TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ - BỘ MÔN TOÁN KINH TẾ

NGÔ VĂN THỨ

MÔ HÌNH TOÁN ỨNG DỤNG

CÓ HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG PHẦN MỀM

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ
NGÔ VĂN THỨ

GIÁO TRÌNH

MÔ HÌNH TOÁN ỨNG DỤNG

(CÓ HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG PHẦN MỀM)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI – 2005

LỜI NÓI ĐẦU

*Mô hình hoá là một trong các công cụ phân tích và điều khiển đã và đang được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kinh tế-xã hội khác nhau. Tiếp theo những nội dung đã được trình bày trong cuốn "**Lý thuyết mô hình toán kinh tế**" của tác giả Hoàng Đình Tuấn, NXB KHKT Hà Nội 2003, "**Mô hình toán ứng dụng**" trình bày các mô hình toán kinh tế có tính chuyên đề, với các cách tiếp cận cụ thể khác nhau như Lý thuyết trò chơi và ứng dụng trong kinh doanh; Lý thuyết trò chơi trong lý thuyết hãng; Lý thuyết phục vụ công cộng; Lý thuyết điều khiển dự trữ; Lý thuyết đồ thị và ứng dụng; Lý thuyết kiểm tra chất lượng..... . Trong mỗi chuyên đề như vậy chúng ta có thể đề cập đến các mô hình cụ thể từ đơn giản đến phức tạp nhất, từ những mô hình về các hiện tượng kinh tế-xã hội thường gặp nhất đến những mô hình mà việc trừu tượng hoá làm cho bài toán có nội dung xa lạ với tên gọi của nó. Cũng như vậy tuỳ thuộc mức độ phức tạp của hiện tượng cần mô hình hoá, mà chúng ta có thể sử dụng những công cụ có hàm lượng kiến thức toán học rất khác nhau.*

Trong khuôn khổ cho phép của thời lượng giảng dạy (60 tiết), cuốn sách này: "Mô hình toán ứng dụng", chỉ đề cập đến những lớp mô hình đơn giản và có khả năng ứng dụng cụ thể, với 3 chương:

- Chương 1- Sơ lược lý thuyết đồ thị và Phương pháp sơ đồ mạng lưới

- Chương 2- Mô hình lý thuyết phục vụ công cộng

- Chương 3- Mô hình điều khiển dự trữ.

Trong mỗi chương chúng tôi cố gắng trình bày những nét cơ bản nhất về phương pháp tiếp cận và những nội dung cốt lõi của lớp mô hình tương ứng. Trong lần biên soạn này chúng tôi trình bày đầy đủ hơn cơ sở toán học của các công cụ phân tích mô hình. Với sự trợ giúp của các phần mềm và các bảng tính, hầu hết các chương được mở rộng so với các giáo trình và bài giảng trước đây. Việc khai thác các phần mềm GAMSID, POM, MH4 và bảng tính Excel không chỉ làm giảm nhẹ các tính toán mà còn trang bị cách cách tiếp cận lời giải của một số lớp bài toán *nhờ máy tính điện tử, bước đầu làm cho tin học không chỉ là công cụ làm việc mà còn có thể sử dụng như một công cụ tư duy. Có thể liên hệ với tác giả để nhận được cách thức nhận phần mềm ứng dụng.*

Mặc dù đã có rất nhiều cố gắng khi lựa chọn nội dung và cách trình bày, nhưng các mô hình ứng dụng quá phong phú vì vậy chắc chắn còn nhiều vấn đề chưa được chúng tôi đề cập tới.

Tác giả rất cám ơn những người đi trước đã cung cấp nhiều tư liệu tốt, cám ơn tất cả những ý kiến đóng góp về nội dung, phương pháp tiếp cận trong xây dựng-phân tích- ứng dụng các mô hình toán kinh tế trong và ngoài khuôn khổ của giáo trình này.

Các ý kiến đóng góp xin gửi về: nvthukt@hn.vnn.vn

Tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

SƠ LƯỢC LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP SƠ ĐỒ MẠNG LƯỚI

I- SƠ LƯỢC VỀ LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

1- Đồ thị hữu hạn

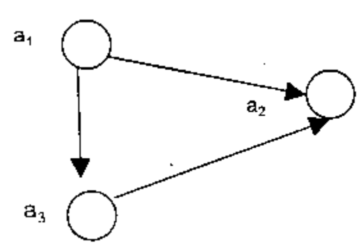
a. Đồ thị

+ Đồ thị là một cặp gồm một tập không rỗng A và một ánh xạ Γ từ A vào A. Ký hiệu: G =(A, Γ)

Thí dụ 1: Cho một nhóm đầy đủ n biến cố $\{a_i\}$- tập A và một quan hệ xác định $P(a_i/a_j)$ - ánh xạ Γ. Ta có một đồ thị G =(A, Γ) trong đó mỗi phần tử của A tồn tại n quan hệ, trong đó có $P(a_i/a_i)$.

Thí dụ 2: Cho một phép thử và k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Ta xác định quan hệ như sau: Nếu $P(A_i/A_j) \neq P(A_i)$ thì tồn tại quan hệ (i,j)- $\Gamma: i \rightarrow j$; ngược lại quan hệ này không xác định. Như vậy ta có một đồ thị G=(A, Γ).

Một cách khác, có thể định nghĩa ánh xạ Γ từ quan hệ xác suất của các biến cố so với một biến cố cho trước, chẳng hạn với mỗi a_i ta cho tương ứng các biến cố a_k sao cho $P(a_i) \geq P(a_k)$. Với cách xác định ánh xạ như trên ta thấy đồ thị có thể mô tả được dưới dạng sơ đồ hình học như sau



Với cách định nghĩa ở đồ thị thứ hai chúng ta thấy hình thành một khái niệm trực quan từ ánh xạ Γ, quan hệ của các phần tử trong A có thể biểu hiện bằng các đường nối có hướng. Với cách quan niệm thông thường người ta gọi cặp $(a_i, \Gamma(a_i)) = (a_i, a_j)$ là một cung, ký hiệu u(i,j). Điểm a_i và điểm a_j (hay còn gọi tắt là điểm i và j) là hai đầu mút của một cung, i là điểm gốc và j là điểm ngọn của cung u(i,j). Dễ dàng thấy rằng một đồ thị có thể mô tả lại bằng những khái niệm khác.

+ Đồ thị là một cặp hai tập hợp có dạng G=(A,U), trong đó A là tập đỉnh và U là tập cung của đồ thị G.

Một cách chung nhất có thể hình thành khái niệm đồ thị tuỳ thuộc mục đích nghiên cứu. Trong phần tiếp theo ta sẽ sử dụng chủ yếu đồ thị mô tả dưới dạng G=(A,U) vừa nói ở trên. Chú ý rằng khái niệm ***cung*** *bao hàm hướng của quan hệ, thực tế khi tồn tại cả (i,j) và (j,i) ta có thể thay quan hệ hai chiều này bằng một* **cạnh**.

b- Đồ thị hữu hạn và đồ thị con

Trong các mô phỏng thực tế, đặc biệt là trong kinh tế, tập A thường có hữu hạn các phần tử, như vậy đồ thị G có hữu hạn đỉnh.

Ta gọi một đồ thị có hữu hạn đỉnh là *đồ thị hữu hạn.*

Một đồ thị G` gọi là *đồ thị con* của G nếu mọi đỉnh và mọi cung của G` đều thuộc G.

Nếu G` có tập đỉnh trùng với tập đỉnh của G thì G` gọi là một *đồ thị bộ phận* của G.

Thí dụ 3: + Gọi A là tập các số tự nhiên nhỏ hơn 10, U={u(i,j) là cung đi ra từ i và đi đến j nếu i<j}. G=(A,U) là một đồ thị hữu hạn.

+ Mở rộng A là tập các số tự nhiên, với cách xác định U như trên ta có một đồ thị không hữu hạn.

c- Đồ thị đối xứng và phản xứng, dây chuyền

+ Ta nói một đồ thị G là đối xứng nếu cung u(i,j) tồn tại thì cung v(j, i) tồn tại.

Quan hệ cộng các số thực tạo nên một đồ thị đối xứng vì tồn tại a+b thì tồn tại b+a. Tuy vậy quan hệ chia không đối xứng với tập số thực.

+ Một đồ thị là *phản xứng* nếu việc tồn tại cung u(i, j) suy ra không tồn tại cung v(j, i).

Quan hệ thứ tự trong tập các số tự nhiên tạo nên một đồ thị phản xứng.

d- Dây chuyền và đường đi

Để xây dựng khái niệm này chúng ta xác định một số quan hệ của các đỉnh và các cung như sau:

Hai đỉnh i,j gọi là **kề nhau** nếu tồn tại cung u(i, j) hoặc cung u(j, i).

Cung u(i,j) gọi là cung **đi khỏi** i nếu $j \neq i$, tương tự u(i, j) gọi là **đi tới** j nếu $i \neq j$.

Cho mỗi a_i thuộc A, các cung liên thuộc a_i là các cung có ít nhất một đầu mút là a_i. Như vậy với mỗi a_i tập cung liên thuộc có thể chia thành hai tập con:

$U_i^- = \{(i,k)\}$ các cung đi khỏi i

$U_i^+ = \{(t,i)\}$ các cung đi tới i.

Bậc của một đỉnh là số cung liên thuộc đỉnh đó.

Dây chuyền từ đỉnh a_0 đến a_k là tập các đỉnh và cung có dạng: [$a_0u_1a_1u_2$...... u_ka_k], trong đó các cung u_i có các mút là a_{i-1} và a_i không phân biệt thứ tự đỉnh của cung đó (các cung có hướng được xem là vô hướng).

Chú ý rằng với cách định nghĩa này dây chuyền có tính đối xứng, tức là nếu có 1 dây chuyền đi từ a đến b thì đó cũng là dây chuyền đi từ b đến a.

Người ta quan tâm đến các loại dây chuyền sau:

- Một dây chuyền gọi là **đơn** nếu không có cung nào xuất hiện hơn một lần.
- Một dây chuyền từ a_0 đến a_k gọi là **sơ cấp** nếu trừ a_0 và a_k tất cả các đỉnh khác nhau.
- Một dây chuyền gọi là một **chu trình** ***(một mạch)*** nếu $a_0 = a_k$.
- Một chu trình chỉ có một đỉnh gọi là một **khuyên**.

Một thuật toán bao gồm các suy luận và kết luận với giả thiết a_0 và kết luận a_k có số bước suy luận tối thiểu nếu tương ứng với quá trình này là một dây chuyền sơ cấp.

Đường đi: Nếu dây chuyền từ a_0 đến a_k mà mọi cung đều có dạng u(i,i+1) thì ta gọi dây chuyền này là một đường đi từ a_0 đến a_k.

Như vậy một đường đi là một dây chuyền sơ cấp, có hướng mà trừ đỉnh a_0 và a_k, mỗi đỉnh đều xuất phát đúng một cung và kết thúc một cung khác.

Chú ý rằng đường đi không có tính đối xứng mà là một đồ thị con phản xứng.

Có thể thấy các bước chứng minh một mệnh đề là một đường đi nếu kết luận của bước trước chỉ là điều kiện đủ cho các suy luận ở bước sau. Một thuật toán khi giải một bài toán cụ thể là một đường đi v.v. . .

e- Đồ thị liên thông và đồ thị đầy đủ

Một đồ thị có thể có các đỉnh và các cạnh với những cấu trúc riêng biệt. Người ta quan tâm đến quan hệ của các đỉnh và mô tả nó bởi tính chất của tập U.

Một đồ thị gọi là liên thông nếu mọi cặp hai đỉnh a_i, a_j luôn tồn tại ít nhất một dây chuyền nối hai đỉnh đó.

Nếu một đồ thị liên thông mà mỗi cặp đỉnh đều có một đường đi thì đồ thị gọi là liên thông mạnh.

Một đồ thị gọi là đầy đủ nếu mọi cặp a_i, a_j của A đều tồn tại ít nhất một cung nhận hai đỉnh này là hai đầu mút; nói cách khác mọi đỉnh của G kề nhau.

2- Rừng và cây

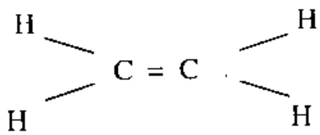
Một trong những ứng dụng đơn giản của lý thuyết đồ thị là các bài toán tìm một đồ thị con đơn giản nhất với một vài tính chất xác định trước. Trong phần này ta sẽ xem xét một vài bài toán cơ bản và cổ điển của lý thuyết đồ thị mà cho đến nay các ứng dụng của chúng không hề mất ý nghĩa, ngay cả khi các công cụ tính toán hiện đại và các mô hình mô phỏng đã xuất hiện khá đầy đủ.

Như phần trước ta đã xem xét khái niệm đồ thị đối xứng, đây là một lớp đồ thị có nhiều ứng dụng trên cơ sở các quan hệ có độ tự do cao. Tính chất rất quan trọng của loại đồ thị này là tính không thứ tự trong các cặp đỉnh kề nhau, các cung như vậy gọi là các cạnh (không xác định hướng). Thậm chí với hai đỉnh a, b có thể tồn tại hơn một cung.

Ta gọi bậc của đồ thị là số cạnh lớn nhất có thể của một cặp đỉnh. Như vậy nếu a, b là cặp đỉnh có nhiều cạnh nhất thì số cạnh của chúng là bậc của G.

Thực tế những đồ thị có bậc cao thường chỉ xuất hiện trong sinh học hay hoá học, chẳng hạn:

G_1: $H - C \equiv C - H$ (acetylen) là một đồ thị có bậc là 3, còn gọi là 3- đồ thị, còn G_2:



có bậc là 2 hay gọi là 2- đồ thị.

Khái niệm bậc đồ thị được sử dụng nhằm hỗ trợ các mô tả sau này, khi xem xét tính sơ cấp của một đồ thị con, một đồ thị bộ phận.

a- Đồ thị không chu trình

Trong các ứng dụng thực tế một đồ thị, chẳng hạn một mạng giao thông thành phố, thường là một đồ thị có nhiều chu trình. Việc phát hiện ra các chu trình nếu có cũng như việc chọn một đồ thị con (hay đồ thị bộ phận) không chứa các đường đi khép kín (các chu trình) là những bài toán thông thường phải giải quyết. Trong phần này ta xét một số mệnh đề liên quan đến các bài toán trên.

+ Đỉnh và cạnh treo:

Một đỉnh gọi là đỉnh treo nếu nó có một đỉnh kề duy nhất, hay nó là đầu mút của một cạnh duy nhất.

Cạnh treo là cạnh có một đầu mút là một đỉnh treo.

+ Rừng: Rừng là một đồ thị không chu trình và có ít nhất hai cạnh.

Sau đây là một số mệnh đề liên quan:

Mệnh đề 1: Một rừng luôn tồn tại ít nhất hai đỉnh treo và hai cạnh treo.

Với mệnh đề này ta có thể xác định một đồ thị không chu trình nhờ thuật toán sau:

Xoá dần các đỉnh và cạnh treo của một đồ thị G, nếu tất cả các đỉnh và cạnh bị xoá hết thì đồ thị không chu trình, ngược lại phần còn lại chứa các chu trình trong G (tìm vòng điều chỉnh trong thuật toán giải bài toán vận tải dạng bảng).

+ Cây: Cây là một đồ thị liên thông, không chu trình và có ít nhất một cạnh.

Thực tế là với một đồ thị G cho trước, ta có thể chọn một đồ thị con của nó, trên đồ thị con này ta quan tâm đến phần tối thiểu, theo nghĩa đó là một đồ thị có tất cả các đỉnh liên thông với nhau mà không có các "cạnh thừa".

Mệnh đề sau cho phép xác định một đồ thị G là một cây.

Mệnh đề 2:

Cho G=(A,U) có $n \geq 2$ đỉnh, các tính chất sau là tương đương

- G là một cây

- G không chu trình và có đúng n -1 cạnh

- G liên thông và có đúng n -1 cạnh

- G liên thông nhưng khi bỏ một cạnh bất kì thì nhận được một đồ thị không liên thông

- Mọi cặp hai đỉnh bất kỳ a, b của G tồn tại duy nhất một đường đi sơ cấp.

- G không chu trình, khi thêm một cạnh nối hai đỉnh không kề nhau thì nhận được một đồ thị có chu trình.

b- Cây bao trùm của một đồ thị

Như cách định nghĩa trên thì với một đồ thị G cho trước có ít nhất hai cạnh, một cây lập từ G là một đồ thị con của G. Một cây gọi là cây bao trùm của G nếu mọi cây của G là con của nó.

Cũng như khái niệm cây, khi gắn với một đồ thị thông thường người ta nói đến đồ thị liên thông. Trong đồ thị liên thông G, cây bao trùm là một đồ thị con chứa tất cả các đỉnh của G với số cạnh tối thiểu. Khái niệm này hoàn toàn đồng nghĩa với tập ô cơ sở ứng với một phương án cực biên của bài toán vận tải. Tuy nhiên giải bài toán vận tải nhờ lý thuyết đồ thị chỉ còn là một thành tựu có tính lịch sử, ngày nay các thuật toán như vậy quá phức tạp, nó đòi hỏi những kiến thức logic trực quan mà không phải dễ dàng nhận biết một cách đầy đủ.

Mệnh đề sau liên quan đến cây bao trùm

Mệnh đề 3:

Cho H là một đồ thị con của G liên thông với $n \geq 2$ đỉnh, các tính chất sau là tương đương

- H là cây bao trùm của G

- H là cây có n đỉnh

- H không chu trình và có n-1 cạnh

- H không chu trình và mỗi cạnh $u \in G \setminus H$ sẽ cùng với một số cạnh của H tạo thành một chu trình duy nhất.

Với mệnh đề này thuật toán tìm cây bao trùm có thể tóm tắt như sau:

Trên đồ thị G tìm một chu trình bất kỳ nếu có, bỏ đi một cạnh của chu trình đó. Lặp lại cho đến khi không còn chu trình.

Hoặc, lấy một cạnh bất kỳ của G, chọn cạnh tiếp theo sao cho cạnh này không tạo với các cạnh đã chọn bất kỳ chu trình nào, khi chọn được n-1 cạnh ta có cây bao trùm của G.

c- Cây bao trùm ngắn nhất

Với một đồ thị G =(A,U) mỗi cạnh của G ta xác định một số thực gọi là độ dài của cạnh d(u) hay d(i,j). Bài toán thực tế đặt ra là tìm một cây bao trùm của G có tổng độ dài các cạnh ngắn nhất.

Tức là: nếu H là một cây bao trùm của G, gọi $L(H) = \sum_{u \in H} d(u)$ là độ dài của H

thì bài toán có thể phát biểu như sau: $\text{Max}\{L(H)\}$ với H là cây bao trùm của G

Chú ý rằng một cách thông thường người ta xác định d(u) không âm, tuy nhiên, một cách tổng quát không nhất thiết như vậy. Những bài toán có $d(u) < 0$ thực sự tồn tại nhưng ít ai đo được, vì vậy người ta chỉ giới hạn trong phạm vi $d(u) \geq 0$, chúng ta cũng không dễ dàng thoát khỏi phạm vi này.

Mệnh đề sau cho ta thuật toán tìm cây bao trùm ngắn nhất.

Mệnh đề 4:

Điều kiện cần và đủ để H có độ dài nhỏ nhất là mỗi $u \in G \setminus H$ là cạnh có độ lớn cực đại trong các cạnh của chu trình tạo bởi u và các cạnh của H.

Chứng minh:

Cần: Giả sử H là một cây bao trùm ngắn nhất của G với mỗi cạnh bất kỳ $u \in G \setminus H$ xảy ra hai trường hợp:

+ u không tạo với các cạnh của H một chu trình nào, trường hợp này không xảy ra vì mọi cây bao trùm phải chứa hai đỉnh của u.

+ u tạo với một số cạnh của H một chu trình, nếu u có độ lớn nhỏ hơn ít nhất một cạnh của H trong chu trình này ta xoá một cạnh có độ dài lớn nhất của chu trình và nhận u vào H thì tổng độ lớn các cạnh của H giảm. Điều này trái với giả thiết H là cây bao trùm ngắn nhất.

Đủ: Giả sử H là một cây bao trùm của G thì H chứa mọi đỉnh của G, mỗi cạnh $u \in G \setminus H$ đều tạo với một số cạnh của H ít nhất 1 chu trình và trong mọi chu trình như vậy khi thay u cho cạnh bất kỳ của H độ lớn tổng các cạnh của H tăng. Vậy H là cây bao trùm có tổng độ dài các cạnh ngắn nhất.

Quá trình chứng minh mệnh đề gợi ý các thuật toán toán tìm cây bao trùm ngắn nhất có thể mô tả như sau:

Thuật toán 1

Bước 1: Xác định một cây bao trùm H_0 bất kỳ của G

Bước 2: Với mỗi cạnh $u \in G \setminus H_0$ lập chu trình của u với các cạnh của H_0, nếu u có độ dài lớn nhất trên chu trình này thì chuyển sang cạnh khác, ngược lại thay u cho cạnh $v \in H_0$ có độ dài lớn nhất trên chu trình. Nhận được H_1 là cây bao trùm của G, trở lại bước 2 tiến hành như với H_0.

Thuật toán kết thúc khi mọi $u \in G \setminus H_k$ đều là cạnh dài nhất trên chu trình tạo với H_k. H_k là cây bao trùm ngắn nhất theo cách định nghĩa ở trên.

Thí dụ 1: Cho đồ thị G với A={1,2,3,4} và U={(1,2),(1,3), (1,4), (2,3), (3,4)} (Hình 1.1)

Với độ lớn các cạnh tương ứng là d=(3 4 6 1 3).

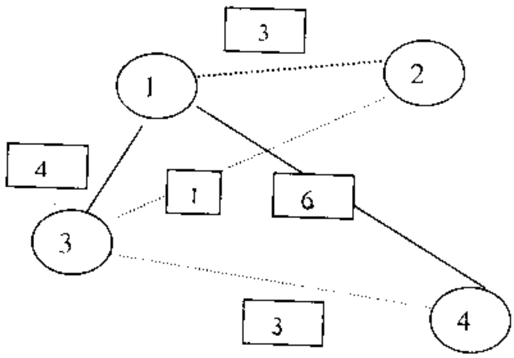
Ta chọn H_0 = {(1,2), (1,3), (1,4)} dễ thấy đây là một cây bao trùm.

Với (2,3) ta có chu trình : [(1,2) **(2,3)** (3,1)] cạnh (2,3) không phải cạnh lớn nhất của chu trình này ta bỏ cạnh (1,3) và thay bằng cạnh (2,3).

Nhận được H_1= { (1,2) (2,3) (1,4)}

Với cạnh (3,4) ta có chu trình : [(1,2) (2,3) **(3,4)** (4,1)] trong đó cạnh (3,4) nhỏ hơn cạnh (4,1) vậy ta thay (4,1) bằng (3,4).

Nhận được H_2 = {(1,2) (2,3) (3,4)} có thể kiểm tra trực quan và thấy rằng H_2 là cây bao trùm ngắn nhất.



Hình 1.1

Thuật toán 2

Với G=(A,U) ta lần lượt bỏ đi các cạnh dài nhất sao cho mỗi lần bỏ đi phần còn lại vẫn liên thông. Khi phần còn lại có đúng n-1 cạnh đó chính là cây bao trùm ngắn nhất của G.

Thuật toán Prim

Chọn cạnh u_1 : $d(u_1) = \text{Min}\{d(u) \mid u \in U\}$

Giả sử đã có k cạnh được chọn, gọi A_{sk} là tập các đầu mút của k cạnh đã chọn.

Cạnh k+1 được chọn sao cho $d(u_{k+1}) = \text{Min}\{d(u(i,j)) \mid i \in A_{sk}, j \notin A_{sk}\}$.

Thuật toán kết thúc khi k=n-1.

Hoàn toàn tương tự ta có thể tự tạo các thuật toán theo các tính chất tương đương của mệnh đề trên để tìm cây bao trùm ngắn nhất.

Chú ý rằng về mặt lý thuyết ta cần G liên thông, tuy nhiên thực tế ta không cần khảo sát trước tính chất này, có thể áp dụng thuật toán nếu kết quả không cho một cây thì G không liên thông.

3 - Bài toán đường đi

Bài toán tìm đường đi ngắn nhất (dài nhất) là một trong những bài toán cơ bản của lý thuyết đồ thị. Trong phần này chúng ta nghiên cứu một vài thuật toán tìm đường đi từ một đỉnh a đến một đỉnh b của một đồ thị G. Các thuật toán như vậy có thể mô tả trên một "đồ thị" có tính qui ước.

a-Tìm đường đi từ a đến b trên đồ thị G- Thuật toán G. Tarry

+ Qui tắc: 1- Không đi hai lần trên một cạnh theo cùng một hướng.

2- Không đi tới đỉnh c trên cạnh đã dùng để đi đến c ngay ở bước đi đầu tiên, trừ trường hợp không có cách nào khác để đến c.

b- Tìm đường đi sơ cấp từ a đến b trên G

Thuật toán tìm đường đi sơ cấp từ a đến b đòi hỏi mỗi cạnh chỉ được đi qua tối đa 1 lần và mỗi đỉnh cũng chỉ được tối đa 1 lần đi qua. Vì vậy ta qui định trước một số tên gọi như sau:

- Cạnh trắng là cạnh chưa đi qua lần nào.

- Cạnh chọn là cạnh đi qua 1 lần

- Cạnh loại là cạnh đã xét và không được chọn.

Thuật toán có thể mô tả như sau:

Xuất phát từ a ta đến một đỉnh c kề a trên cạnh (a,c) cạnh này thành cạnh chọn, tiếp tục chọn cạnh trắng từ c. Giả sử chúng ta đã đến a_i (khác b) cạnh tiếp theo được chọn theo thứ tự ưu tiên sau:

1- Có hơn hai cạnh chọn liên thuộc a_i, ta quay lại theo cạnh vừa đến a_i và cạnh này bị loại. Cách làm này cho phép trở lại một đỉnh của một chu trình và xoá đi các cạnh không cần thiết (cạnh loại).

2- Có cạnh trắng liên thuộc a_i ta chọn 1 trong các cạnh trắng.

3- Nếu a_i=a thì b không cùng khối liên thông với a và không có đường đi từ a đến +-b.

4- Có một cạnh chọn duy nhất liên thuộc a_i, quay lại theo cạnh đó và cạnh đó trở thành cạnh loại.

Thuật toán này dừng sau hữu hạn bước và cho ta một đường đi sơ cấp từ a đến b, nếu đường đi này tồn tại, trên các cạnh chọn.

c- Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b trên G

Định lý sau cho phép thiết lập thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên một đồ thị hữu hạn.

Cho đồ thị G=(A,U) hữu hạn. Điều kiện cần và đủ để đường đi $M(a_1,a_n)$ ngắn nhất là với mỗi đỉnh a_i tồn tại một số k_i sao cho:

$$k_j - k_i \leq l_{ij} \quad \text{với mọi } (i,j) \qquad (1)$$

$$k_j - k_i = l_{ij} \quad \text{với mọi } (i,j) \in M \qquad (2)$$

Trong đó: l_{ij} là độ lớn cạnh (i,j) ; $k_j > k_i$.

<u>Thuật toán Ford</u>

Giả sử cần tìm đường đi ngắn nhất từ a ($a=a_1$) đến b ($b=a_n$) trên đồ thị G.

Chọn $k_1=0$

Với $j > 1$:

- Trước tiên cho k_j một số dương tuỳ ý

- Cho mọi (i,j) đã có k_i, nếu $k_j - k_i > l_{ij}$ ta thay $k_j = k_i + l_{ij}$.

Thuật toán này xác định k+1 giá trị k_i, đường đi ngắn nhất từ a đến b qua các cạnh (i,j) thỏa mãn (2).

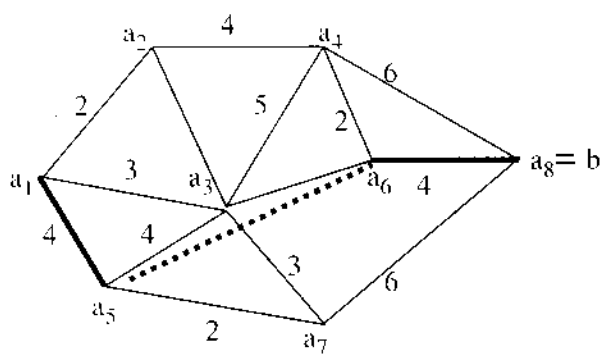
Thuật toán này có thể thực hiên qua hai bước:

Bước 1: cho $k_1=0$ sau đó xác định các số k_i theo công thức:

$$k_j = \mathrm{Min}(k_i + l_{ij}) \qquad \text{với } k_i \text{ đã có.}$$

Bước 2: Điều chỉnh k_i theo thuật toán nhờ việc kiểm tra điều kiện (1).

Thí dụ 2: (Sử dụng thuật toán Ford tìm đường đi ngắn nhất từ a đến b)



Cho $k_1=0$, tính được $k_2=2$, $k_3=3$, $k_5=4$

$k_4= 6$, $k_6= 7$, $k_7= 6$, $k_8= 11$.

Đường đi tìm được là: $\{a_1,(1,5),a_5,(5,6),a_6,(6,8),a_8\}$.

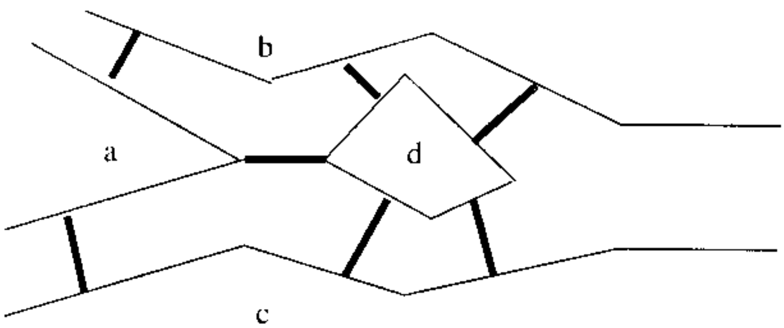
d- Đường đi Euler

Bài toán đường đi Euler đặt ra là: Tồn tại hay không một đường đi sơ cấp M từ a đến b trên G, sao cho mọi cạnh của G đều thuộc M.

Khi b=a ta gọi M là chu trình Euler.

Bài toán người du lịch:

Có 4 vùng a, b, c, d ngăn cách bởi một dòng sông với 7 cầu như hình vẽ sau:



Liệu có thể đi qua cả 7 cầu mà mỗi cầu chỉ qua đúng 1 lần hay không?

Định lý:

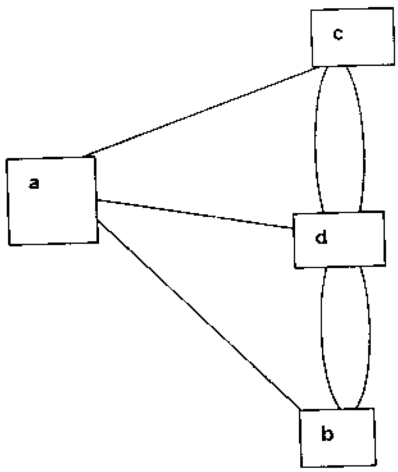
Cho đa đồ thị G.

1- Cần và đủ tồn tại đường đi Euler từ a đến b (b≠a) là G liên thông và a, b là các đỉnh bậc lẻ còn mọi đỉnh khác bậc chẵn.

2- Cần và đủ tồn tại chu trình Euler là G liên thông và mọi đỉnh bậc chẵn.

Định lý được Euler chứng minh và theo định lý này câu trả lời cho bài toán trên là không tồn tại một đường đi như vậy.

Hãy vẽ lại đồ thị phẳng tương ứng như sau:



Ta thấy tất cả các đỉnh của đồ thị là các đỉnh bậc lẻ. Vậy theo định lý trên không thể bắt đầu từ một đỉnh nào đó đi qua mọi cạnh mỗi cạnh đúng một lần và dừng lại ở một đỉnh nào đó (có thể là đỉnh xuất phát).

4- Mạng vận tải

a- Định nghĩa

Định nghĩa 1: Mạng vận tải là một đồ thị hữu hạn, không khuyên, mỗi cung u được gán 1 số thực c(u) không âm gọi là khả năng thông qua của u. Trong đó:

1- Có 1 và chỉ một đỉnh không có cung đi đến (đỉnh vào, ký hiệu: x_0)

2- Có một và chỉ một đỉnh không có cung đi ra (đỉnh ra, ký hiệu: z).

Định nghĩa 2: Gọi U_x^- là tập hợp cung đi ra từ đỉnh x; U_x^+ là tập hợp cung đi đến x. Một hàm φ(u) nhận giá trị nguyên trên U gọi là luồng trên mạng vận tải nếu:

1) $\varphi(u) \geq 0$;

2) $\sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = 0$ khi $x \neq x_0; x \neq z$

3) $\varphi(u) \leq c(u)$ với mọi $u \in U$.

Với định nghĩa trên ta có thể xem φ(u) là lượng hàng vận chuyển trên cung u xuất phát từ đỉnh x. Dễ dàng thấy rằng lượng hàng tới z là:

$$\varphi_z = \sum_{u\in U_z^-} \varphi(u) = \sum_{u\in U_{x_0}^+} \varphi(u).$$

Ta gọi đó là giá trị của luồng φ (hay còn gọi là cường độ của luồng tại z).

Thí dụ 3: Giả sử m cảng phát{x_i} i=1..m, có các mặt hàng mà n cảng thu{y_j} j=1..n cần đến. Gọi lượng hàng các cảng phát là s_i, lượng hàng cần của các cảng thu là d_j. Nếu hai cảng i và j có liên hệ trực tiếp ta ký hiệu c_{ij} là tổng khả năng vận chuyển từ i đến j. Vấn đề là "có thể thoả mãn mọi yêu cầu hay không"? nếu có thì vận chuyển như thế nào?.

Bài toán được thiết lập là mạng vận tải sau:

Nối x_i với y_j bởi cung (i,j) có khả năng thông qua c_{ij};

Lập một đỉnh vào x_0 và nối x_0 với mỗi đỉnh x_i bởi cung (0,i) có khả năng thông qua $c_{0i}= s_i$;

Lập đỉnh ra z và nối z với mỗi đỉnh y_j bởi cung (j, z) với c(j , z)=d_j.

Luồng φ lớn nhất xác định lượng hàng cần vận chuyển từ x_i đến y_j là $\varphi(x_i, y_j)$ với mức thoả mãn tối đa có thể.

b- Thuật toán tìm luồng cực đại

Xét mạng vận tải G(X.Y.U) với luồng φ(x,y). Luồng này tương ứng một giá trị φ_z, ta sẽ tìm cách nâng giá trị φ_z nếu có thể nhờ thuật toán sau:

Gọi cung u là cung bão hoà nếu φ(u)=c(u).

Một luồng gọi là đầy nếu mọi đường đi từ x_0 đến z đều có ít nhất một cung bão hoà.

Tăng giá trị của một luồng:

Nếu một luồng φ không đầy ta có thể tìm được một đường đi M từ x_0 đến z gồm tất cả các cung không bão hoà.

Tạo luồng φ'(x,y) như sau:

+ φ'(u) = φ(u) + 1 nếu $u \in M$

+ φ'(u) =φ(u) nếu $u \notin M$

Luồng φ'(x,y) có giá trị lớn hơn luồng φ(x,y).

Tiếp tục như vậy ta nhận được một luồng φ(x,y) là một luồng đầy.*

Với φ là một luồng đầy sử dụng phép lặp đánh dấu mọi đỉnh của đồ thị mà ở đó còn có thể chuyển đến ít nhất một đơn vị hàng như sau:

Đỉnh x_0 được đánh dấu 0

Nếu x_i là một đỉnh đã được đánh dấu:

+ Đánh dấu +i cho các đỉnh y chưa có dấu nếu:

$(x_i, y) \in U$ và $\varphi(x_i,y) < c(x_i,y)$ - cung (x_i, y) còn khả năng vận chuyển.

+ Đánh dấu -i cho các đỉnh y chưa có dấu nếu: $(y,x_i) \in U$ và $\varphi(y,x_i) > 0$.

Bằng cách này nếu ta đánh dấu được đến đỉnh z thì tồn tại một đường đi M* mà mọi đỉnh đều khác nhau và được đánh dấu theo chỉ số của đỉnh liền trước nó.

Tạo luồng φ'(x,y) như sau:

+ $\varphi'(u) = \varphi(u) + 1$ nếu $u \in M^*$ và u được định hướng trên M* từ x_0 đến z.

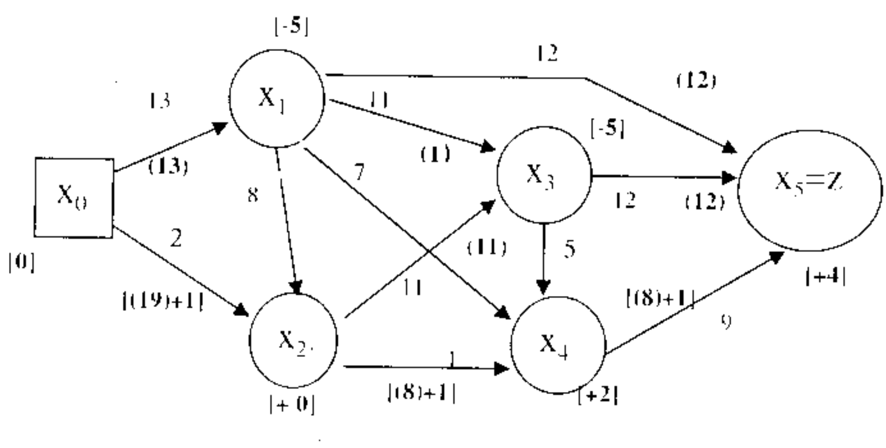
+ $\varphi'(u) = \varphi(u) - 1$ nếu $u \in M^*$ và u ngược hướng trên M* từ x_0 đến z.

+ $\varphi'(u) = \varphi(u)$ nếu $u \notin M^*$.

Luồng lớn nhất:

Nếu không có cách nào nâng được giá trị của luồng ta có một luồng φ^0 là luồng cực đại (tức là không thể đánh dấu đến đỉnh z).

