trực cạnh AB là:

$$4(x-0) + 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$$

Bài 2. Tuyển sinh Đại Học khối B/09

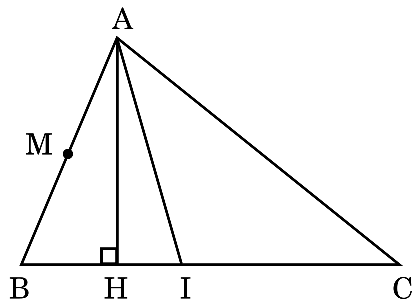
Cho ΔABC có M(2, 0) là trung điểm AB, trung tuyến:

AI: $7x - 2y - 3 = 0$, đường cao AH: $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình AC.

Giải

Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}7x - 2y = 3\\6x - y = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\y = 2\end{cases}$$



Vậy A(1, 2)

Do M là trung điểm AB nên

$$\begin{cases}x_B = 2x_M - x_A = 4 - 1 = 3\\y_B = 2y_M - y_A = 0 - 2 = -2\end{cases}$$

Vậy B(3; –2)

BC vuông góc AH nên có PVT(1, 6)

Phương trình BC: $1(x - 3) + 6(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y + 9 = 0$

Tọa độ I trung điểm BC là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases}x + 6y = -9\\7x - 2y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\y = -\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Vậy $I(0; -\dfrac{3}{2})$

Do I là trung điểm BC nên $\begin{cases}x_C = 2x_I - x_B = 0 - 3 = -3\\y_C = 2y_I - y_B = -3 + 2 = -1\end{cases}$

Vậy C(–3; –1)

AC qua C có VTCP $\overrightarrow{AC} = (-4; -3)$

Vậy phương trình AC: $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+1}{3}$.

Bài 3. Tuyển sinh Đại Học khối A/2010

Cho ΔABC cân tại A(6, 6) đường thẳng qua trung điểm của AB, AC là d: x + y – 4 = 0. Tìm B, C biết E(1; –3) nằm trên đường cao CH.

Giải

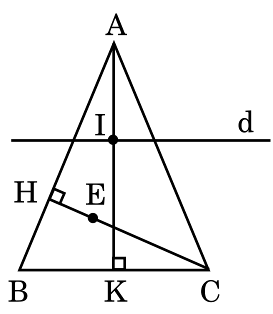
Vẽ đường cao AK

AK qua A, ⊥ d nên có phương trình

$$1(x - 6) - 1(y - 6) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$$

Tọa độ giao điểm I của d và AK là nghiệm hệ

phương trình $\begin{cases}x - y = 0\\x + y = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\y = 2\end{cases}$. Vậy I(2, 2)



I là trung điểm AK nên $\begin{cases} x_K = 2x_I - x_A = 4 - 6 = -2 \\ y_K = 2y_I - y_A = 4 - 6 = -2 \end{cases}$

Vậy K(–2; –2)

BC qua K và // d nên có phương trình

$$1(x + 2) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 4 = 0$$

Gọi $B(b, -b - 4) \in BC$

Do K là trung điểm BC nên

$$\begin{cases} x_C = 2x_K - x_B = -4 - b \\ y_C = 2y_K - y_B = -4 - (-b - 4) = b \end{cases}$$

Vậy C(–4 – b, b)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (b - 6, -b - 10) \perp \overrightarrow{CE} = (-5 - b, b + 3)$

Nên: $(b - 6)(-5 - b) + (-b - 10)(b + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow -2b^2 - 12b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = -6$$

Vậy $\quad B_1(0; -4) \wedge C_1(-4; 0)$

$\quad\quad B_2(-6; 2) \wedge C_2(+2; -6)$

Bài 4. Cho ΔABC vuông tại A có A(0, 3), đường cao AH: 3x + 4y – 12 = 0. Trọng tâm $G(\frac{5}{3}; 3)$. Tìm B và C.

Giải

Gọi M là trung điểm BC

Ta có $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G - x_A = 2(x_A - x_G) \\ y_G - y_A = 2(y_M - y_G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3} = 2(x_M - \frac{5}{3}) \\ 0 = 2(y_M - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{5}{2} \\ y_M = 3 \end{cases} \text{ Vậy } M(\frac{5}{2}; 3)$$

BC ⊥ AH nên BC: 4x – 3y + C = 0

Mà $M \in BC$ nên: $4.\frac{5}{2} - 3.3 + C = 0 \Rightarrow C = -1$

Vậy BC: 4x – 3y – 1 = 0

gọi $B(b; \frac{4b - 1}{3}) \in BC$

Do M là trung điểm BC nên

$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B \\ y_C = 2y_M - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 - b \\ y_C = \dfrac{19-4b}{3} \end{cases} \text{ vậy } C\left(5 - b; \dfrac{19-4b}{3}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(b; \dfrac{4b-10}{3}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(5 - b; \dfrac{10-4b}{3}\right)$

$AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow b(5-b) + \left(\frac{4b-10}{3}\right).\left(\frac{10-4b}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5b - b^2 - \frac{(4b-10)^2}{9} = 0$$

$\Leftrightarrow 9(5b - b^2) - (4b - 10)^2 = 0$

$\Leftrightarrow +25b^2 + 125b + 100 = 0$

$\Leftrightarrow b = 1 \vee b = 4$

Vậy B(1; 1), C(4; 5) hay B(4; 5), C(1; 1)

Bài 5. Tuyển sinh Đại Học khối D/2011

Cho ΔABC có B(–4; 1) trọng tâm G(1; 1), đường thẳng chứa phân giác trong góc A: $x - y - 1 = 0$. Tìm A, C.

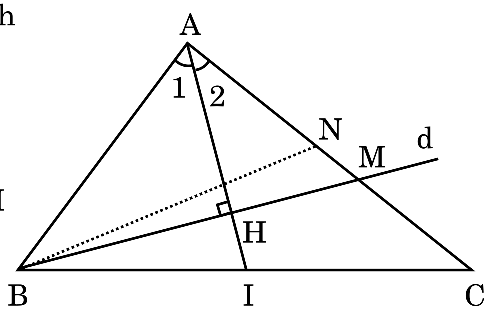
Giải

Vẽ d qua B vuông góc và cắt phân giác AI tại H, cắt AC tại M

Phương trình d: $1(x + 4) + 1(y - 1) = 0$

Tọa độ H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$



Vậy H(–1; –2)

ΔABM cân nên H là trung điểm BM

Vậy $\begin{cases} x_M = 2x_H - x_B = -2 + 4 = 2 \\ y_M = 2y_H - y_B = -4 - 1 = -5 \end{cases}$

Vậy M(2; –5)

Gọi N là trung điểm của AC ta có

$$\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2(x_N - 1) \\ 0 = 2(y_N - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{7}{2} \\ y_N = 1 \end{cases}$$

AC qua M và VTCP $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{2}, 6\right) = \frac{3}{2}(1,4)$

Phương trình AC: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{4} \Leftrightarrow 4x - y - 13 = 0$

Tọa độ A là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 4x - y = 13 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy A(4; 3)

Do N là trung điểm AC nên $\begin{cases} x_C = 2x_N - x_A = 7 - 4 = 3 \\ y_C = 2y_N - y_A = 2 - 3 = -1 \end{cases}$

Vậy C(3; –1).

Bài 6.

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1; 2) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B khác gốc 0 sao cho: OA = OB.

b. Viết phương trình đường thẳng qua N(1; 3) cắt hai nửa trục dương Ox, Oy tại P và Q sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất.

Giải

a/ Gọi $\vec{n} = (a; b) \neq \vec{0}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng qua M(1; 2) thì phương trình của đường thẳng là:

$$a(x-1) + b(y-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (a + 2b) = 0$$

Vì đường thẳng cắt Ox và Oy tại A, B khác O nên ta có: $ab \neq 0$ và $a + 2b \neq 0$

Hoành độ giao điểm A: $y = 0 \Rightarrow x_A = \frac{a+2b}{a}$.

Tung độ giao điểm B: $x = 0 \Rightarrow y_B = \frac{a+2b}{b}$

Ta có: $OA = OB \Leftrightarrow |x_A| = |y_B| \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{|a|} = \frac{|a+2b|}{|b|} \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|b|}$

(vì $|a + 2b| \neq 0$) $\Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

Nếu a = b: Phương trình đường thẳng là: $x + y - 3 = 0$

Nếu a = -b: Phương trình đường thẳng là: $x - y + 1 = 0$

b/ Gọi $\vec{n} = (a; b)$ với a > 0, b > 0 là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua N(1; 3) thì phương trình của đường thẳng là:

$$a(x-1) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (a + 3b) = 0$$

Hoành độ giao điểm P: $y = 0 \Rightarrow x_P = \dfrac{a+3b}{a} > 0$

Tung độ giao điểm Q: $x = 0 \Rightarrow y_Q = \dfrac{a+3b}{b} > 0$

Diện tích tam giác OPQ:

$$S = \frac{1}{2}.OP.OQ = \frac{1}{2}.|x_P|.|y_Q| = \frac{(a+3b)^2}{2ab}$$
$$= \frac{a^2 + 9b^2 + 6ab}{2ab} = \frac{a}{2b} + \frac{9b}{2a} + 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\dfrac{a}{2b} + \dfrac{9b}{2a} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{2b}.\dfrac{9b}{2a}} = 3$

Vậy: $S \geq 6$

Và: $S = 6 \Leftrightarrow \dfrac{a}{2b} = \dfrac{9b}{2a} \Leftrightarrow a^2 = 9b^2 \Leftrightarrow a = 3b$ (vì a > 0, b > 0)

Nên: $\min S = 6$, đạt được khi: a = 3b.

Lúc đó chọn: b = 1 thì a = 3 và ta được phương trình của đường thẳng là: $3x + y - 6 = 0$.

Bài 7. Cho A(5; 0), B(1; –3). Tìm M và N trên đoạn OA, P trên đoạn AB, Q trên đoạn OB sao cho MNPQ là hình chữ nhật có MN = 2MQ.

Giải

OB qua O và có VTCP $\overrightarrow{OB} = (1; -3)$ phương trình OB là:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

M, N ∈ OA nên: M(m; 0); N(n; 0) với m, n ∈ (0, 5)

MQ ⊥ Ox nên $x_Q = x_M = m$. Vậy Q(m; –3m) ∈ OB

NP ⊥ Ox nên $x_P = x_N = n$

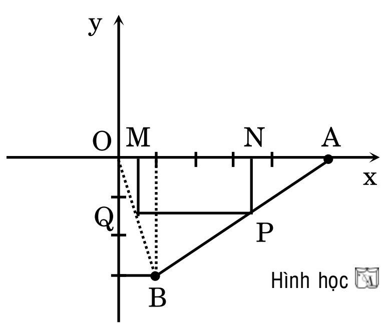
AB qua A có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-4, -3) = -(4, 3)$

Phương trình AB: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y}{3} \Leftrightarrow 3x - 4y - 15 = 0$

Do $N \in AB \Rightarrow P\left(n, \dfrac{3n-15}{4}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{QP} = \left(n - m; \dfrac{3n + 12m - 15}{4}\right)$

và $\overrightarrow{MQ} = (0; -3m)$



Ta có: $MQ \perp QP \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QP} = 0$

$$\Leftrightarrow 0(n - m) + (-3m)\left(\frac{3n + 12m - 15}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3n + 12m - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -4m + 5 \ (1)$$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (n - m; 0) = (-5m + 5; 0)$ (do (1))

Vậy: $MN = 2MQ \Leftrightarrow |-5m + 5| = 2.|-3m|$

$$\Leftrightarrow |-5m + 5| = |-6m|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5m + 5 = -6m \\ -5m + 5 = 6m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -5 \text{ (loại)} \\ m = \dfrac{5}{11} \end{array}\right.$$

Vậy $M\left(\frac{5}{11}; 0\right)$; $N\left(\frac{35}{11}; 0\right)$, $Q\left(\frac{5}{11}, \frac{-15}{11}\right)$, $P\left(\frac{35}{11}, \frac{-15}{11}\right)$.

Bài 8. Cho đường thẳng $(\Delta): x - 2y - 2 = 0$ và hai điểm A(1; 2), B(2; 5). Tìm điểm M trên (Δ) để MA + MB nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $(x_A - 2y_A - 2)(x_B - 2y_B - 2) = (1 - 4 - 2)(2 - 10 - 2) = 50 > 0$

Nên hai điểm A và B nằm cùng bên đối với (Δ)

Gọi $A'(x'; y')$ là điểm đối xứng của A qua (Δ), ta có $\overrightarrow{AA'} = (x' - 1; y' - 2)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2)$ của (Δ) và trung điểm $H(\frac{x'+1}{2}; \frac{y'+2}{2})$ của đoạn AA' ở trên (Δ) nên:

$$\begin{cases} -2(x' - 1) - 1(y' - 2) = 0 \\ (\frac{x'+1}{2}) - 2(\frac{y'+2}{2}) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' + y' - 4 = 0 \\ x' - 2y' - 7 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x' = 3; y' = -2$

Vậy: $A'(3; -2)$

Ta có A' đối xứng với A qua (Δ) nên MA = MA'

Suy ra: MA + MB = MA' + MB

Trong tam giác MA'B ta có: MA' + MB $\geq$ A'B (không đổi)

Và: MA' + MB = A'B khi M ở trên đoạn A'B, mặt khác $M \in (\Delta)$ nên M chính là giao điểm của (Δ) với đọan A'B.

Vậy MA + MB nhỏ nhất bằng A'B khi điểm M là giao điểm của (Δ) với đoạn A'B, Vì A' và B nằm hai bên đối với (Δ) nên giao điểm này cũng chính là giao điểm của (Δ) với đường thẳng A'B.

Đường thẳng A'B chính là đường thẳng đi qua $A'(3; -2)$ nhận $\overrightarrow{A'B} = (-1; 7)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình là:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{7} \Leftrightarrow 7x + y - 19 = 0$$

Vậy tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ 7x + y - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy: $M(\frac{8}{3}; \frac{1}{3})$.

Bài 9. Cho đường thẳng $(\Delta): x - 3y - 1 = 0$ và hai điểm A(5; 3), B(2; -3). Tìm điểm M trên (Δ) để $|MA - MB|$ lớn nhất.

Giải

Ta có: $(x_A - 3y_A - 1)(x_B - 3y_B - 1) = (5 - 9 - 1)(2 + 9 - 1) = -50 < 0$

Nên hai điểm A và B nằm hai bên (Δ)

Gọi $A'(x';y')$ là điểm đối xứng của A qua (Δ), ta có $\overrightarrow{AA'} = (x' - 5; y' - 3)$ cùng phương với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3)$ của (Δ) và trung điểm $H(\frac{x'+5}{2}; \frac{y'+3}{2})$ của đoạn AA' ở trên (Δ) nên:

$$\begin{cases} -3(x' - 5) - 1(y' - 3) = 0 \\ (\dfrac{x'+5}{2}) - 3(\dfrac{y'+3}{2}) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x' + y' - 18 = 0 \\ x' - 3y' - 6 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x' = 6$; $y' = 0$

Vậy: $A'(6; 0)$

Ta có A' đối xứng với A qua (Δ) nên MA = MA'

Suy ra: $|MA - MB| = |MA' - MB|$

Trong tam giác MA'B ta có: $|MA' - MB| \le A'B$ (không đổi)

Và: $|MA' - MB| = A'B$ khi M ở ở trên đường thẳng A'B nhưng không ở giữa A' và B, mặt khác $M \in (\Delta)$ nên M chính là giao điểm của (Δ) với phần đường thẳng A'B đó.

Vậy MA - MB lớn nhất bằng A'B khi điểm M là giao điểm này cũng chính là giao điểm của (Δ) với đường thẳng A'B.

Đường thẳng A'B chính là đường thẳng đi qua A'(6; 0) nhận $\overrightarrow{A'B} = (-4; -3)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình là:

$$\frac{x-6}{-4} = \frac{y-0}{-3} \Leftrightarrow 3x - 4y - 18 = 0$$

Vậy tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy: M(10; 3).

VẤN ĐỀ 2: BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

Bài 10. Cho đường thẳng (Δ_m): $(m-2)x + (m-1)y + 2m - 1 = 0$. Định m để (Δ_m) cắt đoạn thẳng BC với B(2; 3) và C(1; 0).

Giải

Ta có (Δ_m) cắt đoạn thẳng BC khi hai điểm B, C nằm hai bên của đường thẳng (Δ_m). Điều đó xảy ra khi:

$$[(m-2)x_B + (m-1)y_B + 2m - 1].[(m-2)x_C + (m-1)y_C + 2m - 1] \le 0$$

$$\Leftrightarrow [2(m-2) + 3(m-1) + 2m - 1].[(m-2) + 2m - 1] \le 0$$

$$\Leftrightarrow (7m - 8)(3m - 3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \le m \le \frac{8}{7}$$

Bài 11. Viết phương trình hai đường chéo của hình vuông, biết tâm I(–2, 0) phương trình một cạnh hình vuông là d: x + 3y – 3 = 0.

Giải

- Gọi M(3 – 3m; m) $\in$ d: x + 3y – 3 = 0 là đỉnh của hình vuông

Ta có: $d_{(I,\, d)} = \frac{|(-2) + 3.0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$$\Rightarrow IM = d_{(I,\, d)}.\sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{10}}.\sqrt{2} = \sqrt{5}$$

Ta có: $IM^2 = 5 \Leftrightarrow (3 - 3m + 2)^2 + (m - 0)^2 = 5$

$\Leftrightarrow (5-3m)^2 + m^2 = 5$

$\Leftrightarrow 10m^2 - 30m + 20 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 1$

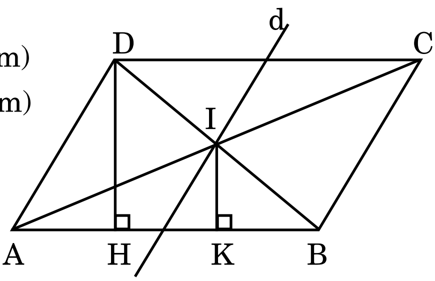
Trường hợp 1: D qua I(–2; 0) và M(–3; 2)

$$D: \frac{y-0}{2-0} = \frac{x+2}{-3+2} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{x+2}{-1}$$

Trường hợp 2: D qua I(–2; 0) và M(0; 1) là D: $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} = 1$.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD có A(1; 0); B(2; 0); diện tích bằng 2 tâm I nằm trên d: y = x. Tìm tọa độ hai điểm C và D.

Giải



Gọi $I(m; m) \in d$

Vì I là trung điểm AC nên: C(2m – 1; 2m)

Vì I là trung điểm BD nên: B(2m – 2; 2m)

Ta có: $S_{ABCD} = AB.DH = AB.(2IK)$

Ta có: AB = 1

AB: y = 0 (vì $y_A = y_B = 0$)

$$IK = d_{(I,\ AB)} = \frac{|y_I|}{\sqrt{0^2+1^2}} = |y_I| = |m|$$

$\Rightarrow S = 1.2|m| = 2|m|$

Vậy $S = 2 \Rightarrow 2|m| = 2 \Rightarrow |m| = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array}\right.$. Vậy $\left[\begin{array}{l} C(1;2); D(0;2) \\ C(-3;-2); D(-4;-2) \end{array}\right.$

Bài 13. Cho ΔABC có A(2; 4); B(0; –1); C(6; 2)

Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua A sao cho

a. (Δ) chia ΔABC thành hai ΔABM, ΔACM mà diện tích ΔACM gấp đôi diện tích ΔABM.

b. (Δ) cách đều B và C.

Giải

a/ $S_{\Delta ACM} = 2S_{\Delta ABM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AH.CM = 2.\frac{1}{2}.AH.BM$

$\Leftrightarrow CM = 2BM$

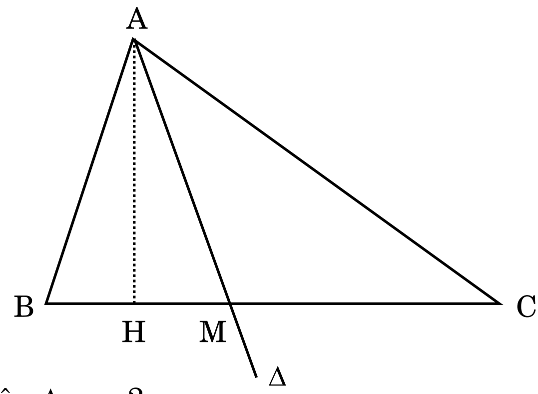
Mà $\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{BM}$ ngược hướng nên

$$\overrightarrow{CM} = -2\overrightarrow{BM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_C = -2(x_M - x_B) \\ y_M - y_C = -2(y_M - y_B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 6 = -2(x_M - 0) \\ y_M - 2 = -2(y_M + 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 6 \\ 3y_M = 0 \end{cases} \text{ Vậy } M(2;\, 0)$$



Δ đi qua A và M mà $x_A = x_M = 2$ nên Δ: $x = 2$

b/ Gọi $\vec{n}$ = (a, b) là PVT của Δ

Δ qua A nên Δ: $a(x - 2) + b(y - 4) = 0$

Ta có: $d(B, \Delta) = d(C; \Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|-2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2a - 5b = 4a - 2b \\ -2a - 5b = -4a + 2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{-b}{2} \\ a = \dfrac{7b}{2} \end{array}\right.$$

• $a = \dfrac{-b}{2}$ chọn $b = -2$; $a = 1$

Vậy Δ: $x - 2y + 6 = 0$

• $a = \dfrac{7b}{2}$ chọn $b = 2$; $a = 7$

Vậy Δ: $7x + 2y - 22 = 0$.

Bài 14. Tìm tọa độ bốn đỉnh hình vuông ABCD biết độ dài mỗi cạnh $2\sqrt{10}$; phương trình AB: $x - 3y + 1 = 0$. Tâm I trên trục tung và $y_I < 0$.

Giải

Gọi $A(3a - 1;\, a) \in AB$

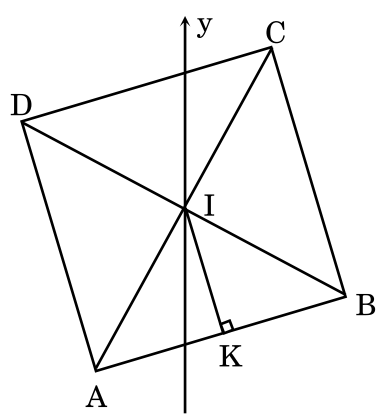
$B(3b - 1;\, b) \in AB$

$I(0, m)$ với $m < 0$

Vì I là trung điểm AC nên:

$$\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = -3a + 1 \\ y_C = 2y_I - y_A = 2m - a \end{cases}$$

Vậy $C(1 - 3a;\, 2m - a)$



Vì I là trung điểm BD nên D(1 – 3b; 2m – b)

Ta có:

• $AD = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow IK = \sqrt{10} \Leftrightarrow d(I; AB) = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_I - 3y_I + 1|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |-3m + 1| = 10$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3m + 1 = 10 \\ -3m + 1 = -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = \dfrac{11}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy: I(0; –3)

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (3a - 1; a + 3)$ và $\overrightarrow{IB} = (3b - 1; b + 3)$

$$\begin{cases} IA \perp IB \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a-1)(3b-1) + (a+3)(b+3) = 0 & (1) \\ (3a-1)^2 + (a+3)^2 = (3b-1)^2 + (b+3)^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 10a^2 = 10b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} b = a & \text{(loại)} \\ b = -a & (3) \end{array}\right.$$

Thế (3) vào (1) ta có

$$(3a - 1)(-3a - 1) + (a + 3)(-a + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(3a - 1)(3a + 1) + (3a + a)(3 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(9a^2 - 1) + 9 - a^2 = 0 \Leftrightarrow -10a^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 1$$

• Th1: a = 1; b= –1; m = –3

Vậy A(2; 1); B(–4; –1); C(–2; –7); D(4; –5)

• Th2: a = –1; b = 1; m = –3

Vậy A(–4; –1); B(2; 1); C(4; –5); D(–2; –7).

Bài 15. Viết phương trình của đường thẳng (D) cách A(1; 1) một khoảng bằng 2 và cách B(2; 3) một khoảng bằng 4.

Giải

Phương trình tổng quát của đường thẳng (D):

$$ax + by + c = 0. \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

Ta có: $\begin{cases} d(A, D) = 2. \\ d(B, D) = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2. \\ \dfrac{|2a + 3b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + b + c| = 2\sqrt{a^2 + b^2}. \\ |2a + 3b + c| = 4\sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2a+3b+c| = 2|a+b+c|. \\ (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2). \\ 2a+3b+c = \pm 2(a+b+c). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2). \\ 2a+3b+c = 2(a+b+c). \end{cases} \vee \begin{cases} (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2). \\ 2a+3b+c = -2(a+b+c). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2). \\ b = c. \end{cases} \vee \begin{cases} (a+b+c)^2 = 4(a^2+b^2). \\ c = \dfrac{-4a-5b}{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 4ab = 0. \\ b = c. \end{cases} \vee \begin{cases} 35a^2 - 4ab + 32b^2 = 0. \\ c = \dfrac{-4a-5b}{3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \vee a = \dfrac{4}{3}b. \\ b = c. \end{cases} \vee a = b = c = 0.$$

$$\Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = c) \vee (a = \frac{4}{3}b \wedge b = c) \vee (a = b = c = 0).$$

Vậy:

* $a = 0 \wedge b = c$: Ta có $b = c \neq 0$ vì $a^2 + b^2 \neq 0$. Nên phương trình đường thẳng là: $y + 1 = 0$.
* $a = \frac{4}{3}b \wedge b = c$: Chọn $b = c = 3$ thì $a = 4$ và phương trình đường thẳng là: $4x + 3y + 3 = 0$.
* $a = b = c = 0$: Trường hợp này không nhận được.

Tóm lại có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của bài toán có phương trình là: $y + 1 = 0$; $4x + 3y + 3 = 0$.

VẤN ĐỀ 3: BÀI TOÁN GÓC HAI ĐƯỜNG THẲNG

Bài 16.

a. Lập phương trình của đường phân giác góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng: $(\Delta_1): 3x - 4y + 12 = 0$; $(\Delta_2): 12x + 5y - 7 = 0$

b. Lập phương trình của đường phân giác góc tù hợp bởi hai đường thẳng: $(d_1): 4x - 3y + 6 = 0$; $(d_2): 5x + 12y + 10 = 0$

Giải

a/ Phương trình của đường phân giác của góc hợp bởi (Δ_1) và (Δ_2) là:

$$\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{12^2+5^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}21x+77y-191=0.(D_1)\\99x-27y+121=0.(D_2)\end{array}\right.$$

Trong phương trình của đường thẳng (Δ_1) cho x = 0 ta được y = 3, nên M(0; 3) là một điểm thuộc (Δ_1) và ta có M không thuộc (Δ_2).

Mặt khác: $d(M;(D_1))=\dfrac{40}{\sqrt{21^2+77^2}}>d(M;(D_2))=\dfrac{40}{\sqrt{99^2+27^2}}$

Nên đường phân giác của góc nhọn hợp bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là (D_2): 99x – 27y + 121 = 0.

b/ Phương trình của đường phân giác của góc hợp bởi (d_1) và (d_2) là:

$$\frac{|4x-3y+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|5x+12y+10|}{\sqrt{5^2+12^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}27x-99y+28=0 & (D_1)\\77x+21y+128=0 & (D_2)\end{array}\right.$$

Trong phương trình của đường thẳng (d_1) cho x = 0 ta được y = 2, nên M(0; 2) là một điểm thuộc (d_1) và ta có M không thuộc (d_2)

Mặt khác: $d(M;(D_1))=\dfrac{170}{\sqrt{27^2+99^2}}<d(M;(D_2))=\dfrac{170}{\sqrt{77^2+21^2}}$

Nên đường phân giác của góc tù hợp bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là (D_2): $77x+21y+128=0$

Bài 17. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(2; 1) và tạo với đường thẳng (D): 2x + 3y + 4 = 0 một góc 135°.

Giải

Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua M(2; 1) thì phương trình của đường thẳng có dạng:

$$a(x-2)+b(y-1)=0\Leftrightarrow ax+by-(2a+b)=0$$

Đường thẳng này tạo với đường thẳng (D) một góc 135°, tức là tạo với (D) một góc nhọn 45°, nên:

$$\cos45^0=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{2^2+3^2}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|2a+3b|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{26(a^2+b^2)}=2|2a+3b|\Leftrightarrow 26(a^2+b^2)=4(2a+3b)^2$$

$$\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0$$

Xem đẳng thức này như phương trình bậc 2 theo a, giải ra ta được:

$$a=5b\vee a=-\frac{b}{5}$$

Vậy có thể chọn: a = 5, b = 1 và b = -5, a = 1

Ta được phương trình của đường thẳng cần tìm là:

$$5x + y - 11 = 0 \quad \text{hay} \quad x - 5y + 3 = 0$$

Bài 18. Một tam giác cân có cạnh đáy và một cạnh bên có phương trình lần lượt là: $3x - y + 5 = 0$; $x + 2y - 1 = 0$. Viết phương trình của cạnh bên còn lại biết rằng nó đi qua điểm M(1; –3).

Giải

Gọi $\vec{n} = (a; b) \neq \vec{0}$ là một vectơ pháp tuyến của cạnh bên đi qua M(1; -3) thì phương trình cạnh bên này có dạng:

$$a(x-1) + b(y+3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (3b - a) = 0$$

Tam giác cân có góc tạo thành bởi hai cạnh bên với đáy bằng nhau nên:

$$\frac{|3a - b|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}.\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3.1 + 1.2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}.\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}.|3a - b| = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 5(3a - b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 22a^2 - 15ab + 2b^2 = 0$$

Xem đẳng thức này như phương trình bậc hai theo a, giải ra ta được:

$$a = \frac{b}{2} \vee a = \frac{2b}{11}$$

Vậy có thể chọn: b = 2, a = 1 và b = 11, a = 2

Với a = 1, b = 2 ta có đường thẳng $x + 2y + 5 = 0$, song song với cạnh bên đã cho nên không thể là cạnh bên còn lại của tam giác.

Với a = 2, b = 11 ta có phương trình của cạnh bên còn lại của tam giác cân là: $2x + 11y + 31 = 0$

Bài 19. Lập phương trình của đường thẳng đi qua điểm P(2; -1) sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng (Δ_1): $2x - y + 5 = 0$; (Δ_2): $3x + 6y - 1 = 0$, tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2)

Giải

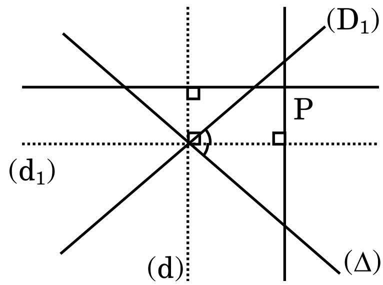
Đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng đi qua P vuông góc với các đường phân giác của góc hợp bởi (Δ_1) và (Δ_2)

Phương trình của hai đường phân giác này là:

$$(d_1): \frac{|2x - y + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x + 6y - 1|}{\sqrt{3^2 + 6^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 9y + 16 = 0 \\ 9x + 3y + 14 = 0 \end{array}\right.$$

Đường thẳng qua P vuông góc với (d_1) nhận vectơ chỉ phương của (d_1) là $\vec{u} = (9; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình là:

$9(x-2) + 3(y+1) = 0$ hay $3x + y - 5 = 0$.



Đường thẳng P vuông góc với (d_2) nhận vectơ chỉ phương của (d_2) là $\vec{v} = (3; -9)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình là:

$3(x-2) - 9(y+1) = 0$ hay $x - 3y - 5 = 0$

Tóm lại có hai đường thẳng có phương trình là:

$$3x + y - 5 = 0 \text{ và } x - 3y - 5 = 0$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. (DBA2006) Cho tam giác ABC có A nằm trên đường thẳng (d): $x - 4y - 2 = 0$. BC // (d). Phương trình đường cao BH: $x + y + 3 = 0$. Trung điểm của AC là M(1; 1). Tìm tọa độ của A, B, C.

Đáp số: $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$, B(–4; 1)

BT2. (DBA2005) Cho ΔABC cân tại A có trọng tâm G(4/3, 1/3). Phương trình BC: $x - 2y - 4 = 0$, phương trình BG: $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm A, B, C.

Đáp số: A(0; 3), B(0; –2), C(4; 0)

BT3. (DBB2006) Cho tam giác ABC có A(2; 1), phương trình đường cao BH: $x - 3y - 7 = 0$, phương trình đường trung tuyến CM: $x + y + 1 = 0$. Tìm B và C.

Đáp số: B(–2; –3), C(4; –5)

BT4. (DBB2004) Cho hai đường thẳng (d_1): $2x - y + 5 = 0$, (d_2): $x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng qua I(–2; 0) cắt (d_1) tại A và B cắt (d_2) B mà $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB}$.

Đáp số: $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3}$.

BT5. (DBA2004) Cho A(0; 2) và (d) $x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên (d) hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B và AB = 2BC.

Đáp số: $B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$, $C_1\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$, $C_2(0; 1)$.

Bài 6. (CĐ/09) Cho ΔABC có C(–1; 2) trung tuyến AM: $5x + y - 9 = 0$, đường cao BH: $x + 3y - 5 = 0$. Tìm A, B.

Đáp số: $A\left(\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right)$, $B\left(\frac{29}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

BT7. (DB/A08) ΔABC có đường cao BH: $3x + 4y - 10 = 0$ phân giác trong góc A là AI: $x - y + 1 = 0$, M(0; 2) trên AB và MC = $\sqrt{2}$. Tìm A, B, C.

Đáp số: A(4; 5), $B\left(\frac{1}{3}; +\frac{9}{4}\right)$, $C_1(1; 1)$, $C_2\left(\frac{31}{25}; \frac{33}{25}\right)$.

BT8. (DB/B08) Cho ΔABC có AB = $\sqrt{5}$, C(–1; –1), AB: $x + 2y - 3 = 0$, trọng tâm $G \in d$: $x + y - 2 = 0$. Tìm A, B.

Đáp số: $A(6; -\frac{3}{2})$, $B(4; -\frac{1}{2})$

BT9. (A09) Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(6; 2), M(1; 5) $\in$ AB. Trung điểm của CD nằm trên $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình AB.

Đáp số: $y = 5 \vee x - 4y + 19 = 0$.

BT10. Cho ΔABC có trọng tâm G(–2; –1) và phương trình các cạnh (AB): $4x + y + 15 = 0$, (AC): $2x + 5y + 3 = 0$. Tìm A, B, C.

Đáp số: B(–3; –3), C(1; –1)

BT11. Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết B(–4; –5) và hai đường cao có phương trình: $5x + 3y - 4 = 0$ và $3x + 8y + 13 = 0$.

Đáp số: A(1; 2); C(–1; 3)

BT12. (B2008) Tìm tọa độ đỉnh C của ΔABC, biết hình chiếu của C trên đường thẳng AB là H(–1; –1), phương trình đường phân giác trong góc A là $x - y + 2 = 0$, phương trình đường cao kẻ từ B là $4x + 3y - 1 = 0$.

Đáp số: $C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$

BT13. (B2003) Cho tam giác ABC vuông cân tại A với M(1; 1) là trung điểm BC và $G(\frac{2}{3}; 0)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm A, B, C.

Đáp số: A(0; –2), B(4; 0), C(–2; 2)

BT14. (DB/D07) Cho A(0; 1), B(2; –1)

$$d_1: (m - 1)x + (m - 2)y + 2 - m = 0$$

$$d_2: (2 - m)x + (m - 1)y + 3m - 5 = 0$$

Chứng minh d_1 luôn cắt d_2 tại P. Tìm m sao cho $(PA + PB)_{min}$

BT15. (B/2010) Cho $\Delta ABC \perp$ tại A, C(–4; 1) phân giác trong $\hat{A}: x + y - 5 = 0$, diện tích $\Delta ABC = 24$, $x_A > 0$. Viết phương trình BC.

Đáp số: $3x - 4y - 16 = 0$

BT16. (CĐ/09) Tìm $M \in \Delta: x - 2y - 3 = 0$ sao cho $d(M, d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

với (d): $x + y + 1 = 0$

BT17. (A2006) Tìm $M \in d_3: x - 2y = 0$ mà khoảng cách từ M đến đường thẳng $d_1: x + y + 3 = 0$ bằng hai lần khoảng cách M đến đường thẳng $d_2: x - y - 4 = 0$.

Đáp số: M(–22; –11), M(2; 1)

BT18. (B/09) ΔABC cân tại A(–1; 4). Tìm B, C $\in \Delta$: x – y – 4 = 0 biết rằng diện tích ΔABC bằng:

Đáp số: $B\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $C\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right)$

BT19. (DBD2003) Cho tam giác ABC có A(1; 0), phương trình đường cao BH: x – 2y + 1 = 0, phương trình đường cao CK: 3x + y – 1 = 0. Tính S_{ABC}.

Đáp số: 14

BT20. (B2004) Cho A(1; 1), B(4; –3). Tìm C $\in$ đường thẳng (d): x – 2y – 1 = 0 sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Đáp số: C(7; 3), $C\left(\frac{-43}{11}; \frac{-27}{11}\right)$

BT21. Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, đỉnh A(2; –3), B(3; –2) và trọng tâm G $\in$ (d): 3x – y – 8 = 0. Tìm điểm C.

Đáp số: $C_1(-2; -10)$, $C_2(1; -1)$

BT22. Viết phương trình đường thẳng qua A(2; 1) và tạo với đường thẳng d: 2x + 3y + 4 = 0 một góc bằng 45°.

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} 5x + y - 11 = 0 \\ x - 5y + 3 = 0 \end{array}\right.$

BT23. Cho ΔABC cân tại A. Biết (BC): 2x – 3y – 5 = 0, (AC): x + y + 1 = 0, (AB) qua I(1, 1). Viết phương trình AB.

BT24. D/2010

Cho A(2; 0). Gọi Δ là đường thẳng qua O. H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ. Viết phương trình Δ biết rằng khoảng cách từ O đến trục hoành bằng AH.

BT25. Cho ΔABC có phương trình AB 4x + y – 5 = 0 đường cao AH: 2x + 3y – 5 = 0, trọng tâm $G\left(\frac{7}{3}, \frac{-2}{3}\right)$. Viết phương trình BC, AC.

Đáp số: AC: x + 3y – 4 = 9.

BT26. Cho ΔABC cân tại A có phương trình

AB: 3x – y – 6 = 0, BC: x – y – 2 = 0

Biết AC qua I(–3, 1) viết phương trình AC.

Đáp số: x – 3y – 6 = 0.

BT27. Cho ΔABC có đường cao BH: $3x + 4y + 10 = 0$ phân giác trong của A là AI: $x - y + 1 = 0$ M(0, 2) nên trên AB, CM = $\sqrt{2}$. Tìm các đỉnh của ΔABC.

BT28. Cho hình thoi ABCD có A(3, –2), B và D nằm trên d: $x - 3y + 1 = 0$, diện tích (ABCD) bằng 60. Viết phương trình các cạnh của hình thoi.

BT29. Cho ΔABC có đường trung trực của BC là d: $x + y - 3 = 0$, đường trung tuyến CI là: $2x - y - 1 = 0$. Tìm B và C

Đáp số: C(2, 3), B(0, 1).

BT30. Viết phương trình các cạnh hình vuông biết hai cạnh song song lần lượt A(2, 1), C(3, 5), hai cạnh song song còn lại lần lượt qua B(0, 1), D(–3, –1).

BT31. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết trung tuyến BI: $3x - 5y - 1 = 0$, phương trình đường cao AH: $4x + y - 21 = 0$, M(3, 3) là trung điểm của AB.

Đáp số: A(4, 5), B(2, 1), C(10, 3).

BT32. Cho ΔABC có A(1, 1); B(–2, 5) C nằm trên d: $x - 4 = 0$ trọng tâm G nằm trên d': $2x - 3y + 6 = 0$. Tính diện tích ΔABC.

BT33. Cho ΔABC có A(1, 1), đường cao BH: $3x + y - 16 = 0$, trung tuyến CM: $x + y - 6 = 0$. Tìm B, C.

BT34. Cho ΔABC có phương trình AB: $4x + y - 5 = 0$ đường cao AH: $2x + 3y - 5 = 0$ trọng tâm $G\left(\frac{7}{3}, \frac{-2}{3}\right)$. Viết phương trình BC.

BT35. Cho A(0, 5), B(–2, –1), C(4, 2). Lấy M trên đoạn BC sao cho diện tích (ΔABM), bằng 2 lần diện tích (ΔACM). Chứng minh $AM \perp BC$.

BT36. Cho hình bình hành ABCD với B(–2, 0), D(4, 4), E(2, 3) là điểm trên đoạn AC với AC = 3AE. Tìm A, C.

BÀI 3
ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

a/ Phương trình đường tròn tâm I(a; b) bán kính R.

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

b/ Phương trình: $x + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, là phương trình đường tròn tâm I(a; b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Cho đường thẳng (Δ) và đường tròn (C) có tâm I, bán kính R.

Gọi $d(I, \Delta)$ là khoảng cách từ I đến (Δ). Ta có:

$d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow (\Delta)$ **cắt (C) tại hai điểm phân biệt.**

$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow (\Delta)$ **tiếp xúc với (C).**

$d(I, \Delta) > R \Leftrightarrow (\Delta)$ không cắt (C).

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có tâm và bán kính lần lượt là I_1, R_1 và I_2, R_2. Ta có:

$|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) cắt nhau

$I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ **(C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.**

$I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ **(C_1) và (C_2) tiếp xúc trong.**

$I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau.

$I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow$ (C_1) và (C_2) ở trong nhau.

B. BÀI TẬP MẪU

VẤN ĐỀ 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1. Lập phương trình của các đường tròn:

a. Đường kính AB với A(1; 2) và B(-2; 0)

b. Đường tròn đi qua ba điểm A(-1; 3), B(1; 1) và C(2; 4)

Giải

a/ Đường tròn đường kính AB có tâm $I\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ là trung điểm của đoạn AB và có bán kính R = $\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+2)^2+(2-0)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Nên phương trình của đường tròn đường kính AB là:

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$$

b/ Phương trình của đường tròn có dạng:

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \text{ với } a^2+b^2-c>0$$

Đường tròn qua ba điểm A, B, C nên:

$$\begin{cases}1+9+2a-6b+c=0\\1+1-2a-2b+c=0\\4+16-4a-8b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a-6b+c=-10\\2a+2b-c=2\\4a+8b-c=20\end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{11}{4}$, $c=5$

Vậy phương trình của đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là:

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}y+5=0$$

Bài 2. Cho (C_m): $x^2+y^2+2(m-1)x-2(m-2)y+m^2-8m+13=0$

a. Tìm m để (C_m) là đường tròn.

b. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Giải

a/ (C_m) là đường tròn khi:

$$a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow [-(m-1)]^2+(m-2)^2-(m^2-8m+13)>0$$

$$\Leftrightarrow m^2+2m-8$$

$$\Leftrightarrow m<-4 \vee m>2 \quad (*)$$

b/ Lúc đó tọa độ tâm I của đường tròn (C_m) là:

$$I\begin{cases} x = 1 - m & (1) \\ y = m - 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2), ta được: $x + y = -1$

Vậy quỹ tích tâm I của đường tròn (C_m) là đường thẳng d: $x + y + 1 = 0$

Mặt khác từ (1) ta có: $m = 1 - x$, và do điều kiện (*) ta suy ra:

$$1 - x < -4 \vee 1 - x > 2 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 5$$

Vậy quỹ tích của I là phần đường thẳng:

$$x + y + 1 = 0 \text{ với } x < -1 \text{ hay } x > 5$$

Bài 3. Tuyển sinh Đại Học khối D/2009

Cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ có tâm I. Tìm M trên (C) sao cho $IMO = 30^0$.

Giải

- *Cách 1:* (C) có tâm I(1, 0), R = 1. Gọi $M(x_0, y_0)$

Áp dụng định lý hàm cosin cho ΔIMO

$$OM^2 = OI^2 + IM^2 - 2OI.\ OM\cos120^0$$

$$OM^2 = 1 + 1 - 2(1)(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

Do $M \in (O) \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2{}_0 = 1 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 = 0$ (1)

Do $OM^2 = 3 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{2} \\ y_0^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$. Vậy $M\left(\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- *Cách 2:* Gọi A(2, 0) là một giao điểm (O) và trục hoành

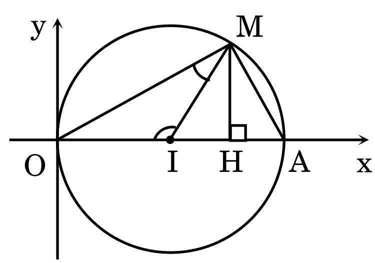
$$OMI = 30^0 \Rightarrow IMA = 60^0$$

$\Rightarrow$ ΔIMA đều cạnh 1

$\Rightarrow$ $AM^2 = 1$

$\Rightarrow$ $(x_0 - 2)^2 + y_0^2 = 1$

$\Rightarrow$ $x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$ (3)



Mà $M \in (O) \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 = 0$ (1)

Từ (3) $\Rightarrow x_0 = \dfrac{3}{2} \wedge y_0^2 = \dfrac{3}{4}$

Vậy $M\left(\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- *Cách 3:* Ta có: $OMA = 90^0$

  Mà $OMI = 30^0 \Rightarrow IMA = 60^0 \Rightarrow \Delta IMA$ đều $\Rightarrow MA = 1$

  $\Delta OMA \perp \Rightarrow OM^2 = OA^2 - MA^2 = 4 - 1 = 3$

  Vẽ $MH \perp Ox$

  $$\Delta OMH \perp \Rightarrow \cos 30^0 = \frac{OH}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_M = OH = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

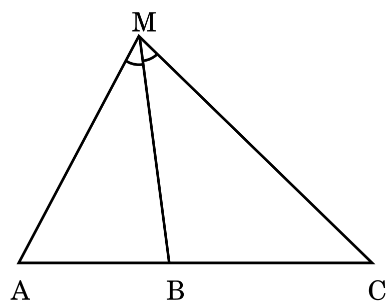
  Do $M \in (P) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + y_M^2 = 1 \Rightarrow y_M^2 = \frac{3}{4}$

  Vậy $M\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 4. Cho ba điểm: A(-5; -1), B(-2; 1), C(4; 5). Tìm quỹ tích điểm M nhìn hai đoạn thẳng AB, BC dưới hai góc bằng nhau.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (9; 6)$



Nên: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng với B nằm trong đoạn AC

Ta có điểm M nhìn hai đoạn thẳng AB, AC dưới hai góc bằng nhau nên MB chính là đường phân giác trong góc M của tam giác MAC. Suy ra:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow MC = 2MA \Leftrightarrow MC^2 = 4MA^2$$

Gọi (x; y) là tọa độ điểm M, ta có:

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-5)^2 = 4[(x+5)^2 + (y+1)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 16x + 6y + 21 = 0$$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I(-8; -3), bán kính $R = 2\sqrt{13}$

Bài 5. Tuyển sinh Đại Học khối D/2010

Cho ΔABC có $A(3; -7)$ trực tâm $H(3; -1)$ tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-2; 0)$. Tìm C biết $x_C > 0$.

Giải

Đường tròn $(\mathscr{C})$ qua A, B, C có phương trình

$$(x + 2)^2 + y^2 = IA^2 = 74$$

AH qua A, có VTCP $\overrightarrow{AH} = (0, 6)$

Nên PVT $\vec{n} = (1, 0)$

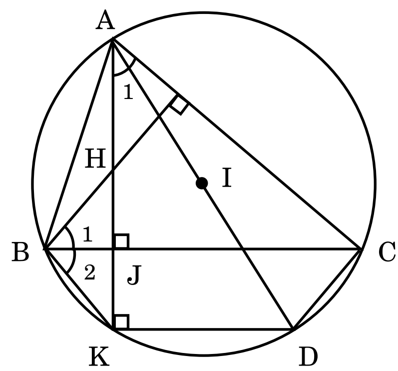
Phương trình AH: $1(x - 3) = 0$

Gọi K là giao điểm AH và $(\mathscr{C})$

Do $x_k = 3$ nên $y_k^2 = 74 - 25 = 49$

Vậy K(3, 7)

Gọi D là điểm đối xứng của A qua I



$$\begin{cases} x_D = 2x_I - x_A = -4 - 3 = -7 \\ y_D = 2y_I - y_A = 0 + 7 = 7 \end{cases}$$

Vậy D(–7, 7)

Ta có $\widehat{AKD} = 1\vee \Rightarrow BC \,//\, KD$

Ta có $\widehat{KAC} = \widehat{CBK}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KDC}$)

và $\widehat{KAC} = \hat{B}_1$ (góc nhọn có cạnh $\perp$)

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

$\Rightarrow \Delta HBK$ cân tại H

$\Rightarrow$ trung điểm HK là J(3, 3)

Do đó BC là đường thẳng qua J và có VTCP $\overrightarrow{KD} = (-10; 0) \Rightarrow$ PVT(0, 1)

Phương trình BC: $1(y - 3) = 0$

Do $y_C = 3$ mà $C \in (\mathscr{C}) \Rightarrow (x_C + 2)^2 + 9 = 74 \Rightarrow x_C = \sqrt{65} - 2$ (do $x_C > 0$)

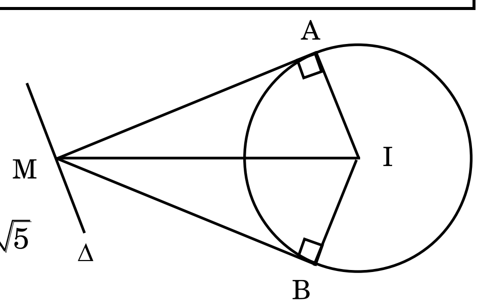
Vậy C($\sqrt{65} - 2$, 3).

VẤN ĐỀ 2: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Bài 6. Tuyển sinh Đại Học khối A/2011

Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ có tâm I. Tìm điểm M trên Δ: $x + y + 2 = 0$ để qua M vẽ lại tiếp tuyến MA, MB (A, B $\in$ (C)) mà diện tích MAIB bằng 10.

Giải



(C) có tâm I(2; 1), R = $\sqrt{5}$

Gọi M(m; –m – 2) $\in \Delta$

Ta có dt(MAIB) = 2dt(ΔMAI)

$$\Rightarrow AM.AI = 10 \Rightarrow AM = \frac{10}{R} = 2\sqrt{5}$$

Vậy: $MI^2 = MA^2 + AI^2 = 20 + 5$

$\Rightarrow (m - 2)^2 + (-m - 3)^2 = 25$

$\Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = -3 \vee m = 2$

Vậy $M(-3; 1) \vee M(2; -4)$.

Bài 7. Tuyển sinh Đại Học khối A/2009

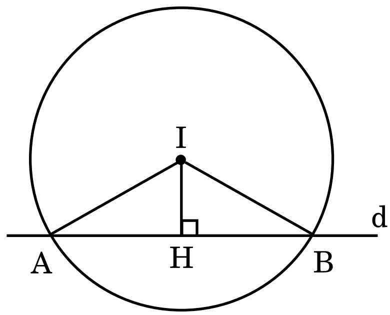
Cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$

Tìm m để đường thẳng d: $4x - 3y + m = 0$ cắt (C) tại A và B sao cho ΔIAB có diện tích lớn nhất.

Giải

(C) có tâm $I(-2, -2)$, $R = \sqrt{4+4-6} = \sqrt{2}$

Vẽ $IH \perp d$



Ta có $S = dt\,(\Delta IAB) = \dfrac{1}{2} IAI.B\sin AIB$

$\Leftrightarrow S = \dfrac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}\sin AIB = \sin AIB$

Vậy $S_{max} \Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^0$

$\Leftrightarrow \Delta AIB \perp$ cân $\Leftrightarrow \Delta AIH \perp$ cân

$\Leftrightarrow IH = \dfrac{AI}{\sqrt{2}} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|-8+6+m|}{\sqrt{9+16}} = 1 \quad \Leftrightarrow |m - 2| = 5$

$\Leftrightarrow m - 2 = \pm 5 \quad \Leftrightarrow m = 7 \vee m = -3$

Bài 8. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Lập phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) biết:

a. (Δ) tiếp xúc (C) tại M(1; 2)

b. (Δ) đi qua A(0; -1)

c. (Δ) song song với (D): $3x - 4y + 2012 = 0$

Giải

Ta có (C) là đường tròn tâm I(-2; 2) bán kính R = 3

a/ Ta có $M \in (C)$ vì $1 + 4 + 4 - 8 - 1 = 0$

(Δ) tiếp xúc (C) tại M nên (Δ) chính là đường thẳng đi qua M(1; 2) nhận $\overrightarrow{IM} = (3; 0)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình của (Δ) là: $3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$

b/ Gọi $\vec{n} = (a; b) \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của (Δ) thì phương trình của (Δ) có dạng: $a(x - 0) + b(y + 1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + b = 0$

(Δ) là tiếp tuyến của (C) nên:

$$d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |-2a + 3b| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (-2a + 3b)^2 = 9(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a(5a + 12b) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 5a + 12b = 0$$

Nếu $a = 0$ thì $b \neq 0$ nên phương trình của (Δ) là: $y + 1 = 0$

Nếu $5a + 12b = 0$ thì ta có thể chọn $a = 12$, $b = -5$ nên phương trình của (Δ) là: $12x - 5y - 5 = 0$

c/ (Δ) song song với (D): $3x - 4y + 2012 = 0$, nên (Δ) phương trình của (Δ) có dạng: $3x - 4y + c = 0$

Vì (Δ) là tiếp tuyến của (C) nên:

$$d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|c - 14|}{5} = 3 \Leftrightarrow |c - 14| = 15$$

$$\Leftrightarrow c - 14 = \pm 15 \Leftrightarrow c = 29 \vee c = -1$$

Vậy có hai tiếp tuyến là: $(\Delta_1): 3x - 4y + 29 = 0$

$(\Delta_2): 3x - 4y - 1 = 0$

Bài 9. Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục tung tại điểm $A(0; -\sqrt{3})$ và cắt trục hoành tại hai điểm B, C mà $\widehat{BAC} = 30^o$.

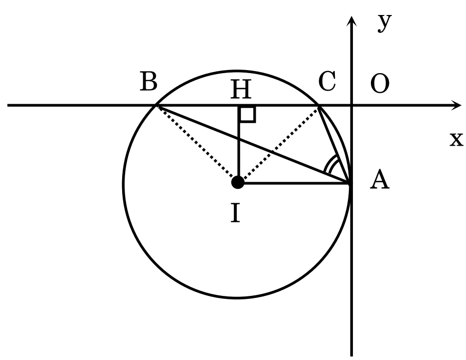
Giải

- (C) tiếp xúc trục tung tại $A(0; -\sqrt{3})$

nên: $\begin{cases} R = |a| \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$. Với tâm I(a; b) $\widehat{BAC} = 30^o \Leftrightarrow \widehat{BIC} = 60^o$

Vậy ΔIBC đều $\Rightarrow BC = R$

$\Rightarrow$ đường cao IH của ΔIBC bằng $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$



mà $IH = OA = \sqrt{3}$ nên $\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow R = 2 \Leftrightarrow |a| = 2 \Leftrightarrow a = \pm 2$

+ TH1: $a = 2$; $b = -\sqrt{3}$; $R = 2$

Vậy phương trình (C): $(x - 2)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$

+ TH2: $a = -2$; $y = -\sqrt{3}$, $R = 2$

Vậy phương trình (C): $(x + 2)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$

Bài 10. Tuyển sinh Đại Học khối A/2010

Cho d_1: $\sqrt{3}x + y = 0$, d_2: $\sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc d_1 tại A cắt d_2 tại B, C sao cho ΔABC vuông tại B và diện tích ΔABC bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Viết phương trình (T) biết $x_A > 0$.

Giải

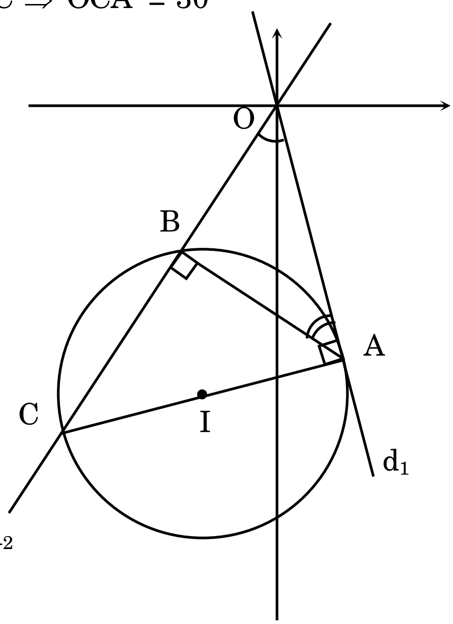
d_1 có PVT $(\sqrt{3}, 1)$ và d_2 có PVT $(\sqrt{3}, -1)$

Ta có: d_1, d_2 cắt nhau tại O và $\cos(d_1, d_2) = \frac{|3-1|}{\sqrt{4}.\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOA} = 60^0$

$\Delta ABC \perp$ tại B và nội tiếp trong đường tròn (T)

$\Rightarrow$ AC là đường kính của (T)

Do d_1 tiếp xúc (T) tại A nên $OA \perp AC \Rightarrow \widehat{OCA} = 30^0$



$\Delta ABC \perp \Rightarrow \tan 30^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3}AB$

$\Delta OAB \perp \Rightarrow \sin 60^0 = \frac{AB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OA = \frac{2}{\sqrt{3}}AB$

Ta có dt(ΔOAB) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}BC.BA = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}AB^2) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow AB = 1 \quad \Leftrightarrow OA = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Gọi A(a, $-\sqrt{3}$) $\in d_1$ Ta có $OA^2 = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow 4a^2 = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $a = x_A > 0$)

Vậy $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$ AC qua A và $\perp d_1$ vậy có phương trình

$1\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}(y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} \sqrt{3} - 3y = 4 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -2 \end{cases}$ Vậy $C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, -2\right)$

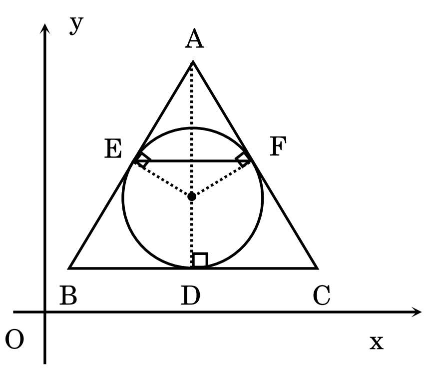
Đường tròn (T) có tâm $I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AC và R = IA = 1

Vậy phương trình (T) là $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$.

Bài 11. Tuyển sinh Đại Học khối B/2011

Cho ΔABC có $B(\frac{1}{2}; 1)$. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Cho D(3; 1) và đường thẳng EF có phương trình $y - 3 = 0$. Tìm tọa độ A biết $y_A > 0$.

Giải



BC qua $B(\frac{1}{2}; 1)$ VTCP $\overrightarrow{BD} = (\frac{5}{2}; 0)$

Vậy phương trình BC: $y - 1 = 0$

mà phương trình EF: $y - 3 = 0$

Do đó: CB // EF

Nên ΔABC cân tại A

Gọi $E(m, 3) \in (EF)$

Ta có: $BD = BE \Leftrightarrow \frac{25}{4} = (m - \frac{1}{2})^2 + 4$

$\Leftrightarrow (m - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow m - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 2$ hay $m = -1$

Vậy $E_1(2, 3)$ hay $E_2(-1, 3)$

Do BC // y'Oy nên AD // x'Ox $\Rightarrow x_A = x_D = 3$

• AB qua B có VTCP $\overrightarrow{BE_1} = (\frac{3}{2}; 2) = \frac{1}{2}(3, 4)$

Phương trình BE_1: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y + 1 = 0$

$A \in BA$: $x_A = 3 \Rightarrow y_A = \frac{13}{3}$

Vậy $A(3; \frac{13}{3})$ (nhận do $y_A > 0$)

• AB qua B có VTCP $\overrightarrow{BE_2} = (-\frac{3}{2}; 2) = \frac{1}{2}(-3, 4)$

Phương trình BE_2: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-3}{4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$

$A \in BA$: $x_A = 3 \Rightarrow y_A = -\frac{7}{3}$ (loại do $y_A < 0$).

Bài 12. Cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

Viết phương trình đường thẳng d qua gốc tọa độ cắt (C) tại A, B mà hai tiếp tuyến của (C) tại A và B vuông góc nhau.

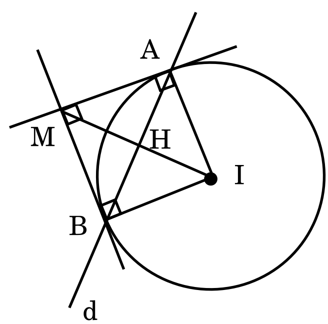
Giải

(C) có tâm I(1; –2), bán kính R = 3

gọi $\vec{n} = (a, b)$ là PVT của d

Do d qua O nên phương trình d: $ax + by = 0$

Do: hai tiếp tuyến tại A và B ⊥ tại M nên AMBI là hình vuông $\Rightarrow MI = 3\sqrt{2}$



Gọi H là giao điểm của AB và IM thì IH ⊥ AB

và $IH = \frac{1}{2}IM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $IH = d(I, d) = \frac{|a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2)$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 8ab + 8b^2 = 9a^2 + 9b^2 \quad \Leftrightarrow 7a^2 + 8ab + b^2 = 0$

Ta có: $\Delta'_a = (4b)^2 - 7b^2 = (3b)^2$

Vậy $a = \frac{-4b \pm 3b}{7} \Leftrightarrow a = -\frac{b}{7} \vee a = -b$

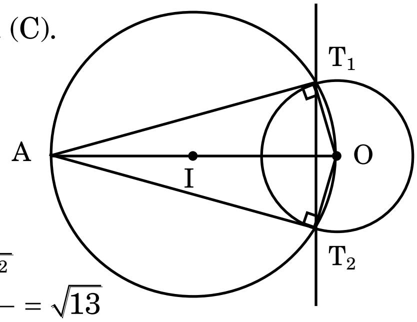
Khi $a = -\frac{b}{7}$. Chọn $b = -7$ thì $a = 1$. Vậy d: $x - 7y = 0$

Khi $a = -b$. Chọn $b = -1$ thì $a = 1$. Vậy d: $x - y = 0$.

Bài 13. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 9$, và một điểm A (4; -6) nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AT_1 và AT_2 với đường tròn, trong đó T_1, T_2 là các tiếp điểm. Viết phương trình của đường thẳng T_1T_2.

Giải

Ta có (C) là đường tròn tâm O, bán kính R = 3.



Mặt khác AT_1 và AT_2 là các tiếp tuyến của (C).

Nên $AT_1 \perp OT_1$, $AT_2 \perp OT_2$. Do đó T_1, T_2 ở trên đường tròn đường kính OA.

Đường tròn này có tâm

I là trung điểm OA nên

I(2; –3) và bán kính $R' = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{\sqrt{4^2 + (-6)^2}}{2} = \sqrt{13}$

Nên có phương trình: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$.

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$

Ta có tọa độ của T_1 và T_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) ta được: $4x - 6y = 9$

Gọi $T_1(x_1, y_1)$ thì $4x_1 - 6y_1 - 9 = 0$. Gọi $T_2(x_2, y_2)$ thì $4x_2 - 6y_2 - 9 = 0$

Suy ra tọa độ của T_1 và T_2 nghiệm đúng phương trình: $4x - 6y - 9 = 0$.

Nên phương trình này chính là phương trình của đường thẳng T_1T_2.

Bài 14. Biện luận theo m vị trí tương đối của đường thẳng (Δ): $mx - y - 3m - 2 = 0$ với đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

Giải

Ta có (C) là đường tròn tâm I(2; 1), bán kính $R = \sqrt{5}$

Khoảng cách từ I đến (Δ) là: $d(I, \Delta) = \dfrac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

Ta có: $d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \dfrac{|m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} < \sqrt{5} \Leftrightarrow |m + 3| < \sqrt{5(m^2 + 1)}$

$$\Leftrightarrow (m + 3)^2 < 5(m^2 + 1) \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2} \vee m > 2$$

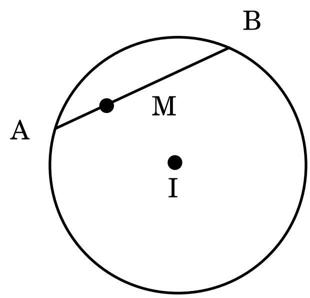
Nếu $m < -\frac{1}{2}$ hay $m > 2$ thì $d(I, \Delta) < R$ nên (Δ) cắt (C).

Nếu $m = -\frac{1}{2}$ hay $m = 2$ thì $d(I, \Delta) = R$ nên (Δ) tiếp xúc (C).

Nếu $-\frac{1}{2} < m < 2$ thì $d(I, \Delta) > R$ nên (Δ) không cắt (C)

Bài 15. Viết phương trình của đường thẳng cắt đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ theo một dây cung đi qua M(3; 0) có độ dài nhỏ nhất, lớn nhất.

Giải



(C) là đường tròn tâm I(-1; 2), bán kính R = 5

Ta có $IM^2 - R^2 = -5 < 0$, nên M nằm trong đường tròn (C).

Đường thẳng đi qua M cắt (C) theo dây AB.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$MA + MB \geq 2\sqrt{MA.MB} \text{ (không đổi)}$$

Đẳng thức xảy ra khi: MA = MB

Vậy dây AB có độ dài nhỏ nhất khi M là trung điểm AB lúc đó $IM \perp AB$.

Đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua M nhận $\overrightarrow{IM} = (4; -2)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình là:

$$4(x-3) - 2(y-0) = 0 \text{ hay: } 2x - y - 6 = 0$$

Mặt khác $AB \leq 2R$

Nên dây AB lớn nhất khi AB là đường kính của (C)

Lúc đó đường thẳng cần tìm chính là đường thẳng đi qua hai điểm I và M. Đó là đường thẳng đi qua M nhận $\overrightarrow{IM} = (4; -2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-0}{-2}$

Hay: $x + 2y - 3 = 0$.

Bài 16. Cho họ đường tròn (C_m): $x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 2m^2 - 1 = 0$.
Chứng minh rằng (C_m) luôn luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

Giải

Ta có (C_m) là họ đường tròn tâm I (m, -m), Bán kính R = 1.

Giả sử (C_m) luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định: (Δ): ax + by + c = 0 ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Ta có: d(I, Δ) = R, $\forall$ m $\Leftrightarrow \dfrac{|am - bm + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1, \quad \forall m.$

$$\Leftrightarrow (am - bm + c)^2 = a^2 + b^2, \quad \forall m.$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 m^2 + 2c(a - b)m + c^2 - a^2 - b^2 = 0, \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 & (1) \\ 2c(a - b) = 0 & (2) \\ c^2 - a^2 - b^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: a = b, Và (2) luôn luôn thỏa.

Mà $a^2 + b^2 \neq 0$ nên a, b đều khác O.

Từ (3) ta có: $c^2 = a^2 + b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow c = \pm b\sqrt{2}$.

Vậy phương trình của (Δ) là: $bx + by \pm b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x + y \pm \sqrt{2} = 0$.

VẤN ĐỀ 3: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài 17. Cho hai đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 + 2x - 17 = 0$

Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Giải

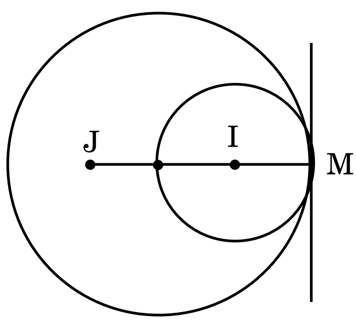
(C_1) có tâm I(1, 2), R = $\sqrt{2}$

(C_2) có tâm J(–1, 0), R′ = $3\sqrt{2}$

Ta có IJ = $2\sqrt{2}$ = R′ – R

Vậy (C_1) (C_2) tiếp xúc trong

Gọi M là tiếp điểm của (C_1) và (C_2)



Ta có $\dfrac{JM}{IM} = \dfrac{R'}{R} = 3$

$$\Rightarrow \overrightarrow{JM} = 3\overrightarrow{IM}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M + 1 = 3(x_M - 1) \\ y_M - 0 = 3(y_M - 2) \end{cases}$$

Vậy M(2, 3)

Tiếp tuyến chung là đường thẳng qua M và có PVT $\overrightarrow{IJ} = -2(1, 1)$

Phương trình tiếp tuyến chung là: $1(x - 2) + 1(y - 3) = 0$

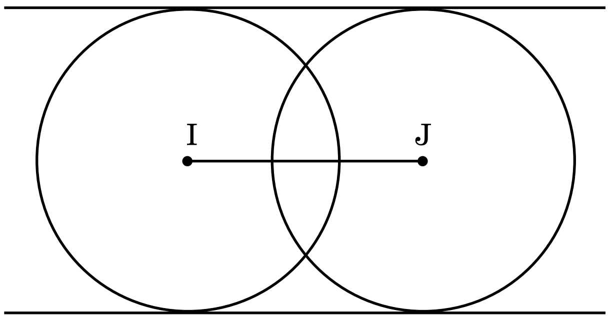
$\Leftrightarrow x + y - 5 = 0$

Bài 18. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của

(C_1): $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

(C_2): $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

Giải



(C_1) có tâm $I(1, 0)$, $R = \sqrt{1+8} = 3$

(C_2) có tâm $J(2, -2)$, $R = \sqrt{4+4+1} = 3$

Ta có $|R - R'| < IJ = \sqrt{5} < R + R'$

Vậy (C_1) và (C_2) cắt nhau và có bán kính bằng nhau

Do đó tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) có VTCP là $\overrightarrow{IJ} = (1, -2) \Rightarrow$ PVT là $(2, 1)$. Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng $2x + y + C = 0$ (Δ)

Do điều kiện tiếp xúc: $d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 + C|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow C + 2 = \pm 3\sqrt{5}$$

Vậy phương trình của hai tiếp tuyến chung: $2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$

Bài 19. Đề dự bị Đại học khối B/08

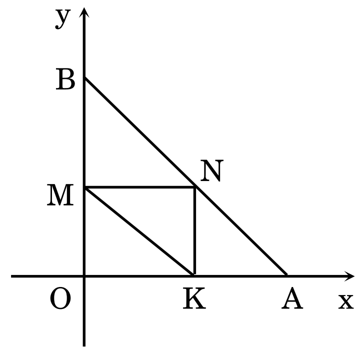
Cho $A(3, 0)$; $B(0, 4)$. Chứng minh đường tròn nội tiếp của ΔOAB tiếp xúc đường tròn qua trung điểm của các cạnh ΔOAB.

Giải

- Gọi K, N, M lần lượt là trung điểm OA, AB, OB

  Ta có $K\left(\dfrac{3}{2}; 0\right)$; $M(0, 2)$

  $\Delta MNK \perp$ tại N nên đường tròn (MNK) có tâm $I\left(\frac{3}{4};1\right)$ là trung điểm MK



bán kính $R = \frac{MK}{2} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = \frac{5}{4}$

- Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔOAB

  Ta có $S = dt(\Delta OAB) = pr$

  $\Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{OA.OB}{OA+OB+AB} = \frac{12}{3+4+5} = 1$

  Mặt khác $\Delta OAB \perp$ tại O nên tâm J của đường tròn nội tiếp nằm trên d: $y = x$

  Gọi $J(a, a) \in d$ (với $a > 0$)

  Ta có $d(J, Ox) = r = 1 \Leftrightarrow a = 1$

  Vậy $J(1, 1)$

  $IJ = \sqrt{\frac{1}{16}+0} = \frac{1}{4} = R - r$

Vậy hai đường tròn này tiếp xúc trong.

Bài 20. Biện luận theo m vị trí tương đối của hai đường tròn:

(C_1): $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

(C_2): $x^2 + y^2 - 2(m + 1) + 4my - 5 = 0$.

Giải

Ta có: (C_1) là đường tròn tâm O, bán kính R = 1.

(C_2) là đường tròn tâm $I(m + 1; -2m)$, bán kính

$R_2 = \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2 + 5}$.

Suy ra: $OI = \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2}$, $R_1 + R_2 = \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2 + 5} + 1$.

Rõ ràng: $R_2 > R_1$ nên

$$|R_2 - R_1| = R_2 - R_1 = \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2 + 5} - 1.$$

Ta có: $OI < R_1 + R_2$, với mọi m.

Mặt khác: $OI > |R_2 - R_1|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2} > \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2 + 5} - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2} > \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2 + 5}.$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{(m+1)^2+(-2m)^2}\right)^2>(m+1)^2+(-2m)^2+5.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^2+(-2m)^2}>2\ \Leftrightarrow(m+1)^2+(-2m)^2>4$$

$$\Leftrightarrow 5m^2+2m-3>0\ \Leftrightarrow m<-1\vee m>\frac{3}{5}.$$

Vậy:

a) Nếu $m < -1$ hay $m > \frac{3}{5}$ thì $|R_2 - R_1| < OI < R_1 + R_2$ nên (C_1) và (C_2) cắt nhau.

b) Nếu $m = -1$ hay $m = \frac{3}{5}$ thì $OI = |R_2 - R_1|$ nên (C_1), (C_2) tiếp xúc nhau.

c) Nếu $-1 < m < \frac{3}{5}$ thì $OI < |R_2 - R_1|$ nên (C_1) nằm trong (C_2).

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. (D2003) Cho (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng (d): $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) đối xứng (C) qua (d). Tìm giao điểm của (C) và (C′).

BT2. (DBB2005) Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ tâm I và bán kính R. Tìm $M \in d: 2x - y + 3 = 0$ mà MI = 2R.

BT3. Viết phương trình đường tròn thỏa:

a) Qua ba điểm A(5; 6), B(1; 0), C(–3; 4)

b) Qua A(–2; 4), B(5; 5) và tâm nằm trên đường thẳng (d): $4x - 5y - 3 = 0$

c) Tâm I(3; 2) và cắt (d): $x - 3y + 8 = 0$ theo một dây cung có độ dài bằng 10.

BT4. (A2007) Cho tam giác ABC có đỉnh A(0; 2), B(–2; –2), C(4; –2). Gọi H là chân đường cao vẽ từ B và M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Viết phương trình đường tròn qua các điểm H, M, N.

Đáp số: $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

BT5. Cho họ (C_m): $x^2 + y^2 + 2mx - 6y + 4 - m = 0$

a) Chứng minh (C_m) luôn là đường tròn $\forall m$

b) Khi m = 4. Viết phương trình đường thẳng vuông góc đường thẳng (Δ): $3x - 4y + 10 = 0$ và cắt đường tròn (C_4) theo một dây cung có độ dài bằng 6.

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} 4x + 3y + 27 = 0 \\ 4x + 3y - 13 = 0 \end{array}\right.$

BT6. D/2011

Cho (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$

Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(1, 0) cắt (O) tại M, N sao cho ΔAMN vuông cân tại A.

Đáp số: $y = 1 \vee y = -3$

BT7. (DBB2007) Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$. Tìm tọa độ bốn đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp (C), biết $A \in d: x + y - 1 = 0$.

BT8. (B2002) Cho hình chữ nhật ABCD có tâm I(1/2, 0), AB = 2AD, phương trình AB: $x - 2y + 2 = 0$. Biết $x_A < 0$. Tìm A, B, C và D.

Đáp số: A(–2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(–1; –2)

BT9. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C).

a) Tại điểm A(1; –1).

b) Biết tiếp tuyến vuông góc (d): $3x - 4y + 1 = 0$.

c) Phát xuất từ B(3; –2).

BT10. Viết phương trình đường tròn:

a) (B2005) Tiếp xúc trục hoành tại A(2; 0) và khoảng cách từ tâm I đến B(6; 4) bằng 5. *Đáp số:* $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

b) Qua B(6; 4) và tiếp xúc (d): $x + 2y - 5 = 0$ tại A(3; 1).

c) (DBB2006) Qua O(0; 0), A(–1; 1)

và tiếp xúc với đường thẳng $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$.

Đáp số: $x^2 + y^2 + 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 2y = 0$

d) (DBB2003) Tâm I nằm trên d: $2x + y = 0$ và tiếp xúc d': $x - 7y + 10 = 0$ tại A(4; 2). *Đáp số:* $(x - 6)^2 + (y + 12)^2 = 26C$

e) Bán kính 5 và tiếp xúc với (d): $3x - 4y - 31 = 0$ tại M(1; –7)

f) Tiếp xúc các trục tọa độ và qua N(2; –1).

g) Tiếp xúc các trục tọa độ và tâm nằm trên đường thẳng (Δ): $3x - 5y - 8 = 0$

h) Tiếp xúc hai đường thẳng (d): $2x - 3y - 10 = 0$, (d'): $3x - 2y + 5 = 0$ và tâm nằm trên đường thẳng $4x - 5y - 3 = 0$.

BT11. Cho (C_m) $x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2a)y + m^2 - 8m + 13 = 0$

a) Tìm điều kiện của m sao cho (C_m) là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm I.

b) Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ A(1; 5) của (C_4).

BT12. Cho họ đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2(m + 1)x - 2(m + 2)y + 6m + 7 = 0$$

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn của họ đó.

b) Xác định tọa độ tâm của đường tròn thuộc họ đã cho mà tiếp xúc với trục tung.

BT13. (B/09) Cho K ∈ (C): $(x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$, Δ_1: $x - y = 0$, Δ_2: $x - 7y = 0$.

Tìm tâm K và bán kính đường tròn (C_1) biết (C_1) tiếp xúc Δ_1 và Δ_2.

Đáp số: $K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

BT14. (B2006) Cho (C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3; 1)$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua T_1, T_2.

BT15. (DBD2002) Cho (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ và đường thẳng (d): $x - y + 1 = 0$. Tìm $M \in d$ sao cho từ M có hai đường thẳng tiếp xúc (C) tại A và B mà ΔMAB đều.

BT16. (D2007) Cho (C): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và đường thẳng d: $3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất điểm M sao cho từ M vẽ được hai tiếp tuyến MA, MB đến (C) mà tam giác MAB là tam giác đều (A, B là tiếp điểm).

Đáp số: $m = 19 \vee m = -41$.

BT17. Cho (C): $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm $M \in y'Oy$ sao cho từ M vẽ hai tiếp tuyến đến (C) mà góc của 2 tiếp tuyến bằng 60^o.

BT18. (DB/D08) Cho (C): $(x - 4)^2 + y^2 = 1$. Tìm $M \in y'Oy$ sao cho từ M vẽ 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) với A, B là tiếp điểm sao cho AB qua E(4; 1).

Đáp số: M(0; 4)

BT19. (DB/A08) Cho (C): $x^2 + y^2 = 1$. Tìm m để trên d: $y = m$ tồn tại đúng 2 điểm mà từ mỗi điểm đó vẽ 2 tiếp tuyến đến (C) sao cho góc 2 tiếp tuyến là 60^o.

BT20. Cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ có tâm lần lượt là I và J.

a) Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm tọa độ tiếp điểm H.

b) Gọi (D) là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (D_2). Tìm tọa độ giao điểm K của (D) và đường thẳng IJ. Viết phương trình đường tròn (C) qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H.

BT21. (DBA2002) Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1): $x^2 + y^2 - 10x = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

Đáp số: $x + 7y - 5 \pm 25\sqrt{2} = 0$

BT22. (C_1) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

(C_2) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$

Chứng minh $(C_1)(C_2)$ ở ngoài nhau

Tìm giao điểm các tiếp tuyến chung và đường nối tâm

Đáp số: $E(-4; \frac{5}{2})$, $F(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$

BT23. (D2006) Cho (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng d: $x - y + 3 = 0$. Tìm M trên d sao cho đường tròn tâm M có bán kính gấp đôi bán kính của (C), tiếp xúc ngoài (C).

BT24. (DBB2005) Cho (C): $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 36 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) tiếp xúc 2 trục tọa độ và tiếp xúc ngoài (C).

Đáp số: (C′): $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$

$(x - 18)^2 + (y + 18)^2 = 324$

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

BT25. (DBA2007) Cho (C): $x^2 + y^2 = 1$ và đường tròn (C′) tâm I(2; 2), biết rằng (C) cắt (C′) tại A, B mà $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Đáp số: $x + y - 1 = 0$.

BT26. (DBB2007) Cho (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C′) tâm M(5; 1) biết (C′) cắt (C) tại A, B mà $AB = \sqrt{3}$.

BÀI 4
ELIP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho hằng số a với $a > 0$.

Elip (E) = $\{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$.

F_1 và F_2 là các tiêu điểm.

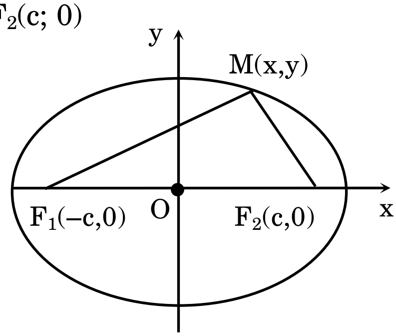
$F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự.

Nếu $M \in (E)$ thì MF_1 và MF_2 được gọi là các bán kính qua tiêu của điểm M.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP

Xét (E) = $\{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$, trong đó $F_1F_2 = 2c$.

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$



Phương trình chính tắc của elip là:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{với } b^2 = a^2 - c^2).$$

Nếu $M(x, y) \in (E)$ thì các bán kính qua tiêu của điểm M là:

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} \text{ và } MF_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

III. HÌNH DẠNG CỦA ELIP

Xét elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b^2 = a^2 - c^2$; $a > b > 0$).

a. Elip (E) có tâm đối xứng là O và có hai trục đối xứng là x′Ox và y′Oy.

b. Elip (E) cắt x′Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$; cắt y′Oy tại hai điểm. $B_1(0; -b)$ và $B_2(0; b)$. Bốn điểm đó được gọi là bốn đỉnh của elip.

Đoạn thẳng A_1A_2 được gọi là trục lớn còn đoạn thẳng B_1B_2 được gọi là trục bé của elip.

Ta gọi 2a là độ dài trục lớn còn 2b là độ dài trục bé của elip.

Chú ý rằng hai tiêu điểm của elip luôn luôn nằm trên trục lớn.

c. Nếu $M(x, y) \in (E)$ thì $-a \le x \le a$ và $-b \le y \le b$ nên toàn bộ elip (E) thuộc hình chữ nhật giới hạn bởi bốn đường thẳng $x = \pm a$ và $y = \pm b$. Hình chữ nhật đó được gọi là hình chữ nhật cơ sở của elip.

IV. TÂM SAI CỦA ELIP

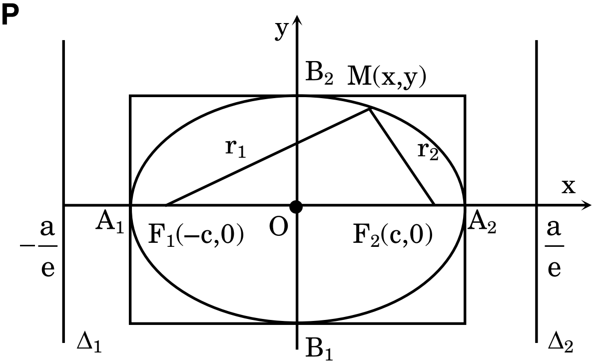
Tâm sai của elip là tỉ số giữa tiên cự và độ dài trục lớn của elip. Ký hiệu là e.

Ta có: $e = \dfrac{c}{a}$

Tâm sai của mọi elip đều bé hơn 1.

V. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA ELIP

a) Định nghĩa:



Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. và hai đường thẳng

(Δ_1): $x = -\dfrac{a}{e}$; (Δ_2): $x = \dfrac{a}{e}$

(Δ_1) được gọi là các đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1.

(Δ_2) được gọi là các đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2.

☞ ***Chú ý:*** Đường chuẩn luôn luôn vuông góc với trục lớn và không cắt elip.

b) Định lý: Tỉ số khoảng cách từ một điểm bất kỳ của elip đền một tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai e của elip.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của elip

a. Có tiêu cự 2c = 8, tâm sai $e = \frac{4}{5}$

b. Tuyển sinh Đại học khối A/08

Tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi 20.

Giải

a/ Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (với } b^2 = a^2 - c^2\text{)}.$$

Ta có: $2c = 8 \Rightarrow c = 4$

Và: $e = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = 5$ (vì c = 4)

Vậy: $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$.

Do đó: phương trình của elip (E) là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b/ Phương trình (E) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } b^2 = a^2 - c^2$$

Ta có chu vi hình chữ nhật cơ sở bằng 20

$\Rightarrow 4a + 4b = 20 \Rightarrow a + b = 5$

Ta có $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow 9c^2 = 5a^2 \Rightarrow 9(a^2 - b^2) = 5a^2 \Rightarrow 4a^2 = 9b^2$

Mà $b = 5 - a \Rightarrow 4a^2 = 9(5 - a)^2$

$\Rightarrow 5a^2 - 90a + 225 = 0 \Rightarrow a^2 - 18a + 45 = 0$

$\Rightarrow a = 3 \vee a = 15$ (loại)

Vậy phương trình (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

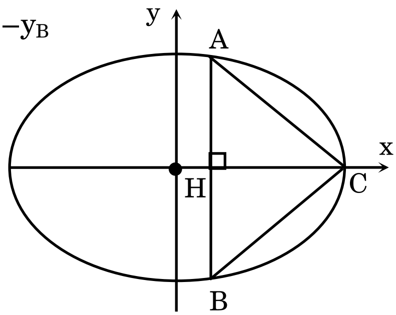
Bài 2. Tuyển sinh Đại học khối D/05

Cho (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và C(2, 0)

Tìm A, B trên (E) sao cho ΔABC đều.

Giải

Do A, B đối xứng qua Ox nên $x_A = x_B$, $y_A = -y_B$



Đặt $x_A = a$ thì

$A(a, \sqrt{1-\frac{a^2}{4}})$, $B(a, -\sqrt{1-\frac{a^2}{4}})$

Ta có: ΔABC đều $\Rightarrow AB^2 = AC^2$

$$\Rightarrow \left(2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\right)^2 = (a-2)^2 + \left(\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = a^2 - 4a + 4 \Rightarrow \frac{7a^2}{4} - 4a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{7} \vee a = 2 \text{ (loại do } A \equiv C)$$

Vậy $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

Bài 3. Tuyển sinh Đại học khối A/2011

Cho (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Tìm A, B trên (E) có x_A, $x_B > 0$ sao cho ΔOAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Giải

Do A, B đối xứng qua trục hoành

Gọi $A(a, \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}) \in (E)$ thì $B(a, -\sqrt{1-\frac{a^2}{4}})$

Gọi H trung điểm AB thì H(a, 0)

Ta có: S = diện tích (ΔOAB) = $\frac{1}{2}OH.AB = OH.HA$

$$\Rightarrow S = a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(4-a^2)} \text{ (do } a > 0)$$

Do bất đẳng thức Cauchy: $4 = a^2 + (4 - a^2) \geq 2\sqrt{a^2(4-a^2)}$

$$\Rightarrow 1 \geq S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(4-a^2)}$$

Vậy $S_{max} = 1$ khi $a^2 = 4 - a^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \Leftrightarrow A(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

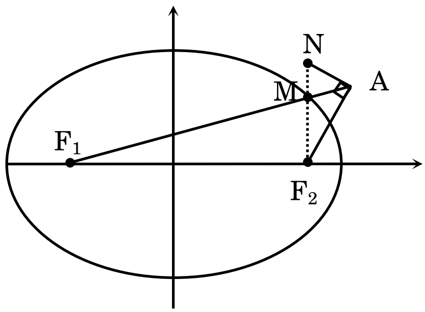
Bài 4. Tuyển sinh Đại học khối B/2010

Cho (E) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ và A(2, $\sqrt{3}$)

Gọi F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) với $x_{F_1} < 0$

AF_1 cắt (E) tại M với $y_M > 0$. Gọi N đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔANF_2.

Giải



Ta có $c^2 = a^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$

Vậy $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$

Phương trình AF_1: $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm (E) và AF_1

$$2x^2 + 3.\frac{3}{9}(x + 1)^2 = 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{-5}{3} \text{ (loại)}$$

Vậy $M(1, \frac{2}{\sqrt{3}})$, $N(1, \frac{4}{\sqrt{3}})$

Ta có $\overrightarrow{AN} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\overrightarrow{AF_2} = (-1, -\sqrt{3})$

Do $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AF_2} = 0 \Rightarrow \Delta ANF_2 \perp$ tại A

Vậy đường tròn qua A, N, F_2 là đường tròn đường kính NF_2 tâm M bán kính $R = MF_2$

Phương trình đường tròn là:

$$(x - 1)^2 + (y - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}$$

Bài 5. Tìm điểm M trên elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ sao cho:

a. $MF_1 = 2MF_2$.

b. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

c. M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^o.

Giải

Gọi $(x_o; y_o)$ là tọa độ của M. Ta có: $M \in (E) \Leftrightarrow \frac{{x_o}^2}{25} + \frac{{y_o}^2}{9} = 1$. (1)

Mặt khác: $a^2 = 25$, $b^2 = 9 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$.

Nên: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

a/ Ta có: $MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow a + ex_o = 2(a - ex_o) \Leftrightarrow 3ex_o = a$

$$\Leftrightarrow x_o = \frac{a}{3e} = \frac{5}{3 \times \frac{4}{5}} = \frac{25}{12}.$$

Thế vào (1) ta suy ra:

$$y_o^2 = 9\left(1 - \frac{25^2}{12^2 \times 25}\right) = \frac{9 \times 119}{12^2} \Leftrightarrow y_o = \pm\frac{\sqrt{119}}{4}$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn điều kiện của đề bài có tọa độ là:

$$\left(\frac{25}{12};\ \pm\frac{\sqrt{119}}{4}\right)$$

b/ M nhìn hai tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$ dưới một góc vuông nên M ở trên đường tròn đường kính F_1F_2, đó chính là đường tròn tâm O có bán kính 4. Phương trình đường tròn này là: $x^2 + y^2 = 16$.

M ở trên đường tròn này nên: $x_0^2 + y_0^2 = 16$. (2)

Suy ra: $y_0^2 = 16 - x_0^2$

Thay vào (1) ta được:

$$\frac{x_0^2}{25} + \frac{16 - x_0^2}{9} = 1. \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{7 \times 25}{16} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{5\sqrt{7}}{4}$$

Suy ra: $y_o^2 = 16 - x_o^2 = 16 - \frac{7 \times 25}{16} = \frac{81}{16} \Leftrightarrow y_o = \pm\frac{9}{4}$

Vậy bốn điểm M có tọa độ thỏa mãn điều kiện của đề bài có tọa độ là:

$$\left(\pm\frac{5\sqrt{7}}{4};\ \pm\frac{9}{4}\right).$$

c/ M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 60^o nên:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2\,MF_1.\,MF_2\cos 60^o$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = (MF_1 + MF_2)^2 - 3MF_1.MF_2$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 4a^2 - 3(a + ex_o)(a - ex_o)$$

$$\Leftrightarrow 4c^2 = 4a^2 - 3\left(a^2 - e^2x_o^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 64 = 100 - 3\left(25 - \frac{16}{25}x_o^2\right) \Leftrightarrow x_o^2 = \frac{25 \times 13}{26} \Leftrightarrow x_o = \pm\frac{5\sqrt{13}}{4}$$

Thay x_o vào (1) ta được:

$$y_o^2 = 9\left(1 - \frac{x_o^2}{25}\right) = 9\left(1 - \frac{13}{16}\right) = \frac{9 \times 13}{16} \Leftrightarrow y_o = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

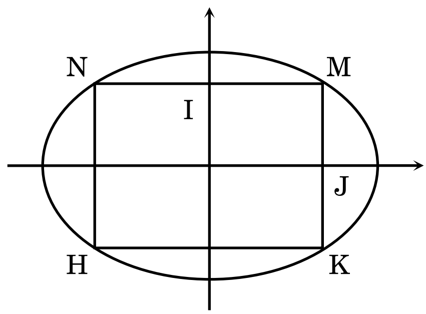
Vậy bốn điểm M có tọa độ thỏa mãn điều kiện của đề bài có tọa độ là:

$$\left(\pm\frac{5\sqrt{13}}{4};\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Bài 6. Cho (E) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

Tìm bốn đỉnh hình chữ nhật nằm trên (E) hình chữ nhật này nhận hai trục tọa độ là hai trục đối xứng và có diện tích lớn nhất.

Giải



Gọi $M(x_M, y_M) \in (E) \Rightarrow \frac{x_M^2}{18} + \frac{y_M^2}{2} = 1$

Ta có $S = dt(MNHK)$

$= MN.MK = (2MI)(2MJ)$

$\Rightarrow S = 4MI.MJ = 4|x_M|.|y_M|$

Do bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1 = \left(\frac{|x_M|}{3\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|y_M|}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 2\frac{|x_M|}{3\sqrt{2}}.\frac{|y_M|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 12 \geq 4|x_M|.|y_M| = S$$

Do đó $S_{max} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|x_M|}{3\sqrt{2}} = \dfrac{|y_M|}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{x_M^2}{18} + \dfrac{y_M^2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|y_M| = |x_M| \\ y_M^2 = 1 \end{cases}$

Vậy M(3; 1), N(–3; 1), H(–3; –1), K(–3; 1)

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Viết phương trình chính tắc của ellip (E) trong các trường hợp sau:

a. (E) đi qua $M\left(\frac{5}{4}; \sqrt{15}\right)$ và có hai tiêu điểm $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$.

b. (E) đi qua $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$ và có tâm sai $e = \frac{2}{3}$.

c. (E) có hai tiêu điểm $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$ và tâm sai $e = \frac{2}{3}$.

d. (E) có hai tiêu điểm $F_1(-6; 0)$, $F_2(6; 0)$ và tỷ số hai trục là $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$

e. (E) có trục lớn $2a = 8$ và khoảng cách giữa hai đỉnh liên tiếp là $A_1B_1 = 5$.

f. DB/D06 Độ dài trục lớn $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và tiêu điểm cùng nằm trên 1 đường tròn.

g. Phương trình một đường chuẩn là $x = 4$, đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới góc 120^o.

BT2. Cho (E): $4x^2 + 9y^2 = 36$. Viết phương trình đường thẳng qua $M(1, 1)$ và cắt (E) tại A, B sao cho M là trung điểm của AB.

BT3. Cho (E): $x^2 + 4y^2 = 16$

a. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $M(1, \frac{1}{2})$ và có VTCP $\vec{a} = (2, -1)$

b. Tìm giao điểm A, B của Δ và (E). Chứng minh MA = MB.

BT4. Cho (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ di động luôn thỏa $25A^2 + 9B^2 = C^2$. Tính tích khoảng cách từ hai tiêu điểm của F_1, F_2 đến Δ.

BT5. Cho (E) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và $C(2, 0)$

Tìm A, B trên (E) đối xứng nhau qua Ox sao cho

a. ΔF_2AB vuông cân với $x_{F_2} > 0$

b. Diện tích ΔF_1AB bằng $\sqrt{3}$

Đáp số: $\left(\frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}}{5}; \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}{5}\right)$

BT6. Cho (E) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Tìm các đỉnh của hình chữ nhật nội tiếp trong (E) mà các cạnh song song với hai trục và có diện tích lớn nhất

Đáp số: $\left(\pm\frac{5\sqrt{2}}{2}; \pm 2\sqrt{2}\right)$

BÀI 5

HYPERBOL

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho hằng số a với $0 < 2a < 2c$.

Hyperbol (H) = $\{M \mid |MF_1 - MF_2| = 2a\}$.

Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm. $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự.

Nếu $M \in (E)$ thì MF_1 và MF_2 được gọi là các bán kính qua tiêu của điểm M.

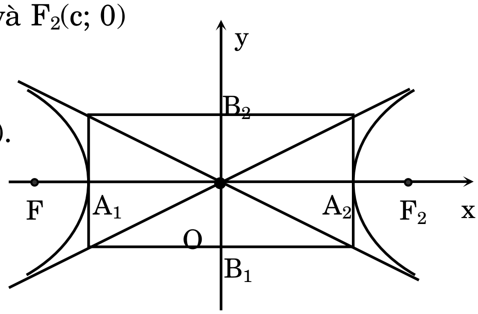
II. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA HYPERBOL

Xét hyperbol (H) = $\{M \mid MF_1 - MF_2 = 2a\}$, trong đó $F_1F_2 = 2c$.

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$

Phương trình chính tắc (H) là

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ (với } b^2 = c^2 - a^2).$$



☞ ***Chú ý:***

Nếu $M(x, y) \in (H)$ thì các bán kính qua tiêu của điểm M là:

* $x > 0$: $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a}$ và $MF_2 = -a + \dfrac{cx}{a}$.

* $x < 0$: $MF_1 = -a - \dfrac{cx}{a}$ và $MF_2 = a - \dfrac{cx}{a}$.

III. HÌNH DẠNG CỦA HYPERBOL

Xét hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2)$.

a. Hyperbol (H) có tâm đối xứng là O và có hai trục đối xứng là Ox và Oy.

b. Hyperbol (H) cắt Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$, chúng được gọi là đỉnh của Hyperbol. Ox được gọi là trục thực của hyperbol.

Hyperbol không cắt trục Oy, trục này gọi là trục ảo của hyperbol.

Ta gọi 2a là độ dài trục thực còn 2b là độ dài trục ảo của hyperbol.

Chú ý rằng hai tiêu điểm của hyperbol luôn nằm trên trục thực.

c. Nếu M (x, y) $\in$ (H) thì $x \le -a$ hoặc $x \ge a$ nên hyperbol gồm hai nhánh: nhánh phải gồm những điểm nằm bên phải đường thẳng

x = a, và nhánh trái gồm những điểm nằm bên trái đường thẳng x = -a.

IV. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA HYPERBOL

Hyperbol (H) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(b^2 = c^2 - a^2)$.

Có hai đường tiệm cận là: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

☞ ***Chú ý:***

Từ hai đỉnh của (H) ta vẽ hai đường thẳng song song với Oy, Chúng cắt hai đường tiệm cận tại bốn điểm: P, Q, R, S. Đó là bốn đỉnh của một hình chữ nhật, gọi là hình chữ nhật cơ sở của hyperbol. Các cạnh của hình chữ nhật đó là 2a và 2b, đường chéo là 2c.

V. TÂM SAI CỦA HYPERBOL

Tâm sai của hyperbol là tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực của hyperbol. Ký hiệu là e. Ta có: $e = \frac{c}{a}$

Tâm sai của mọi (H) đều lớn hơn 1.

VI. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA HYPERBOL

a/ Định nghĩa: Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Hai đường thẳng $(\Delta_1): x = -\frac{a}{e}$ và $(\Delta_2): x = \frac{a}{e}$ được gọi là các đường chuẩn của hyperbol.

(Δ_1) được gọi là các đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1.

(Δ_2) được gọi là các đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2.

* Chú ý: Đường chuẩn luôn luôn vuông góc với trục thực.

b/ Định lý: Tỉ số khoảng cách từ một điểm bất kỳ của elip đền một tiêu điểm và đường chuẩn tương đương bằng tâm sai e của hyperbol.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình chính tắc của hyperbol (H) có hai đường tiệm cận: $4x \pm 3y = 0$ và hai đường chuẩn: $5x \pm 9 = 0$.

Giải

Phương trình chính tắc của hyperbol (H) có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (b^2 = c^2 - a^2).$$

Hai đường tiệm cận: $4x \pm 3y = 0$ hay: $y = \pm\frac{4}{3}x$ nên: $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ (1)

Hai đường chuẩn: $5x \pm 9 = 0$ hay $x = \pm\frac{9}{5}$ nên: $\frac{a^2}{c} = \frac{9}{5}$ (2)

Từ (1) ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$ hay $\frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{16} = \frac{a^2 + b^2}{9 + 16} = \frac{c^2}{25}$ (3)

Từ (2) ta có: $\frac{a^2}{9} = \frac{c}{5}$ hay $\frac{a^4}{81} = \frac{c^2}{25}$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra: $\frac{a^4}{81} = \frac{a^2}{9}$ hay: $a^2 = 9$. Và: $\frac{b^2}{16} = 1$ hay $b^2 = 16$.

Vậy phương trình chính tắc của hyperbol (H) là: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Bài 2. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$, cắt trục tung ở A (0; 1) và B (0; -1). Đường thẳng $y = m$ $(-1 < m < 1, m \neq 0)$ cắt (C) ở T và S. Đường thẳng AT cắt đường thẳng BS tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

Giải

Tọa độ giao điểm S và T là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = m \end{cases}$

Giải hệ này ta suy ra: $T\left(-\sqrt{1 - m^2};\ m\right)$ và $S(\sqrt{1 - m^2}; m)$.

Phương trình của đường thẳng AT:

$$(1 - m)x - \sqrt{1 - m^2}.y + \sqrt{1 - m^2} = 0 \qquad (1)$$

Tương tự phương trình của đường thẳng BS là:

$$(1 + m)x - \sqrt{1 - m^2}.y - \sqrt{1 - m^2} = 0 \qquad (2)$$

Tọa độ giao điểm P là nghiệm của hệ gồm (1) và (2).

Giải hệ này ta được: P $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m} \\ y = \dfrac{1}{m} \end{cases}$

Khử m giữa tọa độ của P ta được: $y^2 - x^2 = 1$

Vì $y = \dfrac{1}{m}$ mà $-1 < m < 1$ và $m \neq 0$ nên: $y < -1$ hay $y > 1$.

Vậy tập hợp các điểm P là hyperbol (H): $y^2 - x^2 = 1$ loại bỏ hai đỉnh.

Bài 3. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa (Δ):

$$4x - 5y - 32 = 0 \text{ và (H): } y = \sqrt{x^2+9}.$$

Giải

Lấy $M(x_o; y_o) \in (H)$ ta có: $y_o = \sqrt{x_0^2 + 9}$ (1)

Khoảng cách từ M tới đường thẳng (Δ):

$$d = \frac{1}{\sqrt{41}}\left|4x_o - 5y_o - 32\right| = \frac{1}{\sqrt{41}}\left|4x_o - 5\sqrt{x_o^2+9} - 32\right| \text{ do (1)}$$

Khoảng cách ngắn nhất giữa (Δ) và (H) chính là giá trị nhỏ nhất của d:

Đặt: $f(x_o) = 4x_o - 5\sqrt{x_o^2+9} - 32$.

Ta có: $f'(x_o) = 4 - \dfrac{5x_0}{\sqrt{x_o^2+9}} = \dfrac{4\sqrt{x_o^2+9} - 5x_o}{\sqrt{x_o^2+9}}$

Xét dấu $f'(x_o)$:

Nếu $x_o \le 0$ thì $f'(x_o) > 0$.

Nếu $x_o > 0$ thì $4\sqrt{x_o^2+9} + 5x_0 > 0$ nên $f'(x_o)$ cùng dấu với:

$$[4\sqrt{x_0^2+9} - 5x_0]\,[4\sqrt{x_0^2+9} + 5x_0] = 16(x_0^2 + 9) - 25x_0^2 = 9(16 - x_0^2)$$

Xét dấu $16 - x_0^2$ khi $x_o > 0$

x_0	$-\infty$	-4	0		4		$+\infty$
$16 - x_0^2$		0		$+$	0	$-$	

Bảng biến thiên:

x_0	0		4		$+\infty$
$f'(x_0)$		$+$	0	$-$	
$f(x_0)$		$\nearrow$	-41	$\searrow$	
d		$\searrow$	$\sqrt{41}$	$\nearrow$	

Vậy: $\min d = \sqrt{41}$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Viết phương trình chính tắc của hyperbol (H) trong các trường hợp:

a. (H) có tiêu điểm $F_1(-3\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(3\sqrt{5};\ 0)$ và đi qua $M\left(5\sqrt{2};\ 2\sqrt{5}\right)$

b. DBA/06 có phương trình hai tiệm cận y = ±2a

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{2}=1$$

c. (H) đi qua M (-5; 3) và có tâm sai $e = \sqrt{2}$

d. (H) có trục ảo trên Ox và có độ dài bằng 6 và tiêu cự bằng 10.

e. (H) có khoảng cách giữa hai đỉnh bằng 6 và đi qua $A\left(6;\ -2\sqrt{3}\right)$

g. (H) đi qua M (24; 5) và có hai tiệm cận là $5x \pm 12y = 0$

h. (H) đi qua hai điểm $A\left(4;\ \sqrt{6}\right)$, $B\left(\sqrt{6};\ -1\right)$

i. (H) có độ dài nửa trục thực bằng 3 và đi qua điểm $\left(6;\ 2\sqrt{3}\right)$

j. (H) đi qua M(6; 3) và góc giữa hai tiệm cận bằng 60^0.

k. (H) đi qua $M\left(\dfrac{4\sqrt{34}}{5};\ \dfrac{9}{5}\right)$

và nhìn hai tiêu điểm trên Ox dưới một góc vuông.

l. (H) đi qua $M\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$ và nhìn hai tiêu điểm trên Ox dưới một góc 60^0.

m. (H) có hai đường tiệm cận $3x \pm 4y = 0$ và hai đường chuẩn $5x \pm 16 = 0$.

BT2. Một đường thẳng (D) lưu động cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích không đổi bằng S. Tìm quỹ tích các điểm M ở trên (D) sao cho: $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$ (k là hằng số khác 0 và khác 1).

BT3. Tìm những điểm trên hyperbol (H): $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$, nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120^o.

BT4. Cho hyperbol (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ và một điểm M thuộc (H). Chứng minh:

a. $OM^2 - F_1M.F_2M = a^2 - b^2$.

b. $(F_1M + F_2M)^2 = 4(OM^2 + b^2)$

BT5. Cho (H) $8x^2 - y^2 = 8$ và d: $2x - y + m = 0$

a. Chứng minh d luôn cắt (H) tại hai điểm thuộc hai nhánh của (H).

b. Cho $x_M < x_N$. Tìm m sao cho $F_2N = 2F_1M$.

BÀI 6
PARABOL

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho một đường thẳng (Δ) cố định và một điểm F cố định không thuộc (Δ).

Parabol (P) = $\{M \mid MF = d(M,\Delta)\}$.

Gọi: F là tiêu điểm

(Δ) là đường chuẩn

d(F, Δ) = p là tham số tiêu

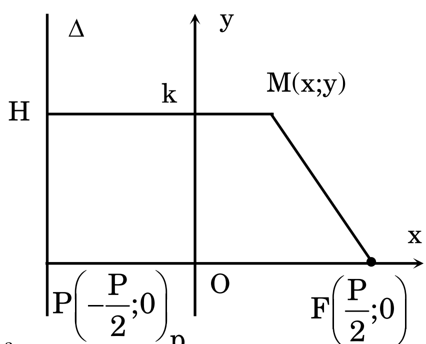
MF là bán kính qua tiêu của điểm M.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PARABOL

Xét parabol: (P) = $\{M \mid MF = d(M,\Delta)\}$

Chọn hệ tọa độ Oxy như sau: Trục Ox là đường thẳng đi qua F và vuông góc với (Δ), hướng dương từ P đến F

Gọi P là giao điểm Δ và x′Ox. Trục Oy là trực đoạn PF. Gốc tọa độ O là trung điểm PF.



Ta có: $F\left(\frac{P}{2};0\right)$; Phương trình đường chuẩn (Δ): $x = -\frac{p}{2}$

Phương trình chính tắc của parabol là:

$$\boxed{\mathbf{y^2 = 2px}}$$

☞ ***Chú ý:*** Nếu $M(x, y) \in (P)$ thì bán kính qua tiêu của điểm M là: $MF = x + \frac{p}{2}$

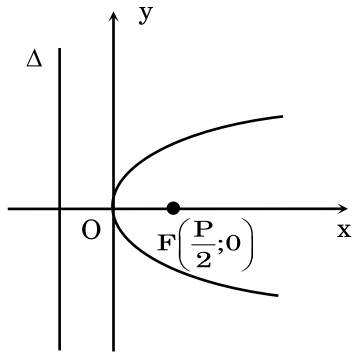
III. HÌNH DẠNG CỦA PARABOL

Xét parabol (P): $y^2 = 2px$

a) Parabol (P) có trục đối xứng là Ox.

b) Giao của parabol (P) với trục đối xứng Ox được gọi là đỉnh của parabol, đó chính là điểm O.

c) Các điểm của parabol đều nằm phía bên phải trục Oy.



IV. TÂM SAI CỦA PARABOL

Tâm sai của parabol luôn luôn bằng 1.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Đề dự bị khối A/03

Cho (P) $y^2 = x$ và I(0, 2)

Tìm M, N trên (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$

Giải

Gọi M(m^2, m) và N(n^2, n) nằm trên (P) $y^2 = x$

Ta có: $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 0 = 4(n^2 - 0) \\ m - 2 = 4(n - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m = 4n - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2n \\ 2n = 4n - 6 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -2n \\ -2n = 4n - 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $M_1(36, 6)$; $N_1(9, 3)$

$M_2((4, -2)$; $N_2(1, 1)$

Bài 2. Cho parabol (P): $x^2 = 4y$ và đường thẳng (D): $x - 2y + 4 = 0$

a. Tìm tọa độ giao điểm A, B của (P) và (D).

b. Tìm điểm M trên cung AB của (P) sao cho tổng diện tích hai phần hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai dây cung MA, MB nhỏ nhất.

Giải

a/ Tọa độ giao điểm A, B của (P) và (D) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

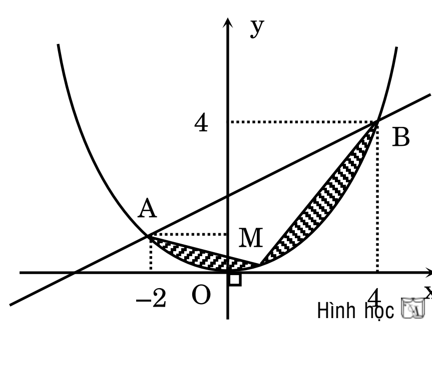
Giải hệ này ta suy ra: A(-2, 1), B(4, 4)

b/ Gọi (x_o, y_o) là tọa độ của điểm M trên cung AB của parabol (P).

Ta có: $x_o^2 = 4y_o$ (1)

Và: $-2 \le x_o \le 4$ (2)

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và (D) là không đổi. Nên: diện tích phần hình phẳng đề cập trong



đề bài sẽ nhỏ nhất khi diện tích tam giác MAB lớn nhất.

Diện tích tam giác MAB:

$$S = \frac{1}{2}.AB.d(M,(D)) = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}d(M,(D))$$

Nên S lớn nhất khi d(M, (D)) lớn nhất:

Ta có: $d(M, (D)) = \frac{1}{5}\left|x_o - 2y_o + 4\right| = \frac{1}{5}\left|x_o - \frac{x_o^2}{2} + 4\right|$ do (1)

Mà: $-\frac{x_o^2}{2} + x_o + 4 \geq 0$ do (2)

Nên: $d = \frac{1}{5}\left(-\frac{x_o^2}{2} + x_o + 4\right) = \frac{1}{10}\left(-x_o^2 + 2x_o + 8\right) = \frac{1}{10}\left[-(x_o - 1)^2 + 9\right] \leq \frac{9}{10}$.

Và: $d = \frac{9}{10} \Leftrightarrow x_o = 1$ Suy ra: $y_o = \frac{x_o^2}{4} = \frac{1}{4}$

Vậy d lớn nhất khi $x_0 = 1$, $y_o = \frac{1}{4}$.

Tọa độ của M là: $\left(1; \frac{1}{4}\right)$

Bài 3. Tuyển sinh Đại học khối D/08

Cho parabol (P): $y^2 = 16x$ và A(1, 4). Hai điểm M, N lưu động trên (P) sao cho tam giác AMN vuông tại A. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi m, n lần lượt là tung độ của M, N vì M, N không thể trùng A nên $m \neq 4$, $n \neq 4$

Ta có $M\left(\frac{m^2}{16}; m\right) \in (P)$, $N\left(\frac{n^2}{16}; n\right) \in (P)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(\frac{m^2}{16} - 1, m - 4\right); \overrightarrow{AN} = \left(\frac{n^2}{16} - 1, n - 4\right)$$

Tam giác AMN vuông tại A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(m^2 - 16)}{16}.\frac{(n^2 - 16)}{16} + (m - 4)(n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m + 4)}{16}.\frac{(n + 4)}{16} + 1 = 0 \text{ (do } m, n \neq 4)$$

$\Leftrightarrow$ mn + 4(m + n) + 272 = 0 (*)

MN qua M và có VTCP $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{n^2 - m^2}{16}; n - m\right) = \dfrac{n-m}{16}(n + m; 16)$

Vậy phương trình MN là: $\dfrac{x - \dfrac{m^2}{16}}{n+m} = \dfrac{y-m}{16}$

$\Leftrightarrow$ 16x – (n + m)y + nm = 0

Gọi I(x_0, y_0) là điểm cố định của MN

Ta có: I $\in$ MN $\forall$m, n $\neq$ 4

$\Leftrightarrow$ $16x_0 - (n + m)y_0 + nm = 0$ $\forall$m, n $\neq$ 4

Do (*) nên $\begin{cases} 16x_0 = 272 \\ y_0 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 17 \\ y_0 = -4 \end{cases}$

Vậy MN luôn qua I(17; –4) cố định.

Bài 4. Tìm điểm M thuộc parabol (P): $y^2 = 64x$, và điểm N thuộc đường thẳng (Δ): 4x + 3y + 46 =0, để đoạn MN là ngắn nhất.

Giải

Cứ với mỗi điểm M(x_o, y_o) $\in$ (P) thì đoạn vuông góc hạ từ M xuống (Δ) ngắn hơn mọi đoạn xiên nối từ M tới (Δ). Nếu muốn tìm M $\in$ (P), N $\in (\Delta)$ để đoạn MN ngắn nhất ta chỉ cần tìm đoạn ngắn nhất trong tất cả các đoạn vuông góc hạ từ M $\in$ (P) xuống (Δ).

Ta có: d(M, $(\Delta) = \dfrac{1}{5}|4x_o + 3y_0 + 46|$

Vì: M(x_o, y_o)$\in$ (P) nên: $y_o{}^2 = 64x_o$.

Do đó: d(M, Δ) = $\dfrac{1}{5}|4x_o + 3y_0 + 46| = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{y_o^2}{16} + 3y_0 + 46\right)$

Vì: $\dfrac{y_o^2}{16} + 3y_0 + 46 > 0$ do $\Delta = 9 - 4.\dfrac{1}{16}.46 < 0$

Ta có: d(M, Δ) $= \dfrac{1}{5}\left[\left(\dfrac{y_o^2}{16} + 3y + 36\right) + 10\right] = \dfrac{1}{5}\left[\left(\dfrac{y_o}{4} + 6\right)^2 + 10\right] \geq \dfrac{10}{5} = 2$

Và: d(M, Δ) = 2 $\Leftrightarrow \dfrac{y_o}{4} + 6 = 0 \Leftrightarrow y_o = -24$

Vậy MN ngắn nhất bằng 2 khi có tọa độ: y_o = -24, $x_o = \dfrac{y_o^2}{64} = 9$

Bây giờ ta xác định tọa độ (x_1, y_1) của N:

Ta có: $N(x_1, y_1) \in (\Delta) \Leftrightarrow 4x_1 + 3y_1 + 46 = 0$ (1)

Mặc khác $MN \perp (\Delta)$ nên $\overrightarrow{MN} = (x_1 - 9;\ y_1 + 24)$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3, 4)$ của (Δ). Do đó:

$$-3(x_1 - 9) + 4(y_1 + 24) = 0 \Leftrightarrow -3x_1 + 4y_1 + 123 = 0 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được: M(9; -24) và $N\left(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5}\right)$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong các trường hợp sau:

a. (P) có trục là Ox và khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn bằng 3.

b. (P) có đường chuẩn $x + 15 = 0$

BT2. Cho parabol (P): $y^2 = 4x$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua tiêu điểm của (P) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ A và B đến trục của (P) không đổi.

BT3. Cho (P) có đỉnh O, trục hoành là trục đối xứng và qua $A(2, 2\sqrt{2})$. Gọi d là đường thẳng qua $I(\frac{5}{2}, 1)$ cắt (P) tại M, N sao cho IM = IN. Tính MN

BT4: Gọi A, B là giao điểm của d: $mx - y - 2m = 0$ và (P): $y^2 = 8x$

Chứng minh đường tròn đường kính AB luôn tiếp xúc với đường chuẩn của (P)

BT5. Cho (P): $y^2 = 4x$ và (D): $y = 2x - 4$. Gọi A, B là giao điểm của (D) và (P) Tìm M trên cung AB của (P) sao cho diện tích ΔMAB lớn nhất.

PHẦN 2

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Biên soạn: **TRẦN MINH QUANG**
TRẦN MINH THỊNH
HOÀNG HỮU VINH

BÀI 1

QUAN HỆ SONG SONG VÀ VUÔNG GÓC

I. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

***Định nghĩa*:**

- Hai đường thẳng song song với nhau nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung

Lưu ý: Hai đường thẳng chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng

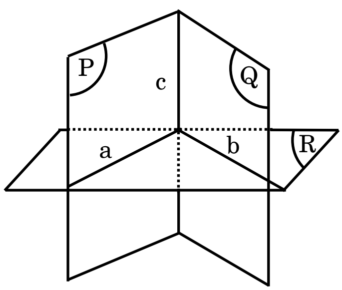
Định lý: Trong không gian

✦ Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

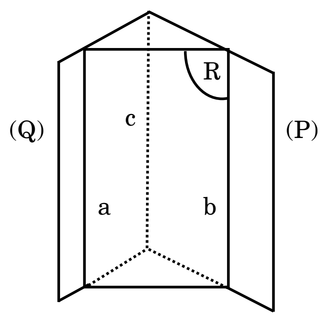
✦ Hai đường thẳng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

✦ *Định lí:* Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc song song. (h.1,2)

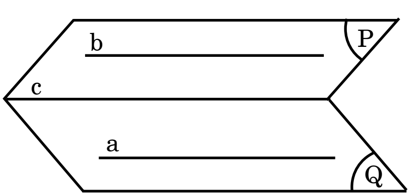
✦ *Hệ quả:* Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó). (h.3)



(h.1,2)



Ba giao tuyến đồng qui hoặc song song



(h.3)

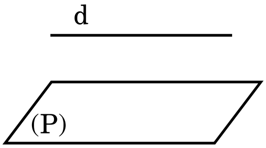
P) $\cap$ *(Q) = c,* $a \subset (Q)$*,* $b \subset (P)$ *và a // b*

$\Rightarrow$ *a // b // c (không xét* $c \equiv a, b$*)*

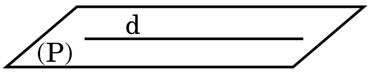
II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng:

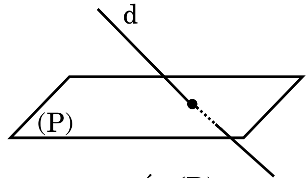
- ✸ d và (α) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ d // (α)
- ✸ d và (α) có 1 điểm chung duy nhất M $\Leftrightarrow$ d $\cap$ (α) = M
- ✸ d và (α) có từ 2 điểm chung trở lên $\Leftrightarrow$ d $\subset$ (α)



d // (P)



d ⊂ (P)



d cắt (P)

2. ✦ *Định lí:*

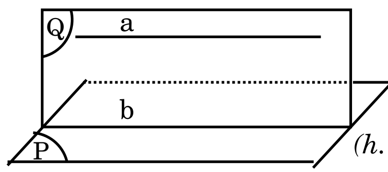
Nếu đường thẳng a không nằm trên mp(P) và song song với một đường thẳng nào đó nằm trên mp(P) thì a song song với mp(P)

$$\boxed{a \not\subset (P),\ d \subset (P),\ a \,//\, d \Rightarrow a \,//\, (P)}$$

✦ ***Định lí:***

Nếu đường thẳng a song song với mp(P), mọi mp(Q) chứa a và cắt (P) thì giao tuyến của (P) và (Q) song song với a.

$$\boxed{a \,//\, (P),\ a \subset (Q),\ (P) \cap (Q) = b \Longrightarrow a \,//\, b}$$



(h.1)

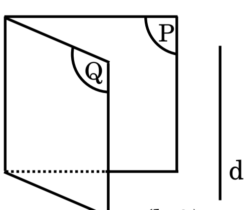
✦ ***Hệ quả**:*

- ✹ Nếu đường thẳng d song song mp(P) thì d song song một đường thẳng nào đó trong (P).
- ✹ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song đường thẳng d thì giao tuyến của chúng song song với d.(h.2)

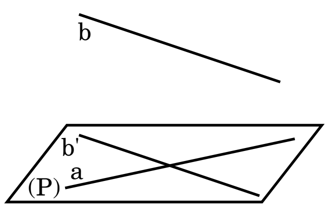
$$\boxed{(P) \cap (Q) = a,\ (P) \,//\, d,\ (Q) \,//\, d \Rightarrow a \,//\, d}$$

✹ ***Định lí:***

Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với b. (h.3)



(h.2)



(h.3)

III. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

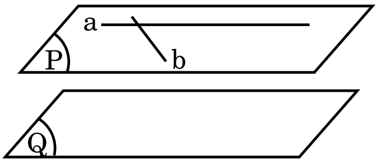
1. Hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q); có hai vị trí tương đối:

- Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d: (P) $\cap$ (Q) = d.
- Hai mặt phẳng song song nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song.

- ***Định lí:*** Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mp(Q) thì (P) song song (Q).

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} a \subset (P), b \subset (P), a \cap b \neq \varnothing \\ \alpha \,//\, (Q), b \,//\, (Q) \end{array}\right\} \Rightarrow (P) \,//\, (Q)}$$



- ***Hệ quả:*** Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song mp kia.

$$\boxed{(P) \,//\, (Q), a \subset (P) \Rightarrow a \,//\, (Q)}$$

3. Tính chất

- *Tính chất 1:*

  Qua một điểm nằm ngoài mp(P) có một và chỉ một mp(Q) song song với mp(P).

  - Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mp(P) thì có duy nhất một mp(Q) chứa a và song song mp(P).
  - Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
  - Hệ quả 3: Cho điểm A không nằm trên mp(P). Mọi đường thẳng đi qua A và song song mp(P) đều nằm trong một mp(Q) đi qua A và song song mp(P).

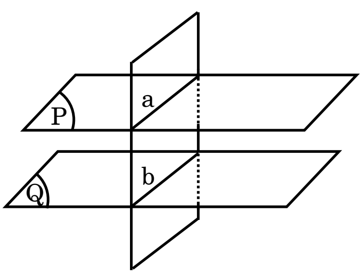
- *Tính chất 2:*

  Có hai mặt phẳng song song mọi mặt phẳng cắt mặt phẳng thứ nhất thì cắt mp thứ hai và hai giao tuyến song song nhau.

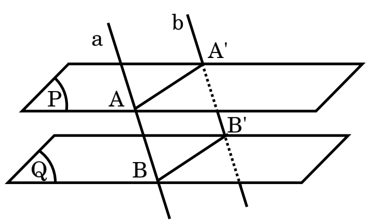
$$\boxed{(P) \,//\, (Q), (R) \cap (P) = a \Rightarrow (R) \cap (Q) = b, b \,//\, a}$$

  - Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn bằng nhau.

(h.1)



(h.2)



BÀI 2

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

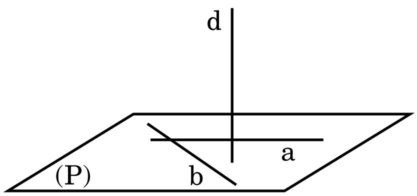
I. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

1. ***Định nghĩa:*** Đường thẳng d được gọi là vuông góc mp (P) nếu d vuông góc mọi đường nằm trong (P). Kí hiệu $d \perp (P)$.

2. ***Điều kiện để đường thẳng d vuông góc mp(P).***

Nếu d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) thì d vuông góc (P).

$$\left.\begin{array}{l} d \perp b \subset (P) \\ d \perp a \subset (P) \\ a \cap b \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P)$$



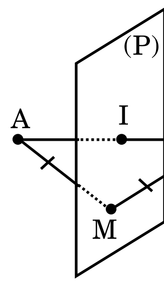
3. ***Tính chất:***

a) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

b) Mặt phẳng vuông góc đoạn thẳng AB tại trung điểm của nó gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

M trên mặt phẳng trung trực

$\Leftrightarrow$ MA = MB.

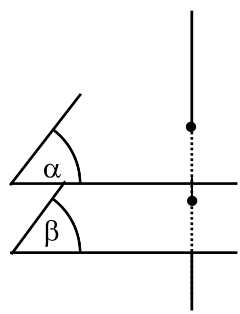


c) Qua một điểm có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

4. ***Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.***

a) • Có hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc đường này thì vuông góc đường kia

• Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc một mặt phẳng thì song song nhau.



b) • Có hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc mặt phẳng này thì vuông góc mặt phẳng kia

• Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc một đường thẳng thì song song nhau.

c) • Một đường thẳng và một mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc mặt phẳng thì vuông góc đường thẳng.

• Một đường thẳng và một mặt phẳng cùng vuông góc một đường thẳng thì đường thẳng song song hoặc nằm trong mặt phẳng.

5. ***Định lí ba đường vuông góc***

Cho a là đường thẳng nằm trong mp (P), b là đường thẳng không thuộc (P) và vuông góc (P) có hình chiếu vuông góc trên (P) là b'.

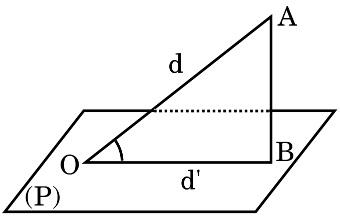
Khi đó a vuông góc b khi và chỉ khi a vuông góc b'.

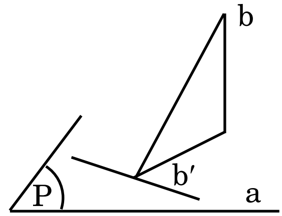
6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

★ Góc giữa đường thẳng d và mp(P) là góc giữa nó và hình chiếu của nó trên (P).

★ Khi d vuông góc (P) ta nói góc giữa d và (P) bằng 90^0.

★ Gọi α là góc giữa d và mp (P) thì $0^0 \le \alpha \le 90^0$.

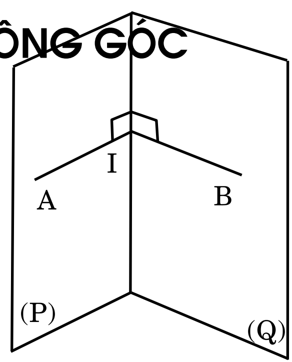




II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. ***Định nghĩa:***

Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau là góc giữa hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc vời giao tuyến.



Góc giữa (P); (Q) bằng $\widehat{AIB}$

2. ***Diện tích hình chiếu của một đa giác*:**

Cho hình H có diện tích S nằm trong mặt phẳng (P) và hình H' có diện tích S' là hình chiếu của H trên mặt phẳng (Q).

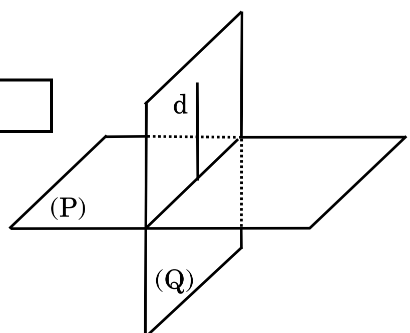
Nếu góc giữa (P) và (Q) là φ thì:

$$\boxed{S' = S.\cos\varphi}$$

3. ***Hai mặt phẳng vuông góc***

a) Định nghĩa:

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc



$d \perp (P)$ và $d \subset (Q) \Rightarrow (Q) \perp (P)$

nhau nếu góc giữa chúng là 90^0

Kí hiệu $(P) \perp (Q)$.

b) Định lí 1:

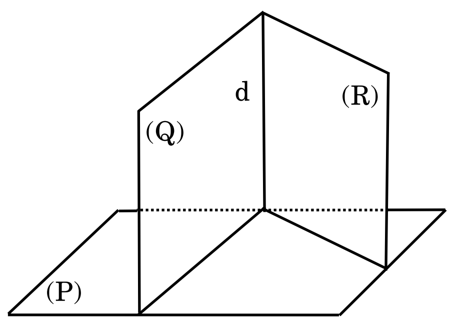
Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.

c) Các hệ quả

- Hai mặt phẳng vuông góc nhau, đường thẳng trong mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì vuông góc mặt phẳng kia.

$$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q);\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P),\ a \perp d\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (Q)$$

- Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc mặt phẳng (P) thì giao tuyến của chúng vuông góc mặt phẳng (P).



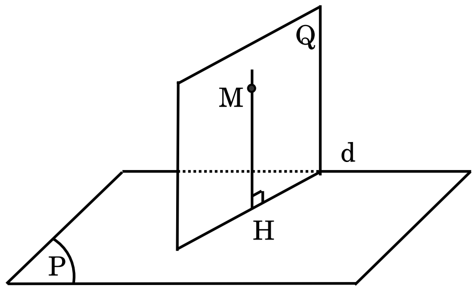
☛ Các vấn đề thường gặp

VẤN ĐỀ 1: BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

1. ***Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P)*****:** bằng độ dài đoạn vuông góc vẽ từ điểm M đến mp (P)

a) Cách tính:

- Ta tìm mp (Q) chứa M và vuông góc (P) theo giao tuyến d
- Vẽ MH vuông góc d thì MH vuông góc mp(P)
- Khoảng cách từ M đến (P) bằng đoạn MH.



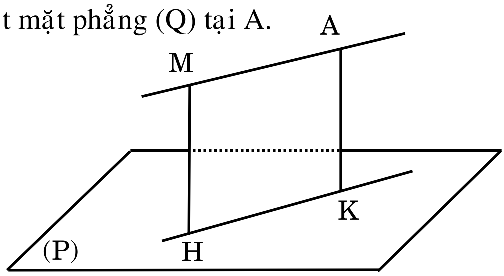
b) Đặc biệt:

Khi tính khoảng cách từ M đến (P) bằng cách tính đoạn MH mà quá khó thì ta đổi khoảng cách như sau :

✸ *Đổi điểm song song:* Ta cũng tìm mặt phẳng (Q) vuông góc (P) theo giao tuyến d (không cần phải chứa M), từ M vẽ đường thẳng (D) song song với (P), đường thẳng (D) này cắt mặt phẳng (Q) tại A.

Suy ra: MA // mp(P)

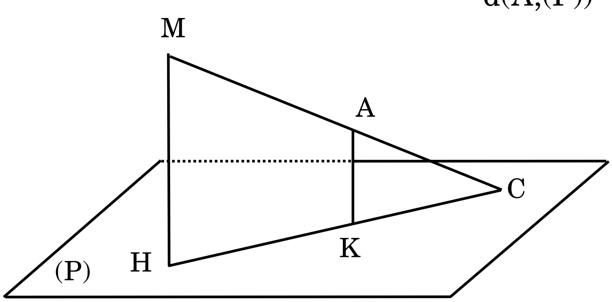
thì d(A,(P)) = d(M,(P))



$$MA//(P) \Rightarrow d(M,(P)) = d(A,(P))$$

✸ *Đổi điểm cắt nhau:*

Nếu đoạn MA cắt mp(P) tại C thì ta có $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{MH}{AK} = \dfrac{CM}{CA}$



2. ***Khoảng cách giữa đường thẳng d song song mp(P) đến mp(P)*** bằng khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên d đến (P)

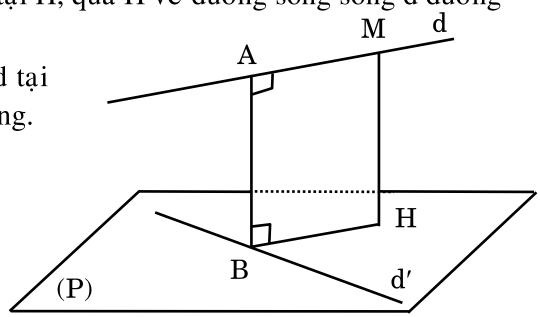
3. ***Cách dựng đoạn vuông góc chung của 2 đường chéo nhau***

• *Cách 1:* (Dựng song song)

– Xác định một mp (P) chứa d’ và song song d.

– Lấy M trên d, vẽ MH vuông góc (P) tại H, qua H vẽ đường song song d đường này cắt d’ tại B.

– Qua B vẽ đường song song MH cắt d tại A. Khi đó AB là đoạn vuông góc chung.



• *Cách 2:* (Dựng vuông góc)

– Dựng mp (β) vuông góc có d tại H

– Dựng đường thẳng (D) hình chiếu vuông góc của d′ lên mp(β)

– Trong mp(β) vẽ HK ⊥ (D)

– Từ K vẽ đường thẳng song song với d đường này cắt d′ tại B

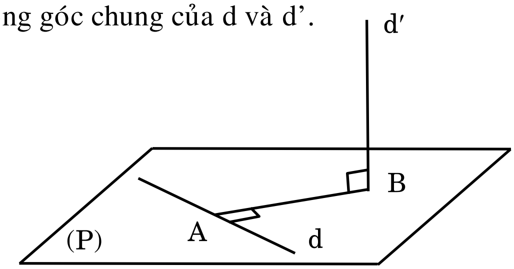
– Từ B vẽ đường thẳng // HK đường này cắt d tại A

AB là đường vuông góc chung cần dựng

• *Chú ý:* Khi d vuông góc d′

– Xác định mp (P) chứa d và vuông góc d’ tại B. Từ B vẽ BA vuông góc d

– Khi đó AB là đoạn vuông góc chung của d và d’.



Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau:

– Bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

– Bằng khoảng cách giữa đường thẳng thứ nhất đến mặt phẳng chứa đường thẳng thứ hai và song song đường thẳng thứ nhất.

– Bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song nhau lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

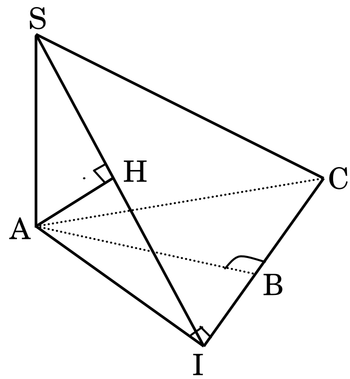
B/ BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Đề dự bị ĐH khối B/04

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc mp(ABC), SA = 3a, BA = BC = 2a, $ABC = 120^o$

Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC)

Giải



Vẽ $AI \perp BC$, $AH \perp SI$

Ta có $BC \perp AI$ và SA

$\Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (SBC)$

$\Delta ABI \perp \quad \Rightarrow \sin 60^o = \dfrac{AI}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

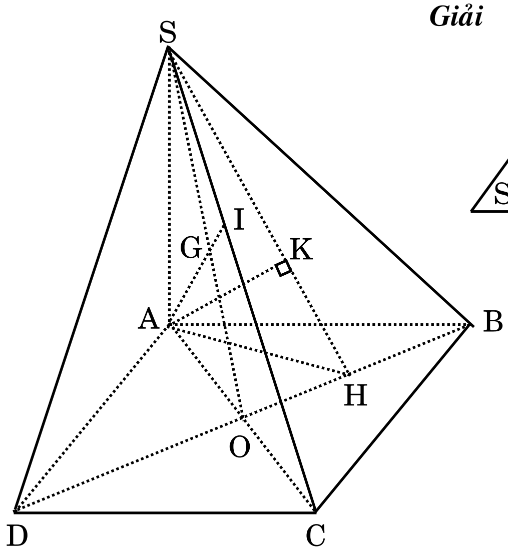
$\Rightarrow AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a = a\sqrt{3}$

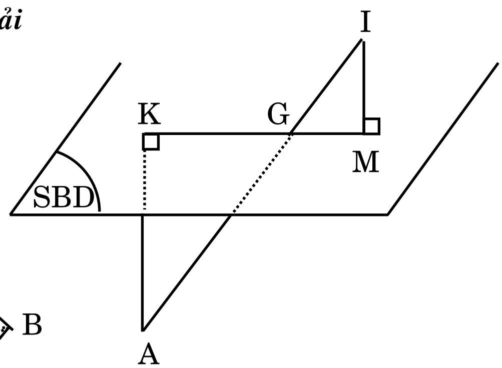
Do đó $AH = d(A, (SBC)) = \dfrac{SA.AI}{SI}$

$= \dfrac{3a.a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}a$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB = a, AD = 2a, SA vuông góc mặt phẳng (ABCD), SA = a. Gọi I là trung điểm SC. Tính khoảng cách từ I đến (SBD).

Giải





Gọi O là trung điểm AC thì SO cắt AI tại G trọng tâm ΔSAC

Ta có AI cắt (SBD) tại G nên $\dfrac{d(I,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{IM}{AK} = \dfrac{GI}{GA} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow d(I(SBD)) = \frac{1}{2}d(A, (SBD))$$

Vẽ AH ⊥ BD và AK ⊥ SH

Do BD ⊥ SA và AH nên BD ⊥ (SAH) ⇒ BD ⊥ AK

Do AK ⊥ SH và BD nên AK ⊥ (SBD)

$\Delta ABD \perp \Rightarrow AH = \dfrac{AB.AD}{BD} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

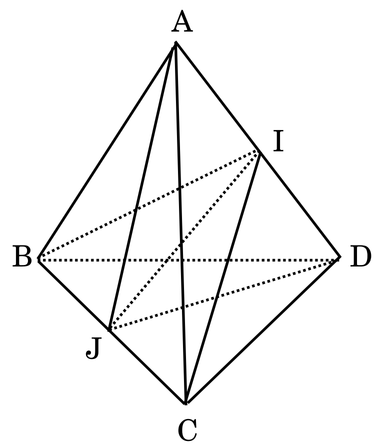
$\Delta SAH \perp \Rightarrow AK = \dfrac{SA.AH}{SH} = \dfrac{a.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{5}}} = \dfrac{2a}{3}$

Do đó: $d(I, (SBD) = \dfrac{1}{2}d(A, (SBD)) = \dfrac{AK}{2} = \dfrac{a}{3}$

Bài 3. Đề dự bị ĐH khối D/2002

Cho tứ diện đều ABCD có cạnh $a = 6\sqrt{2}$ cm. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và BC.