Thí dụ 4: Cho mạng vận tải với phương án vận tải hiện có sau



Các số trong ( ) là lượng vận tải trên các cung, các số khác là khả năng thông qua của cung.

a- Tính giá trị luồng: Ta thấy giá phương án trên là một luồng với $\varphi(z) = 32$.

b- Luồng trên có phải là luồng đầy không?

Dễ thấy mọi đường đi chứa (0,1) đều có cung bão hoà.

Xét các đường đi từ đỉnh vào đến đỉnh ra chứa (0,2): {0, 2, 3, z}; {0,2,4,z} các đường đi này đều chứa cung bão hoà. Vậy đây là một luồng đầy.

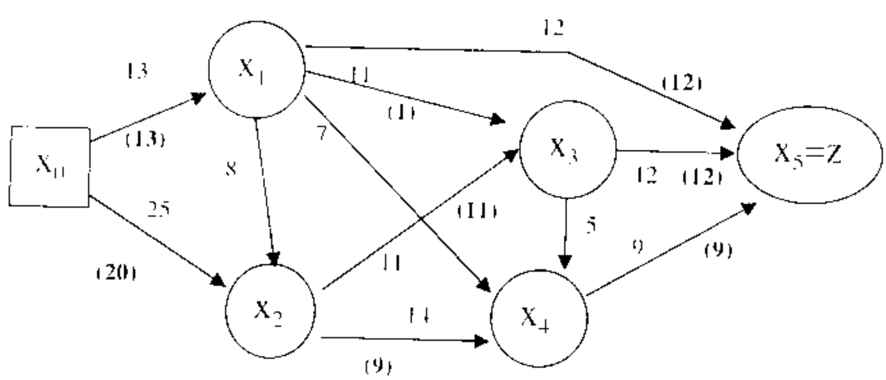
c- Tìm luồng cực đại:

Đánh số 0 cho đỉnh x_0, ký hiệu [0].

Đỉnh x_2 được đánh [+0], sau đó x_4 đánh dấu [+2], đỉnh z đánh dấu [+4],.....

Trên đường đi $x_0x_2x_4z$ ta điều chỉnh lượng hàng bằng cách tăng trên mỗi cung 1 đơn vị.

Luồng mới được mô tả trên đồ thị sau:

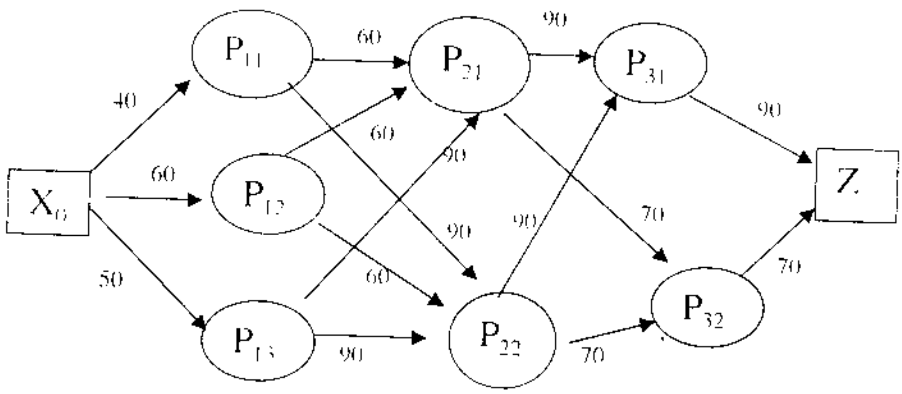


Có thể thấy đây là luồng cực đại vì mọi cung đi đến z đều đầy, như vậy sẽ không có đường đi thiết lập theo cách đánh dấu trên từ x_0 đến z.

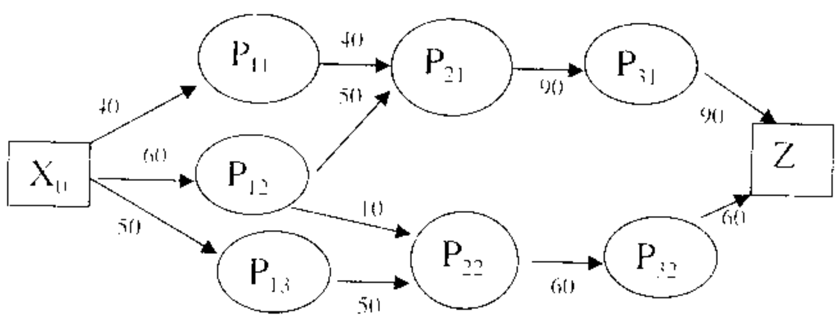
Giá trị luồng cực đại là $\varphi^*(z) = 33$.

Thí dụ 5: Một cơ sở sản xuất sản phẩm A với ba nguyên công. Nguyên công 1 có 3, tổ năng suất tương ứng 40, 60, 50; nguyên công 2 có hai tổ, năng suất tương ứng 60, 90; nguyên công 3 có 2 tổ, năng suất tương ứng 90, 70. Hãy xác định một phương án có năng suất lớn nhất.

Mạng vận tải tương ứng là:



Số liệu ghi trên các cung chỉ khả năng thông qua của cung (c(u)), ở đây không có một hạn chế nào về việc chia bán thành phẩm vì vậy c(u) xác định bằng năng suất của các tổ ở các nguyên công nhận bán thành phẩm và sản phẩm cuối cùng. Có thể kiểm tra thấy luồng sau là một luồng cực đại:



Giá trị luồng cực đại là 150.

Bài toán luồng cực đại cũng như một số bài toán khác của mạng vận tải có thể được giải nhờ sự kết hợp mô tả đồ thị với việc sử dụng các phần mềm chuyên dụng đối với lớp các mô hình tối ưu và cân bằng.

3- Chương trình trên GAMS với một thí dụ bài toán luồng cực đại

Giả sử có 5 địa điểm cung cấp hàng (a1..a5) và 4 địa điểm nhận hàng (b1..b4) với khả năng phát thu của các địa điểm và khả năng thông qua của các cung đường tương ứng (đơn vị tấn) cho ở bảng sau:

		b1	b2	b3	b4
		560	455	600	350
a1	450	550.000		125.000	
a2	250	340.000			150.000
a3	200	300.000	450.000		
a4	400			500.000	250.000
a5	320				500.000

Hãy xác định khả năng chuyển hàng tối đa của mạng vận tải tương ứng.

Chương trình Gams (xem phụ lục 3)

```
* Bài toán tìm luồng cực đại;
set i cac tram phat /a1*a5/
    j cac tram thu /b1*b4/
 duong(i,j) cac cung duong /a1.b1, a1.b3, a2.b1, a2.b4, a3.b2, a3.b3, a4.b3, a4.b4,
a5.b4/;
Parameter phat(i) /a1=450,a2=250,a3=200,a4=400,a5=320/
     Thu(j) /b1=560,b2=455,b3=600,b4=350/;
Table kn(i,j)  kha nang thong qua
     b1  b2  b3  b4
a1   550     125
a2   340         150
a3   300 450
a4           500 250
a5               500;
display phat, thu, kn;
variable z kha nang thong qua;
positive variable vc   luong van chuyen;
Equation
```

Tong Tong luong thong qua

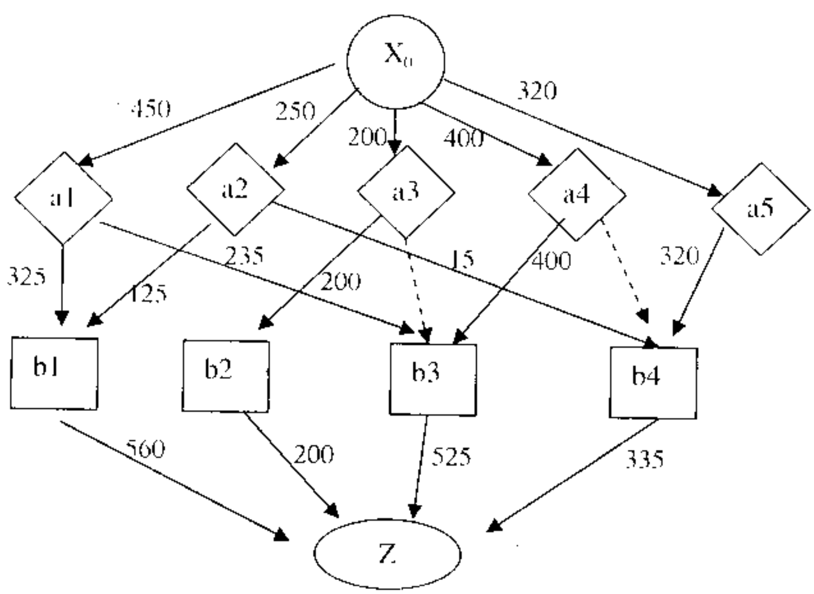
Canbang1 Can bang thu phat

Canbang2 Can bang thu

Khanang Rang buoc kha nang ;

```
Canbang1(i).. sum(j$duong(i,j),vc(i,j))=l=phat(i);
Canbang2(j).. sum(i$duong(i,j),vc(i,j))=l=thu(j);
Khanang(i,j)$duong(i,j).. (vc(i,j)-kn(i,j))=l=0;
Tong.. Z=e=sum((i,j)$duong(i,j),vc(i,j));
Model luong /all/;
Solve luong maximizing z using lp;
display vc.l,z.l ;
```

Kết quả: Mạng vận tải tương ứng với luồng cực đại là:



Lượng vận chuyển trên các cung đường

	b1	b2	b3	b4
a1	325.000		125.000	
a2	235.000			15.000
a3		200.000		
a4			400.000	
a5				320.000

Tổng lượng vận chuyển tối đa

Z (kha nang thong qua) = 1620.000

II. PHƯƠNG PHÁP SƠ ĐỒ MẠNG LƯỚI (PERT)

1- Sơ đồ mạng lưới

a- Định nghĩa

Sơ đồ mạng lưới (PERT) là một đồ thị hữu hạn, bậc 1, có hướng, liên thông, không chu trình, phản xứng và có hai đỉnh đặc biệt: đỉnh khởi đầu (1) có $U^+_1 = \varnothing$, đỉnh kết thúc (n) có $U^-_n = \varnothing$. Đồng thời mỗi cung (i, j) xác định một số thực t_{ij} không âm gọi là độ dài cung (i, j).

Thông thường một sơ đồ mạng lưới mô tả một qui trình bao gồm nhiều bước công việc với một trật tự logic chặt chẽ mà mỗi đỉnh đánh dấu một sự kiện nào đó và mỗi cung thể hiện một công việc, độ dài của mỗi cung có thể là thời gian, kinh phí hay độ đo theo một đặc trưng nào đó. Ở những mức độ phân tích khác nhau, việc ứng dụng phương pháp sơ đồ mạng lưới cho phép thiết lập và giải các bài toán khác nhau. Trong giới hạn cho phép chương trình này chỉ xem xét những nội dung cơ bản của phương pháp này.

a- Dữ kiện và các yếu tố

- Dữ kiện

Để đơn giản cho quá trình trình bày chúng ta xem xét việc lập sơ đồ mạng lưới trên cơ sở một qui trình với tập các công việc $\{y_i\}$ và một trình tự nhất định đối với các công việc này theo nghĩa sự kết thúc của một hay một nhóm công việc là điều kiện để có thể bắt đầu một công việc khác trừ các công việc có thể bắt đầu ngay từ đầu qui trình.

Như vậy nếu không quan tâm đến thời gian tiến hành các công việc chúng ta cần có các dữ kiện mô tả theo khuôn dạng sau:

Mã công việc	Tên công việc	Trình tự
Y_1	....	....
Y_2	....	....

- *Các yếu tố*

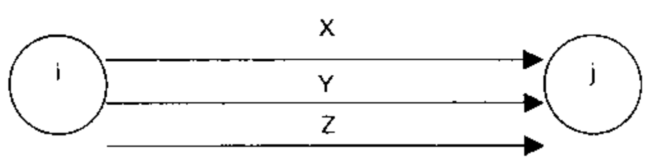
Trên mặt phẳng chúng ta sử dụng hai yếu tố là các vòng tròn thể hiện các "sự kiện" và các cung (đoạn thẳng có hướng) để thể hiện các "công việc". Sơ đồ là một đồ thị mà đỉnh đầu tiên - gọi là đỉnh khởi công chỉ có các cung đi ra và đỉnh kết thúc là đỉnh chỉ có các cung đi đến.

- *Một số tình huống cần chú ý*

Để có thể lập sơ đồ mạng theo định nghĩa trên chúng ta có thể phải sử dụng các đỉnh giả cũng như các cung giả. Sau đây chúng ta xem xét các tình huống có thể xảy ra và cách sử dụng hai yếu tố phụ này:

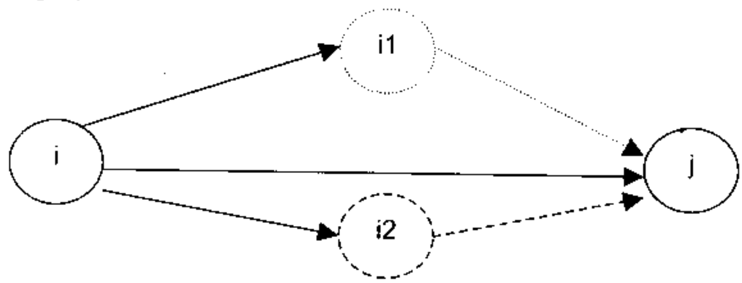
+ Sử dụng công việc giả nhằm đảm bảo tính đơn (bậc 1) của đồ thị:

Nếu có hai hay nhiều công việc X, Y, Z cùng bắt đầu sau sự kiện i và sự kết thúc của chúng tạo nên sự kiện j ta không thể mô tả như sau:



Làm như vậy ta sẽ có một đồ thị bậc cao hay còn gọi là một đa đồ thị. Giải pháp trong trường hợp này là sử dụng các công việc giả có thời gian tương ứng bằng 0 và tạo nên các đỉnh riêng biệt xen giữa hai đỉnh tương ứng với hai sự kiện nói trên.

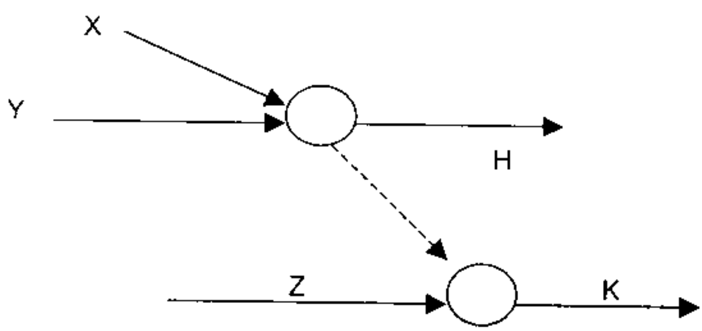
Chẳng hạn:



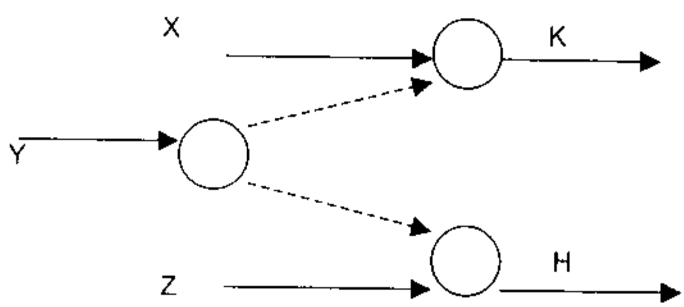
Các cung với nét đứt là các cung giả tương ứng với công việc giả.

+ Sử dụng cung giả trong trường hợp một số công việc chỉ được thực hiện sau khi hoàn thành những tổ hợp khác nhau của một số công việc khác.

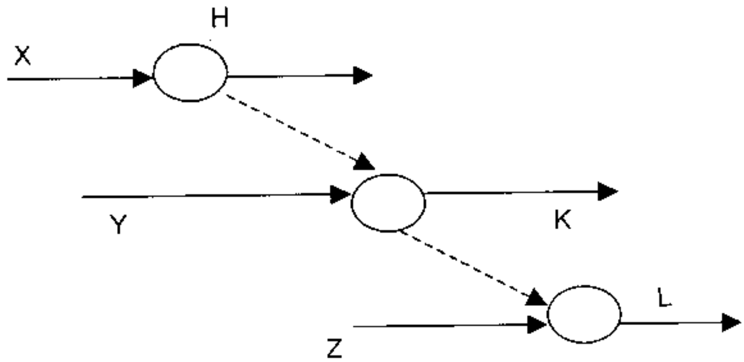
Chẳng hạn phần các đồ thị sau đây mô tả các tình huống như vậy:



H có thể bắt đầu sau khi X, Y hoàn thành nhưng không đòi hỏi sau Z hoàn thành trong khi K chỉ bắt đầu được sau cả X, Y, Z hoàn thành.



H có thể bắt đầu sau khi Z, Y hoàn thành nhưng không đòi hỏi sau X hoàn thành trong khi K chỉ bắt đầu được sau cả X, Y hoàn thành mà không cần sau Z hoàn thành.



H có thể bắt đầu sau khi X hoàn thành nhưng không đòi hỏi sau Y, Z hoàn thành trong khi K chỉ bắt đầu được sau cả X, Y hoàn thành mà không cần sau Z hoàn thành còn L chỉ có thể bắt đầu sau X, Y, Z hoàn thành.

Hoàn toàn tương tự chúng ta có thể tìm cách mô tả bằng đồ thị sao cho qui trình trên sơ đồ hoàn toàn tương đương với qui trình ban đầu, mà đồ thị nhận được là một sơ đồ mạng lưới.

Trường hợp một công việc có thể chia nhiều phần mà kết thúc mỗi phần có thể bắt đầu những công việc khác nhau, ta có thể tách công việc này thành các công việc bộ phận.

Ngược lại nếu một nhóm công việc thể hiện bởi các cung cùng xuất phát tại một đỉnh và kết thúc tại một đỉnh khác ta có thể gộp chúng thành một công việc, tuy nhiên trường hợp này sẽ làm phức tạp thêm các bài toán phân tích sơ đồ. Trong trường hợp này ta có thể tách một qui trình thành các qui trình bộ phận tương ứng với các sơ đồ bộ phận và phân tích chúng.

c- Sơ đồ phác thảo và sơ đồ chính thức

+ Phác thảo sơ đồ

Từ một qui trình thực tế việc lập một sơ đồ mạng lưới có thể rất phức tạp. Một qui trình đại tu xe du lịch có thể bao gồm hàng trăm công việc với trình tự logic phức tạp, một công trình xây dựng hay một qui trình nghiên cứu- phát hiện vấn đề ... có thể bao gồm hàng nghìn công việc. Lập sơ đồ phác thảo là bước cần thiết để thể hiện đầy đủ tính logic của qui trình và các tính chất của một đồ thị với tư cách là một sơ đồ mạng lưới. Đương nhiên nếu sơ đồ đơn giản thì sơ đồ phác thảo có thể rất gần với sơ đồ chính. Về mặt lý thuyết chúng ta đòi hỏi một trật tự logic đúng ở sơ đồ phác thảo, tuy vậy không hoàn toàn có nghĩa là chúng ta chỉ quan tâm đến trật tự này vì chính từ sơ đồ phác thảo ta có điều kiện hiệu chỉnh để được sơ đồ chính với khá nhiều yêu cầu, các yêu cầu này phù hợp với quá trình phân tích trực quan và điều khiển công việc trong thực tế.

+ *Sơ đồ chính*

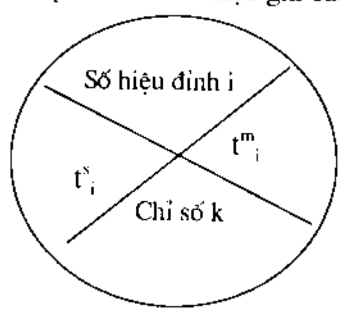
Sơ đồ chính được hiệu chỉnh từ sơ đồ phác thảo sao cho:

- Các cung không ngược hướng

- Các cung chồng chéo ít nhất

- Các đỉnh và các cung có đủ điều kiện ghi các chỉ tiêu thời gian.

Thông thường một đỉnh phải đủ điều kiện ghi các thông tin như sau:



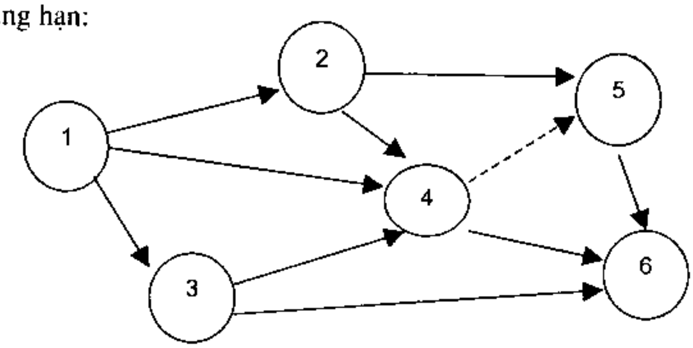
+ *Qui tắc đánh số hiệu đỉnh*

- Đỉnh khởi công được đánh số 1

- Khi đã đánh số i cho một đỉnh thì "xoá" U_i^- và đánh số i+1 cho đỉnh có U^+ là tập rỗng, nếu có một số đỉnh có tính chất như nhau thì đánh số theo thứ tự ngẫu nhiên.

- Đỉnh kết thúc sẽ là đỉnh được đánh số (n) khi U^-_n chỉ còn là tập rỗng.

Chẳng hạn:



+ Thí dụ 1

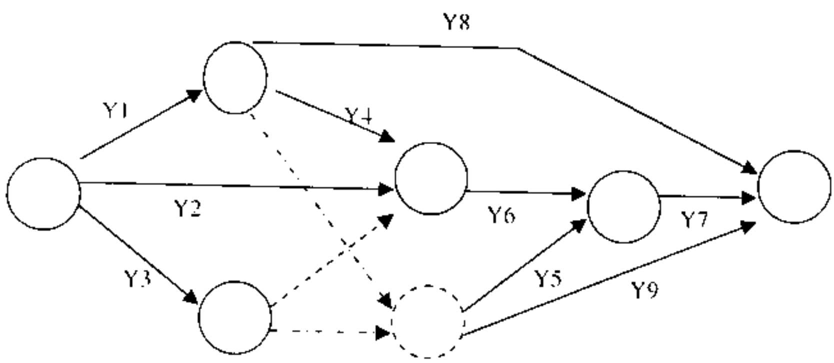
Lập sơ đồ mạng lưới cho qui trình có các bước công việc theo trình tự liệt kê ở bảng dưới đây:

Bảng liệt kê công việc, thời gian và trình tự

Mã công việc	Trình tự	Thời gian (tuần)
Y_1	Bắt đầu ngay	8
Y_2	Bắt đầu ngay	6
Y_3	Bắt đầu ngay	8
Y_4	Sau Y_1 hoàn thành	3
Y_5	Sau Y_1, Y_3 hoàn thành	9
Y_6	Sau Y_2, Y_3, Y_4 hoàn thành	8
Y_7	Sau Y_5, Y_6 hoàn thành	7
Y_8	Sau Y_1 hoàn thành	6
Y_9	Sau Y_1, Y_3 hoàn thành	8

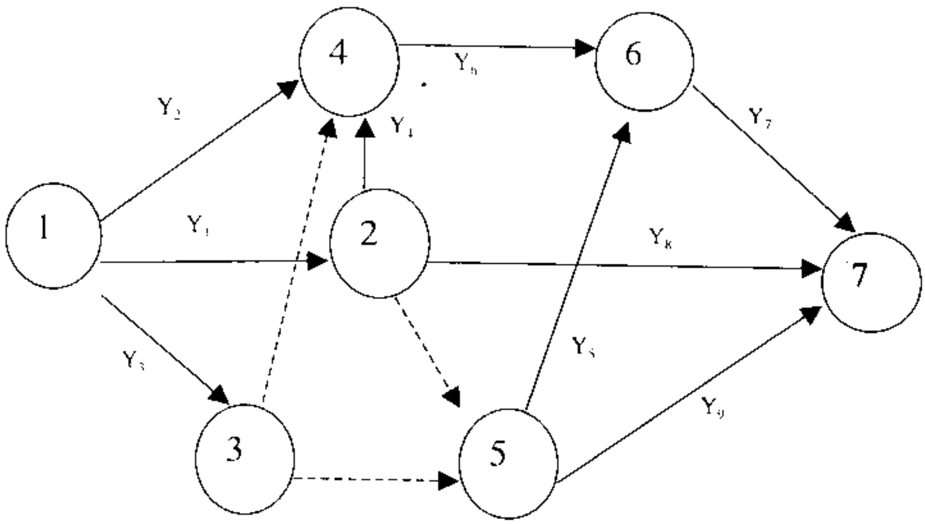
Sơ đồ phác thảo có thể rất khác nhau và đôi khi phải lập nhiều lần sao cho từ sơ đồ phác thảo có thể sửa thành sơ đồ chính.

Do tính không nguyên tắc nên ở đây chúng ta chỉ đưa ra một phác thảo có tính chất ngẫu nhiên.



Sơ đồ trên có một đỉnh giả, sử dụng đỉnh này đảm bảo mô tả đúng trình tự các công việc ở bảng trên.

Với sơ đồ trên ta có thể hiệu chỉnh vị trí các đỉnh để được sơ đồ sau:



Thứ tự hai đỉnh 3 và 4 có thể đổi cho nhau

2. Các chỉ tiêu thời gian trên sơ đồ mạng lưới

a- Các chỉ tiêu thời gian cho các sự kiện (đỉnh) và đường găng

Với mỗi đỉnh hay mỗi sự kiện trên sơ đồ chính ta cần xác định các chỉ tiêu thời gian với nhiều mục đích. Nhưng trực tiếp và không kém quan trọng là với các chỉ tiêu thời gian cho các đỉnh, ta có được thời gian ngắn nhất hoàn thành toàn bộ qui trình. Tương ứng với thời gian này ta nhận được đường đi sơ cấp dài nhất từ đỉnh khởi công đến đỉnh kết thúc.

+ Thời điểm sớm của đỉnh và chỉ số k (chỉ số đường găng)

Thời điểm sớm của đỉnh i là thời điểm sớm nhất công việc từ đỉnh i có thể bắt đầu. Như vậy thời điểm này có thể đo bằng đường đi sơ cấp dài nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh i nếu thời điểm sớm của đỉnh 1 là 0.

Ký hiệu: t^s_i là thời điểm sớm của đỉnh i ta có công thức xác định chỉ tiêu này như sau:

+ $t^{s}_{1}=0$

+ $t^{s}_{i} = \max(t^{s}_{j}+t_{ji})$ với $(j,i) \in U^{-}_{i}$.

Khi xác định t^{s}_{i} (thời điểm sớm của đỉnh i) theo công thức trên nếu $t^{s}_{i}=t^{s}_{k}+t_{ki}$ thì k là chỉ số đường găng của đỉnh i, trong trường hợp chỉ số này không duy nhất ta ghi tất cả các chỉ số tìm được vào phần chỉ số k của đỉnh i. Riêng đỉnh 1 không cần ghi số k.

Thí dụ: Với qui trình nói trên ta có:

$t^{s}_{1}=0$; $t^{s}_{2}=8$ (k=1) ;

$t^{s}_{3} = 8$ (k=1);

$t^{s}_{4}=\max(8+3, 0+8, 6) =11$ (k=2);

$t^{s}_{5} =\max(0+8, 8+0)=8$ (k=2,3);

$t^{s}_{6}= \max(11+8,8+9)=19$ (k=4);

$t^{s}_{7}=\max(19+7, 8+6, 8+8)=26$ (k=6).

+ Thời điểm muộn của đỉnh

Thời điểm muộn của một đỉnh là thời điểm mà tất cả các công việc tương ứng với các cung đi ra từ đỉnh đó phải bắt đầu thực hiện nếu không muốn kéo dài thời gian của toàn bộ qui trình đã được xác định nhờ đường găng.

Ta xác định thời điểm muộn của đỉnh j (t^{m}_{j}) như sau:

+ $t^{m}_{n} = t^{s}_{n}$

+ $t^{m}_{j} =\min (t^{m}_{i} - t_{ji})$ với $(i,j) \in U^{+}_{j}$.

Với thí dụ trên:

- $t^{m}_{7} =t^{s}_{7}=26$.

- thời điểm muộn của đỉnh 6: $t^{m}_{6} = t^{m}_{7} - t_{67}= 19$;

- thời điểm muộn của đỉnh 5: $t^{m}_{5}= t^{m}_{6}-t_{56}=10$;

- thời điểm muộn của đỉnh 4: $t^{m}_{4}= t^{m}_{6}-t_{46}=11$;

- thời điểm muộn của đỉnh 3: $t^{m}_{3}= \min(11-0, 10-0) = 10$;

- thời điểm muộn của đỉnh 2: $t^{m}_{2}=\min(11-3, 10-0, 26-6)=8$;

- thời điểm muộn của đỉnh 1: $t^{m}_{1}=0$.

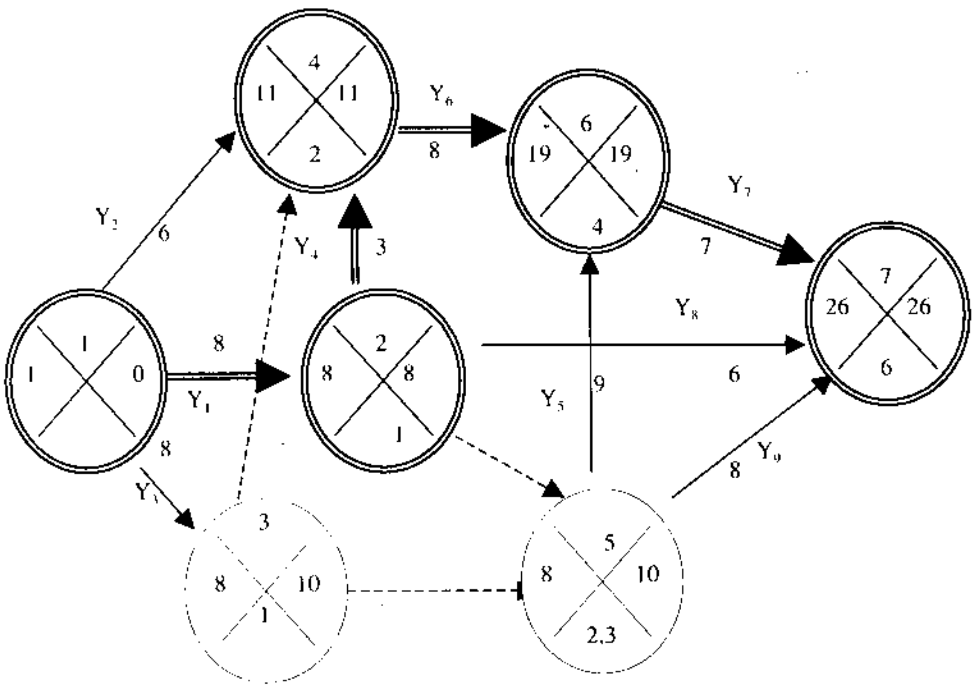
+ Đường găng

Đường găng trên sơ đồ mạng lưới là đường đi dài nhất từ đỉnh khởi công (1) đến đỉnh kết thúc (n). Nó cho biết thời hạn tối thiểu có thể hoàn thành qui trình với các công việc và trình tự của chúng đã được xác định.

Độ dài của đường găng chính là t^s_n (có thể dễ dàng kiểm tra qua định nghĩa thời điểm sớm của đỉnh áp dụng cho đỉnh n).

Đường găng được xác định nhờ chỉ số k, chỉ số này bắt đầu từ đỉnh n cho biết cần lùi về đỉnh nào (hay đỉnh nào là đỉnh trước đó) trên đường đi dài nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh n. Các cung nét đôi ở sơ đồ trên cùng các đỉnh từ đó kết thúc một cung nét đôi và bắt đầu một cung nét đôi tạo nên đường găng (hai đỉnh 1 và n đương nhiên là hai đầu mút của đường găng). Các đỉnh nằm trên đường găng gọi là đỉnh găng (hình tròn nét đôi) và các đỉnh không nằm trên đường găng gọi là các đỉnh không găng.

Sơ đồ với các chỉ tiêu thời gian của các đỉnh và đường găng



+ Thời gian dự trữ của các đỉnh

Thời gian dự trữ của một đỉnh là chênh lệch của thời điểm muộn và thời điểm sớm của đỉnh đó. Ta ký hiệu thời gian dự trữ của đỉnh i là d_i thì có thể tính thời gian này theo công thức: $d_i = t^m_i - t^s_i$, (chú ý rằng với các đỉnh trên đường găng ta luôn có $d_i=0$).

Có thể tổng hợp các chỉ tiêu cho các đỉnh trên 1 bảng với các chỉ tiêu nói trên như sau (số liệu từ thí dụ đang xét)

Đỉnh	Thời điểm sớm	Thời điểm muộn	Thời gian dự trữ	Phân loại
1	0	0	0	găng
2	8	8	0	găng
3	8	10	2	không găng
4	11	11	0	găng
5	8	10	2	không găng
6	19	19	0	găng
7	26	26	0	găng

b- Các chỉ tiêu thời gian cho các cung (công việc)

Với sơ đồ mạng lưới chúng ta có thể tạm thời đồng nhất một cung của đồ thị với một công việc. Vì vậy để tiện cho các trình bày ý nghĩa kinh tế sau này chúng ta sẽ dùng thuật ngữ công việc thay cho cung. Sau đây chúng ta xem xét các chỉ tiêu thời gian đối với các công việc và dựa trên các chỉ tiêu này phân chia các công việc trên giác độ phân tích một qui trình đã mô hình hoá.

+ Thời điểm khởi công sớm

Thời điểm khởi công sớm của công việc (i,j) ký hiệu: $t^{ks}(i,j)$ là thời điểm sớm của đỉnh i: $t^{ks}(i,j) = t^s_i$ với mọi $(i,j) \in U_i^+$.

+ Thời điểm hoàn thành sớm

Thời điểm hoàn thành sớm của công việc (i,j) ký hiệu: $t^{hs}(i,j)$ được xác định theo công thức sau: $t^{hs}(i,j) = t^{ks}(i,j) + t_{ij} = t^s_i + t_{ij}$ với mọi $(i,j) \in U_i^+$.

Chú ý rằng với công thức trên: $t^{hs}(i,j) \le t^s_j$ với mọi (i,j).

+ Thời điểm hoàn thành muộn

Thời điểm hoàn thành muộn của công việc (i,j), ký hiệu: $t^{hm}(i,j)$ là thời điểm muộn của đỉnh j (t^m_j).

+ Thời điểm khởi công muộn

Thời điểm khởi công muộn của công việc (i,j), ký hiệu: $t^{km}(i,j)$, tính theo công thức sau: $t^{km}(i,j) = t^{hm}(i,j) - t(i,j) = t^{m}_{j} - t(i,j)$

Tương tự như trên dễ dàng chứng tỏ rằng: $t^{km}(i,j) \geq t^{m}_{i}$.

Bốn chỉ tiêu nói trên của các công việc được tính trên cơ sở không kéo dài thời gian hoàn thành qui trình hay nói cách khác là các giới hạn thời điểm của các công việc trong tình trạng đường găng đã xác định.

+ Phân loại công việc

Các công việc được phân loại trên cơ sở tính chất về mặt thời gian của chúng trong toàn bộ qui trình đã được xác định bởi độ dài đường găng. Người ta phân chia các công việc thành hai loại.

+ *Công việc găng*: Là công việc nằm trên đường găng, đây là những công việc không có thời gian dự trữ. Để toàn bộ qui trình hoàn thành trong khoảng thời gian được xác định bằng độ dài đường găng thì các công việc này luôn phải bắt đầu ngay khi các công việc trước nó hoàn thành.

+ *Công việc không găng*: Là công việc không nằm trên đường găng, trong các công việc này người ta chia thành hai loại nhỏ:

- Công việc không găng độc lập: Là công việc không găng có hai đầu mút là hai đỉnh găng.

- Công việc không găng liên quan là công việc không găng có ít nhất một đầu mút là đỉnh không găng.

+ Thời gian dự trữ của các công việc

Thời gian dự trữ của công việc (i,j), ký hiệu: d(i,j) là thời gian công việc này có thể khởi công chậm hơn mà không ảnh hưởng đến tiến độ toàn bộ qui trình.

- Các công việc găng $d(i,j) = 0$.

- Các công việc không găng độc lập: $d(i,j) = t_j - (t_i + t_{ij})$, trong đó $t_i = t'_i = t^m_i$.

- Các công việc không găng liên quan: $d(i,j) = t^m_j - (t'_i + t_{ij})$. Thời gian này chia thành hai bộ phận:

- Thời gian dự trữ độc lập: $d^0(i,j)=\max(0, t^{`}_j -(t^m_i+ t_{ij}))$
- Thời gian dự trữ chung: $d^1(i,j) =d(i,j) - d^0(i,j)$.

+ Hệ số găng của các công việc

Phản ánh mức độ khẩn trương của một công việc người ta có thể sử dụng thêm chỉ tiêu hệ số găng, ký hiệu h(i,j). Việc tính toán hệ số này tương đối phức tạp hơn các chỉ tiêu thời gian cho các đỉnh và các công việc.

Hệ số găng của công việc (i,j) là tỷ số lớn nhất giữa độ dài các đường đi từ đỉnh 1 qua cung (i,j) và độ dài đường găng.

Như vậy có thể qui ước hệ số găng của công việc găng h(i,j) =1.

Đối với cung không găng (i,j) có thể tồn tại nhiều đường đi từ đỉnh 1 đến đỉnh n qua cung này. Vì vậy để xác định hệ số găng cần tìm đường đi dài nhất từ đỉnh khởi công qua cung (i,j), sau đó lập tỷ số giữa độ dài lớn nhất này với độ dài đường găng để nhận được hệ số găng.[1]

Với thí dụ trên ta có bảng tổng hợp đối với các công việc như sau:

Mã công việc	(i,j)	t(i,j)	t^{ks}	t^{hs}	t^{km}	t^{hm}	d(i,j)	$d^0(i,j)$	$d^1(i,j)$	Loại công việc
Y_1	1,2	8	0	8	0	8	0			găng
Y_2	1,4	6	0	6	5	11	5	5		không găng ĐL
Y_3	1,3	8	0	8	2	10	2	0	2	không găng LQ
Y_4	2,4	3	8	11	8	11	0			găng
Y_5	5,6	9	8	17	10	19	2	0	2	không găng LQ
Y_6	4,6	8	11	19	11	19	0			găng
Y_7	6,7	7	19	26	19	26	0			găng
Y_8	2,7	6	8	14	20	26	12	12		không găng ĐL
Y_9	5,7	8	8	16	19	26	10	8	2	không găng LQ

Thực tế khi mô hình hoá một qui trình chúng ta cần vận dụng linh hoạt các tình huống để có thể phân tích bài toán đơn giản nhất.

---

[1] Một vài tài liệu định nghĩa hệ số găng theo cách khác, mỗi cách định nghĩa có những ứng dụng khác nhau. Cách định nghĩa như trên được chọn vì nó có thể đơn giản hơn trong tính toán và thể hiện tương đối đầy đủ ý nghĩa được nêu trong các cách định nghĩa khác.

+ **Thí dụ 2**

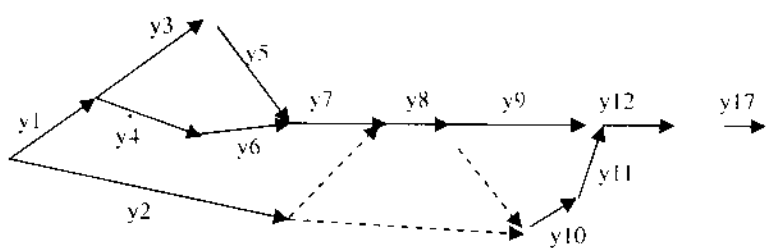
Phân tích qui trình gồm các bước công việc sau đây và lập sơ đồ mạng lưới, nêu cách phân tích đối với qui trình này

Mã CV	Nội dung công việc	Trình tự	Thời gian (ngày)
y1	Hoàn chỉnh giải pháp KT	Bắt đầu ngay	6
y2	Xây dựng phần mềm	Bắt đầu ngay	18
y3	Tổ chức tập huấn 1	Sau (1) hoàn thành	3
y4	Tổ chức tập huấn 2	Sau (1) hoàn thành	3
y5	Hợp đồng với các cơ sở 1	Sau (3) hoàn thành	2
y6	Hợp đồng với các cơ sở 2	Sau (4) hoàn thành	3
y7	Tổ chức khảo sát	Sau (5),(6) hoàn thành	24
y8	Kiểm tra và thu nhận số liệu	Sau (2), (7) hoàn thành	18
y9	Thanh lý hợp đồng với các cơ sở	Sau (8) hoàn thành	3
y10	Xây dựng CSDL	Sau (2), (8) hoàn thành	18
y11	Kết nối DL quá khứ	Sau (10) hoàn thành	12
y12	Tổng hợp - Phân tích số liệu	Sau (9), (11) hoàn thành	24
y13	Lập báo cáo sơ bộ	Sau (12) hoàn thành	14
y14	Hội thảo lần 1	Sau (13) hoàn thành	2
y15	Hiệu chỉnh báo cáo	Sau (14) hoàn thành	12
y16	Hội thảo lần 2	Sau (15) hoàn thành	6
y17	Viết báo cáo chính thức	Sau (16) hoàn thành	12

Dưới đây là các bước xây dựng sơ đồ mạng lưới với các chỉ tiêu thời gian.

a- Mô tả đồ thị và chuẩn hoá dữ kiện

Trong các bước công việc nêu trên có thể có nhiều công việc như một mạch nối tiếp độc lập với các phần công việc khác. Để đơn giản cho việc xây dựng sơ đồ mạng lưới, trước tiên chúng ta có thể mô tả đồ thị các công việc trên và tiến hành các ghép nối có thể, cũng như suy xét đến khả năng phải dùng tối thiểu các cung giả như đã nói ở phần trên. Đồ thị ban đầu có thể mô tả như sau:



Chúng ta thấy cụm công việc y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7 có thể thay bằng một "công việc", cũng như vậy với y10,y11 và cụm y12,y13,y14,y15,y16,y17.

Cụm thứ nhất là một sơ đồ vì vậy sau này chúng ta sẽ phân tích riêng, trong sơ đồ chung ta sẽ lấy đường đi dài nhất làm thời gian hoàn thành công việc này, các cụm khác đơn giản hơn chúng ta chỉ cần cộng các thời gian là đủ.

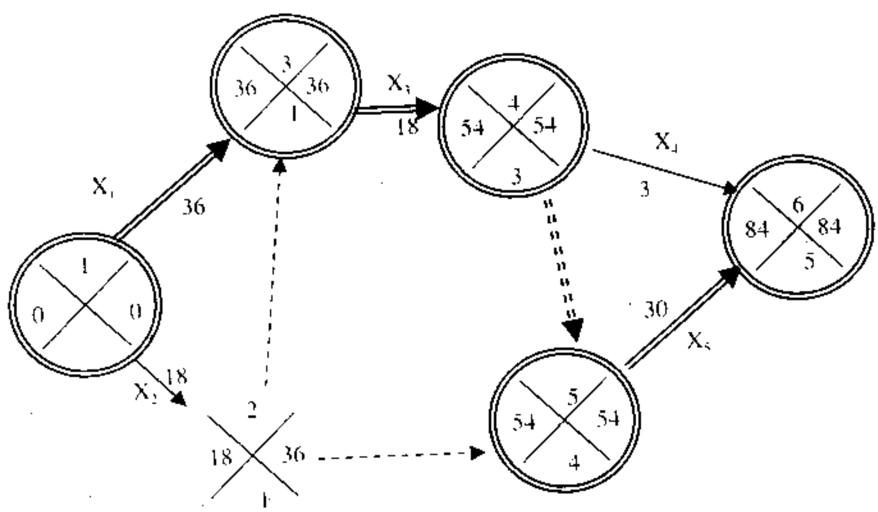
Có thể mô tả lại qui trình trên như sau:

Mã CV	Nội dung công việc	Trình tự	Thời gian (ngày)
x1	y1, y2, y3, y4, y5, y6, y7	Bắt đầu ngay	36
x2	Xây dựng phần mềm	Bắt đầu ngay	18
x3	y8	Sau (1), (2) hoàn thành	18
x4	y9	Sau (3) hoàn thành	3
x5	y10, y11	Sau (2),(3) thẳng cột hoàn thành	30

Như vậy chúng ta tách cụm cuối cùng nói trên thành một nhóm hoàn toàn độc lập không xét trong sơ đồ.

b- Lập sơ đồ mạng lưới với các chỉ tiêu thời gian

Bây giờ ta có sơ đồ đơn giản hơn đôi chút:



Chú ý rằng x1 là một nhóm công việc, trong nhóm này y1, y4, y6, y7 tạo nên đường đi dài nhất. x1 găng ở sơ đồ trên nhưng y3, y5 vẫn có 1 ngày dự trữ chung, trong khi y1, y4, y6, y7 không có thời gian dự trữ.

Toàn bộ qui trình sẽ kết thúc sớm nhất sau 84+70 =154 ngày.

Phần công việc còn lại được xem như bài tập nhỏ dành cho bạn đọc.

3- Sơ đồ Gantl và sơ đồ Pert ngang

a- Sơ đồ (biểu đồ) Gantl

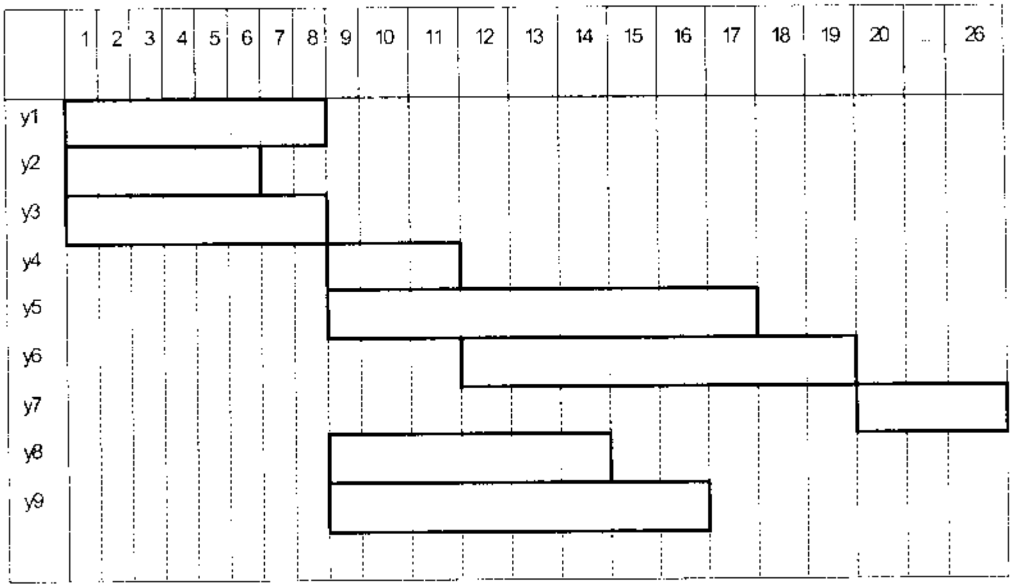
Một cách mô tả qui trình theo trục thời gian đơn giản được dùng nhiều trong xây dựng là biểu đồ Gantl. Biểu đồ Gantl mô tả công việc với mục đích chỉ ra tại mỗi thời điểm có những công việc nào có thể đang tiến hành, đồng thời với biểu đồ này đường găng của toàn bộ qui trình được nhận biết rất dễ dàng. Sau đây là biểu đồ Gantl của qui trình trong thí dụ 1.

Dữ kiện trong thí dụ này là:

Mã công việc	Trình tự	Thời gian (tuần)
Y_1	Bắt đầu ngay	8
Y_2	Bắt đầu ngay	6
Y_3	Bắt đầu ngay	8
Y_4	Sau Y_1 hoàn thành	3
Y_5	Sau Y_1, Y_3 hoàn thành	9
Y_6	Sau Y_2, Y_3, Y_4 hoàn thành	8
Y_7	Sau Y_5, Y_6 hoàn thành	7
Y_8	Sau Y_1 hoàn thành	6
Y_9	Sau Y_1, Y_3 hoàn thành	8

Biểu đồ Gantl

Biểu đồ này đơn giản và dễ xây dựng, nguyên tắc cơ bản và cũng là duy nhất đó là một công việc sẽ được bắt đầu khi nó có thể,tức là tương ứng với thời điểm khởi công sớm trên sơ đồ mạng lưới. Việc xác định đường găng khá dễ dàng nhờ việc lùi dần các đầu mút kế tiếp bên trái của các đường mô tả thời gian của các công việc tương ứng.



Nhược điểm của biểu đồ này chính là không tính được các chỉ tiêu thời gian cho các công việc và các sự kiện. Hơn nữa các sự kiện cũng không được định nghĩa rõ ràng vì trình tự các công việc cũng không được thể hiện trên biểu đồ này.

b- Sơ đồ PERT ngang

Một hình thức khác thể hiện dưới dạng hình học một qui trình trong đó có thêm những thông tin về yêu cầu thời gian tiến hành các công việc.

Sơ đồ mạng lưới có thể biểu hiện trên trục thời gian, vì vậy muốn có sơ đồ này cần có sơ đồ mạng lưới tối thiểu, với các đỉnh đã có các chỉ tiêu thời gian.

Từ sơ đồ mạng lưới ta lập trục thời gian (bằng độ dài đường găng) với các độ chia như nhau. Các công việc xếp thứ tự từ dưới lên trên như sau:

- Mỗi công việc được biểu diễn bằng một đoạn thẳng song song với trục thời gian có độ dài bằng thời gian của công việc đó.

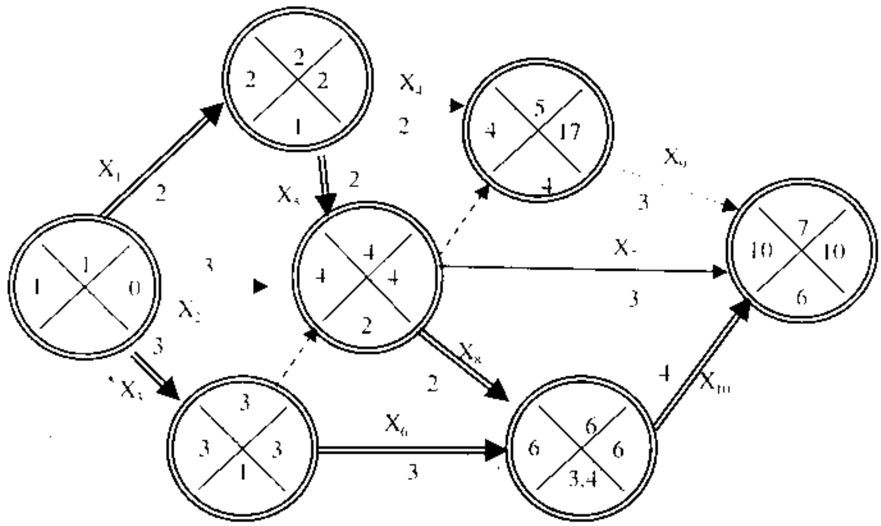
- Đoạn thẳng biểu diễn một công việc nào đó được ghi số hiệu đỉnh gốc ở mút trái và số hiệu đỉnh ngọn ở mút phải.

- Công việc giả ghi bởi một điểm với hai số hiệu đỉnh tương ứng.

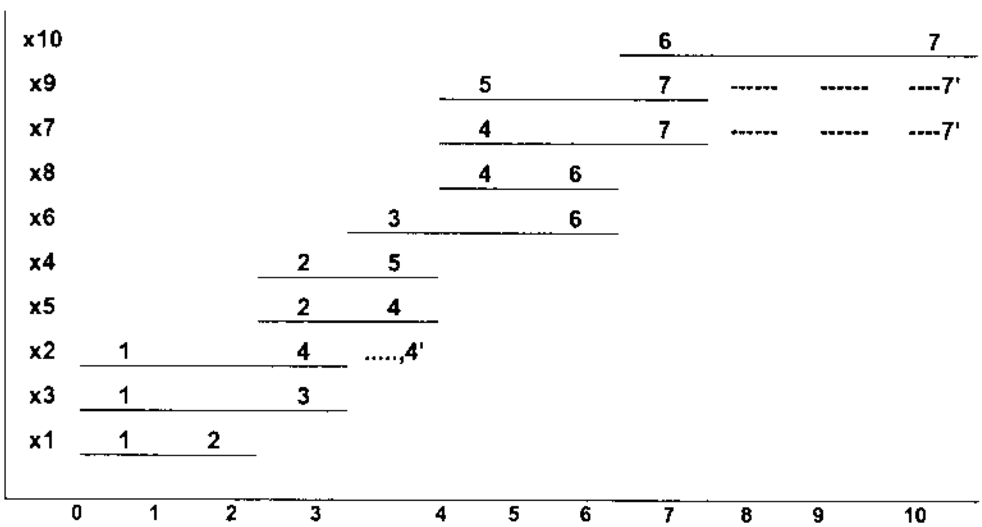
- Thứ tự công việc xếp từ dưới lên theo số hiệu đỉnh ngọn, khi có nhiều công việc cùng số hiệu đỉnh ngọn ta xếp công việc theo trật tự của số hiệu đỉnh gốc.

- Đoạn thẳng biểu diễn một công việc được đặt sao cho đầu mút trái ở cùng hoành độ bên phải nhất của các đoạn thẳng tương ứng với các công việc đã biểu diễn trước đó có số hiệu đỉnh ngọn trùng với số hiệu đỉnh gốc của công việc này.

Thí dụ 3: Cho sơ đồ mạng



SƠ ĐỒ PERT NGANG



Nhược điểm cơ bản của sơ đồ Pert ngang là việc tính thời gian dự trữ của các công việc phức tạp. Tuy nhiên, với việc điều chỉnh các đoạn thẳng tương ứng với các công việc dọc theo trục thời gian sao cho toàn qui trình không thay đổi thì ở mỗi thời điểm ta có thể nhận biết rất rõ những công việc nào đang được tiến hành. Bài toán ngược sẽ cho phép tìm cách phân phối công việc không găng sao cho tính phức tạp của toàn qui trình giảm tối đa có thể.

4- Phần mềm Pom với Sơ đồ mạng lưới

POM là phần mềm giải một lớp bài toán cân bằng và tối ưu với kích thước nhỏ. Phần mềm này chỉ chứa trên mộ hoàn thành hoàn thành t đĩa mềm 1.44MB.

Với POM bài toán sơ đồ mạng có thể tiến hành ở hai mức khác nhau

- Khai báo qui trình: Với thời gian xác định và ngẫu nhiên

- Đã lập sơ đồ: Với thời gian xác định và ngẫu nhiên

Thực tế chúng ta khó có thể xác định đúng thời gian cho mỗi công việc, vì lý do này chúng ta cần xem xét bài toán sơ đồ mạng với thời gian t(i,j) có thể cho ở 3 mức: tối thiểu, trung bình (mốt) và tối đa (với một độ tin cậy nào đó). Bài toán trên gọi là bài toán với thời gian ngẫu nhiên (hay bài toán với thời gian không xác định).

a- Bài toán với thời gian xác định

Để sử dụng POM chúng ta cần có một qui trình hoặc một sơ đồ mạng với các số hiệu đỉnh đã xác định. Sau đây ta xét cả hai trường hợp và xem xét cách thức dùng POM tương ứng.

Bài toán với dữ kiện là quan hệ logic của các công việc

Cho qui trình với bảng công việc như sau:

Mã công việc	Trình tự	Thời gian (tuần)
y1	Bắt đầu ngay	7
y2	Bắt đầu ngay	9
y3	Bắt đầu ngay	11
y4	Sau y2	8
y5	Sau y2, y3	10
y6	Sau y1, y3, y4	7
y7	Sau y4, y6	9
y8	Sau y5, y6,y7	12
y9	Sau y6,y8	8
y10	Sau y8, y5	9

Các bước công việc với POM

- Chạy tệp POM.EXE ta có bảng chọn

-------------------------------- Main menu --------------------------------

Help
Decision and Breakeven Analysis
Forecasting
Plant Location
Transportation
Operations Layout
Balancing, Assembly line
Waiting Line Models
Experience (learning) Curves
Reliability

CPM/PERT Project Scheduling
Linear Programming
Aggregate Planning
Inventory
Material Requirements Planning
Sizing, Lot
Job Shop Sequencing
Assignment
Quality Control
Exit to DOS

Chọn **CPM/PERT Project Scheduling**

Trong bảng chọn tiếp theo ta có:

F1- Help F2- New F3- Load.....

Hãy chọn F2 thực hiện một bài toán mới. Bảng chọn tiếp theo là

Project Time Specification

Single time estimate PERT (AOA) network

(Pert với thời gian đơn - xác định từ sơ đồ mạng)

Triple time estimate PERT (AOA) network

(Pert với ba mức thời gian ước lượng- từ sơ đồ mạng)

CPM (AON) network - 1 time estimate

(Pert với thời gian đơn - xác định từ một qui trình)

CPM (AON) network - 3 time estimate

(Pert với ba mức thời gian ước lượng - từ một qui trình)

Return to submenu

Select menu option by highlighted letter or point with arrow keys and then press RETURN (Enter) key

Hãy chọn: **CPM (AON) network - 1 time estimate**

POM yêu cầu khai báo tên tệp (bắt buộc), ta khai báo thidu1

Chúng ta dã khai báo số công việc **(Number of activities)** là 10

POM cho bảng khai báo có dạng

------------CPM/PERT Project Scheduling------------ Data Screen
Number of activities (1-99) 10
--------------------------------thidu1--------------------------------

Task	Time	Predecessors						
a	0	--	--	--	--	--	--	--
b	0	--	--	--	--	--	--	--
c	0	--	--	--	--	--	--	--
d	0	--	--	--	--	--	--	--
e	0	--	--	--	--	--	--	--
f	0	--	--	--	--	--	--	--
g	0	--	--	--	--	--	--	--
h	0	--	--	--	--	--	--	--
i	0	--	--	--	--	--	--	--
j	0	--	--	--	--	--	--	--

Hãy sửa lại mã các công việc như đã dặt ở trên (y1, y2,..., y10) thay cho (a,b,c....j)

Sau đó điền giá trị thời gian các công việc vào cột Time. Ghi trình tự các công việc ở bảng tương ứng Predecessors. Chúng ta có khai báo cuối cùng như sau:

Task	Time	Predecessors						
y1	7	--	--	--	--	--	--	--
y2	9	--	--	--	--	--	--	--
y3	11	--	--	--	--	--	--	--
y4	8	y2	--	--	--	--	--	--
y5	10	y2	y3	--	--	--	--	--
y6	7	y1	y3	y4	--	--	--	--
y7	9	y4	y6	--	--	--	--	--
y8	12	y5	y6	y7	--	--	--	--
y9	8	y6	y8	--	--	--	--	--
y10	9	y8	y5	--	--	--	--	--

Sau khi kiểm tra lại hãy ấn phím F10 để POM thực hiện chương trình. Kết quả nhận được là:

----------------------CPM/PERT Project Scheduling----------- Solution

Number of activities (1-99) 10

Project completion time = 54

Task	Time	ES	EF	LS	LF	slack
y1	7	0	7	10	17	10
y2	9	0	9	0	9	0
y3	11	0	11	6	17	6
y4	8	9	17	9	17	0
y5	10	11	21	23	33	12
y6	7	17	24	17	24	0
y7	9	24	33	24	33	0
y8	12	33	45	33	45	0
y9	8	45	53	46	54	1
y10	9	45	54	45	54	0

Trong đó: ES thời gian khởi công sớm

EF thời gian hoàn thành sớm

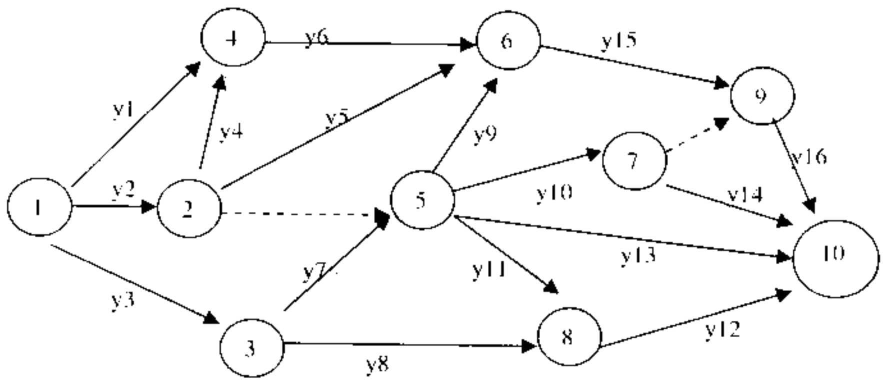
LS thời gian khởi công muộn

LF thời gian hoàn thành muộn

Slack thời gian dự trữ

Thời gian hoàn thành qui trình (Project completion time)= (độ dài đường găng) =54.

Bài toán với dữ kiện là một sơ đồ mạng có số hiệu đỉnh



Lập từ bảng qui trình sau

Mã Cv	Trình tự	Thời gian	Mã cv	Trình tự	Thời gian
y1	bđn	4	y9	sau y2, y7 ht	8
y2	bđn	6	y10	sau y2, y7 ht	9
y3	bđn	5	y11	sau y2, y7 ht	7
y4	sau y2 ht	4	y12	sau y8, y11 ht	5
y5	sau y2 ht	7	y13	sau y2, y7 ht	6
y6	sau y1, y4 ht	8	y14	sau y10 ht	4
y7	sau y3 ht	5	y15	sau y5, y6, y9 ht	8
y8	sau y3 ht	6	y16	sau y10, y15 ht	5

Sau khi đánh số hiệu đỉnh ta có

Mã Cv	Cung	Thời gian	Mã cv	Cung	Thời gian
y1	1,4	4	y9	5,6	8
y2	1,2	6	y10	5,7	9
y3	1,3	5	y11	5,8	7
y4	2,4	4	y12	8,10	5
y5	2,6	7	y13	5,10	6
y6	4,6	8	y14	7,10	4
y7	3,5	5	y15	6,9	8
y8	3,8	6	y16	9,10	5

Bảng trên là dữ liệu cần thiết cho POM.

Trong thực đơn trên ta chọn: Single time estimate PERT (AOA) network (Pert với thời gian đơn - xác định từ sơ đồ mạng)

Thực hiện các khai báo tương tự như ở mục a, POM cho kết quả sau:

----------------------CPM/PERT Project Scheduling----------- Solution

Number of activities (1-99) 16 Project completion time = 31

Start Node	End Node	Time	ES	EF	LS	LF	slack
1	4	4	0	4	6	10	6
1	2	6	0	6	0	6	0
1	3	5	0	5	0	5	0
2	4	4	6	10	6	10	0
2	6	7	6	13	11	18	5
4	6	8	10	18	10	18	0
3	5	5	5	10	5	10	0
3	8	6	5	11	20	26	15
5	6	8	10	18	10	18	0
5	7	9	10	19	18	27	8
5	8	7	10	17	19	26	9
8	10	5	17	22	26	31	9
5	10	6	10	16	25	31	15
7	10	4	19	23	27	31	8
6	9	8	18	26	18	26	0
9	10	5	26	31	26	31	0

b- Bài toán với thời gian không xác định

+ Dữ kiện

Giả sử các công việc của một qui trình được cho với trình tự logic xác định. Với mỗi công việc y ta xác định 3 giá trị t(y) như sau:

- mt(y): Thời gian trung bình (hoặc mốt) hoàn thành công việc y

- lt(y) : Thời gian nhanh nhất có thể hoàn thành công việc y

- ut(y): Thời gian chậm nhất có thể hoàn thành công việc y.

Các giá trị trên thường nhận được từ các số liệu quan sát nhờ các ước lượng điểm và khoảng tin cậy với một mức tin cậy chấp nhận được.

+ Sơ đồ mạng lưới với tư cách một đồ thị phẳng

Với trình tự logic nói trên chúng ta lập sơ đồ mạng lưới với mục đích xác định các đỉnh và các cung của đồ thị tương ứng.

+ Phần mềm POM với bài toán thời gian

Thực tế các chỉ tiêu cho các đỉnh và một số chỉ tiêu cơ bản cho các công việc là cơ sở cho mọi tính toán. Phần mềm POM cung cấp thủ tục xác định các chỉ tiêu cho các công việc, mà từ đó ta có thể xác định các chỉ tiêu thời gian cho các công việc.

Về mặt nguyên tắc thủ tục xử lý qua hai bước:

- Hiệu chỉnh giá trị trung tâm theo các giá trị cho trước sao cho phân phối của thời gian đối với mỗi công việc phân phối xấp xỉ chuẩn.

- Tính toán các chỉ tiêu trung bình cho các công việc và xác định độ lệch chuẩn của các chỉ tiêu thời gian tương ứng.

Sau đây là một thí dụ với POM

Dữ liệu cơ bản:

Với Pom khi chọn Pert các khai báo ban đầu là:

- Task: Tên hay mã công việc

- Opt time: Thời gian nhanh nhất.

- Lik time: Thời gian trung bình hay có nhiều khả năng nhất

- Pes time: Thời gian chậm nhất

- Predecessor: Trình tự. Phần này khai báo cho từng công việc những công việc phải kết thúc làm điều kiện cho công việc đang khai báo bắt đầu.

Hãy xem thí dụ sau: - trường hợp khai báo qui trình

Task	opt time	lik time	pes time	Predecessors				
y1	4	5	6	--	--	--	--	--
y2	4	6	8	--	--	--	--	--
y3	5	7	9	--	--	--	--	--
y4	6	9	12	y1	y2	--	--	--
y5	5	6	7	y1	y3	--	--	--
y6	4	6	8	y2	y3	y4	--	--
y7	9	11	13	y4	y5	--	--	--
y8	8	9	10	y4	y6	--	--	--

Sau khi khai báo xong chúng ta có thể sửa chữa lại nếu sai sót.

POM thực hiện các tính toán và cho kết quả:

Task	opt time	lik time	pes time	Time	ES	EF	LS	LF	slack	σ
y1	4	5	6	5	0	5	1	6	1	.33
y2	4	6	8	6	0	6	0	6	0	.67
y3	5	7	9	7	0	7	6	13	6	.67
y4	6	9	12	9	6	15	6	15	0	1
y5	5	6	7	6	7	13	13	19	6	.33
y6	4	6	8	6	15	21	15	21	0	.67
y7	9	11	13	11	15	26	19	30	4	.67
y8	8	9	10	9	21	30	21	30	0	.33

Chúng ta có thể kết hợp các bước công việc nhờ sử dụng một đồ thị PERT để mô tả qui trình, như trong bài toán với thời gian xác định, sau đó nhờ POM tính toán các chỉ tiêu cơ bản làm cơ sở cho các tính toán khác trên sơ đồ.

5- Bài toán tối ưu

Với sơ đồ mạng lưới các bài toán tối ưu thông thường được chia thành hai loại mà thực chất là một cặp qui hoạch đối ngẫu. Trong rất nhiều tài liệu trước đây việc giải bài toán qui hoạch gặp nhiều khó khăn chính vì vậy người ta đã xây dựng những thuật toán giải bài toán tối ưu trực tiếp trên mạng. Trong điều kiện có thể tận dụng ưu thế của các phần mềm hiện có chúng ta có thể giải lớp bài toán này tương đối đơn giản. Về mặt lý thuyết các thuật giải đã được xây dựng hoàn chỉnh chúng ta có thể tìm thấy ở các giáo trình hay sách chuyên khảo về qui hoạch toán học. Trong bài này chúng ta chỉ xây dựng bài toán và nêu cách sử dụng phần mềm để nhận được lời giải và phân tích chúng.

a- Hai bài toán cơ bản

Xét qui trình A với các công việc (i,j) nhận được từ sơ đồ mạng lưới G = (A,U).

Gọi:

t_{ij} là thời gian hoàn thành công việc (i,j).

s_{ij} là thời gian ngắn nhất có thể hoàn thành công việc (i,j)

m_{ij} là thời gian dài nhất có thể hoàn thành công việc (i,j)

c_{ij} là chi phí cho công việc (i,j) với giả thiết $c_{ij}=C_{ij}(t_{ij})$ là các hàm giảm theo t_{ij}.

Bài toán 1

Xác định t_{ij} sao cho với tổng thời gian đã cho M qui trình được hoàn thành với chi phí nhỏ nhất.

Bài toán này là bài toán qui hoạch sau:

Tìm $\{ t_i, t_{ij} \}$ với $(i,j) \in U$

sao cho: $F(t)= \sum_{(i,j)\in U} C_{ij}(t_{ij}) \Rightarrow \min$

Với: $t_j - t_i \geq t_{ij}$ với mọi $(i,j) \in U$

$s_{ij} \leq t_{ij} \leq m_{ij}$ với mọi $(i,j) \in U$

$t_n - t_1 \leq M$

Bài toán 2

Xác định t_{ij} sao cho với tổng chi phí đã cho C qui trình được hoàn thành với thời gian nhỏ nhất.

Bài toán này là bài toán qui hoạch sau:

Tìm $\{ t_i, t_{ij} \}$ với $(i,j) \in U$

sao cho: $F(t) = t_n - t_1 \Rightarrow \min$

Với: $t_j - t_i \geq t_{ij}$ với mọi $(i,j) \in U$

$s_{ij} \leq t_{ij} \leq m_{ij}$ với mọi $(i,j) \in U$

$$\sum_{(i,j) \in U} C_{ij}(t_{ij}) \leq C$$

Tuỳ thuộc dạng hàm C mà các bài toán trên là bài toán qui hoạch phi tuyến hay tuyến tính.

b- Các bước giải các bài toán

Để giải các bài toán trên ta xuất phát từ qui trình đã cho, xây dựng sơ đồ mạng lưới chỉ để xác định các đỉnh là các đầu mút của các cung.

Sau khi đã có các cung và các đỉnh, sử dụng các phần mềm (POM, TKT, Excel, Gams) giải các bài toán tương ứng. Kết quả giải bài toán cho chúng ta các giá trị $\{t_i, t_{ij}\}$.

Từ các giá trị này chúng ta xác định tiếp các chỉ tiêu trên sơ đồ mạng với qui trình đã tối ưu hoá.

c- Giải bài toán tối ưu trên Excel hoặc POM

Công việc	Trình tự	s	m	c
x1	Bắt đầu ngay	16	20	5
x2	Bắt đầu ngay	19	25	4
x3	Sau x1 hoàn thành	14	18	3
x4	Sau x1, x2 hoàn thành	24	30	4

Có thể minh hoạ cách dùng Excel giải bài toán 1 với sơ đồ Pert đơn giản lập từ qui trình sau với hạn chế thời gian M=45:

Các bảng 1,2,3 là các bảng số liệu ban đầu nhận được từ dữ kiện của qui trình và sơ đồ mạng lưới (có thể chỉ cần đánh số hiệu đỉnh).

Bảng 4 là bảng của các biến t_{ij}.

Từ bảng 4 và các bảng 1,2,3 ta lập các bảng 5,6; hai bảng này nhằm tạo ra hàm chi phí.

Bảng 7 tạo các biểu thức cho ràng buộc giữa thời gian của các công việc và các thời điểm của các đỉnh.

Bảng phương án tối ưu ghi các kết quả nhận được khi giải bài toán tối ưu với thời gian hạn chế M.

Hoàn toàn có thể mở rộng các bảng trên cho sơ đồ mạng lưới bất kỳ. Ngoài ra có thể tạo một Macro cho việc giải loại bài toán này.

DỮ LIỆU BAN ĐẦU

	1	2	3	4
Bảng1-		s(i,j)		
1		16	19	
2			0	14
3				24
4				
Bảng 2-		m(i,j)		
1		20	25	
2			0	18
3				30
4				
Bảng 3-		c(i,j)		
1		5	4	
2			0	3
3				4
4				
M=		45		

TẠO CÁC RÀNG BUỘC

Bảng 4-		t(i,j)		
1		20	20	
2			0	18
3				25
4				
Bảng5-		m(i,j)-t(i,j)		
1	0	0	5	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	5
4	0	0	0	0
Bảng 6-		c(m-t)		
1	0	0	20	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	20
4	0	0	0	0

t(i)	0	20	20	45

Bảng7- t(j)-t(i)

t(j)-t(i)	j =1	j =2	j =3	j =4
	0	20	20	45
i =1	0	20	20	
i =2	20		0	25
i =3	20			25
i =4	45			

Phương án tốt nhất				
i	1	2	3	4
t(i)	0	20	20	45
		20	20	
				18
t(i,j)				25
Ham tong chi phi F=			40	

Bài toán với qui trình 16 công việc (trang 47) được bổ sung các dữ kiện như sau:

Hàm $C_{ij}(t_{ij}) = c_{ij}(m_{ij} - t_{ij})$ và hạn chế thời gian M=45.

Mã cv	cung	s(i,j)	m(i,j)	c(i,j)	Mã cv	cung	s(i,j)	m(i,j)	c(i,j)
y1	1,4	4	9	2	y9	5,6	8	10	4
y2	1,2	6	9	4	y10	5,7	9	12	2
y3	1,3	5	10	3	y11	5,8	7	12	3
y4	2,4	4	6	4	y12	8,10	5	11	4
y5	2,6	7	9	2	y13	5,10	6	9	2
y6	4,6	8	10	5	y14	7,10	4	9	5
y7	3,5	5	6	1	y15	6,9	8	14.	3
y8	3,8	6	12	5	y16	9,10	5	9	4

Với thủ tục như đã trình bày ở trên ta có kết quả tóm tắt từ Solve của Excel như sau:

Công việc	(i,j)	t(i,j)	c(i,j)	m(i,j)	f(i,j)
y1	1,4	9	2	9	0
y2	1,2	9	4	9	0
y3	1,3	10	3	10	0
y4	2,4	6	4	6	0
y5	2,6	9	2	9	0
y6	4,6	10	5	10	0
y7	3,5	5	1	6	1
y8	3,8	6	5	12	30
y9	5,6	10	4	10	0
y10	5,7	12	2	12	0
y11	5,8	12	3	12	0
y12	8,10	11	4	11	0
y13	5,10	9	2	9	0
y14	7,10	9	5	9	0
y15	6,9	11	3	14	9
y16	9.10	9	4	9	0

Cột f(i,j) ghi chi phí do phải rút ngắn thời gian so với thời gian tối đa m(i,j) để đảm bảo qui trình hoàn thành trong hạn chế M=45.

Chi phí nhỏ nhất đánh giá như trên được xem là thiệt hại tối thiểu: F= 40.

Với POM ta có thể chọn thủ tục giải bài toán qui hoạch tuyến tính và nhận được kết quả như trên. Tuy nhiên, vì cấu trúc hệ ràng buộc của lớp bài toán này gồm các ma trận thưa nên việc giải bài toán trên Pom hay các công cụ lập trình khác tương đối phức tạp và lãng phí thời gian. Cách lựa chọn hiệu quả hiện tại là kết hợp đồ thị với bảng tính excel như đã trình bày ở trên.