Giải



Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC

ΔABD và ΔACD đều cạnh a nên

$$BI = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ΔIBC cân tại I nên IJ ⊥ BC (1)

Tương tự: ΔJAD cân tại J nên IJ ⊥ AD (2)

Từ (1) và (2)

⇒ IJ là đoạn vuông góc chung của AD và AC

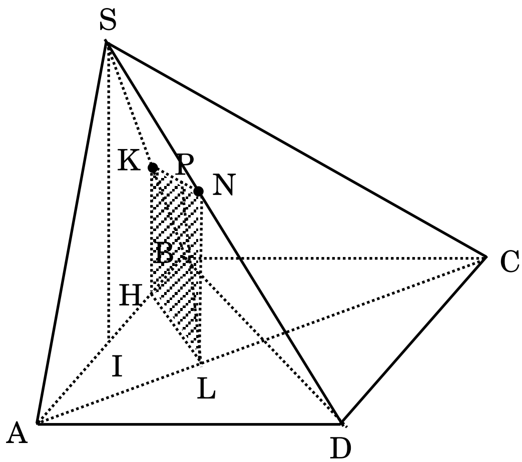
$\Delta AIJ \perp \Rightarrow IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$

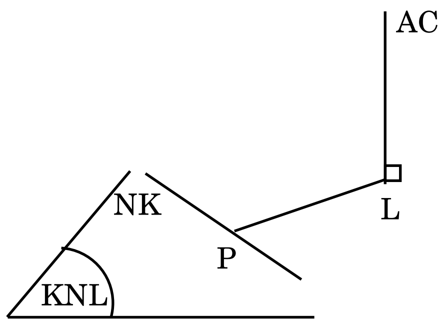
Vậy $IJ = d(AD, BC) = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = 6$ cm

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều. Mặt bên (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy (ABCD). Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của BC, SD, SB. Xác định và tính đoạn vuông góc chung của

a) NK và AC b) MN và AK.

Giải





Vẽ SI ⊥ AB

Do (SAB) ⊥ (ABCD) ⇒ SI ⊥ (ABCD)

a) Vẽ HK // SI, HL // BD

Ta có: AC ⊥ BD ⇒ AC ⊥ HL

HK // SI ⇒ HK ⊥ AC

Vậy AC ⊥ (HKNL) tại L

Vẽ LP ⊥ NK thì LP là đoạn vuông góc chung của AC và NK

Do HKPL là hình chữ nhật nên

$$d(AC, NK) = LP = HK = \frac{SI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

b) Gọi R là trung điểm SA

Ta có $\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Mà $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{RN} = \overrightarrow{BM}$

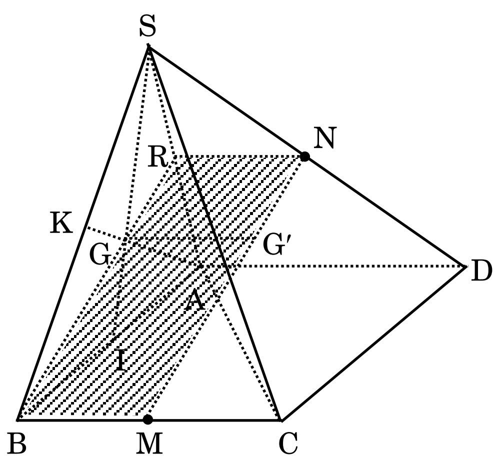
Do đó BR // MN

Vậy (SAB) là mặt phẳng chứa

AK và NM (xem cách 1)

Vẽ GG′ // MB

Ta có: BM ⊥ AB và SI



Nên $MB \perp (SAB)$

$\Rightarrow GG' \perp (SAB) \Rightarrow GG' \perp AK$ (1) và $GG' \perp BR \Rightarrow GG' \perp AK$ và MN

Vậy GG′ là đoạn vuông góc chung của AK và MN

Ta có: $GG' = d(AK, MN) = BM = \dfrac{a}{2}$

VẤN ĐỀ 2: CÁC BÀI TOÁN TÍNH GÓC

1. ***Góc giữa hai đường thẳng*****:** Bằng góc giữa hai đường thẳng cùng phương với chúng và phát xuất từ một điểm.

- Tìm trong bài toán các đường thẳng song song với hai đường đó để đổi đường.
- Để tính giá trị của góc dùng hệ thức trong tam giác.

2. ***Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng***

Góc giữa đường thẳng d và mp (P) là góc giữa nó và hình chiếu vuông góc của nó trên (P).

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0^0 \le \alpha \le 90^0$.

- Đầu tiên ta tìm giao điểm của d và (P) là A.
- Trên d chọn điểm B khác A, xác định BH vuông góc (P), suy ra AH là hình chiếu của d trên (P).
- Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$

☞ ***Chú ý:*** Khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc (P)), thì ta sử dụng công thức sau đây:

Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{d(M,(P))}{AM}}$$

với M là một điểm bất kỳ trên d và A là giao điểm của d với mặt phẳng (P).

Ta chuyển bài toán góc về bài toán tính khoảng cách từ M đến (P).

Công thức trên chứng minh rất đơn giản, nên coi như là hiển nhiên .

3. ***Góc giữa hai mp (P) và (Q)***

Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau là góc giữa hai đường thẳng nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm.

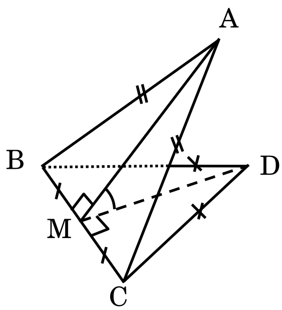
- Để tìm góc giữa hai mặt phẳng ta phải tìm giao tuyến của hai mặt phẳng sau đó tìm hai đường thẳng trong hai mặt phẳng lần lượt vuông góc giao tuyến theo các cách nêu ở những hình vẽ sau đây:

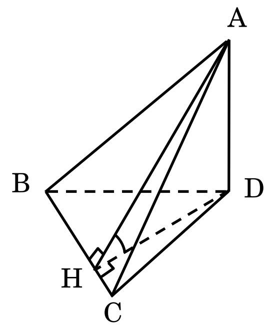
Trường hợp 1:

Hai tam giác cân ABC; DBC chung cạnh đáy BC. Gọi M là trung điểm BC thì góc giữa hai mặt phẳng là AMD

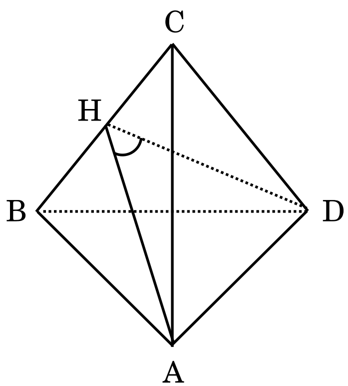
Trường hợp 2:

Hai tam giác ABC; DBC có AD ⊥ (DBC). Vẽ DH ⊥ BC thì AH ⊥ BC nên góc giữa hai mặt phẳng là AHD





Trường hợp 3:



Hai tam giác ABC và DBC có các cạnh tương ứng bằng nhau.

Vẽ AH ⊥ BC thì DH ⊥ BC

Vậy góc của hai mặt phẳng là AHD

☞ ***Chú ý:***

- Khi xác định góc của hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau: Gọi φ là góc giữa (P) và (Q) suy ra:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{d(A,(Q))}{d(A,u)}}$$

với A là một điểm trên mặt phẳng (P) và u là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q). Công thức này chứng minh rất đơn giản, nên coi như là hiển nhiên.

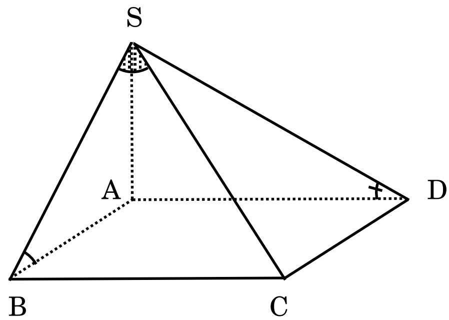
- Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức S’ = S.cosφ.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh a, SA = $a\sqrt{3}$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Tính góc giữa:

a) SB và CD. b) SD và (ABCD). c) SC và (SAD).

Giải



a) Ta có: CD // AB nên góc giữa SB và CD bằng góc giữa SB và AB bằng góc SBA

Tam giác SAB có $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow SBA = 60^o$.

b) Ta có: $SD \cap (ABCD) = D$

$SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow$ AD là hình chiếu vuông góc của SD trên (ABCD)

Nên góc giữa SD và (ABCD) là góc SDA.

Tam giác SAD có $\tan SDA = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3}$ suy ra $SDA = 60^o$

c) Ta có: $\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Khi đó $SC \cap (SAD) = S$

$CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow$ SD là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAD)

Nên góc giữa SC và (SAD) là CSD tam giác CSD

có $\tan CSD = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CSD = \arctan\dfrac{1}{2}$.

Bài 2. Cho hai tam giác ABC và DBC không đồng phẳng có cạnh đáy BC chung. Gọi I là trung điểm BC, vẽ AH vuông góc ID. Cho AB = AC = AD = a, BC = DB = DC = 2a/3. Tính góc giữa:

a) BA và (BCD). b) (ABC) và (BCD). c) (ABD) và (ACD)

Giải

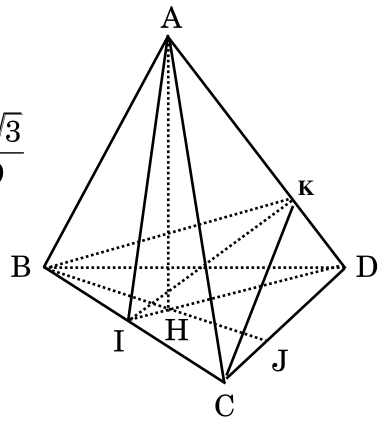
a) Gọi H là tâm của Δ đều BCD

thì HB = HC = HD Mặt khác do AB = AC = AD nên AH

là trục đường tròn (BCD) $\Rightarrow AH \perp (BCD)$

Vậy BH là hình chiếu vuông góc của AB lên (BCD)

Ta có: $BH = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3}\left(\frac{2a}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{9}$



Vậy $\cos\ ABH = \cos(AB, (BCD)) = \frac{BH}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$\Rightarrow ABH = \arccos\frac{2\sqrt{3}}{9}$

b) Gọi I là trung điểm BC

Ta có $DI \perp BC$, $AI \perp BC$

Vậy AID là góc của hai mp(ABC) và (BCD)

$\Delta ABI \perp \Rightarrow AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{8a^2}{9}$

ΔBDC đều $\Rightarrow IH = \frac{1}{3}DI = \frac{1}{3}\left(\frac{2a}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{9}$

$\Delta AIH \perp \Rightarrow \cos AIH = \frac{IH}{AI} = \frac{a\sqrt{3}}{9}.\frac{3}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

c) Vẽ $IK \perp AD$ ta có $AD \perp BC \Rightarrow AD \perp$ mp(BKC)

$\Rightarrow CK \perp AD$ và $BK \perp AD \Rightarrow BKC$ là góc giữa hai mp(ABD) và (ACD)

$IK = \frac{ID.AH}{AD}$ với $ID = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$AH = \sqrt{AI^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{8a^2}{9} - \frac{a^2}{27}} = \sqrt{\frac{23a^2}{27}} = \frac{a\sqrt{69}}{9}$

$\Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{23}}{9}$ Ta có : $IK.BC = KC^2.\sin BKC$

$\Rightarrow \sin BKC = \frac{IK.BC}{KC^2}$ mà $KC = \frac{AI.BC}{AD} = \frac{2a\frac{\sqrt{2}}{3}.\frac{2a}{3}}{a} = \frac{4a\sqrt{2}}{9}$

$\Rightarrow BKC = \arcsin\frac{3\sqrt{23}}{16}$

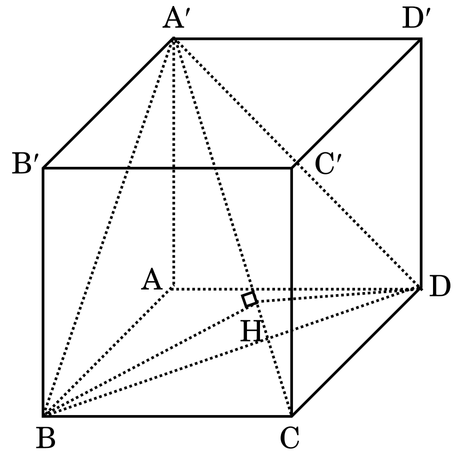
Bài 3. Tuyển sinh ĐH khối A/2003

Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′. Tính góc của hai mặt phẳng (BA′C) và (DA′C)

Giải

Vẽ $BH \perp A'C$

Ta có $\Delta A'BC = \Delta A'CD$ (c.c.c)



$\Rightarrow BCH = HCD$

$\Rightarrow \Delta HBC = \Delta HCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow CHD = CHB = 1v$

Vậy BHC là góc của hai mp$(BA'C)$, $(DA'C)$

$\Delta A'BC \perp$ tại B $\Rightarrow BH = \dfrac{B'A.BC}{A'C}$

$\Rightarrow HB = HD = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Áp dụng định lý hàm cosin trong ΔHBD ta có:

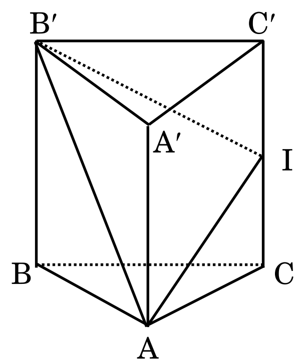
$$BD^2 = HB^2 + HD^2 - 2HB.HD\cos BHD$$

$$\Rightarrow \cos BHD = \frac{2HB^2 - BD^2}{2HB^2} = \frac{2\dfrac{6a^2}{9} - 2a^2}{2\left(\dfrac{6a^2}{9}\right)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BHD = 120^o$$

Bài 4. Đề dự bị ĐH khối A/2003

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác có $AB = AC = a$, $BAC = 120^o$, cạnh bên BB' bằng a. Gọi I là trung điểm của CC’. Chứng minh $\Delta AB'I$ vuông. Tính cosin góc của hai mp(ABC) và $(AB'I)$

Giải



- $\Delta ABC \Rightarrow BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos120^o = 3a^2$

$\Delta BB'A \perp$ cân $\Rightarrow B'A = a\sqrt{2}$

$\Delta IAC \perp \Rightarrow AI^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$

$\Delta B'C'I \perp \Rightarrow B'I^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$

Ta có $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2$

$\Rightarrow \Delta B'AI \perp$ tại A

- Ta có $Dt(\Delta AIB') = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$

$$Dt(\Delta ABC) = \frac{1}{2}a^2\sin 120^o = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ta thấy rằng ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta IB'C$ vuông mp(ABC). Vậy gọi φ là góc của hai mặt phẳng (AB'I) và (ABC) thì

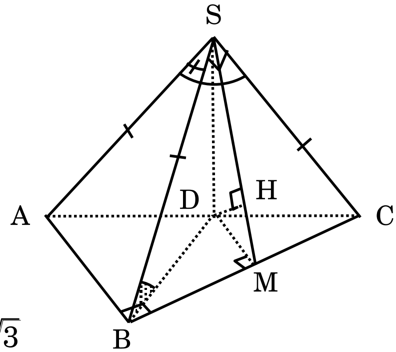
$$\cos\varphi = \frac{Dt(\Delta ABD)}{Dt(\Delta AB'I)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

Bài 5. Cho tứ diện SABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 60^0$, $\widehat{CSB} = 90^0$, $\widehat{ASC} = 120^0$

a. Chứng minh: ΔABC vuông. b. Tính d(S, (ABC))

c. Tính góc giữa SB và (ABC). d. Tính d(A, (SCB)).

Giải



a/ Tam giác SAB đều $\Rightarrow$ AB = a.

Tam giác SBC vuông cân

$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

Tam giác SAC cân có $\widehat{ASC} = 120^o$

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC\cos 120^o$

$= a^2 + a^2 - 2a^2\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Xét tam giác ABC có $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên tam giác vuông tại B.

b/ Ta có SA = SB = SC. Gọi D trung điểm AC. Ta có DA = DB = DC

Vậy SD là trục đường tròn (ABC) $\Rightarrow SD \perp (ABC)$

Vậy $d(S, (ABC)) = SD = \sqrt{SC^2 - DC^2} = \frac{a}{2}$

c/ Ta có: $SB \cap (ABC) = B$; $SD \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ BD là hình chiếu của SB trên (ABC) nên góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBD}$

Tam giác SBD có $\tan\widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy góc giữa SB và (ABC) là 60^o

d) Ta có đoạn AC cắt (SBC) tại C và D là trung điểm AC nên:

d(A, (SBC)) = 2d(D, (SBC)).

Gọi M là trung điểm BC suy ra $BC \perp DM$ (DM // AB) và $SD \perp BC$ nên $BC \perp$ (SDM)

Vẽ $DH \perp SM$ thì $DH \perp BC$ (do $BC \perp (SDM)$)

Suy ra: $DH \perp (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = DH$.

Tam giác DHM có $DH.SM = DS.DM \Rightarrow DH = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $d(A, (SBC)) = 2.DH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho tứ diện DABC có DA, DB, DC đôi một vuông góc. DA = a, DB = 2a, DC = 3a.

a) Tính d(AD, BC) b) Tính d(C, (ABD)).

c) Tính góc giữa (ACD) và (BCD).

BT2. Cho hình chóp S.ABCD có SA = 2a vuông góc đáy, ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. Vẽ AI vuông góc SO.

a) Tính d(A, (SBD)) b) Tính d(C, (SBD))

c) Tính d(CD, (SAB)). d) Tính d(D, (SBC)).

BT3. Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $BC \perp AD$. Có ΔACD đều và H là trực tâm. AB = AC = a

a) Chứng tỏ $BH \perp (ACD)$ b) Tính d(B, (ACD))

c) Chứng minh d(A, (BHC)) = d(D, (BHC)).

BT4. Cho tứ diện SABC, $SA \perp (ABC)$. Vẽ $CI \perp AB$, $AJ \perp BC$. Cho tam giác ABC đều cạnh a, SA = a/2.

a) Tính góc giữa (SBC) và (ABC)

b) Tính d(A, (SBC)) c) Tính d(B, (SIC)).

BT5. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi I là trung điểm AB.

a) Chứng minh $SI \perp (ABCD)$. b) Tính góc giữa SI và (SCD).

c) Tính d(SB, CD). d) Tính d(B, (SCD)).

BT6. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có AB = a, SA = 3a.

a) Tính chiều cao hình chóp. b) Tính góc giữa mặt bên và đáy.

c) Tính d(SC, AB). d) Tính d(C, (SAB)).

BT7. Hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại A, AB = 2a, AC = a, $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Gọi O, I là trung điểm BC, AB.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (ABC)$. b) Tính góc giữa AS và (ABC).

c) Chứng minh $(SOI) \perp (SAB)$. d) Tính d(O, (SAB)).

BT8. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có AB = a, góc giữa cạnh bên và đáy là 60^0.

a) Tính d(S, (ABCD)). b) M là tâm điểm CD, tính góc (SCD) và đáy.

c) Tính d(SA, (SCD)). d) Tính góc (SAB) và (SCD).

BT9. (DB/D07) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm AA'. Chứng minh BM vuông góc B'C và tính khoảng cách giữa BM và B'C

BT10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh SA vuông góc đáy, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Chứng tỏ tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD).

BT11. (DB/B04) Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC), SA = 3a, BA = BC = 2a, $ABC = 120$. Tính d(A, (SBC)) *Đáp số:* $\frac{3a}{2}$.

BT12. D/2002 Cho tứ diện ABCD có AD $\perp$ (ABC), AC = AD = 4 , AB = 3, BC = 5. Tính d(A, (BCD)) *Đáp số:* $\frac{12}{\sqrt{34}}$

BT13. DB/A02 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA $\perp$ (ABC) và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính d(A, (SBC)). *Đáp số:* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

BT14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD với AB = a, AD = 2a. SA $\perp$ (ABCD) và SA = a. Tính d(A, (SBD)). Suy ra khoảng cách từ trung điểm I của SC đến (SBD).

BT15. Cho hình thoi ABCD cạnh a và AC = a. Từ trung điểm H của AB, vẽ SH vuông góc (ABCD) với SH = 2a. Tính d(A, (SBC)).

BT16. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABCD là hình thang ABCD vuông tại A và D, AB = AD = a, CD = 2a, SD $\perp$ (ABCD), SD = a.

a) Chứng minh ΔSBC vuông. Tính diện tích ΔSBC.

b) Tính d(A, (SBC)) *Đáp số:* $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

BT17. (B2002) Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a) Tính d(BA', DB')

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D'. Tính góc của hai đường thẳng MP và NC.

BT18. (B2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm đoạn SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Chứng minh: MN vuông góc BD.

Tính d(MN, AC).

Đáp số: $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.(*HD:* d(MN, AC') = d(MN, (SAC))) = d(N, (SAC)) = NH.)

BT19. Dự bị ĐH A/02

Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ là góc của (ABC) và các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB)

Chứng minh $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3}$

BÀI 3

CÁC BÀI TOÁN TÍNH THỂ TÍCH

VẤN ĐỀ 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

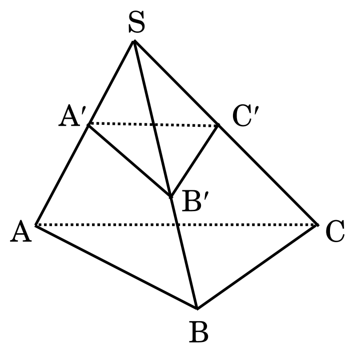
$$\boxed{V = \frac{1}{3}B.h}$$

B: diện tích đáy

h: chiều cao

☞ ***Chú ý:*** Cho khối chóp S.ABC. Trên các cạnh SA, SB, SC lấy các điểm A',B',C' khác S thì:

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}}$$



Dạng 1: **TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TỨ DIỆN**

Bài 1. Tuyển sinh ĐH khối D/2011

Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông tại B

$BA = 3a$, $BC = 4a$, mp(SBC) vuông góc mp(ABC), $SB = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SBC} = 30^o$

Tính thể tích khối S.ABC và khoảng cách từ B đến mp(SAC)

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC

Do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Ta có: $AB \perp BC \Rightarrow AB \perp SB$

$\Delta SBH \perp \Rightarrow \sin 30^o = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SH = \dfrac{1}{2}(2a\sqrt{3}) = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}3a.4a = 2\sqrt{3}a^3$

$\Delta SAB \perp \Rightarrow SA^2 = SB^2 + AB^2 = 12a^2 + 9a^2 = 21a^2$

$\Delta SBH \perp \Rightarrow BH^2 = SB^2 - SH^2 = 12a^2 - 3a^2 = 9a^2$

$\Rightarrow HC = BC - BH = 4a - 3a = a$

$\Delta SHC \perp \Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$

$\Delta BAC \perp \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2$

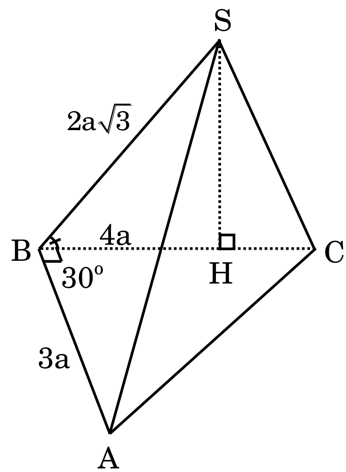
Ta có $SA^2 + SC^2 = 21a^2 + 4a^2 = AC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC \perp$ tại S

Vậy dt(ΔSAC) = $\frac{1}{2}SA.SC = \frac{1}{2}a\sqrt{21}.2a = a^2\sqrt{21}$

Ta có $V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \frac{1}{3}d(B, SAC)\, dt\,(\Delta SAC)$

$\Rightarrow d(B, (SAC)) = \dfrac{3V}{dt(\Delta SAC)} = \dfrac{6a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \dfrac{6a}{\sqrt{7}}$.



Bài 2. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác OAB có OA = OB = 2a, $\widehat{AOB} = 120^o$. Trên đường vuông góc với (α) tại O lấy hai điểm C, D về hai phía của O sao cho ΔABC vuông tại C và ΔABD đều. Tính thể tích khối chóp ABCD theo a.

Giải

Do CD $\perp$ (OAB)

và OA = OB nên DA = DB và CA = CB

$\Delta OAB \Rightarrow BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos120^o$

$\Rightarrow BA^2 = 4a^2 + 4a^2 - 2.2a.2a.-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow BA^2 = 12a^2 \Rightarrow BA = 2a\sqrt{3}$

$\Delta ABC \perp$ cân tại C $\Rightarrow AC = CB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}$

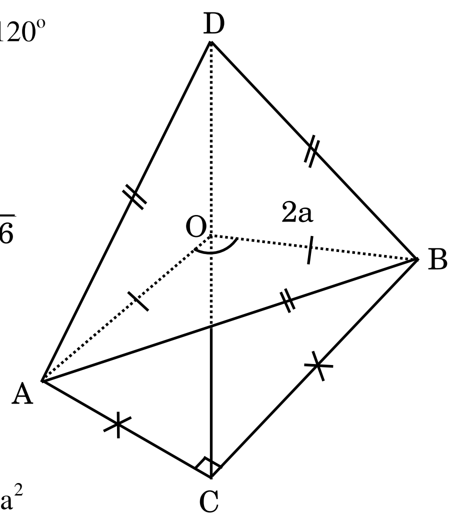
$\Delta OAC \perp$ tại O $\Rightarrow OC^2 = AC^2 - OA^2$

$\Rightarrow OC^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2$

ΔDAB đều $\Rightarrow DA = DB = AB = 2a\sqrt{3}$

$\Delta DOA \perp$ tại O

$\Rightarrow OD^2 = AD^2 - OA^2 = 12a^2 - 4a^2 = 8a^2$



Mặt khác: dt(ΔOAB) = $\frac{1}{2}OA.OB.\sin120^o$

$\Rightarrow S = dt(\Delta OAB) = \frac{1}{2}(2a)^2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\sqrt{3}$

Vậy $V_{A.BCD} = V_{D.OAB} + V_{C.OAB}$

$$= \frac{1}{3}OD.dt(\Delta OAB) + \frac{1}{3}OC.dt(\Delta OAB) = \frac{1}{3}(OD + OC)dt(\Delta OAB)$$

$$= \frac{1}{3}(2a\sqrt{2} + a\sqrt{2}).a^2\sqrt{3} = \frac{1}{3}.3a\sqrt{2}.a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{6}$$

Bài 3. (Đề dự bị Tuyển sinh ĐH khối A 2007) Cho hình chóp S.ABC có góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tam giác ABC và SBC đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

Giải

- Gọi I là trung điểm BC.

Δ ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$

Δ SBC đều $\Rightarrow SI \perp BC$

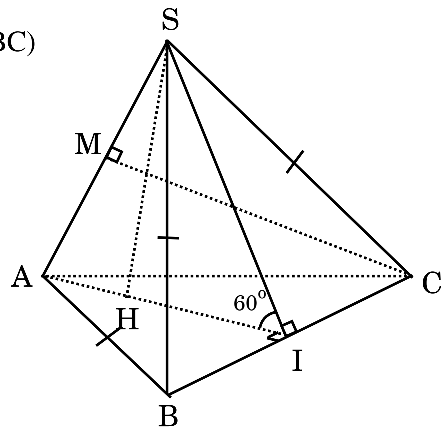
Vậy $SIA = 60^o$ là góc của (SBC) và (ABC)

Do đó Δ SIA đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trung điểm AI $\Rightarrow SH \perp AI$

Do $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SH$

Vậy $SH \perp (ABC)$



Ta có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

- Gọi M là trung điểm SA, Δ SAC cân tại C $\Rightarrow CM \perp SA$

$$\Delta AMC \perp \Rightarrow CM^2 = CA^2 - AM^2 = a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{13a^2}{16}$$

Vậy $dt(\Delta SAC) = \frac{1}{2}CM.SA = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$

Ta có: $V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \frac{1}{3}d(B,(SAC).Dt(\Delta ASC))$

$$\Rightarrow d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{Dt(\Delta SAC)} = \frac{3a^3.\sqrt{3}}{16}.\frac{16}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

Bài 4. (Đề dự bị ĐH khối A/08) Cho hình chóp S.ABC có ba mặt bên là các tam giác vuông, SA = SB = SC = a. Gọi M, N, E là trung điểm AB, AC, BC. Gọi D là điểm đối xứng của S qua E. Gọi $I = AD \cap (SMN)$. Chứng minh AD vuông góc SI. Tính thể tích khối S.MBI theo a.

Giải

• Trong $mp(ABC): MN \cap AE = 0$ là trung điểm MN (do MN // BC)

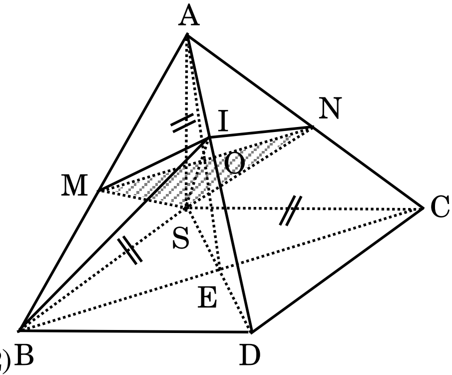
Trong $mp(ASD): SO \cap AD = I$

thì $I = AD \cap (SMN)$

Do: SBDC hình vuông nên $BC \perp SD$

Vậy $BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp AD$

$\Rightarrow MN \perp AD$ (1)



Ta có: $SM \perp AB$ và BD

$\Rightarrow SM \perp (ABD) \Rightarrow SM \perp AD$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow AD \perp (SMN)$

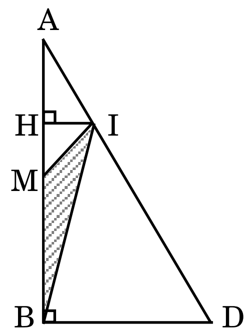
$\Rightarrow AD \perp SI$

$\Delta ASD \perp \Rightarrow SA^2 = AI.AD \Rightarrow AI = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Vẽ $IH \perp AB$

Ta có: $IH // BD \Rightarrow \dfrac{IH}{BD} = \dfrac{AI}{AD}$

$\Rightarrow IH = \dfrac{AI.BD}{AD} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{3}}.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{3}$



$\Delta SAB \perp$ cân $\Rightarrow SM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{S.MBI} = \dfrac{1}{3}SM.dt(MIB) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}.IH.MB = \dfrac{a\sqrt{2}}{12}.\dfrac{a}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{36}$

Bài 5. (Đề dự bị ĐH khối B 2007) Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho AC = R. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60^o. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Chứng minh Δ AHK vuông và tính thể tích tứ diện S.ABC theo R.

Giải

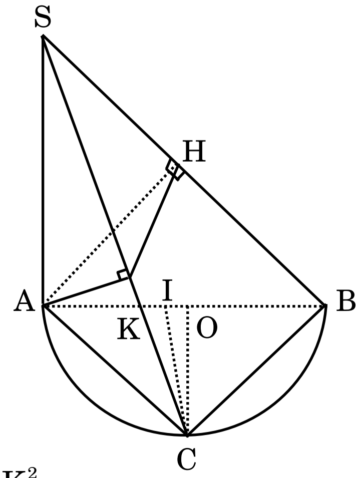
Ta có: $ACB = 1$ vuông $\Rightarrow BC \perp CA$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp$ mặt phẳng (SAC)

Do đó: $BC \perp AK$

Mà $AK \perp SC$ nên $AK \perp$ mặt phẳng (SBC)

Do đó: $AK \perp HK$

Vậy Δ AHK vuông tại K. Đặt: SA = h



$$\Delta SAC \perp \Rightarrow AK = \frac{AC.AS}{SC} = \frac{Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}}$$

$$\Delta SAB \perp \Rightarrow AH = \frac{AS.AB}{SB} = \frac{2Rh}{\sqrt{4R^2 + h^2}}$$

Do SB $\perp$ AH và AK

nên SB $\perp$ (AHK) $\Rightarrow$ SB $\perp$ HK

Vậy AHK = 60^o là góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)

$$\Delta AHK \perp \Rightarrow \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{AH} \Rightarrow 3AH^2 = 4AK^2$$

$$\Rightarrow \frac{3.4R^2h^2}{4R^2 + h^2} = \frac{4R^2h^2}{R^2 + h^2} \Rightarrow 3(R^2 + h^2) = 4R^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{R^2}{2}$$

Do đó: $V_{SABC} = \frac{1}{3}SA.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3}.\frac{R}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}CI.AB$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}}R\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)(2R) = \frac{R^3\sqrt{6}}{12}$$

☞ ***Cách khác:***

Do AC = R nên ΔOAC đều Vẽ CI $\perp$ OA thì I trung điểm OA

Ta có: CI $\perp$ AB và SA nên CI $\perp$ (SAB)

Do đó hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mp(SAB) là ΔSBI

Ta có $dt(\Delta ISB) = \frac{1}{2}SA.IB = \frac{1}{2}SA\left(\frac{3}{2}R\right) = \frac{3}{4}R.SA$

$$Dt(\Delta SBC) = \frac{1}{2}SC.BC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + R^2}.R\sqrt{3}$$

Mà: $dt(\Delta SIB) = dt(\Delta SBC)\cos 60^0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}R.SA = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + R^2}.R\sqrt{3}.\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}SA = \sqrt{SA^2 + R^2}$$

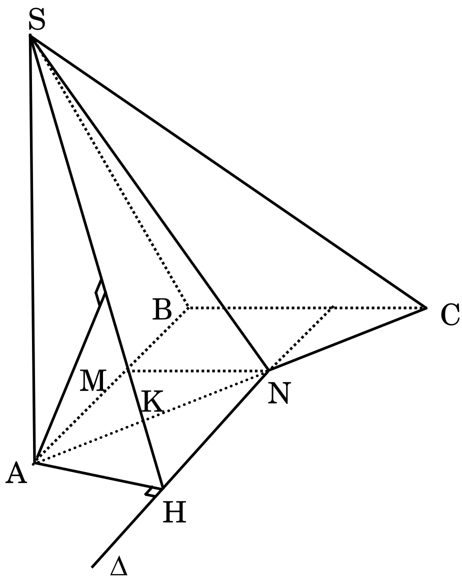
$$\Leftrightarrow 3SA^2 = SA^2 + R^2 \Leftrightarrow SA^2 = \frac{R^2}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SAdt(\Delta ABC) = \frac{R^3\sqrt{6}}{12}$.

Bài 6. Tuyển sinh ĐH khối A/2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân BA = BC = 2a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mp(ABC). Gọi M là trung điểm AB. Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, SN.

Giải



- Do hai mp(SAB) và (SAC) cùng vuông góc mp(ABC) nên SA ⊥ (ABC)

Do (SMN) // BC

nên $(SMN) \cap (ABC) = MN$ // BC

Ta có BC ⊥ BA ⇒ BC ⊥ SB

Vậy $\widehat{SBA} = 60^o$ là góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

$\Delta SAB \perp \Rightarrow \tan 60^o = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow SA = 2a\sqrt{3}$

$Dt(MNCB) = \dfrac{MB}{2}(MN + BC)$

$= \dfrac{a}{2}(a + 2a) = \dfrac{3a^2}{2}$

Vậy $V_{S.MNCB} = \dfrac{1}{3}(2a\sqrt{3})\dfrac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$

- Qua N kẻ đường thẳng Δ song song AB

Vẽ AH ⊥ Δ thì AB // (SNH)

Vậy d(AB, SN) = d(AB, (SNH)) = d(A, (SNH))

Vẽ AK ⊥ SH (1)

Ta có HN ⊥ AH và SA nên HN ⊥ (SAH)

⇒ HN ⊥ AK (2)

Từ (1), (2) ⇒ AK ⊥ (SHN)

$\Delta SAH \perp \Rightarrow AK = d(A, (SNH)) = \dfrac{SA.AH}{SH}$

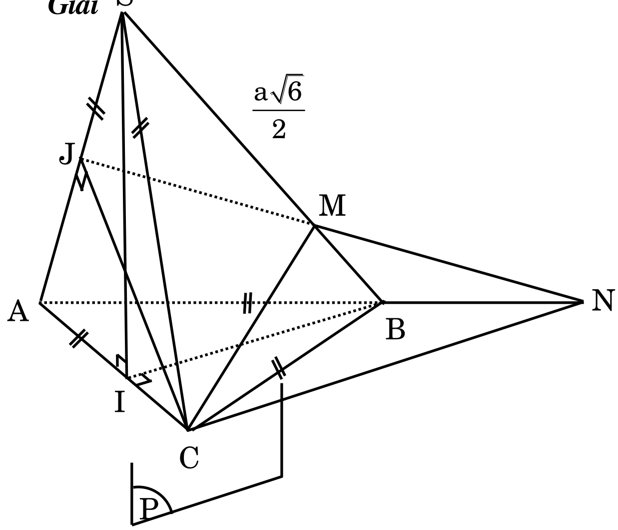
$$\Rightarrow d(AB, SN) = \frac{2a\sqrt{3}.a}{\sqrt{12a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Bài 7. Cho hình chóp S.ABC có hai mặt ABC và SAC là các tam giác đều cạnh a, SB = $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

a) Gọi I là trung điểm AC. Chứng minh hai mặt phẳng (SIB) và (ABC) vuông góc nhau.

b) Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc SA. Tính thể tích hình chóp đỉnh S đáy là thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp S.ABC.

Giải



a) ΔABC đều $\Rightarrow BI \perp AC$

ΔSAC đều $\Rightarrow SI \perp AC$

Vậy $AC \perp (SIB)$

Mà $AC \subset (ABC)$

nên $(ABC) \perp (SIB)$

b) Vẽ đường cao CJ

trong Δ đều (SAC)

Vậy $CJ \subset (P)$

Ta có: $(SIB) \perp (ABC)$

và $SI \perp AC$ và

$$SI^2 + IB^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{6a^2}{4} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = SB^2$$

$\Rightarrow$ SIB vuông $\Rightarrow SI \perp (ABC)$

Mặt khác: $BI \perp AC$ .Vậy $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SA$

Do đó (P) là mặt phẳng qua CJ và // BI

Trong mp(ABC) từ C vẽ đường thẳng song song với BI đường này cắt AB tại N.

Trong mp(SAB), NJ cắt SB tại M

Mặt cắt của (P) và hình chóp S.ABC là ΔJMC

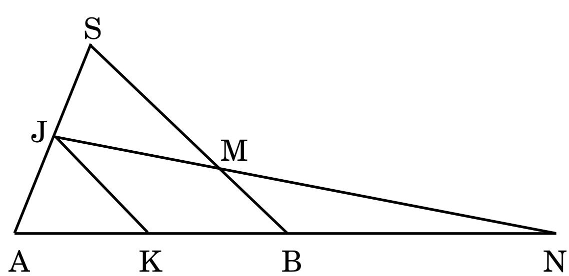
ΔABC có IB // CN và I trung điểm AC

nên B trung điểm AN

Gọi K trung điểm AB

thì JK // MB

$$\Rightarrow \frac{NB}{NK} = \frac{MB}{JK} = \frac{2}{3}$$



$$\Rightarrow \frac{MB}{SB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$$

Vậy $\dfrac{V_{S.JCM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SJ}{SA}.\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

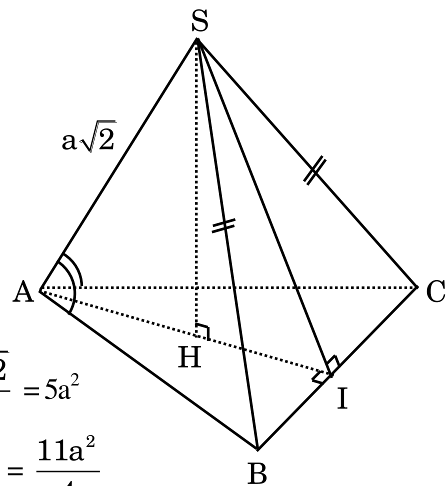
$$\Rightarrow V_{S.JCM} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{1}{9}.SI.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{9}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24}.$$

Bài 8. Cho tứ diện S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh 3a, $SAB = SAC = 45^o$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm BC, SH là đường cao của tứ diện.

a) Tính theo a thể tích khối S.ABC.

b) Tính khoảng cách từ I đến (SAB).

Giải



a) Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.g.c) $\Rightarrow SB = SC$

ΔABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$

ΔSBC cân $\Rightarrow SI \perp BC$

Vậy $BC \perp (SAI) \Rightarrow (ABC) \perp (SAI)$

Vẽ $SH \perp AI$ thì $SH \perp (ABC)$

$\Delta SAC \quad \Rightarrow SC^2 = SA^2 + AC^2 - 2SA.AC\cos 45^o$

$$\Rightarrow SC^2 = 2a^2 + 9a^2 - 2(a\sqrt{2})3a\frac{\sqrt{2}}{2} = 5a^2$$

$\Delta SIC \perp \quad \Rightarrow SI^2 = SC^2 - IC^2 = 5a^2 - \dfrac{9}{4}a^2 = \dfrac{11a^2}{4}$

$\Delta SAI \quad \Rightarrow SA^2 = AI^2 + SI^2 - 2AI.SI.\cos AIS$

$$\Rightarrow \cos AIS = \frac{AI^2 + SI^2 - SA^2}{2AI.SI} = \frac{\frac{27a^2}{4} + \frac{11a^2}{4} - 2a^2}{2\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)\frac{a\sqrt{11}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{33}}$$

$$\Rightarrow \sin AIS = \sqrt{1 - \frac{25}{33}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$$

$\Delta SHI \perp \Rightarrow \sin AIS = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow SH = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}.\dfrac{a\sqrt{11}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Do đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

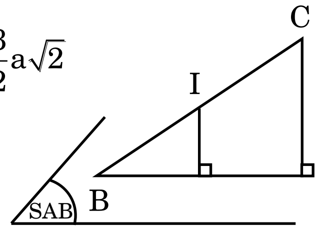
b) Ta có $d(I, (SAB)) = \frac{1}{2}d(C, (SAB))$

$$dt(\Delta SAB) = \frac{1}{2}SA.AB\sin 45^o = \frac{1}{2}(a\sqrt{2})(3a)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC} = V_{C.SAB} = \frac{1}{3}d(C,(SAB))dt(\Delta SAB)$

$$\Rightarrow d(C,(SAB) = \frac{3V}{dt(\Delta SAB)} = \frac{\frac{9a^3\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a^2}{2}} = \frac{3}{2}a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d(I, (SAB)) = \frac{3}{4}a\sqrt{2}.$$



Dạng 2: HÌNH CHÓP N GIÁC ĐỀU

Bài 1. (Đề dự bị ĐH khối B 2003) Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đáy ΔABC cạnh a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ $(0 < \varphi < 90^o)$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a và φ

Giải

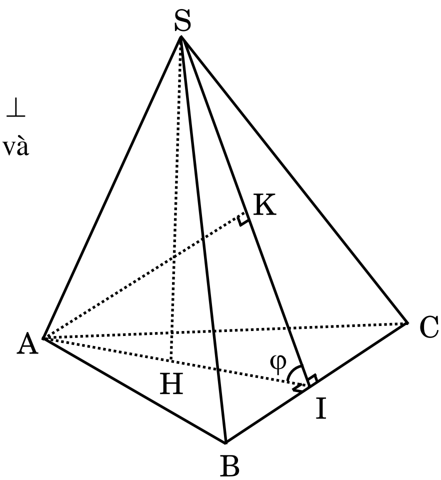
- Gọi I là trung điểm BC. Do ΔABC đều nên $AI \perp BC$

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC thì $SH \perp (ABC)$ và $SI \perp BC$ nên góc của (SBC) và (ABC) là $\widehat{SIA} = \varphi$

Ta có: $HI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Δ SHI vuông $\Rightarrow \tan\varphi = \frac{SH}{HI}$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi$$



Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}(\frac{a\sqrt{3}}{6}\tan\varphi)(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}) = \frac{a^3}{24}\tan\varphi$

Δ SHI vuông $\Rightarrow \cos\varphi = \frac{HI}{SI} \Rightarrow SI = \frac{HI}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}$

Vậy Dt(Δ SBC) = $\frac{1}{2}$SI.BC = $\frac{a^2\sqrt{3}}{12\cos\varphi}$

Vẽ AK $\perp$ mặt phẳng (SBC)

Ta có: $V_{S.ABC} = V_{A.SBC} = \frac{1}{3}AK.Dt(\Delta SBC) \Rightarrow AK = d\,(A,(SBC))$

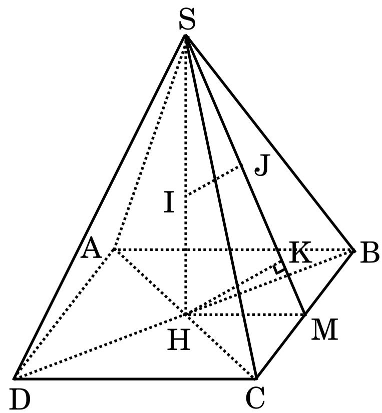
$$AK = d(A,(SBC)) = \frac{3V}{Dt(\Delta SBC)} = \frac{a^3\tan\varphi}{8}.\frac{12\cos\varphi}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$$

Bài 2. (Đề dự bị ĐH khối D 2006) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt phẳng (SBC) bằng b với a > 4b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và b.

Giải

Do $SH \perp (ABCD)$ nên H là tâm hình vuông ABCD.

Gọi M là trung điểm BC.



Ta có BC $\perp$ HM và SH nên BC $\perp$ (SHM)

Vẽ IJ và HK $\perp$ SM thì IJ $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow IJ = b$ và $HK = 2IJ = 2b$

ΔSHM vuông nên $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{4b^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^2 - 16b^2}{4a^2b^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{SH}{3}Dt(ABCD) = \frac{2}{3}.\frac{a^3b}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

Bài 3. (Tuyển sinh ĐH khối B 2004) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, góc của cạnh bên và mặt đáy $\varphi\,(0 < \varphi < 90^o)$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ và thể tích hình chóp theo a và φ.

Giải

Gọi O là tâm hình vuông ABCD

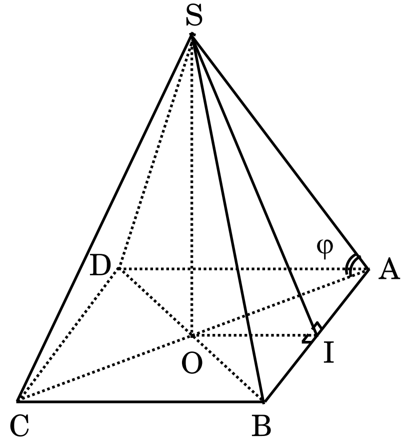
S.ABCD là chóp tứ giác đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vẽ OI $\perp$ BA thì SI $\perp$ BA

Vậy $\widehat{SIO}$ là góc của hai mặt phẳng (SBA) và (ABCD)

Hình chiếu $\perp$ của SA lên (ABCD) là OA

Vậy $\varphi = SAO$



Δ SOA vuông tại O $\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SO}{OA}$

$$\Rightarrow SO = OA.\tan\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$$

Δ SOI vuông tại O

$$\Rightarrow \tan SIO = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2}\tan\varphi.$$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.dt(ABCD) = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\varphi$

Dạng 3: **HÌNH CHÓP S.ABCD CÓ SA $\perp$ (ABCD)**

Bài 1. (Đề dự bị ĐH khối A 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, SA vuông góc đáy, SB tạo với mặt phẳng đáy góc 60^o. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM

Giải

Ta có: $SBA = 60^o \Rightarrow \tan 60^o = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$ và $SB = 2a$

Ta có mặt phẳng (BCM) chứa BC // mặt phẳng (SAD). Vậy mặt phẳng (BCM) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến MN // BC // AD.

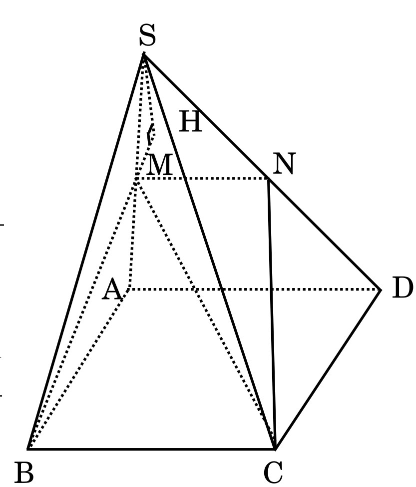
Mà M là trung điểm SA vậy N là trung điểm SD. $\Rightarrow MN = \dfrac{AD}{2} = a$

Ta có: BC $\perp$ AB và SA

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp MB$

Do đó BCNM là hình thang vuông.



Δ vuông BMA $\Rightarrow MB^2 = (\dfrac{a\sqrt{3}}{2})^2 + a^2 = \dfrac{7a^2}{4}$

Do đó: $Dt(BCNM) = \dfrac{MB}{2}(MN + BC)$

$$= \frac{a\sqrt{7}}{4}(a + 2a) = \frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$$

Trên mặt phẳng (SAB) vẽ

$SH \perp MB \qquad (1)$

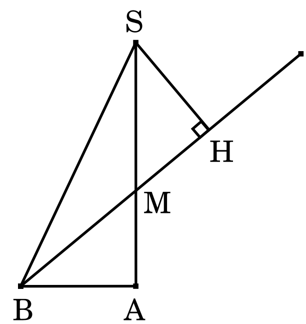
Ta có $BC \perp (SBA)$

$\Rightarrow BC \perp SH \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SH \perp mp(BCNM)$

Ta có: $\Delta HMS \sim \Delta AMB \Rightarrow \dfrac{MS}{MB} = \dfrac{SH}{AB}$

$$\Rightarrow SH = \frac{MS.AB}{MB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$



Do đó: $V_{S.MNBC} = \dfrac{1}{3}SH.Dt(BCNM)$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\frac{3a^2\sqrt{7}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

☞ ***Chú ý:*** Có thể dùng tỷ số thể tích

$$\frac{V_{S.BMC}}{V_{S.BAC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{4}$$

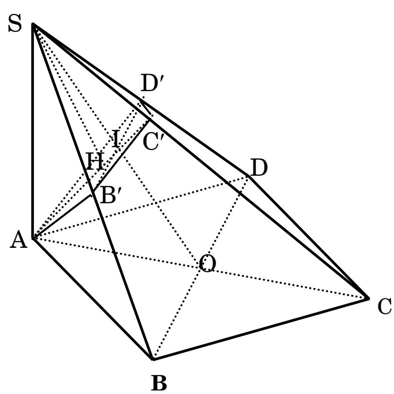
Vậy $\quad V_{S.MNCB} = V_{S.MBC} + V_{S.MNC}$

$$= \frac{1}{2}V_{S.ABC} + \frac{1}{4}V_{S.ACD} = \frac{3}{4}V_{S.ABC}$$

$$= \frac{3}{4}.\frac{1}{3}SA.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{4}a\sqrt{3}\frac{a}{2}(2a) = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 2. (Đề dự bị ĐH khối B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^o$, SA = a, SA vuông góc mặt phẳng (ABCD). Gọi C′ là trung điểm SC. Mặt phẳng (P) qua AC’ và song song BD cắt SB, SD tại B’,D’. Tính thể tích khối chóp S.AB’C’D’ theo a.

Giải



Gọi O là tâm hình thoi ABCD

Δ SAC có SO cắt AC’ tại I thì I là trọng tâm ΔSAC.

Mặt phẳng (P) chứa AC’ và song song BD nên (P) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến B’D’ qua I và B’D’ // BD

Ta có $BD \perp AC$ và SA

nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC’$

mà B'D' // BD $\Rightarrow$ B'D' $\perp$ AC'

Δ ABD cân tại A có $\widehat{BAD} = 60^o$ nên là Δ đều

$\Rightarrow$ BD = a và AC = $a\sqrt{3}$

Ta có I là trọng tâm Δ SAC và B'D' // BD nên: $\frac{B'D'}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}a$

Δ SAC vuông tại A có AC' là trung tuyến $\Rightarrow AC' = \frac{SC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$

Do đó Δ SAC' đều cạnh a.

Vẽ SH $\perp$ AC', do B'D' // BD có BD $\perp$ (SAC) nên B'D' $\perp$ SH

Vậy SH $\perp$ mặt phẳng (AB'C'D') và SH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó: $V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}SH.dt(AB'C'D') = \frac{1}{6}SH.AC'.B'D' = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}(a.\frac{2a}{3}) = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

☞ ***Chú ý:*** Có thể dung tỷ số thể tích

Do I là trọng tâm ΔACS nên $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

Ta có $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$\frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.BDC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{2}{9}$

Vậy $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'D'C'}$

$= \frac{4}{9}V_{S.ABD} + \frac{2}{9}V_{S.BDC} = \frac{2}{3}V_{S.ABD}$

$= \frac{2}{3}.\frac{1}{3}SA.dt(\Delta ABD) = \frac{2a}{9}.\frac{a^2 3}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Bài 3. (Đề dự bị Tuyển sinh ĐH khối B 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cho AB = a, SC = 2a. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Chứng minh SC vuông góc mặt phẳng: (AHK) và tính thể tích hình chóp O.AHK

Giải

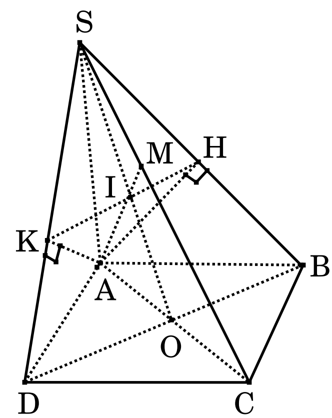
Ta có: $\Delta SAD = \Delta SAB \Rightarrow SH = SK$ và $SB = SD$

Vậy $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \ // \ BD$

Mà BD $\perp$ mặt phẳng (SAC)

$\Rightarrow$ HK $\perp$ mặt phẳng (SAC)

$\Rightarrow HK \perp SC$ (1)



Mặt khác: $CD \perp$ mặt phẳng (SAD)

$\Rightarrow CD \perp AK$

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD)$

$\Rightarrow SC \perp AK$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp$ mặt phẳng (AHK)

Trong mặt phẳng (SBD) thì SO cắt HK tại I

Trong mặt phẳng (SAC) thì AI cắt SC tại M

Ta có: $SC \perp$ mặt phẳng $(AHK) \Rightarrow SC \perp AM$

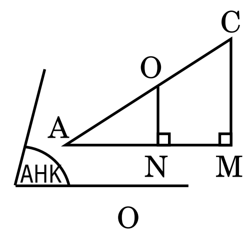
Mà Δ SAC vuông cân tại A nên M là trung điểm SC.

Vậy I là trọng tâm ΔSAC.

Ta có: $CM = d(C, mp(AHK)) = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$

Mà O là trung điểm AC nên $\dfrac{d(O,(AHK))}{d(C,(AHK))} = \dfrac{OA}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow h = d(O,(AHK)) = \frac{1}{2}CM = \frac{a}{2}$$



$$\text{Ta có: } HK \ // \ BD \Rightarrow \frac{HK}{BD} = \frac{SH}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$$

Ta có: $AI = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{SC}{2} = \dfrac{SC}{3} = \dfrac{2a}{3}$

ΔAHK cân $\Rightarrow HK \perp AI$

Ta có: $V_{O.AHK} = \dfrac{1}{3}h.dt(\Delta AHK) = \dfrac{h}{6}AI.HK = \dfrac{a}{12}(\dfrac{2a}{3})(\dfrac{2}{3}a\sqrt{2}) = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

Bài 4. (Tuyển sinh ĐH khối B 2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc mặt phẳng ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AD và SC, I là giao điểm của MB và AC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện A.NIB.

Giải

Δ AMB vuông tại A $\Rightarrow BM^2 = a^2 + (\dfrac{a\sqrt{2}}{2})^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

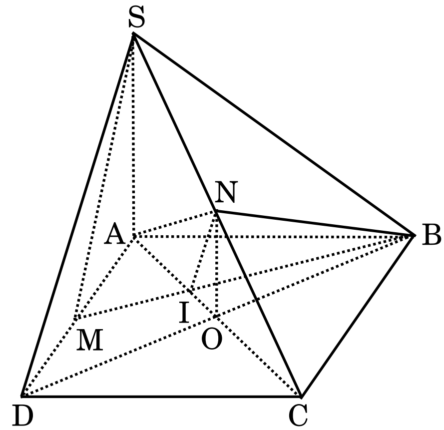
Ta có I là trọng tâm Δ ABD

Vậy $BI = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

và $AI = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{BD}{2} = \frac{BD}{3}$

$\Rightarrow AI = \frac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $AI^2 + IB^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2 = AB^2$



Vậy Δ AIB vuông tại I

Ta có: $BI \perp AI$ và SA $\Rightarrow BI \perp (SAC)$. Mà $BI \subset (SMB) \Rightarrow (SAC) \perp (SMB)$

Ta có: $V_{NAIB} = \frac{1}{3}NO.dt(\Delta AIB) = \frac{1}{3}.\frac{SA}{2}.\frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{12}.a.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD hình vuông SA vuông góc (ABCD). Gọi M, N, P lần lượt nằm trên SB, SC, SD sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}, \frac{SN}{SC} = \frac{3}{4}$. Mặt phẳng (MNK) chia khối chóp làm hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.

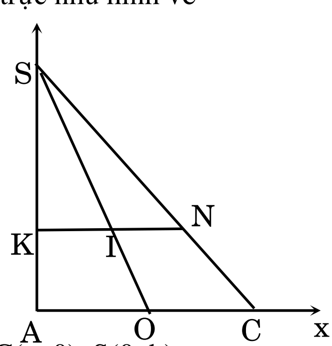
Giải

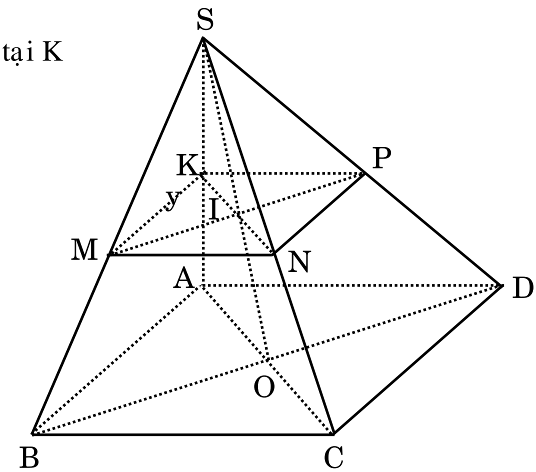
Gọi O là giao điểm AC và BD

Do $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} \Rightarrow MP \parallel BD$

Gọi I là giao điểm MP và SO cắt SA tại K

Gắn trục như hình vẽ





Gọi C(a, 0), S(0, b)

Do $\frac{SI}{SO} = \frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$ nên I là trọng tâm $\Delta SAC \Rightarrow I\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$

Ta có $\frac{SN}{SC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{SN} = 3\overrightarrow{SC} \Rightarrow \begin{cases} 4(x_N - 0) = 3a \\ 4(y_N - b) = -3b \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{3a}{4}, \frac{b}{4}\right)$

NI qua N có VTCP $\overrightarrow{NI} = -\frac{1}{12}(5a, -b)$

Phương trình NI: $\frac{x - \frac{a}{3}}{5a} = \frac{y - \frac{b}{3}}{-b} \Leftrightarrow bx + 5ay - 4ab = 0$

Vậy K là giao điểm NK và Ay $\Rightarrow K\left(0; \frac{4b}{5}\right)$

Do đó $\frac{SK}{SA} = \frac{1}{5}$

Ta có: $\frac{V_{S.MNPK}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.MKN}}{2V_{S.BAC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SA}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{5}.\frac{3}{4} = \frac{1}{10}$

Vậy tỷ số cần tìm là $\frac{1}{10}$.

Dạng 4: HÌNH CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY

Bài 1. (Tuyển sinh ĐH khối B 2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a. SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN và cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Giải

Ta có: $SB^2 + SA^2 = (a\sqrt{3})^2 + a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta$ SAB vuông tại S $\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$

Vậy Δ SMA đều cạnh a Vẽ $SH \perp AB$

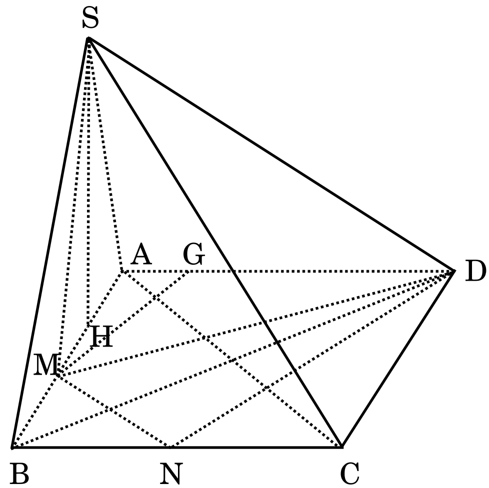
Do (SAB) $\perp$ (ABCD) Nên SH $\perp$ mặt phẳng (ABCD)

và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.Ta có: $BD \perp AC$ mà MN // AC nên $MN \perp BD$

Do đó: $dt(BMDN) = \frac{1}{2}MN.BD = \frac{1}{2}.\frac{AC}{2}.AC = \frac{AC^2}{4} = \frac{(2a\sqrt{2})^2}{4} = 2a^2$

Vậy $V_{S.BMDN} = \frac{1}{3}SH.dt(BMDN)$

$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$



Lấy G trên cạnh AD sao cho

$AG = \frac{AD}{4} = \frac{a}{2}$

Ta có: MG // DN // C'B.

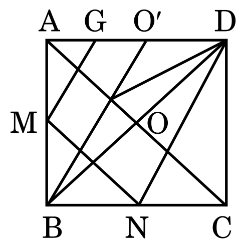
Vậy g(SM,DN) = SMG

Δ SAG vuông tại A

$\Rightarrow SG^2 = SA^2 + AG^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Δ AMG vuông tại A

$\Rightarrow MG^2 = AG^2 + AM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$



Δ SMG $\Rightarrow SG^2 = MS^2 + MG^2 - 2MS.MG\cos SMG$

$\Rightarrow \cos SMG = \frac{MS^2}{2MS.MG} = \frac{MS}{2MG} = \frac{a}{2\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài 2. (Tuyển sinh ĐH khối A 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD vuông cạnh a, SAD là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC và CD. Chứng minh AM vuông góc BP và tính V_{CMNP}.

Giải

• Gọi H là trung điểm AD. Do Δ SAD đều nên SH $\perp$ AD

Mà mặt phẳng (SAD) $\perp$ mặt phẳng (ABCD)

$\Rightarrow$ SH $\perp$ mặt phẳng (ABCD)

$\Rightarrow$ SH $\perp$ BP (1)

Ta có: $\Delta HDC = \Delta BPC \Rightarrow DCH = CBP$

Mà: $\Rightarrow CD \perp BD \Rightarrow BP \perp CH$ (góc có cạnh $\perp$)(2)

Từ (1),(2) ⇒ BP ⊥ mặt phẳng (SHC)

Ta có: MN // SC và AN // HC

⇒ mặt phẳng (SHC) // mặt phẳng (AMN)

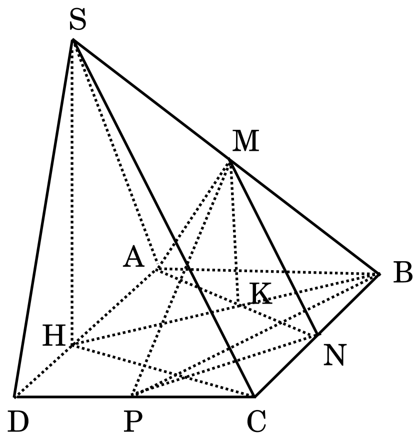
Do đó: BP ⊥ mặt phẳng (AMN) ⇒ BP ⊥ AM

Vẽ MK // SH với K ∈ mặt phẳng (ABCD)

Mà SH ⊥ mặt phẳng (ABCD)

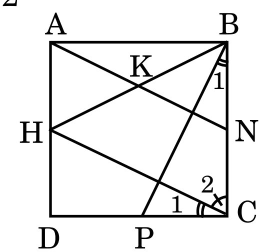
nên MK ⊥ mặt phẳng (ABCD).

Do đó MK là đường cao của tứ diện M.CNP



Ta có: $V_{C.MNP} = V_{M.CNP} = \frac{1}{3}MK.dt(\Delta CNP) = \frac{1}{3}(\frac{SH}{2}).\frac{1}{2}CN.CP$

$$= \frac{1}{12}(\frac{a\sqrt{3}}{2}).\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$



Dạng 5: **CHÓP S.ABCD CÓ SH ⊥ (ABCD)**

Bài 1. (Tuyển sinh ĐH khối D/2010): Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) là H trên đoạn AC với $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của ΔSAC. Chứng minh M là trung điểm SA. Tính thể tích khối S.MBC theo a.

Giải

ΔSHA vuông $\Rightarrow SH^2 = SA^2 - AH^2 = SA^2 - \frac{AC^2}{16} = a^2 - \frac{(a\sqrt{2})^2}{16} = \frac{14a^2}{16}$

$\Delta SHC \perp \Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2$

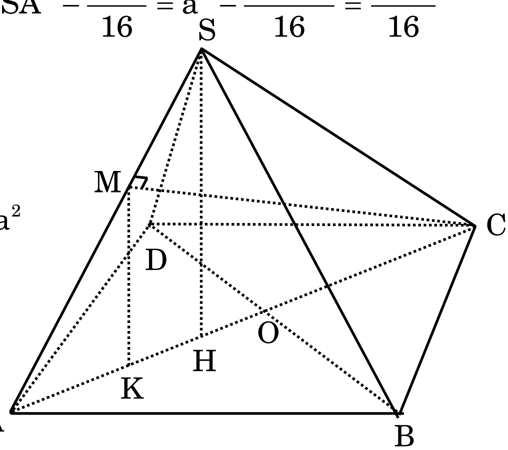
$$= SH^2 + (\frac{3AC}{4})^2$$

$$= \frac{14a^2}{16} + \frac{9(a\sqrt{2})^2}{16} = 2a^2$$

Do SC = AC = $a\sqrt{2}$ nên ΔSAC cân tại C

⇒ M trung điểm SA.

⇒ Vẽ MK ⊥ AC. Ta có $MK = \frac{1}{2}SH$



Ta có: $V_{S.MBC} + V_{M.ABC} = V_{S.ABC}$

Mà $V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}MK.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.SH.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC}$

Vậy $V_{S.MBC} = \dfrac{1}{2}.V_{S.ABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.SH.dt(\Delta ABC) = \dfrac{1}{6}\dfrac{a\sqrt{14}}{4}\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$

Lưu ý: Có thể dùng

$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{4}}{48}$$

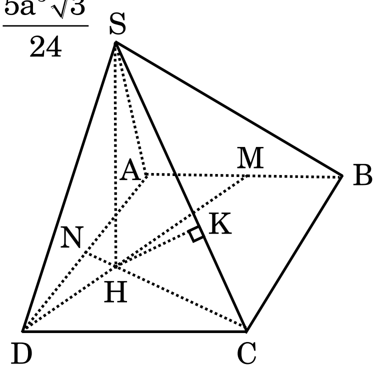
Bài 2. (Tuyển sinh ĐH khối A/2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N là trung điểm AB và AD, H là giao điểm CN và DM. Biết SH vuông góc mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDMN và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC

Giải

• Ta có $dt(CDNM) = dt(ABCD) - dt(\Delta AMN) - dt(\Delta MBC)$

$$= a^2 - \frac{1}{2}(\frac{a}{2})(\frac{a}{2}) - \frac{1}{2}(a)(\frac{a}{2}) = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.CDMN} = \frac{1}{3}SHdt(CDMN) = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$$



Ta có: $\Delta NDC = \Delta MAD \Rightarrow NCD = ADM$

Mà $AD \perp DC \Rightarrow \Delta HDC \perp$ tại H (góc có cạnh $\perp$)

Vậy $CN \perp DM$

Ta có: $\Delta NDC \perp \Rightarrow CD^2 = CH.CN$

$$\Rightarrow HC = \frac{CD^2}{NC} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

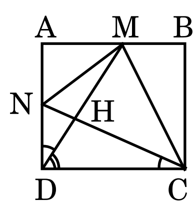
Vẽ $HK \perp SC$ (1). Ta có: $DM \perp SH$ và $CN \Rightarrow DM \perp (SHC)$

$\Rightarrow DM \perp HK$ (2). Vậy $HK = d(SC,DM)$

Δ vuông SHC $\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HC^2}$

$$= \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}$$

$$\Rightarrow HK = d(SC,DM) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

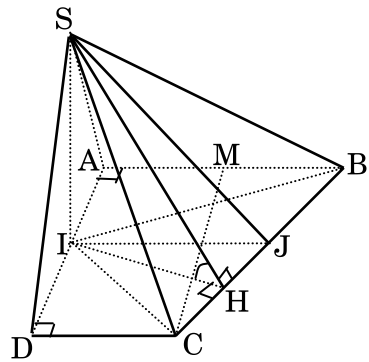


Bài 3. (Tuyển sinh Đại học khối A/2009): Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD = a. Góc của hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là 60^o. Gọi I là trung điểm AD. Hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải

Do hai mặt phẳng (SIB) và (SIC) vuông góc mp (ABCD) nên giao tuyến SI $\perp$ (ABCD).

Vẽ IH $\perp$ BC thì SH $\perp$ BC. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là $SHI = 60^o$. Gọi J trung điểm BC.