Giải các bài toán tối ưu nhờ Gams

Với Gams việc giải bài toán tối ưu có thể thực hiện đơn giản hơn từ một sơ đồ Pert với số thứ tự đỉnh đã có. Sau đây là chương trình viết trên Gams đối với bài toán cực tiểu chi phí với sơ đồ trang 35 (từ thí dụ 2) với hạn chế thời gian M=88 và các dữ kiện ở bảng số liệu sau:

Mã CV	Nội dung công việc	Trình tự	s(i,j)	m(i,j)	C(i,j)
x1	y1,y3,y4,y5,y6, y7	bắt đầu ngay	36	40	5
x2	Xây dựng phần mềm	bắt đầu ngay	18	22	4
x3	y8	sau (1), (2) hoàn thành	18	24	4
x4	y9	sau (3) hoàn thành	3	7	5
x5	y10, y11	sau (2),(3) hoàn thành	30	36	3

```
*Chuong trinh giai bai toan pert toi uu voi han che thoi gian /optpert1/:
set i Dinh cua Pert /1*6/;
alias (i,j);
* Theo so do tap cung la;
   set u(i,j) cung / 1.2, 1.3, 2.3, 3.4, 2.5, 4.5, 5.6, 4.6 /;
parameter      s(i,j)   thoi gian nhanh nhat /1.2 18, 1.3 36, 2.3 0,3.4 18, 2.5 0,
                                  4.5 0,4.6 3, 5.6 30/
               m(i,j)   thoi gian cham nhat /1.2 22, 1.3 40, 2.3 0, 2.5 0, 3.4 24,
                                  4.5 0, 4.6 7, 5.6 36/
               c(i,j)   chi phi       /1.2 4, 1.3 5, 2.3 0, 3.4 4, 2.5 0, 4.5 0,
                              4.6 5, 5.6 3/;
```

```
variable F;
positive variable t(i), tg(i,j);
equation
      hmt     Tong chi phi
      rbtg1    rang buoc thoi gian duoi
      rbtg2    rang buoc thoi gian tren
      rbtd    rang buoc thoi diem
      rbqt    rang buoc qui trinh;
rbtg1(i,j)$u(i,j)..
      tg(i,j)=g=s(i,j);
rbtg2(i,j)$u(i,j)..
      tg(i,j)=l=m(i,j);
rbtd(i,j)$(u(i,j) and ord(j) gt ord(i)).. t(j)-t(i)=g=tg(i,j);
rbqt(i,j).. t(j)-t(i)=l=92;
hmt.. F=e=sum((i,j)$u(i,j),c(i,j)*(m(i,j)-tg(i,j)));
model pert2 /all/;
solve pert2 minimizing F using lp;
display f.l, t.l, tg.l;
```

Kết quả nhận được từ Gams:

```
                  F.L              =      26.000
                              T.L
2 40.000,   3 40.000,   4 62.000,   5 62.000,   6 92.000

----     30 VARIABLE  TG.L
          2          3          4          6
1      22.000     40.000
3                        22.000
4                                   7.000
5                                  30.000
```

Thay phần cuối chương trình trên chúng ta có thể giải bài toán thứ hai (cực tiểu thời gian với chi phí hạn chế). Tổng chi phí hạn chế là 26.

```
*Chuong trinh giai bai toan toi pert toi uu voi han che chi phi /optpert2/;
set i Dinh cua Pert /1*6/;
alias (i,j);
```

```
* Theo so do tap cung la:
  set u(i,j) cung / 1.2, 1.3, 2.3, 3.4, 2.5, 4.5, 5.6, 4.6 /;
parameter     s(i,j)  thoi gian nhanh nhat /1.2 18, 1.3 36, 2.3 0,3.4 18, 2.5 0,
                                   4.5 0,4.6 3, 5.6 30/
              m(i,j)  thoi gian cham nhat /1.2 22, 1.3 40, 2.3 0, 2.5 0, 3.4 24,
                                   4.5 0, 4.6 7, 5.6 36/
              c(i,j)  chi phi      /1.2 4, 1.3 5, 2.3 0, 3.4 4, 2.5 0, 4.5 0,
                              4.6 5, 5.6 3/;
variable F;
positive variable  tg(i,j), t(i);
equation
     hmt    Thoi gian hoan thanh
     rbtg1   rang buoc thoi gian duoi
     rbtg2   rang buoc thoi gian tren
     rbtd   rang buoc thoi diem
     rgbcp   Rang buoc chi phi;
rbtg1(i,j)$u(i,j)..
     tg(i,j)=g=s(i,j);
rbtg2(i,j)$u(i,j)..
     tg(i,j)=l=m(i,j);
rbtd(i,j)$(u(i,j) and ord(j) gt ord(i)).. t(j)-t(i)=g=tg(i,j);
rgbcp.. sum((i,j)$u(i,j),c(i,j)*(m(i,j)-tg(i,j)))=l=26;
hmt.. F=e=t("6")-t("1");
model pert3 /all/;
solve pert3 minimizing F using lp;
display f.l, t.l, tg.l;
```

Kết quả nhận được chính là kết quả của bài toán thứ nhất.

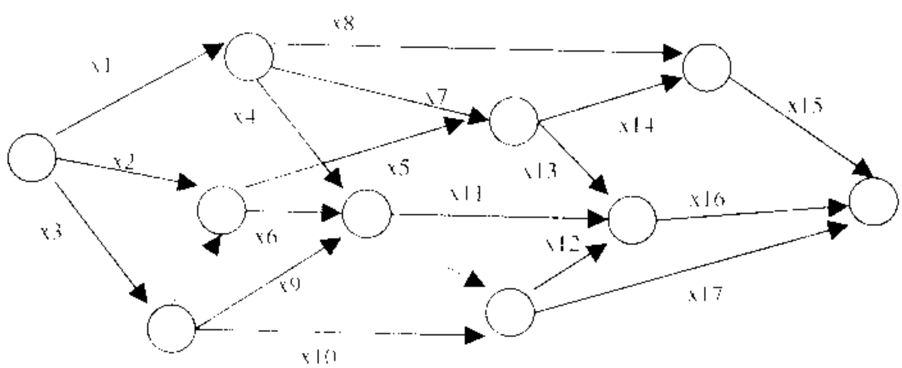
```
  28 VARIABLE  F.L              =       92.000
  28 VARIABLE  T.L
1. -92.000,   2 -52.000,   3 -52.000,   4 -30.000,   5 -30.000
  28 VARIABLE  TG.L
        2         3         4         6
1    22.000    40.000
3                        22.000
4                                   7.000
5                                  30.000
```

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1- Lập sơ đồ mạng lưới và tính các chỉ tiêu thời gian cho các công việc, các sự kiện từ qui trình sau:

Công việc	Trình tự	Thời gian (tuần)
x1	Bắt đầu ngay	4
x2	Bắt đầu ngay	6
x3	Bắt đầu ngay	8
x4	Sau x1, x2 hoàn thành	5
x5	Sau x2, x3 hoàn thành	7
x6	Sau x3, x4 hoàn thành	11
x7	Sau x3, x4, x5 hoàn thành	9
x8	Sau x5, x6 hoàn thành	8

2- Cho sơ đồ phác thảo đúng của một qui trình như sau



Với thời gian của các công việc như sau:

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17
6	5	7	2	8	5	3	7	9	6	5	4	8	6	4	7	5

a- Hoàn chỉnh sơ đồ mạng lưới với các chỉ tiêu thời gian cho các đỉnh và các cạnh.

b- Xác định đường găng, phân chia các công việc và thời gian dự trữ của chúng.

c- Hãy cho biết khoảng thời gian tối đa mỗi công việc có thể kéo dài với điều kiện không làm thay đổi thời gian hoàn thành toàn bộ qui trình.

d- Lập biểu đồ gantt và cho biết một phương án sử dụng lao động nếu như số lao động thường xuyên cho mỗi công việc cho ở bảng dưới đây:

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17
2	3	3	6	5	7	10	9	4	12	8	4	2	16	6	11	9

3- Lập sơ đồ mạng, trả lời các câu hỏi b, c, d như trong bài toán 2

Công việc	Trình tự	Thời gian (ngày)	Lao động(người)
x1	Bắt đầu ngay	14	5
x2	Bắt đầu ngay	16	8
x3	Sau x1 hoàn thành	12	7
x4	Sau x1, x2 hoàn thành	10	6
x5	Sau x2,x4 hoàn thành	15	5
x6	Sau x3,x4 hoàn thành	12	9
x7	Sau x5 hoàn thành	10	4
x8	Sau x4, x5, x6 hoàn thành	9	8
x9	Sau x7 hoàn thành	14	11
x10	Sau x7, x8 hoàn thành	16	8

4- Cho qui trình

Công việc	Trình tự	s(x)	t(x)	m(x)
x1	Bắt đầu ngay	4	6	8
x2	Bắt đầu ngay	6	8	12
x3	Bắt đầu ngay	10	12	15
x4	Sau x1, x3 hoàn thành	6	9	11
x5	Sau x2,x3 hoàn thành	5	7	10
x6	Sau x3,x4 hoàn thành	8	10	14
x7	Sau x4, x5 hoàn thành	10	12	16
x8	Sau x1, x3 hoàn thành	9	11	14

a- Lập sơ đồ mạng lưới và tính các chỉ tiêu thời gian cho qui trình trên với thời gian t(x).

b- Tìm lời giải của bài toán cực tiểu chi phí với tổng thời gian không vượt quá 80 ngày biết rằng chi phí cho công việc x là: C(t)= 14t + 20/t.

c- Lập sơ đồ mạng và tính các chỉ tiêu thời gian với kết quả tìm được ở câu b.

d- Với hàm C(t) ở câu b hãy tìm thời gian hoàn thành nhanh nhất qui trình nếu chi phí hạn chế bởi C = 1200.

CHƯƠNG 2
LÝ THUYẾT PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

I. MÔ HÌNH HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

1- Bài toán lý thuyết phục vụ công cộng

Bài toán phục vụ công cộng cũng cho chúng ta cách nhìn một hệ thống ngẫu nhiên, sự khác biệt của nó với các hệ thống trong đó mọi quá trình diễn ra đều đặn. Chúng ta sẽ giải thích đầy đủ hơn nhiều vấn đề trong thực tế khi một hệ thống, một quá trình vận động dưới sự tác động của các yếu tố ngẫu nhiên. Chúng ta sẽ thấy sự không ăn khớp của các quá trình tưởng như đã được thiết kế đồng bộ. Chẳng hạn, tại sao một siêu thị với khá nhiều quầy thanh toán vẫn xảy ra tình trạng ùn tắc vào thời điểm này và vắng tanh vào thời điểm khác. Muốn đảm bảo năng lực cho một trạm cấp cứu ở bài toán lý thuyết phục vụ công cộng hay lý thuyết xếp hàng là một lớp bài toán điều khiển hệ thống. Thuật ngữ "phục vụ công cộng" hay "xếp hàng" xuất phát giản đơn từ việc nghiên cứu, thiết kế các hệ thống thoả mãn một loại nhu cầu nào đó. Trong thực tế các hệ thống như vậy có thể gọi chung là các hệ thống phục vụ, mặc dù trong một số trường hợp hệ thống phục vụ công cộng không được mô hình hoá từ các hệ thống phục vụ theo nghĩa thông thường. Trong rất nhiều trường hợp các hệ thống này gắn liền với hiện tượng xếp hàng chờ của các đối tượng cần phục vụ.

Đặc trưng quan trọng trong các hệ thống phục vụ công cộng là sự biến động của các yếu tố cấu thành có tính ngẫu nhiên và đám đông. Thông qua việc nghiên cứu các mô hình hệ một khu vực thoả mãn hầu hết các yêu cầu cấp cứu thì phải thiết kế như thế nào? Liệu có thể xác định số máy kiểm tra cần trang bị bằng năng suất trung bình của một dây chuyền sản xuất chia cho năng suất của mỗi máy kiểm tra sản phẩm mà việc kiểm tra sản phẩm luôn hoàn thành với tỷ lệ cao hay không?..... . Những vấn đề như vậy trong điều kiện thông thường với giả thiết mọi yếu tố cấu thành hệ thống xác định, đều đặn có lẽ không phải là những bài toán phức tạp, nó được giải quyết giản đơn bởi các phép tính số học thông thường nhất.

Với hệ thống phục vụ công cộng chúng ta cũng tiếp cận với một trong những cách mô hình hoá các hiện tượng kinh tế, xã hội có tính cá biệt - đó là mô hình hoá bằng sơ đồ trạng thái. Về phương pháp tiếp cận hệ thống chúng ta làm quen với một cách tiếp cận "hộp trắng", tức là phân tích sự vận động của hệ thống qua cấu trúc bên trong của nó (các trạng thái) và sự vận động của hệ thống đó.

Các mô hình này có nhiều ứng dụng trong thực tế, từ đơn giản đến phức tạp. Trong khuôn khổ cho phép, chúng ta chỉ nghiên cứu một vài dạng cơ bản, tuy nhiên phương pháp nghiên cứu có thể sử dụng cho các hệ thống phức tạp hơn nhiều. Sau đây là một vài thí dụ dẫn đến các bài toán phục vụ công cộng đơn giản và một vài tình huống dễ gặp.

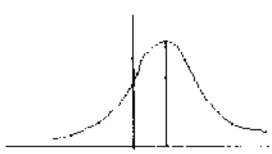
Thí dụ 1: Xét một bến cảng có 4 cầu tàu, ta gọi A là sự kiện có tàu cần vào cảng bốc hàng. Trong đa số các trường hợp, A là biến cố ngẫu nhiên, mỗi tàu cần một thời gian bốc hàng T tại 1 cầu tàu và T cũng là một biến ngẫu nhiên. Như vậy không thể tính toán lưu lượng tàu vào cảng một cách thông thường, phù hợp theo một nghĩa nào đó. Chỉ có thể tính khả năng và các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của cảng một cách trung bình. Bài toán dẫn đến việc thiết kế bao nhiêu cầu tàu để có thể đảm bảo khả năng hàng thông qua cảng với những hạn chế về mặt hiệu quả sử dụng các cầu tàu cũng như các yêu cầu khác có liên quan.

Thí dụ 2: Trên một tuyến đường có một trạm thu phí giao thông, dòng xe chạy trên tuyến này có tính chất ngẫu nhiên; nói cách khác số xe qua trạm trong mỗi đơn vị thời gian là một biến ngẫu nhiên và rõ ràng là thời gian trả tiền của mỗi xe khi qua trạm cũng là ngẫu nhiên. Hai vấn đề tối thiểu được đặt ra là: mức độ thông tuyến và tận dụng công suất của trạm. Bài toán đặt ra là xác định một cấu trúc của trạm hợp lý theo một chỉ tiêu nào đó.

Các thí dụ trên cho thấy tính chất ngẫu nhiên, đám đông của hệ thống loại này. Hãy xét một vài tình huống mà qua đó ta cảm nhận thấy tính ngẫu nhiên trong kết quả.

Một nhân viên làm việc không tích cực: Giả sử một cửa hàng tạp phẩm nhỏ có một quầy thanh toán, trung bình mỗi giờ người ta thấy có 20 khách mua hàng và cần thanh toán. Nhân viên quầy thanh toán cho mỗi khách mất trung bình 2 phút. Kết quả thực tế là rất nhiều lời phàn nàn về việc ùn tắc trong thanh toán (đối với khách hàng thời gian dạo chơi, lựa chọn là có ích và thời gian chờ thanh toán luôn được nâng lên luỹ thừa và thật vô ích). Người quản lý cho rằng tổng thời gian 1 giờ của nhân viên quầy chỉ cần 40 phút trong khi một giờ tự nhiên là 60 phút, như vậy nhân viên làm việc không tích cực, lãng phí thời gian.

Thực tế thì mọi việc không đơn giản như vậy, hãy dùng một mô hình xác suất đơn giản để phân tích hiện tượng này. Nếu ta gọi thời gian kiểm tra và thanh toán cho một khách hàng là X thì X là biến ngẫu nhiên có E(X) =2 (phút). Gọi Y là khoảng thời gian trung bình có một khách hàng cần thanh toán thì Y cũng là biến ngẫu nhiên có E(Y)=3 (phút). Lập biến Z=Y-X , biến này cho biết thời gian rỗi giữa hai lần thanh toán. Tỷ lệ thời gian ùn tắc trước quầy thanh toán là $P(Z < 0) > 0$. Điều đó cho thấy ùn tắc là khách quan, tại sao vậy. Câu trả lời nhận được từ các tính chất của trung bình và phương sai hiệu hai biến ngẫu nhiên độc lập: E(Z)=1 nhưng Var(Z) =Var(Y) + Var(X).



Var(z)=1

Var(z) = 2

Trên đây là hai phân phối của Z với hai phương sai khác nhau, chắc chắn là $P(Z < 0)$ cũng khác nhau. Phải chăng chúng ta muốn nói rằng nhân viên phục vụ hoàn toàn tốt, không chắc như vậy, nhưng chắc chắn là khi Var(Y) lớn thì Var(Z) lớn dù cho rằng Var(X) đủ nhỏ.

Những chuyến bay chậm giờ: Có lẽ nhiều người cho rằng điều khiển tự động thì hết sức chính xác theo nghĩa là chính xác 100%. Xin bạn đừng tin quá như vậy khi chuẩn bị cho một chuyến bay hay đi xe lửa cao tốc ở Châu Âu hiện nay. Với người quan sát các chuyến bay qua một không phận thì càng không nên tin. Nếu bạn muốn chụp ảnh tất cả các chuyến bay qua một không phận mà căn cứ vào lịch bay, hành trình bay nhận được vào đầu ca trực thì hãy cho camera của bạn làm việc 24/24 giờ trong ngày. Bạn sẽ mất không ít quan sát nếu theo lịch bay, bạn phòng ngừa bằng một bộ điều khiển tự động theo cách bật máy trước nửa phút và tắt máy sau nửa phút so với giờ các máy bay vào và ra khỏi khu vực quan sát.

2. Hệ thống phục vụ công cộng và các yếu tố

Sau đây ta nghiên cứu sơ bộ về cấu trúc của một hệ thống phục vụ công cộng với các yếu tố cơ bản của nó.

Có thể mô tả một cách sơ bộ hệ thống như sau:

Yêu cầu	Các kênh phục vụ	dòng phục vụ
***** [*** ....**]	và chế độ PV	*****
hàng chờ		Y/C không thoả mãn

a- Dòng yêu cầu đến hệ thống (dòng yêu cầu)

Dòng các đối tượng hướng đến hệ thống nhằm thoả mãn một loại nhu cầu mà hệ thống phục vụ có khả năng đáp ứng gọi là dòng yêu cầu.

Đặc trưng quan trọng của dòng yêu cầu là qui luật về sự xuất hiện các yêu cầu theo thời gian. Một trong những dòng yêu cầu phổ biến là dòng tuân theo qui luật Poisson (Poát xông) và đặc biệt là dòng tuân theo qui luật Poisson dừng. Trong một số trường hợp khi dòng yêu cầu ngẫu nhiên hình thành do số lớn các tác động ngẫu nhiên ta gọi là dòng yêu cầu phân phối tổng quát (xấp xỉ chuẩn).

b- Kênh phục vụ

Tập hợp một số điều kiện vật chất, con người, thông tin,.... có chức năng thoả mãn một loại yêu cầu nào đó gọi là kênh phục vụ.

Đặc trưng của kênh phục vụ là thời gian phục vụ một yêu cầu hoặc số yêu cầu có thể phục vụ trong một đơn vị thời gian. Thời gian phục vụ 1 yêu cầu (còn gọi là thời gian phục vụ) cũng là một biến ngẫu nhiên, tuân theo một qui luật phân phối xác suất nào đó.

Một trong những qui luật phổ biến là qui luật chỉ số (hay phân phối mũ), với hàm mật độ : $f(t) = \mu e^{-\mu t}$.

c- Dòng phục vụ

Là dòng các đối tượng đã được phục vụ đi ra khỏi hệ thống.

Qui luật phân phối xác suất của dòng phục vụ tuỳ thuộc qui luật phân phối của thời gian phục vụ của các kênh. Nếu thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số thì dòng phục vụ là dòng Poisson dừng và ngược lại.

d- Hàng chờ

Đối với một số hệ thống, tuỳ thuộc chế độ tiếp nhận yêu cầu và tính chất của các yêu cầu, có thể xuất hiện hàng chờ trước các kênh phục vụ, đó là *dòng các yêu cầu đến hệ thống nhưng chưa được phục vụ ngay, phải xếp hàng chờ theo một nguyên tắc nào đó*, ở đây ta chỉ xét hàng chờ đơn giản, không có một sự phân biệt, ưu tiên nào.

e- Dòng các yêu cầu không được phục vụ

Đây là bộ phận yêu cầu đến hệ thống nhưng không được nhận phục vụ vì một lí do nào đó.

f- Chế độ phục vụ

Chế độ phục vụ xác định cách thức làm việc của các kênh và cách thức tiếp nhận các yêu cầu.

Có thể phân chia chế độ phục vụ theo một số cách thức khác nhau, thông thường người ta chia các hệ thống thành các hệ thống không chờ (từ chối) và có chờ; hệ thống phục vụ song song, độc lập hay hợp tác, hệ thống đơn hay hệ thống nối tiếp.

3- Tính chất của một dòng yêu cầu Poisson và Poisson dừng

Để có thể nhận biết một dòng yêu cầu có phân phối Poisson, người ta có thể căn cứ vào các tính chất của nó, đó là:

a - Tính đơn nhất

Một dòng yêu cầu có tính **đơn nhất** nếu trong một khoảng thời gian đủ nhỏ hầu như chắc chắn là không có quá 1 yêu cầu xuất hiện. Như vậy nếu ta kí hiệu $P_k(t,\Delta t)$ là xác suất trong thời gian từ t đến t+Δt có k yêu cầu xuất hiện thì:

$P_0(t,\Delta t) + P_1(t,\Delta t) = 1 - O(\Delta t)$. ($O(\Delta t)$ là một vô cùng bé của Δt).

b- Tính không hậu quả

Một dòng yêu cầu có tính **không hậu quả** nếu xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian t đến t+ Δt không phụ thuộc vào việc trước thời điểm t đã có bao nhiêu yêu cầu xuất hiện. Như vậy biến cố có x yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian t đến t+ Δt và biến cố có x yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian t đến t+ Δt với điều kiện trước đó đã có k yêu cầu xuất hiện độc lập với nhau với mọi k, tức là:

$P_x(t,\Delta t) = P_x(t,\Delta t/k$ yêu cầu đã xuất hiện) với mọi k.

Định lý: *Dòng yêu cầu với hai tính chất không hậu quả và đơn nhất là dòng Poisson, có xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian t đến t+ Δt được tính theo công thức Poisson như sau:*

$$P_x(t,\Delta t) = \frac{a(t,\Delta t)^x e^{-a(t,\Delta t)}}{x!} \qquad x = 0,1,2,3.....$$

trong đó $a(t,\Delta t)$ là số trung bình yêu cầu xuất hiện từ t đến t+Δt.

Chứng minh: Xét dòng biến cố A theo thời gian

Gọi: $P_n(t)$ là xác suất A đã xuất hiện n lần tính đến thời điểm t

$P^k(t, \Delta t)$ là xác suất A xuất hiện k lần từ trong khoảng thời gian (t, t+Δt).

Như vậy xác suất A xuất hiện n lần tính đến t+ Δt là: $P^n(t+\Delta t)$.

Với tính đơn nhất của dòng biến cố ta có thể viết:

$P^n(t+\Delta t)= P_{n-1}(t)P^1 [(t+\Delta t)/(t,n-1)] +P_n(t)\, P^0 [(t+\Delta t)/(t,n)]$. (1)

Trong đó: $P^i [(t+\Delta t)/(t,x)]$ là xác suất A xuất hiện i lần trong khoảng (t, t+Δt) với điều kiện tính đến t, A đã xuất hiện x lần.

Do tính không hậu quả của dòng biến cố ta có: $P^i [(t+\Delta t)/(t,x)]= P^i (t+\Delta t)$

Tức là (1) trở thành:

$P^n(t+\Delta t)= P_{n-1}(t)P^1 (t+\Delta t) +P_n(t)\, P^0(t+\Delta t)$. (2)

Với giả thiết cường độ xuất hiện A là λ(t) ta có:

$P^1(t+\Delta t)= \lambda(t)\Delta t$

$P^0 [(t+\Delta t)= 1- \lambda(t)\Delta t$

Thay vào (2) ta có: $P^n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)\,\lambda(t)\Delta t + P_n(t)\,(1-\lambda(t)\Delta t)$. (3)

Từ (3) ta có:

Với n = 0 $$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -P_0(t)\lambda(t)$$

Khi Δt dần tới 0 ta có: $P_0'(t) = -P_0(t)\,\lambda(t)$ (4)

$$d\ln(P_0(t))/dt = -\lambda(t)$$

$$P_0(t) = e^{\int -\lambda(t)dt}$$

Đặt: $a(t) = \int \lambda(t)dt$, ta có: $P_0(t) = e^{\,a(t)+C}$

Ta thấy tại t = 0, $P_0(0) = 1$ vì vậy hằng số C =0

Cuối cùng ta có: $P_0(t) = e^{-a(t)}$ (5)

Với $n \geq 1$ $$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)\lambda(t) - P_n(t)\lambda(t)$$

Khi Δt dần tới 0 ta có: $P_n'(t) = P_{n-1}(t)\,\lambda(t) - P_n(t)\,\lambda(t)$ (6)

$$P_n'(t) + P_n(t)\,\lambda(t) = P_{n-1}(t)\,\lambda(t)$$

Có thể giải hệ phương trình vi phân (6) với điều kiện chuẩn là:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) = 1.$$

bằng cách thay (5) vào phương trình trong (6) khi n =1 ta có:

$$P_1'(t) + P_1(t)\,\lambda(t) = e^{-a(t)}\lambda(t)$$

Nghiệm phương trình là: $P_1(t) = a(t)\,e^{-a(t)}$ (7)

Từ (5) và (7) ta có thể đưa ra công thức tổng quát:

$$P_k(t) = \frac{[a(t)]^k e^{-a(t)}}{k!} \qquad (8)$$

Dễ dàng chứng minh công thức (8) cho k bất kỳ. Thật vậy: (8) đúng với k = 0,1.

Giả sử (8) đúng với k=n-1 ta sẽ chứng minh (8) đúng với k=n.

Với k = n ta có:

$$P_n(t) = \frac{[a(t)]^n e^{-a(t)}}{n!}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{n[a(t)]^{n-1}\frac{da(t)}{dt}e^{-a(t)} - \frac{da(t)}{dt}a(t)e^{-a(t)}}{n!}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \frac{[a(t)]^{n-1}\frac{da(t)}{dt}e^{-a(t)}}{(n-1)!} - \frac{\frac{da(t)}{dt}[a(t)]^n e^{-a(t)}}{n!}$$

Hay: $P_n'(t) = P_{n-1}(t)\,\lambda(t) - P_n(t)\,\lambda(t)$ (chú ý rằng: $a(t) = \int \lambda(t)dt$) (dpcm).

Khi thay t bằng t + Δt ta có: $P^k(t,\Delta t) = \frac{[a(t,\Delta t)]^k e^{-a(t,\Delta t)}}{k!}$

Với: $a(t,\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \lambda(t)dt$

Hệ quả: *Nếu dòng yêu cầu phân phối Poisson với mật độ $\lambda(t)$ thì thời gian giữa hai lần liên tiếp xuất hiện yêu cầu phân phối chỉ số.*

Thật vậy nếu gọi T là thời gian xuất hiện 1 yêu cầu kể từ t*=0 thì xác suất (T<t) có thể tính theo công thức $P(T< t) = 1 - P^0(t^*, t)$.

Với dòng yêu cầu phân phối Poisson ta có:

$$P^0(t^*,t) = \frac{[a(t)]^0 e^{-a(t)}}{0!} = e^{-a(t)}$$

Vậy: $F(T) = P(T < t) = 1 - e^{-a(t)}$.

Đây chính là hàm phân phối xác suất của qui luật chỉ số.

c- Tính dừng

Dòng yêu cầu có tính dừng nếu như xác suất xuất hiện x yêu cầu trong khoảng thời gian Δt không phụ thuộc vào điểm đặt của khoảng thời gian đó. Tức là: $P_x(t,\Delta t) = P_x(\Delta t)$ với mọi t.

Dòng Poisson có tính chất dừng được gọi là dòng Poisson dừng.

Nói cách khác mật độ dòng yêu cầu không đổi: $a(\Delta t) = \lambda\Delta t$, và ta có:

$$P_x(\Delta t) = \frac{(\lambda\Delta t)^x e^{-\lambda\Delta t}}{x!}$$

trong đó : λ là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong một đơn vị thời gian.

Nếu chọn Δt = 1 ta có công thức của qui luật Poisson quen thuộc:

$$P_x = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,3,....$$

4- Kiểm định giả thiết về phân phối Poisson

a- Tiêu chuẩn khi bình phương

Như trên ta đã biết các tính chất cơ bản để xác định qui luật của các dòng yêu cầu. Tuy nhiên, thực tế hai tính chất nói trên và kể cả tính dừng của dòng biến cố chỉ được xác định qua mô hình thống kê. Nói cách khác là chúng ta không có một dòng Poisson lý thuyết mà hầu như chỉ có các dòng yêu cầu gần Poisson. Với các bài toán thực tế, cần kiểm định sự phù hợp của các giả thiết về phân phối của chúng, ta có thể sử dụng thống kê χ^2. Để kiểm định giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poisson ta thực hiện.

- Chia thời gian thành các đơn vị nhỏ và tiến hành quan sát sự xuất hiện các yêu cầu trong các khoảng thời gian đó. Ta nhận được bộ số liệu bao gồm số yêu cầu xuất hiện trong một đơn vị thời gian: x_i và số khoảng thời gian tương ứng: n_i. Nếu các khoảng thời gian có số yêu cầu tương ứng nhỏ hơn 5 ta ghép các khoảng đó để có $n_i \geq 5$, giá trị đại diện là giá trị trung bình.

- Tính giá trị thống kê

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i' - n_i)^2}{n_i'^2}$$

trong đó : n_i' là giá trị tần số lý thuyết nhận được từ phân phối Poisson với trung bình là $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n}$, k là số nhóm giá trị x_i, n_i là tần số quan sát; n là tổng số quan sát.

Thí dụ: Khi quan sát số khách hàng đến một cửa hàng, người ta thu được số liệu sau:

Số khách	0	1	2	3	4	7
Số khoảng thời gian	21	23	10	4	1	1

Để kiểm tra giả thiết số khách đến cửa hàng phân phối Poisson ta tiến hành các thủ tục sau:

- Tính giá trị quan sát $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i x_i}{n}$ =1,1; k là số nhóm giá trị x_i , n_i là tần số quan sát; n là tổng số quan sát.

- Dùng giá trị này ước lượng giá trị trung bình của phân phối, từ đó tra bảng Poisson P(λ) với các giá trị có tần số thấp đã được ghép lại đủ điều kiện $n_i \geq 5$ và lập bảng.

- Chọn một mức ý nghĩa α; nếu giá trị thống kê $\chi^2 < \chi^2(\alpha,m)$; trong đó m= k-2 thì giả thiết dòng yêu cầu phân phối Poisson không bị bác bỏ.

Với các quan sát trên ta có λ =1,1 và giá trị quan sát của thống kê Khi bình phương là 0,03459, tra bảng ta có giá trị lý thuyết $\chi^2(0,05;4) = 11,0705$.

Vậy giả thiết dòng yêu cầu Poisson không bị bác bỏ. Hay có thể xem là dòng khách đến cửa hàng phân phối Poisson với trung bình λ= 1,1.

Số y/c x_i	**số khoảng thời gian** n_i	**Px**$_i$	**n'**$_i$	$\frac{(n'_i - n_i)^2}{n'^2_i}$
0	21	2,33287	19,9722	0,002648
1	23	0,36616	21,9696	0,00219972
2	10	0,20139	12,0834	0,029728
3	4	0,07384		
4	1	0,02031		
5	0	0,00447	5,9742	0,00002
6	0	0,00082		
7	1	0,00013		
	n=60			0,03459

b- Tiêu chuẩn Kolmogorov- Simirnov

Với các phần mềm thống kê hiện có việc kiểm định này không phức tạp như trước. Chẳng hạn với SPSS ta có thể kiểm định giả thiết về phân phối khá dễ dàng.

Sau đây là kết quả kiểm định phân phối Poisson của dòng yêu cầu trên nhờ SPSS bằng tiêu chuẩn Kolmogorov - Smirnov.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		so yeu cau
N		60
Poisson Parameter [a,b]	Mean	1.1000
Most Extreme Differences	Absolute	.034
	Positive	.034
	Negative	-.017
Kolmogorov-Smirnov Z		.266
Asymp. Sig. (2-tailed)		1.000

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

Kết luận hoàn toàn như kiểm định khi bình phương.

II. TRẠNG THÁI HỆ THỐNG, QUÁ TRÌNH CHUYỂN TRẠNG THÁI

1- Phương pháp phân tích

Khi nghiên cứu một hệ thống phục vụ công cộng, người ta có thể dùng các cách tiếp cận khác nhau, ở đây ta sử dụng phương pháp phân tích, nội dung cụ thể là:

- Thu thập số liệu về các dòng biến cố liên quan đến hệ thống: dòng yêu cầu, dòng phục vụ hoặc thời gian phục vụ của các kênh.

- Xác định qui luật dòng yêu cầu và dòng phục vụ; xác định chế độ phục vụ.

Cần chú ý rằng đối với hệ thống phục vụ đã và đang hoạt động việc thu thập số liệu có thể thực hiện trực tiếp. Số liệu về dòng yêu cầu tương đối đơn giản tuy nhiên trong một số trường hợp cũng cần chú ý đến đặc điểm rất khách quan của các hệ phục vụ, đặc biệt là hiện tượng giờ cao điểm. Đối với dòng phục vụ thì việc thu thập số liệu không trực tiếp cho năng suất kênh vì các kênh luôn có một khoảng thời gian rỗi nhất định. Với đặc điểm này ta phải thu thập ở một kênh ngẫu nhiên hai loại số liệu là thời gian phục vụ 1 yêu cầu và thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ. Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ của kênh sẽ là cơ sở bổ sung thông tin để xác định năng suất kênh thực tế. Năng suất này có thể không giống năng suất thiết kế được thiết lập từ các thông số kỹ thuật.

Thí dụ: Quan sát một trạm tiếp xăng có 4 máy trong hai ngày theo đơn vị giờ người ta có số liệu sau:

Giờ thứ	Số yêu cầu	Dòng phục vụ 1 kênh	Thời gian rỗi 1 kênh
1.00	27.00	9.00	.20
2.00	24.00	7.00	.30
3.00	28.00	8.00	.30
4.00	31.00	9.00	.25
5.00	26.00	9.00	.20
6.00	28.00	7.00	.25
7.00	32.00	9.00	.20
8.00	28.00	7.00	.30
1.00	26.00	6.00	.30
2.00	27.00	8.00	.25
3.00	27.00	7.00	.25
4.00	31.00	9.00	.15
5.00	28.00	8.00	.25
6.00	29.00	8.00	.24
7.00	30.00	9.00	.18
8.00	26.00	7.00	.25

Hãy kiểm tra dòng yêu cầu, thời gian phục vụ, xác định năng suất mỗi máy.

Với SPSS nhờ kiểm định phi tham số (K-S Poisson, trang sau) ta có:

Kết quả kiểm định cho thấy dòng yêu cầu là dòng Poisson với trung bình 28 yêu cầu/giờ còn dòng phục vụ ở mỗi kênh là dòng Poisson với trung bình 7,9375 yêu cầu/giờ.

Tỷ lệ thời gian rỗi trung bình là 24,19%.

Như vậy năng suất kênh là 7,9375/ 0,7581= 10,47 yêu cầu/giờ.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		DONGPV	NSUAT
N		16	16
Poisson Parameter[a,b]	Mean	28 0000	7 9375
Most Extreme Differences	Absolute	.265	.276
	Positive	.195	276
	Negative	-.265	- 259
Kolmogorov-Smirnov Z		1 059	1 103
Asymp. Sig. (2-tailed)		212	176

a Test distribution is Poisson

b Calculated from data

Thông thường chế độ phục vụ được qui định bởi người thiết kế hoặc do đặc điểm của loại hình, yêu cầu cần phục vụ.

- Xác định trạng thái hệ thống, sơ đồ trạng thái và lập hệ phương trình trạng thái.

- Giải hệ phương trình trạng thái; tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống.

- Cải tiến hệ thống theo một chỉ tiêu hiệu quả nào đó.

Việc xác định qui luật các dòng yêu cầu và dòng phục vụ; lập sơ đồ trạng thái là hai nội dung quan trọng hơn cả. Sau đây ta sẽ đề cập đến nội dung thứ hai.

2- Phân loại hệ thống

Theo các tiêu thức khác nhau hệ thống phục vụ công cộng có thể phân loại như sau:

Hệ dừng và không dừng: Thực tế các hệ tồn tại ở trạng thái dừng hay dừng theo chu kỳ. Với các hệ không dừng các phân tích tập trung chủ yếu vào tính chất hội tụ đến hệ dừng và thời gian hệ được xem là dừng có tính thống kê.

Hệ chờ và không chờ (từ chối): Với các hệ chờ người ta có thể chia thành các hệ chờ với các ràng buộc về thời gian, chỗ chờ hay số yêu cầu tối đa có trong hệ thống.

3- Trạng thái hệ thống và quá trình chuyển trạng thái

a- Trạng thái hệ thống

Ta gọi tập hợp một hay một số đặc trưng mà trên cơ sở đó có thể phân biệt sự tồn tại của hệ thống trong những tình trạng khác nhau tại mỗi thời điểm là trạng thái của hệ thống.

Nếu kí hiệu A(t) là một trạng thái của hệ thống thì A(t) là một biến cố ngẫu nhiên. Để có thể phân tích hệ thống phục vụ công cộng, cần xác định tất cả các trạng thái có thể có của hệ thống, tập hợp các trạng thái tại 1 thời điểm t bất kỳ là một *nhóm đầy đủ các biến cố.*

Với những hệ thống phục vụ công cộng Poisson, từ đây về sau ta sẽ kí hiệu các trạng thái của chúng là $X_k(t)$ để chỉ hệ thống ở trạng thái X_k tại thời điểm t.

b- Xác suất trạng thái

Việc hệ thống tồn tại ở một trạng thái cụ thể là một biến cố ngẫu nhiên nên *tương ứng với mỗi trạng thái có một giá trị xác suất gọi là xác suất trạng thái* để chỉ ra khả năng hệ thống ở trạng thái tương ứng. Ta kí hiệu xác suất hệ thống ở trạng thái X_k tại thời điểm t là $P_k(t)$.

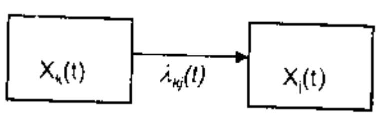
c- Quá trình chuyển trạng thái

Tại mỗi thời điểm t hệ thống tồn tại ở một trạng thái nhất định- chẳng hạn $X_k(t)$, sau một thời gian Δt hệ thống có thể chuyển đến một trạng thái khác $X_j(t+\Delta t)$ nhờ sự tác động của các yếu tố ngẫu nhiên nào đó. Ta gọi xác suất hệ thống chuyển từ $X_k(t)$ đến $X_j(t+\Delta t)$ là xác suất chuyển trạng thái. Trong các mô hình sẽ đề cập sau này ta quan tâm đến sự tác động chuyển trạng thái, thay vì xác suất chuyển trạng thái. Ta kí hiệu *cường độ của dòng biến cố làm cho hệ thống chuyển từ $X_k(t)$ đến $X_j(t+\Delta t)$ là $\lambda_{kj}(t)$.*

4. Sơ đồ trạng thái và hệ phương trình trạng thái

a- Sơ đồ trạng thái

Người ta dùng một sơ đồ mô tả toàn bộ các trạng thái và quá trình chuyển trạng thái của hệ thống. Trong đó mỗi trạng thái được thể hiện bởi một ô vuông với tên trạng thái, chẳng hạn: $X_k(t)$. Để chỉ sự chuyển trạng thái người ta dùng một mũi tên trên đó ghi cường độ của dòng biến cố làm hệ thống chuyển trạng thái theo chiều mũi tên, chẳng hạn:



b- Hệ phương trình trạng thái

Để phân tích một hệ thống phục vụ công cộng cần xác định các trạng thái có thể có và các xác suất trạng thái tương ứng. Theo thời gian, do các tác động của các yếu tố đến quá trình vận động của hệ thống đều có tính ngẫu nhiên, nên việc hệ thống chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác cũng có tính ngẫu nhiên. Để mô tả mối liên hệ về khả năng chuyển trạng thái như vậy, người ta sử dụng hệ phương trình trạng thái, trong đó các xác suất trạng thái và đạo hàm theo thời gian của nó là các biến, còn các tác động làm chuyển trạng thái là các hệ số. Hệ phương trình này cho phép xác định các xác suất trạng thái, làm cơ sở phân tích hệ thống. Nhờ sơ đồ chuyển trạng thái có thể thiết lập hệ phương trình trạng thái theo qui tắc sau:

Qui tắc viết hệ phương trình trạng thái

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của xác suất trạng thái $P_k(t)$ bằng ***tổng của một số số hạng****, số số hạng đó đúng bằng* ***số mũi tên*** *nối trạng thái đó với các trạng thái khác. Mỗi số hạng là tích của* ***xác suất trạng thái*** *mà mũi tên xuất phát và* ***cường độ dòng biến cố*** *ghi theo chiều mũi tên đó. Dấu của số hạng là dấu "-" nếu mũi tên xuất phát từ $X_k(t)$; là dấu "+" nếu mũi tên hướng đến $X_k(t)$.* Tức là:

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = \sum_j \lambda_{jk}(t)P_j(t) - \sum_k \lambda_{kj}(t)P_k(t)$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$.

Có thể chứng minh công thức này như sau:

Tại t bất kỳ với một số gia Δt ta có:

$$P_k(t+\Delta t) = \sum_j P_k(t)(1-\lambda_{kj}(t)\Delta t) + \sum_j P_j(t)\lambda_{jk}(t)\Delta t$$

$$= P_k(t) - \sum_j P_k(t)\lambda_{kj}(t)\Delta t + \sum_j P_j(t)\lambda_{jk}(t)\Delta t$$

Suy ra: $$\frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\sum_j P_k(t)\lambda_{kj}(t) + \sum_j P_j(t)\lambda_{jk}(t)$$

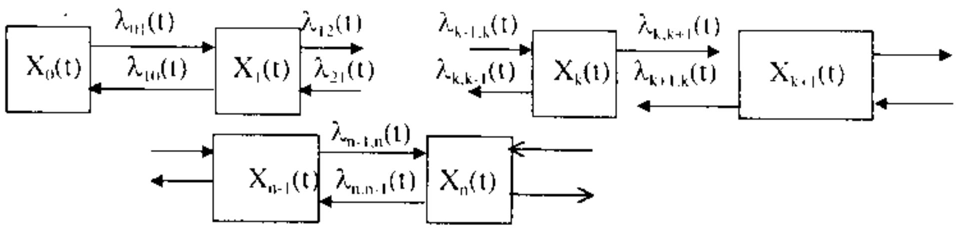
Lấy giới hạn khi $\Delta t \to 0$ ta có kết quả trên.

Điều kiện chuẩn thể hiện tập hợp $X_k(t)$ là một nhóm đầy đủ các biến cố, tức là tại một thời điểm hệ thống phải tồn tại ở một và chỉ một trạng thái nói trên.

Đây là một hệ phương trình vi phân cấp một. Tuy nhiên với hệ thống mà các dòng biến cố tác động đến hệ thống đều là dòng dừng (hệ thống dừng), thì hệ trở thành hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất và việc giải hệ trở nên đơn giản.

5- Quá trình huỷ và sinh - lời giải của hệ phương trình trạng thái

a- Sơ đồ trạng thái: Trong các hệ thống phục vụ công cộng sẽ xét sau đây ta gặp các sơ đồ chuyển trạng thái có dạng sau:



trong đó mỗi trạng thái chỉ có thể chuyển qua lại với các trạng thái kế nó (trừ trạng thái đầu tiên và cuối cùng nếu có).

Ta gọi các quá trình như vậy là **quá trình huỷ và sinh.** Quá trình này cho phép thiết lập và giải hệ phương trình trạng thái khá đơn giản.

b- Hệ phương trình trạng thái

$$P'_0(t) = -\lambda_{01}(t)P_0(t) + \lambda_{10}(t)P_1(t)$$

$$P'_1(t) = -\lambda_{10}(t)P_1(t) - \lambda_{12}(t)P_1(t) + \lambda_{01}(t)P_0(t) + \lambda_{21}(t)P_2(t)$$

....

$$P'_k(t) = -\lambda_{k,k-1}(t)P_k(t) - \lambda_{k,k+1}(t)P_k(t) + \lambda_{k-1,k}(t)P_{k-1}(t) + \lambda_{k+1,k}(t)P_{k+1}(t)$$

....

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{\forall k} P_k(t) = 1$.

Trong trường hợp hệ dừng, các đạo hàm theo thời gian đều bằng không, ta có hệ phương trình sau:

$$0 = -\lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1$$

$$0 = -\lambda_{10}P_1 - \lambda_{12}P_1 + \lambda_{01}P_0 + \lambda_{21}P_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$0 = -\lambda_{k,k-1}P_k - \lambda_{k,k+1}P_k + \lambda_{k-1,k}P_{k-1} + \lambda_{k+1,k}P_{k+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{\forall k} P_k = 1$.

c- Lời giải hệ (1)

Nếu đặt $U_i = -\lambda_{i,i+1}P_i + \lambda_{i+1,i}P_{i+1}$ thì hệ (1) trở thành:

$U_0 = 0$

$U_i - U_{i-1} = 0$ (i=1,2.....)

Nghiệm của hệ là U_i=0.

Từ đó ta có thể đưa ra công thức tính các xác suất P_k theo P_0 như sau:

$$P_1 = (\lambda_{01}/\lambda_{10})P_0$$

$$P_{k+1} = (\lambda_{k,k+1}/\lambda_{k+1,k})P_k.$$

Hay:
$$P_{k+1} = \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_{i,i+1}}{\lambda_{i+1,i}} P_0 .$$

Công thức này sẽ được sử dụng làm giảm nhẹ việc giải hệ phương trình trạng thái, của các hệ thống phục vụ công cộng, trình bày trong chương này.

Trong đó: $\lambda_{k,k+1} = \lambda$ và $\lambda_{k+1,k} = (k+1)\mu$.

Nếu đặt $\alpha = \lambda/\mu$ thì :
$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \qquad (2)$$

III. MỘT SỐ HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG POISSON DỪNG

Trong giới hạn của các công cụ toán học đơn giản chúng ta xem xét một số hệ thống phục vụ công cộng cổ điển và các biến dạng của chúng. Hầu hết các hệ thống được nghiên cứu là các hệ Poission và Poission dừng. Tuy vậy cách thức tiếp cận hoàn toàn có thể sử dụng cho các hệ thống khác, về mặt kỹ thuật khó khăn tập trung ở thuật giải các hệ phương trình trạng thái.

1- Hệ thống phục vụ công cộng từ chối cổ điển (Hệ thống Eclang)

Một trong những hệ thống phục vụ công cộng đơn giản nhất, được mô hình hoá đầu tiên là **hệ thống từ chối cổ điển**. Hệ thống này mang tên người đề xuất bài toán tương ứng: **hệ thống Eclang**, nó bắt đầu từ bài toán phân tích một trạm điện thoại thông thường, với một vài giả thiết đơn giản. Nhưng cũng chính từ bài toán này, từ hệ thống này người ta đã vận dụng phân tích những hệ thống rất lớn, chẳng hạn hệ thống phòng thủ, hệ thống kiểm dịch, hệ thống săn tin,.... Sau đây ta chỉ nghiên cứu hệ thống Eclang đơn giản nhất.

a- Mô tả hệ thống

Hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo qui luật chỉ số. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thoả mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh đều bận thì phải ra khỏi hệ thống. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b- Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái của hệ thống

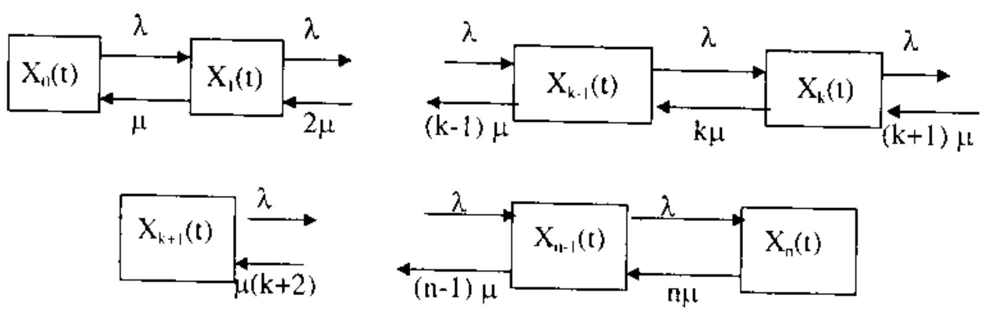
+ Trạng thái

Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t (k=0,1,2,......,n).

Chú ý rằng với chế độ phục vụ của hệ thống Eclang số kênh bận cũng chính là số yêu cầu đang được phục vụ tại thời điểm t.

+ Sơ đồ chuyển trạng thái



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poisson dừng như sau:

- Nhờ *tính đơn nhất* của dòng yêu cầu mà khi hệ thống ở trạng thái $X_k(t)$ nó chỉ có thể chuyển đến trạng thái $X_{k+1}(t)$, không thể chuyển thẳng đến các trạng thái $X_{k+i}(t)$ với $i > 1$. Cũng tương tự do tính đơn nhất của dòng phục vụ của các kênh hệ thống chỉ có thể chuyển đến $X_{k-1}(t)$ mà không thể chuyển thẳng đến các trạng thái $X_{k-i}(t)$ với $i > 1$.

- Nhờ *tính không hậu quả* của các dòng biến cố nêu trên mà cường độ các dòng biến cố không phụ thuộc vào trạng thái của hệ thống khi nó tác động đến.

- Với *tính chất dừng* ta có mật độ dòng yêu cầu không đổi, cũng như vậy mật độ dòng phục vụ chỉ phụ thuộc vào số kênh đang phục vụ.

Những phân tích như trên cũng ứng dụng cho việc xác lập sơ đồ chuyển trạng thái của các hệ thống tương tự.

c- Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái

$$
\begin{aligned}
&0 = -\lambda P_0 + \mu P_1 \\
&0 = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&0 = -\lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&0 = -n\mu P_n + \lambda P_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$.

Với : $U_i = -\lambda_{i,i+1}P_i + \lambda_{i+1,i}P_{i+1} = -\lambda P_i + (i+1)\mu P_{i+1} = 0$, với mọi i (theo (2))

Ta có: $P_{i+1} = \dfrac{\lambda}{\mu(i+1)}P_i$, đặt $\alpha = \lambda/\mu$ ta có: $P_{i+1} = \dfrac{\alpha}{(i+1)}P_i$

Hay: $P_i = \dfrac{\alpha}{i}P_{i-1} = \dfrac{\alpha}{i}\dfrac{\alpha}{i-1}\dfrac{\alpha}{i-2}\dots\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\alpha}{1}P_0$

$$P_i = \frac{\alpha^i}{i!}P_0$$

Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = 1$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}$$

Bằng cách nhân cả tử số và mẫu số trong công thức trên với $e^{-\alpha}$ ta có:

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}\alpha^0 / 0!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}}$$

ký hiệu: $P(\alpha,k) = e^{-\alpha}\alpha^k/k!$ - là xác suất một biến ngẫu nhiên phân phối Poisson nhận giá trị k.

$R(\alpha,k) = \sum_{i=0}^{k} P(\alpha,i)$ là xác suất tích luỹ tương ứng ta có:

$$P_0 = \frac{e^{-\alpha}\alpha^0 / 0!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}} = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n)}$$

từ đó : $$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \frac{P(\alpha,k)}{R(\alpha,n)} \qquad (4)$$

Các giá trị xác suất nói trên có thể tính dễ dàng khi các tham số hữu tỷ và n đủ nhỏ. Trong trường hợp tổng quát ta có thể sử dụng bảng giá trị phân phối Poisson (Bảng: *giá trị phân phối Poisson*).

d- Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống.

Đối với hệ thống này các chỉ tiêu cơ bản đánh giá hệ thống là:

1. Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: P_r

$$P_r = P_0 = \frac{\alpha^0}{0!} P_0 = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,\ n)}.$$

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ thời gian hệ thống rỗi hoàn toàn, thời gian rỗi hoàn toàn tồn tại ở mọi hệ thống Poisson nói riêng và các hệ ngẫu nhiên nói chung, dù ta có giảm đến tối thiểu số kênh phục vụ hay tăng tối đa cường độ dòng yêu cầu.

2. Xác suất hệ thống có n kênh bận (hay xác suất yêu cầu đến hệ thống bị từ chối P_{tc}):

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)}.$$

Đây cũng là hiệu suất lý thuyết tối đa của hệ thống. Như vậy trong trường hợp hệ ngẫu nhiên không có khả năng thiết kế một hệ thống khai thác toàn bộ công suất kỹ thuật của các kênh.

3. Xác suất phục vụ (xác suất một yêu cầu đến hệ thống được nhận phục vụ) là:

$$P_{pv} = 1 - P_{tc} = 1 - P_n.$$

Đó cũng là tỷ lệ các đối tượng được hệ thống tiếp nhận và phục vụ, đối với hệ thống phục vụ công cộng, đây là một trong số ít các chỉ tiêu quan trọng nhất, với cùng một tiềm năng kỹ thuật như nhau có thể chọn chỉ tiêu này làm mục tiêu thiết kế hệ thống.

Sau đây là một số chỉ tiêu tính toán ở mức trung bình, các công thức dựa trên cơ sở tính kỳ vọng toán học của các biến ngẫu nhiên.

4. Số kênh bận trung bình (hay số yêu cầu trung bình có trong hệ thống):

$$\overline{N_b} = \sum_{k=0}^{n} kP_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} P_0$$

$$= \alpha(1 - P_n) = \alpha\left[1 - \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)}\right] = \alpha.P_{pv}$$

5 - Số kênh rỗi trung bình: $\overline{N_r} = n - \overline{N_b}$

6 - Hệ số bận (rỗi): $H_b = \dfrac{\overline{N_b}}{n}$

$$H_r = 1 - H_b.$$

7 - Hiệu quả chung: F

Tuỳ thuộc cách đánh giá lợi ích và thiệt hại trong quá trình phục vụ và việc tận dụng công suất hệ thống cũng như các loại lợi ích khác người ta có thể lập một chỉ tiêu tổng hợp đánh giá hiệu quả chung của hệ thống. Chẳng hạn:

Việc phục vụ 1 yêu cầu mang lại 1 lợi ích là c_{pv}; mỗi yêu cầu bị từ chối gây thiệt hại là c_{tc}; mỗi kênh rỗi gây lãng phí c_{kr}; thì trong 1 đơn vị thời gian có thể tính được chỉ tiêu hiệu quả chung là:

$$F = \lambda P_{pv}c_{pv} - \overline{N_r}\, c_{kr} - \lambda P_n c_{tc}.$$

Trên cơ sở các chỉ tiêu đó ta có thể chọn một hay một vài chỉ tiêu để tối ưu hoá hệ thống.

e- Phân tích và cải tiến hệ thống

Trong thực tế ngoài việc đánh giá hệ thống phục vụ công cộng bằng một số chỉ tiêu, xuất phát từ các giá trị xác suất cơ bản như giá trị các biến nội sinh của mô hình, người ta còn quan tâm đến sự biến động của các chỉ tiêu đó khi các tham số của hệ thống (với tư cách các biến ngoại sinh) thay đổi. Trên cơ sở phân tích cụ thể các chỉ tiêu này người ta có thể cải tiến hệ thống theo một hay một số chỉ tiêu chủ yếu. Sau đây là một số phân tích cụ thể và một vài hướng cải tiến hệ thống.

1-Trước tiên ta xem xét vấn đề hiệu suất lý thuyết của một hệ thống phục vụ công cộng kiểu Eclăng phụ thuộc vào n và α như thế nào: Hiệu suất lý thuyết được xem là công suất phục vụ tối đa của hệ thống, chỉ tiêu này được tính theo theo công thức $P_n = \dfrac{\alpha^n}{n!} P_0 = \dfrac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)}$. Như vậy hiệu suất lý thuyết là không đổi nếu số kênh và hệ số đảm nhận yêu cầu của mỗi kênh không đổi.

Xét chiều biến thiên của P_n theo n:

$$\text{Ta có: } \frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}{\dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{\alpha^k}{k!}} = \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{\alpha^k}{k!}}{\dfrac{\alpha}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}} = \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \dfrac{\alpha^k}{k!} \dfrac{n+1}{\alpha}}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{k!}}$$

Tử số mà mẫu số của phân thức trên là tổng các số dương. Theo luỹ thừa giảm dần của α ta thấy mỗi số hạng trên tử số đều tương ứng lớn hơn hoặc bằng số hạng ở mẫu số. Ngoài ra số hạng bậc (-1) của α là $1/\alpha > 0$. Vậy phân thức trên lớn hơn 1 với mọi n, hay khi n tăng thì P_n giảm.

Xét chiều biến thiên của P_n theo α với ($\alpha > 0$)

Đặt $\alpha' = h\alpha$ (với $h > 1$ thì $\alpha' > \alpha$) ta có:

$$P_n(\alpha') = \frac{\dfrac{h^n \alpha^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k h^k}{k!}}$$

2. Xác suất hệ thống có n kênh bận (hay xác suất yêu cầu đến hệ thống bị từ chối P_{tc}):

$$P_n = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)}.$$

Đây cũng là hiệu suất lý thuyết tối đa của hệ thống. Như vậy trong trường hợp hệ ngẫu nhiên không có khả năng thiết kế một hệ thống khai thác toàn bộ công suất kỹ thuật của các kênh.

3. Xác suất phục vụ (xác suất một yêu cầu đến hệ thống được nhận phục vụ) là:

$$P_{pv} = 1 - P_{tc} = 1 - P_n.$$

Đó cũng là tỷ lệ các đối tượng được hệ thống tiếp nhận và phục vụ, đối với hệ thống phục vụ công cộng, đây là một trong số ít các chỉ tiêu quan trọng nhất, với cùng một tiềm năng kỹ thuật như nhau có thể chọn chỉ tiêu này làm mục tiêu thiết kế hệ thống.

Sau đây là một số chỉ tiêu tính toán ở mức trung bình, các công thức dựa trên cơ sở tính kỳ vọng toán học của các biến ngẫu nhiên.

4. Số kênh bận trung bình (hay số yêu cầu trung bình có trong hệ thống):

$$\overline{N_b} = \sum_{k=o}^{n} kP_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} P_0$$

$$= \alpha(1 - P_n) = \alpha[1 - \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)}] = \alpha.P_{pv}$$

5 - Số kênh rỗi trung bình: $\overline{N_r} = n - \overline{N_b}$

6 - Hệ số bận (rỗi): $H_b = \frac{\overline{N_b}}{n}$

$$H_r = 1 - H_b.$$

7 - Hiệu quả chung: F

Tuỳ thuộc cách đánh giá lợi ích và thiệt hại trong quá trình phục vụ và việc tận dụng công suất hệ thống cũng như các loại lợi ích khác người ta có thể lập một chỉ tiêu tổng hợp đánh giá hiệu quả chung của hệ thống. Chẳng hạn:

Việc phục vụ 1 yêu cầu mang lại 1 lợi ích là c_{pv}; mỗi yêu cầu bị từ chối gây thiệt hại là c_{tc}; mỗi kênh rỗi gây lãng phí c_{kr}; thì trong 1 đơn vị thời gian có thể tính được chỉ tiêu hiệu quả chung là:

với n>0 và $k \le n$, ta có $h^n > h^k$.

$$\text{Vậy:}\quad P_n(\alpha') = \frac{\dfrac{h^n\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k h^k}{k!}} \ge \frac{\dfrac{h^n\alpha^n}{n!}}{h^n\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}} = \frac{\dfrac{\alpha^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!}} = P_n(\alpha)$$

Vậy khi α tăng, $P(\alpha,n)$ tăng, tức là hiệu suất lý thuyết tăng.

Như vậy trong điều kiện nhu cầu ổn định, không có cạnh tranh (λ không đổi) thì giảm số kênh hay giảm năng suất kênh sẽ tận dụng được công suất thiết bị. Kết luận này sẽ không có ý nghĩa khi hệ thống phục vụ chỉ tồn tại trong điều kiện tiện lợi tối thiểu đối với các yêu cầu.

2- Vấn đề thu hút nhu cầu và chất lượng phục vụ: Rõ ràng là độ thu hút nhu cầu được đánh giá qua khả năng phục vụ của hệ thống (ngoài các chỉ số như giá cả, thời gian phục vụ...). Chỉ tiêu tỷ lệ yêu cầu đến hệ thống được phục vụ có thể xem là thước đo chỉ số này. Ta có $P_{pv}=1 - P_n$. Trên quan điểm thu hút yêu cầu, hành vi của hệ thống phục vụ rõ ràng là ngược chiều với việc tăng hiệu suất của hệ thống. Có thể kết hợp hai chỉ tiêu này bằng cách cho mỗi chỉ tiêu 1 trọng số (đánh giá lợi ích) hoặc đặt trước một chỉ tiêu và tìm cách hướng chỉ tiêu thứ hai có lợi nhất cho cơ sở phục vụ.

Hàm F nêu trên thực chất là một trong hai cách làm như vậy: Ta có thể biến đổi chút ít hàm F như sau:

$$F = \lambda P_{pv}c_{pv} - \overline{N_r}\, c_{kr} - \lambda P_n c_{tc} = \lambda P_{pv}c_{pv} - (n-\alpha P_{pv})c_{kr} - \lambda(1-P_{pv})c_{tc}.$$

$$= \lambda P_{pv}c_{pv} - nc_{kr} + \alpha P_{pv}\, c_{kr} - \lambda c_{tc} + \lambda P_{pv}c_{tc}$$

$$= P_{pv}(\lambda c_{pv} + \lambda c_{tc} + \alpha\, c_{kr}) - nc_{kr} - \lambda c_{tc}.$$

Với một hệ thống phục vụ có thể xem λ là cho trước (tham số) vấn đề còn lại là năng suất kênh và số kênh (biến ngoại sinh) hoặc ngược lại số kênh và năng suất kênh cho trước (tham số) và λ thay đổi (biến ngoại sinh) sẽ làm thay đổi chỉ tiêu hiệu quả này. Bằng các công cụ đạo hàm và vi phân chúng ta có thể khảo sát sự thay đổi của hiệu quả F khi có sự thay đổi của các biến ngoại sinh trong mỗi trường hợp.

f- Thí dụ

Thí dụ 1: Bộ phận kiểm tra sản phẩm của một cơ sở sản xuất có 3 máy làm việc tự động, năng suất các máy đều là 6 sản phẩm một phút. Mỗi sản phẩm ra khỏi dây chuyền đến bộ phận kiểm tra nếu gặp lúc có máy rỗi sẽ được kiểm tra tại một trong các máy rỗi, ngược lại sản phẩm nhập kho không qua kiểm tra. Dòng sản phẩm ra khỏi dây chuyền là dòng Poisson dừng mật độ trung bình 12 sản phẩm một phút. Thời gian kiểm tra một sản phẩm phân phối theo quy luật chỉ số.

a- Tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của bộ phận kiểm tra.

b- Nếu muốn tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra không nhỏ hơn 96% thì cần có tối thiểu bao nhiêu máy như vậy.

c*- Nếu 3 máy đặt kế tiếp nhau như 3 hệ thống từ chối cổ điển nối tiếp thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ tăng hay giảm (bài tập cho sinh viên).

Giải: Đây là một hệ thống phục vụ công cộng Eclang với các tham số:

Số kênh n = 3

Năng suất μ = 6

Dòng vào mật độ λ = 12

α = 2

a- Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

$P_0 =$ 0,157895

$P_{tc} =$ 0,210526

$\overline{N}_b =$ 1,578947

$H_b =$ 0,526316

b- Ta nhận thấy $P_{tc} > 0{,}04$ như vậy cần tăng số kênh sao cho $P_{tc} < 0{,}04$ thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ không nhỏ hơn 96%. Bảng sau là các giá trị P_{tc} tương ứng với số kênh n:

n	3	4	5
Ptc	0.210526	0.095238	0.036697

Vậy n =5 tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra không nhỏ hơn 96%.

Thí dụ 2: Để thiết lập một trạm xử lý tin nóng người ta có thể chọn một trong hai phương án:

-Phương án 1: lắp đặt 10 máy, mỗi máy trung bình 1 giờ xử lý được 4 bản tin.

-Phương án 2: lắp đặt 8 máy, mỗi máy trung bình 1 giờ xử lý được 5 bản tin.

Trạm làm việc theo chế độ của hệ thống Eclăng, dòng các bản tin cần xử lý là dòng Poisson dừng có trung bình 30 bản tin/giờ. Hãy chọn phương án có khả năng xử lý tin cao hơn.

Hướng dẫn giải:

Gọi H_1 là hệ thống theo phương án 1 và H_2 là hệ thống theo phương án 2. Đây là hai hệ thống phục vụ công cộng từ chối cổ điển, với các công thức đã tính ở trên, ta tính các xác suất phục vụ của từng hệ thống:

Với H_1 ta có $P_{pv}(1)$=0,9005.

Với H_2 ta có $P_{pv}(2)$= 0,8701.

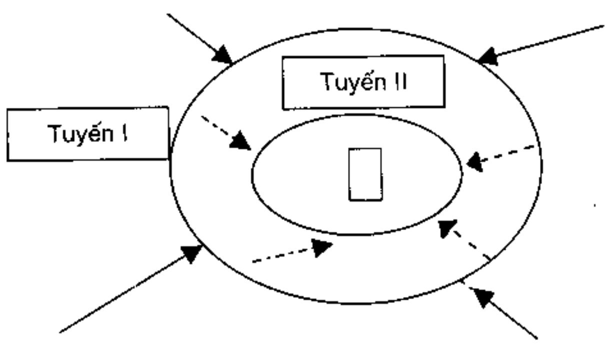
Vậy chọn phương án thứ nhất.

Bài toán này sẽ được xét dưới dạng tổng quát trong phần sau của mục này.

2- Hệ thống Eclang nối tiếp

Trong bài này ta sẽ xem xét một cách thiết kế hệ thống thường được mô tả như một hệ thống phòng thủ. Trên cơ sở phân tích, thiết kế hệ thống chúng ta sẽ đánh giá hiệu quả của các thiết kế qua một chỉ tiêu thông dụng và có ý nghĩa thực tế.

Giả sử một hệ thống phòng thủ 2 tuyến được mô tả như sau:



Để đơn giản cho quá trình tính toán ta giả sử mỗi tuyến có một hệ thống phòng thủ với khả năng tiêu diệt đối phương tương ứng thể hiện như năng suất của các kênh: μ_1 và μ_2. Đối phương có lực lượng đột nhập trung bình λ đơn vị trong một đơn vị thời gian. Giả sử các dòng biến cố tương ứng với lực lượng đột nhập cũng như lực lượng đột nhập bị tiêu diệt đều là các dòng Poisson dừng.

1- Hãy xác định tỷ lệ đơn vị có thể đột nhập qua cả hai tuyến phòng thủ.

2- Nếu μ_1 khác μ_2 nên bố trí các tuyến phòng thủ như thế nào thì hiệu quả hơn (tỷ lệ đơn vị đột nhập qua cả hai tuyến thấp hơn).

Ta có thể mô tả hệ thống trên với các yếu tố như sau:

Xét một hệ thống phục vụ công cộng hai kênh nối tiếp, trong đó dòng yêu cầu đến hệ thống thứ nhất là dòng các đơn vị đột nhập của đối phương với mật độ $\lambda_1 = \lambda$; năng suất phục vụ của kênh μ_1. Hệ thống thứ hai là hệ một kênh với năng suất μ_2 và dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng các yêu cầu bị từ chối (chưa bị tiêu diệt) của hệ thống thứ nhất λ_2.

1- Tỷ lệ đơn vị đột nhập qua cả hai tuyến chính là xác suất một yêu cầu bị từ chối ở cả hai hệ thống nối tiếp nói trên.

Ta có tỷ lệ yêu cầu bị từ chối ở hệ thống thứ nhất là:

$$P_{tc}(1) = \frac{\alpha}{1!} P_0(1) = \frac{P(\alpha,1)}{R(\alpha,1)} \qquad (\alpha = \frac{\lambda_1}{\mu_1})$$

Hay đơn giản hơn là:
$$P_{tc}(1) = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}} = \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1}$$

Ta có dòng yêu cầu đến hệ thống thứ 2 có mật độ $\lambda_2 = P_{tc}(1)\,\lambda_1$.

Hay:
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 + \lambda_1}$$

Tương tự hệ thống 1, với hệ thống 2 xác suất từ chối được tính theo công thức sau:

$$P_{tc}(2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2}$$

Số yêu cầu bị từ chối là:

$$P_{tc}(2)\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2}\lambda_2$$

Tỷ lệ yêu cầu bị từ chối là:

$$P_{tc}(1{,}2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2 + \lambda_2}\lambda_2 \frac{1}{\lambda_1}.$$

Thay
$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 + \lambda_1}$$

Ta có: $$P_{tc}(1,2) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{(\mu_2+\lambda_2)(\lambda_1+\mu_1)}$$

Bằng một vài phép rút gọn ta có:

$$P_{tc}(1,2) = \frac{\lambda^3}{(\lambda+\mu_1)^2\mu_2+\lambda^2(\mu_1+\lambda)}$$

đặt $\mu_1 = a\mu_2$ với $a>0$ ta có:

$$P_{tc}(1,2) = \frac{\lambda^3}{(\lambda+a\mu_2)^2\mu_2+\lambda^2(a\mu_2+\lambda)}$$

$P_{tc}(1,2)$ là hàm giảm theo a, tức là khi $a>1$ ta có $P_{tc}(1,2)$ nhỏ hơn khi $a<1$. Điều đó tương đương với $\mu_1 > \mu_2$.

Vậy cần đặt hệ thống có công suất lớn trước và hệ thống có công suất nhỏ sau.

3- Hệ thống từ chối với việc phân chia năng suất kênh

Trong thiết kế hệ thống, đặc biệt là hệ thống mới người ta luôn phải lựa chọn các thiết bị phục vụ. Sau đây ta xét một số trường hợp thường gặp trong thiết kế hệ thống.

a- Hệ thống có tổng công suất không đổi và các kênh năng suất như nhau

+ *Tình huống:*

Giả sử cần lựa chọn cho một hệ kiểu Eclang theo một trong hai cách:

Hệ 1- Chọn hệ n kênh, năng suất mỗi kênh là μ.

Hệ 2- Chọn hệ $s = n/m$ kênh, năng suất mỗi kênh là $m\mu$.

Về mặt tiềm năng hai hệ này có công suất tối đa như nhau. Giả sử dòng yêu cầu là dòng Poisson dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số.

Lựa chọn chỉ tiêu so sánh là tối đa tỷ lệ yêu cầu được phục vụ.

+ *Phân tích và lời giải:*

Với hệ 1 ta có: $\alpha = \lambda/\mu$

$$P_{tc}(1) = \frac{\alpha^n/n!}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}},$$

Với hệ 2 ta có: $\alpha^* = \lambda/m\mu$

$$P_{tc}(2) = \frac{\alpha^{*s}/s!}{\sum_{k=0}^{s} \frac{\alpha^{*k}}{k!}},$$

Ta có:

$$\frac{1}{P_{tc}(1)} = \frac{n!}{\alpha^n} + \frac{n(n-1)\ldots 2}{\alpha^{n-1}} + \frac{n(n-1)\ldots 3}{\alpha^{n-2}} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{\alpha^{n-k}} + \ldots + \frac{n}{\alpha} + 1$$

Và:

$$\frac{1}{P_{tc}(2)} = \frac{\frac{n}{m}!}{(\frac{\alpha}{m})^n} + \frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)\ldots 2}{(\frac{\alpha}{m})^{n-1}} + \frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)\ldots 3}{(\frac{\alpha}{m})^{n-2}} + \ldots + \frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)\ldots(k+1)}{(\frac{\alpha}{m})^{n-k}} + \ldots + \frac{\frac{n}{m}}{(\frac{\alpha}{m})} + 1$$

với $m \geq 1$ ta thấy:

$$\frac{m^{n-k}\frac{n}{m}\frac{n-m}{m}\frac{n-2m}{m}\ldots(k+1)}{\alpha^{n-k}} \leq \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{\alpha^{n-k}}$$

So sánh các số hạng có cùng bậc theo α ta thấy số hạng trong biểu thức trên không nhỏ hơn số hạng tương ứng trong biểu thức dưới, trong khi đó biểu thức trên có số số hạng lớn hơn. Vậy $P_{tc}(2) > P_{tc}(1)$ nếu $m > 1$.

Kết luận nhận được từ tình huống này là: Trong hai hệ có tổng công suất như nhau, hệ có số kênh lớn hơn có xác suất từ chối yêu cầu nhỏ hơn.

Tuy nhiên, trong thực tế khi phân chia tổng công suất $n\mu$ thành s bộ phận có năng suất mỗi bộ phận là $m\mu$ ($m=n/s$) ta luôn làm phát sinh các chi phí khác đối với hệ thống. Nếu lấy chỉ tiêu tỷ lệ phục vụ yêu cầu đo hiệu quả phục vụ khi phân chia như vậy thì cần tính đến chi phí phát sinh nói trên. Mô hình tối ưu trong trường hợp này là:

Tìm m sao cho $\mathrm{Min}F(m) = C(P_{tc}(m)) + C(m)$

Trong đó $C(P_{tc}(m))$ là thiệt hại do từ chối một yêu cầu

$C(m)$ là chi phí phát sinh khi phân chia tổng công suất hệ thống thành m bộ phận bằng nhau, thông thường ta đòi hỏi $C'(m) > 0$.

Dưới đây là một thí dụ cho tình huống trên với các hàm $C(tc)$ và $C(m)$ cụ thể

Giả sử ta có thể thiết kế một hệ thống có tổng công suất là 20 yêu cầu/1 đơn vị thời gian. Có thể lựa chọn các loại công cụ phục vụ có năng suất khác nhau như thế nào nếu các loại chi phí như sau:

$$C(tc) = 12 + 20M(tc)$$

$$C(m) = 2m + 0,04m^2$$

với $M(tc)=P_{tc}\lambda$ là số yêu cầu bị từ chối trong một đơn vị thời gian.

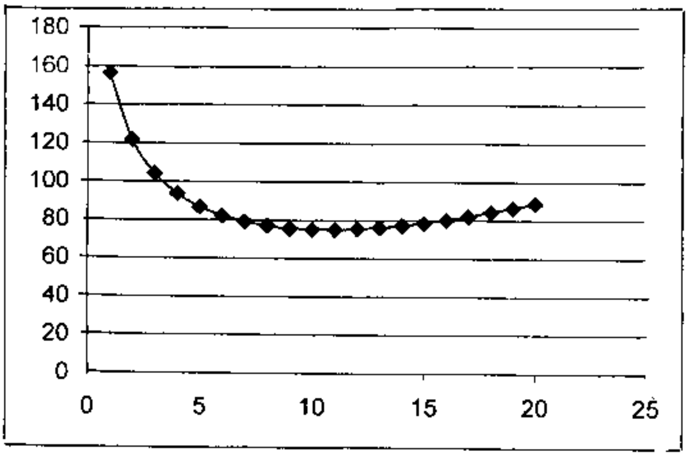
Có thể lựa chọn số công cụ, loại công cụ phục vụ trên cơ sở nhận xét rằng hàm tổng chi phí là một hàm lồi và nhờ tính chất này mà xác định cực trị địa phương và cũng là cực trị toàn bộ.

Với bảng tính excel ta có thể tiến hành tính toán dãy các giá trị của hàm chi phí khi số kênh tăng dần trong bảng dưới đây:

Tổng công suất:		Dòng vào	C(tc)	C(m)
			12+20/P(tc)	2m+0,04m^2
20		16	12	2
			20	0.04
Số kênh	Năng suất	Alpha	P(tc)	F
1	20	0.8	0.444444	156.2622
2	10	1.6	0.329897	121.727
3	6.666667	2.4	0.268406	104.25
4	5	3.2	0.228145	93.64638
5	4	4	0.199067	86.7014
6	3.333333	4.8	0.17678	82.00948
7	2.857143	5.6	0.158998	78.83936
8	2.5	6.4	0.144394	76.76604
9	2.222222	7.2	0.132133	75.52262
10	2	8	0.121661	74.93154
11	1.818182	8.8	0.112592	74.86932
12	1.666667	9.6	0.104647	75.24696
13	1.538462	10.4	0.09762	75.99844

Với kết quả này, chọn phương án chia thành 11 bộ phận có năng suất như nhau.

Đồ thị Tổng chi phí theo số kênh



b- Hệ thống nối tiếp với việc phân chia công suất cho hai bộ phận

Chúng ta đã xem xét hệ thống phòng thủ hai tuyến với năng suất hai kênh khác nhau. Trong phần này chúng ta nghiên cứu việc phân chia công suất như một bài toán động, tổng quát của bài toán đã nêu.

+ *Tình huống:*

Giả sử tổng công suất của hệ thống là nμ (mỗi công cụ phục vụ có năng suất μ). Có thể phân chia n công cụ thành hai tuyến với số lượng khác nhau và hai tuyến này được ghép nối tiếp như một hệ phòng thủ. Hãy xác định cách phân chia sao cho:

- Tỷ lệ yêu cầu bị từ chối nhỏ nhất.