Vẽ CM $\perp$ AD. Ta có: $\Delta IHJ \sim \Delta CMB$

$$\Rightarrow \frac{IH}{MC} = \frac{IJ}{CB} \Rightarrow IH = \frac{IJ.MC}{BC} = \frac{2a.\frac{3a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta SHI \perp \Rightarrow \tan 60^o = \frac{SI}{IH} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SI = \frac{3a}{\sqrt{5}}.\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Ta có: $dt(ABCD) = \frac{AD}{2}(CD + AB) = \frac{2a}{2}(a + 2a) = 3a^2$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI \text{ x } dt(ABCD)$

$$= \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có đáy tam giác ABC cạnh a, cạnh bên 2a. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh SA vuông góc BC. Tính $V_{S.ABI}$

BT2: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc (ABC) $BAC = 120^0$, ΔSBC đều cạnh a. Tính $V_{S.ABC}$.

BT3. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác ABC vuông tại B, SA vuông góc đáy . Biết SA= AB = BC = a. Tính V_{SABC}.

BT4. CDA/2011 Chóp S.ABC có $\Delta ABC \perp$ cân tại B AB = a, SA $\perp$ (ABC). Góc hai mp(SBC) và (ABC) là 60^o.

Gọi M trung điểm SC. Tính $V_{S.ABM}$.

BT5. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A, AB = AC = a. Mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Hai mặt bên còn lại hợp với đáy góc 60^0. Hãy tính thể tích khối chop S.ABC.

BT6. (CĐ/09) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P là trung điểm SA, SB, CD. Chứng minh MN vuông góc SP. Tính V_{AMNP}.

BT7. (DBA08) Cho S.ABC là hình chóp có mỗi mặt bên là các tam giác vuông, SA = SB =SC = a. Gọi M, N, E là trung điểm AB, AC, BC. D là điểm đối xứng của S qua E. I là giao điểm của SD và mặt phẳng (SMN). Chứng minh AI $\perp$ SI. Tính V_{MBSI} .

BT8. (DB/B08) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA = $a\sqrt{3}$, SA $\perp$ (ABCD) . Tính $V_{S.ACD}$ và cos(SB,AC)

BT9. DB/B08 Cho tứ diện ABCD có ΔABC và ΔABD đều cạnh a. Mặt phẳng (ACD) $\perp$ mặt phẳng (BCD). Tính V_{ABCD} và góc của AD và BC.

BT10. Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = 3a, $\Delta ABC \perp$ tại B, AB = a, BC = 2a. Tính d(A',(SBC))

BT11. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B. Biết SA vuông góc mặt phẳng (ABC), AB = a, BC = $a\sqrt{3}$, SA = a. Mặt phẳng (α) qua A, vuông góc SC tại H, cắt SB tại K. Tính thể tích khối chóp S.AHK theo a.

BT12. (D2006) Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM.

BT13. (DB/D08) Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại O lấy điểm S sao cho SO = $R\sqrt{3}$. Lấy M di động trên đường tròn . Gọi H là trung điểm SM. Tìm M trên đường tròn (O, R) sao cho hình chóp H.AMP có thể tích lớn nhất.

BT14. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy a, ΔSAC đều. Mặt phẳng (α) qua và vuông góc SC tại N cắt SB, SD tại M, K. Tính $V_{S.AMNK}$

BT15. (DB/D08) Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại B, AB = a, SA = 2a, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng qua A và $\perp$ SC cắt SB, SC tại H,K. Tính $V_{S.AHK}$

BT16. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC cân tại B, AC = a, $\widehat{ABC} = 120^0$, SA = SB = SC. Góc của SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính $V_{S.ABC}$

BT17. Cho hình chóp S.ABCD có SA = SB =SD = AB = BC = CD = a, $V_{SABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Tính SC.

BT18. (DB/A07) Cho hình chóp S.ABC có góc của 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60^0, ΔABC và ΔSBC là tam giác đều cạnh a. Tính d(B,SAC)

BT19. (CĐ08) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^0$, AB = BC = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD), SA = 2a. Gọi M, N trung điểm SA SD. Chứng minh BCMN là hình chữ nhật. Tính $V_{S.BCMN}$.

BT20. (CĐ/2010) Cho hình chóp S.ABCD có ABCD vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) $\perp$ mặt phẳng (ABCD), SA = SB, góc SC và (ABCD) là 45^0. Tính $V_{S.ABCD}$

BT21. Cho hình chóp S. ABCD có dạng ΔABC đều cạnh 3a, SA = $A\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Gọi I là trung điểm BC và SH là đường cao hình chóp S.ABCD

a. Chứng minh H nằm trên AI. Tính thể tích S.ABCD

b. Tính khoảng cách từ I đến mp SAB

BT22. Cho khối hình chóp S.ABCD có dạng ΔABC vuông tại $\widehat{ACB} = 30^o$ và SA = SB = SC = BC = 2a.

Tính thể tích S. ABC và khoảng cách từ B đến mp (SAC)

BT23. Cho khối hình chóp S. ABCD có đáy ABCD vuông cạnh a. SA $\perp$ mp (ABCD) và SA = a. Gọi E là trung điểm của CD. Tính thể tích S. ABCD và có khoảng cách từ S đến

BT24. Cho tứ diện ABCD có ΔABC vuông tại A, AB = a, AC = $A\sqrt{3}$ BDC vuông, DA = DB = DC. Gọi φ là góc của BC và mp (ACD).

Tính thể tích ABCD và sinφ.

VẤN ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

$\boxed{\mathbf{V = Bh}}$

B: diện tích đáy

h: chiều cao

Dạng 1: **LĂNG TRỤ ĐỨNG ĐÁY LÀ TAM GIÁC**

Bài 1. Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối A 2007: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120^0$. Gọi M là trung điểm CC'. Chứng minh MB vuông góc MA'. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BM).

Giải

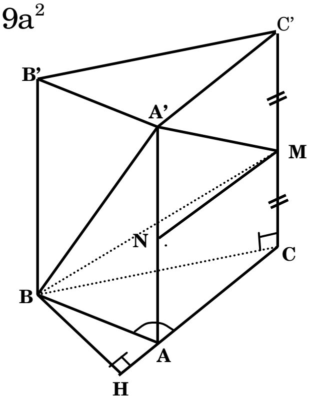
$\Delta ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^o$

$$\Rightarrow BC^2 = a^2 + 4a^2 - 2a2a\left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

ΔBCM vuông $\Rightarrow BM^2 = BC^2 + MC^2 = 7a^2 + 5a^2 = 12a^2$

$\Delta A'B'B$ vuông $\Rightarrow A'B^2 = A'B'^2 + BB'^2 = a^2 + 20a^2 = 21a^2$

$\Delta A'MC'$ vuông $\Rightarrow A'M^2 = A'C'^2 + MC'^2 = 4a^2 + 5a^2 = 9a^2$



Ta có: $A'B^2 = A'M^2 + BM^2 = 21a^2$

Nên $\Delta BMA'$ vuông tại M $\Rightarrow MB \perp MA'$

Vẽ $BH \perp AC$

Ta có $BH \perp AC$ và $BH \perp AA'$ nên $BH \perp mp(AMA')$

ΔBHA vuông $\Rightarrow \sin 60^o = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi N là trung điểm AA' $\Rightarrow MN \perp AA'$

Vậy $dt(\Delta MAA') = \dfrac{1}{2}MN.AA' = \dfrac{1}{2}.2a.2a\sqrt{5} = 2a^2\sqrt{5}$

Do đó: $V_{B.AMA'} = \dfrac{1}{3}BH.dt(\Delta MAA') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}a^2\sqrt{5} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMA')

Ta có: $V_{A.BMA'} = V_{B.AMA'} = \dfrac{1}{3}h.dt(BMA')$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{B.AMM'}}{dt(\Delta BMA')} = \frac{a^3\sqrt{15}}{\frac{1}{2}BM.MA'} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{(2a\sqrt{3})3a} = \frac{a}{3}\sqrt{5}.$$

Bài 2. (Đề dự bị ĐH khối B/07) Cho lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy là tam giác vuông AB = AC = a, AA’ = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N là trung điểm AA’ và BC’. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA’ và BC’. Tính thể tích khối chóp M. A’BC’.

Giải

Gọi I, I’ lần lượt là trung điểm BC, B’C’

$\Delta ABC \perp$ cân tại A $\Rightarrow AI \perp BC$ (1)

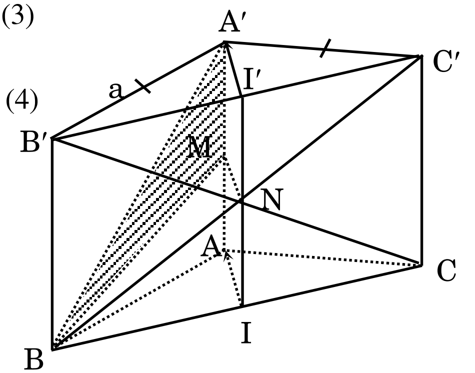
Mà $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AI$ (2)

Từ (1)&(2) $\Rightarrow AI \perp (BB'C'C') \Rightarrow AI \perp BC'$

Mặt khác: $MN \,//\, AI \Rightarrow MN \perp BC'$ (3)

$AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AI$

Mà $MN \,//\, AI \Rightarrow MN \perp AA'$ (4)



Từ (3) và (4) MN là đường vuông góc chung của AA’ và BC’

. Ta có $A'C' \perp A'B'$ và AA'

$\Rightarrow A'C' \perp (A'B'BA)$

Vậy $V_{C'.A'MB} = \frac{1}{3}A'C'dt(\Delta BA'M)$

$= \frac{1}{3}A'C'.\frac{1}{2}A'B'.A'M = \frac{1}{6}.a.a.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

Bài 3. (Tuyển sinh ĐH khối D/09) Cho lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có tam giác ABC vuông tại B. AB = a, AA’ = 2a, A’C = 3a. Gọi M trung điểm A’C’, I là giao điểm AM và A’C. Tính thể tích khối chop I.ABC và khoảng cách từ A đến mp (IBC)

Giải

Ta có: $\Delta A'AC \perp \Rightarrow AC^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2$

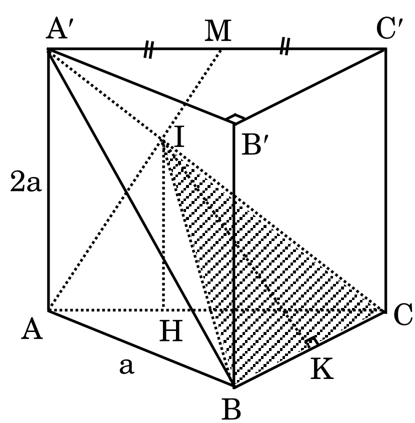
$\Delta ABC \perp \Rightarrow BC^2 = 5a^2 - a^2 = 4a^2$

Do $A'M \,//\, AC \Rightarrow \frac{IA'}{IC} = \frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2}$

Trong mp (A’AC) vẽ IH // AA’

thì $IH \perp (ABC)$

Ta có: $\frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$



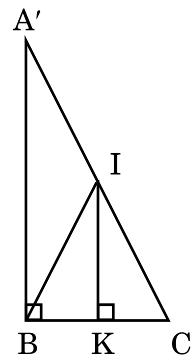
$$\Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}(2a) = \frac{4a}{3}$$

Vậy $$V_{I.ABC} = \frac{1}{3}IH.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3}\frac{4a}{3}\frac{1}{2}BA.BC = \frac{4a}{9.2}a.a = \frac{4a^3}{9}$$

Ta có: $BC \perp BA$ và BB'

$$\Rightarrow BC \perp (ABB'A') \qquad \Rightarrow BC \perp BA'$$

Vẽ $IK \perp BC$



Do IK // BA’ nên $\frac{IK}{BA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow IK = \frac{2}{3}BA' = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

Ta có: $V_{I.ABC} = V_{A.IBC} = \frac{1}{3}d(A,(IBC)).dt(\Delta IBC)$

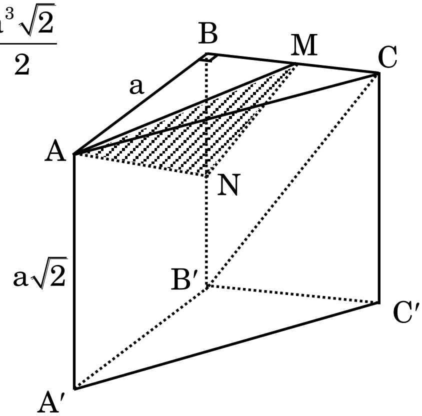
$$= \frac{1}{6}d(A,(IBC)).IK.BC$$

$$\Rightarrow d(A,IBC) = \frac{6V}{IK.BC} = \frac{6.\frac{4a^3}{9}}{\frac{2a\sqrt{5}}{3}.2a} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Bài 4. (Tuyển sinh ĐH khối D/08) Cho lăng trụ đứng ABC.A’B’C’ có đáy tam giác ABC vuông cân tại B với BA = BC = a, AA’ = a$\sqrt{2}$. Gọi M trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A’B’C’ và khoảng cách của hai đường thẳng AM và B’C theo a.

Giải

Ta có: $V_{LT} = AA'.dt(\Delta ABC) = a\sqrt{2}(\frac{a^2}{2}) = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$



Gọi N trung điểm BB’.

Ta có: MN // B’C $\Rightarrow B'C$ // (AMN)

Vậy d(AM,B’C) = d(B’C,(AMN))

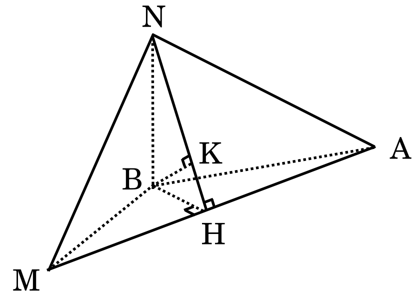
= d(C,(AMN))

Mặt khác:

BC cắt mp (AMN) tại M

Ta có: $\frac{d(C,AMN)}{d(B,AMN)} = \frac{MC}{MB} = 1$

Vẽ $BH \perp AM$ và $BK \perp NH$ (1)



Ta có: $AM \perp (BNH) \Rightarrow AM \perp BK$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow BK \perp (AMN)$

Ta có $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BN^2} + \dfrac{1}{BH^2}$

$$= \frac{1}{BN^2} + \left(\frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} \quad = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{7}{a^2}$$

Do đó $BK = d(AM, B'C) = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$

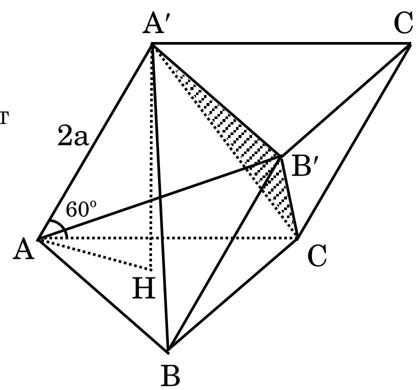
Dạng 2: LĂNG TRỤ XIÊN ĐÁY TAM GIÁC

Bài 1. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có ΔABC đều cạnh a, AA' = 2a và AA' tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^o. Tính $V_{A.CA'B'}$

Giải

Vẽ $A'H \perp mp(ABC) \Rightarrow A'AH = 60^o$

$$\Rightarrow \sin 60^o = \frac{A'H}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$



Ta có: $V_{A.CA'B'} + V_{B'.ABC} + V_{C.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'} = V_{LT}$

Mà $\quad V_{B'.ABC} = V_{C.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{LT}$

$$\Rightarrow \quad V_{A.CA'B'} = \frac{1}{3}V_{LT}$$

$$= \frac{1}{3}.A'H.dt(\Delta ABC) = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$$

Bài 2. (Đề dự bị ĐH khối B 2006)

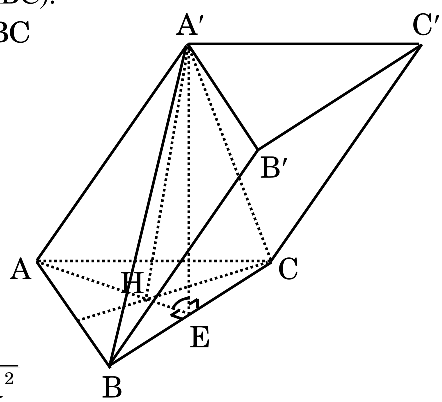
Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có A’.ABC là hình chóp tam giác đều, AB = a, AA’ = b. Gọi α là góc của hai mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (A’BC). Tính $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp A’.BB’C’C theo a và b.

Giải

Do A’.ABC là hình chóp tam giác đều.

Gọi H là tâm của Δ ABC thì A’H $\perp$ mặt phẳng (ABC).

Gọi E là trung điểm BC thì BC $\perp$ AE $\Rightarrow A'E \perp BC$



Do đó: $AEA' = \alpha$

$\Delta A'AH$ vuông $\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2$

$$\Rightarrow A'H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}$$

Ta có: $HE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\tan\alpha = \frac{A'H}{HE} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}{\frac{1}{6}a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$$

Ta có: $V_{A'BB'CC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC}$

$$= A'H.dt(\Delta ABC) - \frac{A'H}{3}dt(\Delta ABC) = \frac{2}{3}A'H.dt(\Delta ABC)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}.$$

Bài 3. Tuyển sinh ĐH A/2008

Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có đáy ΔABC vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$, AA’ = 2a. Hình chiếu vuông góc của A’ lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích khối tứ diện A’ABC và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AA’, B’C’.

Giải

- Gọi H là trung điểm BC

Ta có A’H $\perp$ mặt phẳng (ABC)

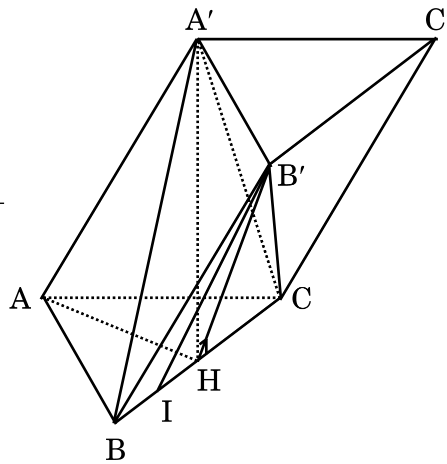
và $AH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$

$\Delta AHA'$ vuông

$\Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

Vậy: $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}A'H.dt(\Delta ABC)$

$$V = \frac{1}{6}A'H.AB.AC = \frac{1}{6}(a\sqrt{3})(a^2\sqrt{3}) = \frac{a^3}{2}$$



• Gọi φ là góc giữa AA’ và B’C’:

Ta có: AA’ // BB’ và B’C’ // BC nên $\varphi = \widehat{B'BC}$

$\Delta A'B'H$ vuông $\Rightarrow HB'^2 = A'B'^2 + A'H^2 = 4a^2$

Ta có: B’B = B’H = 2a nên Δ BB’H cân tại B’.

Gọi I là trung điểm BH thì $B'I \perp BH$

Δ B’IB vuông $\Rightarrow \cos\varphi = \cos\widehat{B'BI} = \dfrac{IB}{BB'} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{2a} = \dfrac{1}{4}$.

Bài 4. (Tuyển sinh ĐH khối B/2009)

Cho lăng trụ ABC.A’B’C’ có BB’ = a. Góc của BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o, tam giác ABC vuông tại C, góc BAC = 60^o. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích khối A'.ABC

Giải

Ta có $B'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{B'BG} = 60^o$

Đặt: AC = x,

Gọi I trung điểm BC

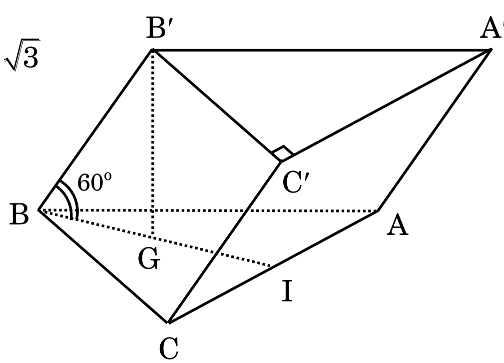
$\Delta ABC \perp \Rightarrow \tan 60^o = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3}x$

$\Delta BIC \perp \Rightarrow BI^2 = 3x^2 + \dfrac{x^2}{4}$

$= \dfrac{13x^2}{4}$

$\Rightarrow BG = \dfrac{2}{3}BI = \dfrac{x\sqrt{13}}{3}$



$\Delta B'BG \perp \Rightarrow \cos 60^o = \dfrac{BG}{BB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow BB' = 2BG$

$$\Rightarrow a = \frac{2x\sqrt{13}}{3} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}}$$

$$\Delta B'BG \perp \Rightarrow B'G^2 = B'B^2 - BG^2 = a^2 - \frac{13x^2}{9}$$

$$\Rightarrow B'G^2 = a^2 - \frac{13}{9}.\frac{9a^2}{4.13} = \frac{3a^2}{4}$$

Ta có: A'B' // (ABC) $\Rightarrow d(A',ABC) = D(B',ABC)$

Do đó: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}B'G.dt(\Delta ABC)$

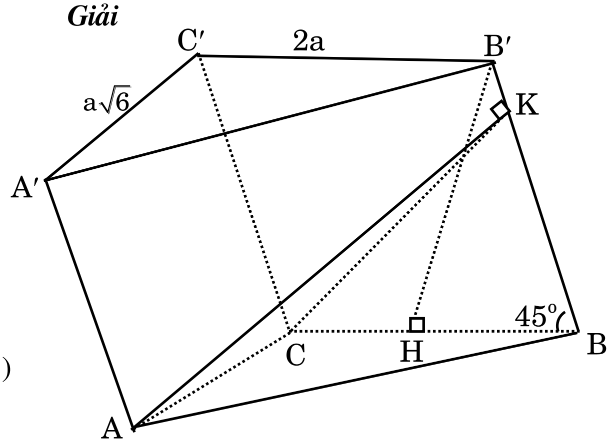
$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.x.x.\sqrt{3} = \frac{1}{12}.3ax^2 = \frac{1}{4}a\frac{9a^2}{4.13} = \frac{9a^3}{208}.$$

Bài 5. Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy ΔABC vuông tại C, BC = 2a, AC = $a\sqrt{6}$, hình chiếu vuông góc của B′ lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC, góc của BB′ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

a) Tính thể tích khối lăng trụ.

b) Tính góc của hai mặt phẳng (ABB′A′) và (CBB′C′).

Giải



a) Gọi H là trung điểm BC

Ta có: $B'H \perp (ABC)$

và $\widehat{B'BH} = 45^o$

$\Delta B'BH \perp$ cân tại H

$\Rightarrow HB' = a, BB' = a\sqrt{2}$

Vậy $V_{LT} = B'H\ dt(\Delta ABC)$

$$= a \times \frac{1}{2}(2a)(a\sqrt{6})$$

$$= a^3\sqrt{6}$$

b) Vẽ $AK \perp BB'$ Do $AC \perp (CC'B'B)$ nên $CK \perp BB'$

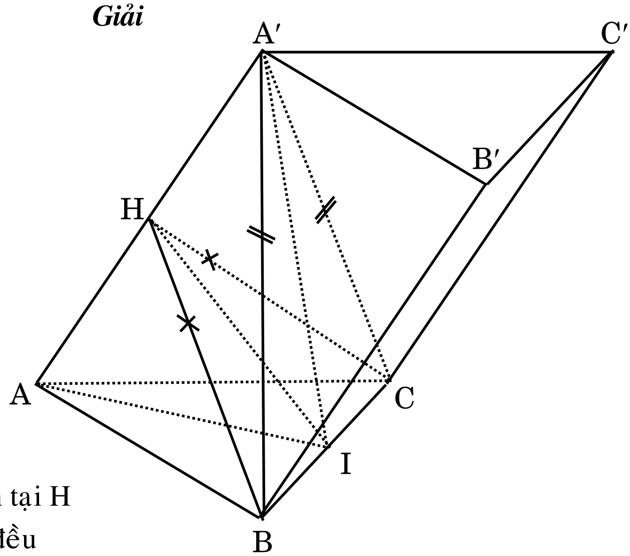
Vậy $\widehat{AKC}$ là góc của hai mp(ABB′A′) và (CBB′C′)

$\Delta CKB \perp$ cân có BC = a nên $CK = KB = \frac{2a}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

$\Delta ACK \perp$ tại C $\Rightarrow \tan\widehat{AKC} = \frac{AC}{CK} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AKC} = \frac{\pi}{3}$.

Bài 6. Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của A′ lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC, AA′ = 2a. Hai mặt bên có cạnh chung AA′ vuông góc nhau. Tính thể tích khối lăng trụ theo a.

Giải



Vẽ $BH \perp AA'$

Do $(AA'BB') \perp (AA'CC')$

$\Rightarrow BH \perp (CAA'C')$

$\Rightarrow BH \perp CH$ (1)

Gọi I là trung điểm BC

Ta có $A'I \perp (ABC)$

Mà IB = IC nên A′B = A′C

Ta có $BC \perp AI$ và $A'I$

Nên $BC \perp (A'AI)$

$\Rightarrow BC \perp HI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta HBC \perp$ cân tại H

Đặt x bằng cạnh của ΔABC đều

Thì $AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ và $HI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{x}{2}$

Ta có: $\Delta A'AI \perp$ tại $I \Rightarrow A'I^2 = AA'^2 - AI^2 = 4a^2 - \dfrac{3x^2}{4}$

Ta có: $\Delta BHA' = \Delta CHA' \Rightarrow CHA' = BHA' = 1v$

$AA' \perp BC$ và $CH \Rightarrow AA' \perp (BHC) \Rightarrow AA' \perp HC$

Do đó: $Dt(\Delta \perp A'IA) = \dfrac{1}{2}A'I.AI = \dfrac{1}{2}IH.AA'$

$$\Rightarrow \sqrt{4a^2 - \frac{3x^2}{4}}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2}.2a \Rightarrow \left(4a^2 - \frac{3x^2}{4}\right)3 = 4a^2$$

$$\Rightarrow 8a^2 = \frac{9x^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{32a^2}{9}$$

Vậy: $V_{CT} = A'I.dt(\Delta ABC)$

$$= \sqrt{\left(4a^2 - \frac{3x^2}{4}\right)}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{(4a^2 - \frac{8}{3}a^2)}\frac{8a^2\sqrt{3}}{9}$$

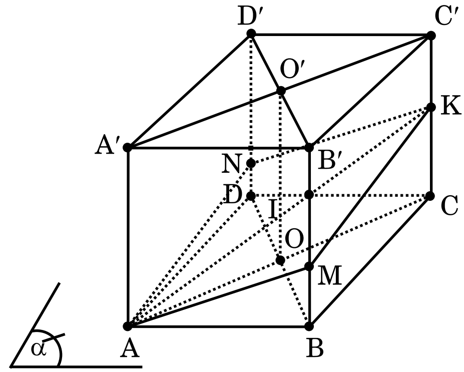
$$= \frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{8a^2\sqrt{3}}{9} = \frac{16a^3}{9}.$$

Dạng 3: HÌNH HỘP ĐỨNG

Bài 1. (Đề dự bị tuyển sinh ĐH khối D/2006)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Lấy K trên cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, K và song song BD, (α) chia khối lập phương làm hai khối đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện đó theo a.

Giải



Gọi O và O' là tâm hai hình vuông ABCD và A'B'C'D'. AK cắt OO' tại I.

Δ ACK có OI là đường trung bình nên $OI = \frac{CK}{2} = \frac{a}{3}$

Mặt phẳng (α) // BD vậy (α) cắt mặt phẳng (DBB'D') theo giao tuyến MN qua I và song song BD.

Ta có: $BD \perp AC$ và AA'

nên $BD \perp mp(AA'C'C') \Rightarrow BD \perp AK$

Mà MN // BD $\Rightarrow MN \perp AK$

Mặc khác I là trung điểm MN và AK nên ANKM là hình thoi. Ta có:

$$V_1 = V_{AMKN.ABCD} = 2V_{AMK.ABC} = 2V_{A.MKCB}$$

$$= \frac{2}{3}AB.dt(MKCB) = \frac{2AB}{3}.\frac{BC}{2}(MB + KC)$$

$$= \frac{a^2}{3}\left(\frac{a}{3} + \frac{2a}{3}\right) = \frac{a^2}{3}$$

Vậy $V_2 = V_{AMKN.A'B'C'D} = V_{ABCD.A'B'C'D} - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$.

Bài 2. (Đề dự bị ĐH khối A 2006) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có $AB = AD = a$, $BAD = 60^o$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của A'D' và A'B'.

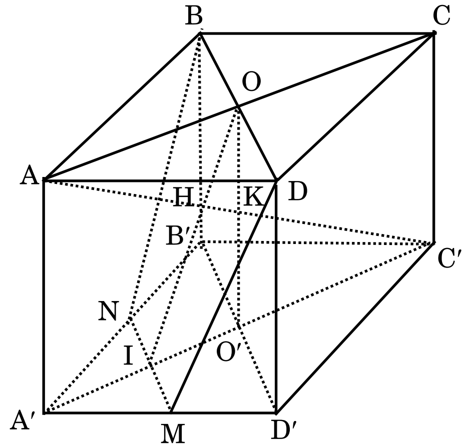
a. Chứng minh AC' vuông góc mặt phẳng (BDMN).

b. Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

Giải

a/ ΔABD đều nên $AC \perp BD$

Mà: $AA' \perp BD$ nên $BD \perp$ mặt phẳng (AA'CC') $\Rightarrow BD \perp AC'$ (1)



Gọi O và O' là tâm hai hình thoi ABCD và A'B'C'D'. Gọi I là trung điểm MN.

Ta có: $OA = AA' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

nên AOA'O' là hình vuông

Do đó: $AC' \perp OI$ tại H (2)

Từ (1), (2) ta có: $AC' \perp$ mặt phẳng (BDMN)

b/ Δ OAK vuông $\Rightarrow OA^2 = AH.AK$

$$\Rightarrow AH = \frac{OA^2}{AK} = \frac{\dfrac{3a^2}{4}}{\sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{16}}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}$$

Ta có: BD $\perp$ mặt phẳng (AA'CC') $\Rightarrow BD \perp OI$

$$\Delta OAK = \Delta OIO' \Rightarrow OI = AK = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Do đó: $V_{A.BDMN} = \dfrac{1}{3}AH.dt(BDMN) = \dfrac{1}{3}AH.\dfrac{IO}{2}(BD + MN)$

$$= \frac{1}{6}AH.IO.\frac{3}{2}BD = \frac{1}{4}.\frac{3a}{\sqrt{15}}.\frac{a\sqrt{15}}{4}.a = \frac{3a^3}{16}$$

Dạng 4: HÌNH HỘP XIÊN

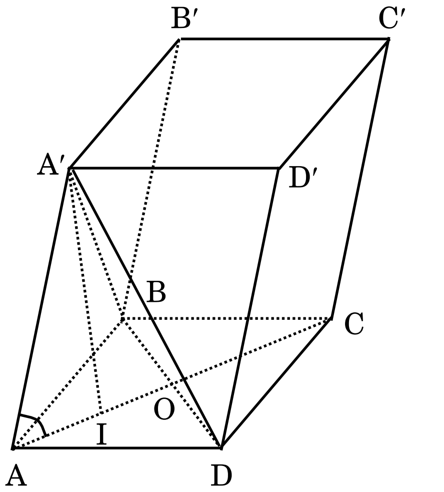
Bài 1. Cho hình hộp xiên ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^o$ A′A = A′B = A′D, cạnh bên tạo đáy (ABCD) góc α. Tính thể tích khối hộp ABCD.A′B′C′D′ theo a và α.

Giải

Gọi I là tâm của Δ đều ABD ta có IA = IB = ID

Mặt khác: A′A = A′B = A′D

Vậy AI′ là trục đường tròn (ABD)



$\Rightarrow A'I \perp (ABCD)$

Do đó: góc của AA′ và đáy (ABCD)

là $A'AI = \alpha$

Ta có $AI = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta A'AI \perp \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{A'I}{AI}$

$\Rightarrow A'I = AI\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha$

và $S = dt(ABCD) = 2dt(\Delta ABD)$

$= 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Do đó $V_{LT} = Bh = A'I\ dt(ABCD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\tan\alpha.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{2}\tan\alpha.$

Bài 2. Tuyển sinh ĐH khối B/2011

Cho lăng trụ ABCD.A’B’C’D’ có ABCD là hình chữ nhật AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A’ lên mp(ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc của hai mp(ADD’A’) và mp(ABCD) bằng 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A’B’C’D’ và khoảng cách từ B’ đến mp(A’BD’).

Giải

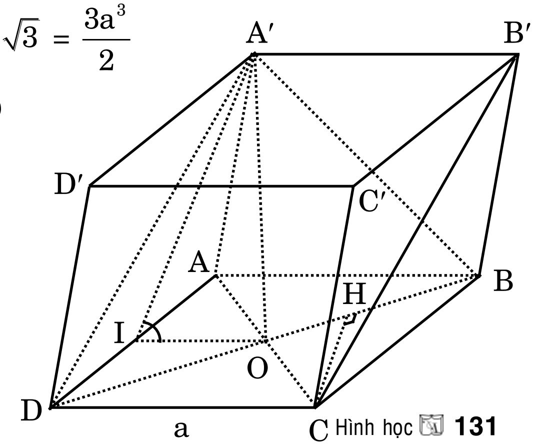
• Gọi O là giao điểm AC và BD

Gọi I trung điểm AD Ta có $OI \perp AD \Rightarrow A'I \perp AD$

Vậy $A'IO = 60^o$ $\Delta A'IO \perp \Rightarrow \tan 60^o = \dfrac{A'O}{IO} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow A'O = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$

Ta có $V_{LT} = A'O.dt(ABCD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^3}{2}$



• Ta có B’C // A’D ⇒ B’C // mp(A’BD)

Vậy d(B’, (A’BD)) = d(C, (A’BD))

Vẽ $CH \perp BD$

Do $A'O \perp (ABCD) \Rightarrow A'O \perp CH$

Vậy $CH \perp (A'BD)$

$\Delta BCD \perp \Rightarrow CH.BD = CD.CB$

Vậy CH = d(B', (A'BD))

$$= \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho ABC.A'B'C' là hình lăng trụ đứng đáy là Δ đều cạnh a, AA' = $a\sqrt{2}$. Tính $V_{A.BCA'}$.

BT 2. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy là tam giác đều cạnh a; BC' tạo mặt bên (ABB'A) mặt góc 30^o. Tính thể tích lăng trụ.

BT3. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt phẳng (ABC') tạo với mặt bên (BCC'B') một góc α. Gọi I, J là hình chiếu của A lên BC và BC'.

a) Chứng minh góc AJI bằng α

b) Tính thể tích khối lăng trụ.

BT4. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A. Mặt bên ABB'A' là hình thoi cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt bên ACC'A' tạo với mặt đáy một góc α. Tính thể tích hình lăng trụ.

BT5. (DB/B06) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể tích V. Các mặt phẳng (ABC'), (A'BC), (AB'C) đồng quy tại O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh H là trọng tâm ΔABC.

b) Tính thể tích tứ diện O.ABC theo V.

BT6. (D2008) Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'C'B'D' có đường cao h, góc của (A'BD) và (ABB'A') là α. Tính V_{LT} và Sxq của lăng trụ theo h và α.

(ĐS: $V = h^3\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$ $\quad S = 4h^2\sqrt{\tan^2\alpha - 1}$)

BT7. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tam giác ABC cân tại A. Góc của AA' và BC' là $\frac{\pi}{6}$. Góc nhị diện cạnh AA' là $\frac{\pi}{3}$. Tính thể tích lăng trụ

BT8. (DBD2007) Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm AA'. Chứng minh BM vuông góc với B'C và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM, B'C.

BT9. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. Góc BAC bằng 60^o. AA' = A'B = A'D và cạnh bên tạo với đáy góc α.

a) Xác định góc α và chân đường cao vẽ từ A'.

b) Tính thể tích V của hình hộp.

BT10. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $\Delta ABC \perp$ tại B. AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm A'C', I là giao điểm AM và A'C. Tính V_{IABC} và d(A,(IBC).

BT11. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có mặt phẳng $\Delta A'BC$ cách A một khoảng

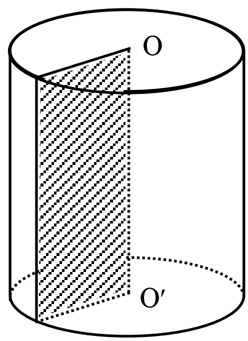
$\frac{a\sqrt{3}}{4}$ và tạo với BC góc có $\sin\alpha = \sqrt{15}$. Tính thể tích lăng trụ.

BT12. Cho lăng trụ xiên ABC.A’B’C’ có đáy tam giác ABC đều cạnh a, AA’ = A’B = A’C, góc của hai mặt phẳng (ABB’A’) và (ABC) là 60^o. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ.

BT13. Cho lăng trụ xiên ABC.A’B’C’ có Δ ABC $\perp$ tại C, B= 2a, AC = $a\sqrt{6}$. Gọi H là trung điểm BC thì $B'H \perp mp(ABC)$ góc của BB' và mp (ABC) bằng $\pi/4$. Tính thể tích khối lăng trụ và góc của hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CBB'C')$.

VẤN ĐỀ 3: HÌNH TRỤ

- Hình trụ là hình sinh bởi hình chữ nhật quay một vòng quanh một cạnh.
- Các thiết diện qua trục là các hình chữ nhật bằng nhau.



$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{V = B.h} \\ \mathbf{S_{xq} = 2\pi Rh} \end{array}}$$

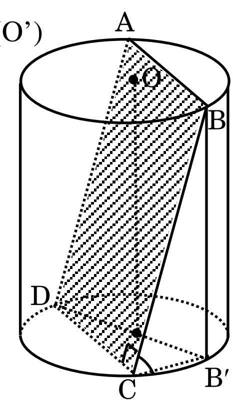
B: diện tích đáy

h: chiều cao

R: bán kính đáy

Bài 1. Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp mà hai đỉnh liên tiếp nhau A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông ABCD tạo mặt phẳng đáy của hình trụ một góc 45^0. Tính theo a diện tích xung quanh hình trụ đó và thể tích khối trụ đó.

Giải



Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B xuống mặt đáy chứa (O’)

ABCD hình vuông $\Rightarrow DC \perp CB \Rightarrow CD \perp CB'$

Do đó: $\widehat{BCB'} = 45^0$ và DB’ là đường kính của (O’).

$\Delta BB'C$ vuông cân nên: $BB' = CB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Delta CDB'$ vuông nên:

$$DB' = \sqrt{CD^2 + CB'^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

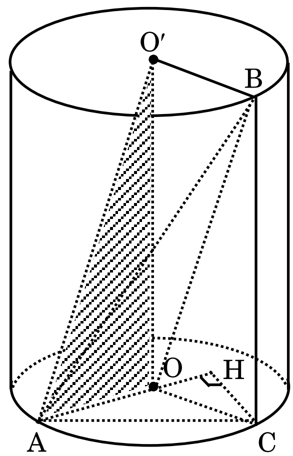
$$\Rightarrow R = \frac{DB'}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Do đó $Sxq = 2\pi Rh = 2\pi\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$

và: $V = \pi R^2h = \pi.\frac{6a^2}{16}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Bài 2. (Tuyển sinh đại học khối A năm 2006) Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính theo a thể tích tứ diện $O.O'AB$.

Giải



Vẽ BC vuông góc mặt phẳng đáy chứa đường tròn (O). ΔABC vuông

$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

Vẽ CH $\perp$ OA

Mà $OO' \perp CH$

Nên CH $\perp$ mp $(OO'A)$

Ta có BC // mp $(OO'A)$

Nên CH = d (C, $(OO'A)$) = d (B, $(OO'A)$)

$\Delta AOC \Rightarrow AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA.OC\cos AOC$

$\Rightarrow 3a^2 = 2a^2 - 2a^2\cos AOC$

$\Rightarrow \cos AOC = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow AOC = 120^0$

Δ vuông COH $\Rightarrow \sin 60^0 = \frac{CH}{OC} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy: $V_{O.ABO'} = V_{B.AOO'} = \frac{1}{3}CH.dt(\Delta OO'A) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Bài 3. Cho hình trụ có hai hình tròn đáy tâm O và O’, bán kính đáy R, chiều cao $R\sqrt{2}$. Gọi A là điểm trên đường tròn (O). Tìm B và C trên đường tròn (O’) sao cho tam giác ABC đều.

Giải

Từ A vẽ $AA' // OO' \Rightarrow AA' \perp$mp chứa (O').

Vẽ đường kính $A'O'D$.

Do AB = AC nên A'C = A'B.

Mặt khác O'B = O'C = R.

Vậy O'A' là đường trung trực của BC.

$\Rightarrow O'A' \perp BC$ tại trung điểm I.

Đặt x = A'I ($0 \le x \le 2R$)

$\Delta A'BD$ vuông tại B nên $BA'^2 = A'I.A'D = 2Rx$

và $IB^2 = IA'.ID = (2R - x)x$

Vậy $BC = 2BI = 2\sqrt{x(2R - x)}$

$\Delta A'AB$ vuông tại A'

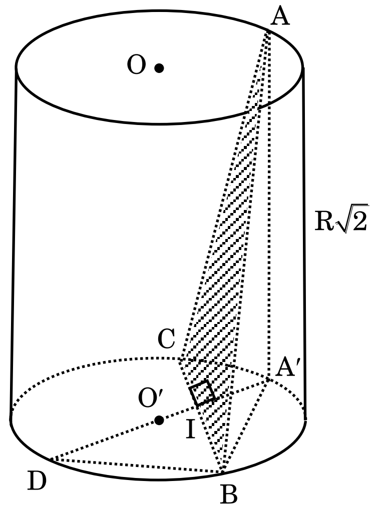
nên $BA^2 = AA'^2 + BA'^2 = 2R^2 + 2Rx$

Mà ΔABC đều

$\Rightarrow BA^2 = BC^2 \Rightarrow 2R^2 + 2Rx = 4x(2R - x)$

$\Rightarrow 4x^2 - 6Rx + 2R^2 = 0$

$\Rightarrow x = R \vee x = \dfrac{R}{2}$



Do đó ΔABC đều khi

- IA' = R $\Leftrightarrow$ BC đường kính của (O') mà vuông góc O'A'
- IA' = $\dfrac{R}{2}$ $\Leftrightarrow$ BC là dây vuông góc O'A' tại trung điểm của O'A'.

Bài 4. Cho hình trụ có đáy là hai hình tròn tâm O và O' bán kính R, chiều cao $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' lấy lần lượt hai điểm A và B sao cho góc hai đường thẳng OA và $O'B$ bằng α không đổi.

a) Tính AB theo R và α

b) Chứng minh khi AB di động thì trung điểm của AB luôn di động trên một đường tròn cố định.

Giải

a/ Vẽ $O'A' // OA$ thì $\widehat{A'O'B} = \alpha$.

Vẽ $O'H \perp A'B \Rightarrow HA' = HB$

$AOA'O'$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow AA' // OO' \Rightarrow AA' \perp (O')$

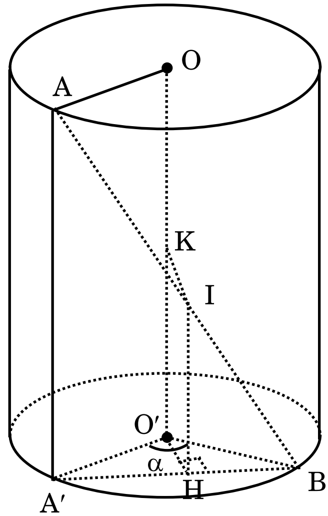
$\Delta O'A'H$ vuông $\Rightarrow \sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{A'H}{O'A'}$

$\Rightarrow A'B = 2A'H = 2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$

$\Delta AA'B$ vuông

$\Rightarrow AB^2 = AA'^2 + A'B^2 = 2R^2 + 4R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow AB = R\sqrt{2 + 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$



b/ Gọi K là trung điểm OO' và I trung điểm AB

Ta có: $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{KO'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OO'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$

Do $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{KO'}$ nên $O'HIK$ là hình chữ nhật

Do đó $KI = O'H = R\cos\dfrac{\alpha}{2}$ (không đổi).

Do đó I luôn di đông trên đường tròn tâm K bán kính $R' = R\cos\dfrac{\alpha}{2}$ nằm trong mặt phẳng qua K và song song với hai đáy.

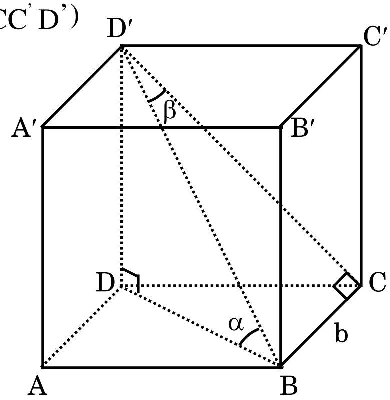
Bài 5. Cho một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, BC = b, đường chéo $D'B$ của hình hộp tạo với mặt phẳng đáy một góc α và tạo với mặt phẳng bên $CDD'C'$ một góc β.

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình hộp đó.

b) Tính thể tích hình hộp ABCD.A′B′C′D′.

Giải

a/ Ta có: $D'BD = \alpha$ và $BD'C = \beta$ (do $BC \perp (DCC'D')$)



$\Delta BCD'$ vuông tại C có $BD' = \dfrac{b}{\sin\beta}$

$\Delta D'DB$ có $DD' = BD'\sin\alpha = \dfrac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$

Bán kính đáy R của hình trụ ngoại tiếp hình hộp:

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{1}{2}BD'\cos\alpha = \frac{b\cos\alpha}{2\sin\beta}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi R.DD' = \frac{\pi b^2\sin 2\alpha}{2\sin^2\beta}$$

b/ Ta có: $BD = \dfrac{b\cos\alpha}{\sin\beta}$

$$\Delta ABD \perp \Rightarrow AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{\frac{b^2\cos^2\alpha}{\sin^2\beta} - b^2} = \frac{b}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow V = \frac{b^2\sin\alpha}{\sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao R lấy hai điểm A, B nằm trên hai đường tròn đáy sao cho AB = 2R. Tính khoảng cách từ AB đến trục hình trụ theo R.

BT2. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính R, đường cao $R\sqrt{2}$. Lấy A trên (O), B trên (O') sao cho OA vuông góc O'B

a) Chứng minh các mặt bên của hình chop OABC' là các tam giác vuông. Tính V khối chóp.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song OO'. Tính d(OO', α)

BT3. Cho hình trụ có thể tích V không đổi. Tính diện tích đáy và chiều cao sao cho diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

BT4. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh là 4π.

a) Tính diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ.

BT5. Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là ABCD là hình thang cân với đáy nhỏ AB = a, đáy lớn CD = 4a, cạnh bên $\frac{5a}{2}$. Chiều cao lăng trụ h.

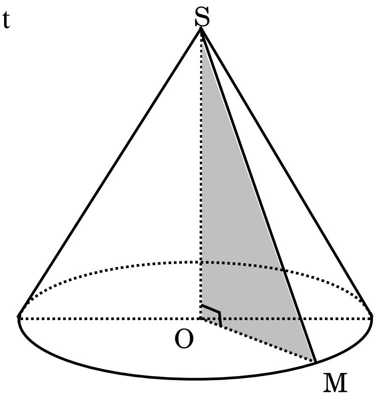
a) Chứng minh có hình trụ nội tiếp lăng trụ đã cho.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ đó.

VẤN ĐỀ 4: HÌNH NÓN

– Hình nón tròn xoay là hình sinh ra bởi một tam giác vuông quay một vòng quanh một cạnh góc vuông.

– Các thiết diện qua trục là các tam giác cân bằng nhau.



$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{S_{xq} = \pi h\mathit{l}} \\ &\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h} \end{aligned}}$$

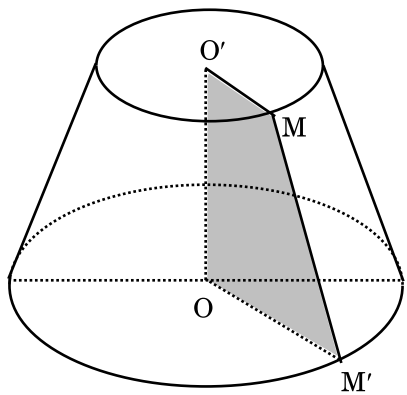
R: bán kính đường tròn đáy

l = SM: đường sinh

h = SO: đường cao

– Hình nón cụt là một phần của hình nón giới hạn bởi mặt đáy và một thiết diện vuông góc với đáy.

$$\boxed{\begin{aligned} &S_{xq} = \pi(R + R').l \\ &V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R'^2 + RR') \\ &l^2 = h^2 + (R - R')^2 \end{aligned}}$$



R, R': bán kính hai đáy

h = OO': chiều cao

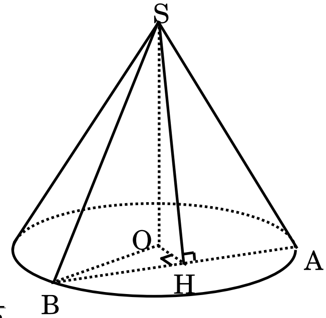
$l = MM'$: đường sinh

Bài 1. Cho hình nón có chiều cao h. Gọi (α) là mặt phẳng qua đỉnh hình nón và tạo mặt đáy một góc $\frac{\pi}{4}$. Tính theo h diện tích mặt cắt của (α) và hình nón, biết rằng mặt cắt chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo $\frac{2\pi}{3}$.

Giải

Vẽ OH ⊥ AB thì SH ⊥ AB Ta có: $SHO = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta$ SHO vuông cân

$\Rightarrow$ SH = SO$\sqrt{2}$ = h$\sqrt{2}$ và OH = SO = h



Ta có: sđ $AB = 120^0 \Rightarrow BOH = 60^0$

ΔOBH vuông $\Rightarrow \tan 60^0 = \frac{BH}{OH}$

$\Rightarrow$ AB = 2BH = 2h$\sqrt{3}$

Do đó: dt (ΔSAB) = $\frac{1}{2}$SH.AB = $\frac{1}{2}$ (h$\sqrt{2}$)(2h$\sqrt{3}$)= h^2 $\sqrt{6}$

Bài 2: Cho ΔABC vuông tại A, có AB = a và $ACB = \alpha$

Người ta quay tam giác đó một vòng quanh BC.

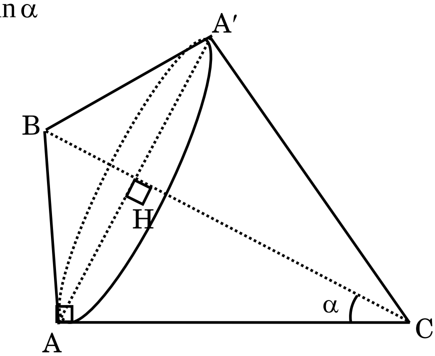
Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành theo a và α.

Giải

Vẽ đường cao AH

$$\Delta ABC \perp \ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{a}{\sin\alpha}$$

và $\tan\alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = AB\cot\alpha$



$$\Delta AHC \perp \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AH}{AC}$$

$\Rightarrow$ AH = ACsinα

= acost sinα = acosα

Khi quay ΔABC quanh BC thì khối tròn xoay tạo thành gồm hai hình nón có đáy là đường tròn tâm H bán kính AH

Ta có: $V = \frac{\pi}{3}BH.AH^2 + \frac{\pi}{3}CH.AH^2$

$$= \frac{\pi}{3}AH^2(BH + CH) = \frac{\pi}{3}AH^2.BC$$

$$= \frac{\pi}{3}(a^2 \cos^2 \alpha)\frac{a}{\sin\alpha} = \pi\frac{a^3}{3}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

Bài 3. Một hình nón có đường cao 20, bán kính đáy r = 25.

a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

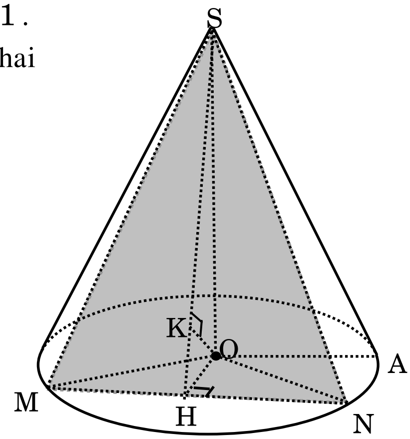
b) Một thiết diện qua đỉnh và cách tâm của đáy là 12. Tính diện tích thiết diện đó.

Giải

a) Δ SOA vuông

$$\Rightarrow SA^2 = SO^2 + OA^2 = 400 + 625 = 1025 \quad \Rightarrow SA = 5\sqrt{41}$$

Vậy $S_{xq} = \pi Rl = \pi.25.5\sqrt{41} = 125\pi\sqrt{41}$.



b) Mặt phẳng qua đỉnh S cắt mặt nón theo hai đường sinh SM và SN.

Vẽ $OH \perp MN$ và $OK \perp SH$

Ta có $MN \perp$ mp (SOH) nên $MN \perp OK$

Vậy $OK \perp$ mp(SMN)

$\Rightarrow OK = 12 = d(O, mp\,(SMN))$

$$\Delta SOH \text{ vuông} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{SO^2}$$

$$= \frac{1}{144} - \frac{1}{400}$$

$$= \frac{256}{144.400}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{12 \times 20}{16} = 15$$

ΔOMH vuông $\Rightarrow MH^2 = OM^2 - OH^2 = 625 - 225 = 400$

$\Rightarrow MN = 2MH = 40$

ΔSOH vuông $\Rightarrow SH^2 = SO^2 + OH^2 = 400 + 225 = 625 \Rightarrow SH = 25$

Vậy: $dt(\Delta SMN) = \frac{1}{2}SH.MN = \frac{1}{2}.25.40 = 500$.

Bài 4. Cho một hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và $BSC = \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính theo a và α.

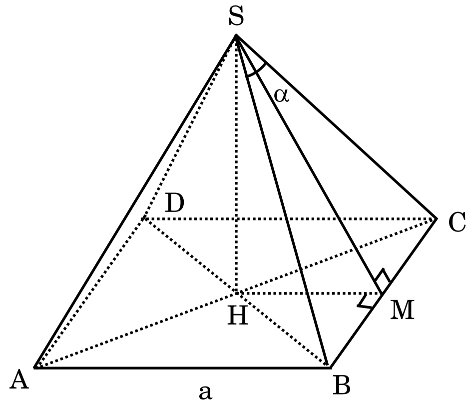
a) Thể tích khối chóp theo a và α.

b) Diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp đó.

Giải

a/ Gọi H là tâm hình vuông ABCD thì $SH \perp mp(ABCD)$

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có HM $\perp$ BC $\Rightarrow$ SM $\perp$ BC



Δ SMC vuông $\Rightarrow SM = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$

Δ SHM vuông

$$\Rightarrow SH = \sqrt{\frac{a^2}{4}\cot^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Thể tích khối chóp: $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$

b/ Diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp là: $S = \pi$ HB.SB

Với: $HB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SB = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow S = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$.

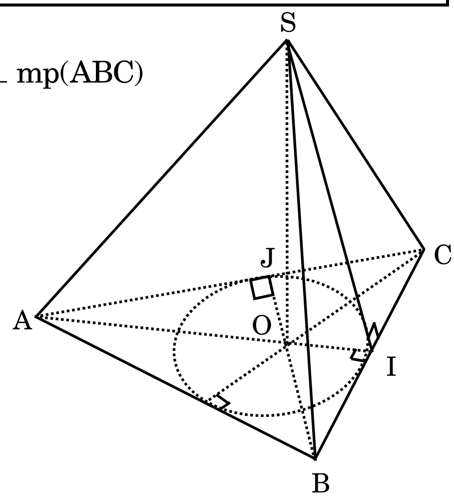
Bài 5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, cạnh đáy a, góc ở đỉnh của mặt bên là α.

a) Tính thể tích khối chóp đã cho theo a và α

b) Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S nội tiếp trong hình chóp đó theo a và α.

Giải

a/ Gọi O là tâm tam giác đều ABC thì SO $\perp$ mp(ABC)



Gọi I là trung điểm BC.

Do ΔSBC cân nên SI $\perp$ BC

và $\widehat{BSI} = \frac{1}{2}\widehat{BSC} = \frac{\alpha}{2}$

Ta có: $OB = \frac{2}{3}BJ = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Δ SBI vuông tại I

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{SB} \Rightarrow BS = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

Δ SOB vuông tại O

$\Rightarrow SO^2 = SB^2 - OB^2$

$$= \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{12}\left(\frac{3}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 4\right) = \frac{a^2}{12}\left(3\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}h.dt\,(\Delta ABC)$

$$\Rightarrow V = \frac{a}{6\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}$$

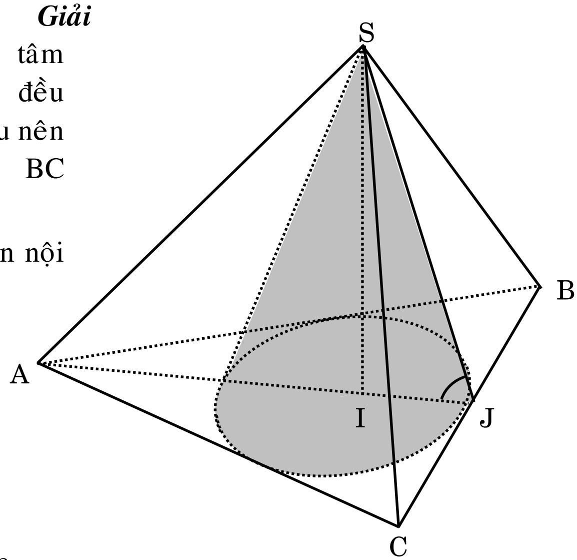
b/ $\Delta SBI \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{BI}{SI} \Rightarrow \ell = SI = \frac{BI}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}.\cot\frac{a}{2}$

và $R = OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $S_{xq} = \pi R\ell = \pi\frac{a\sqrt{3}}{6}\frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{12}\cot\frac{\alpha}{2}$.

Bài 6. Cho S.ABC là hình chóp tam giác đều có cạnh bên là a và góc của mặt bên và mặt đáy là 30^0. Gọi hình nón nội tiếp hình chóp là hình nón đỉnh S đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC. Tính diện tích xung quanh hình nón nội tiếp hình chóp S.ABC theo a.

Giải



Gọi J là trung điểm BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC. Do S.ABC là hình chóp đều nên SI ⊥ mp(ABC) và AJ ⊥ BC $\Rightarrow SJ \perp BC$. Vậy $\widehat{SJA} = 30^0$.

Đặt r = IJ là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

ΔSIJ vuông $\Rightarrow \tan 30^0 = \frac{SI}{IJ}$

và $\cos 30^0 = \frac{IJ}{SJ} \Rightarrow SI = \frac{r\sqrt{3}}{3}$

và $SJ = \frac{2r}{\sqrt{3}}$

ΔSIA vuông $\Rightarrow SA^2 = AI^2 + SI^2$

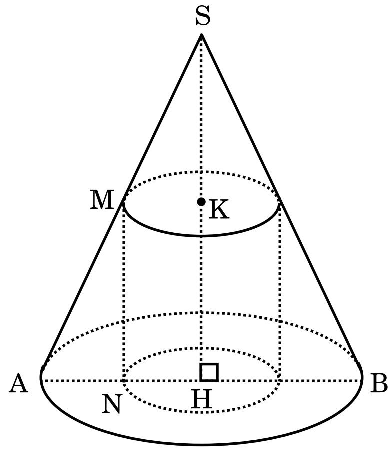
$$\Rightarrow a^2 = (2r)^2 + \left(\frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4r^2 + \frac{r^2}{3} = \frac{13r^2}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{13}}.a$$

Vậy $\ell = SJ = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$

Do đó: $S_{xq} = \pi r\ell = \pi.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}a\right)\left(\dfrac{2a}{\sqrt{13}}\right) = \dfrac{2a^2\sqrt{3}}{13}$.

Bài 7. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao 15 cm, bán kính R = 6 cm. Tìm chiều cao và bán kính đáy của hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình nón. Tính diện tích toàn phần hình trụ đó.

Giải



Gọi r và h là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ nội tiếp trong hình nón với $0 < r < 6$ và $0 < h < 15$.

Ta có: $S_{tp} = 2S_{đáy} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Do MN // SH $\Rightarrow \dfrac{AN}{AH} = \dfrac{MN}{SH} \Rightarrow \dfrac{6-r}{6} = \dfrac{h}{15}$

$$\Rightarrow h = 15\left(1 - \frac{r}{6}\right) = 15 - \frac{5r}{2}$$

Vậy: $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(15 - \dfrac{5r}{2}\right)$

$S(r) = 2\pi r^2 + 30\pi r - 5\pi r^2 = 30\pi r - 3\pi r^2$ với $0 < r < 6$

Ta có: $S'(r) = 30\pi - 6\pi r$; $S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 5$

r	0		5		6
s'		+	0	–	
s		↗	75π CĐ	↘	

Do đó: $S_{max} = 75\pi \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ h = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Lấy A, B thuộc đường tròn tâm O sao cho d(O, AB) = a, $SAO = 30^0$, $SAB = 60^0$. Tính diện tích xung quanh hình nón.

BT2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao SH bằng h, góc SAB bằng α với $\alpha > 45^0$. Tính diện tích xung quanh hình nón đỉnh S và đáy là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

BT3. Cho hình nón μ có bán kính đáy R, đường cao SO. Mặt phẳng (P) cố định vuông góc SO tại O' cắt μ theo đường tròn có bán kính đáy R'. Mặt phẳng (Q) thay đổi vuông góc SO tại O_1 (O_1 nằm giữa O và O') cắt hình nón theo thiết diện là hình tròn có bán kính x. Tính x theo R, R' nếu (Q) chia hình nón nằm giữa (P) và đáy hình nón theo 2 phần có thể tích bằng nhau.

BT4. Cho hình nón có chiều cao h. Gọi (α) là mặt phẳng qua đỉnh hình nón và tạo với đáy góc $\frac{\pi}{4}$. Tính diện tích mặt cắt chắn trên đáy có số đo $\frac{2\pi}{3}$

BT5. Trong các khối nón tròn xoay cùng có diện tích toàn phần bằng π thì khối nào có diện tích lớn nhất

BT6. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao h và có bán kính đáy R. Trong các mặt phẳng qua đỉnh hình nón, xác định mặt phẳng cắt hình nón theo mặt cắt có diện tích lớn nhất và hãy tính diện tích ấy.

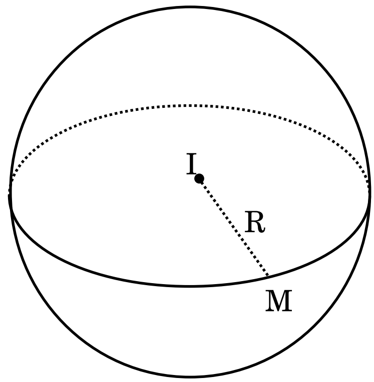
VẤN ĐỀ 5: MẶT CẦU – THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Mặt cầu tâm I bán kính R, kí hiệu S(I, R)

$$S(I, R) = \{M / IM = R\}$$

Hình cầu tâm I bán kính R, kí hiệu B(I, R)

$$B(I, R) = \{M / IM \le R\}$$

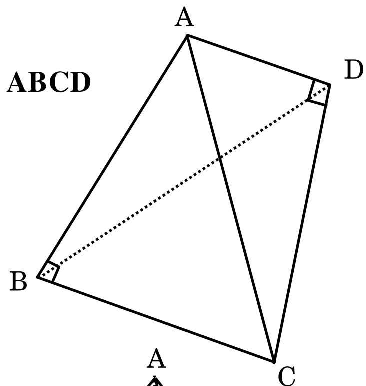


Thể tích hình cầu B(I, R):

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Diện tích mặt cầu:

$$\boxed{s_{mc} = 4\pi R^2}$$



• Phương pháp xác định mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

- **Trường hợp 1:** Nếu ABC = ADC = 1v

  Hai điểm B và D cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC.

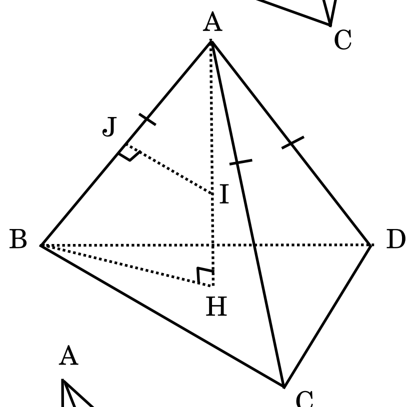
- **Trường hợp 2:** Nếu AB = AC = AD = a

  – Vẽ AH ⊥ mp (BCD) thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD

  – Trên mp (ABH) vẽ đường trung trực của AB, đường này cắt AH tại I thì I là tâm mặt cầu (ABCD).

  – Do hệ thức lượng trên đường tròn (IJBH) ta có:

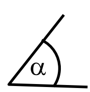
$$AJ.AB = AI.AH \Rightarrow R = IA = \frac{a^2}{2AH}$$

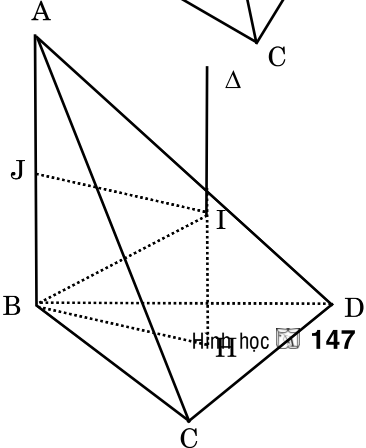


- **Trường hợp 3:** Nếu AB ⊥ mp (BCD)

  Vẽ (Δ) là trục đường tròn (BCD).

  – Vẽ (α) là mặt phẳng trung trực của





AB. (Δ) cắt (α) tại I thì I là tâm mặt cầu (ABCD).

– $R = IB = \sqrt{IH^2 + HB^2}$

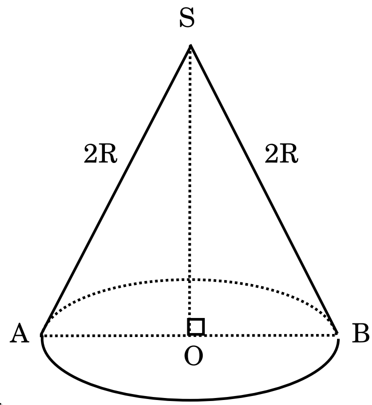
Bài 1. Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều, bán kính đáy hình nón là R

a) Tính thể tích khối nón đã cho.

b) Chứng minh rằng diện tích đáy, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình đó tỉ lệ 1 : 2 : 3.

c) Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu mà đường kính bằng chiều cao của hình nón.

Giải



ΔSAB đều cạnh 2R nên $SO = \dfrac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Vậy $V_{nón} = \dfrac{1}{3}SO.dt.(đáy) = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}(\pi R^2) = \dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\quad S_{đáy} = \pi R^2$

$S_{xq} = \pi R.SA = 2\pi R^2$

$S_{tp} = S_{đáy} + S_{xq} = 3\pi R^2$

Do đó $\quad S_{đáy} : S_{xq} : S_{tp} = 1 : 2 : 3$

Diện tích xung quanh mặt cầu bán kính $\dfrac{SO}{2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Vậy $S_{mc} = 4\pi(SO^2) = 4\pi\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi R^2 = S_{tp}$

Bài 2. (*Tuyển sinh Đại học khối D 2003)* Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến (Δ). Trên (Δ) lấy hai điểm A, B mà AB = a. Lấy C trên (P) và D trên (Q) sao cho AC và BD vuông góc (Δ) mà AC = AB = BD. Tính bán kính mặt cầu qua 4 điểm A, B, C, D và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).

Giải

a/ Do hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến (Δ) mà $AC \perp (\Delta)$ và AC nằm trên mặt phẳng (P) nên $AC \perp$ mp (Q) $\Rightarrow AC \perp AD$

Tương tự: $BD \perp (\Delta) \Rightarrow BD \perp (P)$

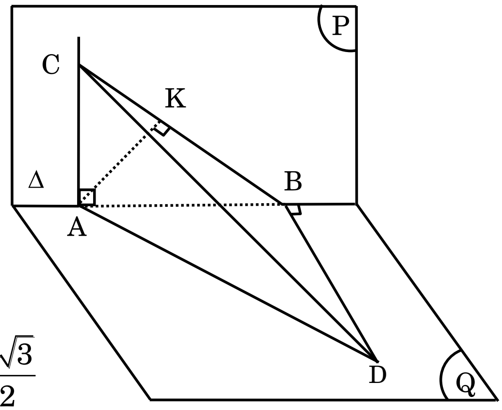
$\Rightarrow BD \perp BC$

Ta có : $\widehat{DBC} = \widehat{DAC} = 1v$

B và A cùng nhìn DC dưới 1 góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính DC, $R = \dfrac{DC}{2}$

$\Delta ABC \perp$ cân $\Rightarrow BC^2 = 2a^2$

$\Delta BDC \perp \Rightarrow R = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 2a^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



b) Từ A vẽ $AK \perp BC$

Ta có $(P) \perp (Q)$ mà $BD \perp \Delta$ nên $DB \perp (P) \Rightarrow BD \perp AK$

Vậy $AK \perp mp(BCD)$

Do đó: $AK = d(A, BCD) = \dfrac{AC.AB}{BC} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 3. Cho tứ diện đều SABC cạnh a. Gọi I là trung điểm của đường cao SH của tứ diện.

a) Chứng minh rằng ba đường thẳng IA, IB, IC vuông góc với nhau từng đôi một.

b) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC và tính bán kính của nó theo a.

Giải

a/ S.ABC là tứ diện đều đường cao SH nên H là tâm của ΔABC

ΔSHB vuông tại H

$\Rightarrow SH^2 = SB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{2a^2}{3}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

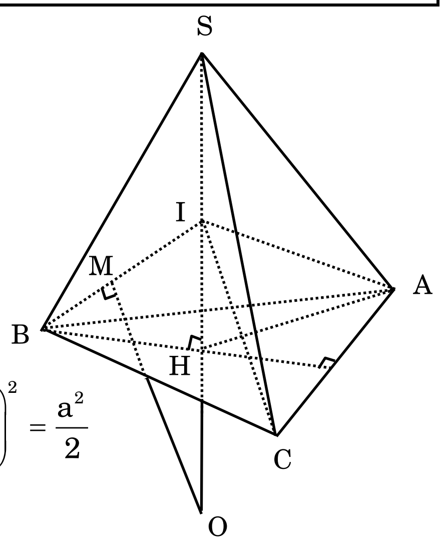
ΔIHB vuông

$\Rightarrow IB^2 = IH^2 + HB^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$

$I \in SH \Rightarrow IA = IB = IC$

Xét ΔIBC có $IB^2 + IC^2 = BC^2 \Rightarrow IB \perp IC$

Tương tự ta có $IC \perp IA,\ IA \perp IB$



b) Vì I và H cách đều A, C, B nên tâm hình cầu đi qua 4 điểm I, A, B, C phải nằm trên IH.Vẽ đường trung trực của đoạn IB trong mp(BIH), đường này cắt IH kéo dài tại O

Ta có $OA = OB = OC = OI$, vậy O là tâm hình cầu qua bốn điểm A, B, C, I.

Gọi M là trung điểm IB

Ta có: $\Delta IBH \sim \Delta IOM \Rightarrow \dfrac{IB}{IO} = \dfrac{IH}{IM}$

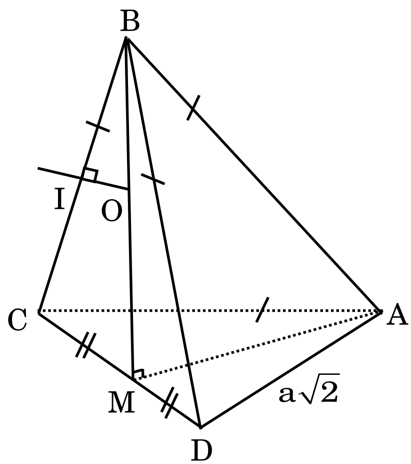
$$\Rightarrow R = OI = \frac{IB.IM}{IH} = \frac{IB^2}{2IH} = \frac{a^2}{4\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{6}\right)} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có hai mặt bên (ACD) và (BCD) vuông góc nhau, $AB = BC = BD = AC = a$, $AD = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh ΔACD vuông.

b) Tính theo a diện tích mặt cầu xung quanh qua A, B, C, D.

Giải



a) Gọi M trung điểm CD

ΔBCD cân tại B $\Rightarrow BM \perp CD$

$(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow BM \perp (ACD)$

Do BC = BD = BA nên MC = MD = MA

Vậy ΔACD vuông tại A

b) Do BC = BD = BA

và MC = MD = MA

nên BM là trục đường tròn (ACD)

Trong (BCD) đường trung trực của BC cắt BM tại O thì O là tâm mặt cầu qua B, C, D, A.

ΔACD vuông tại A $\Rightarrow CD^2 = AC^2 + AD^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

ΔBCM vuông tại M $\Rightarrow BM^2 = BC^2 - MC^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$

$\Delta BIO \sim \Delta BMC \Rightarrow \dfrac{BI}{BM} = \dfrac{BO}{BC}$

$$\Rightarrow R = BO = \frac{BI.BC}{BM} = \frac{BC^2}{2BM} \Rightarrow R = \frac{a^2}{2.\dfrac{a}{2}} = a$$

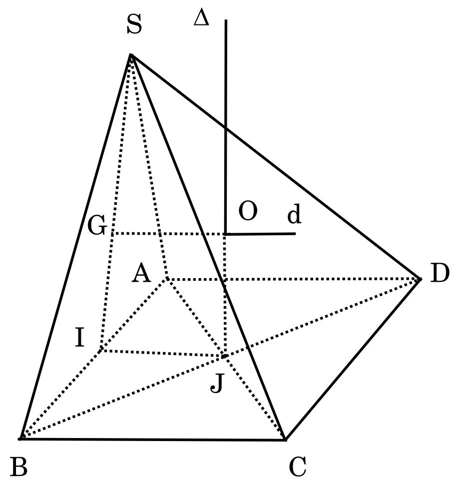
Vậy $S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a; SA = SB = a, hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) vuông góc với nhau. Tính diện tích xung quanh mặt cầu qua S, A, B, D.

Giải

Gọi J là tâm hình vuông ABCD

Gọi Δ là đường thẳng qua J và $\perp$(ABCD) thì Δ là trục đường tròn (ABCD)



Gọi I là trung điểm AB

ΔSAB đều $\Rightarrow$ SI $\perp$ AB

Mp(SAB) $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ SI $\perp$(ABCD)

Do IJ $\perp$ AB $\Rightarrow$ IJ $\perp$(SAB)

Gọi G là tâm của tam giác đều SAB

Vẽ (d) $\perp$(SAB) tại G thì (d) là trục đường tròn (SAB)

Ta có (d) cắt Δ tại O

$$O \in \Delta \Rightarrow OA = OB = OD$$

$$O \in d \Rightarrow OA = OB = OS$$

Vậy OA = OB = OD = OS

$\Rightarrow$O là tâm mặt cầu qua S, A, B, D

Vậy OGIJ là hình chữ nhật

Ta có d // IJ và SI // Δ

ΔOSG vuông $\Rightarrow R^2 = SO^2 = SG^2 + OG^2$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{2}{3}SI^2\right) + IJ^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}$$

Do đó $S_{xqmc} = 4\pi R^2 = \dfrac{7a^2}{3}\pi$.

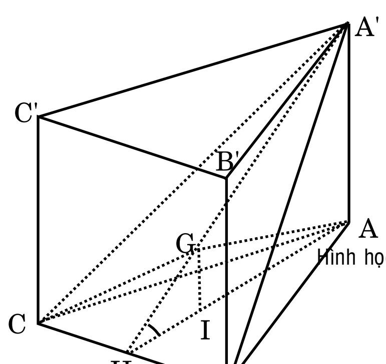
Bài 6. *(Tuyển sinh ĐH khối B năm 2010)* Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có AB = a, góc của hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm $\Delta A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện G.ABC.

Giải

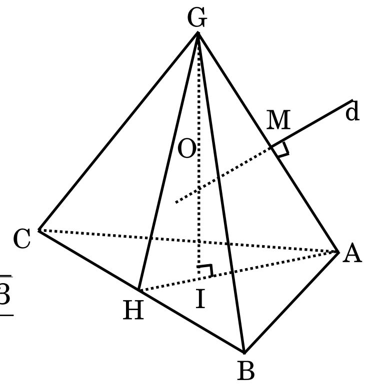
• Gọi H là trung điểm BC,

ΔABC đều $\Rightarrow AH \perp BC$

Mà $AA' \perp mp(ABC) \Rightarrow A'H \perp BC$



Vậy $A'HA = 60^o$



$\Delta A'AH \perp \Rightarrow \tan 60^o = \dfrac{AA'}{AH} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AA' = \sqrt{3}\,\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$

Và $\cos 60^o = \dfrac{AH}{A'H} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A'H = 2AH = a\sqrt{3}$

Do đó $V_{LT} = AA'.dt(\Delta ABC) = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

• Trong mặt phẳng (GHA) vẽ (d) đường trung trực của GA cắt GI tại O thì O là tâm mặt cầu qua G, A, B, C.

Gọi M là trung điểm GA.

Gọi I là tâm của Δ đều ABC

Ta có: $\dfrac{HG}{HA'} = \dfrac{HI}{HA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GI // AA'$

Vậy: $\dfrac{GI}{AA'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GI = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Delta GIA \perp \Rightarrow GA^2 = GI^2 + IA^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{21a^2}{36}$

Ta có: $\mathscr{P}_{G/(OMIA)} = GM.GA = GO.GI$

$$\Rightarrow R = GO = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{21a^2}{36.\frac{a}{2}.2} = \frac{21a}{36} = \frac{7a}{12}$$

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD hình thoi cạnh a; $ABC = 60^o$, $SA = SB = SC = a$.
Gọi M là trung điểm SD; N là hình chiếu vuông góc của M lên mp (ABCD). Tính thể tích khối S.ABCD. Chứng minh sáu điểm S, B, A, C, M, N cùng thuộc một mặt cầu.

Giải

• ΔABC có $AB = BC = a$ và $ABC = 60^0$ nên ΔABC là tam giác đều.

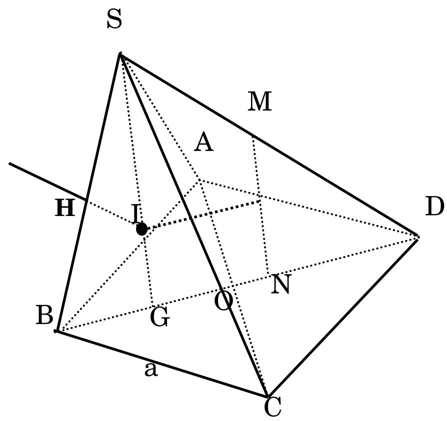
Gọi G là tâm của ΔABC do $SA = SB = SC$, $GA = GB = GC$

nên $SG \perp (ABCD)$

Do $MN \perp (ABCD)$ nên $MN // SG$ và $N \in BD$

Ta có: ΔSBG vuông

$$\Rightarrow SG^2 = SB^2 - BG^2$$
$$= a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$



Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{SG}{3}.dt\,(ABCD)$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

• Gọi I là tâm mặt cầu qua S, A, B, C

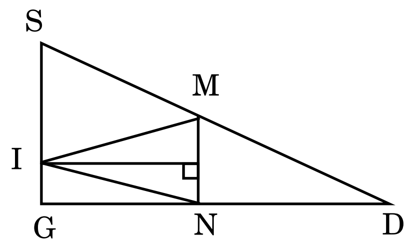
Thì I $\in$ SG là trục đường tròn (ABC)

Ta có: IS = IB = R $\Rightarrow$ Δ ISB cân

Gọi H là trung điểm SB thì IH $\perp$ SB

Ta có: $\wp_{S/(IHBG)} = SI.SG = SH.SB$

$$\Rightarrow R = SI = \frac{SH.SB}{SG} = \frac{SB^2}{2SG}$$
$$= \frac{a^2}{2.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



Ta có $IG = SG - SI = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

và $NG = OG + ON = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Δ IGN vuông $\Rightarrow IN^2 = IG^2 + GN^2 = \frac{6a^2}{144} + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2}{8}$

Ta có $IN = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = R \Rightarrow N \in$ mặt cầu qua SABC

Ta có: $IG = \frac{a\sqrt{6}}{12}$; $SG = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow IG = \frac{1}{4}\ SG \text{ mà } MN = \frac{1}{2}\ SG \Rightarrow MN = 2\ IG$$

Gọi K là trung điểm MN Do IGNK là hình chữ nhật nên IK $\perp$ MN

Vậy IM = IN = R

Do đó sáu điểm S, A, B, C, M, N thuộc mặt cầu tâm I với $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SB = a\sqrt{3}$.

a) Tính $V_{S.ABCD}$.

b) Chứng minh trung điểm của SC là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

BT2. Cho hình chóp tam giác đều cạnh đáy a, mặt bên tạo với đáy một góc α. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

BT3. Cho tứ diện ABCD với AB = AC = a, BC = b. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc nhau và góc BDC bằng 90^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b.

BT4. Cho hình cầu đường kính AB = 2R, lấy H trên bán kính OB sao cho $OH = \dfrac{R}{3}$.

Mặt phẳng (α) qua H vuông góc AB cắt hình cầu theo đường tròn (C).

a) Tính diện tích hình tròn (C)

b) Gọi CDE là tam giác đều nội tiếp trong (C). Tính thể tích hình chóp ACDE và BCDE.

BT5. Trong mặt phẳng cho đường tròn đường kính AB = 2R. Lấy M di động trên đường tròn. Vẽ MH vuông góc AB tại H với AH = x (0 < x < 2R). Dựng đường thẳng vuông góc với mp tại M trên đó lấy MS = MH. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABM. Tìm x để bán kính mặt cầu đó đạt giá trị lớn nhất.

BT6. Cho tứ diện S.ABCD có SA vuông góc mặt phẳng (ABC), nhị diện cạnh SB = a, góc BSC bằng $\dfrac{\pi}{4}$, góc ASB bằng α $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) Chứng minh SB vuông góc BC. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

b) Tính thể tích tứ diện SABC theo a và α. Tìm α để thể tích này lớn nhất.

BT7. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD). Mặt phẳng qua A vuông góc SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh 7 điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng thuộc mặt cầu. Tính diện tích mặt cầu đó.

BT8. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$ và SBD đều. Hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABCD) là trọng tâm ABD.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Xác định tâm và bán kính mặt còn qua S, A, B, C, D.

(ĐS: $R = \dfrac{a\sqrt{35}}{26}$)

PHẦN 3

HÌNH GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN (Oxyz)

Biên soạn: NGUYỄN VĂN HÒA
TRẦN MINH QUANG
HOÀNG HỮU VINH

BÀI 1

HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Trong không gian (Oxyz) cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Ta có: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$ $\quad \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$

$k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ $(k \in R)$

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \exists k \in R : \vec{a} = k.\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$ $(b_1.b_2.b_3 \neq 0)$

Định nghĩa: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$

Định lý: $\mathbf{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$

Hệ quả: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

- Trong không gian (Oxyz) cho $A(x_A, y_A, z_A,)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$

Ta có: $\mathbf{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)}$

$$\mathbf{AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Trung điểm I của đoạn AB: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

G trọng tâm ΔABC $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$

☞ ***Lưu ý***:

Nếu M ∈ (Oxy) thì $z_M = 0$ Nếu M ∈ (Oyz) thì $x_M = 0$

Nếu M ∈ (Oxz) thì $y_M = 0$ Nếu M ∈ x′Ox thì $y_M = z_M = 0$

Nếu M ∈ z′Oz thì $x_M = y_M = 0$ Nếu M ∈ y′Oy thì $x_M = z_M = 0$

- **Tính có hướng của hai vectơ**

Trong không gian (Oxyz) cho 2 vectơ: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (hoặc $\vec{a} \wedge \vec{b}$), là vectơ có tọa độ:

$$\boxed{[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)}$$

Tính chất:

1/ Vectơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

2/ $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$

3/ $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Ứng dụng của tích có hướng

a/ $\mathbf{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$ **đồng phẳng** ⇔ $\mathbf{[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} \neq 0}$

b/ Diện tích tam giác ABC: $\mathbf{S = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|}$

c/ Diện tích hình bình hành ABCD: $S = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$

d/ Thể tích tứ diện ABCD: $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

e/ Tính thể tích hình hộp ABCD.A′B′C′D′: $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

☛ Các dạng toán thường gặp

- A, B, C, thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ ⇔ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \vec{0}$
- A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác ⇔ A, B, C không thẳng hàng.
- A, B, C, D là 4 đỉnh của 1 tứ diện

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$

• Trực tâm H của ΔABC

Tìm tọa độ điểm H từ điều kiện:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ A, B, C, H \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

• Chân đường cao A′ của đường cao AA′ của ΔABC

Tìm tọa độ điểm A′ từ điều kiện

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}\right] = \vec{0} \end{cases}$$

• Tâm đường tròn ngoại tiếp I của ΔABC

Tìm tọa độ điểm I từ điều kiện:

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ A, B, C, I \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$$

• Chân đường phân giác trong và ngoài của ΔABC

Gọi D, D′ là chân đường phân giác trong và ngoài của BAC

Ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{D'B}{D'C} = \dfrac{AB}{AC}$

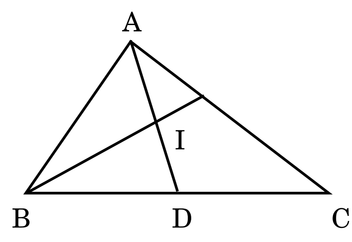
Vậy $\overrightarrow{DB} = -\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{D'B} = \dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{D'C}$

• Để tìm tâm của đường tròn nội tiếp:

– Vẽ đường phân giác trong của B cắt AD tại I thì I chính là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

– Tìm I từ công thức:

$$\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{BA}{BD}.\overrightarrow{ID}$$



B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho ba vectơ $\vec{a} = (1, m, 2)$, $\vec{b} = (m + 1, 2, 1)$, $\vec{c} = (0, m - 2, 2)$

a. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc $\vec{b}$.

b. Tìm m để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

c. Tìm m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$

Giải

a/ Ta có:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow m + 1 + 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

b/ Ta có:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (m - 4, 2m + 1, -m^2 - m + 2)$$

$$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = (m - 2)(2m + 1) + 2(-m^2 - m + 2) = -5m + 2$$

Do đó:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0 \Leftrightarrow -5m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$$

c/ Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (m + 2, m + 2, 3)$

Do đó: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

$$\Leftrightarrow (m + 2)^2 + (m + 2)^2 + 9 = (m - 2)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \pm 3\sqrt{3}$$

Bài 2: Cho $\vec{a} = (1, -2, 3)$. Tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$, biết rằng $\vec{b}$ tạo với trục tung một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{14}$.

Giải

Gọi $\vec{b} = (x, y, z)$; Oy có vectơ đơn vị $\vec{j} = (0, 1, 0)$.

Ta có: $\begin{cases} \vec{b} = k\vec{a} \\ \vec{b}.\vec{j} > 0 \\ |\vec{b}| = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k,\ y = -2k,\ z = 3k \\ y > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k,\ y = -2k,\ z = 3k \\ y > 0 \\ k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k,\ y = -2k,\ z = 3k \\ y > 0 \\ k = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,\ y = 2,\ z = -3 \\ k = -1 \end{cases}$$

Vậy $\vec{b} = (-1, 2, -3)$

Bài 3: Cho ba điểm: A (–2, 0, 2), B (1, 2, 3), C(x, y – 3, 7).
Tìm x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (x + 2, y - 3, 5)$

➲ *Cách 1:* $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (y - 13, 13 - x, 2x - 3y + 13)$

Ta có: A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 13 = 0 \\ 13 - x = 0 \\ 2x - 3y + 13 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = 13$

➲ *Cách 2:*

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{5}{1} \Leftrightarrow x = y = 13$

➲ *Cách 3:*

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3k \\ y - 3 = 2k \\ 5 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 13 \\ k = 5 \end{cases}$

Bài 4: Cho ba điểm: A(1, 1, 1), B(–1, –1, 0), C(3, 1, –1)
a. Tìm điểm M trên trục Oy cách đều hai điểm B, C
b. Tìm điểm N trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C.
c. Tìm điểm P trên mặt phẳng (Oxy) sao cho PA + PC nhỏ nhất.

Giải

a/ Gọi $M(0, y, 0) \in Oy$

M cách đều hai điểm B, C $\Leftrightarrow MB^2 = MC^2$

$\Leftrightarrow 1 + (y + 1)^2 = 9 + (y - 1)^2 + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{9}{4}$

Vậy $M(0, \dfrac{9}{4}, 0)$

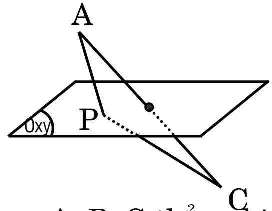
b/ Gọi $N(x, y, 0) \in (Oxy)$

N cách đều ba điểm A, B, C $\Leftrightarrow \begin{cases} NA^2 = NB^2 \\ NA^2 = NC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1 = (x+1)^2 + (y+1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

Vậy N $(2, -\frac{7}{4}, 0)$

c/ Gọi P(x, y, 0)



Nhận thấy A và C nằm khác phía đối với mp (Oxy) (do $z_A.z_C = -1 < 0$)

Ta có: PA + PC ≥ AC

Do đó: PA + PC nhỏ nhất

⇔ PA + PC = AC ⇔ P = AC ∩ (Oxy) ⇔ A, P, C thẳng hàng

Ta có: $\overrightarrow{AP} = (x - 1, y - 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, -2)$

A, P, C thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương ⇔ $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2k \\ y - 1 = 0 \\ -1 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy P(2, 1, 0)

Bài 5: Cho ΔABC có A(0, 0, 1), B(1, 4, 0), C(0, 15, 1)

a. Tính độ dài đường cao AK của ΔABC.

b. Tìm tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

c. Tìm trực tâm H của ΔABC.

Giải

a/ $\overrightarrow{AB} = (1, 4, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 15, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, 11, 1)$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (15, 0, 15) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

Ta cũng có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AK.BC = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AK = \dfrac{15\sqrt{2}}{BC} = \dfrac{15\sqrt{2}}{\sqrt{123}}$

b/ Gọi I(x, y, z). Ta có: $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI} \text{ đồng phẳng} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 + z^2 \\ -2z + 1 = -2x + 1 - 8y + 16 \\ y^2 = (y-15)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - z - 8 = 0 \\ 2y - 15 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{21}{2} \\ y = \dfrac{15}{2} \\ z = \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

Vậy $I(-\dfrac{21}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{23}{2})$

c/ Gọi H(x, y, z). Ta có: H là trực tâm ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 11y + z - 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 4 \\ z = -21 \end{cases}$$

Vậy: H(22, 4, –21)

Bài 6: Cho bốn điểm: A(1, 0, 1), B(–1, 1, 2), C(–1, 1, 0), D(2, –1, –2)

a. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

c. Tính độ dài đường cao AH của tứ diện ABCD.

Giải

a/ A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} \neq 0$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 1, -1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, -1, -3)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2, -4, 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 2 \neq 0$

Vậy A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

b/ Ta có: $\overrightarrow{CD} = (3, -2, -2)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -10$

$$\cos(AB, CD) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})| = \frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|} = \frac{10}{\sqrt{6}.\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{102}}$$

c/ $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{3}$

Ngoài ra: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{BCD}.AH = \dfrac{1}{3} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{S_{BCD}}$

Từ $\overrightarrow{BC}=(0,0,-2)$, $\overrightarrow{CD}=(3,-2,-2)$

Ta có: $[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}] = (-4, -6, 0)$

$$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+36} = \sqrt{13} \Rightarrow AH = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Bài 7: Cho ΔABC có A(1, 1, 1), B(5, 1, –2), C(7, 9, 1)

a. Tính cosin của góc A.

b. Chứng minh rằng góc B nhọn.

c. Tính độ dài đường phân giác trong của góc A.

d. Tìm tọa độ chân đường cao vẽ từ A.

Giải

a/ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4, 0, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 8, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 8, 3)$

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{24}{5.10} = \frac{12}{25}$$

b/ $\overrightarrow{BA} = (-4, 0, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 8, 3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 1 > 0 \Rightarrow$ góc B nhọn.

c/ Gọi D(x, y, z) là giao điểm đường phân giác trong của góc A với cạnh BC.

Ta có: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x = -2(5 - x) \\ 9 - y = -2(1 - y) \\ 1 - z = -2(-2 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy $D(\frac{17}{3}, \frac{11}{3}, -1)$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{\left(\frac{17}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - 1\right)^2 + (-1-1)^2} = \frac{2\sqrt{74}}{3}$$

d/ H(x, y, z) là chân đường vẽ từ A đến BC.

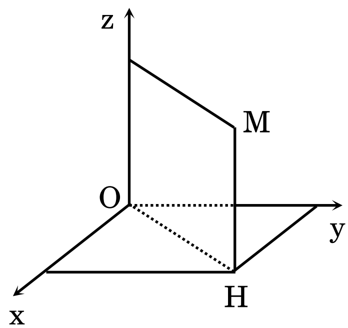
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases} (*)$$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-1, y-1, z-1)$, $\overrightarrow{BH} = (x-5, y-1, z+2)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 8, 3)$

Do đó: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-1)+8(y-1)+3(z-1)=0 \\ \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{387}{77} \\ y=\dfrac{85}{77} \\ z=-\dfrac{151}{77} \end{cases}$

Vậy $H\left(\dfrac{387}{77},\dfrac{85}{77},\dfrac{-151}{77}\right)$

- Trong các bài tập sau đây chúng ta sẽ lưu ý kỹ năng gắn trục tọa độ đề giải quyết các bài toán Hình không gian. Gốc tọa độ phải là điểm để có tam diện vuông.

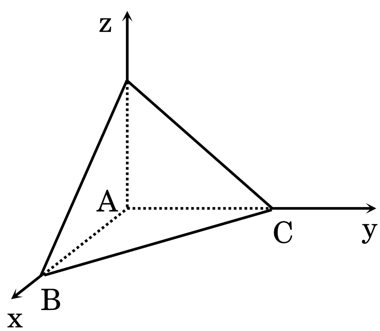


  Nếu H là hình chiếu vuông góc của M lên (Oxy) thì $x_M = x_H$, $y_M = y_H$

  Để biết tọa độ $M \in (Oxy)$ ta vẽ riêng hình trong mặt phẳng tọa độ quen thuộc và chú ý $z_M = 0$

  Vài tình huống cụ thể khi gặp tứ diện S.ABC.

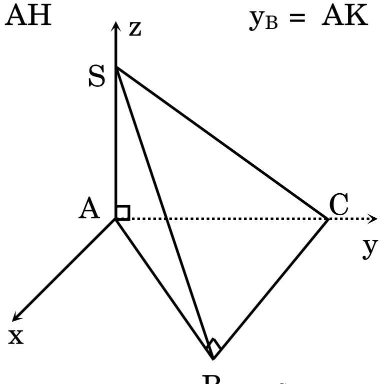
- Nếu SA ⊥ (ABC) và ΔABC ⊥ tại A

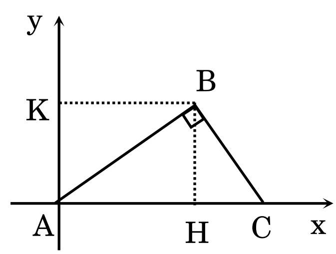


- Nếu SA ⊥ (ABC) và ΔABC tại B

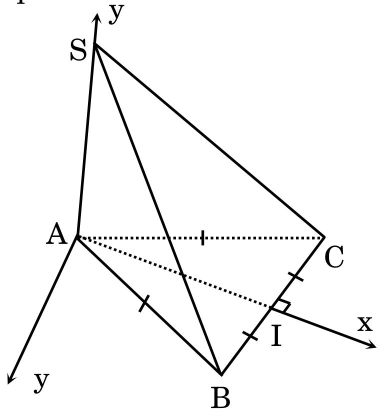
  Dùng hệ thức lượng trong ΔABC ⊥ ta xác định được tọa độ B

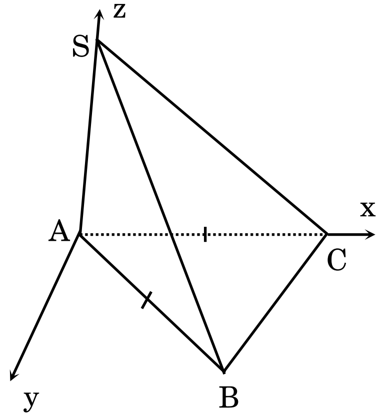
  $x_B = \overline{AH}$ $\quad y_B = \overline{AK}$ $\quad z_B = 0$





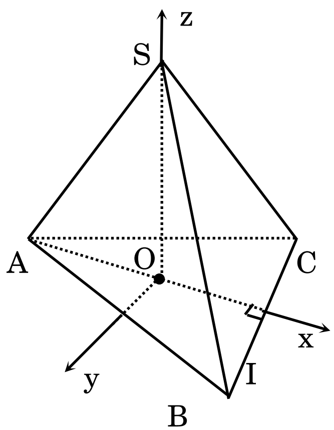
• Nếu SA ⊥ (ABC) và ΔABC cân tại A hay đều ta chọn Ox ⊥ BA hay Ox qua AC

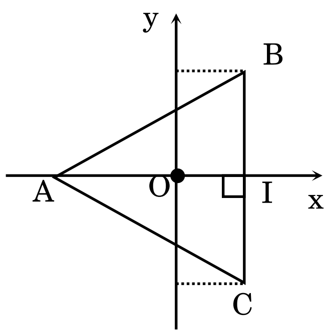




• Nếu S.ABC là hình chóp đều có ΔABC đều cạnh a

Gọi O là tâm đường tròn (ABC) thì SO ⊥ (ABC)





Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

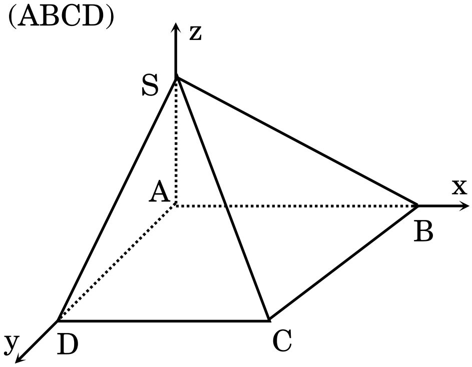
Ta có: $x_B = x_C = OI = \frac{1}{3}.AI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$y_B = -y_C = IB = \frac{a}{2}$

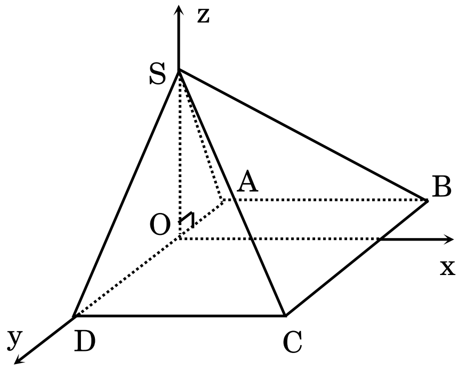
$x_A = \overline{OA} = -\frac{2}{3}AI = -\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = -\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{-a}{2}, 0\right)$

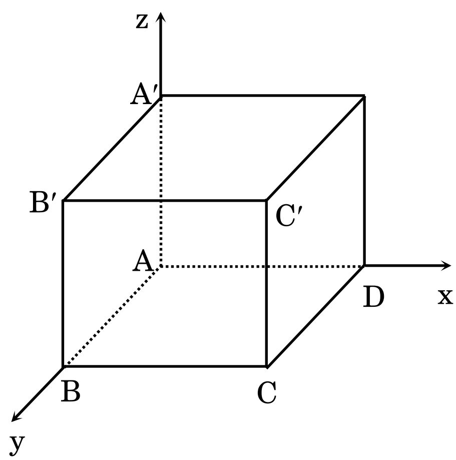
• Nếu S.ABCD là hình chóp có đáy ABCD hình chữ nhật (hay hình vuông) có SA ⊥ (ABCD)



- Nếu S.ABCD là hình chóp có (SAB) ⊥ (ABCD) và ABCD hình chữ nhật vẽ SO ⊥ AB thì SO ⊥ (ABCD)



- Nếu ABCD.A′B′C′D′ là hình hộp chữ nhật (hay lập phương)



Bài 8. Cho tứ diện N.ABC có NA vuông góc (ABC), NA = a, tam giác ABC vuông cân tại A có AB = AC = a. Từ trung điểm M của BC vẽ đường vuông góc (ABC) lấy điểm I cùng phía với N sao cho MI = $\frac{a}{2}$. Gọi H là chân đường vuông góc vẽ từ A đến NC. Chứng minh: AH vuông góc NI.

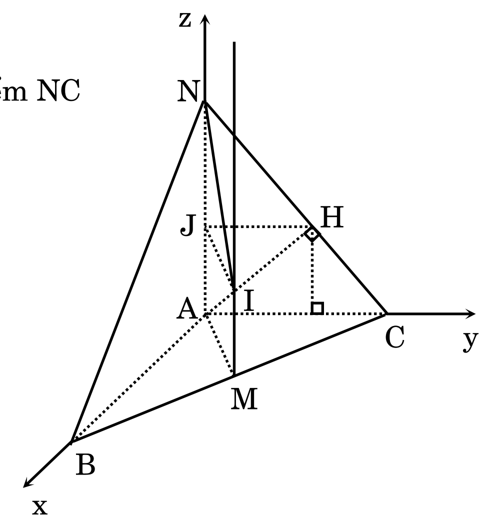
Giải

Gắn trục tọa độ như hình vẽ

Ta có: A(0, 0, 0), B(a, 0, 0), C(0, a, 0), N(0, 0, a)

Ta có: $M\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ trung điểm AB

$\Rightarrow I\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$



ΔANC vuông cân tại A nên H là trung điểm NC

Vậy $H\left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AH} = \left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

và $\overrightarrow{NI} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{NI} = 0 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$

$\Rightarrow AH \perp NI$

Bài 9. Đề dự bị Đại học khối A 2006

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc (ABCD), đáy ABCD hình chữ nhật AB = a, AD = 2a, SB tạo với mp(ABCD) góc 60°. Trên SA lấy M sao cho AM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, SD cắt (BCM) tại N. Tính thể tích khối S.BCNM.

Giải

Ta có: $\Delta SAB \perp \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SA}{AB}$

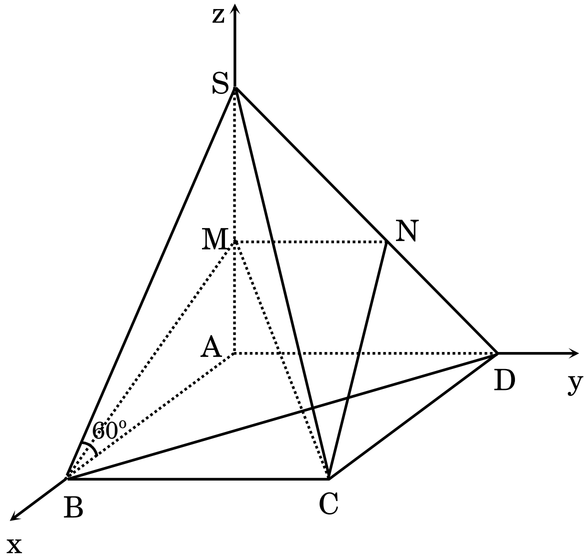
$\Rightarrow SA = a\sqrt{3}$

Mà $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vậy M

trung điểm SA. Mp(SAD) chứa AD // (BCM)

Nên (SAD) cắt (BCM) theo giao tuyến MN // AD

Gắn trục tọa độ như hình vẽ thì B(a, 0, 0), D(0, 2a, 0), C(a, 2a, 0), S(0, 0, $\sqrt{3}$ a), M(0, 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a), N(0, a, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a)



Ta có: $\overrightarrow{SM} = (0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$,

$\overrightarrow{SB} = (a, 0, -a\sqrt{3})$

$\overrightarrow{SC} = (a, 2a, -\sqrt{3}a)$, $\overrightarrow{SN} = (0, a, -\frac{a\sqrt{3}}{2})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SM} \wedge \overrightarrow{SC} = \left(a^2\sqrt{3}, -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

Ta có: $V_{S.BCNM} = V_{S.BCM} + S_{S.MNC}$

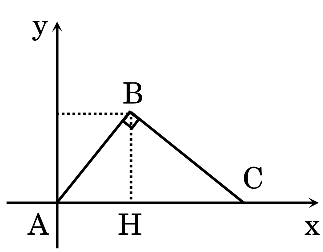
$$= \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{SM} \wedge \overrightarrow{SC}).\overrightarrow{SB}\right| + \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{SM} \wedge \overrightarrow{SC}).\overrightarrow{SN}\right|$$

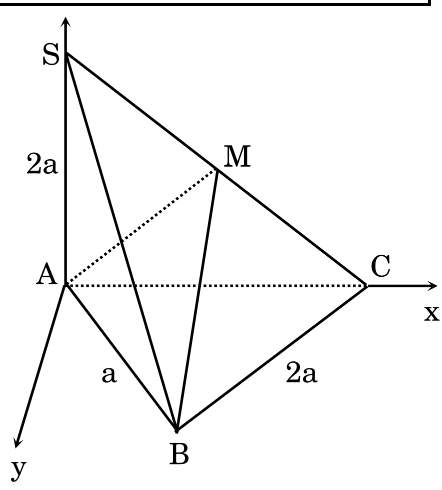
$$= \frac{1}{6}\left|a^3\sqrt{3}\right| + \frac{1}{6}\left|-\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1}{4}a^3\sqrt{3}$$

Bài 10. Đề dự bị Đại học khối D 2003

Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc (ABC), tam giác ABC vuông tại B, AB = a, BC = SA = 2a. Gọi M trung điểm SC. Chứng minh tam giác AMB cân tại M. Tính diện tích ΔAMB.

Giải





Gắn trục như hình vẽ

Ta có: $A(0, 0, 0)$, $C(a\sqrt{5}, 0, 0)$, $S(0, 0, 2a)$

$\Delta ABC \perp$ tại B $\Rightarrow AB^2 = AH.AC$

$$\Rightarrow x_B = AH = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \text{ và } BH = y_B = \frac{BA.BC}{AC} = \frac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Vậy $B\left(\frac{a}{\sqrt{5}}, \frac{2a}{\sqrt{5}}, 0\right)$ Trung điểm SC là $M\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}, 0, a\right)$

Vậy $\quad MA^2 = \frac{5a^2}{4} + a^2 = \frac{9a^2}{4}$

$$MB^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{5} - \frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{4a^2}{5} + a^2$$

$$= \frac{45a^2}{100} + \frac{9a^2}{5} = \left(\frac{9}{20} + \frac{9}{5}\right)a^2 = \frac{45}{20}a^2 = \frac{9a^2}{4}$$

Vậy MA = MB nên ΔMAB cân tại M

Ta có: $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}, 0, a\right)$ và $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{5}}{5}, \frac{2a\sqrt{5}}{5}, 0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{2a^2\sqrt{5}}{5}, \frac{a^2\sqrt{5}}{5}, a^2\right)$$

Do đó: $dt(\Delta MAB) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{20a^4}{25} + \frac{5a^4}{25} + a^4}$

$$= \frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 1} = a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 11. Đề dự bị Đại học khối D/2007

Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác vuông, AB = AC = a, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N là trung điểm của AA′, BC′. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA′ và BC′. Tính thể tích khối M.A′B′C′.

Giải

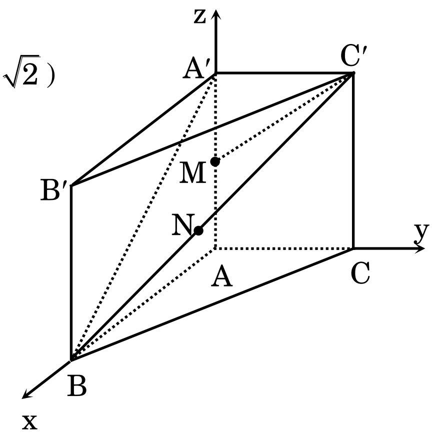
Gắn trục như hình vẽ

Ta có: $B(a, 0, 0)$, $C(0, a, 0)$, $A'(0, 0, a\sqrt{2})$, $B'(a, 0, a\sqrt{2})$, $C'(0, a, a\sqrt{2})$

$\Rightarrow M(0, 0, \frac{a\sqrt{2}}{2})$ và $N(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2})$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, $\overrightarrow{AA'} = (0, 0, a\sqrt{2})$

$\overrightarrow{BC'} = (-a, a, a\sqrt{2})$



Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA'} = 0 \Rightarrow MN \perp AA'$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC'} = 0 \Rightarrow MN \perp BC'$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AA′ và BC′

Ta có: $BA = d(B, MA'C') = a$

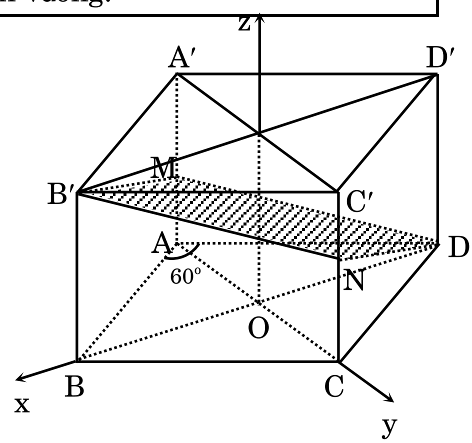
$$Dt(\Delta MA'C') = \frac{1}{2}MA'.A'C' = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $V_{M.A'BC'} = V_{B.A'MC'} = \frac{1}{3}BAdt(\Delta MAA') = \frac{a}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 12. Tuyển sinh Đại học khối B 2003

Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $BAD = 60^o$. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm AA′ và CC′. Chứng minh bốn điểm B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Tính độ dài AA′ theo a để tứ giác B′MDN là hình vuông.

Giải



Gắn trục tọa độ như hình vẽ

Đặt AA′ = h

ΔBAD cân tại A có $BAC = 60^o$

nên là Δ đều $\Rightarrow BD = a$ và $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $B(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $D(-\frac{a}{2}, 0, 0)$,

$C(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0)$, $A(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0)$,

$B'(\frac{a}{2}, 0, h)$, $D'(-\frac{a}{2}, 0, h)$, $C'(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, h)$, $A'(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, h)$

$M(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$, $N(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2})$

Ta có $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DN} = \left(\frac{-ah\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } \overrightarrow{DB'} = (a, 0, h)$$

Do đó: $(\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DN}).\overrightarrow{DB'} = 0$

$\Rightarrow$ D, M, N, B′ đồng phẳng

Ta có $\overrightarrow{NB'} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{h}{2}\right) = \overrightarrow{DM}$

và $DM = DN = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}}$

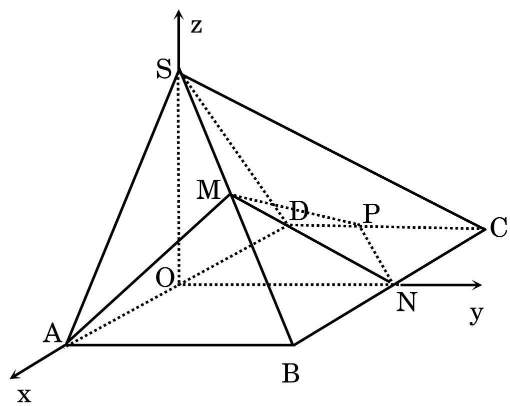
Vậy B′MDN là hình thoi

Do đó: B′MDN là hình vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} + \frac{h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{h^2}{4} \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$$

Bài 13. (Đề Tuyển sinh Đại học khối A 2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P là trung điểm SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc BP và tính thể tích khối đa diện CMNP.

Giải



Gọi O là trung điểm AD

ΔSAD đều nên SO $\perp$ AD

Mà mp(SAD) vuông góc mp(ABCD)

nên SO $\perp$ mp(ABCD)

Gắn trục tọa độ như hình vẽ thì

$A\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$, $D\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$,

$B\left(\frac{a}{2}, a, 0\right)$ $C\left(-\frac{a}{2}, a, 0\right)$, $S\left(0, 0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}),\ N(0, a, 0),\ D(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$$

a/ Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $\overrightarrow{BP} = \left(-a, \frac{-a}{2}, 0\right)$

Do $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 0 = 0$ nên $AM \perp BP$

b/ Ta có: $\overrightarrow{CN} = \left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$; $\overrightarrow{CP} = \left(0, -\frac{a}{2}, 0\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN} \wedge \overrightarrow{CP} = \left(0, 0, -\frac{a^2}{4}\right) \text{ và } \overrightarrow{CM} = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Vậy $V_{CMNP} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{CN} \wedge \overrightarrow{CP}\right)\overrightarrow{CM}\right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1:

a) Tìm vectơ đơn vị vuông góc với trục Ox và vuông góc với $\vec{a} = (3, 6, 8)$

b) Tìm $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a} = (2\sqrt{2}, -1, 4)$ biết rằng $|\vec{b}| = 10$

BT2: Cho $\vec{a} = (1, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, 0, m)$. Tìm m để góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45^o

BT3: Cho ba vectơ $\vec{a} = (3, -2, 4)$, $\vec{b} = (5, 1, 6)$, $\vec{c} = (-3, 0, 2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện: $\vec{a}.\vec{x} = 4$, $\vec{b}.\vec{x} = 35$, $\vec{c}$ vuông góc $\vec{x}$.

BT4: Cho hai điểm A(1, 2, 3), B(2, 0, –1)

a) Tìm điểm M thuộc trục Ox cách đều hai điểm A và B.

b) Tìm điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) cách đều hai điểm A, B và cách gốc O một khoảng bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$

BT5: Cho hai điểm A(0, 1, 2), B(–1, 1, 0)

a) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔOAB

b) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔOAB

BT6: Cho A(–3; –2; 6), B(–2; 4; 4). O là gốc tọa độ

a) Chứng minh O, A, B là 3 đỉnh của 1 tam giác.

b) Tính diện tích ΔOAB và độ dài đường cao hạ từ O.

c) Tìm chân đường phân giác trong vẽ từ O của ΔOAB.

BT7: Cho A(0, 0, 3); B(1, 1, 5); C(–3, 0, 0); D(0, –3, 0)

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ giác.

b) Tính diện tích ΔACD và các góc của tam giác.

c) Tính $[(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})]\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}^2.\overrightarrow{BC}$

BT8: Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′ với:

A(1, 0, 1); B(2, 1, 2); D(1, –1, 1); C′(4, 5, –5).

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

b) Tính thể tích của hình hộp ABCD.A′B′C′D′.

BT9: Cho A(0, 1, 0); B(2, 3, 1); C(–2, 2, 2); D(1, –1, 2)

a) Chứng minh ABCD là tứ diện có 3 mặt vuông.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao hạ từ A.

c) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Chứng minh AG vuông góc mp(BCD).

BT10: Cho A(2, –1, 0); B(–3, 1, 1)

a) Tìm M trên (Oyz) để MA + MB ngắn nhất.

b) Tìm N trên (Oyz) để $|MA - NB|$ dài nhất.

BT11: Đề Cao đẳng 2009

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có AB = a, SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm SA, SB, CD. Chứng minh MN vuông góc SK. Tính thể tích khối A.MNK (ĐS: $\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$)

BT12: Đề Cao đẳng 2008

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD), SA = 2a, ABCD là hình thang có $\hat{A} = \hat{B}$ = 1v, AB = BC = a, AD = 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Chứng minh BCNM là hình chữ nhật. Tính $V_{S.BCNM}$ (Đáp số: $\frac{a^3}{3}$).

BT13: Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Gọi M, N là trung điểm AD và BB′.

a) Chứng minh MN vuông góc A′C.

b) Trên các đoạn BB′, CD, A′D′ lấy I, J, K sao cho B′I = CJ = D′K. Chứng minh AC′ vuông góc (IJK).

BÀI 2

MẶT PHẲNG VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. VECTƠ PHÁP TUYẾN (HAY PHÁP VECTƠ) CỦA MẶT PHẲNG

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng α nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc mặt phẳng α.

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương.

Nếu giá của $\vec{a}, \vec{b}$ song song hoặc nằm trên mặt phẳng α thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một vectơ pháp tuyến của mp α.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Với $\vec{n} = (A, B, C)$ là vectơ pháp tuyến)

- Phương trình mặt phẳng qua điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ và có vtpt $\vec{n} = (A, B, C)$ là:

$$\boxed{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0}$$

- Nếu mặt phẳng α cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) ($a.b.c \neq 0$) thì α có phương trình:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

. (Oxy): $z = 0$. (Oxz): $y = 0$. (Oyz): $x = 0$

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng :

α: $Ax + By + Cz + D = 0$ có PVT $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$

α': $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ có PVT $\vec{n}_{\alpha'} = (A', B', C')$

a/ α cắt $\alpha' \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C' \Leftrightarrow [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_{\alpha'}] \neq \vec{0}$

(Ký hiệu A : B : C = A' : B' : C' $\Leftrightarrow$ $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$) với $A'B'C' \neq 0$

b/ $\alpha // \alpha' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$ với $A'B'C'D' \neq 0$

c/ $\alpha \equiv \alpha' \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$ với $A'B'C'D' \neq 0$

d/ $\alpha \perp \alpha' \Leftrightarrow \vec{n}_{\alpha}.\vec{n}_{\alpha'} = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Khoảng cách từ điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ đến mặt phẳng α : Ax + By + Cz + D = 0

$$\boxed{d(M,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

☞ ***Lưu ý:*** Cho mặt phẳng mp α: Ax + By + Cz + D = 0.

Đặt f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D. với $M(x_M, y_M, z_M)$, $N(x_N, y_N, z_N)$

Ta có: $f(x_M, y_M, z_M).\, f(x_N, y_N, z_N) > 0 \Leftrightarrow$ M và N nằm cùng phía đối với mặt phẳng α.

$f(x_M, y_M, z_M).\, f(x_N, y_N, z_N) < 0 \Leftrightarrow$ M và N nằm khác phía đối với mặt phẳng α.

☞ **Trường hợp đặc biệt:**

Khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng tọa độ:

$d(M, (Oxy)) = |z_M|$ $\quad$ $d(M, (Oxz)) = |y_M|$

$d(M, (Oyz)) = |x_M|$

V. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Cho hai mặt phẳng α, α′ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n}' = (A', B', C')$

Góc φ giữa α và α′ $(0 \leq \varphi \leq 90^o)$

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|} = \frac{|AA + BB + CC|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Viết phương trình mặt phẳng:

a. Đi qua ba điểm A(2, 0, –1), B(1, –2, 3), C (0, 1, 2)

b. Đi qua hai điểm A(1, 1, –1), B(5, 2, 1) và song song trục Oz

c. Đi qua hai điểm A(1, 1, –1), B(5, 2, 1) và vuông góc mặt phẳng β: $-x + z + 10 = 0$

d. Qua M(2; –1; –5) và vuông góc hai mặt phẳng (α): $x + 3y - z = 0$, (β): $2x + y - 4z - 8 = 0$

e. Đi qua trục Ox và điểm N(3, –1, 2)

f. Đi qua điểm M(2, –1, 4) và song song mp(α): $3x - y + 2z = 0$

Giải

a/ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; 1; 3)$

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm.

$$\vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-10, -5, -5) = -5(2, 1, 1)$$

$\Rightarrow$ (P): $2(x - 2) + y + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 3 = 0$

b/ Gọi (Q) là mặt phẳng cần tìm.

Oz có vtcp $\vec{k} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 2)$

$\Rightarrow \vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{k}] = (1, -4, 0)$

$\Rightarrow$ (Q): $1(x - 1) - 4(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0$

c/ Gọi (R) là mặt phẳng cần tìm.

Ta có: $\vec{n}_\beta = (-1, 0, 1)$

$\Rightarrow \vec{n}_R = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_\beta] = (1, -6, 1)$

$\Rightarrow$ (R): $1(x - 1) - 6(y - 1) + 1(z + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 6y + z + 6 = 0$

d/ $\vec{n}_\alpha = (1, 3, -1)$, $\vec{n}_\beta = (2, 1, -4) \Rightarrow \vec{n}_p = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (-11, 2, -5)$

$\Rightarrow$ (P): $-11(x - 2) + 2(y + 1) - 5(z + 5) = 0 \Leftrightarrow -11x + 2y - 5z - 1 = 0$

e/ Gọi (T) là mặt phẳng cần tìm.

Ta có: $\vec{a}_{ox} = \vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow \vec{n}_T = [\overrightarrow{ON}, \vec{i}] = (0, 2, 1) \Rightarrow$ (T): $2y + z = 0$

f/ Gọi (S) là mặt phẳng cần tìm.

(S) // (α) $\Rightarrow \vec{n}_s = \vec{n}_\alpha = (3, -1, 2)$

$\Rightarrow$ (S): $3(x - 2) - 1(y + 1) + 2(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 2z - 15 = 0$

Bài 2: Viết phương trình mặt phẳng Δ qua điểm M(4, –1, 1) và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OA = 2OB = 3OC

Giải

Gọi A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c). (a.b.c ≠ 0) $\Rightarrow$ α: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Ta có: M $\in$ α $\Rightarrow \frac{4}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ (1)

Và: OA = 2OB = 3OC $\Rightarrow$ a = 2b = 3c $\Rightarrow b=\frac{a}{2}$, $c=\frac{a}{3}$

Thay vào (1): $\frac{4}{a}-\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=1 \Rightarrow a=5,\ b=\frac{5}{2},\ c=\frac{5}{3}$

$$\Rightarrow \alpha: \frac{x}{5}+\frac{2y}{5}+\frac{3z}{5}=1 \Leftrightarrow x+2y+3z-5=0$$

Bài 3. Tuyển sinh ĐH khối B/09

Cho A(1, 2, 1); B(–2, 1, 3); C(2, –1, 1); D(0, 3, 1)

Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A, B và khoảng cách từ C đến (α) bằng khoảng cách từ D đến (α).

- *Trường hợp 1:* C, D nằm cùng phía đối với (α)

  Do d(C, α) = d(D, α) nên CD // (α)

  Vậy (α) có VTCP $\overrightarrow{AB}$ = (–3; –1; 2) và $\overrightarrow{CD}$ = (–2; 4; 0)

  Vậy PVT $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}$ = (–8, –4, –14) // (4, 2, 7)

  $\Rightarrow$ Phương trình (α): 4(x – 1) + 2(y – 2) + 7(z – 1) = 0

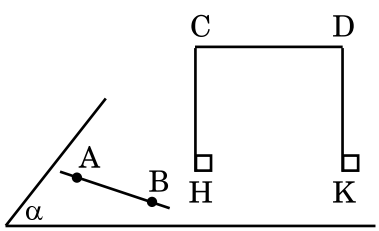
  $\Leftrightarrow$ 4x + 2y + 7z – 15 = 0

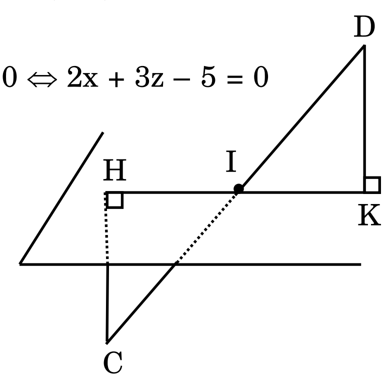
- *Trường hợp 2:* C, D nằm hai phía đối với (α) thì (α) qua I(1, 1, 1) là trung điểm CD thì (α) qua I(1, 1, 1) là trung điểm CD

  Vậy (α) có VTCP $\overrightarrow{AB}$ = (–3; –1; 2) và $\overrightarrow{AI}$ = (0, –1, 0)

  $\Rightarrow$ PVT $\vec{m}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AI}$ = (2, 0, 3)

  Phương trình (α) là: 2(x – 1) + 3(z – 1) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x + 3z – 5 = 0





Bài 4: Đề tuyển sinh Đại học khối B/2008

Cho điểm A(0, 1, 2); B(2, –2, 1); C(–2, 0, 1)

a. Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm A, B, C.

b. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (α): 2x + 2y + z – 3 = 0 sao cho MA = MB = MC

Giải

a/ Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_{ABC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2(1, 2, -4)$

Vậy phương trình mp(ABC)

$$1(x - 0) + 2(y - 1) - 4(z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - 4z + 6 = 0$$

b/ Gọi M(x, y, z). Ta có:

$$MA = MB = MC$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y - 2z - 4 = 0 & (1) \\ 4x + 2y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

Mà M $\in$ (α) $\Rightarrow$ 2x + 2y + z – 3 = 0   (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow$ M(2, 3, –7)

Bài 5: Cho hai mặt phẳng:

$$\alpha: 2x - y + 2z - 4 = 0;\ \beta: -4x + 2y - 4z + 9 = 0$$

a. Chứng minh rằng α // β . Tính khoảng cách giữa α và β

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều α và β

Giải

a/ Ta có: $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-4}{9} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$

Lấy A(0, –4, 0) $\in$ α

$$d(\alpha, \beta) = d(A, \beta) = \frac{|-8+9|}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{1}{6}$$

b/ Ta có:

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow d(M, \alpha) = d(M, \beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2x - y + 2z - 4|}{3} = \frac{|-4x + 2y - 4z + 9|}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - y + 2z - 4 = -2x + y - 2z + \dfrac{9}{2} \\ 2x - y + 2z - 4 = 2x - y + 2z - \dfrac{9}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x - y + 2z - \frac{17}{4} = 0$$

Bài 6: Cho hai điểm A(0, 0, –3), B(2, 0, –1) và mp (P): $3x - 8y + 7z - 1 = 0$
Tìm tọa độ điểm $C \in (P)$ sao cho ΔABC đều.

Giải

Gọi C (x, y, z). Ta có: $\begin{cases} AC = AB \\ AC = BC \\ C \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 = AB^2 \\ AC^2 = BC^2 \\ C \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 8 & (1) \\ x + z + 1 = 0 & (2) \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ: (2) và (3) $\Rightarrow z = -x - 1,\ y = \dfrac{-x-2}{2}$

Thay vào (1) :

$$x^2 + \frac{(x+2)^2}{4} + (x-2)^2 = 8 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x = -\frac{2}{3}$$

Vậy có hai điểm C: C(2, –2, –3) và $C(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3})$

Bài 7: Viết phương trình mặt phẳng (P) qua hai điểm A(3, 0, 0), C(0, 0, 1) thỏa điều kiện

a. (P) cắt trục tung tại điểm B sao cho ΔABC có diện tích bằng $\frac{7}{2}$.

b. (P) tạo với mặt phẳng (Oxy) góc 30^o.

Giải

a/ Gọi $B(0, b, 0) \in y'Oy$

Nếu $b = 0 \Rightarrow$ B trùng O $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3}{2}$ (trái giả thiết). Vậy $b \neq 0$

Do đó phương trình (P) có dạng $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (b, 3, 3b)$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \frac{1}{2}\sqrt{10b^2 + 9}$

Do đó: $S_{ABC} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10b^2 + 9} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow b = \pm 2$

Vậy phương trình (P): $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$

b/ Gọi $B = (P) \cap Oy \Rightarrow B(0, b, 0)$

($b \neq 0$; vì nếu $b = 0$ thì $(P) \equiv (Oxz) \Rightarrow (P) \perp (Oxy)$)

Vậy phương trình (P) dạng (P): $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow bx + 3y + 3bz - 3b = 0$

Ta có: $\vec{n}_p = (b, 3, 3b)$: (Oxy) có VTPT $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Vậy: $\cos((P), (Oxy)) = \cos 30^o$

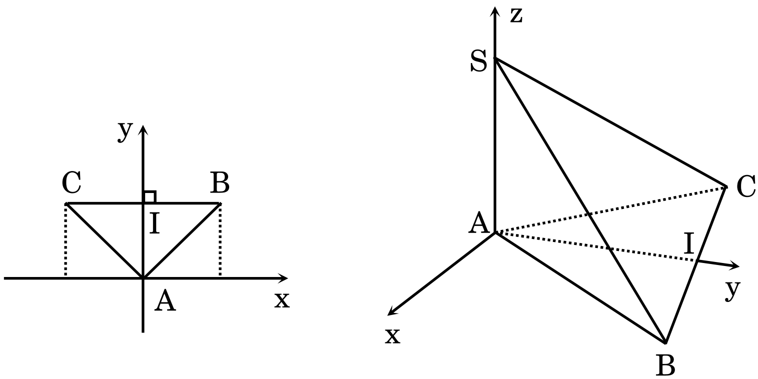
$$\Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_p.\vec{k}|}{|\vec{n}_p|.|\vec{k}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{b^2 + 9 + 9b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow b = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Vậy phương trình (P) là: $\frac{x}{3} \pm \frac{\sqrt{2}y}{3} + \frac{z}{1} = 1$

Bài 8: Đề dự bị tuyển sinh khối A/2003.

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a. SA = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SA vuông góc mp(ABC). Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC).

Giải



Gọi I trung điểm BC gắn trục tọa độ như hình thì

$$B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right);\ C\left(-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0\right);\ S\left(0,0,\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SB} = \frac{a}{2}(1,\ \sqrt{3},-\sqrt{6}) \text{ và } \overrightarrow{SC} = \frac{a}{2}(-1,\ \sqrt{3},-\sqrt{6})$$

Vậy $\quad \overrightarrow{SB} \wedge \overrightarrow{SC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(0,\sqrt{2},1)$

Phương trình mp(SBC) là: $0(x-0) + \sqrt{2}(y-0) + 1\left(z - \frac{a\sqrt{6}}{2}\right) = 0$

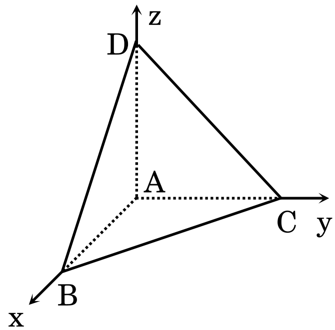
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}y + z - \frac{a\sqrt{6}}{2} = 0$$

Do đó: $d(A, mp(SBC)) = \dfrac{\left|-\frac{a\sqrt{6}}{2}\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 9: Tuyển sinh ĐH khối D/2002

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc mp(ABC), AC = AD = 4cm, AB = 3cm, BC = 5cm. Tính khoảng cách tại A đến mp(BCD).

Giải



ΔABC vuông tại A vì $BC^2 = 25 = AB^2 + AC^2$

Gắn hệ tọa độ như hình vẽ thì

A(0, 0, 0); B(3, 0, 0); C(0, 4, 0); D(0, 0, 4)

Phương trình mặt chắn (BCD):

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

Vậy: $d(A, mp(BCD)) = \dfrac{|0 - 12|}{\sqrt{16 + 9 + 9}} = \dfrac{12}{\sqrt{34}}$

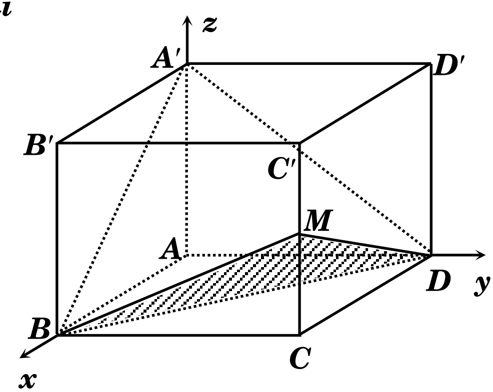
Bài 10: Tuyển sinh Đại học khối A/2003

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có A(0, 0, 0); B(a, 0, 0); D(0, a, 0); A′(0, 0, b) với a, b > 0. Gọi M là trung điểm CC′.

a. Tính thể tích tứ diện BDA′M.

b. Tìm tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để mặt phẳng (A′BD) vuông góc mặt phẳng (MBD).

Giải



Ta có: C(a, a, 0); C′(a, a, b)

Vậy $M\left(a, a, \dfrac{b}{2}\right)$

a/ Ta có: $\overrightarrow{BD} = (-a, a, 0)$;

$\overrightarrow{BA'} = (-a, 0, b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA'} = (ab, ab, a^2)$

và $\overrightarrow{BM} = \left(0, a, \dfrac{b}{2}\right)$

Vậy $V_{BDA'M} = \dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA'})\overrightarrow{BM}\right| = \dfrac{1}{6}\left|0 + a^2 + \dfrac{a^2b}{2}\right| = \dfrac{1}{4}a^2b$

b/ Mp(A′BD) có PVT $\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BA'} = (ab, ab, a^2)$

Ta có: $\overrightarrow{BD} = (-a, a, 0)$;

$\overrightarrow{BM} = \left(0, a, \dfrac{b}{2}\right)$

Vậy: mp(MDB) có PVT $\vec{m} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BM} = \left(\dfrac{ab}{2}, \dfrac{ab}{2}, -a^2\right)$

Mp(MDB) vuông góc mp(A′BD) $\Leftrightarrow \vec{m}.\vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 = a^4 \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

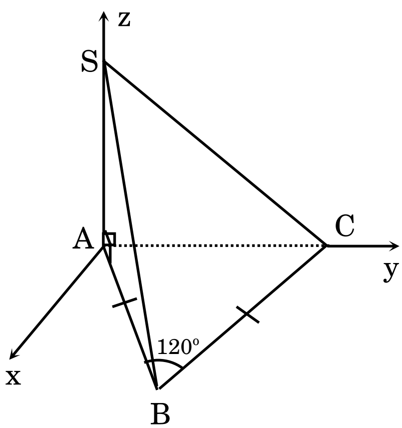
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \text{ (do a, b > 0)}$$

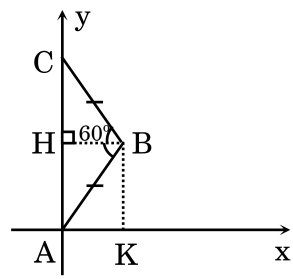
Bài 11: Đề dự bị Đại học khối B/2004

Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a, SA vuông góc mp(ABC), AB = BC = 2a, $\widehat{ABC} = 120^o$. Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC).

Giải

Gắn hệ trục như hình vẽ.





Δ vuông ABH có AB = 2a, $\widehat{ABH} = 60^o$

nên $\sin 60^o = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = y_B = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\cos 60^o = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = x_B = 2a.\left(\dfrac{1}{2}\right) = a$

Vậy $B(a, a\sqrt{3}, 0)$; $C(0, 2a\sqrt{3}, 0)$; $S(0, 0, 3a)$

Ta có: $\overrightarrow{SB} = (a, a\sqrt{3}, -3a) = a(1, \sqrt{3}, -3)$

$\overrightarrow{SC} = (0, 2a\sqrt{3}, -3a) = a(0, 2\sqrt{3}, -3)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = \overrightarrow{SB} \wedge \overrightarrow{SC} = a^2(3\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(3, \sqrt{3}, 2)$

Phương trình mp(SBC) là: $3(x - 0) + \sqrt{3}(y - 0) + 2(z - 3a) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + \sqrt{3}y + 2z - 6a = 0$

Vậy d(A, mp(SBC)) = $\dfrac{|0-6a|}{\sqrt{9+3+4}} = \dfrac{6a}{4} = \dfrac{3a}{2}$

Bài 12: Đề dự bị ĐH khối A/2007

Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có AB = a, AC = 2a, AA′ = $2a\sqrt{5}$, BAC = 120^o. Gọi M là trung điểm CC′. Chứng minh MB vuông góc MA′. Tính khoảng cách từ A đến (A′BM).

Giải

$\Delta AHB \perp \Rightarrow \sin 30^o = \dfrac{HB}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y_B = \dfrac{-1}{2}a$

$\cos 30^o = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

A(0,0,0), $B(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a, -\dfrac{a}{2}, 0)$

$A'(0,0,2a\sqrt{5})$, $C(0,2a,0)$, $M(0,2a,a\sqrt{5})$.

$\overrightarrow{MA'} = \left(0, -2a, a\sqrt{5}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{5a}{2}, -a\sqrt{5}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MB} = 0 + 5a - 5a = 0 \Rightarrow MA' \perp MB$

Ta có: $\overrightarrow{MA'} = a(0, -2, \sqrt{5})$ và $\overrightarrow{MB} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{3}, -5, -2\sqrt{5})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB} = \frac{a^2}{2}(9\sqrt{5}, \sqrt{15}, 2\sqrt{3})$$

Phương trình mp(MA′B) qua A′

$$9\sqrt{5}(x - 0) + \sqrt{15}(y - 0) + 2\sqrt{3}(z - 2a\sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{5}x + \sqrt{15}y + 2\sqrt{3}z - 4a\sqrt{15} = 0$$

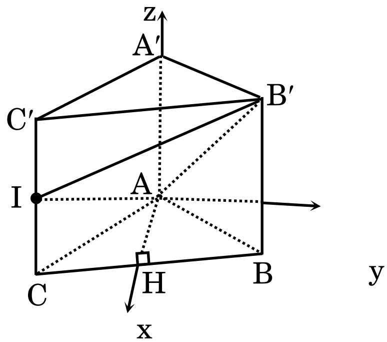
Vậy d(A, MA′B) = $\dfrac{|-4a\sqrt{15}|}{\sqrt{405+15+12}} = \dfrac{4a\sqrt{15}}{\sqrt{432}} = \dfrac{4a\sqrt{15}}{\sqrt{432}} = \dfrac{4a\sqrt{15}}{12\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

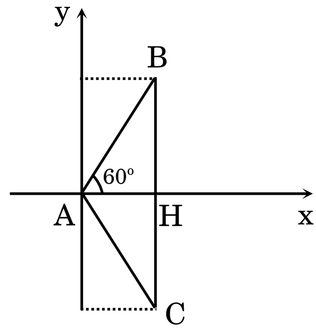
Bài 13: Đề dự bị Đại học khối A/2003.

Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có tam giác ABC cân với AB = AC = a, BAC = 120°, BB′ = a. Gọi I trung điểm CC′. Chứng minh tam giác AB′I vuông. Tính cos góc của hai mp(ABC) và (AB′I).