- Tổn thất do yêu cầu bị từ chối và lãng phí do kênh rỗi nhỏ nhất.

+ *Phân tích và lời giải:*

- Tỷ lệ yêu cầu bị từ chối nhỏ nhất:

Gọi mật độ dòng yêu cầu là λ; n_1 là số kênh của hệ 1 và n_2 là số kênh của hệ 2 ($n_1 + n_2 = n$); μ là năng suất của mỗi kênh.

Xác suất từ chối của hệ 1 là: $P_{tc}(1) = \dfrac{\alpha^{n_1}/n_1!}{\sum_{k=0}^{n_1}\dfrac{\alpha^k}{k!}}$

Dòng yêu cầu đến hệ thống 2 là $\lambda P_{tc}(1)$

Xác suất từ chối của hệ 2 là:

$$P_{tc}(2) = \frac{(\alpha P_{tc}(1))^{n_2} / n_2!}{\sum_{k=0}^{n_2} \frac{(\alpha P_{tc}(1))^k}{k!}}$$

Xác suất yêu cầu bị từ chối là: $P_{tc} = P_{tc}(1)P_{tc}(2)$

$$= \frac{\alpha^{n_1} / n_1!}{\sum_{k=0}^{n_1} \frac{\alpha^k}{k!}} \cdot \frac{(\alpha P_{tc}(1))^{n_2} / n_2!}{\sum_{k=0}^{n_2} \frac{(\alpha P_{tc}(1))^k}{k!}}$$

Với mỗi $n_1 > 0$ giá trị biểu thức trên nhỏ nhất khi $n_2 = 0$ và ngược lại với mỗi $n_2 > 0$ biểu thức trên có giá trị nhỏ nhất khi $n_1 = 0$.

Chúng ta thấy rằng khi $n_1 = n$ hoặc $n_2 = n$ xác suất từ chối là:

$$P_{tc} = \frac{\alpha^n / n!}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}}$$

và chắc chắn đây là hai trường hợp xác suất từ chối cực đại. Trong hệ phòng thủ ta đã chứng tỏ rằng nếu hai hệ nối tiếp có công suất khác nhau thì cần đặt hệ có công suất lớn trước và hệ có công suất nhỏ sau nếu muốn xác suất từ chối nhỏ nhất. Kết luận này cho phép chúng ta giả thiết $n_1 > n_2 > 0$, tức là $n_1 > n/2$.

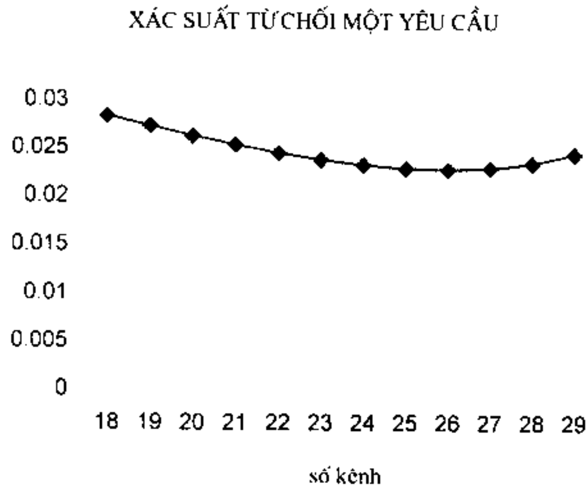
Do n hữu hạn nên có thể tìm lời giải của bài toán tối ưu nguyên này nhờ so sánh một nửa số trường hợp có thể. Công cụ lập trình cho phép giải bài toán tương đối hiệu quả (Một chương trình trên C, Pascal hay Game tương đối đơn giản cho bài toán này).

Sau đây là một thí dụ bằng số với tổng công suất là 165, năng suất mỗi kênh là 5 và dòng vào hệ thống là 150.

Với bảng tính excel sử dụng hàm Poisson(x, mean, logic) ta có kết quả ở bảng sau, với phân phối tối ưu là $n_1 = 26$, $n_2 = 9$:

n1	n2	Ptc(1)	yc(2)	Ptc(2)	Ptc	Tinh trạng
18	17	0.437842	65.67636	0.064852	0.028395	
19	16	0.408749	61.31241	0.066794	0.027302	
20	15	0.380085	57.01273	0.069158	0.026286	
21	14	0.351903	52.78542	0.072066	0.02536	
22	13	0.324264	48.63957	0.075683	0.024541	
23	12	0.297236	44.5854	0.080235	0.023849	
24	11	0.270895	40.63428	0.08604	0.023308	
25	10	0.245325	36.7988	0.093554	0.022951	
26	**9**	**0.220618**	**33.09268**	**0.103441**	**0.022821**	**Toi uu**
27	8	0.196872	29.53075	0.116692	0.022973	
28	7	0.174191	26.12866	0.134826	0.023486	
29	6	0.152684	22.90265	0.160226	0.024464	

Đồ thị P_{tc}:



- Tổn thất do yêu cầu bị từ chối và lãng phí do kênh rỗi nhỏ nhất:

Lời giải của trường hợp này nhận được khi ta có các hàm tổn thất do hệ thống rỗi C(0) và tổn thất do yêu cầu bị từ chối C(tc).

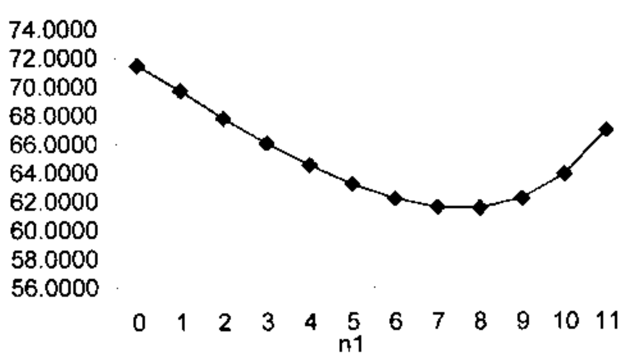
Hàm tổng tổn thất $F= [P_{10}(n_1)\lambda + P_{20}(n-n_1)\, P_{10}(n_1)\lambda]C(0) + P_{tc}(n_1)\,\lambda C(tc)$

Lưu ý rằng F là một hàm hợp và nhiều biến, chúng ta thấy về mặt hình thức tham số λ như một nhân tử tuyến tính trong F, mặc dù vậy không thể kết luận điểm cực tiểu của F không phụ thuộc λ. Ngược lại, tất cả các xác suất có trong F đều là hàm của λ.

Sau đây là kết quả nhận được từ Excel đối với bài toán trên khi: C(0)= 2; C(tc)= 6

n1	Ptc(1)	yc(2)	Ptc(2)	Ptc	P1(0)	P2(0)	M(1,0)	M(2,0)	M(tc)	F
0	1.000	60.00	0.199	0.199	1.00000	0.00001	0.00000	0.00013	11.914	71.485
1	0.923	55.38	0.209	0.193	0.07692	0.00001	0.07692	0.00015	11.595	69.722
2	0.847	50.82	0.222	0.188	0.01176	0.00002	0.02353	0.00018	11.290	67.788
3	0.772	46.33	0.238	0.183	0.00268	0.00003	0.00804	0.00023	11.006	66.051
4	0.698	41.91	0.256	0.179	0.00081	0.00004	0.00323	0.00032	10.749	64.500
5	0.626	37.58	0.280	0.175	0.00030	0.00007	0.00151	0.00048	10.529	63.179
6	0.556	33.37	0.310	0.173	0.00013	0.00013	0.00080	0.00080	10.359	62.159
7	0.488	29.28	0.350	0.171	0.00007	0.00030	0.00048	0.00151	10.257	61.544
8	**0.423**	**25.36**	**0.404**	**0.171**	**0.00004**	**0.00081**	**0.00032**	**0.00323**	**10.245**	**61.475**
9	0.360	21.63	0.479	0.173	0.00003	0.00268	0.00023	0.00804	10.354	62.143
10	0.302	18.12	0.587	0.177	0.00002	0.01176	0.00018	0.02353	10.629	63.820
11	0.248	14.87	0.748	0.185	0.00001	0.07692	0.00015	0.07692	11.124	66.900

F- Ham tong ton that



Trường hợp b nêu lên một lớp bài toán thiết kế hệ thống không có lời giải tổng quát nhưng bù vào sự thiếu hoàn chỉnh này chúng ta tiếp cận với một cách lựa chọn tối ưu rời rạc. Các công cụ lập trình, bảng tính cho phép giải quyết các bài toán thực tế mà về mặt lý thuyết có thể tìm lời giải hết sức khó khăn và đôi khi là không thể giải được mà chỉ có thể chứng tỏ rằng bài toán tồn tại nghiệm mà thôi. Cách làm như vậy đã phần nào cho thấy tin học không chỉ là công cụ tính toán mà trong chừng mực nhất định nó còn là công cụ tư duy.

4- Hệ thống phục vụ công cộng chờ thuần nhất

Một lớp các hệ thống phục vụ công cộng khác, cũng khá phổ biến, đó là hệ thống có chờ. Đối với các hệ thống này, mỗi yêu cầu, tuỳ thuộc vào chế độ tiếp nhận của hệ thống phục vụ và đặc điểm của các yêu cầu, có thể được phục vụ trong điều kiện nào đó (thời gian, số chỗ chờ) nhưng phải xếp hàng chờ, khi hệ thống có tất cả các kênh bận.

a- Mô tả hệ thống

Hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ một yêu cầu của kênh tuân theo qui luật chỉ số. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thoả mãn tại một trong các kênh rỗi đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh đều bận thì xếp hàng chờ, thời gian và độ dài hàng chờ không hạn chế. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

Hệ thống này được gọi là hệ thống chờ thuần nhất. Trong thực tế tồn tại những hệ thống như vậy. Mặt khác có nhiều hệ thống không thoả mãn các điều kiện nêu trên, nhưng chúng ta có thể sử dụng kết quả phân tích hệ thống này như một xấp xỉ cho nó nếu một vài điều kiện được thoả mãn.

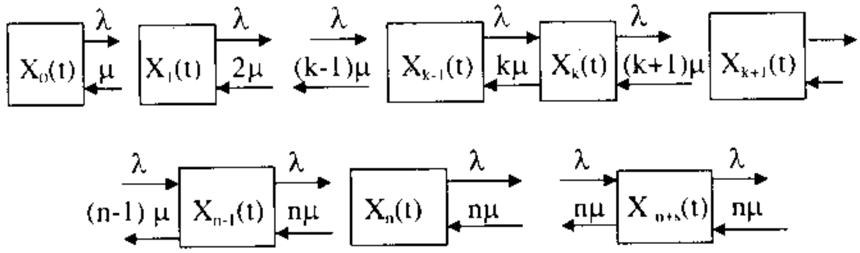
b- Quá trình thay đổi trạng thái- sơ đồ trạng thái của hệ thống

+ *Trạng thái:* Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t (k=0,1,2,......, n).

$X_{n+s}(t)$ là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu chờ tại thời điểm t (s=1,2,.......).

+ Sơ đồ chuyển trạng thái



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poisson như đã nói ở hệ thống Eclang.

c- Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái

Áp dụng qui tắc viết hệ phương trình xác suất trạng thái, ta có thể viết hệ phương trình trạng thái của hệ thống này.

Trong đó các phương trình ứng với các trạng thái từ $X_0(t)$ đến $X_n(t)$ không có gì khác so với các hệ phương trình trên, từ các trạng thái sau $X_n(t)$ ta có vô số trạng thái có cấu trúc sơ đồ như nhau vì vậy các phương trình cũng như nhau.

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$0 = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2$$

.... (1)

$$0 = -\lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1}$$

....

$$0 = -n\mu P_n - \lambda P_n + \lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1}$$

....

$$0 = -n\mu P_{n+s} - \lambda P_{n+s} + \lambda P_{n+s-1} + n\mu P_{n+s+1}$$

....

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$.

đặt $\alpha = \lambda/\mu$, từ (1) ta có: $P_k = \dfrac{\alpha^k}{k!} P_0$ và $P_{n+s} = \dfrac{\alpha^n \alpha^s}{n!\,n^s} P_0$ (2)

Đặt x=α/n. Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} P_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^s P_0 = 1$$

Từ đó: $$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} x^s} \tag{3}$$

Với x= $\frac{\alpha}{n} < 1$ ta có:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{x}{1-x}} = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{x}{1-x}}$$

Điều kiện $\frac{\alpha}{n} < 1$ tương đương điều kiện λ<nμ, tức là công suất tối đa của hệ thống lớn hơn mật độ dòng yêu cầu.

Vậy nếu điều kiện này không thoả mãn thì hệ thống như thế nào? Từ (3) ta thấy tổng thứ hai có một nhân tử là vô cùng lớn, tương ứng với nó dễ dàng thấy P_0 phải là một vô cùng bé cùng bậc với $\frac{1}{\sum_{s=0}^{\infty} x^s}$ khi s dần tới vô hạn. Có thể xem là P_0 bằng không. Với (2) ta thấy mọi P_k, P_{n+s} cũng là vô cùng bé và dần tới 0 khi s dần tới vô hạn, hệ thống bị phá vỡ hoàn toàn. Thực tế điều đó tương ứng với tình trạng một hệ phục vụ luôn có "vô số yêu cầu chờ"- một hệ thống thực tế không thể tồn tại như vậy.

d- Tính các chỉ tiêu

1-Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: P_r=P_0.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^s} = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\frac{x}{1-x}}$$

2-Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ:P_c

$$P_c = \sum_{s=0}^{\infty} P_{n+s} = P_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^s = P_0 \frac{\alpha^n}{n!} \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{P(\alpha,n)\dfrac{1}{1-x}}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\dfrac{x}{1-x}}$$

3- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay:

$$P_{pv0} = 1 - P_c$$

Hoặc:
$$P_{pv0} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k = \frac{R(\alpha,n-1)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\dfrac{x}{1-x}}$$

4- Số kênh bận trung bình:

$$\overline{N}_b = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{\infty} P_{n+s} = P_0\sum_{k=1}^{n} k\frac{\alpha^k}{k!} + nP_0\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=1}^{\infty} x^s$$

$$= P_0\left(\alpha\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{k!} + n\frac{\alpha^n}{n!}\frac{x}{1-x}\right) = P_0\left(\alpha\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}n\frac{x}{1-x} - \alpha\frac{\alpha^n}{n!}\right)$$

$$= P_0\alpha\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{n}{\alpha}\frac{x}{1-x} - 1\right)\right)$$

$$= P_0\alpha\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\right)$$

$$= P_0\alpha\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!}\frac{x}{1-x}\right) = \alpha$$

5- Độ dài hàng chờ trung bình:

$$\overline{M}_c = \sum_{s=0}^{\infty} sP_{n+s} = P_0\frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty} sx^s$$

$$= \frac{xP(\alpha,n)}{(1-x)^2\left[R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\dfrac{x}{1-x}\right]}$$

6- Thời gian chờ trung bình:

Thời gian chờ trung bình được xác định như sau:

Gọi T_c là thời gian chờ của một yêu cầu, T_c là biến ngẫu nhiên xác định theo công thức sau:

$$T_c = \begin{cases} 0 & \text{Nếu} \quad s = 0 \\ s\dfrac{1}{n\mu} & \text{Nếu} \quad s > 0 \end{cases}$$

$$\overline{T}_c = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s}{n\mu} P_{n+s}$$

$$\overline{T_c} = \frac{\overline{Mc}}{n\mu}$$

7- Thời gian trung bình yêu cầu lưu lại trong hệ thống

$$T_{ls} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s+1}{n\mu} P_{n+s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s+1}{\lambda} P_{n+s+1} = \frac{\overline{Mc}}{\lambda}$$

8- Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ

Gọi T_r là thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ của một kênh ta có thể xác định T_r theo công thức sau:

$$T_c = \begin{cases} 0 & \text{Nếu} \quad s > 0 \\ (n-k)\dfrac{1}{\lambda} & \text{Nếu} \quad k \le n \end{cases}$$

$$E(T_r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda}(n-k)P_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda}(n-k)P_k$$

$$= \frac{1}{\lambda} n \sum_{k=0}^{n-1} P_k - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} kP_k$$

$$= \frac{n}{\lambda} P_{pvo} - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\alpha^k}{k!} P_0$$

$$= \frac{n}{\lambda} P_{pvo} - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} P_0$$

$$= \frac{\lambda}{n} P_{pvo} - \mu \frac{R(\alpha, n-2)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x}{1-x}}$$

$$= \frac{\lambda}{n} \frac{R(\alpha, n-1)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\frac{x}{1-x}} - \mu \frac{R(\alpha, n-2)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\frac{x}{1-x}}$$

Chúng ta có thể sử dụng P_0 trong công thức trên trong quá trình tính toán.

e-Thí dụ

Thí dụ 1: Một thư viện có 6 người làm thư mục sách, mỗi giờ một người làm được trung bình 4 cuốn. Trung bình mỗi giờ có 18 cuốn sách về thư viện cần làm thư mục. Nếu một cuốn sách về gặp lúc có người làm thư mục rỗi thì được làm thư mục ngay, ngược lại phải xếp tạm vào kho chờ làm thư mục. Dung tích kho đủ lớn và giả sử dòng sách về là dòng Poisson dừng, còn thời gian làm thư mục tuân theo qui luật chỉ số. Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của tổ làm thư mục.

Giải:

Ta xem bộ phận làm thư mục là một hệ thống chờ thuần nhất. Kết quả nhận được từ MH4:

So kenh phuc vu n = 6

Nang suat mot kenh phuc vu w = 4.00

Mat do dong yeu cau y = 18.00

Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của tổ

1- Xac suat he thong co 6 kenh roi P(0)=0.0091

2- Xac suat mot yeu cau duoc phuc vu ngay Popv=0.5783

3- Xac suat mot yeu cau cho Pc= 0.42

4- So kenh ban trung binh Nb= 4.50

5- Do dai hang cho trung binh Mc= 1.26

6- Thoi gian cho trung binh Tc= 0.05

7- Thoi gian roi giua 2 lan PV Tr= 0.08

Thí dụ 2: Xác định số mô tơ cần dự trữ trong kho của một cơ sở sản xuất dùng để thay thế cho một loại thiết bị sao cho tổn thất trong năm là nhỏ nhất. Biết rằng hàng năm cần trung bình 1095 mô tơ để thay thế. Thời gian chờ để mua và nhập kho một mô tơ trung bình là 2,5 ngày (đây cũng là thời gian thay thế xong 1 mô tơ làm cho chỗ của mô tơ lấy ra khỏi kho thực sự trống). Tổn thất do thiếu một mô tơ thay thế trong một ngày là 300 nghìn đồng. Giá một mô tơ là 3 triệu đồng; chi phí bảo quản một mô tơ trong năm trung bình 1% theo giá mô tơ.

Giải: Đây thực chất là một dạng của bài toán dự trữ sẽ được trình bày trong chương III. Thí dụ này đưa ra một cách mô tả một dạng bài toán dự trữ bằng mô hình phục vụ công cộng. Để mô hình hoá bài toán trên ta xem hoạt động của kho là một hệ thống chờ thuần nhất với số kênh (n) là số chỗ dự trữ mô tơ (qui mô dự trữ cần xác định). Thời gian phục vụ của kênh là thời gian mua và nhập kho một mô tơ. Qui tắc hoạt động của hệ thống là: Khi có một mô tơ hỏng và trong kho có mô tơ thì một mô tơ được lấy khỏi kho để thay thế và xuất hiện chỗ trống để nhập tiếp mô tơ. Ngược lại không có mô tơ trong kho thì thiết bị này phải chờ.

Để giải bài toán tối ưu kinh tế nói trên với mô hình phục vụ công cộng ta cần xác định hai chỉ tiêu cho mỗi mô hình có k kênh đó là: thời gian chờ trung bình (P_c), độ dài hàng chờ trung bình (M_c) và thời gian rỗi trung bình giữa hai lần phục vụ (T_r).

Các tham số của bài toán như sau:

Cường độ dòng yêu cầu (ngày): 1095/365 =3.

Thời gian phục vụ trung bình: 2,5

Ta có α =3. 2,5 =7,5.

Với mỗi số k ta tính tổn thất theo công thức:

$$TC(k, \alpha) = 300 T_c M_c + k T_r\, 0{,}01.\ 3000.$$

Như đã chỉ ra ở trên ta phải bắt đầu từ $k > \alpha$.

Bảng tính toán sau đây cho lời giải của bài toán:

k	Mc	Tc	Tr	TC
8	12.11	4.04	0.17	14718.12
9	2.25	0.85	0.5	708.75
10	**0.92**	**0.31**	**0.83**	**334.56**
11	0.38	0.13	1.17	400.92
12	0.16	0.05	1.5	542.4
13	0.07	0.02	1.83	714.12
14	0.03	0.01	2.17	911.49

Như vậy cần dự trữ 10 mô tơ (n=10).

5. Hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế và thời gian chờ không hạn chế

Trong thực tế, tình huống phổ biến là độ dài hàng chờ và cả thời gian chờ đều hạn chế, tuy vậy nếu độ dài hàng chờ hạn chế thì cũng có thể xem thời gian chờ của một yêu cầu hầu như là hạn chế. Để đơn giản cho việc nghiên cứu, ta sẽ xem xét mô hình phục vụ công cộng, với độ dài hàng chờ hạn chế hay còn gọi là **hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế**.

a- Mô tả hệ thống

Một hệ thống phục vụ công cộng có n kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poát xông dừng mật độ λ. Thời gian phục vụ 1 yêu cầu của kênh tuân theo qui luật chỉ số. Một yêu cầu đến hệ thống gặp lúc có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận phục vụ cho đến thoả mãn tại 1 trong các kênh rỗi đó. Ngược lại nếu tất cả các kênh đều bận thì xếp hàng chờ, số yêu cầu chờ tối đa là m. Trường hợp đã có m yêu cầu chờ, một yêu cầu đến hệ thống sẽ bị từ chối. Cần xác định các chỉ tiêu phân tích hệ thống.

b- Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái của hệ thống

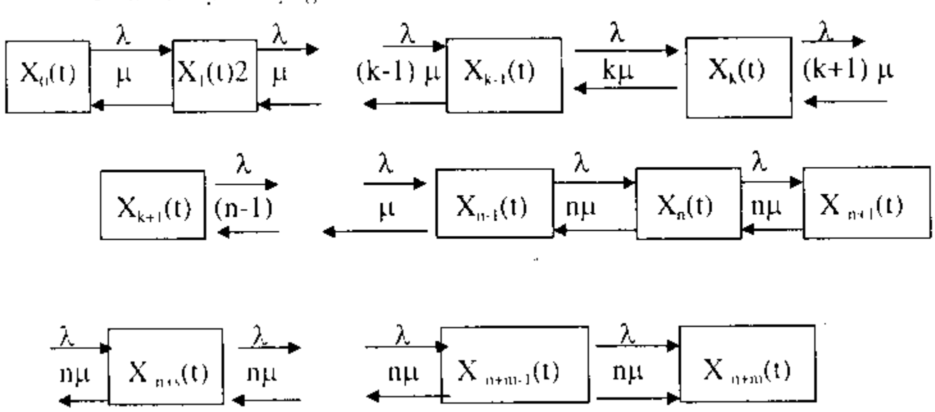
+ *Trạng thái*

Ta quan tâm đến hiệu quả phục vụ của hệ thống vì vậy đặc trưng được chọn để xác định trạng thái là số kênh bận tại mỗi thời điểm.

Gọi $X_k(t)$ là trạng thái hệ thống có k kênh bận tại thời điểm t (k=0,1,2,.......n).

$X_{n+s}(t)$ là trạng thái hệ thống có n kênh bận và s yêu cầu chờ tại thời điểm t (s=1,2,.......m).

+ *Sơ đồ chuyển trạng thái*



Sơ đồ trên thiết lập trên cơ sở phân tích tính chất của các dòng Poisson như đã nói ở hệ thống Eclang.

c- Hệ phương trình trạng thái và các xác suất trạng thái

$$
\begin{aligned}
&0 = -\lambda P_0 + \mu P_1\\
&0 = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \lambda P_0 + 2\mu P_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -\lambda P_k - k\mu P_k + \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -n\mu P_n - \lambda P_n + \lambda P_{n-1} + n\mu P_{n+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -n\mu P_{n+s} - \lambda P_{n+s} + \lambda P_{n+s-1} + n\mu P_{n+s+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 = -n\mu P_{n+m} + \lambda P_{n+m-1}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

với điều kiện chuẩn là: $\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$.

đặt $\alpha = \lambda/\mu$, từ (1) ta có:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \qquad \text{và} \qquad P_{n+s} = \frac{\alpha^n \alpha^s}{n!\, n^s} P_0 \qquad (2)$$

Nếu $\alpha/n = 1$ thì $$P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} P_0 = P_n \qquad (3)$$

Đặt $x = \alpha/n$. Thay vào điều kiện chuẩn ta có:

- Khi $x \neq 1$: $$P_0\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{m} x^s}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} x \frac{(1 - x^m)}{1 - x}}$$

Hay: $$P_0 = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}}$$

-Khi x =1 thì $$P_0 = \frac{P(\alpha,0)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)m} \qquad (4)$$

d- Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của hệ thống

1-Xác suất hệ thống có n kênh rỗi: $P_r = P_n$

2-Xác suất một yêu cầu đến hệ thống phải chờ: P_c

$$P_c = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{s=0}^{m-1} x^s P_0$$

$$= \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)x\dfrac{(1-x^m)}{1-x}} \cdot \frac{(1-x^m)}{(1-x)} \quad (\text{khi } x\neq 1)$$

khi x =1 $\qquad P_c = mP_n$

3- Xác suất một yêu cầu bị từ chối: P_{tc}

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{\alpha^n}{n!} x^m P_0$$

khi x ≠ 1 $$P_{tc} = \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)x\dfrac{(1-x^m)}{1-x}} x^m$$

khi x =1 $\qquad P_{tc} = P_{n+m} = P_n$.

4- Xác suất một yêu cầu đến hệ thống được phục vụ ngay:

$$P_{opv} = 1 - P_{tc} - P_c.$$

5- Số kênh bận trung bình:

$$\overline{N}_b = \sum_{k=0}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s} = \sum_{k=1}^{n} kP_k + n\sum_{s=1}^{m} P_{n+s}$$

Khi $x \neq 1$ $$\overline{N}_b = \frac{\alpha R(\alpha,n-1) + nP(\alpha,n)\frac{x}{1-x}(1-x^m)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\frac{x}{1-x}(1-x^m)}.$$

Khi $x = 1$ $$\overline{N}_b = \frac{\alpha R(\alpha,n-1) + nmP(\alpha,n)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)m}.$$

6- Độ dài hàng chờ trung bình:

Khi $x \neq 1$

$$\overline{M}_c = \sum_{s=0}^{m} sP_{n+s} = \frac{P(\alpha,n)\sum_{s=0}^{m} sx^s}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)x\frac{1-x^m}{1-x}}$$

trong đó:

$$\sum_{s=0}^{m} sx^s = x\sum_{s=1}^{m} sx^{s-1}$$

$$= x\frac{\partial \sum_{s=0}^{m-1} x^s}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}[(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1]$$

Như vậy: $$\overline{M}_c = \frac{P(\alpha,n)\frac{x}{(1-x)^2}[(m-1)x^m - mx^{m-1}+1]}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)x\frac{1-x^m}{1-x}}$$

Khi $x = 1$ $$\overline{M}_c = P_n\frac{m(m+1)}{2}$$

7- Thời gian chờ trung bình của một yêu cầu:

Thời gian chờ của mỗi yêu cầu được xác định bằng khoảng thời gian hệ thống giải phóng mỗi yêu cầu và số yêu cầu chờ hiện có. Vì vậy nếu gọi thời gian chờ là T_c thì $T_c = 0$ khi hệ thống còn kênh rỗi; khi có s yêu cầu chờ thì thời gian chờ của mỗi yêu cầu trung bình sẽ là s/nμ, vì vậy có thể tính thời gian chờ trung bình như sau:

Gọi T_c là thời gian chờ của một yêu cầu, T_c là biến ngẫu nhiên xác định theo công thức sau:

$$T_c = \begin{cases} 0 & \text{Nếu} \quad s = 0 \\ s\dfrac{1}{n\mu} & \text{Nếu} \quad s > 0 \end{cases}$$

Khi x≠1:

$$\overline{T}_c = \sum_{s=0}^{m} \frac{s}{n\mu} P_{n+s}$$

$$\overline{T}_c = \frac{\overline{Mc}}{n\mu}$$

$$= \frac{1}{n\mu} \frac{P(\alpha,n)\dfrac{x}{(1-x)^2}[(m-1)x^m - mx^{m-1} + 1]}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)x\dfrac{1-x^m}{1-x}}$$

Khi x=1: $\overline{T}_c = \dfrac{1}{n\mu} \dfrac{P(\alpha,n)\dfrac{m(m+1)}{2}}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)m}$

8- Thời gian trung bình yêu cầu lưu lại trong hệ thống

$$T_{ts} = \sum_{s=0}^{m} \frac{s+1}{n\mu} P_{n+s} = \sum_{s=0}^{m} \frac{s+1}{\lambda} P_{n+s+1} = \frac{\overline{Mc}}{\lambda}$$

9- Thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ:

Tương tự như hệ chờ thuần nhất, gọi T_r là thời gian rỗi giữa hai lần phục vụ của một kênh ta có thể xác định T_r theo công thức sau:

$$T_c = \begin{cases} 0 & \text{Nếu} \quad s > 0 \\ (n-k)\dfrac{1}{\lambda} & \text{Nếu} \quad k \le n \end{cases}$$

$$E(T_r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda}(n-k)P_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda}(n-k)P_k$$

$$= \frac{1}{\lambda} n \sum_{k=0}^{n-1} P_k - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} kP_k$$

$$= \frac{n}{\lambda} P_{pvo} - \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\alpha^k}{k!} P_0$$

$$= \frac{n}{\lambda} P_{pvo} - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} P_0$$

Khi $x \neq 1$: $E(T_r) = \frac{\lambda}{n} P_{pvo} - \mu \dfrac{R(\alpha, n-2)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}}$

$$= \frac{\lambda}{n} \frac{R(\alpha, n-1)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}} - \mu \frac{R(\alpha, n-2)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}}$$

Khi $x = 1$: $E(T_r) = \dfrac{\lambda}{n} \dfrac{R(\alpha, n-1)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)m} - \mu \dfrac{R(\alpha, n-2)}{R(\alpha, n) + P(\alpha, n)m}$

e- Thí dụ

Một trạm đăng kiểm xe máy có 2 tổ làm việc độc lập, năng suất mỗi tổ 6 xe/ngày. Dòng xe đến trạm là dòng Poát xông dừng trung bình 10 xe/ngày. Thời gian đăng kiểm 1 xe tuân theo qui luật chỉ số. Một xe đến trạm nếu gặp lúc có tổ rỗi thì được nhận ngay tại một tổ rỗi ngược lại phải chờ nếu số xe chờ chưa quá 9. Tính các chỉ tiêu phân tích hoạt động của trạm trên như một hệ thống phục vụ.

Giải:

Số kênh phục vụ n =2

Năng suất một kênh μ = 6

Mật độ dòng vào λ = 10

Số chỗ chờ tối đa m = 10

$\alpha = \lambda / \mu = 1.666667$

$\alpha/n = 0.833333$

Các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trạm

1-Xác suất trạm có 2 kênh rỗi là P_0=0,101231

2- Xác suất 1 yêu cầu phải chờ là P_c =0,707344

3- Xác suất từ chối 1 yêu cầu P_{tc} =0,022707

4- Xác suất 1 yêu cầu được phục vụ ngay P_{npv} =0,269948

5- Số kênh bận trung bình N_b =1,628821

6- Độ dài hàng chờ trung bình: M_c =2,401353

7- Thời gian trung bình trong hệ thống T_c =0,162882

8- Thời gian rỗi trung bình giữa hai lần phục vụ của kênh T_r =0,03798

6- Mô hình xác định số chỗ chờ tối ưu cho một hệ chờ với thời gian chờ không hạn chế và số chỗ chờ hạn chế

+ *Xác suất từ chối giảm theo số chỗ chờ (m)*

Trước khi khảo sát lớp bài toán này chúng ta chứng minh mệnh đề sau:

Với hệ chờ với thời gian chờ không hạn chế; khi số chỗ chờ tăng thì xác suất từ chối một yêu cầu giảm.

Thậy vậy theo công thức tính P_{tc} khi $x \neq 1$

$$\cdot\ P_{tc} = \frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n) + P(\alpha,n)x\dfrac{(1-x^m)}{1-x}}x^m$$

$$\frac{\partial P_{tc}}{\partial m} = \frac{x^m P(\alpha,n)\ln x\left(R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}\right) - P(\alpha,n)x^m\left(P(\alpha,n)\dfrac{x}{1-x}(-x^m)\ln x\right)}{\left[R(\alpha,n) + P(\alpha,n)\dfrac{x(1-x^m)}{1-x}\right]^2}$$

Viết lại biểu thức trên dưới dạng:

$$\frac{\partial P_{tc}}{\partial m} = \frac{TS(m)}{MS(m)}$$

ta thấy MS(m) >0 với mọi m dấu của phân thức là dấu của TS(m).

Ta có:

TS(m)=

$$x^m P(\alpha,n)\ln x(R(\alpha,n)+P(\alpha,n)\frac{x(1-x^m)}{1-x})-P(\alpha,n)x^m P(\alpha,n)\frac{x}{1-x}(-x^m)\ln x$$

$$=\frac{x^m P(\alpha,n)\ln x}{1-x}[R(\alpha,n)(1-x)+P(\alpha,n)x(1-x^m)+P(\alpha,n)x^{m+1}]$$

$$=\frac{x^m P(\alpha,n)\ln x}{1-x}[R(\alpha,n)-R(\alpha,n)x+P(\alpha,n)x]$$

$$=\frac{x^m P(\alpha,n)\ln x}{1-x}[R(\alpha,n)-R(\alpha,n-1)x]$$

Vì:

$\frac{x^m P(\alpha,n)\ln x}{1-x}<0$ với mọi x >0, ta xét dấu của A=$[R(\alpha,n)-R(\alpha,n-1)x]$

Với x ≤ 1 dễ thấy A >0.

Xét trường hợp x> 1, thay x=α/n ta có: A= $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^{k+1}}{k!}$

Lấy đạo hàm của A theo α ta có:

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\alpha^{k-1}}{k!}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\alpha^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\alpha^k}{(k+1)!}-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\alpha^k}{k!}$$

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)\alpha^k}{k!}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n})>0$$, vì k< n-1 hay k+1 ≤ n

Như vậy A là hàm tăng theo α, tại α=n tức là (x=1) ta thấy A >0, điều đó cho phép kết luận A dương với mọi x>0.

-Khi x =1 thì $P_{tc}=\frac{P(\alpha,n)}{R(\alpha,n)+P(\alpha,n)m}$, dễ thấy P_{tc} cũng giảm theo m.

Tóm lại cho mọi x dương khác 1 ta có P_{tc} là hàm giảm theo m. (đpcm)

+ Bài toán xác định số chỗ chờ tối ưu

Trong các bài toán thực tế khi tăng số chỗ chờ tối đa phát sinh một chi phí nào đó như một hàm tăng của m. Hạn chế này đòi hỏi xác định số chỗ chờ sao cho tổng tổn thất phụ thuộc m nhỏ nhất. Hoàn toàn tương ứng với các bài toán đã nêu chúng ta có thể giả sử rằng tỷ lệ hay số yêu cầu bị từ chối gây nên một loại thất thiệt được xác định bởi hàm $C_{tc}(m)$; việc tạo thêm chỗ chờ gây nên thất thiệt $C_c(m)$ bao gồm cả chi phí vật chất cố định và chi phí lưu yêu cầu chờ, vì khi các tham số khác không đổi thì m tăng sẽ làm tăng thời gian chờ của các yêu cầu.

Trong trường hợp đơn giản này chúng ta tìm m sao cho hàm tổng tổn thất $F(m)=C_{tc}(m) + C_c(m)$ cực tiểu.

Tuỳ thuộc các hàm chi phí (tổn thất) mà số chỗ chờ có thể là một số dương hữu hạn; bằng không hay vô hạn. Tương ứng với các trường hợp như vậy ta có thể lựa chọn hệ từ chối, hệ chờ hạn chế hay hệ chờ thuần nhất. Thí dụ sau sẽ mô tả các tình huống như vậy.

Thí dụ : Xét hệ phục vụ công cộng có 20 kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng 4 yêu cầu/giờ. Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ 60 yêu cầu/giờ.

Nên tổ chức hệ này là hệ không chờ hay chờ, nếu là hệ chờ thì nên có bao nhiêu chỗ chờ là tối đa, trong các trường hợp sau:

a- Tổn thất do từ chối một yêu cầu là 14 đơn vị tiền tệ; Chi phí do tổ chức chỗ chờ và chi phí cho yêu cầu chờ là: $C_c(m)= 0{,}4m +0{,}5McTc$, trong đó m là số chỗ chờ tối đa Mc, Tc là độ dài hàng chờ trung bình và thời gian chờ trung bình.

b- Với các điều kiện trên và $C_c(m)=25 + 2m - 0{,}02m^2 + 1{,}5McTc - 0{,}05(McTc)^2$.

a- Ta có thể tóm tắt các dữ kiện như sau:

Như trên đã chứng minh P_{tc} là hàm giảm theo m, nhưng $P_{tc}>0$ với mọi m>0 vì vậy P_{tc} phải là hàm giảm chậm dần. Trong khi với hàm $C_c(m)$ như trên khi m tăng hàm số này tăng nhanh dần. F thực chất là một hàm lồi nên nếu tồn tại cực trị địa phương thì đó là cực trị toàn bộ. Lợi dụng tính chất này ta có thể tìm giá trị m trên bảng tính một cách đơn giản. Cụ thể là ta tăng m cho đến khi tìm được m* thoả mãn F(m*-1)>F(m*) và F(m*+1) >F(m*) thì m* là lời giải của bài toán.