Giải

Gắn trục tọa độ như hình vẽ





Ta có $\sin 60^\circ = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$

Vậy: $B\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $C'\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$, $B'\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, a\right) = \dfrac{a}{2}(1, \sqrt{3}, 2)$

$\overrightarrow{AI} = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{-a\sqrt{3}}{2}, \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a}{2}\ (1, -\sqrt{3}, 1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AI} = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^3}{4} + \dfrac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow AB' \perp AI$

Vậy $\Delta AB'I$ vuông tại A

Ta có: PVT của (ABC) là $\vec{i} = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{AI} = \dfrac{a^2}{4}(3\sqrt{3}, 1, -2\sqrt{3})$

Vậy PVT của (AB′I) là $\vec{n}\,(3\sqrt{3},\ 1,\ -2\sqrt{3})$

Gọi φ là góc của (ABC) và (AB′I)

Ta có: $\cos\varphi = \left|\cos(\vec{i},\vec{n})\right| = \dfrac{|\vec{i}.\vec{n}|}{|\vec{i}|.|\vec{n}|} = \dfrac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{40}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$

Bài 14: Đề dự bị Đại học khối A/2006

Cho hình hộp đứng ABCD.A′B′C′D′ có AB = AD = a, AA′ = $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, BAC = 60°. Gọi M, N lần lượt là trung điểm A′D′ và A′B′. Chứng minh AC′ vuông góc mp(BDMN). Tính thể tích khối chóp A.BDMN.

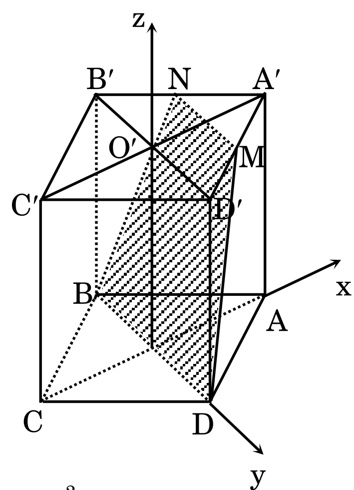
Giải

ABCD là hình thoi có ΔABC đều gắn trục tọa độ như hình vẽ

Ta có: $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$, $A'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(0, \dfrac{a}{2}, 0\right)$, $D'\left(0, \dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$B\left(0, -\dfrac{a}{2}, 0\right)$, $B'\left(0, -\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$, $C'\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$



Do đó: $M\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}, \dfrac{a}{4}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{a}{4}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Mp(BDMN) có VTCP là:

$\overrightarrow{BD} = (0,\ a,\ 0) = a(0,\ 1,\ 0)$

và $\overrightarrow{DM} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{a}{4}, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{a}{4}(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{DM} = \dfrac{a^2}{4}(2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}) = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}(2, 0, -1)$

Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \left(-a\sqrt{3}, 0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{-a\sqrt{3}}{2}(2,\ 0,\ -1)$

Do $\vec{n}$ // $\overrightarrow{AC'}$ vậy AC′ ⊥ (BDMN)

Phương trình mp(NMBD): 2(x – 0) -1.(z – 0) = 0 ⇔ 2x – z = 0

Vậy AH = d(A, NMDB) = $\dfrac{|a\sqrt{3}|}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a}{4}(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$

và $\overrightarrow{MN} = \left(0, -\frac{a}{2}, 0\right) = -\frac{a}{2}(0,1,0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{MN} = -\frac{a^2}{8}(-2\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}(2,0,1)$$

Ta có $dt(NMBD) = dt(NMB) + dt(BMD)$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{MN}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{DM}\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}\sqrt{5} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\sqrt{5} = \frac{3a^2}{16}\sqrt{15}$$

Do đó $V_{A.BPMN} = \frac{1}{3}AH\ dt(NMDB) = \frac{a\sqrt{15}}{15}.\frac{3a^2\sqrt{15}}{16} = \frac{3a^2}{16}$

Bài 15:

Cho A(a, 0, 0); B(0, b, 0); C(0, 0, c) với a, b, c dương thay đổi mà $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm a, b, c sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất.

Giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Ta có: $d = d(O, mp(ABC)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$

Do bất đẳng thức Cauchy: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}$ (1)

Và $3 = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

Lấy (1) nhân (2) vế với vế, ta được:

$$3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{3}$$

Vậy: $d \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \\ a^2 = b^2 = c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$ a = b = c = 1 (do a, b, c dương)

Do đó $d_{max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ khi a = b = c = 1

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1: Viết phương trình mặt phẳng qua A(1, 2, 3) và vuông góc hai mặt phẳng (P): x – y + z – 7 = 0 và (Q): 3x + 2y – 12z + 5 = 0 (Cao Đẳng 2009)

BT2: Viết phương trình mặt phẳng qua I(0, 0, 1); K(3, 0, 0) và tạo với mặt phẳng Oxy một góc 30^o. (Dự bị Đại học khối B/2003)

BT3: Cho A(5, 1, 3); B(1, 6, 2); C(5, 0, 4); D(4, 0, 6) và mặt phẳng (α): x – 2y + z – 10 = 0. Viết phương trình mặt phẳng.

a. Qua A và vuông góc BC.

b. Qua A, B, C.

c. Qua A, B và // CD.

d. Qua Oz và song song AB

e. Qua A, B và song song Oy

f. Qua A vuông góc (α) và (Oyz).

BT4: Cho A(3, –2, –2) và mp(P) 2x – 2y + z – 1 = 0

Viết phương trình mp(Q) song song (P) mà d(A, (P)) = d((P), (Q))

BT5: Tìm m, n sao cho hai mặt phẳng sau đây song song

$$3x - 5y + (m - 1)z - 3 = 0 \text{ và } 2x + (n - 1)y - 3z + 1 = 0$$

BT6: Tìm trên trục tung các điểm cách đều hai mặt phẳng.

$$x + y - z + 1 = 0 \text{ và } x - y + z - 5 = 0$$

BT7: Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm A′D′, D′C′, C′C và AA′.

a. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng.

b. Tính chu vi và diện tích tứ giác MNPQ.

BT8: Tìm tập hợp các điểm trong không gian

a. Cách đều hai điểm A(1, 2, –3); B(4, 5, 0)

b. Cách đều hai mặt phẳng song song:

$$x - 2y - z = 0 \text{ và } 2x - 4y - 2z + 10 = 0$$

c. Cách đều hai mặt phẳng cắt nhau:

$$2x + 2y - z + 7 = 0 \text{ và } 2x - 4y - 2z + 10 = 0$$

BT9: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và lập với mặt phẳng (α): $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60^o.

BT10: Cho hình chóp S.ABCD có SD ⊥ (ABCD), SD = a, đáy ABCD hình thang vuông tại A và D; AB = AD = a, CD = 2a

a. Chứng minh ΔSBC vuông. b. Tính d(A, (SBC)).

BT11: Đại học B/2010

Cho ba điểm A(1, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) (b > 0, c > 0) và mặt phẳng (P): $y - z + 1 = 0$. Xác định b, c biết (ABC) vuông góc (P) và khoảng cách từ gốc 0 đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

BT12: Đại học D/2010

Cho hai mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$, (Q): $x - y + z - 1 = 0$

Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ gốc O đến (R) bằng 2.

BT13: A/03 Cho hình hộp lập phương ABCD.A′B′C′D′. Tính góc của hai mặt phẳng (BA′C) và (DA′C).

BT14: Cho hình chóp S.ABCD có SD vuông góc (ABCD) và SD = a. Đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D. Biết rằng AB = AD = a, CD = 2a.

a. Chứng minh ΔSBC vuông.

b. Tính khoảng cách từ A đến (SBC). (ĐS: $\frac{a}{\sqrt{6}}$)

BT15: (D/09) Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có ΔABC ⊥ tại B, AB = a, AA′ = 2a, A′C = 3a. Gọi M trung điểm A′C′. Gọi I giao điểm AM và A′C. Tính $V_{I.ABC}$ và d(A, (IBC)). (ĐS: $\frac{4a^3}{9}, \frac{2a}{\sqrt{5}}$)

BT16: (B/04) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy a, góc mặt bên và đáy là φ. Tính tan của góc hai mặt (SAB) và (ABCD). Tính $V_{S.ABCD}$.

BT17: B/06

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD), SA = a, ABCD hình chữ nhật. Gọi M, N là trung điểm AD và SC. AB = a, AD = $a\sqrt{2}$. Gọi I là giao điểm MB và AC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) ⊥ (SMB). Tính $V_{A.NIB}$ (ĐS: $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$)

BÀI 3
MẶT CẦU

• ***Dạng 1:*** Phương trình mặt cầu tâm I(a, b, c) bán kính R là

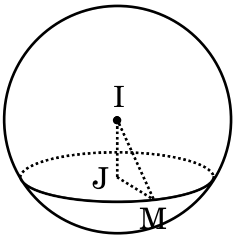
$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$$

• ***Dạng 2:*** Phương trình $\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}$
với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm I(a, b, c) bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

☞ **Lưu ý:** Cho mặt cầu (S) tâm I(a, b, c) bán kính R và mặt phẳng (α) thì

- (S) tiếp xúc mặt cầu (S) ⇔ d(I, (α)) = R
- Nếu d(I, (α)) < R thì (α) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IJ^2}$

  Phương pháp tìm tâm J đường tròn giao tuyến sẽ được trình bày sau bài đường thẳng



Bài 1: Định m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu:

a. $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 2my - 2(m - 1)z + 5m^2 + m + 5 = 0$ (1)

b. $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m + 3)x - 6my + 4mz + 13m^2 + 2m + 5 = 0$ (2)

Giải

a/ (1) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow 4m^2 + m^2 + (m - 1)^2 - 5m^2 - m - 5 > 0$
$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \ \vee \ m > 4$

b/ (2) là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow (m + 3)^2 + 9m^2 + 4m^2 - 13m^2 - 2m - 5 > 0$
$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -2$

Bài 2: Cho hai điểm A(–1, 0, –3), B(1, 2, –1). Viết phương trình mặt cầu (S):

a. Có đường kính AB.

b. Có tâm I thuộc trục tung và qua hai điểm A, B.

Giải

a/ (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R = IA = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Vậy phương trình (S) là: $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$

b/ *Cách 1:*

Gọi $I(0, b, 0) \in y'Oy$

(S) qua 2 điểm A, B $\Leftrightarrow IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow 1 + b^2 + 9 = 1 + (b-2)^2 + 1 \Leftrightarrow b = -1$

Vậy $I(0, -1, 0)$, $R = IA = \sqrt{11}$

Phương trình (S) là: $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$

Cách 2:

$I \in Oy \Rightarrow I(0, b, 0)$. Vậy phương trình (S) dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2by + d = 0$

Ta có: $\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 9 + d = 0 \\ 1 + 4 + 1 - 4b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -10 \\ b = -1 \end{cases}$

Do đó: (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 10 = 0$

Bài 3: Viết phương trình mặt cầu (S) qua ba điểm A(1, 2, 4), B(1, –3, –1), C(2, 2, –3) và có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy)

Giải

Gọi tâm $I(a, b, 0) \in (Oxy)$

Phương trình (S) dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + d = 0$

Ta có:

$A \in (S) \Leftrightarrow -2a - 4b + d + 21 = 0 \qquad (1)$

$B \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b + d + 11 = 0 \qquad (2)$

$C \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b + d + 17 = 0 \qquad (3)$

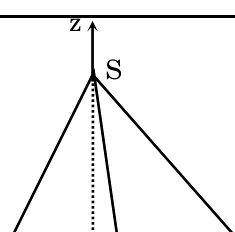
Từ (1), (2), (3) cho $a = -2$, $b = 1$, $d = -21$

Vậy (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$

Bài 4: Đề dự bị ĐH khối A/2005

Cho A(2; 0; 0), C(0; 4; 0), S(0; 0; 4). Gọi B là điểm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho OABC là hình chữ nhật. Viết phương trình mặt cầu qua năm điểm O, A, B, S, C.

Giải



Dễ dàng thấy B(2; 4; 0)
Do định lý ba đường vuông góc
$BC \perp OC \Rightarrow BC \perp SC$
Và $AB \perp OA \Rightarrow AB \perp SA$
Vậy SAB = SCB = SOB = 1 vuông
Ba điểm A, O, C cùng nhìn SB dưới 1 góc vuông nên cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB, tâm I(1, 2, 2) là trung điểm SB, bán kính $R = OI = \sqrt{1+4+4} = 3$
Vậy phương trình mặt cầu qua năm điểm O, A, B, C, S là:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$$

Bài 5: Cho bốn điểm A(1, 5, 3), B(4, 2, –5), C(5, 5, –1), D(1, 2, 4).

a. Viết phương trình mặt cầu (S_1) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxz).

b. Viết phương trình mặt cầu (S_2) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Giải

a/ Gọi I là tâm của (S_1). Gọi $I(a, 0, c) \in (Oxz)$

Phương trình (S) có dạng (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2cz + d = 0$

Ta có:

$A \in (S_1) \Rightarrow 35 - 2a - 6c + d = 0$ (1)

$B \in (S_1) \Rightarrow 45 - 8a + 10c + d = 0$ (2)

$C \in (S_1) \Rightarrow 51 - 10a + 2c + d = 0$ (3)

Từ (1), (2), (3) cho: $a = \frac{11}{5}$, $c = \frac{1}{5}$, $d = -\frac{147}{5}$

Vậy phương trình (S_1): $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{22}{5}x - \frac{2}{5}z - \frac{147}{5} = 0$

b/ Phương trình (S_2) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$A \in (S_2) \Rightarrow 35 - 2a - 10b - 6c + d = 0$ (1)

$B \in (S_2) \Rightarrow 45 - 8a - 4b + 10c + d = 0$ (2)

$C \in (S_2) \Rightarrow 51 - 10a - 10b + 2c + d = 0$ (3)

$D \in (S_2) \Rightarrow 21 - 2a - 4b - 8c + d = 0$ (4)

(1), (2), (3), (4) cho: $a = 1, b = 2, c = -1, d = -19$

Vậy (S_1) phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 19 = 0$

Bài 6: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

Giải

(S) có tâm I(1, –2, –1), bán kính R = 3: bằng bán kính đường tròn giao tuyến suy ra (P) cắt (S) theo đường tròn lớn. Vậy (P) qua I

Phương trình mp(P) dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$

(P) chứa Ox $\Rightarrow$ (P): $By + Cz = 0$ $(B^2 + C^2 \neq 0)$

$$I \in (P) \Rightarrow -2B - C = 0 \Rightarrow C = -2B$$

Chọn B = 1 thì C = –2

Vậy phương trình (P): $y - 2z = 0$

Bài 7: *Đề dự bị ĐH khối B/2006*

Viết phương trình mặt cầu qua O(0, 0, 0)

A(0, 0, 4), B(2, 0, 0) và tiếp xúc mặt phẳng (P): $2x + y - z + 5 = 0$.

Giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

$$0 \in (S) \Rightarrow d = 0 \quad (1)$$

$$A \in (S) \Rightarrow -8c + 16 = 0 \quad (2)$$

$$B \in (S) \Rightarrow 4 - 4a = 0 \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow$ d = 0, c = 2, a = 1

Vậy tâm I(1, b, 2) và R = $\sqrt{1 + b^2 + 4}$

Do (S) tiếp xúc (P) nên d(I, (P)) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|2 + b - 2 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \sqrt{b^2 + 5}$$

$$\Leftrightarrow |b + 5| = \sqrt{6}.\sqrt{b^2 + 5}$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 10b + 25 = 6(b^2 + 5)$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 10b + 5 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

Vậy I(1, 1, 2), R = $\sqrt{6}$

Phương trình (S): $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$.

Bài 8: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc trục tung và tiếp xúc với hai mặt phẳng: (α): $2x + y - 3z + 5 = 0$ và (β): $2x + y - 3z - 11 = 0$

Giải

Gọi I là tâm của (S), $I(0, m, 0) \in y'Oy$

(S) tiếp xúc α, $\beta \Rightarrow d(I, \alpha) = d(I, \beta) \Rightarrow \frac{|m+5|}{\sqrt{14}} = \frac{|m-11|}{\sqrt{14}}$

$\Rightarrow |m + 5| = |m - 11| \Rightarrow m = 3.$

Vậy I(0, 3, 0)

(S) có bán kính: $R = d(I, \alpha) = \frac{8}{\sqrt{14}}$

Vậy phương trình (S): $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = \frac{32}{7}$

Bài 9: Cho A(1; 0; –1), B(1; 2; 1), C(0; 2; 0)

a) Viết phương trình mặt cầu (S) qua O, A, B, C.

b) Gọi G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình các mặt phẳng vuông góc với OG và tiếp xúc (S).

Giải

a/ Phương trình (S) dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$O \in (S') \Rightarrow d = 0$ (1)

$A \in (S) \Rightarrow 2 - 2a + 2c = 0$ (2)

$B \in (S) \Rightarrow 6 - 2a - 4b - 2c = 0$ (3)

$C \in (S) \Rightarrow 4 - 4b + d = 0$ (4)

Từ (1) (2) (3) (4): $a = 1$, $b = 1$, $c = d = 0$

Vậy phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0$

b/ (S) có tâm I(1, 1, 0), $R = \sqrt{2}$

Trọng tâm của ΔABC là $G\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$

Mặt phẳng (α) cần tìm nhận $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}(1, 2, 0)$ là PVT nên có dạng

$x + 2y + D = 0$

Ta có: (α) tiếp xúc (S)

$\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|1+2+D|}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow D = -3 \pm \sqrt{10}$

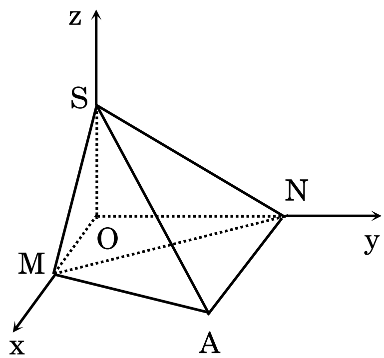
Vậy phương trình hai mặt phẳng (α) là $x + 2y \pm \sqrt{10} - 3 = 0$

Bài 10: Cho S(0, 0, 1), A(1, 1, 0) và hai điểm M(m, 0, 0), N(0, n, 0) thay đổi sao cho m + n = 1 và m > 0, n > 0.

a. Chứng minh thể tích hình chóp S.OMAN không phụ thuộc m, n.

b. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SMN). Từ đó suy ra mặt phẳng (SMN) tiếp xúc 1 mặt cầu cố định.

Giải



a/ Dt (Δ vuông OMN) = $\frac{1}{2}$OM.ON = $\frac{mn}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (m - 1, -1, 0)$

$\overrightarrow{AN} = (-1, n - 1, 0)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AN}] = (0, 0, mn - 1)$

Vậy $S_{(\Delta AMN)} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AN}]$

$= \frac{1}{2}|mn - 1| = \frac{1 - mn}{2}$ (do m, n < 1)

Do đó $S_{OAMN} = S_{(OMN)} + S_{(\Delta AMN)} = \frac{mn}{2} + \frac{1 - mn}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.OAMN} = \frac{1}{3}SO.S_{(OMAN)} = \frac{1}{3}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ hằng số

b/ Phương trình mặt phẳng (SMN) là:

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mnz - mn = 0$ Do đó

$$d(a,(SMN)) = \frac{|n.1 + m.1 + m.m.0 - m.n|}{\sqrt{n^2 + m^2 + (m.n)^2}}$$

$\Leftrightarrow$ d(A, (SMN)) = $\frac{|m + n - mn|}{\sqrt{(m + n)^2 - 2mn + m^2n^2}}$

$$= \frac{|1 - mn|}{\sqrt{1 - 2mn + m^2n^2}} = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{(1 - mn)^2}} = 1$$

Do đó mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc mặt cầu cố định tâm A, bán kính R = 1.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1. Viết phương trình mặt cầu

a) (D2008) Qua A (3, 3, 0); B(3, 0, 3); C(0, 3, 3); D(3, 3, 3)

b) (DB A05) Qua A(2, 0, 0); C(0, 4, 0); O(0, 0, 0), S(0, 0, 4); B(2, 4, 0)

c) (D/04) Qua A(2, 0, 1); B(1, 0, 0); C(1, 1, 1) và tâm I nằm trên (P) $x + y + z - 2 = 0$

d) Tâm trên Oz và và tiếp xúc hai mặt phẳng (α) $2x + y - 3z - 1 = 0$, (β) $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

BT2. B/2005

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có A(0, –3, 0); B(4, 0, 0); C(0, 3, 0); B'(4, 0, 4). Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc (BCC'B').

BT3. DB/D03

Cho mặt cầu (S) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$ và mặt phẳng (α): $2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$. Tìm m để (S) tiếp xúc (α).

BT4. Cho A(2, 0, 0); B(0, 4, 0); C(0, 0, 6); D(2, 4, 6). Viết phương trình tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4$.

BT5. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I(4, –2, 1) biết:

a) (S) tiếp xúc mặt phẳng (Oxz)

b) (S) tiếp xúc trục Ox

c) (S) cắt trục Oy tại hai điểm A, B với AB = 10.

BT6. Viết phương trình cầu (S) qua điểm A(1, –1, 4) và tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ.

BT7. Cho tứ diện OABC có A(4, 0, 0), B(0, –2, 0), C(0, 0, 2), 0 là gốc tọa độ.

a) Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

b) Tìm hình chiếu của đỉnh O trên mặt phẳng (ABC).

BT8. Cho ba điểm A(–2, 1, –2), B(2, 1, 1), C(–1, 0, 5). Viết phương trình mặt cầu có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

BÀI 4

ĐƯỜNG THẲNG
VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chính phương của đường thẳng d nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng d.

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M(x_o,y_o,z_o)$ và có VTCP $\vec{a}_d = (a,b,c)$

Phương trình tham số của d: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$ (t: tham số, $t \in R$)

Phương trình chính tắc của d: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}}$ $(a.b.c \neq 0)$

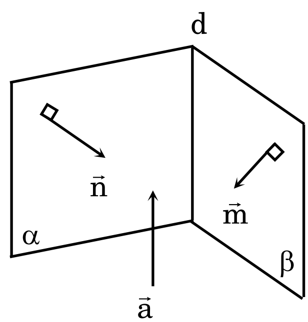
VẤN ĐỀ 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

1/ Tìm một điểm trên d và một VTCP của d.

2/ Tìm hai mặt phẳng khác nhau cùng qua d thì d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng này.

☞ **Các lưu ý:**



1/ Một đường thẳng trong không gian có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Nếu (α) và (β) có PVT là $\vec{n}$ và $\vec{m}$

d có VTCP $\vec{a}$ thì $\vec{n} \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{n}' \perp \vec{a}$

$\vec{m} \perp (\beta) \Rightarrow \vec{m}' \perp \vec{a}$

Vậy VTCP $\vec{a} = \vec{n} \wedge \vec{m}$

2/ Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Nếu đường thẳng d vuông góc với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{a}_d = [\vec{a}, \vec{b}]$

3/ Nếu đường thẳng d_1 qua điểm A và vuông góc đường thẳng d_2 thì d_1 nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc d_2.

4/ Nếu đường thẳng d_1 qua điểm A và cắt đường thẳng d_2 thì d_1 nằm trong mặt phẳng qua A và d_2.

5/ Nếu đường thẳng d qua điểm A và song song mặt phẳng (P) thì d nằm trong mặt phẳng qua A và song song (P).

Bài 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d biết d là giao tuyến của hai mặt phẳng:

α: $4x - 2y + 3z = 0$ và β: $3x + y + 2z - 5 = 0$

Giải

Ta có: $\vec{n}_\alpha = (4, -2, 3)$, $\vec{n}_\beta = (3, 1, 2) \Rightarrow \vec{a}_d = \left[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta\right] = (-7, 1, 10)$

Chọn điểm $M(1, 2, 0) \in \alpha \cap \beta$

Vậy phương trình d: $\begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 2 + t \\ z = 10t \end{cases}$

Bài 2. Cho hai điểm A(2, 0, –3), B(4, –2, –1) và mặt phẳng (P): $x + y + 2z + 4 = 0$

Viết phương trình đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều A và B.

Giải

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của AB $\Rightarrow d = (P) \cap (Q)$

Trung điểm của AB là: $I(3, -1, -2)$, $\vec{n}_Q = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$

Vậy phương trình (Q): $1(x - 3) - 1(y + 1) + 1(z + 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 2 = 0$

Ta có: $\vec{a}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = 2(3, 1, -2)$

Chọn điểm $M(-1, -3, 0) \in (P) \cap (Q)$

Vậy d: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-2}$

Bài 3. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng α: $2x - y + 3z - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua giao điểm A của d và α và song song đường thẳng d': $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$

Giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{-1} \\ 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \\ z = 2 \end{cases}$$

Vậy A(–3, –6, 2)

Do Δ // d' $\Rightarrow \vec{a}_\Delta = \vec{a}_{d'} = (4, -3, 1)$. Vậy phương trình Δ: $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Bài 4. Tuyển sinh Đại học khối D/2007

Cho A(1, 4, 2); B(–1, 2, 4) và đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{2}$

a. Viết phương trình đường thẳng qua trọng tâm G của ΔOAB và vuông góc mp(OAB).

b. Tìm M trên Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Giải

a/ Ta có trọng tâm G(0, 2, 2)

Mặt phẳng (OAB) có VTCP $\overrightarrow{OA} = (1, 4, 2)$ và $\overrightarrow{OB} = (-1, 2, 4)$

Nên có PVT $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 6(2, -1, 1)$

(d) qua G và vuông góc mp(OAB) nên nhận $\vec{n}$ là VTCP

Phương trình (d): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$

b/ Phương trình tham số đường thẳng (Δ) là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

$M \in \Delta$ nên $\exists t$ sao cho M(1 – t, t – 2, 2t)

Ta có: $MA^2 + MB^2 = t^2 + (t-6)^2 + (2t-2)^2 + (2-t)^2 + (t-4)^2 + (2t-4)^2$

$= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28$

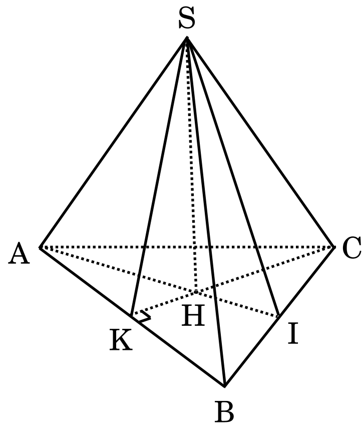
Vậy $(MA^2 + MB^2)_{min} = 28 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow M(-1, 0, 4)$

Bài 5. Đề dự bị Đại học khối B/09

Cho A(1, 0, –1); B(2, 3, –1); C(1, 3, 1)

Viết phương trình tham số đường thẳng qua trực tâm ΔABC và vuông góc mp(ABC).

Giải



Gọi (d) qua trực tâm H và $\perp$ mp(ABC)

Vẽ AI $\perp$ BC, CK $\perp$ AB

Lấy S $\in$ d

Mp(SAI) qua A và có PVT $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, 2)$

Phương trình (SAI): $-1(x - 1) + 2(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -x + 2z + 3 = 0$

Mp(SKC) qua C và có PVT $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 0)$

Phương trình (SKC): $1(x - 1) + 3(y - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0$

Đường thẳng (d) cần tìm là giao tuyến hai mp(SKC) và (SAI)

Xét $\vec{n}_1 = (-1, 0, 2)$, $\vec{n}_2 = (1, 3, 0)$

Gọi $\vec{a}$ là VTCP của d

Ta có $\vec{a} \perp \vec{n}_1'$ và $\vec{n}_2'$ nên $\vec{a} = \vec{n}_1' \wedge \vec{n}_2' = (-6, 2, -3)$

Giao điểm (d) và (Oyz)

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{10}{3}$, $z = -\dfrac{3}{2}$

Vậy (d) qua $M\left(0, \dfrac{10}{3}, -\dfrac{3}{2}\right)$

Phương trình tham số d $\begin{cases} x = -6t \\ y = \dfrac{10}{3} + 2t \\ z = -\dfrac{3}{2} - 3t \end{cases}$

Bài 6. Tuyển sinh ĐH khối A/2011

Cho A(2, 0, 1); B(0, –2, 3)

Tìm M trên (P): $2x - y - z + 4 = 0$ sao cho MA = MB = 3

Giải

Do MA = MB nên M $\in$ (α) là mặt trung trực của AB

(α) qua I(1, –1, 2) là trung điểm của AB

và có PVT $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-2, -2, 2) \,//\, (1, 1, -1)$

Vậy phương trình (α): $1(x - 1) + 1(y + 1) - 1(z - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0$

Do M nằm trên giao tuyến Δ của (P) và (α)

Gọi $\vec{a}$ là VTCP của Δ

$$\Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n}_p = (2, -1, -1)$$

$$\Delta \subset (\alpha) \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n}_\alpha = (1, 1, -1)$$

Vậy $\vec{a} = \vec{n}_p \wedge \vec{n}_\alpha = (2, 1, 3)$

Gọi N(O, y, z) là giao điểm Δ và mp(Oyz) tọa độ N nghiệm đúng hệ phương trình $\begin{cases} +y + z = 4 \\ y - z = -2 \end{cases}$

Vậy N(0, 1, 3)

Do đó phương trình tham số Δ là $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

Vậy M(2t, 1 + t, 3 + 3t)

Ta có $MA^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (2t - 2)^2 + (t + 1)^2 + (3t + 2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -\frac{3}{7}$$

Vậy $M_1(0, 1, 3)$, $M_2(-\frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{12}{7})$

CÁC DẠNG TOÁN
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG THƯỜNG GẶP

Dạng 1: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG Δ QUA ĐIỂM A, NẰM TRÊN MẶT PHẲNG (P) (HAY SONG SONG MẶT PHẲNG (P)) VÀ VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG d.**

* *Phương pháp:*

Do $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \perp \vec{n}_P \\ \Delta \perp \vec{a}_d \end{cases} \Rightarrow$ Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{a}_\Delta = [\vec{n}_p, \vec{a}_d]$

Vậy Δ là đường thẳng qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta$

Bài 7. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{3}$,

mặt phẳng (P): $2x - 5y - 3z + 8 = 0$ và điểm A(3, –4, 1)

a) Viết phương trình đường thẳng Δ_1 qua A, nằm trên (P) và vuông góc d.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ_2 qua A, song song mặt phẳng (Oxy) và vuông góc d.

Giải

a) Ta có: $\vec{a}_d = (2, -1, 3)$, $\vec{n}_p = (2, -5, -3)$

$\begin{cases} \Delta_1 \subset (P) \\ \Delta_1 \perp d \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{\Delta_1} = [\vec{n}_P, \vec{a}_d] = (-18, -12, 8) = -2(9, 6, -4)$

Vậy Δ_1: $\dfrac{x-3}{9} = \dfrac{y+4}{6} = \dfrac{z-1}{-4}$

b) Mặt phẳng (Oxy) có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\begin{cases} \Delta_2 \,//\, (Oxy) \\ \Delta_2 \perp d \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{\Delta_2} = [\vec{k}, \vec{a}_d] = -(1, 2, 0)$. Vậy Δ_2: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$

Bài 8. Tuyển sinh Đại học khối A/2005

Cho d: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (α) : $2x + y - 2z + 9 = 0$

a. Tìm I trên d sao cho khoảng cách từ I đến (α) bằng 2.

b. Tìm giao điểm A của (d) và (α). Viết phương trình đường thẳng

(Δ) đi qua A, nằm trong (α) và vuông góc (d).

Giải

a/ $I \in d$ nên $\exists t$: $I(1 - t, -3 + 2t, 3 + t)$

Ta có: $d(I, \alpha) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|2(1-t)-3+2t-2(3+t)+9|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$

$\Leftrightarrow |-2t + 2| = 6 \Leftrightarrow t = -2 \vee t = 4$

Vậy I(3, –7, 1) hay I(–3, 5, 7)

b/ Gọi $A = d \cap (\alpha)$

$A \in d \Rightarrow \exists t'$: $A(1 - t', -3 + 2t', 3 + t')$

$A \in (\alpha) \Rightarrow 2(1 - t') + (2t' - 3) - 2(3 + t') + 9 = 0 \Rightarrow t' = 1$

Vậy A(0, –1, 4)

Gọi $\vec{b}$ là VTCP của (Δ)

Do $(\Delta) \subset (\alpha) \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n}_\alpha = (2, 1, -2)$

$(\Delta) \perp (d) \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a}_d = (-1, 2, 1)$

Vậy $\vec{b} = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{a}_d = 5(1, 0, 1)$

Phương trình (Δ): $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \quad t \in R \\ z = 4 + t \end{cases}$

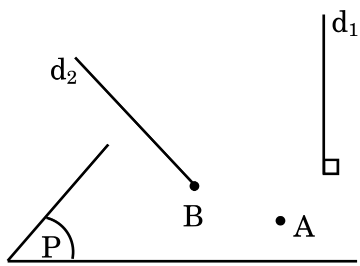
Dạng 2: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG Δ ĐI QUA ĐIỂM A, VUÔNG GÓC ĐƯỜNG THẲNG d_1 VÀ CẮT ĐƯỜNG THẲNG d_2**

* *Phương pháp 1:*

– Tìm mặt phẳng (P) qua A và $\perp d_1$

– Tìm $B = (P) \cap d_2$

– Δ là đường thẳng qua hai điểm A, B.



* *Phương pháp 2:*

– Gọi B là giao điểm Δ và d_2

– Tìm tọa độ điểm B từ điều kiện: $\overrightarrow{AB}.\vec{a}_{d_1} = 0$

– Δ là đường thẳng qua hai điểm A, B

Bài 9. Cho hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và d_2: $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(0, 1, 1), vuông góc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2

Giải

* *Cách 1:*

Gọi (P) là mp qua A và $\perp$ $d_1 \Rightarrow \vec{n}_p = \vec{a}_{d_1} = (3, 1, 1)$

Phương trình (P): $3(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0$

Gọi $B = (P) \cap d_2 \Rightarrow B(-1, 2, 3)$

$\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2)$. Vậy phương trình Δ: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$

* *Cách 2:*

Gọi $B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(-1, t, 1 + t)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, t - 1, t)$; $\vec{a}_{d_1} = (3, 1, 1)$

Ta có:

$\Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_{d_1} = 0 \Leftrightarrow -3 + t - 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy $\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2)$ phương trình Δ: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$

Bài 10. Tuyển sinh Đại học khối B/2004

Viết phương trình đường thẳng qua A(–4, –2, 4) cắt và vuông góc

$$d\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Giải

Gọi I là giao điểm của d và đường thẳng Δ cần tìm

$I \in d$ nên $\exists t \in R$: $I(2t - 3, 1 - t, 4t - 1)$

Ta có: $\overrightarrow{AI} = (2t + 1, 3 - t, 4t - 5)$

Do: $d \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AI} \perp \vec{a} = (2, -1, 4)$

$\Rightarrow 2(2t + 1) - 1(3 - t) + 4(4t - 5) = 0$

$\Rightarrow 21t - 21 = 0 \Rightarrow t = 1$

Δ cần tìm qua A và có VTCP $\overrightarrow{AI} = (3, 2, -1)$

Phương trình chính tắc của Δ là

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

Bài 11. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng:

$\alpha: 5x + y + z + 2 = 0$; $\beta: x - y + 2z + 1 = 0$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A(2, –1, 0), vuông góc và cắt đường thẳng d.

Giải

➲ *Cách 1:*

Ta có: $\vec{n}_\alpha = (5, 1, 1)$, $\vec{n}_\beta = (1, -1, 2)$

$\Rightarrow \vec{a}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (3, -9, -6) = 3(1, -3, -2)$

Gọi (P) là mp qua A và $\perp$ d $\Rightarrow$ $\vec{n}_p = \vec{a}_d = 3(1, -3, -2)$

Vậy phương trình (P): $1(x - 2) - 3(y + 1) - 2z = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 2z - 5 = 0$

Gọi $B = (P) \cap d$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y - 2z - 5 = 0 \\ 5x + y + z + 2 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } B(0, -1, -1)$$

$\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-2, 0, -1)$. Vậy phương trình Δ: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$

➲ *Cách 2:*

Chọn điểm $M(0, -1, -1) \in \alpha \cap \beta$. Vậy phương trình d: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

Gọi $B = \Delta \cap d \Rightarrow B(t, -1 - 3t, -1 - 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t - 2, -3t, -1 - 2t)$

Ta có: $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Vậy $\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-2, 0, -1)$

Do đó phương trình Δ: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$

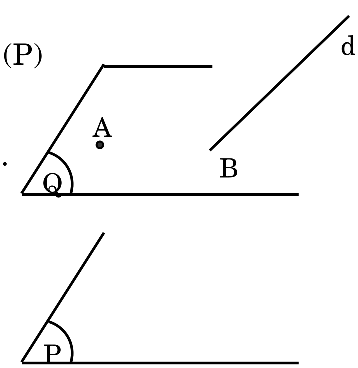
Dạng 3: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG Δ ĐI QUA ĐIỂM A, SONG SONG MẶT PHẲNG (P) VÀ CẮT ĐƯỜNG THẲNG d.**

* *Phương pháp 1:*

– Tìm mặt phẳng (Q) qua A và song song (P)

– Tìm $B = (Q) \cap d$.

Thì Δ là đường thẳng qua hai điểm A, B.



* *Phương Pháp 2:*

– Gọi $B = \Delta \cap d$

– Tìm tọa độ điểm B từ điều kiện:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}_p = 0$

Thì Δ là đường thẳng qua hai điểm A, B.

Bài 12. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm A(3, –1, –4), cắt trục Oy và song song mặt phẳng (P): 2x + y = 0

Giải

➲ *Cách 1:*

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và // (P). Phương trình (Q) là:

$2(x - 3) + 1(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

Gọi $B = (Q) \cap Oy \Rightarrow B(0, 5, 0)$

$\Rightarrow \vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-3, 6, 4)$. Vậy phương trình Δ: $\frac{x}{-3} = \frac{y-5}{6} = \frac{z}{4}$

➲ *Cách 2:*

Gọi $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B(0, t, 0)$

$\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-3, t + 1, 4)$, $\vec{n}_p = (2, 1, 0)$

Ta có: $\Delta \,//\, (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow -6 + t + 1 = 0 \Rightarrow t = 5$

$\Rightarrow \vec{a}_\Delta = (-3, 6, 4)$. Vậy phương trình Δ: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+4}{4}$

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng qua A(3; –2; –4) song song mặt phẳng (P): 3x – 2y – 2z – 7 = 0 và cắt d: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$

Giải

Phương trình tham số d là $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Gọi B là giao điểm của Δ cần tìm và d

$B \in d \Rightarrow \exists t: B(2 + 3t, -4 - 2t, 1 + 2t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3t - 1, -2t - 2, 2t + 5)$

Do Δ // (P) nên $\overrightarrow{AB} \perp$ PVT $\vec{n}_p = (3; -2; -2)$

Vậy $3(3t - 1) - 2(-2t - 2) - 2(2t + 5) = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy $\overrightarrow{AB} = (2, -4, 7)$

Do đó phương trình Δ là: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+4}{7}$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1: CĐ/09 Cho A(1, 1, 0); B(0, 2, 1) và ΔABC có trọng tâm G(0, 2, –1). Viết phương trình đường thẳng qua C và $\perp$ (ABC).

BT2: D/2011 Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(1, 2, 3) vuông góc d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và cắt trục hoành.

BT3: Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(1, 1, –2) song song mp(P): $x - y - z - 1 = 0$ và $\perp$ (d) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$

BT4: CĐ/2010 Viết phương trình mặt phẳng chứa d: $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và $\perp$ (P): $2x - y + 2z - 2 = 0$. Tìm M $\in$ d sao cho M cách đều O và (P).

BT5: Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(1, 2, 3) cắt và $\perp$ d: $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = z + 3$

BT6: D/06 Viết phương trình đường thẳng Δ qua A(1, 2, 3), vuông góc d_1: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và cắt d_2: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$

BT7: Viết phương trình đường thẳng vuông góc d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ và nằm trên (P): $2x + y + z - 2 = 0$

BT8: DB/A06 Cho I(2; 2; 0) và (P) $3x - 2y - z + 4 = 0$. Tìm K sao cho KI $\perp$ (P) và K cách đều O và (P).

BT9: Cho d_1: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$, d_2: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$

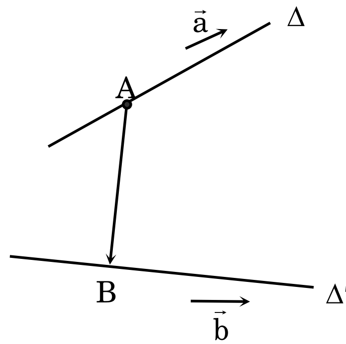
Tìm A trên d_1 B trên d_2 sao cho AB vuông góc d_1 và d_2. Viết phương trình mặt phẳng cách đều d_1, d_2.

BT10: Cho (α) $2kx + y - z + 1 = 0$ (β): $x - ky + z - 1 = 0$. Tìm k để giao tuyến của hai mặt này nằm trên (Oyz)

VẤN ĐỀ 2: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Phương pháp: Cho Δ qua A và có VTCP $\vec{a}$

Δ' qua B và có VTCP $\vec{b}$



- Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{AB} \neq 0$
- Δ và Δ' đồng phẳng $\Leftrightarrow (\vec{a} \wedge \vec{b}).\overrightarrow{AB} = 0$
- Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \neq \vec{0} \\ (\vec{a} \wedge \vec{b})\overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \end{cases}$
- $\Delta \,//\, \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \wedge \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \end{cases}$
- $\Delta \equiv \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \end{cases}$

Bài 1. Cho hai đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + 2t \\ z = 1 - m - 3t \end{cases}$; d_2: $\begin{cases} x = m - 2t' \\ y = mt' \\ z = 1 - m + t' \end{cases}$.

Tìm m để d_1 và d_2 chéo nhau.

Giải

Chọn $A(1, m, 1 - m) \in d_1$ VTCP của d_1 là $\vec{a}_{d_1} = (m, 2, -3)$

$B(m, 0, 1 - m) \in d_2$ VTCP của d_2 là $\vec{a}_{d_2} = (-2, m, 1)$

Ta có: $[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}].\overrightarrow{AB} = 4m^2 - 7m - 2$

Do đó: d_1 và d_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}].\overrightarrow{AB} \neq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 2$ và $m \neq \dfrac{-1}{4}$.

Bài 2. Đề dự bị ĐH khối B/04

Cho A(4, 2, 2); B(0, 0, 7) và d: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

a. Chứng minh d và AB cùng thuộc 1 mặt phẳng.

b. Tìm C trên d sao cho ΔABC cân tại A.

Giải

a/ AB qua B(0, 0, 7) và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-4, -2, 5)$

d qua M(3, 6, 1) và có VTCP $\vec{a} = (-2, 2, 1)$

Ta có $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{a} = (-12, -6, -12)$ và $\overrightarrow{BM} = (3, 6, -6)$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{a}).\overrightarrow{BM} = -36 - 36 + 72 = 0$

$\Rightarrow$ AB và d cùng thuộc một mặt phẳng

b/ Ta gọi $C(3 - 2t, 6 + 2t, 1 + t) \in d$

ΔABC cân tại A $\Leftrightarrow AB^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow 16 + 4 + 25 = (-1 - 2t)^2 + (2t + 4)^2 + (t - 1)^2$

$\Leftrightarrow 9t^2 + 18t - 27 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -3$

Vậy $C_1(1, 8, 2)$; $C_2(9, 0, -2)$

Bài 3. Cho d_1: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ và d_2: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

a) Tìm giao điểm của d_1 và d_2.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa d_1 và d_2.

Giải

a/ Gọi I là giao điểm d_1 và d_2

$I \in d_2 \Rightarrow I(t, t + 1, 2t - 3)$

$I \in d_1 \Rightarrow \dfrac{t+1}{3} = \dfrac{t}{2} = \dfrac{2t-6}{-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2t + 2 = 3t \\ -2t = 4t - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$

Vậy I(2, 3, 1)

Lưu ý: Nếu hệ trên vô nghiệm thì d_1 và d_2 song song hay chéo nhau.

Nếu hệ trên vô số nghiệm thì d_1 và d_2 trùng nhau

b/ d_1 có VTCP $\vec{a} = (3; 2; -2)$

d_2 có VTCP $\vec{b} = (1; 1; 2)$

$Mp(d_1, d_2)$ có PVT $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} = (6; -8; 1)$

Phương trình $mp(d_1, d_2)$ qua I là

$6(x - 2) - 8(y - 3) + 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 6x - 8y + z + 11 = 0$

☛ Các dạng toán thường gặp

Dạng 1: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG QUA ĐIỂM A VÀ CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG d_1, d_2** *(d_1, d_2 chéo nhau; $A \notin d_1$, $A \notin d_2$)*

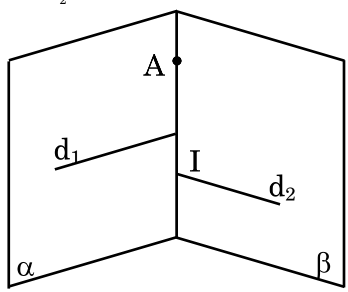
* *Phương pháp 1*:

– Gọi α là mặt phẳng qua A và d_1; β là mặt phẳng qua A và d_2. Gọi $\Delta = \alpha \cap \beta$

Vậy Δ là đường thẳng qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$

– Chứng minh $\vec{a}_\Delta$ không cùng phương $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ (tức là Δ không song song d_1 và d_2)

Do đó Δ là đường thẳng (duy nhất) thỏa yêu cầu bài toán



* *Phương pháp 2*:

– Viết phương trình mp(A, d_1)

– Tìm giao điểm I của d_2 và mp(A, d_1)

– Đường thẳng cần tìm là đường thẳng AI

Bài 4. Cho điểm A(1, –1, 1) và hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} ; \; d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$$

a) Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

a/ Chọn $M(1, 0, 3) \in d_1$ và $\vec{a}_{d_1} = (2, 1, -1)$

$N(-2, 3, 0) \in d_2$ và $\vec{a}_{d_2} = (1, -2, 1)$

Ta có: $[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}] = (-1, -3, -5)$,

$\overrightarrow{MN} = (-3, 3, -3) \Rightarrow [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}].\overrightarrow{MN} = 9 \neq 0$

Vậy: d_1 và d_2 chéo nhau.

b/ *Cách 1:* Gọi α là mặt phẳng qua A và d_1; β là mặt phẳng qua A và d_2; $\Delta = \alpha \cap \beta$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (0, 1, 2)$, $\overrightarrow{AN} = (-3, 4, -1)$

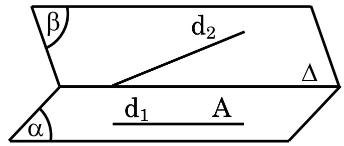
$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AM}, \vec{a}_{d_1}] = (-3,4,-2)$, $\vec{n}_\beta = [\overrightarrow{AN}, \vec{a}_{d_2}] = (2, 2, 2)$

$\Rightarrow \vec{a}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (12, 2, -14) = 2(6, 1, -7)$

Nhận thấy $\vec{a}_{\Delta}$ không cùng phương với $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$

Vậy Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: Δ: $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{-7}$



Chú ý rằng điều kiện $\vec{a}_{\Delta}$ không cùng phương với $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$ là cần thiết, nếu không Δ chưa chắc cắt cả d_1 và d_2.

Ta xem ví dụ sau:

Cho điểm A(0, –1, 2) và 2 đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases} ; \quad d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$$

Chọn M(–2, 1, 2) ∈ d_1, $\vec{a}_{d_1} = (1, 3, 2)$

N(1, –1, 1) ∈ d_2, $\vec{a}_{d_2} = (1, 2, 1)$

$\overrightarrow{MN} = (3, -2, -1)$, $[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}] = (-1, 1, -1)$

$[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}] . \overrightarrow{MN} = -4 \neq 0 \Rightarrow d_1, d_2$ chéo nhau

Gọi α là mp qua A và d_1; β là mặt phẳng qua A và d_2; Δ = α ∩ β

$\overrightarrow{n_{\alpha}} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{a_d}] = (4, 4, -8)$; $\vec{n}_{\beta} = [\overrightarrow{AN}, \vec{a}_{d_2}] = (2, -2, 2)$

$\vec{a}_{\Delta} = [\vec{n}_{\alpha}, \vec{n}_{\beta}] = (-8, -24, -16) = -8(1, 3, 2) = -8\vec{a}_{d_1}$

Ta có $\vec{a}_{\Delta}$ cùng phương $\vec{a}_{d_1}$ và không cùng phương $\vec{a}_{d_2}$

⇒ Δ // d_1 và Δ cắt d_2.

Rõ ràng Δ không cắt cả d_1 và d_2.

Cách 2: d_2 qua B(–2, 3, 0) và có VTCP $\vec{a} = (1, -2, 1)$

Mp(A, d_2) qua A và có VTCP $\vec{a}'$ và $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, -1)$

⇒ PVT $\vec{n} = \vec{a} \wedge \overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) = -2(1, 1, 1)$

Phương trình mp(A, d_2) là: 1(x + 2) + 1(y – 3) + z = 0

⇔ x + y + z – 1 = 0

Gọi I là giao điểm d_1 và mp(A, d_2)

I ∈ d_1 ⇒ I(1 + 2t, t, 3 – t)

I ∈ mp(A, d_2) ⇒ (1 + 2t) + t + (3 – t) – 1 = 0 ⇒ $t = -\dfrac{3}{2}$

Vậy $I(-2, \frac{-3}{2}, \frac{9}{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = (-3, \frac{-1}{2}, \frac{7}{2}) = -\frac{1}{2}(6, 1, -7)$

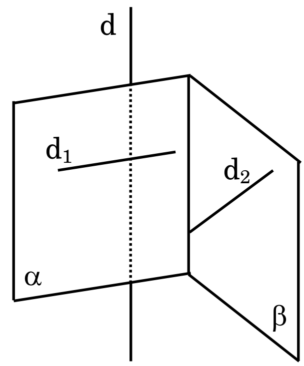
Hiển nhiên $\overrightarrow{AI} \not\parallel \vec{a}_{d_1} = (2, 1, -3)$. Vậy Δ: $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-7}$

Dạng 2: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG Δ SONG SONG ĐƯỜNG THẲNG d VÀ CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG d_1, d_2.**

* *Phương pháp 1:*

– Gọi α là mặt phẳng qua d_1 và // d; β là mặt phẳng qua d_2 và // d thì $\Delta = \alpha \cap \beta$.

– Nhận xét Δ là đường thẳng qua điểm $M \in \alpha \cap \beta$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = \vec{a}_d$ $(M \notin d)$



* *Phương pháp 2:*

– Gọi $M = \Delta \cap d_1$, $N = \Delta \cap d_2$

– Tìm tọa độ hai điểm M, N từ điều kiện: $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\vec{a}_d$.

– Δ là đường thẳng qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = \vec{a}_d$ $(M \notin d)$

Bài 5: Viết phương trình đường thẳng Δ song song trục Ox và cắt hai đường thẳng: d_1: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$; d_2: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$

Giải

➲ *Cách 1:*

Chọn $A(0, 0, 1) \in d_1$, $\vec{a}_{d_1} = (1, 2, 3)$ là VTCP của d_1

$B(2, -1, -1) \in d_2$, $\vec{a}_{d_2} = (-1, 3, 2)$ là VTCP của d_2

Gọi α là mp qua d_1 và // Ox

β là mp qua d_2 và // Ox

Gọi $\Delta = \alpha \cap \beta$; Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\vec{a}_\alpha = [\vec{a}_{d_1}, \vec{i}] = (0, 3, -2) \Rightarrow \alpha: 3y - 2z + 2 = 0$

$\vec{a}_\beta = [\vec{a}_{d_2}, \vec{i}] = (0, 2, -3) \Rightarrow \beta: 2y - 3z - 1 = 0$

Chọn điểm $M(0, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}) \in \alpha \cap \beta$; $M \notin Ox$

Vậy Δ là đường thẳng qua M và có $\vec{a}_\Delta = \vec{i} = (1, 0, 0)$

phương trình Δ là: $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{-8}{5} \\ z = \dfrac{-7}{5} \end{cases}$

➲ *Cách 2:* Phương trình tham số của d_1, d_2:

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} ;\ d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$$

Gọi $M = \Delta \cap d_1$, $N = \Delta \cap d_2$

$\Rightarrow M(t, 2t, 1 + 3t)$, $N(2 - t', -1 + 3t', -1 + 2t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-t' - t + 2, 3t' - 2t - 1, 2t' - 3t - 2)$;

Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1, 0, 0)$, Δ // Ox nên: $\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\vec{i}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k\vec{i} \Leftrightarrow \begin{cases} -t' - t + 2 = k \\ 3t' - 2t - 1 = 0 \\ 2t' - 3t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ t = -\dfrac{4}{5} \\ t' = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \quad \text{Vậy } M\left(\frac{-4}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}\right),$$

$M \notin Ox$

Do đó phương trình Δ là $\begin{cases} x = -\dfrac{4}{5} + t \\ y = -\dfrac{8}{5} \\ z = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$

Bài 6: Tuyển sinh ĐH khối A/07

Cho hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$; d_2: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$

a) Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng vuông góc mp (P): $7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1,d_2.

Giải

a/ Chọn $A(0, 1, -2) \in d_1$; $\vec{a}_{d_1} = (2, -1, 1)$ là VTCP của d_1

$B(-1, 1, 3) \in d_2$; $\vec{a}_{d_2} = (2, 1, 0)$ là VTCP của d_2

Ta có $[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}] = (-1, 2, 4)$; $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 5)$

$\Rightarrow [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}].\overrightarrow{AB} = 21 \neq 0$. Vậy d_1, d_2 chéo nhau.

b/ *Cách 1:* Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và $\perp (P)$

(α) có VTCP là $\vec{a}_{d_1} = (2, -1, 1)$ và $\vec{n}_p = (7, 1, -4)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{a_{d_1}} \wedge \overrightarrow{n_p} = 3(1, 5, 3)$

Phương trình mp(α) là: $1(x - 0) + 5(y - 1) + 3(z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5y + 3z + 1 = 0$

Gọi N là giao điểm d_2 và (α)

$N \in d_2 \Rightarrow \exists t$: $N(-1 + 2t, 1 + t, 3)$

$N \in (\alpha) \Rightarrow (-1 + 2t) + 5(1 + t) + 9 + 1 = 0 \Rightarrow t = -2$

Vậy $N(-5, -1, 3)$

(d) cần tìm qua N và có VTCP $\vec{n}_p$

Phương trình (d): $\dfrac{x+5}{7} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$

Cách 2:

Gọi $M = d \cap d_1$, $N = d \cap d_2$.

Vậy $M(2t', 1 - t', -2 + t')$ và $N(-1 + 2t, 1 + t, 3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2t - 2t' - 1, t + t', 5 - t')$ và $\vec{n}_p = (7, 1, -4)$

Ta có:

$d \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương $\vec{n}_p \Leftrightarrow \dfrac{2t - 2t' - 1}{7} = \dfrac{t + t'}{1} = \dfrac{5 - t'}{-4}$

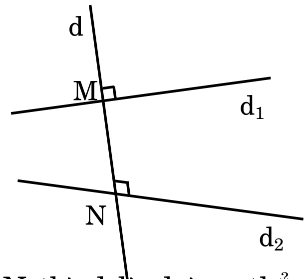
$\Leftrightarrow \begin{cases} 5t + 9t' = -1 \\ 4t + 3t' = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = 1 \end{cases}$. Vậy $M(2, 0, -1)$

d là đường thẳng qua M và có $\vec{a}_d = \vec{n}_p = (7, 1, -4)$

Do đó phương trình d: $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-4}$

Dạng 3: **VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG d CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU d_1 VÀ d_2.**

Phương pháp 1:



– Gọi $M = d \cap d_1$, $N = d \cap d_2$.

– d là đường vuông góc chung

của d_1 và d_2 nên: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.a_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{a}_{d_2} = 0 \end{cases}$

– Từ điều kiện trên ta tìm được tọa độ của M, N thì d là đường thẳng qua M, N.

Phương pháp 2:

– d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$

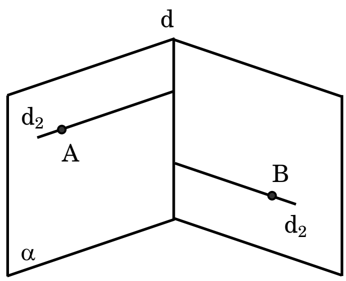
– Gọi α qua $A \in d_1$ và có PVT $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d_1}]$

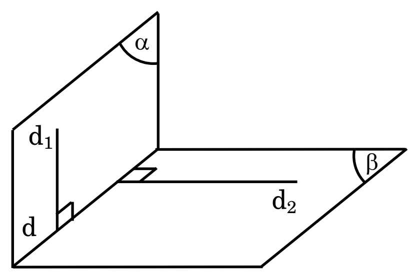
β qua $B \in d_2$ và có PVT $\vec{n}_\beta = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d_2}]$ thì: $d = \alpha \cap \beta$

Trường hợp đặc biệt:

Nếu d_1, d chéo nhau và vuông góc nhau thì đường vuông góc chung d là giao tuyến của hai mặt phẳng:

Mặt phẳng α chứa d_1 và $\perp d_2$. Mặt phẳng β chứa d_2 và $\perp d_1$.





Bài 7. Cho hai đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t' \\ z = 5 + 3t' \end{cases}$

a. Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung d của d_1 và d_2. Suy ra khoảng cách giữa d_1 và d_2.

Giải

a/ Chọn A(1, 0,– 5) $\in d_1$, $\vec{a}_{d_1} = (1, 0, 1)$; B(0, 4, 5) $\in d_2$, $\vec{a}_{d_2} = (0, -2, 3)$

Ta có: $[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}].\overrightarrow{AB} = -34 \neq 0 \Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau

b/ Gọi M = d $\cap$ d_1, N = d $\cap$ d_2.$\Rightarrow$ M(1 + t, 0, –5 + t), N(0, 4 – 2t', 5 + 3t')

Ta có: $\vec{a}_{d_1} = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_{d_2} = (0, -2, 3)$, : $\overrightarrow{MN} = (-1 - t, 4 - 2t', 10 + 3t' - t)$

d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{a}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{a}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - t + 10 + 3t' - t = 0 \\ -8 + 4t' + 30 + 9t' - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Vậy M(4, 0, –2), N(0, 6, 2), $\overrightarrow{MN} = 2(-2, 3, 2)$

Phương trình d là: $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ Do đó $d(d_1, d_2) = MN = 2\sqrt{17}$

Bài 8: Cho hai đường thẳng d_1: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = -2 - 2t' \\ y = -1 \\ z = t' \end{cases}$

a. Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau nhưng vuông góc nhau.

b. Viết phương trình đường vuông góc chung d của d_1 và d_2.

Giải

a/ Chọn A(1,2,0) $\in d_1$, $\vec{a}_{d_1} = (1, -1, 2)$ là VTCP của d_1

B(–2, –1, 0) $\in d_2$, $\vec{a}_{d_2} = (-2, 0, 1)$ là VTCP của d_2

Ta có: $[\overrightarrow{a_{d_1}}, \overrightarrow{a_{d_2}}] = -(1, 5, 2)$; $\overrightarrow{AB} = -(3, 3, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}].\overrightarrow{AB} = 18 \neq 0 \\ \vec{a}_{d_1}.\vec{a}_{d_2} = 0 \end{cases}$$. Vậy d_1, d_2 chéo nhau và vuông góc nhau.

b/ Gọi α là mặt phẳng đi qua d_1 và vuông góc d_2; β là mặt phẳng đi qua d_2 và vuông góc d_1 thì d = $\alpha \cap \beta$

α qua A, $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_{d_2} = (-2, 0, 1) \Rightarrow \alpha: -2x + z + 2 = 0$

β qua B, $\vec{n}_\beta = \vec{a}_{d_1} = (1, -1, 2) \Rightarrow \beta: x - y + 2z + 1 = 0$

Ta có: $\vec{a}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (1, 5, 2)$

Chọn điểm M(0, –3, –2) $\in \alpha \cap \beta$. Vậy phương trình d $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z+2}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BT1: Tìm M trên Oz, N trên mp(Oxy) sao cho MN song song d:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-6}{-3} \text{ và } MN = \sqrt{29}.$$

BT2: Cho d_1: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-3}$ và d_2: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$

Chứng minh d_1, d_2 và A(1, 1, 1) cùng thuộc 1 mặt phẳng.

BT3: DB/B03 Cho d_1: $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ và d_2: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$

a. Chứng minh d_1, d_2 chéo nhau và $\perp$ nhau.

b. Viết phương trình đường thẳng cắt d_1, d_2 và // Δ: $\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{-2}$

BT4: DBA08 Cho d_1: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và d_2: $\frac{x-1}{6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$

a. Chứng minh d_1 cắt d_2 tại I.

b. Tìm A trên d_1, B trên d_2 sao cho ΔAIB cân tại I và có diện tích $\frac{\sqrt{41}}{42}$.

BT5: DB/B08 Cho d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ và A(5, 4, 3), B(6, 7, 2)

a. Chứng minh d và AB chéo nhau.

b. Tìm C trên d sao cho diện tích (ΔABC) min.

BT6: DB/BO6 Cho d_1: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -2-t \\ z = 2 \end{cases}$ và d_2: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và // d′.

b. Tìm A trên d_1, B trên d_2 sao cho AB min.

BT7: Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường

a. d_1: $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$, d_2: $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

b. d_1: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ và d_2: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 3+2t \\ z = -2 \end{cases}$

VẤN ĐỀ 3: BÀI TOÁN TÍNH KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

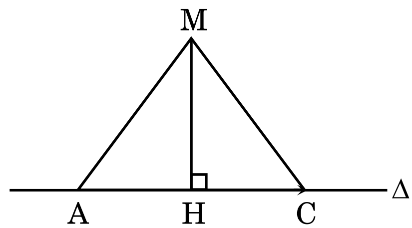
Dạng 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp

Cho (Δ) qua A và có VTCP $\vec{a}$

Khoảng cách từ điểm M đến (Δ)

$$\boxed{\mathbf{d(M,D)} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{AM}} \wedge \vec{\mathbf{a}}\right|}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|}}$$



☞ **Lưu ý:** Ta có thể không dùng công thức trên bằng cách tìm hình chiếu vuông góc H của M lên Δ (ở phần sau) thì $MH = d(M, \Delta)$

– Nếu Δ và Δ' song song thì $d(\Delta, \Delta') = d(A, \Delta')$

Bài 1: Tuyển sinh Đại học khối B/2003.

Cho $A(2, 0, 0)$; $B(0, 0, 8)$; $\overrightarrow{AC} = (0, 6, 0)$

Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến OA.

Giải

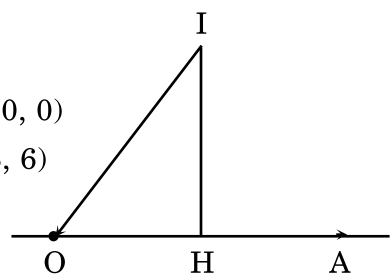
Ta có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

Vậy $C(2, 6, 0)$ và $I(1, 3, 4)$

(OA) qua $O(0, 0, 0)$ và có VTCP $\overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$

Ta có: $\overrightarrow{OI} = (1, 3, 4) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OI} = (0, -8, 6)$

Do đó $d(I, OA) = \dfrac{\sqrt{64 + 36}}{2} = 5$



Bài 2. Đề tuyển sinh Đại học khối A/09

Cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và đường thẳng Δ_1:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Tìm điểm M trên Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng khoảng cách từ M đến mp(P).

Giải

Ta có: $M \in \Delta_1 \Rightarrow \exists t$: $M(-1 + t, t, -9 + 6t)$

Δ_2 qua $A(1, 3, -1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2, 1, -2)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t - 2, t - 3, 6t - 8)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a} = (14 - 8t, 14t - 20, 4 - t)$$

Ta có: $d(M, P) = d(M, \Delta_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$

$$\Leftrightarrow \frac{|(t-1) - 2t + 2(6t-9) - 1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{(14-8t)^2 + (14t-20)^2 + (4-t)^2}}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$\Leftrightarrow |11t - 20| = \sqrt{261t^2 - 792t + 612}$$

$$\Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{53}{35}$$

Do đó: $M(0, 1, -3) \vee M\left(\dfrac{18}{35}, \dfrac{53}{35}, \dfrac{3}{35}\right)$

Bài 3. Tuyển sinh Đại học khối D/2010

Cho Δ_1: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và Δ_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$

Tìm M trên Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Giải

Gọi $M(t + 3, t, t) \in \Delta_1$

Ta có Δ_2 qua $A(2, 1, 0)$ có VTCP $\vec{a} = (2, 1, 2)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (t + 1, t - 1, t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{a} = (t - 2, -2, -t + 3)$

Ta có $d(M, \Delta_2) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(t-2)^2 + 4 + (3-t)^2}}{\sqrt{9}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1 \vee t = 4$$

Vậy $M(4, 1, 1) \vee M(7, 4, 4)$

Dạng 2: KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG CHÉO NHAU

Phương pháp:

Nếu Δ_1 qua M và có VTCP $\vec{a}$

Δ_2 qua N và có VTCP $\vec{b}$

thì khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 là $\boxed{\mathbf{d(D_1,D_2) = \dfrac{|(\vec{a} \wedge \vec{b})\overrightarrow{MN}|}{|(\vec{a} \wedge \vec{b})|}}}$

Bài 4. Cho A(1, 0, 0); B(1, 1, 0); C(0, 1, 0); D(0, 0, 2)
Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD.

Giải

AC qua A(1, 0, 0) và có VTCP $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$

BD qua B(1, 1, 0) và có VTCP $\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 2)$

Ta có $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = (2, 2, 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$

Vậy $d(AC, BD) = \dfrac{|(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}|} = \dfrac{|2|}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 5: Cho hai đường thẳng (d): $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$ và (d'): $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

a. Chứng minh hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d) và (d').

b. Hai điểm A, B và cố định trên đường thẳng (d) sao AB = $\sqrt{117}$. Khi C di động trên đường thẳng d', tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích ΔABC.

Giải

a/ (d) qua M(2, 0, 4) và có VTCP $\vec{a} = (3, -2, 2)$

Đường thẳng (d') qua N(1, 2, –1) và có VTCP $\vec{b} = (3, 1, 2)$

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = 3(-2, 0, 3)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1, 2, -5)$

Do đó: $[\vec{a}, \vec{b}].\overrightarrow{MN} = -39 \neq 0$

Vậy d_1, d_2 chéo nhau.

Ta có $d(d_1, d_2) = HK = \dfrac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|} = \sqrt{13}$

b/ Ta có $S = S_{(\Delta ABC)} = \dfrac{1}{2}CI.AB$ (I là chân đường vuông góc vẽ từ C đến d)

$\Leftrightarrow S = \dfrac{1}{2}CI.\sqrt{117}$

Mà CI ≥ HK = $\sqrt{13}$

Do đó S = $\dfrac{\sqrt{117}}{2}$CI ≥ $\dfrac{\sqrt{117}}{2}$.HK = $\dfrac{\sqrt{117}}{2}.\sqrt{13} = \dfrac{39}{2}$

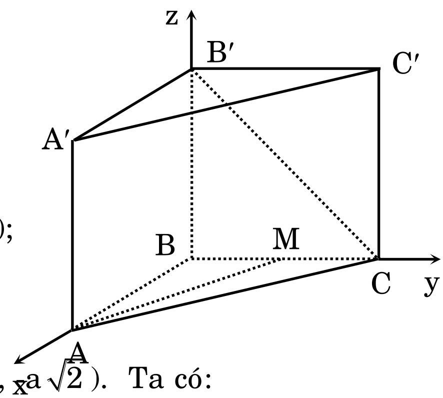
Dấu = xảy ra khi CI là đoạn vuông góc chung của (d) và (d').

Vậy: $S_{min} = \dfrac{39}{2}$.

Bài 6. Tuyển sinh ĐH khối D/08

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông cân tại B, AA' = $a\sqrt{2}$, BA = BC = a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Giải



a/ Ta có: V_{LT} = AA' dt (ΔABC)

$$= a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

b/ Gắn trục như hình vẽ

Ta có B(0, 0, 0); A(a, 0, 0); C(0, a, 0);

$M\left(0, \dfrac{a}{2}, 0\right)$; B'(0, 0, $a\sqrt{2}$)

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-a, \dfrac{a}{2}, 0)$ $\overrightarrow{B'C} = (0, a, -a\sqrt{2})$. Ta có:

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{B'C} = -\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}, a^2\sqrt{2}, a^2\right)$$ và $\overrightarrow{AC} = (-a, a, 0)$

$$\Rightarrow d(AM.B'C) = \frac{|(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{B'C}).\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{B'C}|}$$

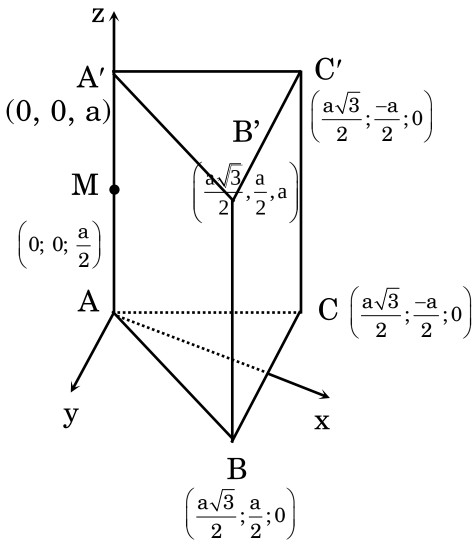
$$= \left|\frac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2} - a^3\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{2a^4}{4} + 2a^4 + a^4}}\right| = \frac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{14}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{7}}$$

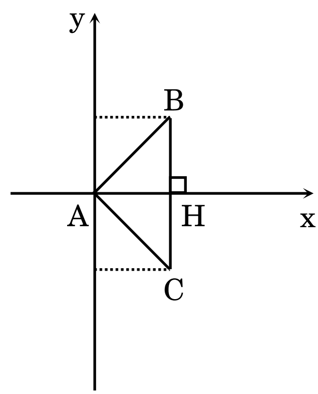
Bài 7: Đề dự bị Đại Học khối D/2008

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M trung điểm AA'. Chứng minh MB vuông góc CB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MB và CB'.

Giải

Gắn trục như hình vẽ.





Ta có $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{CB}' = -(0, a, a)$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CB}' = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$$ Vậy MB ⊥ CB’

Ta có: $\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB}' = -\left(a^2, -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\overrightarrow{BB}' = (0, 0, a)$

Vậy $d(MB, CB') = \frac{\left|\left(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB}'\right)\overrightarrow{BB}'\right|}{\left|\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{CB}'\right|} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^4 + \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = a\frac{\sqrt{30}}{10}$

Dạng 3: **CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC.**

Phương pháp:

Nếu d và d′ lần lượt có VTCP $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Mặt phẳng α có PVT $\vec{n}$

Gọi φ là góc của d, d′ ($0 \le \varphi \le 90^o$)

Thì $\boxed{\mathbf{\cos\varphi = \left|\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}}}$

Gọi φ là góc của d và α ($0 \le \varphi \le 90^o$)

Thì $\boxed{\mathbf{\sin\varphi = \left|\cos(\vec{a} \wedge \vec{n})\right| = \dfrac{|\vec{a}.\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}}}$

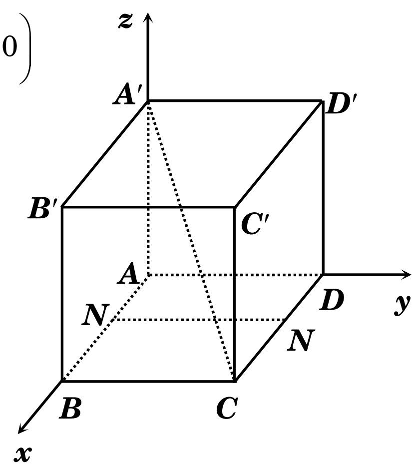
Bài 8: Tuyển sinh Đại Học khối A/2006

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có A(0, 0, 0); B(1, 0, 0); C(1, 1, 0); A'(0, 0, 1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mp (Oxy) một góc α mà $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Giải



a/ Ta có: C(1, 1, 0); $M\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$; $N\left(\dfrac{1}{2}, 1, 0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} = (1, 1, -1)$; $\overrightarrow{MN} = (0, 1, 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{MN} = (1, 0, 1)$

Vậy $d(A'C, MN) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{MN}\right)\overrightarrow{A'M}\right|}{\left|\overrightarrow{A'C} \wedge \overrightarrow{MN}\right|}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b/ Phương trình mặt phẳng

(P) dạng $ax + by + cz + d = 0$

Ta có: $A'(0, 0, 1) \in (P) \Rightarrow c + d = 0$ (1)

$C(1, 1, 0) \in (P) \Rightarrow a + b + d = 0$ (2)

Mặt phẳng (Oxy): z = 0 có PVT $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Mặt phẳng (P) có PVT $\vec{n} = (a, b, c)$

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\Leftrightarrow |c|\sqrt{6} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$ (3)

Chọn c = 1

Từ (1) $\Rightarrow d = -1$

Từ (2) $\Rightarrow b = -a - d = -a + 1$

Thay vào (3)

$\Rightarrow a^2 + (1 - a)^2 = 5 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = -1 \vee a = 2$

Vậy $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}$

Do đó phương trình (P) là: $\left[\begin{array}{l} x - 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{array}\right.$

Bài 9: Tuyển sinh Đại Học khối B/2001

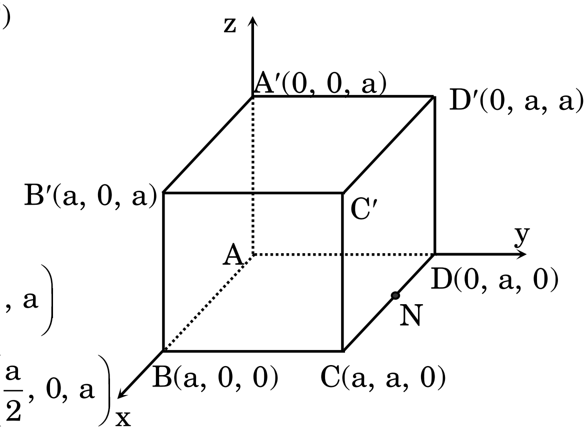
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BA' và DB'.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D'. Tính góc của hai đường thẳng MP và NC'.

Giải

Gắn trục tọa độ như hình vẽ



a/ Ta có: $\overrightarrow{BA'} = (-a, 0, a)$ $\overrightarrow{DB'} = (a, -a, a)$ $\overrightarrow{BB'} = (0, 0, a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{DB'} = (a^2, 2a^2, a^2)$

Vậy d(BA', DB')

$$= \frac{\left|\left(\overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{DB'}\right).\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|\left(\overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{DB'}\right)\right|} = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

b/ Ta có:

$M\left(a, 0, \frac{a}{2}\right); N\left(\frac{a}{2}, a, 0\right); P\left(0, \frac{a}{2}, a\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MP} = \left(-a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{NC} = \left(\frac{a}{2}, 0, a\right)$

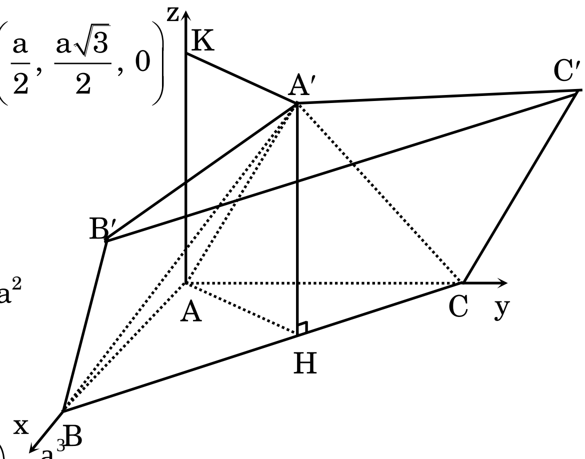
$$\Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{NC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow (MP, NC) = 90^0$$

Bài 10: Tuyển sinh Đại học khối A/2008

Cho lăng trụ xiên ABC. A'B'C' có đáy tam giác ABC vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$, AA' = 2a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp(ABC) là trung điểm H của BC. Tính thể tích khối A'.ABC và cos góc tạo bởi AA', B'C'.

Giải

Gắn trục như hình vẽ



Ta có B(a, 0, 0); C(0, a$\sqrt{3}$, 0); H$\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

Ta có AH = $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{a^2+3a^2}}{2} = a$

$\Delta A'AH \perp \Rightarrow A'H^2 = AA'^2 - AH^2$

$\Rightarrow A'H^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

Do đó: $A'\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\sqrt{3}\right)$

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}\left(a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}\right) = \frac{a^3}{2}$$

Đường thẳng B'C' // BC có VTCP

$$\overrightarrow{BC} = (-a, a\sqrt{3}, 0) = -a(1, -\sqrt{3}, 0)$$

Đường thẳng AA' có VTCP: $\overrightarrow{AA'} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\sqrt{3}\right) = \frac{a}{2}(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

Gọi φ là góc của B'C' và AA' ($0 \le \varphi \le 90^0$)

Ta có $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'}|}{|\overrightarrow{BC}|.|\overrightarrow{AA'}|} = \frac{|1.3|}{\sqrt{4}.\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

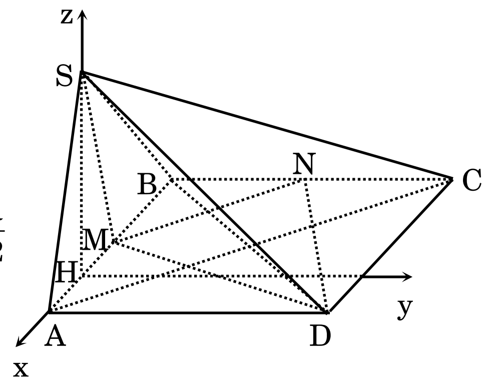
Bài 11: Tuyển sinh Đại Học khối B/2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông ABCD cạnh 2a.

SA = a, SB = a$\sqrt{3}$, mp(SAB) vuông góc (ABCD).

Gọi M, N là trung điểm AB và BC. Tính thể tích khối S. BMDN và cos góc tạo bởi SM, DN.

Giải



$\Delta SAB \perp$ tại S vì $AB^2 = SA^2 + SB^2$

Vẽ SH ⊥ AB thì SH ⊥ (ABCD)

$$\Rightarrow SH = \frac{SA.SB}{AB} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Ta có: $SA^2 = AH.AB \Rightarrow AH = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$

và $SB^2 = BH.AB \Rightarrow BH = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3}{2}a$

Ta có: $V_{S.BMDN} = \dfrac{1}{3}SH\ dt\ (BMND)$

Ta có MN // AC mà $BD \perp AC \Rightarrow MN \perp BD$

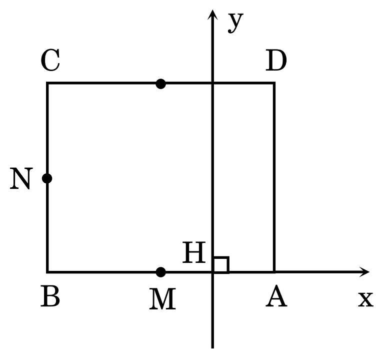
Do đó $V_{S.BMDN} = \dfrac{SH}{3}.\dfrac{1}{2}MN.BD = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2} \times 2a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Gắn trục như hình vẽ ta có $A\left(\dfrac{a}{2}, 0, 0\right)$; $B\left(-\dfrac{3}{2}a, 0, 0\right)$

$M\left(-\dfrac{a}{2}, 0, 0\right)$; $S\left(0, 0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$;

$C\left(-\dfrac{3}{2}a, 2a, 0\right)$; $N\left(-\dfrac{3}{2}a, a, 0\right)$

$D\left(\dfrac{a}{2}, 2a, 0\right)$



Ta có: $\overrightarrow{MS} = \left(\dfrac{a}{2}, 0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{a}{2}(1, 0, \sqrt{3})$

$\overrightarrow{ND} = (2a, a, 0) = a(2, 1, 0)$

Vậy $\cos(SM, DN) = \dfrac{|\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{ND}|}{|\overrightarrow{MS}|.|\overrightarrow{ND}|} = \dfrac{2}{\sqrt{4}.\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BT1: Tính khoảng cách từ A(1, 2, 1) đến

a. d: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z+3$ 　　b. trục hoành

c. trục tung 　　d. trục cao.

BT2: *DB/B02* Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD), ABCD hình vuông cạnh a, E trung điểm CD. Tính d(S, BE).

BT3: Cho d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$. Tính góc của d và

a. Mp(Oxy) 　　b. Tia Oz. 　　c. Tia Ox.

BT4: *D/04* Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có A(a, 0, 0); B(–a, 0, 0); C(0, 1, 0); B'(–a, 0, b) với a, b > 0.

a. Tính d = d (B'C, AC')

b. Cho a, b thay đổi mà a + b = 4. Tìm a, b để d_{max}.

BT5: *A/04* Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại O(0, 0, 0). Biết A(2, 0, 0); B(0, 1, 0); S(0, 0, $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm SC

a. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b. SD cắt mp(ABM) tại N. Tính $V_{S.ABMN}$.

BT6. Gọi Δm là giao tuyến của hai mặt phẳng (α): mx + y – mz – 1 = 0 và (β): x – my + z – m = 0. Chứng minh góc của Δm và Oz không đổi khoảng cách giữa Δm và Oz không đổi.

BT7: Tính khoảng cách và góc của các cặp đường thẳng sau:

a. d: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và d': $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$

b. d: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$; d': $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$

BT8: *B/07* Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a. Gọi E đối xứng D qua trung điểm của SA. Gọi M, N là trung điểm AE và BC. Chứng minh MN $\perp$ BD. Tính d(MN, AC).

VẤN ĐỀ 4: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Bài 1: Viết phương trình mặt phẳng qua A(0, –1, 3) và chứa (d): $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-2}$.

Giải

d qua M(–1, 0, 2) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ = (1, 2, –2). Mp(A, d) có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AM}$ = (–1, 1, –1)

⇒ Pháp vectơ $\vec{a} \wedge \overrightarrow{AM}$ = (0, +3, 3) = 3(0, 1, 1)

Vậy phương trình mp(A, d)

O(x -0) + 1(y +1) + 1(z – 3) = 0 ⇔ y + z – 3 = 0

Bài 2: Đề tuyển sinh Đại Học khối B/2006

Cho A(0, 1, 2) và d_1: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$: d_2: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$

a. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua A và song song d_1, d_2.

b. Tìm M trên d_1, N trên d_2 sao cho A, M, N thẳng hàng.

Giải

a/ (α) có VTCP là: $\vec{a}$ = (2, 1, –1) và $\vec{b}$ = (1, –2, 1)

⇒ PVT $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ = (–1, –3, –5) = –(1, 3, 5)

Phương trình mp (α) qua A: 1(x – 0) + 3(y – 1) + 5(z – 2) = 0

⇔ x + 3y + 5z – 13 = 0

b/ Gọi M ∈ d_1 thì ∃t ∈ R sao cho M(2u, 1 + u, –1 – u)

N ∈ d_2 thì ∃t ∈ R sao cho N(1 + t, –1 –2t, 2 + t)

Ta có: $\overrightarrow{AM}$ = (2u, u, –u – 3); $\overrightarrow{AN}$ = (t + 1, –2 – 2t, t)

A, M, N thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\overrightarrow{AN}$ ⇔ ∃k ∈ R: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u = k(t+1) \\ u = k(-2-2t) \\ -u-3 = kt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ t = -1 \\ k = 3 \end{cases}$$

Vậy M(0, 1, –1); N(0, 1, 1).

☛ Các dạng thường gặp

Dạng 1: **Đường thẳng song song mặt phẳng**

Cho d qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$

Mặt phẳng (α), có vectơ $\vec{n}$ thì pháp tuyến d // (α)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \perp \vec{n} \\ A \notin \alpha \end{cases}$

☞ ***Lưu ý:*** $d \subset \alpha$ cũng suy ra $\vec{a} \perp \vec{n}$.

Bài 3: Tuyển sinh Đại Học khối D/09

Cho A(2, 1, 0); B(1, 1, 2); C(1, 1, 0). Tìm điểm D trên đường thẳng AB sao cho CD song song (α): x + y + z – 20 = 0.

Giải

AB qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 2)$

Phương trình tham số AB là: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = 2t \end{cases}$

$D \in AB \Rightarrow \exists t: D(2 - t, 1, 2t) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (1 - t, 0, 2t)$

Ta có: CD // (α) $\Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp$ PVT $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$

$\Rightarrow 1 - t + 2t = 0 \Rightarrow t = -1$

Vậy D(3, 1, –2)

Thử lại ta thấy $D \notin (\alpha)$ vì $3 + 1 - 2 - 20 \neq 0$.

Bài 4: Đề dự thi Đại Học khối D/07

Cho d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$; d’: $\frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$

và (α) x – 2y + 2z – 1 = 0.

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc (α).

b. Tìm M trên d, N trên d’ sao cho MN song song α và khoảng cách từ MN đến (α) bằng 2.

Giải

a/ Gọi β là mặt phẳng cần tìm và $\overrightarrow{m}$ là PVT của β

Do $d \subset \beta \Rightarrow \overrightarrow{m} \perp \vec{a}_d = (2, -3, 2)$

Do $\beta \perp \alpha \Rightarrow \overrightarrow{m} \perp \vec{n}_\alpha = (1, -2, 2)$

Vậy $\overrightarrow{m} = \vec{a} \wedge \overrightarrow{n_\alpha} = (-2, -2, -1)$

Ta có d qua A(1, 3, 0)

Vậy phương trình (β) là $2(x-1)+2(y-3)+z=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-8=0$

b/ $M \in d \Rightarrow \exists t$: $M(1 + 2t, 3 - 3t, 2t)$

$N \in d' \Rightarrow \exists t'$: $N(5 + 6t', 4t', -5 - 5t')$

Vậy $\overrightarrow{MN} = (4 + 6t' - 2t, 4t' + 3t - 3, -5 - 5t' - 2t)$

Do MN // (α) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \vec{n}_\alpha = (1, -2, 2)$

$\Rightarrow 1(4 + 6t' - 2t) - 2(4t' + 3t - 3) + 2(-5 - 5t' - 2t) = 0$

$\Rightarrow -12t' - 12t = 0 \Rightarrow t' = -t$

Do MN // (α) nên d(MN, α) = d(M, α) = 2

$\Rightarrow \dfrac{|1+2t-2(3-3t)+4t-1|}{\sqrt{9}} = 2 \Rightarrow |12t - 6| = 6$

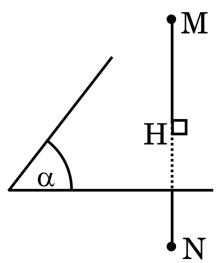
$\Rightarrow 12t - 6 = 6 \vee 12t - 6 = -6 \Rightarrow t = 1 \vee t = 0$

Vậy $\begin{cases} M_1(3, 0, 2) \\ N_1(-1, -4, 0) \end{cases} \vee \begin{cases} M_2(1, 3, 0) \\ N_2(5, 0, -5) \end{cases}$

Dạng 2: **Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M lên mp(α)**

– Viết phương trình đường thẳng d qua M, ⊥α

– Tìm giao điểm H của d và α thì H là hình chiếu ⊥ của M lên α



☞ ***Lưu ý:*** M, N đối xứng nhau qua α

⇔ H là trung điểm của MN

Bài 5: Cho A(1, 2, –1); đường thẳng (D): $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $2x + y - z + 1 = 0$.

a. Tìm điểm B đối xứng A qua mặt phẳng (P).

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, cắt (D) và song song mặt phẳng (P).

Giải

a/ Phương trình tham số đường thẳng (d) qua A và ⊥ (P) là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$

Gọi H hình chiếu ⊥ của A lên (P)

$H \in d \Rightarrow H(1 + 2t, 2 + t, -1 - t)$

$H \in (P) \Rightarrow 2(1 + 2t) + 2 + t + 1 + t + 1 = 0$

$\Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$

Vậy (d) cắt (P) tại H(–1, 1, 0).

Do B đối xứng A qua (P) ⇒ H là trung điểm AB.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = -2 - 1 = -3 \\ y_B = 2y_H - y_A = 2 - 2 = 0 \\ z_B = 2z_H - z_A = 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Vậy B(–3, 0, 1).

b/ Gọi I là giao điểm của đường thẳng cần tìm và (D).

Do I $\in$ (D) nên $\exists t_0$ để $I(2 + t_0, 3t_0, -2 + 2t_0)$

Vậy $\overrightarrow{AI} = (1 + t_0, 3t_0 - 2, -1 + 2t_0)$

Do đường thẳng cần tìm AI // (P) ⇒ $\overrightarrow{AI} \perp \vec{n}_P$

$$\Rightarrow 2(1 + t_0) + 1(3t_0 - 2) - 1(-1 + 2t_0) = 0 \Rightarrow 3t_0 + 1 = 0 \Rightarrow t_0 = -\frac{1}{3}.$$

Phương trình của đường thẳng cần tìm qua A và có

VTCP $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{2}{3}, -3, -\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}(2, -9, -5)$ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z+1}{-5}$.

Bài 7: Đề dự bị Đại Học khối B/2007

Cho A(–3, 5, –5), B(5, –3, 7) và (P) x + y + z = 0

a. Tìm giao điểm I của đường thẳng AB và (P).

b. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Giải

a/ AB qua A và có VTCP $\overrightarrow{AB} = (8, -8, 12) = 4(2, -2, 3)$

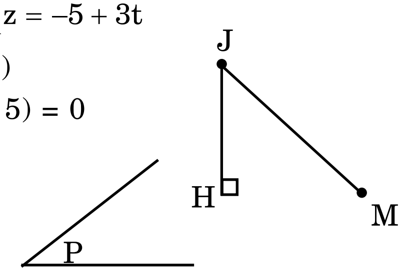
Phương trình tham số đường thẳng AB: $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$

I $\in$ AB ⇒ ∃t: I(2t – 3, 5 – 2t, 3t – 5)

I $\in$ (P) ⇒ (2t – 3) + (5 – 2t) + (3t – 5) = 0

⇒ 3t – 3 = 0 ⇒ t = 1

Vậy I(–1, 3, –2).



b/ Gọi J là trung điểm AB thì J(1, 1, 1)

$$\Delta MAB \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MJ^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Do đó: $(MA^2 + MB^2)\min \Leftrightarrow MJ \min$

⇔ M ≡ H chân đường vuông góc hạ từ J đến mp(P)

Phương trình tham số JH: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$H \in JH \Rightarrow \exists t$: $J(1 + t, 1 + t, 1 + t)$

$H \in (P) \Rightarrow (1 + t) + (1 + t) + (1 + t) = 0 \Rightarrow t = -1$

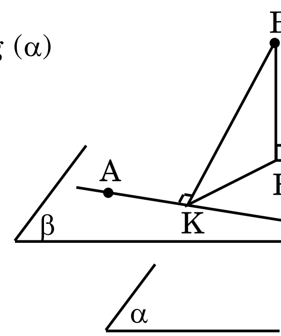
Vậy H(0, 0, 0).

Do đó $(MA^2 + MB^2)\min \Leftrightarrow M(0, 0, 0)$.

Bài 7: Tuyển sinh Đại Học khối B/2009

Cho điểm A(–3, 0, 1), B(1, –1, 3) và mặt phẳng (α): $x - 2y + z - 5 = 0$: Trong các đường thẳng Δ qua A và song song (α), viết phương trình Δ mà khoảng cách từ B đến (α) ngắn nhất.

Giải



Phương trình mặt phẳng (β) qua A và song song (α)

$1(x + 3) - 2(y - 0) + 2(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y + 2z + 1 = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (β)

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên Δ.

Ta có $BK = d(B, \Delta) \geq BH$

Do đó: $d(B, \Delta)\min = BH \Leftrightarrow \Delta$ qua A và H

Phương trình đường thẳng d qua B và vuông góc (β)

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Ta có: $H \in d \Rightarrow \exists t$: $H(1 + t, -1 - 2t, 3 + 2t)$

$H \in \beta \Rightarrow (1 + t) - 2(-1 - 2t) + 2(3 + 2t) + 1 = 0$

$\Rightarrow 9t + 10 = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{10}{9}$

Vậy $H\left(-\dfrac{1}{9}, \dfrac{11}{9}, \dfrac{7}{9}\right)$

Δ cần tìm qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{9}$ (26, 11, –2) phương trình chính tắc Δ là: $\dfrac{x+3}{26} = \dfrac{y-0}{11} = \dfrac{z-1}{-2}$

Bài 8: Đề dự bị Đại Học khối D/2004

Cho A(2, 0, 0); B(2, 2, 0); S(0, 0, m).

a. Khi m = 2 tìm C đối xứng của O qua mp (SAB).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SA. Chứng minh diện tích ΔOBH bé hơn 2 với mọi m.

Giải

a/ Khi m = 2 thì $\overrightarrow{SA} = (2, 0, -2)$; $\overrightarrow{SB} = (2, 2, -2)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = \overrightarrow{SA} \wedge \overrightarrow{SB} = 4(1, 0, 1)$

Phương trình mp(SAB):

$$1(x - 2) + 0 + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$$

Phương trình d qua O và ⊥ mp (SAB): $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Gọi I = d ∩ (SAB)

$I \in d \Rightarrow I(t, 0, t)$

$I \in (SAB) \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy I(1, 0, 1)

O và C đối xứng qua mp (SAB) nên I trung điểm OC.

Vậy $\begin{cases} x_c = 2x_I - x_o = 2 \\ y_c = 2y_I - y_o = 0 \\ z_c = 2z_I - z_o = 2 \end{cases}$ Do đó C(2, 0, 2)

b/ Phương trình tham số (SA) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 \\ z = 0 + mt \end{cases}$

Vì $H \in SA \Rightarrow H(2 - 2t, 0, mt)$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{SA} = (-2, 0, m)$ nên $-2(2 - 2t) + m^2t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{4}{m^2 + 4}$

Vậy $H\left(\dfrac{2m^2}{m^2 + 4}, 0, \dfrac{4m}{m^2 + 4}\right)$ Ta có $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \dfrac{4m}{4 + m^2}(-2, 2, m)$

$$\text{Dt}(\Delta OBH) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = 2\sqrt{\frac{m^4 + 8m^2}{m^4 + 8m^2 + 16}} < 2 \qquad \forall m.$$

Bài 9: Cho A(1, 4, 5); B(0, 3, 1); C(2, –1, 0) và (P): 3x – 3y – 2z – 15 = 0. Gọi G là trọng tâm ΔABC và M nằm trên mp (P). Chứng minh ($MA^2 + MB^2 + MC^2$) ngắn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P). Xác định tọa độ điểm M đó.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$

$\Rightarrow MA^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$

Tương tự $MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$

$MC^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$

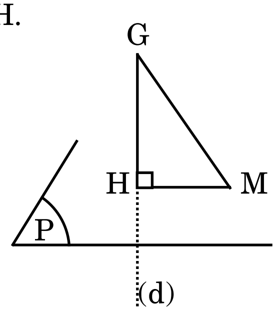
Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{0}$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3HG^2$

với H hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$.



Ta có G(1, 2, 2)

Phương trình đường thẳng (d) qua G và vuông góc mặt phẳng (P):

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 3t \quad t \in R. \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

$H \in d \Rightarrow H(1 + 3t, 2 - 3t, 2 - 2t)$

$H \in (P) \Rightarrow 3(1 + 3t) - 3(2 - 3t) - 2(2 - 2t) - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy lúc đó M(4, –1, 0).

Bài 10: Đề dự bị Đại Học khối A/2007

Cho A(–1, 3, –2), B(–3, 7, –18) và mp (P): 2x – y + z + 1 = 0

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc (P).

b. Tìm M ∈ (P) sao cho MA + MB ngắn nhất.

Giải

a/ Mặt phẳng chứa AB và ⊥ (P) có cặp VTCP là:

$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, -16)$ và PVT $\vec{n}_P = (2, -1, 1)$

Vậy PVT là $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n} = -6(2, 5, 1)$

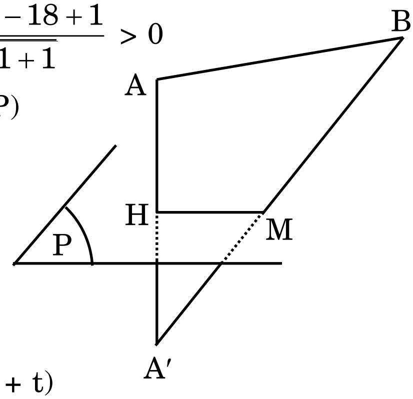
Phương trình mặt phẳng cần tìm:

$$2(x + 1) + 5(y - 3) + 1(z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5y + z - 11 = 0$$

b/ Gọi t_1, t_2 là khoảng cách đại số từ A và B đến mp (P)

Ta có: $t_1.t_2 = \dfrac{2(-1) - 3 - 2 + 1}{\sqrt{4+1+1}} . \dfrac{2(-3) - 7 - 18 + 1}{\sqrt{4+1+1}} > 0$



Vậy A, B nằm cùng phía đối với mp (P)

Phương trình đường thẳng d

qua A và $\perp$ (P): $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $(t \in R)$

Gọi H là giao điểm d và (P)

$H \in d \Rightarrow \exists t$: $H(-1 + 2t, 3 - t, -2 + t)$

$H \in (P) \Rightarrow 2(-1 + 2t) - 3 + t - 2 + t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy H(1, 2, –1)

Gọi A’ là điểm đối xứng của A qua (P)

Do H là trung điểm AA’ nên A’(3, 1, 0)

Ta có: MA + MB = MA’ + MB $\geq$ A’B = $\sqrt{36 + 36 + 18^2}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ M, A’, B thẳng hàng

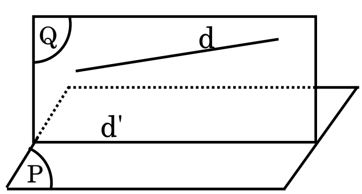
Phương trình tham số A’B: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{cases}$

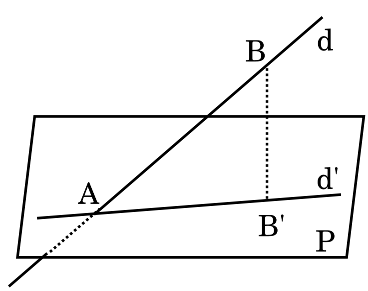
$M \in A'B \Rightarrow \exists t$: $M(t + 3, 1 - t, 3t)$

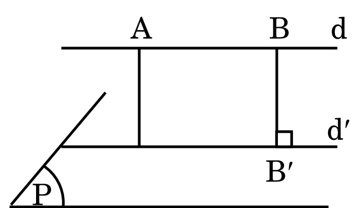
$M \in (P) \Rightarrow 2(t + 3) - 1 + t + 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

Do đó: $(MA + MB)_{min}$ = A’B $\Leftrightarrow$ M(2, 2, –3).

Dạng 3: Tìm hình chiếu vuông góc d' của đường thẳng d trên mặt.







Phương pháp 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d và $\perp$ (P)

Thì d' = (P) $\cap$ (Q). Sau đó chuyển phương trình d' qua dạng tham số

Phương pháp 2:

- Nếu d cắt (P)

  Tìm A = d $\cap$ (P)

  Tìm hình chiếu B' của B $\in$ d (B khác A) trên

  d' là đường thẳng qua hai điểm A, B'

- Nếu d // (P) thì d' // d. Vậy d, d' có cùng VTCP, sau đó ta cùng tìm hình chiếu vuông góc của B lên (P).

Bài 11: Cho hai điểm A(2, –1, 3), B(3, 0, 2) và mặt phẳng (P): $x - 2y + z - 7 = 0$. Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng AB trên (P).

Giải

* *Cách 1:*

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1),\ \vec{n}_p = (1, -2, 1)$$

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A, B và $\perp$ (P)

$$\Rightarrow \vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (-1, -2, -3) = -(1, 2, 3)$$

Vậy phương trình (Q): $x + 2y + 3z - 9 = 0$

Hình chiếu của đường thẳng AB trên (P) là đường thẳng $d' = (P) \cap (Q)$

$$\overrightarrow{a_{d'}} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right] = (8, 2, -4) = 2(4, 1, -2)$$

Chọn điểm A(2,–1, 3) $\in$ (P) $\cap$ (Q). Vậy phương trình d': $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

* *Cách 2:* Nhận thấy đường thẳng AB cắt (P) tại A vì A $\in$ (P).

Gọi B' là hình chiếu của B trên (P) thì đường thẳng AB' là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P).

Ta có: $B' \in (P) \Rightarrow B'(x, y, -x + 2y + 7)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} = (x - 3, y, -x + 2y + 5)$$

$\overrightarrow{BB'}$ cùng phương $\vec{n}_p \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{-x+2y+5}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$. Vậy $B'\left(\dfrac{10}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AB'} = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}(4, 1, -2)$. Vậy phương trình AB': $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

Bài 12: Cho d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và (α) $3x - 2y - z = 0$

a. Tính khoảng cách từ d đến (α).

b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d lên (α).

Giải

a/ d qua A(1, 7, 3) và có VTCP $\vec{a} = (2, 1, 4)$

(α) có PVT $\vec{n} = (3, -2, -1)$

Ta có: $\vec{a}.\vec{n} = 6 - 2 - 4 = 0$ nên $\vec{a} \perp \vec{n}$

Mặt khác $A \notin (\alpha)$ vì $3 - 14 - 3 = -14 \neq 0$

Vậy d // (α)

Do đó $d(d, \alpha) = d(A, \alpha) = \dfrac{|3 - 14 - 3|}{\sqrt{9+4+1}} = \sqrt{14}$

b/ Phương trình đường thẳng A và $\perp (\alpha)$ là $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 7 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu $\perp$ của A lên (α) $H \in d' \Rightarrow H(1 + 3t, 7 - 2t, 3 - t)$

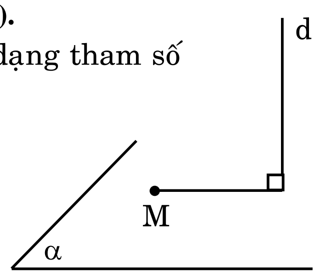
$H \in (\alpha) \Rightarrow 3(1 + 3t) - 2(7 - 2t) - 3 + t = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy H(4, 5, 2)

Gọi Δ là hình chiếu $\perp$ của d lên (α). Do d // (α) nên Δ // d. Vậy d và Δ có cùng VTCP.

Phương trình Δ là $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-2}{4}$.

Dạng 4: **Tìm hình chiếu vuông góc của điểm M lên (d).**



Phương pháp 1: Chuyển đổi phương trình d qua dạng tham số

Gọi H là hình chiếu vuông góc M lên d.

Tính $\overrightarrow{MH}$ theo tham số t

Cho $\overrightarrow{MH} \perp$ VTCP $\vec{a}_d$ từ đó tìm được t.

Phương pháp 2: Viết phương trình mặt

phẳng qua M và vuông góc d.
Hình chiếu vuông góc của M lên d là giao điểm của d và α.

☞ ***Lưu ý:*** M, N đối xứng qua d $\Leftrightarrow$ H là trung điểm MN.

Bài 13: Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$

và mặt phẳng (P): $2x - y - 2z + 1 = 0$

a. Tìm tọa độ các điểm thuộc (d) sao cho khoảng cách từ mỗi điểm đó đến mặt phẳng (P) bằng 3.

b. Gọi K là điểm đối xứng của I(2, –1, 3) qua đường thẳng (d). Hãy xác định tọa độ điểm K.

Giải

a/ Gọi M $\in$ (d) nên $\exists t \in R$: M(1 + 2t, 2 – t, 3t)

Ta có: $d(M, P) = 3 \Leftrightarrow \dfrac{|2(1+2t) - 2 + t - 2(3t) + 1|}{\sqrt{4+1+4}} = 3$

$\Leftrightarrow |-t + 1| = 9 \Leftrightarrow -t + 1 = \pm 9 \Leftrightarrow t = -8 \vee t = 10$

Vậy $M_1(21, -8, 30)$ hay $M_2(-15, 10, -24)$

b/ *Cách 1:* Gọi H là hình chiếu $\perp$ của I lên d

$H \in d \Rightarrow H(1 + 2t, 2 - t, 3t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (2t - 1, 3 - t, 3t - 3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH} \perp \vec{a}_d = (2, -1, 3) \Rightarrow 2(2t - 1) - 3 + t + 3(3t - 3) = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy H(3, 1, 3).

Cách 2: Phương trình mặt phẳng qua I và $\perp$ (d):

$2(x - 2) - 1(y + 1) + 3(z - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y + 3z - 14 = 0$ (α)

Thay x, y, z của (d) vào phương trình (α) ta có:

$2(1 + 2t) - 2 + t + 3(3t) - 14 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Do đó (d) cắt (α) tại H(3, 1, 3).

H là trung điểm KI $\Rightarrow \begin{cases} x_K = 2x_H - x_1 = 6 - 2 = 4 \\ y_K = 2y_H - y_1 = 2 + 1 = 3 \\ z_K = 2z_H - z_1 = 6 - 3 = 3 \end{cases}$

Vậy K(4, 3, 3).

Bài 14. Tuyển sinh Đại học khối D/2006

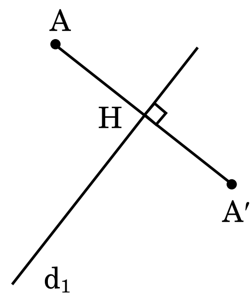
Cho A(1, 2, 3): d_1: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ và d_2: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{1}$

a. Tìm A′ đối xứng A qua d_1.

b. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc d_1 và cắt d_2.

Giải

a/ Phương trình tham số (d_1): $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$



Vẽ $AH \perp d_1$

$H \in d_1$ nên $\exists t \in R$: H(2 + 2t, –2 – t, 3 + t)

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (1 + 2t, -t - 4, t)$

Do $AH \perp d_1$ nên $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} = (2, -1, 1)$

$\Rightarrow 2(1 + 2t) + t + 4 + t = 0$

$\Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1$

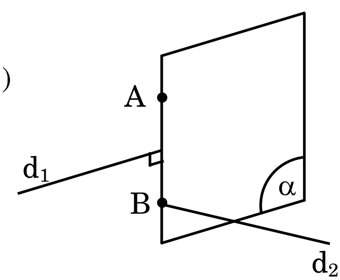
Vậy H(0, –1, 2)

A và A′ đối xứng qua d_1, nên H là trung điểm AA′:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 - 1 = -1 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -2 - 2 = -4 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

Vậy A′(–1, –4, 1)

b/ Cách 1:



Gọi (α) là mặt phẳng qua A vuông góc (d_1)

phương trình (α) là:

$$2(x - 1) - 1(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

$\Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0$

Gọi B là giao điểm (d_2) và (α)

$B \in d_2 \Rightarrow \exists u$: B(1 – u, 1 + 2u, –1 + u)

$B \in (\alpha) \Rightarrow 2(1 - u) - 1 - 2u - 1 + u - 3 = 0$

$\Rightarrow -3u - 3 = 0 \Rightarrow u = -1$

Vậy B(2, –1, –2)

Đường thẳng (Δ) chính là đường thẳng AB có phương trình là:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$$

Cách 2:

Gọi B là giao điểm của Δ và d_2

Do $B \in d_2 \Rightarrow B(1 - t, 1 + 2t, -1 + t)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-t, 2t - 1, t - 4)$

Do $\Delta \perp d_1$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{a}_{d_1} = (2, -1, 1)$

$\Rightarrow -2t - 1(2t - 1) + t - 4 = 0 \Rightarrow -3t - 3 = 0 \Rightarrow t = -1$

Vậy $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -5)$

Do đó phương trình (Δ): $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-3}{-5}$

Bài 15. Tuyển sinh Đại học khối A/2008

Cho điểm A(2, 5, 3) và d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$

a. Tìm hình chiếu vuông góc của A trên d.

b. Viết phương trình mp(α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Giải

a/ Phương trình tham số d $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d

$H \in d \Rightarrow \exists t: H(1 + 2t; t; 2 + 2t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t - 1; t - 5; 2t - 1)$

Do $AH \perp d$ nên AH vuông góc VTCP $\vec{a}_d = (2, 1, 2)$

$\Rightarrow 2(2t - 1) + 1(t - 5) + 2(2t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy H(3, 1, 4)

b/ Vẽ $AK \perp (\alpha)$

$\Delta AHK \perp$ tại K $\Rightarrow AK \le AH = \sqrt{1+16+1}$

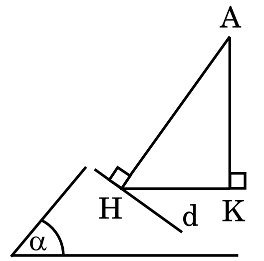
Do đó $AK_{max} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow H \equiv K$

$\Leftrightarrow$ (α) qua H và nhận $\overrightarrow{AH}$ là PVT

Phương trình (α) là:

$$1(x - 3) - 4(y - 1) + 1(z - 4) = 0$$

$\Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BT1: Cho d′: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z-4}{2}$ và (α) $x + 2y - 3z - 2 = 0$

Gọi I là giao điểm d và (α). Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trên (α) sao cho góc của Δ và d nhỏ nhất.

BT2: Cho A(1, –2, 0); B(–2, 1, 3); C(4, –2, –3) và mp(α): $x - 2z + 3 = 0$. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Tìm điểm đối xứng của G qua (α).

b. Tìm M trên (α) sao cho $4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

BT3: Cho d_1: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{1}$ và d_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

(α): $x + y - 2z + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng song song (α) và cắt d_1, d_2 tại A, B sao cho AB min.

BT4: Cho d_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ và d_2: $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{1}$

Tìm M trên d_1, N trên d_2 sao cho MN song song (α): $x - y + z + 2012 = 0$ và $MN = \sqrt{2}$.

BT5: Cho d_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$, d_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{-1}$

Viết phương trình mặt phẳng qua d và $\perp$ d′.

BT6: Cho A(2, –3, 1); B(4, 0, 0). Viết phương trình mặt phẳng chứa trục tung và //AB.

BT7: DB/B05 Tìm M trên d: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

N trên d′: $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ sao cho MN // (α): x – y + z = 0 và MN = $\sqrt{2}$.

Đáp số: $N\left(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$, $M\left(\frac{1}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{3}{7}\right)$

BT8: Cho A(0, 0, –3), B(2, 0, –1)

Tìm C trên (P): 3x – 8y + 7z – 1 = 0 sao cho ΔABC đều.

BT9: DB/B06 A(0, 0, 4); B(2, 0, 0)

Tìm hình chiếu vuông góc của AB lên (P): 2x + y – z + 5 = 0

BT10: DB/A06

Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), A′(0, 0, 2). Viết phương trình hình chiếu vuông góc của B′C′ lên (ABC′).

Đáp số: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{2-1}{1}$

BT11: DBA03

Cho A(2, 3, 2); B(6, –1, –2); C(–1, –4, 3); D(1, 6, –5)

Tìm M trên đường thẳng CD sao cho chu vi ΔABM ngắn nhất.

Đáp số: M(0, 1, –1)

BT12: DB/D08 Cho d: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-7}{-4}$

a. Tìm A′ đối xứng A qua d.

b. Tìm B, C trên d sao cho ΔABC ⊥ tại C và BC = $\sqrt{29}$

Đáp số: A′(1, 5, –2); B_1(1, 2, 3); B_2(5, 8, –5); C(3, 5, –1)

VẤN ĐỀ 5: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

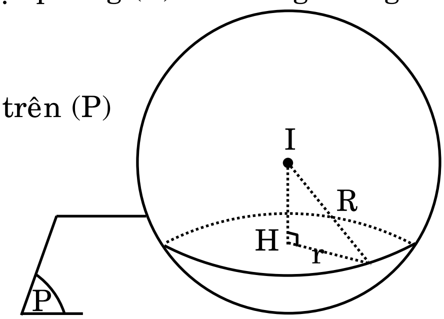
Phương pháp:

Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ

- Nếu $d(I, (P)) < R$ thì (P) cắt (S) theo một đường tròn có:

Tâm H là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

Bán kính: $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$



* Nếu (P) qua tâm I của (S) thì (P) cắt (S) theo một đường tròn gọi là đường tròn lớn.
Tâm và bán kính của đường tròn lớn cũng là tâm và bán kính của mặt cầu.

- Nếu $d(I, \Delta) < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.
- Nếu $d(I, \Delta) = R$ thì Δ và (S) chỉ có 1 điểm chung M. Khi đó Δ gọi là tiếp tuyến của (S) tại M và M gọi là tiếp điểm của Δ và (S).
- Nếu $d(I, \Delta) > R$ thì Δ và (S) không có điểm chung.

Bài 1. Tuyển sinh Đại học khối D/2011

Viết phương trình mặt cầu tâm I trên $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ bán kính 1 và tiếp xúc (P): $2x - y + 2z = 0$

Giải

Gọi $I(1 + 2t, 3 + 4t, t) \in \Delta$

(S) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2(1+2t) - (3+4t) + 2t|}{\sqrt{4+1+4}} = 1 \Leftrightarrow |2t - 1| = 3$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = 3 \vee 2t - 1 = -3 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -1$$

Vậy $I_1(5, 11, 2) \vee I_2(-1, -1, -1)$

Vậy phương trình mặt cầu: $(S_1): (x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1$

$(S_2): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

Bài 2. Tuyển sinh Đại học khối B/2007

Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng (P) $2x - y + 2z - 14 = 0$

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

b. Tìm M trên (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất.

Giải

a/ (S) có tâm I(1, –2, –1) và R = 3

Do (Q) cắt (S) theo đường tròn giao tuyến có r = 3 nên (Q) qua tâm I

Vậy (Q) qua O và có VTCP $\overrightarrow{OI} = (1, -2, -1)$ và $\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow$ PVT $\vec{n} = \overrightarrow{OI} \wedge \vec{i} = (0, -1, 2)$ Vậy phương trình (Q): $-y + 2z = 0$

b/ Ta có $d(I, (P)) = \dfrac{|2 + 2 - 2 - 14|}{\sqrt{9}} = 4 > R = 3$

Vậy $(S) \cap (P) = \varnothing$

Phương trình d qua I và $\perp$ (P): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Thay vào phương trình (S):

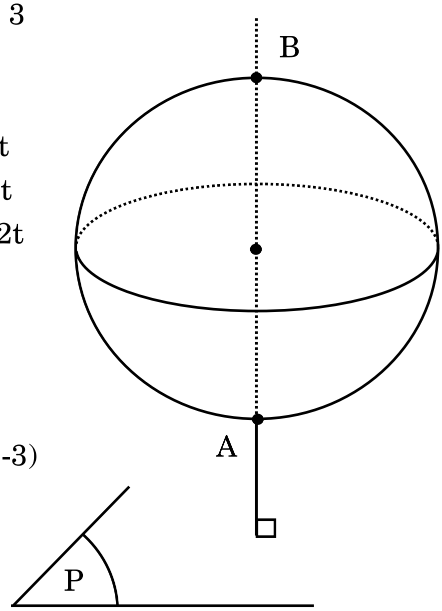
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Ta được $(2t)^2 + (-t)^2 + (2t)^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$

Vậy d cắt (S) tại A(3, –3, 1) và B(–1, –1,-3)

Mà d(A, (P)) = 1 < d(B, (P)) = 7

Do đó: d(M, (P))max $\Leftrightarrow$ M(–1, –1,-3)



Bài 3. Đề tuyển sinh Đại học khối D 2008

Cho A(3, 3, 0); B(3, 0, 3); C(0, 3, 3); D(3, 3, 3)

a. Viết phương trình mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D.

b. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

a/ Phương trình mặt cầu có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

$A \in (S) \Rightarrow 18 - 6a - 6b + d = 0 \quad (1)$

$B \in (S) \Rightarrow 18 - 6a - 6c + d = 0 \quad (2)$

$C \in (S) \Rightarrow 18 - 6b - 6c + d = 0 \quad (3)$

$D \in (S) \Rightarrow 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \quad (4)$

Từ (1) (2) (3) (4) $\Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{3}{2}, d = 0$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$

b/ Ta có $\overrightarrow{AB} = (0, -3, 3)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3)$

$\Rightarrow$ PVT của (ABC): $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -9(1, 1, 1)$

Vậy phương trình (ABC): $x + y + z - 6 = 0$

Phương trình d qua tâm $I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ của (S) và vuông góc (ABC)

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = \frac{3}{2} + t \end{cases}$$

Gọi J là tâm đường tròn (ABC)

$J \in d \Rightarrow \exists t: \left(\frac{3}{2} + t, \frac{3}{2} + t, \frac{3}{2} + t\right)$

Mà $J \in (ABC) \Rightarrow \left(\frac{3}{2} + t\right) + \left(\frac{3}{2} + t\right) + \left(\frac{3}{2} + t\right) - 6 = 0$

$$\Rightarrow 3t - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Vậy tâm của đường tròn (ABC) là J(2, 2, 2)

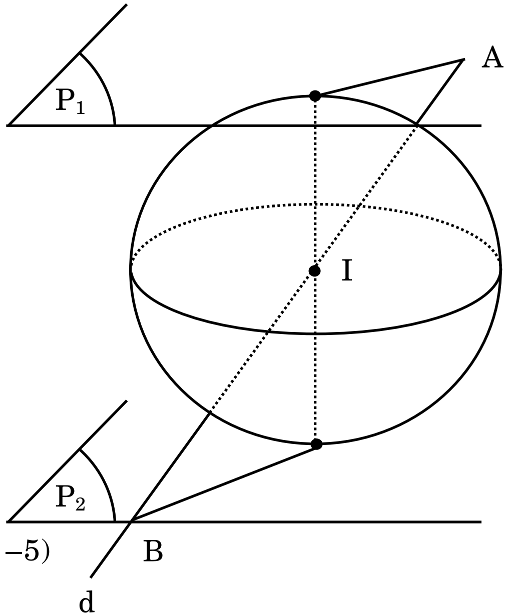
Bài 4. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$

và hai mặt phẳng (P_1): $x + 2y + 2z + 3 = 0$; (P_2): $x + 2y + 2z + 7 = 0$

Viết phương trình mặt cầu tâm I trên d và tiếp xúc hai mặt phẳng

(P_1), (P_2).

Giải



- *Cách 1:*

  Tọa độ giao điểm A của (d) và (P_1) là nghiệm hệ phương trình:

  $$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

  Vậy A(1, –1, –1)

  Tọa độ giao điểm B của (d) và (P_2) là nghiệm hệ phương trình:

  $$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -7 \end{cases}$$ Vậy B(5, –1, –5)

  Do (P_1) // (P_2) nên tâm I là trung điểm AB $\Rightarrow$ I(3, –1, –3) bán kính $R = d(I, D_1) = \dfrac{|3 - 2 - 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

  Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = \dfrac{4}{9}$

- *Cách 2:* Gọi I(a, b, c) là tâm mặt cầu

  (S) tiếp xúc (P_1), (P_2) $\Leftrightarrow d(I, P_1) = d(I, P_2) = R$

  Do đó: $\dfrac{|a + 2b + 2c + 3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|a + 2b + 2c + 7|}{\sqrt{9}}$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 2b + 2c + 3 = a + 2b + 2c + 7 \text{ (vô nghiệm)} \\ a + 2b + 2c + 3 = -(a + 2b + 2c + 7) \end{array}\right.$$

  $\Leftrightarrow a + 2b + 2c + 5 = 0$ (1)

  Mà $I \in (d) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + 1 = 0 & (2) \\ a - b + c - 1 = 0 & (3) \end{cases}$

  Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow$ a = 3, b = –1, c = –3

  Ta có: $R = d(I, P_1) = \dfrac{|3 - 2 - 6 + 3|}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

Do đó phương trình mặt cầu (S) là: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = \dfrac{4}{9}$

Bài 5. Cho đường tròn (C): $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0 \\ x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

a. Tìm tâm và bán kính của (C).

b. Lập phương trình mặt cầu chứa đường tròn (C) và tâm nằm trên mặt phẳng: $x + y + z + 3 = 0$.

Giải

a/ Xét (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z + 17 = 0$

Tâm mặt cầu S là I(2, –3, –3), $R = \sqrt{4+9+9-17} = \sqrt{5}$

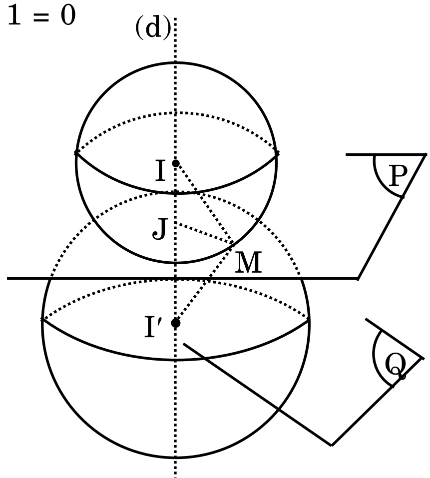
Gọi (d) là đường thẳng qua I và vuông góc với mp(P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$

Phương trình (d) là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

Thay vào phương trình (P), ta được:

$$(2 + t) + 2(3 + 2t) + 2(-3 + 2t) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$



Do đó (d) cắt (P) tại $J\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{7}{3}, -\dfrac{11}{3}\right)$

đó là tâm đường tròn (C).

Gọi r là bán kính (C). Ta có:

$$IJ^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$r^2 = R^2 - IJ^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

b/ Tâm I′ mặt cầu (S′) cần tìm chính là giao điểm (d) và mặt phẳng (Q):

$$x + y + z + 3 = 0$$

Ta có: $2 + t - 3 - 2t - 3 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$

Vậy tâm I′(3, –5, –1)

Ta có: $I'J^2 = \left(3 - \dfrac{5}{3}\right)^2 + \left(-5 + \dfrac{7}{3}\right)^2 + \left(-1 + \dfrac{11}{3}\right)^2 = 16$

Vậy R′ bán kính của (S′): $R'^2 = I'J^2 + r^2 = 16 + 4 = 20$

Phương trình (S′): $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z + 1)^2 = 20$

Bài 6: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I(1, –2, 3) và tiếp xúc đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = -3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và Δ.

Giải

Chọn A(0, 3, 6) ∈ Δ và $\vec{a}_\Delta = (-3, 4, 2)$

$$\overrightarrow{AI} = (1, -5, -3),\ [\overrightarrow{AI}, \vec{a}_\Delta] = (2, 7, -11)$$

Bán kính của (S): $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{a\Delta}]|}{|\overrightarrow{a\Delta}|} = \dfrac{\sqrt{4 + 49 + 121}}{\sqrt{9 + 16 + 4}} = \sqrt{6}$

Vậy phương trình (S): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$

Tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và Δ:

* *Cách 1:*

Gọi M là tiếp điểm của (S) và Δ; M ∈ Δ ⇒ M(–3t, 3 + 4t, 6 + 2t)

$$\overrightarrow{IM} = (-3t - 1, 4t + 5, 2t + 3)$$

$IM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{a}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Vậy M(3, –1, 4)

* *Cách 2:*

$M \in (S) \Leftrightarrow (-3t - 1)^2 + (5 + 4t)^2 + (3 + 2t)^2 = 6$

$\Leftrightarrow 29t^2 + 58t + 29 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Vậy M(3, –1, 4)

Bài 7. Tuyển sinh Đại học khối A 2011

Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và A(4, 4, 0). Viết phương trình mặt phẳng (OAB) biết B thuộc (S) và ΔOAB đều.

Giải

(S) có tâm I(2, 2, 2) và $R = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$

ΔOAB đều có cạnh $a = OA = 4\sqrt{2}$

Gọi r là bán kính đường tròn qua O, A, B

Ta có: $dt(\Delta OAB) = \dfrac{a^3}{4r} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Gọi h là khoảng cách từ I đến mp(OAB)

Ta có $h^2 = R^2 - r^2 = 12 - \frac{96}{9} = \frac{12}{9}$

Phương trình mp(OAB) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

$$O \in (OAB) \Rightarrow d = 0 \qquad (1)$$

$$A \in (OAB) \Rightarrow 4a + 4b + d = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) (2) $\Rightarrow d = 0 \wedge b = -a$

Ta có $h = d(I, (OAB)) \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{|2a + 2b + 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Từ (1) (2) $\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \Rightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow c = \pm a$

Chọn $a = 1$ thì $b = -1$, $c = \pm 1$

Phương trình mặt phẳng (OAB) là $x - y \pm z = 0$

Bài 8: Cho mặt cầu (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$ và đường thẳng (d): $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 5t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$

a. Tìm tọa độ giao điểm A, B của (d) và (S).

b. Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc (S) tại A và B.

Giải

a/ Thay x, y, z của phương trình (d) vào phương trình (S), ta được:

$$3^2 + (1 - 5t)^2 + (5t - 4)^2 = 26 \Leftrightarrow 50t^2 - 50t = 0$$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$ Vậy (d) cắt (S) tại $A(1, 2, -4)$; $B(1, -3, 1)$

b/ (S) có tâm $I(-2, 1, 0)$ Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) tại A nên vuông góc IA tại A. Vậy (α) qua A và có PVT $\overrightarrow{IA} = (3, 1, -4)$.

Phương trình (α) là: $3(x - 1) + 1(y - 2) - 4(z + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y - 4z - 21 = 0$

Tương tự mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại B có phương trình:

$$3x - 4y + z - 16 = 0$$

Bài 9: Tuyển sinh khối ĐH A/2010

Cho $A(0, 0, -2)$ và Δ: $\frac{x + 2}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 3}{2}$

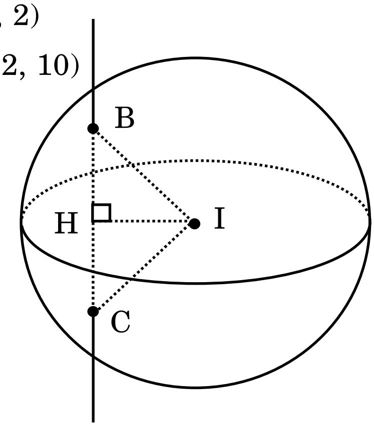
Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A cắt

Δ tại B và C mà BC = 8.

Giải

Ta có Δ qua M(–2, 2, –3) và có VTCP $\vec{a}$ = (2, 3, 2)

$$\overrightarrow{AM} = (-2, 2, -1) \Rightarrow \vec{a} \wedge \overrightarrow{AM} = (-7, -2, 10)$$



Vậy $d(A, \Delta) = \dfrac{|\vec{a} \wedge \overrightarrow{AM}|}{|\vec{a}|} = \dfrac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = 3$

Vẽ IH $\perp \Delta$ thì $HB = HC = \dfrac{BC}{2} = 4$

$\Delta IBH \perp \Rightarrow IB^2 = R^2 = IH^2 + HB^2 = 9 + 16 = 25$

Vậy phương trình mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 25$$

Bài 10: Cho mặt cầu (S): $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = \dfrac{16}{9}$

a. Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và vuông góc

$$(d): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$$

b. Viết phương trình đường thẳng (Δ) tiếp xúc (S). Biết (Δ) vuông góc Oz và qua $A\left(0, 0, \dfrac{1}{3}\right)$.

Giải

a/ Do (α) $\perp$ (d) nên (α) nhận VTCP $\vec{a}_d = (1, 2, 2)$ làm PVT. Phương trình (α) dạng: x + 2y + 2z + D = 0

(α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow$ d (I, (α)) = R $\Leftrightarrow \dfrac{|-1+2-2+D|}{\sqrt{9}} = \dfrac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow |D - 1| = 4 \Leftrightarrow D = 5 \vee D = -3$$

Vậy phương trình (α) là: x + 2y + 2z + 5 = 0

hay x + 2y + 2z – 3 = 0

b/ Gọi $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ là VTCP của Δ

Do $\Delta \perp Oz \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{k} = (0, 0, 1) \Rightarrow v_3 = 0$

(S) có tâm I(–1, 1, –1), $R = \dfrac{4}{3}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = \left(-1, 1, \frac{4}{3}\right) \text{ và } \vec{v} = (v_1, v_2, 0)$$

Vậy $\overrightarrow{IA} \wedge \vec{v} = (-\frac{4}{3}v_2, \frac{4}{3}v_1, -v_2 - v_1)$

Ta có Δ tiếp xúc (S) ⇔ d(I, Δ) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{IA} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16}{9}v_2^2 + \frac{16}{9}v_1^2 + (v_1 + v_2)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{9}(v_1^2 + v_2^2) + (v_1 + v_2)^2 = \frac{16}{9}(v_1^2 + v_2^2) \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0$$

Chọn $v_1 = 1$ thì $v_2 = -1$

Vậy phương trình Δ: $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

BT1: Cho A(2, 4, –1); B(2, 4, 3); C(1, 4, –1); D(2, 2, –1). Viết phương trình

a. Mặt cầu (S) qua A, B, C, D.

b. Mặt phẳng tiếp xúc (S) và song song mp(ABD).

BT2: DB/A08 Cho A(4, 0, 3); B(–1, –1, 3); C(3, 2, 6)

a. Viết phương trình mặt cầu (S) qua A, B, C và tâm I trên (α) $2x + 3y - 3z + 1 = 0$

b. Viết phương trình mặt phẳng chứa d $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{9} = z + 5$ và cắt (S) theo đường tròn có bán kính lớn nhất.

BT3: DB/008 Viết phương trình mặt cầu tâm I nằm trên d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$ tiếp xúc mp(Oxy) và (α) $2x - y + 2z + 1 = 0$

BT4: Viết phương trình mặt cầu tâm I(2, –3, –3) và cắt mp(P): $x - 2y + 2z + 1 = 0$ theo đường tròn có bán kính bằng 2.

BT5: Dự bị khối D 2003

Cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$ và

mp(α): $2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$

Tìm m để (α) tiếp xúc (S). Tìm tiếp điểm.

BT6: Dự bị khối B 2006

Cho A(0, 0, 4); B(2, 0, 0), mp(P): $2x + y - z + 5 = 0$

a. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB lên mp(P).

b. Viết phương trình mặt cầu qua O, A, B và tiếp xúc mp(P).

BT7: Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn:

a. $\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3)^2=5\\ x-2y+2z+1=0\end{cases}$

b. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0\\ 2x-2y-z-4=0\end{cases}$

BT8: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABC với S(3, 2, 4); B(1, 2, 3); D(3, 0, 3).

a. Lập phương trình đường vuông góc chung của AC và SD.

b. Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD. Lập phương trình mặt phẳng qua BI và song song AC.

c. Gọi H là trung điểm BD, G là trực tâm ΔSCD. Tính độ dài HG.

BT9: Cho A(0, 0, 4); B($2\sqrt{3}$, 2, 0); C(0, 4, 0). Gọi H là trực tâm ΔBCO và K là hình chiếu vuông góc của H xuống mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh ΔOBC đều và viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

b. Chứng minh K là trực tâm ΔABC.

c. Gọi N là giao điểm của 2 đường thẳng HK và OA. Tính tích số OA.ON.

BT10: Cho (S) $x^2 + y^2 + z^2 + 2my - 4z + m^2 - 13 = 0$ và

(Δ): $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{4}$. Tìm m để hình chiếu vuông góc của Δ lên (Oxy) tiếp xúc (S).

BÀI TẬP ÔN TỔNG HỢP

Bài 1. Cho hai đường thẳng d_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+4}{2}$;

d_2: $\dfrac{x+8}{2} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z-10}{-1}$

a. Viết phương trình đường thẳng Δ_1 song song Ox và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

b. Viết phương trình đường thẳng Δ_2 vuông góc mặt phẳng (Oxz) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

c. Viết phương trình đường thẳng Δ_3 nằm trên mặt phẳng α: $25x - 3y + 11z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

d. Gọi AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 ($A \in d_1$, $B \in d_2$). Viết phương trình mặt cầu (S) đường kính AB.

Giải

a/ Phương trình tham số của d_1, d_2

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} x = -8 + 2t' \\ y = 6 + t' \\ z = 10 - t' \end{cases}$$

Gọi $M = \Delta_1 \cap d_1$, $N = \Delta_1 \cap d_2 \Rightarrow M(t, 2-t, -4+2t)$, $N(-8+2t', 6+t', 10-t')$

$\overrightarrow{MN} = (2t' - t - 8, t' + t + 4, -t' - 2t + 14)$; Ox có vtcp $\vec{i} = (1, 0, 0)$

Vì Δ_1 // Ox nên:

$$\overrightarrow{MN} \text{ cùng phương } \vec{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k.\vec{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - t - 8 = k \\ t' + t + 4 = 0 \\ -t' - 2t + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -70 \\ t = 18 \\ t' = -22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(18, -16, 32);\ \vec{a}_{\Delta_1} = \vec{i} = (1, 0, 0);\ M \notin Ox \Rightarrow \Delta_1: \begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32 \end{cases}$$

b/ Gọi $C = \Delta_2 \cap d_1$, $D = \Delta_2 \cap d_2 \Rightarrow C(t, 2-t, -4+2t)$, $D(-8+2t', 6+t', 10-t')$, $\overrightarrow{CD} = (2t' - t - 8, t' + t + 4, -t' - 2t + 14)$; (Oxz) có VTPT $\vec{j} = (0, 1, 0)$

Ta có:

Δ_2 vuông góc (Oxz) $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}$ cùng phương $\vec{j}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = m\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t' - t - 8 = 0 \\ t' + t + 4 = m \\ -t' - 2t + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t' = 6 \\ m = 14 \end{cases} \Rightarrow C\ (4, -2, 4);\ \vec{a}_{\Delta_2} = \vec{j} = (0, 1, 0).$$

Vậy phương trình Δ_2: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 + t \\ z = 4 \end{cases}$

c/ Gọi $E = \alpha \cap d_1$, $F = \alpha \cap d_2 \Rightarrow \Delta_3$ là đường thẳng qua hai điểm E, F.

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+4}{2} \\ 25x - 3y + 11z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy E (1, 1, –2)

Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 25x - 3y + 11z = 0 \\ \dfrac{x+8}{2} = \dfrac{y-6}{1} = \dfrac{z-10}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 9 \\ z = 7 \end{cases}$$. Vậy F (–2, 9, 7)

Δ_3 là đường thẳng qua E và có vtcp $\overrightarrow{EF} = (-3, 8, 9)$

Vậy Δ_3: $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z+2}{9}$

d/ Ta có: $A \in d_1 \Rightarrow A(t, 2 - t, -4 + 2t)$;

$B \in d_2 \Rightarrow B(-8 + 2t', 6 + t', 10 - t')$

$\overrightarrow{AB} = (2t' - t - 8, t' + t + 4, -t' - 2t + 14)$

$\vec{a}_{d_1} = (1, -1, 2)$, $\vec{a}_{d_2} = (2, 1, -1)$

Đường thẳng AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{a}_{d_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{a}_{d_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t + t' - 16 = 0 \\ t + 6t' - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = 4 \end{cases}$$

Vậy A(2, 0, 0), B(0, 10, 6)

(S) có tâm I(1, 5, 3), bán kính $R = IA = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$

Vậy (S): $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = 35$

Bài 2. Cho hai mặt phẳng: α: 2x – y + z + 2 = 0; β: x + y + 2z – 1 = 0

a. Chứng minh rằng α và β cắt nhau. Tính góc giữa α và β.

b. Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho khoảng cách từ M đến α bằng ba lần khoảng cách từ M đến β.

c. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(3, 2, –2) và song song với hai mặt phẳng α và β.

d. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua B(0, 4, –1) và vuông góc với hai mặt phẳng α và β.

Giải

a/ Ta có: $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \alpha$ và β cắt nhau.

$\vec{n}_\alpha = (2, -1, 1)$; $\quad \vec{n}_\beta = (1, 1, 2)$

Vậy $\cos(\alpha, \beta) = \dfrac{|\vec{n}_\alpha.\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|.|\vec{n}_\beta|} = \dfrac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow (\alpha, \beta) = 60^0$

b/ $M \in Ox \Rightarrow M(m, 0, 0)$

Ta có: $d(M, \alpha) = 3d(M, \beta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m+2|}{\sqrt{6}} = 3\frac{|m-1|}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow |2m+2| = 3|m-1| \Leftrightarrow m = 5 \vee m = \frac{1}{5}$$

Vậy có hai điểm M: M(5, 0, 0) và $M\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$

c/ d // α và d // β $\Rightarrow \vec{a}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (-3, -3, 3) = -3(1, 1, -1)$

$$\Rightarrow d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

d/ (P) $\perp \alpha$ và (P) $\perp \beta \Rightarrow \vec{n}_p = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = -3(1, 1, -1)$

Vậy (P): 1(x – 0) + 1(y – 4) – 1(z + 1) = 0 $\Leftrightarrow$ x + y – z – 5 = 0

Bài 3. Cho hai điểm A(0, 0, –3), B(2, 0, –1) và mặt phẳng (P): 3x – 8y + 7z – 1 = 0

a. Tìm điểm C trên (P) sao cho ΔABC vuông cân tại C

b. Tìm điểm D trên (P) sao cho ΔABD nhận điểm $G\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ làm trọng tâm.

c. Tìm điểm E thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Oxz) sao cho ΔABE có diện tích bằng 4.

d. Tìm điểm $F \in (P)$ sao cho đường thẳng IF song song đường thẳng d: $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{1}$ biết I là trung điểm của AB.