Với Excel ta nhận được lời giải

m	x^m	(1-x^m)/(1-x)	Ptc	Pc	Mc	Tc	Cc(m)	Ctc(m)	F
0	1.0000	0.0000	0.0456	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	38.2983	38.2983
1	0.7500	1.0000	0.0331	0.0441	0.0000	0.0000	0.4000	27.7740	28.1740
2	0.5625	1.7500	0.0242	0.0753	0.0323	0.0065	0.8001	20.3264	21.1265
3	0.4219	2.3125	0.0178	0.0977	0.0792	0.0158	1.2006	14.9731	16.1737
4	0.3164	2.7344	0.0132	0.1140	0.1309	0.0262	1.6017	11.0817	12.6834
5	0.2373	3.0508	0.0098	0.1260	0.1819	0.0364	2.0033	8.2298	10.2331
6	0.1780	3.2881	0.0073	0.1348	0.2292	0.0458	2.4053	6.1273	8.5326
7	0.1335	3.4661	0.0054	0.1413	0.2715	0.0543	2.8074	4.5705	7.3779
8	0.1001	3.5995	0.0041	0.1461	0.3083	0.0617	3.2095	3.4139	6.6235
9	0.0751	3.6997	0.0030	0.1497	0.3398	0.0680	3.6115	2.5527	6.1642
10	0.0563	3.7747	0.0023	0.1524	0.3663	0.0733	4.0134	1.9102	5.9236
11	0.0422	3.8311	0.0017	0.1544	0.3884	0.0777	4.4151	1.4302	5.8453
12	0.0317	3.8733	0.0013	0.1559	0.4066	0.0813	4.8165	1.0713	5.8878

Trung bình dòng yêu cầu: Lamda=60; Số kênh: n= 20; Năng suất kênh: Muy=4;

C(tc) =14*lamda*Ptc; C(m) =0.4*m+0.5McTc

Nên chọn hệ chờ với số chỗ chờ tối đa là m=11.

Cách làm trên đây áp dụng được cho lớp hàm $C_c(m)$ tăng, lồi theo m.

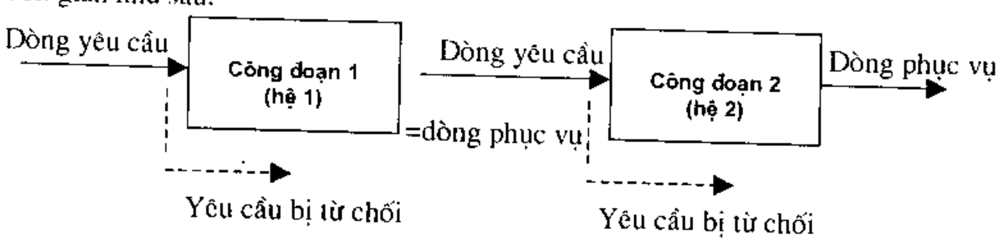
b- Với điều kiện trong câu này ta thấy F giảm khi m tăng từ 0 đến 6, sau đó F tăng đến cực đại khi m= 50 và giảm dần khi m tiếp tục tăng (có thể chứng tỏ rằng hàm F biến đổi như vậy theo m). Lời giải là:

- Nếu không thể số chỗ chờ quá 90 thì chọn hệ chờ với m=6

- Nếu có thể tăng số chỗ chờ m >90 thì có thể chọn 110 chỗ chờ (coi như vô hạn). Phần tính toán cụ thể dành cho sinh viên như một bài tập thực hành.

7- Hệ thống phục vụ phân đoạn

Thực tế tồn tại những hệ thống phân giai đoạn trong phục vụ, có thể mô tả đơn giản như sau:



Mỗi công đoạn tương ứng một hệ phục vụ công cộng, như vậy chúng ta có thể xem xét các trường hợp kết hợp khác nhau của hai loại hệ thống (Hai hệ từ chối; Hệ 1 từ chối, hệ 2 chờ.......). Một yêu cầu được thoả mãn nếu như được phục vụ xong ở cả hai giai đoạn theo thứ tự nói trên.

Sau đây chúng ta xét trường vài hợp đơn giản nhưng có khả năng tổng quát hoá (ít nhất là cách tiếp cận) cho các trường hợp khác.

a- Hệ 1- từ chối cổ điển, hệ 2 - chờ

Giả sử hệ 1 là hệ Eclang với các tham số n_1, λ_1, μ_1, kí hiệu: $E_1(n_1, \lambda_1, \mu_1)$. Hệ 2 là hệ chờ với số yêu cầu chờ tối đa là m (m - hữu hạn hoặc vô hạn), ký hiệu: $E_2(n_2, \lambda_2, \mu_2, m)$. Với cách tổ chức nói trên thì dòng vào của hệ 2 chính là dòng phục vụ ở hệ 1.

Quá trình xác định các chỉ tiêu chủ yếu

- Với hệ 1: Các yêu cầu được phục vụ xong lập thành một dòng biến cố ngẫu nhiên Poisson có trung bình là $\lambda_1 P_{pv}(1)$ xác định theo công thức sau:

$$\lambda_2 = \lambda_1 P_{pv}(1)$$

$$= \lambda_1 (1 - P_{tc}(1))$$

$$= \lambda_1 \left[1 - \frac{\dfrac{\alpha_1^{n_1}}{n_1!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1} \frac{\alpha_1^{k}}{k!}}\right]$$

- Với hệ 2: Trên cơ sở dòng vào λ_2 được xác định như trên ta có thể tính tất cả các chỉ tiêu đối với hệ 2.

- Với toàn bộ hệ thống, các chỉ tiêu chung cần quan tâm có thể tính toán như sau:

+ Tỷ lệ yêu cầu bị từ chối:

$$P_{tc} = \frac{\lambda_1 P_{tc}(1) + \lambda_2 P_{tc}(2)}{\lambda_1} = P_{tc}(1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} P_{tc}(2).$$

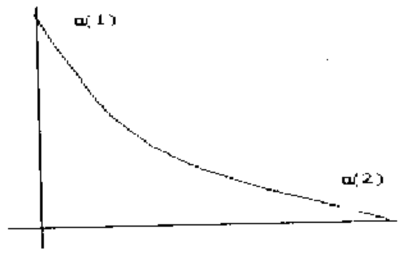
+ Số kênh bận trung bình của các hệ.

+ Số yêu cầu chờ và thời gian chờ trung bình.

+ Hiệu quả chung.

Hiệu quả chung và bài toán tối ưu

Chúng ta có thể giả sử rằng năng lực của cơ sở phục vụ là có hạn. Như vậy việc thiết lập số kênh phục vụ cho mỗi hệ nói trên có thể đặc trưng bởi một đường đồng mức như sau:



Đường đồng mức này có thể sinh từ một hàm tổng chi phí không đổi có dạng: $G= G(n_1, n_2)$ xác định với n_1, n_2 nguyên dương, tại mức G_0. Với $G = G_0$ ta có một tập các cặp có thứ tự $N_0=\{(n_1, n_2)\}$

Chúng ta có thể thiết lập một hàm hiệu quả chung F phụ thuộc các tỷ lệ với các chi phí tương ứng hình thành từ hệ thống trên khi cho (n_1, n_2) nhận các giá trị trên N_0. Thực tế có thể chọn một hình chữ nhật bao N_0 trong R^2 và liên tục hoá hàm F, nhưng điều đó có thể dẫn đến những yêu cầu kỹ thuật phức tạp. Thông thường người ta giải trực tiếp bài toán cực trị hàm F trên N_0 nhờ các công cụ tính toán.

Thí dụ: Một cơ sở sản xuất sản phẩm A với số sản phẩm trung bình sau đi ra từ máy kiểm tra là 20 sản phẩm phút. Bộ phận tiếp nhận và đóng gói làm hai giai đoạn:

- Giai đoạn 1: Dán nhãn mác tự động hoạt động như một hệ Eclang 4 kênh (4 máy), năng suất mỗi kênh 5 sản phẩm/phút.

- Giai đoạn 2: Đóng gói sản phẩm với 10 nhân viên, năng suất mỗi nhân viên 2 sản phẩm/phút. Các sản phẩm đã dán nhãn sẽ được đóng gói 100%.

a- Hãy xác định qui mô của kho chờ đóng gói sao cho 99% số sản phẩm chờ đóng gói "có chỗ" (Hầu như chắc chắn không có sản phẩm đã dán nhãn không được đóng gói).

b- Với qui mô kho chờ ở giai đoạn 2 là m (b1- m đủ lớn; b2- m=10). Việc lựa chọn số thiết bị dán nhãn tự động (n_1) và nhân viên đóng gói (n_2), có chi phí xác định theo công thức sau:

$$G(n_1, n_2) = 14n_1 + 2n_2$$

Tổng chi phí cho khoản này tối đa là: G_0= 200 đơn vị tiền tệ.

Xác định n_1 và n_2 sao cho tổng tổn thất do phải dán nhãn thủ công cho các sản phẩm bị từ chối ở giai đoạn 1 và bảo quản sản phẩm chưa được đóng gói ở giai đoạn 2 nhỏ nhất. Biết rằng tổn thất do dán nhãn thủ công là 1 đơn vị tiền tệ, đóng gói thủ công cho mỗi sản phẩm là 3 đơn vị tiền tệ và bảo quản trong mỗi phút 1 sản phẩm là 0,5 đơn vị tiền tệ.

Giải: Đây là một bài toán được thiết lập ở hai cấp khác nhau thể hiện trong câu a và câu b. Yêu cầu ở câu a thực chất là một bài toán đối với hệ chờ hạn chế, có bổ sung đặc trưng nối tiếp của một hệ từ chối cổ điển là thay đổi dòng vào của hệ chờ hạn chế được mô tả ở giai đoạn 2.

a- Chúng ta biết rằng khi m tăng tỷ lệ yêu cầu không được phục vụ ngay và được chờ tăng, vì vậy một cách đơn giản nhất chúng ta tăng m sao cho tỷ lệ yêu cầu cần chờ được chờ quá 99%.

Trước hết ta tính dòng yêu cầu cho hệ 2:

$$\lambda_2=P_{pv}(1)\ \lambda_1=\lambda_1(1- P_{tc}(1))= 13{,}78641.$$

Ta có bảng tính toán tỷ lệ yêu cầu có chỗ chờ trong giai đoạn 2 như sau

λ_2 = 13.78641

μ_2 = 2

n_2 = 10

m	P_{tc}	P_c	$P_c/(P_c+P_{tc})$
5	0.010177	0.055212	0.84436559
6	0.006966	0.057967	0.89271803
7	0.004779	0.059844	0.92604835
8	0.003283	0.061128	0.94902362
9	0.002258	0.062007	0.96486094
10	0.001554	0.062611	0.97577793
11	0.00107	0.063027	0.98330323
12	0.000737	0.063313	0.98849058
13	0.000508	0.063509	0.99206632

Từ bảng trên ta có m=13.

b- Với G_0 =200 tập N_0 có thể liệt kê như sau:

n1	n2	n1	n2
1	93	8	44
2	86	9	37
3	79	10	30
4	72	11	23
5	65	12	16
6	58	13	9
7	51	14	2

Với mỗi cặp n_1, n_2 tương ứng ta có giá trị hàm F được tính như sau:

$$F= \lambda_1 P_{tc}(1)\,(1+3) + 3\lambda_2 P_{tc}(2) + 0.5T_c(2)M_c(2)$$

trong đó: $P_{tc}(1)$, $P_{tc}(2)$ là các xác suất rừ chối của hai hệ; $T_c(2)$ và $M_c(2)$ là thời gian chờ và độ dài hàng chờ ở hệ 2.

+ b1- Với m đủ lớn ta có thể coi $P_{tc}(2)$ bằng 0 và tính các chỉ tiêu hệ 2 như hệ chờ thuần nhất.

Kết quả tính được như sau:

n1	n2	Ptc(1)	lamda2	x	Mc(2)	Tc(2)	F
1	93	0.8	4	0.021505	2.6E-119	1.4E-121	640
2	86	0.615385	7.692308	0.044723	8.87E-84	5.16E-86	492.3077
3	79	0.450704	10.98592	0.069531	1.03E-62	6.51E-65	360.5634
4	72	0.31068	13.78641	0.095739	4.51E-48	3.13E-50	248.5437
5	65	0.199067	16.01866	0.12322	3.5E-37	2.69E-39	159.2535
6	58	0.117162	17.65675	0.152213	9.59E-29	8.26E-31	93.72998
7	51	0.062749	18.74502	0.183775	5.55E-22	5.44E-24	50.19915
8	44	0.03042	19.3916	0.220359	2.16E-16	2.45E-18	24.33605
9	37	0.01334	19.73321	0.266665	1.14E-11	1.54E-13	10.67174
10	30	0.005308	19.89385	0.331564	1.14E-07	1.9E-09	4.246039
11	23	0.001926	19.96147	0.433945	0.000232	5.04E-06	1.54104
12	**16**	**0.000642**	**19.98717**	**0.624599**	**0.077996**	**0.002437**	**0.513445**
13	9	0.000197	19.99605	1.110892			
14	2	5.64E-05	19.99887	4.999718			

Hàm F đạt cực tiểu tại (n1=12, n2=16), với n_1 lớn hơn 12 ta có x>1 vì vậy hệ 2 là hệ thuần nhất thì khâu đóng gói coi như bị phá huỷ do số yêu cầu chờ tăng vô hạn.

+ b2- Với m=10 ta có kết quả sau:

n1	n2	Ptc(1)	lamda2	x	Ptc(2)	Mc(2)	Tc(2)	F
1	93	0.8	4	0.021505	2.5E-134	2.6E-119	1.4E-121	640
2	86	0.615385	7.692308	0.044723	5.79E-96	8.87E-84	5.16E-86	492.3077
3	79	0.450704	10.98592	0.069531	3.38E-73	1.03E-62	6.51E-65	360.5634
4	72	0.31068	13.78641	0.095739	2.49E-57	4.51E-48	3.13E-50	248.5437
5	65	0.199067	16.01866	0.12322	1.76E-45	3.5E-37	2.69E-39	159.2535
6	58	0.117162	17.65675	0.152213	3.02E-36	9.59E-29	8.26E-31	93.72998
7	51	0.062749	18.74502	0.183775	8.84E-29	5.55E-22	5.44E-24	50.19915
8	44	0.03042	19.3916	0.220359	1.61E-22	2.16E-16	2.45E-18	24.33605
9	37	0.01334	19.73321	0.266665	4.17E-17	1.14E-11	1.54E-13	10.67174
10	30	0.005308	19.89385	0.331564	2.47E-12	1.14E-07	1.9E-09	4.246039
11	23	0.001926	19.96147	0.433945	4.06E-08	0.000231	5.03E-06	1.541042
12	**16**	**0.000642**	**19.98717**	**0.624599**	**0.000194**	**0.088955**	**0.00278**	**0.525085**
13	9	0.000197	19.99605	1.110892	0.128253	4.027241	0.223736	8.302086
14	2	5.64E-05	19.99887	4.999718	0.799989	1.750095	0.437524	48.42459

Kết quả trên cho thấy phương án trong trường hợp b1 cũng là phương án có F cực tiểu.

b- Hai hệ chờ thuần nhất

Giả sử hai hệ đều là các hệ chờ thuần nhất $E_1(n_1,\lambda_1, \mu_1)$; $E_2(n_2,\lambda_2, \mu_2)$.

Ta có $\lambda_1=\lambda$ và $\lambda_2 =N_h(1). \mu_1$.

Các bước phân tích mô hình cũng như lựa chọn các phương án thiết kế hoàn toàn như trong trường hợp hệ 1 là hệ từ chối và hệ 2 là hệ chờ. Tuy nhiên chú ý rằng với hệ chờ thuần nhất $N_h=\alpha$, vì vậy việc tính dòng yêu cầu cho hệ 2 đơn giản hơn. Điểm chú ý ở đây là chúng ta chỉ chọn được (n_1, n_2) sao cho x_1 và x_2 cùng nhỏ hơn 1. Các chi phí phát sinh đối với hệ thống loại này thường được quan tâm là: Chi phí do yêu cầu phải chờ ở cả hai giai đoạn, chi phí trang bị kênh phục vụ cho từng giai đoạn. Có thể thiết lập hàm chi phí như sau:

$$F= M_c(1)T_c(1)C_c(1) + M_c(2)T_c(2)C_c(2)$$

với điều kiện : $G(n_1, n_2) \le G_0$.

trong đó: $M_c(i)$, $T_c(i)$, $C_c(i)$ là độ dài hàng chờ, thời gian chờ và chi phí cho yêu cầu chờ trong một đơn vị thời gian của giai đoạn i (1=1,2).

Thí dụ: Xét hệ thống phục vụ hai giai đoạn với dòng yêu cầu Poisson dừng trung bình 50 yêu cầu/giờ. Mỗi kênh ở giai đoạn 1 có năng suất 10 yêu cầu/giờ cần trang bị với chi phí tương ứng là 24 (đơn vị tiền tệ), ở giai đoạn 2 là 30 yêu cầu/giờ, cần trang bị với chi phí tương ứng là 40 (ĐVTT), tổng nguồn vốn cho trang bị tối đa là 450 (ĐVTT). Chi phí cho mỗi yêu cầu chờ trong một giờ ở các giai đoạn lần lượt là 100 và 150 (ĐVTT).

Bảng tính toán sau cho phép chọn phương án chi phí cực tiểu với hạn chế nguồn vốn G_0=450.

Trong bảng ta chỉ tính n_1 sao cho x_1 <1 và n_2 sao cho x_2<1. Với điều kiện này ta có 10 cặp (n_1, n_2) được tính chi tiết trong bảng.

Kết quả cực tiểu hàm F cho thấy cần chọn n_1= 10 và n_2=5. Về mặt lý thuyết chúng ta có thể chứng tỏ rằng với mỗi n_1 hàm F có giá trị nhỏ nhất khi n_2 lớn nhất có thể, vì vậy có thể rút gọn việc tính toán ở bảng sau nếu chúng ta thấy khối lượng tính toán quá lớn.

n_1	x_1	$N_b(1)$	$M_c(1)$	$T_c(1)$	n_2	x_2	$M_c(2)$	$T_c(2)$	F
5	1	5			8				
6	0.83333	5	0.16198	0.0027	7	0.2381	0.00055	2.6E-06	0.04373
7	0.71429	5	0.22481	0.00321	7	0.2381	0.00055	2.6E-06	0.0722
8	0.625	5	0.1701	0.00213	6	0.27778	0.00299	1.7E-05	0.03618
9	0.55556	5	0.08516	0.00095	5	0.33333	0.01495	1E-04	0.00828
10	0.5	5	0.03425	0.00034	5	0.33333	0.01495	1E-04	0.0014
11	0.45455	5	0.01237	0.00011	4	0.41667	0.0676	0.00056	0.00585
12	0.41667	5	0.00418	3.5E-05	4	0.41667	0.0676	0.00056	0.00573
13	0.38462	5	0.00134	1E-05	3	0.55556	0.2235	0.00248	0.08325
14	0.35714	5	0.00041	2.9E-06	2	0.83333	0.16401	0.00273	0.06725
15	0.33333	5	0.00012	7.9E-07	2	0.83333	0.16401	0.00273	0.06725
16	0.3125	5	3.2E-05	2E-07	1	1.66667			

IV- MỘT SỐ HỆ THỐNG PHỤC VỤ CÔNG CỘNG POISSON KHÔNG DỪNG

Tính dừng của hệ thống được nêu trong phần 1 căn cứ vào tính chất của các dòng biến cố tác động đến sự tồn tại, vận động của hệ thống. Trong hầu hết các trường hợp, với các hệ phục vụ công cộng trong thực tế, chúng ta có thể thông qua phân tích các dòng biến cố thiết lập các hệ dừng có tính chu kỳ và giải các bài toán dừng tương ứng. Ngoài ra các hệ không dừng còn thể hiện bởi sự biến động của từng yếu tố theo những chỉ tiêu đầu ra của chính hệ phục vụ. Một trong những vấn đề cần quan tâm là sự biến động của dòng yêu cầu đến hệ thống đối với các hệ cạnh tranh. Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu có tính đại diện các tình huống và nêu ra cách thức tiếp cận làm cơ sở cho các nghiên cứu cụ thể đối với các bài toán tương tự.

1- Hệ thống phục vụ công cộng với dòng vào dừng có tính chu kỳ

a- Mô tả tình huống

Xét hệ thống phục vụ công cộng n kênh năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số. Trong một đơn vị thời gian có thể chia thành 2 hay nhiều phần mà trong mỗi phần thời gian này dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson dừng mật độ λ_i (i=1,2,3..p).

b- Phân chia và phân tích hệ thống trên cơ sở phân chia dòng yêu cầu

Trên cơ sở thống kê số liệu dòng yêu cầu đến hệ thống chúng ta có thể tiến hành "phân đoạn" mỗi đơn vị thời gian thành các phần có tính dừng theo các bước sau:

+ Thu thập số liệu về số yêu cầu đến hệ thống hay số yêu cầu tiềm năng đến hệ thống trong từng phần nhỏ của một đơn vị thời gian thực tế (ngày, tuần, tháng, quí.. .).

+ Mô tả thống kê để nhận biết tính khác biệt nếu có.

+ Kiểm tra thống kê về các giả thiết "phân đoạn", hay dùng các phần mềm phân chia tự động dòng yêu cầu theo thời gian.

+ Thiết lập các hệ bộ phận theo thời gian.

+ Giải các bài toán bộ phận và đánh giá chung cho toàn bộ hệ thống.

c- Một qui trình bằng số

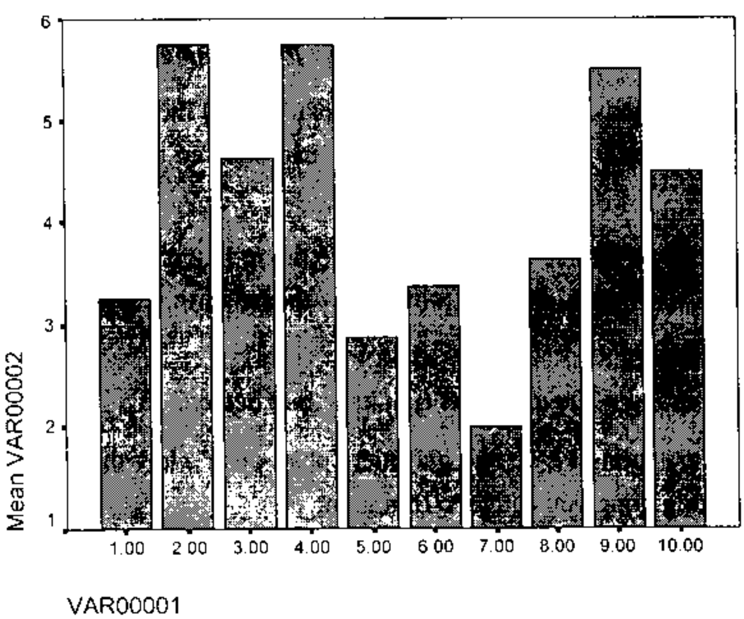
Để mô tả cho các bước phân chia và phân tích hệ thống nói trên ta dùng một thí dụ bằng số, mà cách thức phân tích không mất tính tổng quát.

Một phòng khám có 2 bàn bác sỹ với khả năng khám bệnh như nhau với thời gian khám cho mỗi bệnh nhân trung bình là 10 phút. Giả thiết thời gian khám bệnh tuân theo qui luật chỉ số (có thể kiểm tra được giả thiết này).

Dòng bệnh nhân đến phòng khám được quan sát ngẫu nhiên 8 ngày như sau:

Giờ\ ngày VAR00001	Số bệnh nhân VAR00002							
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	3	3	3	4	3	4	1	5
2	4	4	7	6	7	5	7	6
3	4	6	7	3	4	4	5	4
4	6	4	8	4	6	5	5	8
5	3	4	4	5	2	2	1	2
6	2	3	4	3	5	4	4	2
7	2	0	0	0	5	1	5	3
8	3	4	1	5	4	3	6	3
9	5	7	6	6	3	7	6	4
10	4	6	4	5	3	4	6	4

Mô tả thống kê số bệnh nhân đến trung bình theo giờ



Với mô tả trên ta tạm chia 2 khoảng thời gian

I={ 1, 5,6,7,8} và II={2,3,4,9,10}

Bảng sau kiểm định giả thiết về hai trung bình trong hai khoảng I và II

ANOVA

VAR00002

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	96.800	1	96.800	45.498	.000
Within Groups	165.950	78	2.128		
Total	262.750	79			

Kết quả cho thấy hai trung bình khác nhau có ý nghĩa.

Kiểm định qui luật phân phối:

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00002
N		40
Poisson Parameter[a,b]	Mean	3.0250
Most Extreme Differences	Absolute	.093
	Positive	.061
	Negative	-.093
Kolmogorov-Smirnov Z		.586
Asymp. Sig. (2-tailed)		.883

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

c. NHOM = 1.00

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00002
N		40
Poisson Parameter[a,b]	Mean	5.2250
Most Extreme Differences	Absolute	.160
	Positive	.108
	Negative	-.160
Kolmogorov-Smirnov Z		1.011
Asymp. Sig. (2-tailed)		.258

a. Test distribution is Poisson.

b. Calculated from data.

c. NHOM = 2.00

Kết quả kiểm định cho thấy trong I và II dòng yêu cầu đến hệ thống phân phối Poisson với trung bình tương ứng là 3.025 và 5.225 (yêu cầu/giờ).

Tất cả các phân tích trên cho phép phân chia phòng khám này thành hai hệ "phục vụ công cộng" I và II tương ứng với các dòng vào có trung bình khác nhau. Với đặc điểm của các phòng khám chúng ta có thể phân tích trong hai trường hợp hệ có chờ với độ dài hàng chờ hạn chế và hệ từ chối. Sau đây là hai trường hợp như vậy với hai mục đích phân tích khác nhau.

d- Thiết kế và phân tích

Nếu hai hệ được thiết kế là hai hệ từ chối (Eclăng) kết quả nhận được từ mỗi hệ có thể phản ảnh qua các chỉ tiêu sau (kết quả từ MH4):

Hệ I:

1-Xac suat he thong co 2 kenh roi P(0)=0.6130

2-Xac suat he thong co 2 kenh ban

hay xac suat yeu cau bi tu choi P(tc)=0.0779

3-So yeu cau duoc phuc vu trung binh Npv= 2.789

4-So kenh ban trung binh Nb= 0.465

5-He so kenh ban Hb= 0.232

Hệ II:

1-Xac suat he thong co 2 kenh roi P(0)=0.4444

2-Xac suat he thong co 2 kenh ban

hay xac suat yeu cau bi tu choi P(tc)=0.1685

3-So yeu cau duoc phuc vu trung binh Npv= 4.344

4-So kenh ban trung binh Nb= 0.724

5-He so kenh ban Hb= 0.362

- Cải tiến hệ thống

Với các kết quả trên chúng ta có thể cải tiến hệ thống theo cách tạo nên hệ chờ với độ dài hàng chờ cho phép sao cho tỷ lệ bệnh nhân bị từ chối ở mức tối thiểu, chấp nhận được. Giả sử chúng ta đặt mức 5% cho tỷ lệ này thì cần bao nhiêu chỗ chờ?. Có thể nhận được câu trả lời qua bảng tính sau:

m	P_{tc}	
	Hệ I	Hệ II
1	0.0192	0.0682
2		0.0288

Vậy có thể chọn m=2 (Chấp nhận tối đa 2 bệnh nhân chờ).

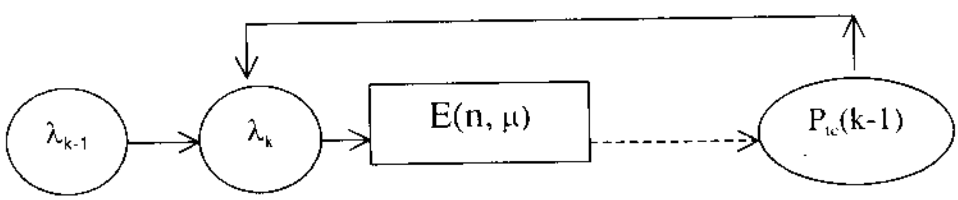
Chúng ta hoàn toàn có khả năng phân tích tương tự theo các chỉ tiêu khác.

8- Hệ thống phục vụ công cộng với dòng vào phụ thuộc chất lượng phục vụ

a- Mô tả tình huống

Xét hệ thống phục vụ công cộng n kênh, năng suất các kênh bằng nhau và bằng μ, thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số. Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson có trung bình λ_0 tại $t=t_0$. Người ta có thể phân chia thời gian thành các khoảng bằng nhau và số yêu cầu trung bình đến hệ thống vào khoảng thời gian t_k phụ thuộc vào số yêu cầu trung bình đến hệ thống trong khoảng t_{k-1} và chất lượng phục vụ (có thể đặc trưng bởi xác suất từ chối) của khoảng thời gian t_{k-1}. Ngoài ra tuỳ thuộc môi trường của hệ thống có thể tồn tại các tham số khác chi phối sự biến động của dòng yêu cầu.

Có thể mô tả tình huống trên như sau:



b- Môi trường hoạt động của hệ thống và qui luật biến động dòng yêu cầu

Đối với tình huống này, chúng ta quan tâm đến tính chất ổn định hay tính dừng của hệ thống sau một số khoảng thời gian kể từ t_0. Có thể tạm thời phân chia môi trường hoạt động của hệ phục vụ loại này thành hai loại: Không cạnh tranh và có cạnh tranh.

Hệ không cạnh tranh được hiểu là trong cùng một "địa bàn" sự lựa chọn cơ sở phục vụ của yêu cầu không bị ảnh hưởng bởi các cơ sở phục vụ khác. Tuy nhiên, có thể tồn tại các dịch vụ thay thế hay so sánh một cách chung nhất theo tâm lý của yêu cầu. Ngược lại hệ cạnh tranh được hiểu là hệ hoạt động trong môi trường trên địa bàn có nhiều cơ sở phục vụ cùng loại. Theo từng trường hợp nói trên ta có thể xác định những điều kiện đủ thông thường nhất về tính hội tụ của dòng yêu cầu - cũng là tính ổn định hay tính dừng của hệ thống theo thời gian. Sau đây ta phân tích các trường hợp với chỉ tiêu chất lượng là xác suất từ chối yêu cầu: $P_{tc}(k)$.

+ Với hệ phục vụ không cạnh tranh:

Trong trường hợp đơn giản có thể giả sử $\lambda_k = f(P_{tc}(k-1), \lambda_{k-1})$.

Thực tế tồn tại một mức P_{tc}^* sao cho khi $P_{tc}(k-1) < P_{tc}^*$ thì f tăng theo $P_{tc}(k-1)$, ngược lại khi $P_{tc}(k-1) > P_{tc}^*$ thì f giảm theo $P_{tc}(k-1)$. Nhưng do hệ hoạt động không cạnh tranh nên P_{tc}^* chưa biết, tuy nhiên có thể sử dụng phân tích thống kê để xác định mức P_{tc}^* nếu dãy quan sát theo thời gian của λ_k giảm chậm dần khi đó $P_{tc}(k) > P_{tc}^*$ (hoặc tăng chậm dần khi đó $P_{tc}(k) < P_{tc}^*$). Trong các tính toán sau này chúng ta cũng không cần phân biệt trước tình trạng dòng yêu cầu đang giảm dần hay đang tăng dần. Những kiểm định thống kê về các xu thế này chỉ muốn xác nhận rằng sự biến đổi của dòng yêu cầu đến hệ thống có tính chất nội sinh mà thôi.

+ Với hệ phục vụ cạnh tranh:

Hệ phục vụ cạnh tranh tồn tại trong lớp các hệ cùng loại và vì vậy việc thu hút được hay mất yêu cầu tuỳ thuộc vào chất lượng có tính so sánh với các hệ khác. Một cách đơn giản là tồn tại P_{tc}^* ước lượng được của lớp hệ thống này mà hàm f luôn có tính chất đã nêu ở trường hợp trên. Sự hội tụ đến một mức nào đó của dòng yêu cầu theo dãy thời gian là mặc nhiên. Trong trường hợp này người ta cần xét đến giới hạn hoạt động được của hệ thống về mặt kỹ thuật và kinh tế đầy đủ hơn.

c- Một số thí dụ cụ thể

Các thí dụ sau đây nhằm gợi ý một số tình huống và cách thức giải quyết các bài toán có thể gặp trong thực tế. Mặc dù giải pháp không tổng quát nhưng phương pháp tiếp cận giúp chúng ta làm quen với cách thức tư duy thực tế.

Thí dụ 1: Một hệ phục vụ công cộng kiểu Eclang có 5 kênh phục vụ năng suất như nhau và bằng 4 yêu cầu/giờ. Tại t=0 người ta ước tính dòng yêu cầu đến hệ thống có trung bình 12 yêu cầu/giờ. Hãy xác định thời gian hệ bắt đầu hoạt động ổn định như một hệ dừng trong các trường hợp quan niệm hệ thống ổn định khi:

1- Xác suất từ chối yêu cầu không lớn hơn 5%.

2- Biến động của số yêu cầu không quá 2,5%.

Biết rằng qua thống kê người ta ước lượng được:

$$Lamda(k) = Lamda(k-1)[1- 0,5P_{tc}(k-1) - 0,001P_{tc}^2(k-1)]$$

Giải: Tiến hành giải bài toán theo một thuật toán lặp trên cơ sở dòng yêu cầu tại t_0=12. Mỗi tuần tính lại mật độ dòng yêu cầu theo công thức:

$$Lamda(k) = Lamda(k-1)[1- 0,5P_{tc}(k-1) - 0,001P_{tc}^2(k-1)]$$

Bảng kết quả tính toán sau cho ta thấy các lời giải tương ứng là:

1: 9 tuần sau t_0

2: 10 tuần sau t_0.

Tuần	lamda(k)	P_{tc}(k)	Lamda(k)/Lamda(k-1)
1	12	0.110054	
2	11.33953	0.09616	5.50%
3	10.79422	0.085078	4.81%
4	10.33496	0.076077	4.25%
5	9.941777	0.068648	3.80%
6	9.600486	0.062432	3.43%
7	9.300762	0.057165	3.12%
8	9.034895	0.052654	2.86%
9	8.797008	**0.048754**	2.63%
10	8.582542	0.045353	**2.44%**

Thí dụ 2: Quan sát 10 tuần trên hai chỉ tiêu dòng vào và tỷ lệ yêu cầu bị từ chối của một hệ phục vụ người ta có số liệu sau.

Tuần	lamda(k)	Ptc	Tuần	lamda(k)	Ptc
1	30	0.264922	6	22	0.16088
2	28	0.242273	7	20	0.147012
3	26	0.217083	8	19	0.13495
4	25	0.195471	9	18	0.124408
5	23	0.176896	10	17	0.115149

Hãy ước lượng hàm hồi qui bậc 2 của số yêu cầu trung bình đến hệ thống tuần sau phụ thuộc tỷ lệ yêu cầu bị từ chối tuần trước và số yêu cầu trung bình đến hệ thống tuần trước. Trên sơ sở đó hãy xác định thời gian hệ thống bắt đầu được coi là ổn định nếu chúng ta coi một hệ là ổn định khi xác suất từ chối yêu cầu không quá 5%.

Sau đây là một ước lượng hồi qui đối với dòng yêu cầu

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
R Square	0.985677
Adjusted R Square	0.977083
Standard Error	0.4478
Observations	9

	df
Regression	3
Residual	5
Total	8

	Coefficients
Intercept	12.90032
Lamda(k-1)	-0.15592
P_{tc}(k-1)	79.49725
P_{tc}(k-1)^2	-22.615

Trên cơ sở ước lượng này ta có kết quả theo thời gian về chỉ tiêu tỷ lệ từ chối yêu cầu của hệ thống như sau:

Tuần	**Lamda**	**Ptc**
1	19	0.1029046
2	17.87905	0.0875145
3	16.89664	0.0746845
4	16.07692	0.0645495
5	15.43094	0.0569811
6	14.95079	0.0516183
7	14.61249	0.0479828

Như vậy sau 7 tuần kể từ tuần quan sát cuối cùng hệ được coi là ổn định.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Chứng minh rằng nếu dòng biến cố A có thời gian giữa hai lần xuất hiện liên tiếp các biến cố phân phối chỉ số thì A là dòng biến cố Poisson. Nêu cách ứng dụng kết luận này khi khảo sát các dòng biến cố của hệ phục vụ công cộng.

2. Chứng minh rằng tổng hai dòng Poisson dừng độc lập là một dòng Poisson dừng. Kết luận này có ý nghĩa gì trong phân tích hệ thống phục vụ công cộng.

3. Cho hệ phục vụ công cộng Eclang n kênh, hãy nêu cách thức xác định năng suất thiết kế trung bình của kênh nhờ việc quan sát dòng phục vụ của cả hệ thống hoặc dòng các yêu cầu bị từ chối của hệ thống đó. Nêu một thí dụ bằng số và thực hiện các tính toán cần thiết.

4. Bằng các mô tả và kiểm định thống kê hãy phân tích các dòng yêu cầu đến một hệ thống phục vụ công cộng với số liệu quan sát tám ngày sau đây:

giờ thứ	số yêu cầu	giờ thứ	số yêu cầu	giờ thứ	số yêu cầu	giờ thứ	số yêu cầu
1	4	3	4	5	6	7	4
1	5	3	8	5	7	7	5
1	9	3	8	5	5	7	7
1	11	3	5	5	3	7	8
1	7	3	5	5	8	7	6
1	9	3	5	5	4	7	9
1	9	3	6	5	7	7	8
1	8	3	7	5	5	7	8
2	5	4	5	6	7	8	8
2	6	4	9	6	10	8	4
2	6	4	5	6	7	8	9
2	4	4	5	6	4	8	9
2	12	4	6	6	9	8	7
2	8	4	6	6	8	8	5
2	7	4	6	6	9	8	8
2	8	4	7	6	7	8	9

a- Trên cơ sở phân tích dòng yêu cầu hãy xác định các hệ thống phục vụ công cộng trong các khoảng thời gian khác nhau và đánh giá hoạt động của hệ phục vụ nếu dòng yêu cầu trên đến một hệ thống Eclang có 5 kênh phục vụ, năng suất các kênh bằng nhau và bằng 2 yêu cầu giờ.

b- Với hệ thống phục vụ là độc quyền và các yêu cầu tự điều chỉnh theo tỷ lệ bị từ chối. Hãy nêu một cơ chế điều chỉnh theo ngày và xác định trạng thái dừng (ổn định) của hệ thống cùng các chỉ tiêu đánh giá chất lượng hệ thống tương ứng.