Giải

a/ Ta có: $C \in (P) \Rightarrow 3x - 8y + 7z - 1 = 0$ (1)

$\overrightarrow{AC} = (x, y, z + 3)$; $\overrightarrow{BC} = (x - 2, y, z + 1)$

ΔABC vuông cân tại C $\Leftrightarrow \begin{cases} AC = BC \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 = BC^2 \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ x(x-2) + y^2 + (z+3)(z+1) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) và (2) cho: $z = -x - 1$, $y = \frac{-x-2}{2}$

Thay vào (3):

$$x(x - 2) + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + (-x + 2)(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3},\ z = -\frac{5}{3}$$

Vậy C $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

b/ Ta có: $D \in (P) \Rightarrow D\left(x, y, \frac{-3x+8y+1}{7}\right)$

G là trọng tâm ΔABD nên:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_D = 3x_G \\ y_A + y_B + y_D = 3y_G \\ z_A + z_B + z_D = 3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 + 2 + x = \frac{7}{3} \\ 0 + 0 + y = 7 \\ -3 - 1 + \frac{-3x+8y+1}{1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 7 \end{cases}$$

Vậy D $\left(\frac{1}{3}, 7, 8\right)$

c/ Ta có: $E \in (P) \cap (Oxz) \Rightarrow E\left(x, 0, \frac{1-3x}{7}\right)$

$\overrightarrow{AB} = (2, 0, 2)$; $\overrightarrow{AE} = \left(x, 0, \frac{22-3x}{7}\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right] = (0, \frac{20x-44}{7}, 0)$$

Điều kiện $x \neq \frac{11}{5} \Rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right]\right| = \frac{|10x-22|}{7}$

Do đó: $S_{ABE} = 4 \Leftrightarrow \frac{|10x-22|}{7} = 4 \Leftrightarrow x = 5$ và $x = -\frac{3}{5}$

Vậy có 2 điểm E: E $(5, 0, -2)$ và E $(-\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$

d/ Ta có: $F \in (P) \Rightarrow F\,(x, y, \frac{-3x+8y+1}{7})$

$$I(1, 0, -2),\ \vec{a}_d = (1, 1, 1);\ \overrightarrow{IF} = \left(x-1, y, \frac{-3x+8y+15}{7}\right)$$

IF // d $\Leftrightarrow \overrightarrow{IF}$ cùng phương $\vec{a}_d \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{\frac{-3x+8y+15}{7}}{1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ 3x-y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases}$ Vậy F(7, 6, 4)

Bài 4. Cho hai đường thẳng:

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1};\quad d': \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -3-t \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng Δ qua giao điểm M của d và d′, biết Δ tạo với trục Ox góc 60^o và tạo với trục Oz góc 45^o

Giải

Dễ dàng tìm được M $(1, 0, -2)$

Gọi $\vec{u} = (a, b, c)$ là 1 vtcp của Δ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Vtcp của Ox, Oz lần lượt là $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Ta có: $\begin{cases} \cos(\Delta, Ox) = \cos 60^o \\ \cos(\Delta, Oz) = \cos 45^o \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\cos(\vec{u}, \vec{i})\right| = \frac{1}{2} \\ \left|\cos(\vec{u}, \vec{k})\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|(\vec{u}, \vec{i})|}{|\vec{u}||\vec{i}|} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{|(\vec{u}, \vec{k})|}{|\vec{u}||\vec{k}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 - c^2 = 0 & (1) \\ c^2 = a^2 + b^2 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1): $3a^2 - b^2 - (a^2 + b^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$.

- $a = -b \Rightarrow c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow c = \pm b\sqrt{2}$

$\Rightarrow \vec{u} = (-b, b, \pm b\sqrt{2}) = b(-1, 1, \pm\sqrt{2})$

(ta phải có $b \neq 0$ vì nếu $b = 0 \Rightarrow a = c = 0$: mâu thuẩn vì $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

Vậy Δ: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{\pm\sqrt{2}}$

- $a = b \Rightarrow c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow c = \pm b\sqrt{2} \Rightarrow \vec{u} = (b, b, \pm b\sqrt{2}) = b(1, 1, \pm\sqrt{2})$

Vậy Δ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{\pm\sqrt{2}}$

Bài 5. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ và điểm A $(-1, 0, 2)$

Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, cắt d và tạo với d góc 30^o

Giải

Gọi $B = \Delta \cap d \Rightarrow B(t, -t, 1 + t)$

$\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (t + 1, -t, t - 1)$, $\vec{a}_d = (1, -1, 1)$

Ta có: $\cos(\Delta, d) = \cos 30^o \Leftrightarrow \dfrac{|\overrightarrow{AB}.\vec{a}_d|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{a}_d|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|3t|}{\sqrt{3t^2+2}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2|t| = \sqrt{3t^2+2} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

- $t = \sqrt{2}$: $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$

Vậy Δ: $\dfrac{x+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{y}{-\sqrt{2}} = \dfrac{z-2}{\sqrt{2}-1}$

- $t = -\sqrt{2}$: $\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2} - 1)$

Vậy Δ: $\dfrac{x+1}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \dfrac{z-2}{-\sqrt{2}-1}$

Bài 6. Cho hai mặt phẳng:

$$\alpha: x + y + z + 4 = 0; \beta: x + y + 1 = 0$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M (–1, 1, 1), vuông góc mặt phẳng α và hợp với mặt phẳng β góc 60^o

Giải

Gọi: $\vec{n}_p = (a, b, c) \qquad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Ta có: $\vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_\beta = (1, 1, 0)$

$$(P) \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n}_p . \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$$

$$\cos (P, \beta) = \cos 60^o \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_p.\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_\beta|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 + 4ab = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - (a + b)^2 + 4ab = 0$$

$$\Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

• $a = 0 \Rightarrow c = -b \Rightarrow \vec{n}_p = (0, b, -b) = b(0, 1, -1)$

Vậy (P): $1(y - 1) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$

• $b = 0 \Rightarrow c = -a \Rightarrow \vec{n}_p = (a, 0, -a) = a(1, 0, -1)$

Vậy (P): $1(x + 1) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - z + 2 = 0$

Bài 7. Cho mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

Giải

Chọn A (–1, –1, 3) ∈ d, $\vec{a}_d = (2, 1, 1)$, $\vec{n}_p = (1, 2, -1)$

Gọi $\vec{n}_Q = (a, b, c) \qquad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Ta có: $\vec{a}_d . \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 2a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - b$

$$\cos (P, Q) = \frac{|\vec{n}_p.\vec{n}_Q|}{|\vec{n}_p||\vec{n}_Q|} = \frac{|a+2b-c|}{\sqrt{6}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|3a+3b|}{\sqrt{6}.\sqrt{5a^2+2b^2+4ab}}$$

Hai trường hợp:

1. $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$: $\cos(P, Q) = \dfrac{3|b|}{\sqrt{6}\sqrt{2b^2}} = \dfrac{3|b|}{2\sqrt{3}|b|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $a \neq 0$: $\cos(P, Q) = \dfrac{\left|3 + 3\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{6}\sqrt{5 + 2\dfrac{b^2}{a^2} + 4\dfrac{b}{a}}} = \dfrac{|3 + 3t|}{\sqrt{6}\sqrt{5 + 2t^2 + 4t}}$ $\left(t = \dfrac{b}{a}\right)$

$$\Rightarrow \cos^2(P, Q) = \frac{9(t+1)^2}{6(2t^2 + 4t + 5)} = \frac{3}{2}.\frac{t^2 + 2t + 1}{2t^2 + 4t + 5}$$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{t^2 + 2t + 1}{2t^2 + 4t + 5} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{6t + 6}{(2t^2 + 4t + 5)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow O \le f(t) < \frac{3}{4} \Leftrightarrow O \le \cos^2(P, Q) < \frac{3}{4} \Leftrightarrow O \le \cos(P, Q) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hai trường hợp trên cho: $O \le \cos(P, Q) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó: (P, Q) nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ cos (P, Q) lớn nhất $\Leftrightarrow \cos(P, Q) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow c = -b \Rightarrow \vec{n}_Q = (0, b, -b) = b(0, 1, -1)$$

Vậy (Q): $1(y + 1) - 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow y - z + 4 = 0$

Bài 8. Cho mặt phẳng (P): $x - 2y + z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, 0)$

a. Tìm điểm C trên (P) sao cho đường thẳng OC qua trung điểm I của AB (O là gốc tọa độ)

b. Tìm điểm D trên (P) sao cho đường thẳng ID vuông góc đường thẳng d: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-6}{-2}$ và $ID = \sqrt{11}$

c. Tìm độ dài nhỏ nhất của vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi M di động trên mặt phẳng (P)

d. Tìm giá trị nhỏ nhất của MA + MB khi M di động trên mặt phẳng (P)

Giải

a/ C $\in$ (P) $\Rightarrow$ C (2y – z + 1, y, z) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OC}$ = (2y – z + 1, y, z)

I(0, 1, 1) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OI}$ = (0, 1, 1)

Đường thẳng OC qua I $\Leftrightarrow$ O, C, I thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OI}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z + 1 = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Vậy C (0, –1, –1)

b/ D $\in$ (P) $\Rightarrow$ D (2y – z + 1, y, z)

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{ID}$ = (2y – z + 1, y – 1, z – 1); $\vec{a}_d$ = (1, –1, –2)

Ta có: $\begin{cases} ID \perp d \\ ID = \sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{ID} \perp \vec{a}_d = 0 \\ ID^2 = 11 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z + 1 - y + 1 - 2z + 2 = 0 \\ (2y - z + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z - 4 \\ (5z - 7)^2 + (3z - 5)^2 + (z - 1)^2 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z - 4 \\ 35z^2 - 102z + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\dfrac{44}{35} \\ z = \dfrac{32}{35} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm D: D (3, 2, 2) và $D\left(-\dfrac{17}{7}, -\dfrac{44}{35}, \dfrac{32}{35}\right)$

c/ Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 2MI$

MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ IM $\perp$ (P)

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ là: d (I, (P)) = $\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

d/ Đặt: f(x, y, z) = x – 2y + z –1

$\Rightarrow$ $f(x_A, y_A, z_A).\ f(x_B, y_B, z_B)$ = 2(– 6) = –12 < 0 $\Rightarrow$ A và B nằm khác phía đối với (P)

Ta có: MA + MB $\geq$ AB (không đổi)

Dấu "=" xảy ra khi M = AB $\cap$ (P)

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của MA + MB là AB = $\sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$

Bài 9: Cho đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{-1}$ và hai điểm A(1, 1, 1), B(1, –5, –2)

a. Chứng minh hai đường thẳng AB và d cùng nằm trên một mặt phẳng

b. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

Giải

a/ Ta có d: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Chọn M(–1, 2, 1) và N (1, –1, 0) $\in$ d; $\vec{a}_d = (2, -3, -1)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AN}(0, -2, -1)$, $\overrightarrow{AB} = (0, -6, -3)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = (-1, -2, 4)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AB} = 12 - 12 = 0$

$\Rightarrow$ A, B, M, N đồng phẳng $\Rightarrow$ AB và d cùng nằm trên một mặt phẳng

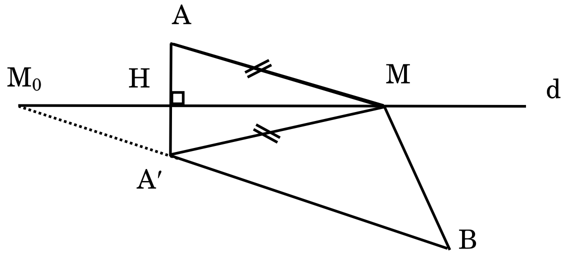
Cách khác: Pt đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 6t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{-1} \\ x = 1 \\ y = 1 - 6t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{3} \\ x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ d cắt AB tại điểm I(1, –1, 0) $\Rightarrow$ d và AB cùng nằm trên môt mặt phẳng.

b/ Ta có: $\overrightarrow{IA} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{IB} = (0, -4, -2) = -2\overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow$ A, B nằm khác phía đối với d



Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua d.

Ta có: MA = MA′ $\Rightarrow$ $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$

Do đó: $|MA - MB|$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $|MA' - MB|$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_o = d \cap A'B$

Gọi $H = AA' \cap d \Rightarrow H(-1 + 2t, 2 - 3t, 1 - t)$

$\overrightarrow{AH} = (-2 + 2t, 1 - 3t, -t)$

$\overrightarrow{AH}.\vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow -4 + 4t - 3 + 9t + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow H(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

H là trung điểm AA′ $\Rightarrow A'(-1, 0, 0)$

$M_o \in d \Rightarrow M_o\ (-1 + 2t, 2 - 3t, 1 - t)$

$\overrightarrow{A'M_0} = (2t, 2 - 3t, 1 - t)$, $\overrightarrow{A'B} = (2, -5, -2)$

M_o, A′, B thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A'M_0}$ cùng phương $\overrightarrow{A'B}$

$\Leftrightarrow \frac{2t}{2} = \frac{2-3t}{-5} = \frac{1-t}{-2} \Leftrightarrow t = -1$

$\Rightarrow M_o(-3, 5, 2)$. Vậy M(–3, 5, 2)

Bài 10. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng:

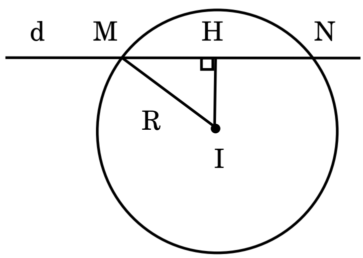
$$\alpha: 2x - 2y - z + 1 = 0,\ \beta: x + 2y - 2z - 4 = 0$$

Tìm m để d cắt (S) tại điểm M, N sao cho MN = 9

Giải

(S) có tâm I(–2, 3, 0), bán kính $R = \sqrt{13 - m}$ (m < 13)

$\vec{a}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (6, 3, 6) = 3(2, 1, 2)$



Chọn $A(-2, 0, -3) \in \alpha \cap \beta$

Phương trình d: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

Gọi H là hình chiếu của I trên d

$\Rightarrow H(-2 + 2t, t, -3 + 2t)$, $HM = \frac{MN}{2} = \frac{9}{2}$

$\overrightarrow{IH} = (2t, t - 3, -3 + 2t)$

$\overrightarrow{IH}.\vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(0, 1, -1) \Rightarrow IM^2 = IH^2 + HM^2 = \frac{117}{4}$

Mà: $R = IM \Leftrightarrow R^2 = IM^2 \Leftrightarrow 13 - m = \frac{117}{4} \Leftrightarrow m = \frac{-65}{4}$ (thỏa đk m < 13)

Bài 11. Cho ba điểm A(1, –1, 2), B(2, 0, 3), C(3, 2, –1). Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng (Oyz) và tiếp xúc mặt phẳng (ABC) tại A.

Giải

Gọi $I \in (Oyz)$ là tâm của (S) $\Rightarrow I(0, y, z)$

Ta có: $\overrightarrow{AI} = (-1, y+1, z-2)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 3, -3)$

(S) tiếp xúc mặt phẳng (ABC) tại A nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2 \\ 3y - 3z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-1}{6} \\ z = \dfrac{13}{6} \end{cases} \Rightarrow I(0, \frac{-1}{6}, \frac{13}{6})$$

$$\overrightarrow{AI} = (-1, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}) \Rightarrow R = |\overrightarrow{AI}| = \sqrt{\frac{31}{18}}$$

Vậy (S): $x^2 + (y + \frac{1}{6})^2 + (z - \frac{13}{6})^2 = \frac{31}{18}$

Bài 12. Cho hai điểm A(2, 1, –2), B (0, 2, –2) và mặt phẳng

$$\alpha: x + 3y + 2z - 1 = 0$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng AB và vuông góc α

b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua đường thẳng AB và hợp với mặt phẳng (Oxy) góc 45^o.

Giải

a/ Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$, $\vec{n}_\alpha = (1, 3, 2)$

$\vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_\alpha] = (2, 4, -7)$

Vậy (P): $2x + 4(y - 2) - 7(z + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - 7z - 22 = 0$

b/ Gọi $\vec{n}_Q = (a, b, c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$, $\vec{n}_{Oxy} = \vec{K} = (0, 0, 1)$

(Q) đi qua AB $\Rightarrow \vec{n}_Q.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -2a + b = 0 \Leftrightarrow b = 2a$

Ta có $\cos((Q), (Oxy)) = \cos 45^o \Leftrightarrow \dfrac{|\vec{n}_Q.\vec{K}|}{|\vec{n}_Q||\vec{K}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow c = \pm a\sqrt{5}$

- $c = a\sqrt{5} \Rightarrow \vec{n}_Q = (a, 2a, a\sqrt{5}) = a(1, 2, \sqrt{5})$

Vậy (Q): $x + 2(y - 2) + \sqrt{5}(z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + \sqrt{5}z - 4 + 2\sqrt{5} = 0$

• $c = -a\sqrt{5} \Rightarrow \vec{n}_Q = (a, 2a, -a\sqrt{5}) = a(1, 2, -\sqrt{5})$

Vậy (Q) $x + 2y - \sqrt{5}z - 4 - 2\sqrt{5} = 0$

Bài 13. Cho hai điểm A(1, –1, 0), B(2, 0, –1) và mặt phẳng (P): $2x + y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C trên (P) sao cho mp(ABC) vuông góc mp(P) và ΔABC có diện tích bằng $\sqrt{14}$.

Giải

Ta có: $C \in (P) \Rightarrow C(x, y, -2x - y - 1)$

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (x - 1, y + 1, -2x - y - 1)$, $\vec{n}_p = (2, 1, 1)$

$\vec{n}_{ABC} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2x, x + y + 2, -x + y + 2)$

$(ABC) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_{ABC}.\vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 + (x + y + 2)^2 + (-x + y + 2)^2} = \sqrt{14}$

$\Leftrightarrow 4x^2 + (x + y + 2)^2 + (-x + y + 2)^2 = 56$

$\Leftrightarrow 14x^2 = 56 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy có hai điểm C: C(2, 2, –7) và C(–2, –6, 9)

Bài 14. Cho bốn điểm: A(3, –1, 0), B(0, –7, 3) và C(–2, 1, –1), D(5, 4m –1, m^2)

a. Tìm m để bốn điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ diện có thể tích nhỏ hơn 8.

b. Tìm tọa độ điểm $M \in$ mặt phẳng (Oxz) sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất.

Giải

a/ Bốn điểm A, B, C, D tạo thành 1 tứ diện

$\Leftrightarrow$ A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} \neq 0$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3, -6, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, 2, -1)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 4m, m^2)$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0, -18, 24)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = -72m + 24m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 3$

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}\right| = \left|4m^2 - 12m\right|$

Do đó: $V_{ABCD} < 8 \Leftrightarrow \left|4m^2 - 12m\right| < 8 \Leftrightarrow -8 < 4m^2 - 12m < 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m^2 - 3m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{2} < m < 1 \vee 2 < m < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

Do điều kiện $m \neq 0$ và $m \neq 3$ nên:

$$m \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \setminus \{0, 3\}$$

b/ $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x, 0, z)$

Ta có: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (-3 - 6x, -12, 3 - 6z)$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right| = \sqrt{(3+6x)^2 + 144 + (3-6z)^2} \geq 12 \ \forall\, x, z$$

Do đó: $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 6x = 0 \\ 3 - 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: $M\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Bài 15. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ qua $A(3, -1, -4)$, cắt trục Oy và song song mặt phẳng α: $2x + y = 0$

Giải

➲ *Cách 1:*

Gọi β là mp qua A và // α và $B = \beta \cap Oy$

$\Rightarrow \Delta$ là đường thẳng qua A, B

Ta có: $\beta \,//\, \alpha \Rightarrow : 2x + y + D = 0 \quad (D \neq 0)$

$A \in \beta \Rightarrow 6 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \beta: 2x + y - 5 = 0$

$B = \beta \cap Oy \Rightarrow B(0, 5, 0)$

$$\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-3, 6, 4) \Rightarrow \Delta: \frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+4}{4}$$

➲ *Cách 2:*

Gọi $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B(0, y, 0)$

$\vec{a}_\Delta = \overrightarrow{AB} = (-3, y + 1, 4)$, $\vec{a}_\alpha = (2, 1, 0)$

Ta có: $\Delta \,//\, \alpha \Leftrightarrow \vec{a}_\Delta . \vec{a}_\alpha = 0 \Leftrightarrow -6 + y + 1 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow \vec{a}_\Delta = (-3, 6, 4)$

Vậy Δ: $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z+4}{4}$

Bài 16. Cho đường thẳng d: $\frac{x-8}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{-2}$ và hai mặt phẳng:

(α): $5x - 4y + z - 6 = 0$; (β): $2x - y + z + 7 = 0$

a. Gọi A là giao điểm của d và (α). Tìm tọa độ điểm M trên (β) sao cho đường thẳng AM vuông góc (α)

b. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A, biết (β) cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng $\pi\sqrt{5}$

Giải

a/ Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-8}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{-2} \\ 5x-4y+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}. \text{ Vậy } A(1, 0, 1)$$

$M \in (\beta) \Rightarrow M(x, y, -2x + y - 7)$

$\overrightarrow{AM} = (x - 1, y, - 2x + y - 8)$, $\vec{n}_\alpha = (5, -4, 1)$

Vì $AM \perp (\alpha)$ nên:

$\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\vec{n}_\alpha \Leftrightarrow \frac{x-1}{5}=\frac{y}{-4}=\frac{-2x+y-8}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5y=4 \\ 11x-5y=-39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-7}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy $M\left(-\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)$

b/ Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến

Ta có: $2\pi r = \pi\sqrt{5} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$h = d(A, \beta) = \frac{10}{\sqrt{6}}$

Gọi R là bán kính của (S): $R^2 = r^2 + h^2 = \frac{5}{4}+\frac{100}{6}=\frac{215}{12}$

Vậy (S): $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \frac{215}{12}$

Bài 17. Cho ba đường thẳng:

$$d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-6}{1};\ d_1: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases};\ d_2: \begin{cases} x = t' \\ y = -1-2t' \\ z = 3t' \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng Δ song song đường thẳng d và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

➲ *Cách 1:*

Chọn $A(1, 0, 0) \in d_1$ và $\vec{a}_{d_1} = (2, 1, -1)$

$B(0, -1, 0) \in d_2$ và $\vec{a}_{d_2} = (1, -2, 3)$

Gọi α là mặt phẳng qua d_1 và // d; β là mặt phẳng qua d_2 và // d thì $\Delta = \alpha \cap \beta$

Δ // d $\Rightarrow \vec{a}_\Delta = \vec{a}_d = (1, -1, 1)$

$\vec{a}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d_1}] = (0, 3, 3) = 3(0, 1, 1)$

$\vec{a}_\beta = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d_2}] = (-1, -2, -1) = -(1, 2, 1)$

α: $y + z = 0$

β: $x + 2(y+1) + z = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z + 2 = 0$

Chọn $M(0, -2, 2) \in \alpha \cap \beta$, $M \notin d$.

$\Rightarrow \Delta$ qua M và có vtcp $\vec{a}_\Delta = (1, -1, 1)$.

Vậy phương trình Δ: $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{1}$

➲ *Cách 2:*

Gọi $M = \Delta \cap d_1$, $N = \Delta \cap d_2$

$\Rightarrow M(1 + 2t, t, -t)$, $N(t', -1 - 2t', 3t')$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (t' - 2t - 1, -2t' - t - 1, 3t' + t)$

Vì Δ // d nên:

$\overrightarrow{MN}$ cùng phương $\vec{a}_d$

$$\Leftrightarrow \frac{t'-2t-1}{1} = \frac{-2t'-t-1}{-1} = \frac{3t'+t}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t + t' = -2 \\ t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(-1, -1, 1)$ và $\overrightarrow{MN} = (2, -2, 2) = 2(1, -1, 1)$; $M \notin d$

Vậy Δ: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Bài 18. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2my - 4z + m^2 - 13 = 0$ và đường thẳng Δ:

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

Gọi Δ′ là hình chiếu của Δ trên mặt phẳng (Oyz). Tìm m để Δ′ tiếp xúc (S).

Giải

(S) có tâm I(0, –m, 2), bán kính $R = \sqrt{m^2 + 4 - m^2 + 13} = \sqrt{17}$

Lấy hai điểm trên Δ: A(1, 2, –3) và B(–4, 3, 1)

A và B có hình chiếu trên mp(Oyz) lần lượt là A′(0, 2, –3) và B′(0, 3, 1)

Δ′ chính là đường thẳng qua hai điểm A′, B′ ⇒ Δ′ có vtcp $\overrightarrow{A'B'} = (0, 1, 4)$

Ta có: $d(I, \Delta') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'I}, \overrightarrow{A'B'}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|} = \dfrac{|4m + 13|}{\sqrt{17}}$

Do đó: Δ′ tiếp xúc (S) ⇔ d(I, Δ′) = R ⇔ $\dfrac{|4m + 13|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$

⇔ $m = 1 \vee m = \dfrac{-15}{2}$

Bài 19. Cho mặt cầu (S): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}; \quad d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

a. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc (S) và song song với hai đường thẳng d_1, d_2

b. Viết phương trình đường thẳng Δ qua tâm của (S) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

a/ (S) có tâm I(1, –1, 0), bán kính $R = \sqrt{11}$

Chọn A(0, –1, 1) ∈ d_1 và $\vec{a}_{d_1} = (1, 1, 2)$

B(–1, 0, 0) ∈ d_2 và $\vec{a}_{d_2} = (1, 2, 1)$

Ta có: $\vec{n}_p = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}] = (-3, 1, 1)$ ⇒ (P): –3x + y + z + D = 0

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow$ d(I, (P)) = R $\Leftrightarrow \dfrac{|D-4|}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow D = 15 \vee D = -7$

Vậy có hai mặt phẳng (P): $-3x + y + z + 15 = 0$ và $-3x + y + z - 7 = 0$

b/ Gọi α là mặt phẳng qua I và d_1; β là mặt phẳng qua I và d_2

$\Rightarrow \Delta = \alpha \cap \beta$

Ta có: $\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{IA}, \vec{a}_{d_1}] = (-1, 3, -1)$; $\vec{n}_\beta = [\overrightarrow{IB}, \vec{a}_{d_2}] = (1, 2, -5)$

$\Rightarrow \vec{n}_\Delta = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (-13, -6, -5)$; $\vec{n}_\Delta$ không cùng phương $\vec{a}_{d_1}$ và $\vec{a}_{d_2}$

Vậy Δ: $\dfrac{x-1}{-13} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z}{-5}$

Bài 20. Cho mặt phẳng (P): $3x + 5y - z + 31 = 0$, đường thẳng

d: $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-1}{1}$ và điểm A(1, 0, –1)

a. Viết phương trình đường thẳng d_1 qua A, song song (P) và vuông góc d.

b. Viết phương trình đường thẳng d_2 qua A, song song (P) và cắt d.

c. Tìm tọa độ điểm B sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB

Giải

a/ Ta có: $\begin{cases} d_1 // (P) \\ d_1 \perp d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \perp \vec{n}_p \\ d_1 \perp \vec{a}_d \end{cases}$

$\Rightarrow d_1$ có 1 vectơ cùng phương là $\vec{a}_{d_1} = [\vec{n}_p, \vec{a}_d]$

$\vec{n}_p = (3, 5, -1)$, $\vec{a}_d = (2, 4, 1) \Rightarrow \vec{a}_{d_1} = (9, -5, 2)$

Vậy d_1: $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z+1}{2}$

b/ *Cách 1:*

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và // (P); M = (Q) $\cap$ d

$\Rightarrow d_2$ là đường thẳng qua hai điểm A, M

Ta có: (Q) // (P) $\Rightarrow$ (Q): $3x + 5y - z + D = 0$ $(D \neq 31)$

$A \in (Q) \Rightarrow 3 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -4$

Vậy (Q): $3x + 5y - z - 4 = 0$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+5y-z-4=0 \\ \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$. Vậy M(–3, 3, 2)

$\vec{a}_{d_2} = \overrightarrow{AM} = (-4, 3, 3)$. Vậy d_2: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{3}$

Cách 2:

d có phương trình tham số: $\begin{cases} x=-5+2t \\ y=-1+4t \\ z=1+t \end{cases}$

Gọi $M = d_2 \cap d \Rightarrow M(-5 + 2t, -1 + 4t, 1 + t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t - 6, 4t - 1, t + 2)$; $\vec{n}_p = (3, 5, -1)$

Ta có: $d_2 \,//\, (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}_p = 0$

$\Leftrightarrow 6t - 18 + 20t - 5 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{a}_{d_2} = \overrightarrow{AM} = (-4, 3, 3)$

Vậy d_2: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{3}$

c/ Gọi H là hình chiếu của A trên (P) $\Rightarrow$ H là trung điểm của AB

Ta có $H \in (P) \Rightarrow H(x, y, 3x + 5y + 31) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x - 1, y, 3x + 5y + 32)$

$\overrightarrow{AH}$ cùng phương $\vec{n}_p \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{3x+5y+32}{-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-5 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow H(-2, -5, 0)$$

H là trung điểm của AB $\Rightarrow$ B (–5, –10, 1)

Bài 21. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}$; d′: $\begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}$

a. Tìm a để d và d′ cắt nhau

b. Gọi A là giao điểm của d và d′. Viết phương trình đường thẳng MN ($M \in d$, $N \in d'$) sao cho điểm H (0, 2, –2) là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng MN.

Giải

a/ Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + at = 1 - t' \\ t = 2 + 2t' \\ -1 + 2t = 3 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm duy nhất nên d, d′ cắt nhau $\Leftrightarrow$ a = 0

b/ Ta có: A (1, 2, 3); d: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

$M \in d, N \in d' \Rightarrow M(1, t, -1 + 2t), N(1 - t', 2 + 2t', 3 - t')$

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-t', 2t' - t + 2, -t' - 2t + 4)$,

$\overrightarrow{HM} = (1, t - 2, 2t + 1)$, $\overrightarrow{AH} = (-1, 0, -5)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \text{ cùng phương } \overrightarrow{HM} \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HM} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-t'}{1} = \dfrac{2t' - t + 2}{t - 2} = \dfrac{-t' - 2t + 4}{2t + 1} \\ -1 - 10t - 5 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{13}{3} \\ t = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $M\left(1, -\dfrac{3}{5}, -\dfrac{11}{5}\right)$; $\overrightarrow{MN}\left(-\dfrac{13}{3}, \dfrac{169}{15}, \dfrac{13}{15}\right) = \dfrac{13}{15}(-5, 13, 1)$

Phương trình MN: $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -\dfrac{3}{5} + 13t \\ z = \dfrac{11}{5} + t \end{cases}$

Bài 22. Cho hai mặt phẳng: α: $2kx + y - z + 1 = 0$; β: $x - ky + z - 1 = 0$

a. Chứng minh rằng hai mặt phẳng α và β luôn cắt nhau với mọi k

b. Gọi d là giao tuyến của α và β. Tìm k để d nằm trên mặt phẳng (Oyz)

Giải

a/ $\vec{n}_\alpha = (2k, 1, -1)$, $\vec{n}_\beta = (1, -k, 1)$

Ta có: $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (1 - k, -1 - 2k, -2k^2 - 1) \neq \vec{0}$ $\forall k$ (vì $-2k^2 - 1 \neq 0$ $\forall k$)

$\Rightarrow \alpha$ và β luôn cắt nhau $\forall k$

b/ * Cách 1:

d nằm trên (Oyz) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2kx + y - z + 1 = 0 \\ x - ky + z - 1 = 0 \end{cases}$ vô số nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ -ky + z - 1 = 0 \end{cases}$ vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} z = y + 1 \\ (1-k)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ vô số nghiệm $\Leftrightarrow k = 1$

* Cách 2:

Nhận thấy điểm A (0, 0, 1) $\in \alpha \cap \beta \Rightarrow$ d và (Oyz) có điểm chung là A $\forall k$

Ta có: $\vec{\alpha}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$, $\vec{n}_{Oyz} = \vec{i} = (1, 0, 0)$

Do đó: d nằm trên (Oyz) $\Leftrightarrow \vec{a}_d . \vec{i} = 0 \Leftrightarrow 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Bài 23. Cho hai mặt phẳng α: x + mz – m = 0; β: (1 – m)x – my = 0. Tìm m để α và β cắt nhau. Trong trường hợp đó chứng tỏ giao tuyến d của α và β luôn nằm trên 1 mặt phẳng cố định khi m thay đổi.

Giải

Ta có: $\vec{n}_\alpha = (1, 0, m)$, $\vec{n}_\beta = (1 - m, -m, 0)$

$\Rightarrow [\vec{n}_\alpha . \vec{n}_\beta] = (m^2, m - m^2, -m)$

Do đó: α và β cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] \neq \vec{0} \Leftrightarrow m \neq 0$

Ta có: $d = \alpha \cap \beta \Rightarrow \vec{\alpha}_d = [\vec{n}_\alpha \, \vec{n}_\beta] = (m^2, m - m^2, -m)$

Nhận thấy điểm A (0, 0, 1) $\in \alpha \cap \beta \Rightarrow A \in d$

Gọi (P) là mặt phẳng cố định qua A và có $\vec{n}_p = (a, b, c)$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Ta có: $D \subset (P)\ \forall\ m \neq 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}_d . \vec{n}_p = 0 \quad \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow am^2 + b(m - m^2) - cm = 0 \quad \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)m^2 + (b - c)m = 0 \quad \forall m \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$

$\Rightarrow \vec{n}_p = (a, a, a) = a(1, 1, 1)$ (Ta phải có $a \neq 0$. Vì nếu $a = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$: mâu thuẫn)

Vậy (P): x + y + 1(z – 1) = 0 $\Leftrightarrow$ x + y + z – 1 = 0

BÀI TẬP TỰ ÔN LUYỆN

Bài 1.

a) Cho ba điểm A = (2; 5; 3), B = (3; 7; 4), C = (x; y; 6). Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng.

Đáp số: x = 5, y = 11

b) Cho hai điểm A (–1; 6; 6); B (3; –6; –2). Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Đáp số: M(2, –3, 0)

Bài 2. Chứng tỏ bốn điểm sau đây là 4 đỉnh của một hình bình hành và tính diện tích của hình bình hành đó: (1; 1; 1), (2; 3; 4), (6; 5; 2), (7; 7; 5).

Đáp số: $2\sqrt{83}$

Bài 3.

a) Tìm trên trục Oy điểm cách đều hai điểm A(3; 1; 0), B(–2; 4; 1).

b) Tìm trên mặt phẳng Oxz điểm cách đều 3 điểm A(1; 1; 1), B(–1; 1; 0), C(3; 1; –1)

Đáp số: $\left(0, \frac{11}{6}, 0\right); \left(\frac{5}{6}, 0, -\frac{7}{6}\right)$

Bài 4. Cho hai điểm A(2; –1; 7), B(4; 5; –2). Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số nào? Tìm toạ độ điểm M.

Đáp số: $k = \frac{1}{2}$, M(0, –7, 16)

Bài 5.

a) Cho vectơ $\vec{a}$ (1; –2; 3). Tìm $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $\vec{b}$ tạo với Oy một góc nhọn và $|\vec{b}| = \sqrt{14}$

b) Vectơ $\vec{u}$ có độ dài bằng 2, tạo với vectơ $\vec{a}$(1; 1; 1) góc 30^0, tạo với vectơ $\vec{b}$ (1; 1; 0) góc 45^0. Tìm toạ độ vectơ $\vec{u}$.

c) Vectơ $\vec{u}$ vuông góc với vectơ $\vec{a}$(1; 1; 1) và vectơ $\vec{b}$(1; –1; 3), $\vec{u}$ tạo với trục Oz một góc tù và $|\vec{u}| = 3$. Tìm toạ độ vectơ $\vec{u}$.

Bài 6. Trong không gian toạ độ Oxyz cho bốn điểm: A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1).

a) Chứng minh bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm tứ diện ABCD.

c) Tính diện tích các mặt của tứ diện.

d) Tính độ dài các đường cao của khối tứ diện.

e) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

f) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Bài 7. Trong không gian toạ độ Oxyz cho ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(2; 1; 1)

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của 1 tam giác.

b) Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.

c) Tìm toạ độ điểm D để ABCD là hình bình hành.

d) Tính độ dài đường cao h_A của tam giác ABC.

e) Tính các góc của tam giác ABC.

f) Xác định toạ độ trực tâm tam giác ABC.

g) Xác định toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 8. Trong không gian toạ độ Oxyz, cho tam giác ABC có

$$A(1; 2; -1),\ B(2; -1; 3),\ C(-4; 7; 5)$$

a) Tính độ dài đường cao h_A của tam giác kẻ từ đỉnh A.

b) Tính độ dài đường phân giác trong của tam giác vẽ từ đỉnh B.

Bài 9. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(1; 2; 4), cắt các trục toạ độ Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho OA = OB = OC.

Bài 10. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm M(1; 1; 1), cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho thể tích của tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

Đáp số: $x + y + z - 3 = 0$

Bài 11. Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt phẳng (P):

$$3x - 8y + 7z - 1 = 0$$

a) Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

b) Tìm toạ độ điểm C nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 12.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng (α): $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60^0.

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A(3; 0; 0), C(0; 0; 1) và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 60^0.

Bài 13. Cho tứ diện ABCD với A(3; 5; –1), B(7; 5; 3), C(9; –1; 5), D(5; 3; –3). Viết phương trình mặt phẳng (P) qua đường thẳng AB và chia tứ diện

ABCD làm hai phần có thể tích bằng nhau.

Bài 14. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ lần lượt trên các mặt phẳng (Oxy), (Oxz), (Oyz) và mặt phẳng α: x + y + z – 7 = 0

Bài 15.

a) Tìm tập hợp các điểm trong không gian cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(–1; 2; 0), C(2; –3; 2).

b) Tìm quỹ tích các điểm M cách đều hai trục toạ độ Ox, Oy và điểm A(1; 1; 0).

Bài 16. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ và mặt phẳng (α): 2x + y – z + 5 = 0.

Chứng tỏ d song song với (α). Tìm khoảng cách từ d đến (α)

Bài 17.

a) Tìm góc giữa đường thẳng $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và mỗi trục toạ độ.

b) Tìm góc giữa mỗi cặp đường thẳng:

α) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = -1 + 3t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$

β) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{4}$ và $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + 3z - 2 = 0 \end{cases}$

Bài 18. Tìm góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Δ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và (α): 2x – y + 2z – 1 = 0

b) Δ: $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z}{1}$ và (α): 3x – y + z – 1 = 0

Bài 19.

a) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm M(1; –1; 2) trên mặt phẳng (α): $2x - y + 2z + 12 = 0$.

b) Cho bốn điểm A(4; 1; 4), B(3; 3; 1), C(1; 5; 5), D(1; 1; 1). Tìm toạ độ hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC).

c) Cho ba điểm A(1; 1; 2), B(–2; 1; –1), C(2; –2; –1). Tìm toạ độ hình chiếu của gốc O trên mặt phẳng (ABC).

Bài 20. Tìm toạ độ điểm đối xứng của M(2; –3; 1) qua mặt phẳng (α): $x + 3y - z + 2 = 0$.

Bài 21.

a) Cho hai điểm A(3; 1; 0), B(–9; 4; 9) và mặt phẳng (α): $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên (α) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Cho hai điểm A(3; 1; 1), B(7; 3; 9) và mặt phẳng (α): $x + y + z + 3 = 0$. Tìm M trên (α) để $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 22.

a) Cho ba điểm A(–1; 3; 2), B(4; 0; –3), C(5; –1; 4). Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm A trên đường thẳng BC.

b) Cho đường thẳng d: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và điểm M(4; –3; 2). Tìm toạ độ hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng d.

Bài 23.

a) Tìm toạ độ điểm đối xứng của M(2; –1; 1) qua đường thẳng d:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

b) Tìm tọa độ điểm đối xứng của M(–3, 1, –1) qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $4x - 3y - 13 = 0$ và $y - 2x + 5 = 0$

Bài 24. Viết phương trình đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) d: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$ và d′: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$

b) d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và giao tuyến của 2 mặt phẳng $x + 2z - 2 = 0$, $y - 3 = 0$

c) d là giao tuyến 2 mặt phẳng $x + y + z - 3 = 0$, $y + z - 1 = 0$ và d′ là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x - 2y - 2z + 9 = 0$, $y - z + 1 = 0$

Bài 25. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng:

d: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và d′ là giao tuyến của hai mặt phẳng

$3x - z - 7 = 0$, $3x + 3y - 2z - 17 = 0$.

a) Chứng minh d và d′ chéo nhau và vuông góc nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua d′ và vuông góc với d. Tìm toạ độ giao điểm H của d và (P).

c) Viết phương trình đường vuông góc chung của d và d′

Bài 26. Trong không gian toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng: d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng $x - 8z + 23 = 0$, $y - 4z + 10 = 0$ và d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng $x - 2z - 3 = 0$, $y + 2z + 2 = 0$.

a) Viết phương trình các mặt phẳng P_1, P_2 lần lượt đi qua d_1, d_2 và song song với nhau.

b) Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ song song với Oz, cắt d_1 và d_2.

Bài 27. Trong không gian toạ độ Oxyz, xét mặt phẳng:

$$(\alpha_m): 3mx + 5\sqrt{1 - m^2}y + 4mz + 20 = 0,\ m \in [-1; 1].$$

a) Tính khoảng cách từ gốc O đến (α_m).

b) Chứng minh $\forall m \in [-1; 1]$, (α_m) tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

c) Với giá trị nào của m, hai mặt phẳng (α_m) và (Oxz) cắt nhau? Khi m thay đổi, chứng minh rằng các giao tuyến đó song song hoặc trùng nhau.

Bài 28. Trong không gian toạ độ Oxyz cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có phương trình: d: $\frac{x - 12}{4} = \frac{y - 9}{3} = \frac{z - 1}{1}$, (P): $3x + 5y - z - 2 = 0$

a) Tìm toạ độ giao điểm A của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Tính góc giữa d và (P).

b) Viết phương trình mặt phẳng (P′) qua điểm M(1; 2; –1) và vuông góc với đường thẳng d.

c) Viết phương trình hình chiếu vuông góc d′ của d trên mặt phẳng (P).

d) Cho điểm B(1; 0; –1), hãy tìm toạ độ điểm B′ sao cho mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB′.

e) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc và cắt đường thẳng d.

Bài 29. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh là a. Xét 2 điểm $M \in AD'$, $N \in DB$ sao cho $AM = DN = k$ $(0 < k < a\sqrt{2})$ và P là trung điểm của B′C′.

a) Tính cosin của góc giữa 2 đường thẳng AP và BC′.

b) Tính thể tích khối tứ diện APBC′.

c) Chứng minh MN luôn song song với mặt phẳng (A′D′CB) khi k biến thiên.

d) Tìm k để đoạn MN ngắn nhất.

e) Khi đoạn MN ngắn nhất, CMR: MN là đường vuông góc chung của AD′ và DB và MN song song với A′C.

Bài 30. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1; –1; 1)và cắt hai đường thẳng sau (d_1): $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$; (d_2): $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases}$

Bài 31. Viết phương trình đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P): $y + 2z = 0$ và cắt cả hai đường thẳng: (d_1): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$; (d_2): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$

Bài 32. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $x - 2z = 0$, $3x - 2y + z - 3 = 0$ và mặt phẳng

(α): $(m + 4)x + (5m - 6)y + (3m - 8)z - 7 = 0$. Tìm m để $(d) \perp (\alpha)$

Bài 33. Cho mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + 2y - 3 = 0$, $3x - 2z - 7 = 0$.

a) Xác định giao điểm A của (d) và (P).

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài 34. Lập phương trình đường thẳng qua A(0; 1; 1) vuông góc với đường thẳng $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1} \end{cases}$ và cắt đường thẳng $\begin{cases} z = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Bài 35. ΔABC có A(1; –1; –2), B(–1; 0; 6) và C(5; 9; –12)

a) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC.

b) Viết phương trình mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Bài 36. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d):

d: $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{5}$ trên mặt phẳng (P): 3x – 2y – z + 15 = 0.

Bài 37. Cho hai đường thẳng (Δ_1): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$; (Δ_2): $\begin{cases} z = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$

a) CMR: $(\Delta)_1$ và $(\Delta)_2$ chéo nhau.

b) Lập phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng trên.

c) Tìm hai điểm nối $(\Delta)_1$ và $(\Delta)_2$ mà khoảng cách giữa chúng ngắn nhất.

Bài 38. Cho hai điểm A(3; –2; –1), B(6; 1; 2) và mặt phẳng

$$(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$$

Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng AB và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45^o.

Đáp số: x – y – 5 = 0; y – 2z + 1 = 0

Bài 39. Cho hai mặt phẳng (α): x + y + z + 4 = 0, (β): x + y + 1 = 0.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua A(3; 1; 2) và song song với cả hai mặt phẳng (α), (β).

Đáp số: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$

b) Viết phương trình mặt phẳng (P), biết rằng (P) qua M(–1; 1; 1) vuông góc với mặt phẳng (α) và hợp với mặt phẳng (β) một góc 60^o.

Đáp số: x – z + 2 = 0; y – z = 0

Bài 40. Cho 2 đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}; (d_2): \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

a) Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2). Đáp số: $\dfrac{23}{\sqrt{83}}$

b) Viết phương trình của đường thẳng qua điểm M(1; 1; 1) vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).

Đáp số: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$

Bài 41. Cho mặt phẳng (P): x + y + z − 1 = 0 và hai điểm A(1; −3; 0), B(5; −1; −2).

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm I thuộc đoạn AB. Tìm toạ độ điểm I.

b) Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M sao cho $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất.

Đáp số: $I\left(4, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; M(6, −1, −4)

Bài 42. Cho hai điểm A(−1; 3; −2), B(−9; 4; 9) và mặt phẳng (P):

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

a) Chứng tỏ rằng đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm I nằm ngoài đoạn AB.

b) Tìm toạ độ điểm A′ đối xứng của A qua (P). Đáp số: A′(3, 1, 0)

c) Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho AM + BM có giá trị nhỏ nhất

Đáp số: M(−1, 2, 3)

Bài 43. Lập phương trình đường thẳng qua M(−4; −5; 3) và cắt hai đường thẳng:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \text{ và } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

Đáp số: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$

Bài 44. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(2; −1; 0); vuông góc và cắt đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng 5x + y + z + 2 = 0 và x − y + 2x + 1 = 0.

Đáp số: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}$

Bài 45. Cho hai đường thẳng: (d_1):

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}; \ (d_2): \ \frac{x+8}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-10}{-1}.$$

a) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với Ox và cắt (d_1) tại M, cắt (d_2) tại N. Tìm toạ độ M, N.

b) A là điểm trên (d_1), B là điểm trên (d_2), AB vuông góc với cả (d_1) và (d_2). Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

Bài 46. Cho hai đường thẳng: (d_1): $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$;

(d_2): $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng (d_3) đối xứng với (d_2) qua (d_1).

Bài 47. Cho mặt phẳng (P): x + y + x + 3 = 0 và hai điểm $M_1(3; 1; 1)$ và $M_2(7; 3; 9)$. Tìm M trên mặt phẳng (P) để $\left|\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 48. Cho 4 đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}; \ (d_2)\ \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{x}{-4}$$

$$(d_3): \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}; \ (d_4): \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cùng nằm trên một mặt phẳng. Viết phương trình của mặt phẳng đó.

Đáp số: y + z – 2 = 0

b) Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng (d) cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Đáp số: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$

Bài 49. Cho ba đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{1}; \ (d_2): \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1};$$

$$(d_3): \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Lập phương trình đường thẳng cắt (d_1), (d_2) và song song với (d_3).

Bài 50. Cho đường thẳng (d): $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+3}{-1}$

và mặt phẳng (P): 2x + y + z – 1 = 0.

a) Tính số đo của góc tạo bởi (d) và (P).

b) Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (P).

c) Viết phương trình của đường thẳng (Δ) đi qua A, vuông góc với (d) và nằm trong mặt phẳng (P).

Bài 51. Cho đường thẳng (d): $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng

(P):$x - y - z - 1 = 0$. Viết phương trình chính tắc của (d′) đi qua A(1, 1, –2) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với (d).

Đáp số: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{3}$

Bài 52. Cho tam giác ABC có A(1; 2; 5) và phương trình hai trung tuyến là $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{1}$. Viết phương trình chính tắc các cạnh của tam giác.

Bài 53. Cho tứ điện ABCD với A(1; 0; 2), B(1; 1; 0), C(0; 0; 1) và D(1; 1; 1).

a) Tính thể tích của tứ điện.

b) Viết phương trình đường cao DH của tứ điện.

Đáp số: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$

c) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ điện tại A.

Đáp số: $-x + y + 3z - 5 = 0$

Bi 54. ĐH/B02 Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.

a) Tính theo a khoảng giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

Bài 55. ĐH/D05 Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm M(0; 1; –3), điểm N(2; 3; 1).

a) Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua N và vuông góc với MN.

b) Viết phương trình tổng quát của mặt cầu (S) đi qua điểm M, điểm N và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Bài 56. Trong không gian với hệ toạ độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng d_1 là giao tuyến của 2 mặt phẳng $x - az - a = 0$ và $y - z + 1 = 0$; d_2 là giao tuyến của 2 mặt phẳng $ax + 3y - 3 = 0$ và $x + 3z - 6 = 0$

a) Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

b) Với a = 2, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d_2 và song song với đường thẳng d_1.Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 khi a = 2.

Bài 57. DBA/04 Trong không guan với hệ toạ độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có A trùng với gốc toạ độ O, B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), $A_1(0; 0; \sqrt{2})$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A_1, B, C và viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B_1, D_1 trên mặt phẳng (P).

b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với A_1 và C. Tính điện tích thiết điện của hình chóp $A_1.ABCD$ với mặt phẳng (Q).

Bài 58. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm M(5; 2; –3) và mặt phẳng (P): 2x + 2y –z + 1 = 0

a) Gọi M_1 là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P). Xác định toạ độ điểm M_1 và tính độ dài đoạn MM_1.

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua M và chứa đường thẳng: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{6}$

Bài 59. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho lăng trụ đứng $OAB.O_1A_1B_1$ với A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), $O_1(0; 0; 4)$

a) Tìm toạ độ các điểm A_1, B_1. Viết phương trình mặt cầu qua bốn điểm O, A, B, O_1.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với O_1A và cắt OA lần lượt tại N, K. Tính độ dài đoạn KN.

Bài 60. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với A(0; 0; 0), B(2; 0; 0), $D_1(0; 2; 2)$

a) Xác định các toạ độ các điểm còn lại của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) vuông góc nhau.

b) Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ điểm N thuộc đường thẳng AC_1 (N khoảng cách A) tới hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

Bài 61. Cho bốn điểm A(2; –1; 6), B(–3; –1; –4), C(5; –1; 0), D(1; 2; 1)

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

b) Tính thể tích tứ điện ABCD.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ điện ABCD.

Bài 62. Viết phương trình mặt cầu trong những trường hợp sau:

a) Tâm I = (1; 0; –1), đường kính bằng 8.

b) Đường kính AB với A(–1; 2; 1), B(0; 2; 3).

c) Tâm O(0; 0; 0) tiếp xúc với mặt cầu tâm (3; –2; 4) và bán kính 1.

d) Tâm I(3; –2; 4) và đi qua A(7; 2; 1).

e) Tâm I(2; –1; 3) và tiếp xúc mặt phẳng (Oxy).

f) Tâm I(2; –1; 3) và tiếp xúc mặt phẳng (Oxz).

g) Tâm I(2; –1; 3) và tiếp xúc mặt phẳng (Oyz).

Bài 63.

a) Cho phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$

Tìm m để nó là phương trình một mặt cầu và tìm m để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

b) Cho phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - 4z - (4 + \sin^2\alpha) = 0$.

Tìm α để phương trình trên là phương trình một mặt cầu và tìm α để bán kính mặt cầu là nhỏ nhất.

Bài 64.

a) Cho mặt cầu có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ và điểm M(4; 3; 0). Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M.

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm I(–2; 1; 1) và tiếp xúc với mặt phẳng (α): x + 2y – 2z + 5 = 0.

c) Cho bốn điểm A(3; –2; –2), B(3; 2; 0), C(0; 2; 1),D(–1; 1; 2). Viết phương trình mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCD).

d) Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0),

C(0; 0; 1) và có tâm I nằm trên mặt phẳng x + y + z – 3 = 0.

Bài 65. Trong không gian toạ độ Oxyz cho mặt cầu:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ và 2 đường thẳng

$$d : \frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2};\ d' : \begin{cases} x = -7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8 \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) và vuông góc với d.

b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) tiếp xúc với (S) và song song với d, d′.

Bài 66. Trong không gian toạ độ Oxyz cho 4 điểm A(–2; 1; 4), B(0; 4; 1), C(5; 1; –5), D(–2; 8; –5) và đường thẳng d: $\frac{x+5}{3}=\frac{y+11}{5}=\frac{z-9}{-4}$

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.

b) Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

c) Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d) Tìm giao điểm M, N của đường thẳng d với mặt cầu (S).

e) Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M, N. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng đó.

Bài 67. Cho 4 điểm A(6; –2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; –1), D(4; 1; 0).

a) Viết phương trình mặt cầu (S) qua A, B, C, D. Xác định tâm và bán kính.

b) Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A.

Bài 68. Cho mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + m = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 11 = 0$. Tìm giá trị của m để:

a) Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

b) Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

Bài 69. Lập phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ và song song với hai đường thẳng: $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$; $\begin{cases} x - 7 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = 8 \end{cases}$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} 4x + 6y + 5z - 103 = 0 \\ 4x + 6y + 5z + 205 = 0 \end{array}\right.$

Bài 70. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$ và mặt phẳng (P): $x + 2y + 2z + 11 = 0$. Tìm điểm M trên (S) sao cho khoảng cách từ đó đến (P) là nhỏ nhất.

Đáp số: M(2, –4, –1)

Bài 71. Cho hai đường thẳng: (d_1): $\begin{cases} z = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$; (d_2): $\begin{cases} x = t' \\ y = 3 - t' \\ z = 0 \end{cases}$. Xét M thuộc (d_1), N thuộc (d_2) sao cho MN vuông góc với (d_1) và (d_2). Viết phương trình của mặt cầu đường kính MN.

Đáp số: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 16$

Bài 72. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4 = 0$ và ba điểm A(3; 1; 0), B(2; 2; 4), C(–1; 2; 1) ở trên mặt cầu.

a) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 73. Cho điểm I(1; 1; 1) và đường thẳng (d): $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$

a) Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của I lên (d).

b) Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm I và cắt (d) tại hai điểm A, B sao cho AB = 16.

Đáp số: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 81$

Bài 74. Cho đường thẳng (d): $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$

và hai mặt phẳng (P): $x + y - 2z + 5 = 0$; (Q): $2x - y + z + 2 = 0$.

Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P), (Q).

Bài 75. Cho hai điểm A (1, 2, 0), B (0, 1, 3) và đường thẳng

d: $\dfrac{x-1}{192} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc d và có khoảng cách đến điểm B lớn nhất.

Đáp số: $\dfrac{x-1}{-10} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z}{-1}$

Bài 76. Cho hai điểm A(3, 3, 1), B(0, 2, 1) và đường thẳng d: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

Tìm điểm C trên d sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Đáp số: $\left(\dfrac{17}{4}; \dfrac{47}{14}; \dfrac{34}{14}\right)$

Bài 77. Cho điểm M (1, 3, –2) và mặt cầu

$$(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 14$$

a) Chứng tỏ điểm M nằm trong mặt cầu (S)

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M và cắt (S) theo đường tròn có bán kính nhỏ nhất

Đáp số: $y + z - 1 = 0$

Bài 78. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P): $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ sao cho đường thẳng OM tạo với các trục tọa độ những góc bằng nhau.

Bài 79. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 7 - t \end{cases}$ và điểm A (–5, 3, 4)

Viết phương trình đường thẳng Δ qua A, vuông góc d và hợp với mặt phẳng (Oyz) góc 45^o.

Đáp số: $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$

Bài 80. Cho hai mặt phẳng α: $x + 2y + 3z - 5 = 0$; β: $3x - 2y - z - 1 = 0$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua giao tuyến của α, β và cắt các trục Ox, Oz lần lượt tại A,B sao cho OA = OB

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} 5x - 6y - 5z + 3 = 0 \\ 5x + 2y + 5z - 11 = 0 \end{array}\right.$

Bài 81. Cho hai đường thẳng d: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{2}$; $d' : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{2}$ và điểm và điểm M(0, –1,2).

a) Chứng minh d, d′ và M cùng nằm trên 1 mặt phẳng

b) Gọi I là giao điểm của d và d′. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và cắt d, d′ lần lượt tại A, B sao cho ΔABI cân tại A

Đáp số: $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+1}{14} = \dfrac{z-2}{22}$

Bài 82. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng α: $x - y + 3 = 0$

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M(1, 0, – 2), song song d và hợp với α góc 45^o

Đáp số: $y = 0$, $-8x + y + 4z + 16 = 0$

Bài 83. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm A(–2, 0, 1), cắt trục Oy và tạo với trục Oy góc 45^o

Đáp số: $\dfrac{x+2}{2} = \pm\dfrac{y}{\sqrt{5}} = \dfrac{z-1}{-1}$

Bài 84. Cho hai điểm A(–2, 1, 3), B(1, 0, 4). Tìm điểm C trên mặt phẳng (Oxy) để ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

Đáp số: $C\left(\frac{-5}{7};\frac{4}{7};0\right)$

Bài 85. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$ và hai điểm A(3, 0, 2), B(1, 2, 1). Tìm điểm I ∈ d để vectơ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ có độ dài nhỏ nhất

Đáp số: $I\left(\frac{14}{9};\frac{-5}{9};\frac{-13}{8}\right)$

Bài 86. Cho mặt phẳng α: x + y + z + 3 = 0 và hai điểm A(3, –1, 1), B(–2, 0, –3). Tìm điểm M trên α để:

a) MA + MB nhỏ nhất. Đáp số: $\left(-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};-2\right)$

b) $|MA - MB|$ lớn nhất. Đáp số: $\left(-\frac{5}{2};\frac{5}{2};-3\right)$

c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất. Đáp số: $\left(-\frac{1}{6};-\frac{7}{6};-2\right)$

Bài 87. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M (–1, 2, 3) sao cho (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C và độ dài đường cao OH của tứ điện OABC lớn nhất (O là gốc tọa độ)

Đáp số: x – 2y – 3z + 14 = 0

Bài 88. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 9 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua d và cắt (S) theo đường tròn có điện tích bằng $\frac{\pi}{2}$.

Đáp số: $\left[\begin{array}{l} x-z-1=0 \\ 53x+48y+43z-101=0 \end{array}\right.$

Bài 89. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua hai điểm A (1, 0, 0), B (0, 2, 1) và thỏa điều kiện:

a) Tiếp xúc mặt cầu (S) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = \frac{1}{2}$.

Đáp số: x + z – 1 = 0,3x + 4y – 5z – 3 = 0

b) Cắt trục Oz tại điểm D sao cho OD = 2

Đáp số: $4x + y + 2z - 4 = 0$, $4x + 3y - 2z - 4 = 0$

c) Hợp với mặt phẳng (P): $x - y + 10 = 0$ góc 60^o

Đáp số: $x + z - 1 = 0$

d) Cách gốc O một khoảng lớn nhất.

Đáp số: $5x + 2y + z - 5 = 0$

e) Hợp với mặt phẳng (Oxy) góc nhỏ nhất.

Đáp số: $x - 2y + 5z - 1 = 0$

Bài 90. Cho ba điểm A (1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3). Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (ABC) sao cho M cách đều ba mặt phẳng tọa độ

Bài 91. (CĐ.08)

Cho điểm A (1, 1, 3) và đường thẳng d: $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc d

b) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d sao cho ΔMOA cân tại O

Bài 92. ĐHB/2010

1. Cho ba điểm A (1, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c) ($b > 0$, $c > 0$) và mặt phẳng (P): $y - z + 1 = 0$. Xác định b, c biết mặt phẳng (ABC) vuông góc mặt phẳng (P) và khoảng cách từ gốc 0 đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

2. Cho đường thẳng Δ: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho $d(M, \Delta) = OM$

Bài 93. ĐH/D2010

Cho 2 mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$ và (Q): $x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ gốc O đến (R) bằng 2.

Bài 94. Cho mặt cầu (S): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+10}{2}$. Tìm tọa độ điểm $M \in (S)$ sao cho đường thẳng OM vuông góc đường thẳng d và $OM = \sqrt{11}$ (O là gốc tọa độ)

Đáp số: (1, –3, 1); $\left(\frac{13}{7}; \frac{-9}{7}; \frac{-17}{7}\right)$

Bài 95. Cho đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \\ z = -1 + t \end{cases}$ (t là tham số) và hai mặt phẳng:

(P): $mx + y - mz - 1 = 0$; (Q): $x - my + z - m = 0$

a) Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau.

b) Gọi Δ_2 là giao tuyến của (P) và (Q). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ_2.

c) Tìm m để $d(Oz, \Delta_1) = d(Oz, \Delta_2)$

Đáp số: $m = 0$.

Bài 96. Cho hai đường thẳng:

d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng: $mx + 3y - 3 = 0$; $x + 3z - 6 = 0$

d_2 là giao tuyến của hai mặt phẳng: $x - mz - m = 0$; $y - z + 1 = 0$

Tìm m để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm I sao cho $OI = \dfrac{\sqrt{107}}{4}$

(O là gốc tọa độ)

Đáp số: $m = 1$

Bài 97. Cho đường thẳng (d_m): $\dfrac{x + 1 - m}{m + 2} = \dfrac{y - 2m}{-2} = \dfrac{z - 1}{m + 3}$

($m \neq -2$ và $m \neq -3$). Chứng minh rằng khi m thay đổi, (d_m) luôn nằm trên một mặt phẳng cố định

Đáp số: $2x - y - 2z + 4 = 0$

Bài 98. Cho đường thẳng d_1: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{z - 3}{1}$ và hai điểm

A(5, 4, 3), B(6, 7, 2)

a) Viết phương trình đường thẳng d_2 đi qua hai điểm A, B. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Tìm điểm $C \in d_1$ sao cho ΔABC có điện tích nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Đáp số: C(3, 5, 4), $\dfrac{\sqrt{66}}{2}$

Bài 99. Cho đường thẳng d: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 3}{-2}$ và ba điểm A(1, 0, –1), B(2, 3, –1), C (1, 3, 1).

a) Tìm điểm D trên d sao cho tứ điện ABCD có thể tích bằng 1.

b) Viết phương trình của đường thẳng đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc mặt phẳng (ABC).

Đáp số: $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{3}$

Bài 100. Cho ba điểm A(1, –2, –5), B(1, –1, 0), C(3, –2, 2)

a) Gọi E là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC; F là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oxz). Viết phương trình tham số của đường thẳng EF

b) Tìm m để mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 9 - 2m = 0$ tiếp xúc đường thẳng EF. Tính khoảng cách từ E đến tiếp điểm của (S) và đường thẳng EF.

Bài 101. Cho hai điểm A(6, 2, –5), B(–4, 0, 7)

a) Viết phương trình mặt cầu (S) đường kính AB.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại điểm A.

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Q): $5x + y - 6z + 3 = 0$ sao cho đường thẳng qua M, vuông góc (Q) và cắt (S) tại hai điểm, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm đó lớn nhất.

Bài 102. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$

Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho đường thẳng Δ qua M, vuông góc mặt phẳng (P): $x - 2z + 5 = 0$ và cắt (S) tại 2 điểm A, B thỏa AB = $2\sqrt{5}$.

Bài 103. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 10z - 19 = 0$, đường thẳng d: $\frac{x-5}{3}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-1}{1}$ và 2 điểm A(–2, 1, 2), B(0, 4, 1). Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho đường thẳng Δ qua M, song song đường thẳng AB và cắt (S) tại 2 điểm C, D thỏa CD = $\sqrt{14}$.

Bài 104. Cho mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$ và mặt phẳng (P): $-6x + 2y - 2z + 15 = 0$. Tìm tọa độ điểm M ∈ (S) sao cho tiếp tuyến tại M với (S) qua gốc tọa độ O và vuông góc mặt phẳng (P).

Bài 105. Cho mặt phẳng (P): $y - 3z + 2 = 0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$

Tìm điểm A trên (P) và điểm B trên d sao cho đường thẳng AB vuông góc mặt phẳng (P) và AB = $2\sqrt{10}$.

Bài 106. Cho mặt phẳng (P): $6x + 2y - 5z - 25 = 0$ và hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -4 - t \end{cases} ; \; d_2: \begin{cases} x = 5 - t' \\ y = 3t' \\ z = t' \end{cases}$$

Tìm điểm A trên d_1 và điểm B trên d_2 sao cho đường thẳng AB song song mặt phẳng (P) và AB = $\sqrt{26}$.

Bài 107. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Tìm điểm M $\in$ d và điểm N $\in$ Oy sao cho MN = $\sqrt{6}$ và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (Oxz) bằng 2.

Bài 108. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

và ba điểm A(0, 2, 0), B(1, 3, –1), C(1, 1, –3).

a) Tìm điểm M trên d để thể tích tứ điện ABCM bằng $\frac{11}{3}$.

b) Tìm điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành.

c) Tính thể tích khối chóp S.ABCD, biết điểm S trên d và mặt phẳng (SAB) tạo với mặt phẳng đáy góc 60^o.

Bài 109. Cho khối chóp S.ABC có A(1, 2, 0), B(–2, 2, 0), C(–5, 1, 0) và đỉnh thuộc trục Oz sao cho mặt phẳng (SAB) hợp với mặt phẳng đáy góc 30^o. Tính thể tích khối chóp.

Bài 110. Cho hai điểm A(–3, 1, –2), B(1, –1, 2) và mặt phẳng

(P): $x - (2m + 1)z - m^2 + m - 1 = 0$. Gọi A′ là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng (Oyz); B′ là điểm đối xứng của B qua trục Oz.

a) Tìm m để đường thẳng A′B′ song song mặt phẳng (P).

b) Tìm m để mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng A′B′.

c) Tìm m để đường thẳng A′B′ tạo với mặt phẳng (P) góc 45^o.

Bài 111. Cho ba điểm A(1, –2, 0), B(–2, 1, 3), C(4, –2, –3)

Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P): x – 2z + 3 = 0 sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

b) $\left|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất

c) $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất

Bài 112. Cho 2 đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$; d': $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$

và điểm $I\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 4\right)$

1. Chứng minh rằng d, d′ và I cùng nằm trên một mặt phẳng.
2. Gọi A là giao điểm của d và d′; Δ là đường thẳng đi qua I và cắt d, d′ lần lượt tại hai điểm M, N (khác A). Viết phương trình đường thẳng Δ biết:

   a) I là trung điểm MN. b) ΔIMN vuông tại M.

   c) Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất.

   d) $\frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Xác định tọa độ hai điểm M, N.

Bài 113. Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = 2 + t' \\ z = 1 + 4t' \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d và d′ không cắt nhau và vuông góc nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng d_1 song song trục Oz và cắt hai đường thẳng d, d′.

c) Viết phương trình đường thẳng d_2 vuông góc mặt phẳng (Oxz) và cắt hai đường thẳng d, d′.

d) Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc hai đường thẳng d, d′.

Đáp số: $\left(x - \frac{16}{21}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{21}\right)^2 + \left(z - \frac{10}{21}\right)^2 = \frac{2}{7}$

Bài 114. Cho ba điểm A(1, –2, 3), B(–1, 2, –3), C(1, 3, –4).

a) Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với đường thẳng BC. Tìm tọa độ tiếp điểm.

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng BC và qua 2 điểm A, B.

c) Viết phương trình mặt cầu qua hai điểm A, B và có tâm thuộc trục Ox.

d) Viết phương trình mặt cầu qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy).

e) Viết phương trình mặt cầu qua ba điểm A, B, C và có tâm cách mặt phẳng (ABC) một đoạn bằng $\sqrt{3}$.

f) Viết phương trình mặt cầu tâm A và chắn trên trục Ox một đoạn thẳng có độ dài bằng độ dài đoạn BC.

Bài 115. Cho ba điểm A(2,0, –1), B(–1,3, –3), C(5, –3, –5)

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho:

a) Khoảng cách từ M đến trọng tâm của ΔABC nhỏ nhất

Đáp số: M(2, 0, 0)

b) Độ dài vectơ $2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất

Đáp số: M(2, 0, 0)

c) Thể tích tứ diện MABC lớn nhất biết OM = 3 (O là gốc tọa độ)

Đáp số: $M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{-3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

2. Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (P): x – 2y – z + 1 = 0 sao cho độ dài vectơ $2\overrightarrow{NA} + 5\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NC}$ nhỏ nhất

Đáp số: $N\left(\frac{11}{12}; \frac{13}{6}; \frac{-29}{12}\right)$

Bài 116. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

a) Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P): z –1 = 0 và mặt cầu (S).

b) Viết phương trình mặt cầu (S_1) chứa (C) và chắn trên đường thẳng d một đoạn có độ dài bằng $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Đáp số: $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$

c) Viết phương trình mặt cầu (S_2) chứa (C) và chắn trên đường thẳng d một đoạn có độ dài nhỏ nhất.

Đáp số: $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 10$

Bài 117. Cho hai đường thẳng: d: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} + \frac{z+1}{-1}$ và d′: $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$

a) Chứng minh rằng d và d′ chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d′ và song song d.

Đáp số: $x - y + z - 2 = 0$

c) Điểm M di động trên d, hai điểm A và B di động trên d′ sao cho $AB = \sqrt{3}$. Tính giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MAB.

Đáp số: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Bài 118. Cho ba điểm A(4, –1, 2), B(1, 2, 2), C(1, –1, 5).

a) Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (ABC) và ba mặt phẳng tọa độ. Đáp số: $\frac{125}{6}$

b) Viết phương trình trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases}$

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là tứ diện đều.

Đáp số: D(4, 2, 5); (0, –2, 1)

☞ ***Giải các bài tập sau đây bằng phương pháp tọa độ:***

Bài 119. Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A′B′C″ có chiều cao bằng h. Biết AB′ vuông góc BC′. Tính thể tích khối lăng trụ theo h.

Bài 120. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA = SB = a, mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD). Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 121. Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ có cạnh bằng a. Tìm điểm I thuộc cạnh AA′ sao cho mặt phẳng (BD′I) cắt hình lập phương theo một thiết điện có điện tích nhỏ nhất

Bài 122. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^o$, $SA = SB = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

a) Tính thể tích khối chóp. b) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AD.

Bài 123. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a; $\widehat{BAD} = 60^o$, đường cao SO của hình chóp bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

MỤC LỤC