5. Cho hệ Eclang n kênh, hãy phân tích sự biến động của tỷ lệ yêu cầu bị từ chối theo n bằng hai cách:

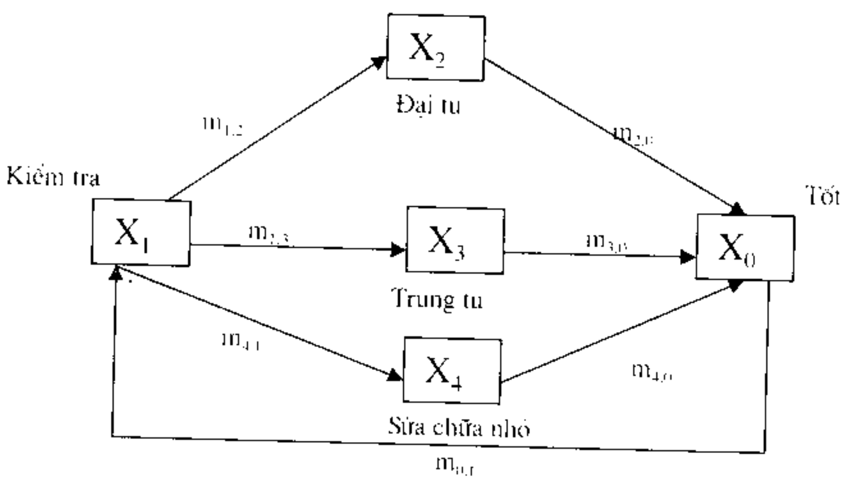
a- Mô phỏng trên bảng tính

b- Sử dụng các công cụ giải tích

c- Thiết lập hồi qui thực nghiệm theo cách a, với các tham số α khác nhau. Từ các hồi qui thực nghiệm này hãy thử lựa chọn một hàm mô tả sự biến động của chỉ tiêu nói trên theo n và α.

6. Viết hệ phương trình trạng thái của một hệ thống Poisson dừng và tìm các xác suất trạng thái.

a- Một ô tô có động cơ điện với sơ đồ trạng thái sau:



b- Giả sử tại $t=t_0$, động cơ đang ở trạng thái X_1. Thời gian để hoàn thành tất cả các công việc kiểm tra và sửa chữa không vượt quá Δt.

Hãy lập sơ đồ chuyển trạng thái sau t_0 và tìm công thức tính xác suất của các trạng thái tương ứng tại t thuộc khoảng $(t_0, t_0+\Delta t)$.

7. Một cửa hàng dịch vụ rửa xe có 2 dây phục vụ, trung bình mỗi dây phục vụ xong 1 xe mất 30 phút. Dòng xe yêu cầu phục vụ là dòng Poisson dừng với cường độ 4 xe/giờ. Nguyên tắc phục vụ của cửa hàng là nguyên tắc của hệ từ chối và mỗi ngày làm việc 10 giờ.

a- Tính số xe được phục vụ trong ngày.

b- Muốn tỷ lệ xe không được phục vụ ít hơn 20% thì cần bao nhiêu dây phục vụ với năng suất như trên? với số dây tối thiểu đó mỗi ngày cửa hàng thu được số tiền lãi trung bình là bao nhiêu? Biết chi phí phục vụ 1 xe là 15000đồng/xe, chi phí cho 1 ngày 100000đồng và nếu mỗi dây rỗi sẽ gây lãng phí 40000đồng/ngày.

c- Giải câu b trong trường hợp số chỗ chờ m=6.

8. Thực hiện lại bài tập 5 với hệ chờ hạn chế trong hai trường hợp m không đổi và m biến đổi.

9. Bộ phận kiểm tra chất lượng sản phẩm của 1 xí nghiệp gồm 2 máy kiểm tra tự động được bố trí song song. Năng suất của các máy bằng 7 và 9 sản phẩm/phút. Nguyên tắc phục vụ là nếu sản phẩm đến kiểm tra khi cả hai máy rỗi thì phân chia ngẫu nhiên vào mỗi máy với xác suất tỷ lệ với năng suất mỗi máy; nếu chỉ có một máy rỗi thì được nhận kiểm tra tại máy rỗi đó. Sản phẩm không được kiểm tra nếu cả hai máy đều bận. Dòng sản phẩm được tự động chuyển đến bằng băng chuyền và trung bình 1 phút có 12.

a- Mô hình hoá bộ phận trên dưới dạng hệ thống phục vụ công cộng. Lập sơ đồ trạng thái và viết hệ phương trình trạng thái.

b- Xác định tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra.

c- Nếu thay hai máy trên bằng 2 máy cùng có năng suất 8 sản phẩm/phút thì tỷ lệ sản phẩm được kiểm tra sẽ là bao nhiêu?.

10. Một cửa hàng bảo hành xe máy Honda có 5 công nhân phục vụ và 1 diện tích để m xe chờ. Dòng xe có nhu cầu bảo hành giả thiết là dòng tối giản với trung bình 4 xe/giờ. Thời gian trung bình bảo trì xong 1 xe của 1 công nhân mất 1 giờ, mỗi công nhân bảo hành 1 xe.

Hãy phân tích các chỉ tiêu sau theo m:

- Xác suất phục vụ

- Số công nhân bận trung bình.

- Số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình.

11. Một xí nghiệp sửa chữa xe ô tô có 2 dây chuyền phục vụ và 1 diện tích 5 xe chờ. Trung bình trong 1 ngày có 4 xe đến yêu cầu được sửa chữa và trung bình một ngày mỗi dây chuyền sửa chữa xong được 2 xe.

a- Tính P_{pv} và suy ra số xe được sửa chữa trong 1 ngày.

b- Tính số xe chờ trung bình và thời gian chờ trung bình của mỗi xe.

c- Hãy phân tích tỷ lệ xe có nhu cầu sửa chữa bị từ chối theo hai tham số: Số dây chuyền phục vụ và số chỗ chờ.

12. Một cây xăng có 2 máy bơm, năng suất như nhau và trung bình 30 xe/giờ. Dòng khách hàng giả thiết là tối giản có λ =50 khách/giờ. Nguyên tắc phục vụ là nguyên tắc của hệ chờ thuần nhất.

a- Tính tỷ lệ khách hàng phải chờ, độ dài hàng chờ trung bình và thời gian chờ trung bình của khách hàng.

b- Với các tham số nói trên nếu chúng ta thay hệ trên bằng hệ chờ với 4 chỗ chờ thì cần tối thiểu bao nhiêu máy để tỷ lệ xe được phục vụ ngay không thấp hơn 95%.

13. Cần xây dựng 1 kho có diện tích bao nhiêu, để bảo đảm trên 99% hàng hoá đưa đến được bảo quản trong kho. Biết rằng hàng năm (365 ngày) trung bình có khoảng75000 tấn hàng hoá có nhu cầu được bảo quản. Hàng hoá được bảo quản theo từng lô với khối lượng trung bình 1 lô là 455 tấn và yêu cầu trên 1 m^2 diện tích chỉ bảo quản 0,65 tấn hàng hoá. Thời gian trung bình mỗi lô hàng bảo quản trong kho là 10 ngày. Nguyên tắc hoạt động của kho là nguyên tắc của hệ từ chối cổ điển.

14. Một trung tâm xử lý tin nhanh có 4 tổ làm việc độc lập, được tổ chức như một hệ thống Eclang. Năng suất của mỗi tổ là 3 bản tin/giờ, dòng các bản tin đến cần xử lý là dòng Poisson dừng trung bình 10 bản tin/giờ.

a- Hãy tính các chỉ tiêu đánh giá hoạt động của trung tâm.

b- Người ta muốn nâng tỷ lệ bản tin đến trung tâm được xử lý và dự định hai phương án có tốn phí như nhau:

1-Tăng thêm 3 tổ có cùng năng suất như các tổ cũ.

2- Nâng năng suất gấp 2 lần cho 4 tổ hiện có.

Nên chọn phương án nào hiệu quả hơn?

15.a. Căn cứ vào tỷ lệ xe không được nhận khám tại một trạm khám xe tổ chức theo chế độ từ chối cổ điển; dòng vào là dòng Poisson dừng trung bình 10 xe/giờ. Hãy cho biết nên chọn phương án nào trong hai phương án sau:

1- Bố trí 4 tổ với năng suất mỗi tổ 5 xe/giờ.

2- Bố trí 5 tổ với năng suất mỗi tổ 4 xe/giờ.

b- Kết luận trên có đúng với dòng vào là dòng Poision dừng trung bình y xe/giờ hay không?.

16. Một phòng kiểm tra chất lượng sản phẩm tự động có hai máy, năng suất như nhau 24 sản phẩm/phút. Dòng sản phẩm từ dây chuyền đến phòng kiểm tra là dòng Poisson dừng trung bình 36 sản phẩm /phút. Người ta dự định bố trí theo một trong hai phương án sau:

Phương án I: để hai máy song song, làm việc độc lập như một hệ Eclang 2 kênh. Sản phẩm sẽ vào kho mà không kiểm tra khi cả hai máy bận.

Phương án II: để hai máy liên tiếp, máy một bận thì sản phẩm chuyển sang máy hai, nếu máy hai cũng bận thì sản phẩm vào kho không kiểm tra.

Nên chọn phương án nào để tỷ lệ sản phẩm vào kho không kiểm tra nhỏ hơn?

17. Một hồ sơ cần được kiểm tra 2 mục A và B, người ta có thể bố trí hai cách kiểm tra như sau:

Cách 1: Bố trí hai tổ kiểm tra mỗi tổ kiểm tra một mục không phân biệt thứ tự và hai mục này độc lập nhau.

Cách 2: Bố trí một tổ kiểm tra cả hai mục với năng suất bằng 2 lần năng suất trung bình của hai tổ nêu ở cách 1.

a- Mô tả các hệ thống phục vụ công cộng tương ứng trong các trường hợp chế độ phục vụ khác nhau. Lập sơ đồ chuyển trạng thái và viết hệ phương trình trạng thái của các hệ thống. So sánh tỷ lệ hồ sơ phải chờ và thời gian chờ nếu các hệ được thiết kế có chờ.

18. Viết,chương trình giải các hệ thống phục vụ công cộng Eclang, chờ thuần nhất và chờ hạn chế trên Gams. Thực hiện chương trình với các thí dụ cụ thể.

19. Viết chương trình trên Gams giải các bài toán mục III-3-a,b. Thực hiện với các thí dụ cụ thể.

20. Viết chương trình trên Gams giải bài toán xác định chỗ chờ tối ưu với hàm mục tiêu lồi, bậc 2.

PHỤ LỤC 1

POM, MH4 VÀ GAMS VỚI MÔ HÌNH PHỤC VỤ CÔNG CỘNG

1- Pom với mô hình phục vụ công cộng

Pom giải các bài toán: Pom luôn xét hệ có chờ (Waitting Line Models)

- Hệ một kênh với thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số (single server with exponential service)

- Hệ một kênh với thời gian phục vụ cố định (single server with constant service)

- Hệ nhiều kênh với thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số (multiple servers with exponential service)

- Hệ với nguồn yêu cầu hạn chế (finite population, multiple servers, exponential)

- Hệ với số yêu cầu có trong hệ thống hữu hạn (finite queue, single or multiple servers)

- Hệ một kênh với phân phối của thời gian phục vụ tổng quát (single server with general or Eclang-k service)

Trong các hệ thống Pom đưa ra có những giả thiết riêng như với các hệ có chờ cường độ dòng vào khác tổng công suất của hệ thống. Hạn chế số yêu cầu có trong hệ thống đối với hệ chờ hạn chế.

Ngoài ra Pom có quan tâm đến các chi phí như chi phí theo thời gian phục vụ, chi phí theo thời gian chờ.

Pom cho kết quả với các chỉ tiêu hạn chế nhất, ngoài ra Pom cho xác suất chi tiết về số yêu cầu có trong hệ thống.

Sau đây là vài thí dụ trên Pom:

Thí dụ 1: Hệ thống 1 kênh chờ thuần nhất (M/M/1) với dòng vào trung bình 10 yêu cầu/phút. Năng suất kênh 12 yêu cầu/phút, thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số.

Lời giải của POM:

Waiting Line Models   Solution

M/M/1 - single server, exponential service

arrival rate(lambda)	10.00	Average server utilization	.8333333
service rate(mu)	12.00	Average number in the queue(Lq)	4.166667
number of servers	1	Average number in the system(L)	5.0000
		Average time in the queue(Wq)	.4166667
		Average time in the system(W)	0.5000

Number in system, k	Probability P(n=k)	Cumulative P(n_k)	Decum P(n>k)
0	.1667	0.1667	0.8333
1	.1389	0.3056	0.6944
2	.1157	0.4213	0.5787
3	.0965	0.5177	0.4823
4	.0804	0.5981	0.4019
5	.0670	0.6651	0.3349
6	.0558	0.7209	0.2791
7	.0465	0.7674	0.2326
8	.0388	0.8062	0.1938
9	.0323	0.8385	0.1615
10	.0269	0.8654	0.1346
11	.0224	0.8878	0.1122
12	.0187	0.9065	0.0935
13	.0156	0.9221	0.0779
14	.0130	0.9351	0.0649
15	.0108	0.9459	0.0541

Thí dụ 2: Hệ thống nhiều kênh (s=3) chờ thuần nhất (M/M/s) với dòng vào trung bình 20 yêu cầu/phút. Năng suất kênh 10 yêu cầu/phút, thời gian phục vụ tuân theo qui luật chỉ số.

Lời giải của POM:

Waiting Line Models Solution

M/M/s - multiple server, exponential service

arrival rate(lambda)	20.00	Average server utilization	.6666667
service rate(mu)	10.00	Average number in the queue(Lq)	0.888889
number of servers	3	Average number in the system(L)	2.8889
		Average time in the queue(Wq)	.0444444
		Average time in the system(W)	.1444445

Number in system, k	Probability P(n=k)	Cumulative P(n_k)	Decum P(n>k)
0	.1111	0.1111	0.8889
1	.2222	0.3333	0.6667
2	.2222	0.5556	0.4444
3	.1481	0.7037	0.2963
4	.0988	0.8025	0.1975
5	.0658	0.8683	0.1317
6	.0439	0.9122	0.0878
7	.0293	0.9415	0.0585
8	.0195	0.9610	0.0390
9	.0130	0.9740	0.0260
10	.0087	0.9827	0.0173
11	.0058	0.9884	0.0116
12	.0039	0.9923	0.0077
13	.0026	0.9949	0.0051
14	.0017	0.9966	0.0034
15	.0011	0.9977	0.0023

Thí dụ 3: Hệ thống chờ với số yêu cầu có thống hệ thống hạn chế (M/M/s with a finite queue)

Lời giải của POM:

arrival rate(lambda)	12.00	Average server utilization	.7756387
service rate(mu)	5.00	Average number in the queue(Lq)	1.442415
number of servers	3	Average number in the system(L)	3.769331
maximum system size	10	Average time in the queue(Wq)	.1239765
		Average time in the system(W)	.3239765
		Effective arrival rate	11.63458

Number in system, k	Probability P(n=k)	Cumulative P(n_k)	Decum P(n>k)
0	.0630	0.0630	0.9370
1	.1513	0.2143	0.7857
2	.1815	0.3958	0.6042
3	.1452	0.5410	0.4590
4	.1162	0.6572	0.3428
5	.0929	0.7501	0.2499
6	.0743	0.8244	0.1756
7	.0595	0.8839	0.1161
8	.0476	0.9315	0.0685
9	.0381	0.9695	0.0305
10	.0305	1.0000	-.0000

2- MH4 với mô hình phục vụ công cộng

Khác với Pom, MH4 là bộ chương trình do tác giả giáo trình tự soạn thảo. Với cấu trúc thực đơn tương đối đơn giản, tệp chủ của chương trình có tên MH4.EXE chạy trên môi trường MS-DOS. MH4 hiện có 3 modul theo 3 chương của giáo trình mô hình toán xuất bản nội bộ năm 1998 (Xem phụ lục 2):

Sử dụng MH4 cho bài toán phục vụ công cộng

Giả sử chúng ta có MH4 trong thư mục MH, chạy tệp MH4.EXE ta có thực đơn đầu tiên (Xem phụ lục 2)

Chọn 2 ta có thực đơn:

```
**********************************
THUC DON BAI TOAN PHUC VU CONG CONG
  **********************
0 - Tro ve thuc don chinh
1 - Bai toan Eclang
2 - Bai toan cho han che
3 - Bai toan cho thuan nhat
................................
Ban chon cong viec so:
```

Thủ tục giải các bài toán có thể mô tả qua thí dụ sau:

Chẳng hạn chúng ta chọn 2 (Hệ chờ hạn chế), ta có thể giải các bài toán cụ thể của hệ phục vụ công cộng chờ với độ dài hàng chờ hạn chế.

Trước tiên ta trả lời có cho câu hỏi sau:

Ban chay thu mot thi du ?(1=co; 0=khong):

Chạy thử một thí dụ nếu chọn 1

Bỏ qua nếu chọn 0

Giả sử bỏ qua ta sẽ bắt đầu với việc nhập, sửa dữ liệu cho một bài toán mới qua việc nhập trực tiếp các dữ liệu (chẳng hạn sau khi nhập 4 tham số của mô hình này ta có):

Ban chay thu mot thi du ?(1=co; 0=khong):0

NHAP SO LIEU MOI

So kenh phuc vu n = 3

Nang suat mot kenh phuc vu w = 5

Mat do dong yeu cau y = 12

So cho cho toi da m = 7

Ban co sua so lieu khong?(1=co ; 0=khong):

Trả lời 1 khi cần sửa dữ liệu, chúng ta có thể sửa từng dữ liệu vô hạn lần

Trả lời 0 chúng ta có kết quả dạng: (hãy so sánh với kết quả từ Pom)

So kenh phuc vu n = 3

Nang suat mot kenh phuc vu w = 5.00

Mat do dong yeu cau y = 12.00

So cho cho toi da m= 7

Ban co sua so lieu khong?(1=co ; 0=khong):0

MOT SO CHI TIEU DANH GIA HOAT DONG CUA HE THONG

1- Xac suat he thong co 3 kenh roi P(0)=0.0630

2- Xac suat mot yeu cau bi tu choi Ptc=0.0305

3- Xac suat mot yeu cau duoc phuc vu Ppv=0.9695

4- Xac suat mot yeu cau duoc phuc vu ngay Popv=0.3958

5- Xac suat mot yeu cau cho Pc= 0.57

6- Xac suat he thong co 3 kenh ban P(nb)=0.5433

7- So kenh ban trung binh Nb= 2.33

8- Do dai hang cho trung binh Mc= 1.44

9- Thoi gian trung binh yeu cau trong he thong Tc= 0.12

10- Thoi gian roi giua 2 lan PV Tr= 0.06

Co ghi ket qua khong? (1=co;0=khong):

Với việc trả lời câu hỏi này chúng ta có thể ghi lại kết quả dưới dạng một file (dạng ngầm định *.txt), hoặc không ghi kết quả. Dù chọn 1 hay 0 chúng ta cũng có thể bổ sung kết quả trên vào một thư viện sau này gọi là thí dụ nếu ta trả lời 1 ở cho câu hỏi sau:

Ban co ghi so lieu vua roi thanh 1 thi du khong?(1=co; 0=khong):

Dù trả lời 1 sau đó nhập tên tệp hay không ta cũng có thể sửa dữ liệu của bài toán trên khi trả lời 1 cho câu hỏi sau:

Ban co giai lai bai toan voi mot vai thay doi khong? (1=co; 0=khong):

Nếu trả lời 1 ta có:

Ban sua so kenh n, nang suat w, mat do dong Y/C y, hay so cho cho toi da m:

Từ đây ta có thể làm lại tất cả các thủ tục như đã nói ở trên. Nếu trả lời 0 chúng ta về thực đơn bài toán phục vụ công cộng.

Có thể nói các thủ tục của MH4 là thủ tục khép kín vô hạn lần vì vậy chúng ta có thể giải một bài toán với nhiều bộ dữ liệu khác nhau. Đây chính là mục đích của tác giả khi muốn có một bộ chương trình hỗ trợ giảng dạy và học tập.

3- Một số chương trình Gams

Các chương trình viết trên Gams dưới đây có thể chạy với bộ tham số thay thế bất kỳ của các hệ thống phục vụ công cộng tương ứng. Các tính toán chủ yếu dừng lại ở giá trị xác suất của biến cố ngẫu nhiên tương ứng với các trạng thái hệ thống.

a- Hệ Eclang

Chương trinh:

```
*He thong Eclang don
* So kenh phuc vu n=4, dong vao tham so lamda=14, nang suat kenh muy=4;
Set i chi so /0*4/
    alias (i,k);
    Parameter p(i) xac suat i kenh ban, lamda, muy , alpha
    giaithua(i),amu(i),mauso, tuso(i),Mb;
```

```
* Cac tham so cua mo hinh;
lamda=14  ; muy= 4   ; alpha=lamda/muy;
*Tinh n!;
giaithua(i)=prod(k$(ord(k)lt ord(i)),ord(k));
* Tinh alpha^i/i!;
amu(i)=alpha**ord(i); tuso(i)=amu(i)/giaithua(i);
```

* Tinh $\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!}$;

```
mauso=sum(i,amu(i)/giaithua(i));
* Tinh cac xac suat trang thai;
p(i)= tuso(i)/mauso;
* Tinh so kenh ban trung binh;
Mb=sum(i,p(i)*(ord(i)-1));
* Chi dinh so chu so phan thap phan;
option  decimals=5;
* Chi thi hien thi ket qua;
display   p,'So kenh ban trung binh', Mb;
```

Kết quả:

```
p xac suat i kenh ban
0      0.04163,   1     0.14569,   2     0.25496,   3     0.29745,   4     0.26027
So kenh ban trung binh: Mb              =     2.58905
```

b- Hệ chờ thuần nhất

Chương trình:

```
*He thong cho thuan nhat
* so kenh phuc vu n, dong vao tham so lamda, nang suat kenh muy;
Set i chi so kenh ban /0*6/
*       j chi so cho  /1*100/
```

```
alias (i,k);
Parameter pb(i) xac suat i kenh ban,lamda, muy , alpha,x, n
giaithua(i),amu(i),mauso, tuso(i),Mb,an,sxc  xac suat cho
mc do dai hang cho trung binh ;
*Parameter        pc(j) xac suat j yeu cau cho;
* Cac tham so cua mo hinh;
lamda=18  ; muy= 4   ; alpha=lamda/muy;
n=card(i)-1; x=alpha/n;
*Tinh n!;
giaithua(i)=prod(k$(ord(k)lt ord(i)),ord(k));
* Tinh alphai/i!;
amu(i)=alpha**(ord(i)-1); tuso(i)=amu(i)/giaithua(i);
an=sum(i$(ord(i)=card(i)),amu(i)/giaithua(i)) ;
display an,amu, giaithua, x, alpha, tuso;
* Tinh  ;
mauso=sum(i,amu(i)/giaithua(i))+(x/(1-x))*an;
* Tinh cac xac suat trang thai;
pb(i)= tuso(i)/mauso;
*pc(j)=pb('0')*an*x**ord(j);
*Tinh xac suat cho;
sxc=1-sum(i$(ord(i)<card(i)),pb(i));
mc=x*an/((1-x)**2*(mauso+an*x/(1-x)));
* Chi dinh so chu so phan thap phan;
option  decimals=5;
* Chi thi hien thi ket qua;
```

```
display   pb, sxc, mc;
*display pc;
```

c- Hệ thống chờ hạn chế

Chương trinh:

```
*He thong cho han che
* so kenh phuc vu n, dong vao tham so lamda, nang suat kenh muy;
Set i chi so kenh ban /0*6/
j chi so cho  /1*4/
alias (i,k);
Parameter pb(i) xac suat i kenh ban,lamda, muy , alpha,x, n ,m
giaithua(i),amu(i),mauso, tuso(i),Mb,an,sxtc  xac suat tu choi
mc do dai hang cho trung binh
pc(j) xac suat j yeu cau cho;
* Cac tham so cua mo hinh;
lamda=18   ;muy= 4    ;
alpha=lamda/muy;n=card(i)-1;m=card(j);x=alpha/n;
*Tinh n!;
giaithua(i)=prod(k$(ord(k)lt ord(i)),ord(k));
* Tinh alphai/i!;
amu(i)=alpha**(ord(i)-1);tuso(i)=amu(i)/giaithua(i);
an=sum(i$(ord(i)=card(i)),amu(i)/giaithua(i)) ;
* Tinh  mau so;
mauso=sum(i,amu(i)/giaithua(i))+(x*(1-x**card(j))/(1-x))*an;
* Tinh cac xac suat trang thai;
pb(i)= tuso(i)/mauso; pc(j)=pb('0')*an*x**ord(j);
* Chi dinh so chu so phan thap phan;
option  decimals=5;
```

* Chi thi hien thi ket qua;

display n, m, alpha, muy; display pb, pc;

Kết quả: n = 6.00000; m = 4.00000; muy = 4.00000

alpha = 4.50000

pb xac suat i kenh ban: 0 0.01016, 1 0.04570, 2 0.10283, 3 0.15425,

4 0.17353, 5 0.15618 6 0.11713

pc xac suat j yeu cau cho

1 0.08785, 2 0.06589, 3 0.04942, 4 0.03706.

CHƯƠNG 3
MÔ HÌNH ĐIỀU KHIỂN DỰ TRỮ

I- BÀI TOÁN, CÁC KHÁI NIỆM VÀ CÁCH TIẾP CẬN

1- Bài toán dự trữ

Trong hầu hết các hoạt động kinh tế, xã hội người ta phải giải quyết bài toán dự trữ, thực chất là bài toán lựa chọn phương án dự trữ các nguồn lực sao cho chi phí ít tốn kém nhất. Trong chương này ta xét một lớp bài toán cụ thể giải quyết các mối quan hệ kinh tế trong quá trình dự trữ. Các kết quả lý thuyết cũng như cách tiếp cận đối với các bài toán loại này không chỉ được sử dụng trong phạm vi bài toán dự trữ thực tế, một số bài toán kinh tế không hoàn toàn mang nội dung kinh tế của bài toán dự trữ cũng được xem xét qua việc mô tả dưới dạng mô hình dự trữ.

Mô ' ình điều khiển dự trữ như tên gọi ban đầu của mô hình này, xuất phát từ bài toán quản lý một hệ thống kho. Bài toán quản lý hệ thống kho đơn thuần nghiên cứu việc mua hàng và dự trữ với hai loại chi phí phát sinh cơ bản là chi phí bảo quản, dự trữ và chi phí cố định cho mỗi lần mua hàng. Người ta có thể phân chia lượng hàng cần dự trữ và cung cấp trong một khoảng thời gian nào đó thành nhiều đợt mua và dự trữ, việc tăng số lần mua sẽ làm tăng chi phí cố định cho mỗi lần mua hàng (mà sau này ta gọi là chi phí đặt hàng) nhưng lại làm giảm lượng hàng dự trữ trong kho và vì vậy giảm chi phí bảo quản, dự trữ. Tính toán tối ưu (chi phí nhỏ nhất) đối với bài toán kho ban đầu xuất phát từ quan hệ biến đổi ngược chiều của hai loại chi phí này. Lời giải của bài toán kho cho chúng ta số lần và qui mô mua hàng mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Tính chất phức tạp của ngay bài toán kho ban đầu có thể xét trên hai phương diện sau: Trước tiên, về mặt toán học đây là bài toán cực trị hàm nhiều biến nguyên - hỗn hợp vì số lần đặt hàng là số nguyên, lượng hàng đặt mua mỗi lần có thể là số thực, các yếu tố trong bài toán kho có thể tất định hoặc ngẫu nhiên; Thứ hai, các bài toán dự trữ trong thực tế rất đa dạng cả về cách thức và nội dung kinh tế của bài toán, nó đòi hỏi những phân tích chi tiết với các công cụ toán học phức tạp. Tuy nhiên, tính mềm dẻo trong ứng dụng của lớp mô hình này đã thu hút nhiều nghiên cứu khác nhau và ngày nay với cách tiếp cận của mô hình điều khiển dự trữ, người ta đã mô hình hoá nhiều vấn đề trong các lĩnh vực *quản lý sản xuất, kinh doanh và dịch vụ*. Các đối tượng được mô hình hoá cũng theo đó mà ngày càng phức tạp hơn. Mô hình dữ trữ đã phát triển thành một bộ phận quan trọng trong lớp mô hình điều khiển tác nghiệp. Với số ít mô hình được giới thiệu sau đây chúng ta sẽ lần lượt nghiên cứu từ các *mô hình đơn giản, với các yếu tố tất định, đều đặn* đến các mô hình trong đó các yếu tố có tính *ngẫu nhiên*. Mặt khác ta sẽ nghiên cứu từ các *mô hình thuần tuý dự trữ* đến các mô hình *sản xuất kinh doanh*.

2- Các khái niệm cơ bản

Sau đây ta thống nhất một vài khái niệm cơ bản cần thiết để có thể mô hình hoá bài toán thực tế dưới dạng bài toán dự trữ.

Hàng hoá: là đối tượng cần dự trữ cho hoạt động kinh tế, xã hội nào đó.

Nhu cầu: là khối lượng hàng cần thiết và sẽ được tiêu thụ trong một khoảng thời gian T (giả thiết rằng T=1). Nhu cầu thông thường là một biến ngẫu nhiên có qui luật phân phối xác suất nào đó.

Cung cấp: là khả năng cung cấp hàng cho quá trình dự trữ và tiêu thụ. Trong các trường hợp cụ thể cách thức cung cấp có thể khác nhau: Cung cấp theo đợt tập trung, cung cấp đều đặn trong các khoảng thời gian......

Thời gian đặt hàng: là khoảng thời gian từ khi bắt đầu đặt hàng đến khi hàng bắt đầu được dự trữ và tiêu thụ.

Chu kỳ dự trữ: là phần thời gian dự trữ và tiêu thụ khối lượng hàng của một lần đặt mua

Điểm đặt hàng: là mức hàng còn dự trữ khi cần bắt đầu đặt hàng cho chu kỳ sau đó.

Các loại chi phí: trong các mô hình sẽ xem xét ở chương này ta quan tâm đến các loại chi phí sau:

a-*Chi phí mua hàng* hay **giá hàng** được tính bằng chi phí trực tiếp cho một đơn vị hàng về đến kho (giá hàng, chi phí vận chuyển, bốc xếp.....).

b-*Chi phí đặt hàng* là chi phí cố định cho một lần đặt hàng bao gồm chi phí giao dịch, chi phí cho các nghiệp vụ khác.

c-*Chi phí dự trữ* hay chi phí kho: chi phí này tính cho một đơn vị hàng trong một đơn vị thời gian, thông thường nó tính tỷ lệ với giá hàng qua một hệ số gọi là *hệ số chi phí dự trữ (hay hệ số bảo quản).*

d-*Chi phí do không đảm bảo nhu cầu*: là thiệt hại khi thiếu một đơn vị hàng trong một đơn vị thời gian.

3- Phân loại mô hình và cách tiếp cận

Theo những cách thức khác nhau người ta có thể phân loại các mô hình dự trữ như sau:

+ Mô hình tất định và mô hình ngẫu nhiên.

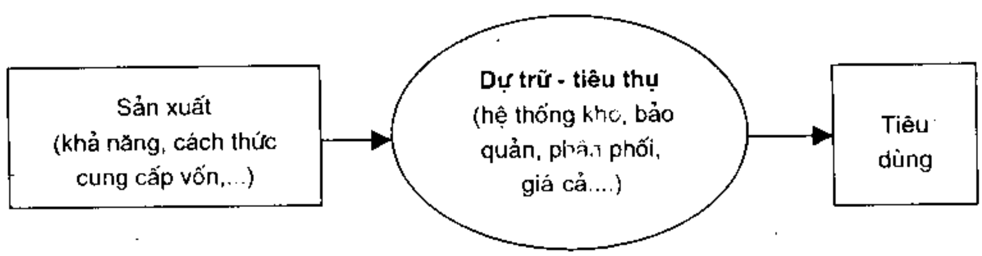
+ Mô hình dự trữ thường xuyên và dự trữ theo giai đoạn.

+ Mô hình dữ trữ thuần tuý và mô hình sản xuất- dự trữ.

+ Mô hình không ràng buộc và có ràng buộc.

Ngoài ra người ta còn có thể phân loại theo phạm vi mô hình hoá và công cụ phân tích mô hình.... .

Tuỳ thuộc cấu trúc của từng lớp mô hình mà việc mô hình hoá, sử dụng các công cụ phân tích có thể khác nhau. Nhưng chung nhất và đơn giản nhất là cách tiếp cận từ khâu dự trữ tiêu thụ trong quá trình sản xuất, lưu thông và tiêu dùng sau:



Khâu trung tâm được quan tâm trong các mô hình dự trữ cổ điển là Dự trữ, các khâu khác được xem là môi trường, hay yếu tố ngoại sinh trong mô hình. Tuy nhiên với sự mở rộng khá đơn giản các mô hình dự trữ hiện nay lấy Dự trữ- Tiêu thụ là trung tâm và xem xét các khâu khác đặc biệt là sản xuất như yếu tố cùng khâu dự trữ-tiêu thụ đáp ứng nhu cầu. Với những mở rộng như vậy mô hình dự trữ trở thành một lớp mô hình điều khiển tác nghiệp và luôn là hệ thống mô hình mở mà việc đưa thêm các yếu tố vào mô hình tương đối tiện lợi, hiệu quả.

II- CÁC MÔ HÌNH DỰ TRỮ TẤT ĐỊNH

1. Mô hình dự trữ tiêu thụ đều, bổ sung tức thời (Wilson)

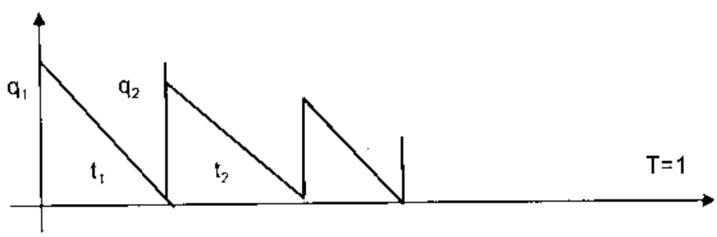
a- Mô tả bài toán

Giả sử nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T (T=1) là Q đơn vị. Việc tiêu thụ hàng là đều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho không đáng kể (tức thời). Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất, trong điều kiện dự trữ và tiêu thụ thường xuyên.

b- Thiết lập mô hình

Giả sử ta chia T thành n kỳ dự trữ và tiêu thụ, trong mỗi kỳ i lượng hàng tương ứng là q_i.

+ Sơ đồ biểu thị số lượng hàng trong kho:



Sơ đồ trên thể hiện cường độ tiêu thụ đều, đường biểu diễn lượng dự trữ tuyến tính theo thời gian. Mỗi chu kỳ nhập một lượng hàng q_i , tiêu thụ đến hết chu kỳ thì phải có hàng bổ sung vào dự trữ.

+ Hàm tổng chi phí:

Như vậy trong mỗi chu kỳ t_i lượng hàng dự trữ là $t_iq_i/2$ phát sinh chi phí dự trữ tương ứng q_it_i IC/2; Chi phí đặt hàng là nA; ngoài ra tổng số tiền mua hàng là CQ.

Vậy hàm tổng chi phí là:

$$F(q_i, n) = nA + \sum_{i=1}^{n} \frac{ICt_i q_i}{2} + CQ \qquad (1)$$

Vì qui luật tiêu thụ đều nên dễ dàng suy ra: $t_i = q_i/Q$ với $\forall$i. Như vậy ta có:

$$F(q_i, n) = nA + \sum_{i=1}^{n} \frac{ICq_i^2}{2Q} + CQ$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = Q; \qquad q_i \geq 0 \qquad (2)$$

+ *Phân tích bài toán (2)*

Với $n = n_0$ xác định ta có thể thấy F(q) nhỏ nhất khi f(q) sau đây nhỏ nhất

$$f(q_i) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{ICq_i^2}{2Q}$$

$$\sum_{i=1}^{n_0} q_i = Q; \qquad q_i \geq 0$$

Lập hàm Lagrange:

$$Z(\lambda, q_i) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{ICq_i^2}{2Q} + \lambda(Q - \sum_{i=1}^{n_0} q_i)$$

Từ điều kiện cần hàm Z cực tiểu ta có:

$$\frac{\partial Z}{\partial q_i} = \frac{IC}{Q} q_i - \lambda = 0 \text{ với mọi i.}$$

Từ đó ta có điều kiện cần: $q_i = \dfrac{\lambda Q}{IC}$ với mọi i

Như vậy tại $n = n_0$, cách đặt hàng tốt nhất phải có lượng đặt mỗi lần bằng nhau.

Kết luận này cho phép chúng ta chuyển việc tìm cực tiểu hàm $F(t_i,n)$ về tìm cực tiểu hàm:

$$F(q) = \frac{AQ}{q} + IC\frac{q}{2} + CQ$$

vì CQ không đổi ta chỉ cần tìm q làm cực tiểu hàm:

$$D(q) = \frac{AQ}{q} + \frac{ICq}{2} \qquad (3).$$

c- Lời giải

Vì D(q) là tổng của hai số hạng dương có tích không đổi (AQIC/2), theo hệ quả của bất đẳng thức Cô-si, D(q) nhỏ nhất khi AQ/q=ICq/2.

Ta có lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}} \qquad (4).$$

và: $$D(q^*) = \sqrt{2AQIC} = 2AQ/q^* = ICq^* \qquad (5).$$

$$\Rightarrow F(Q^*) = \sqrt{2AQIC} + CQ \qquad (6).$$

hay có thể tính:

$$F(q^*) = CQ + 2AQ/q^* = ICq^* + CQ \qquad (7).$$

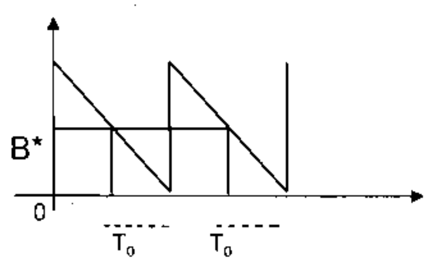
Số lần đặt hàng tối ưu $n^* = Q/q^*$.

Chu kỳ dự trữ, tiêu thụ : $t^* = 1/n^*$.

Điểm đặt hàng:

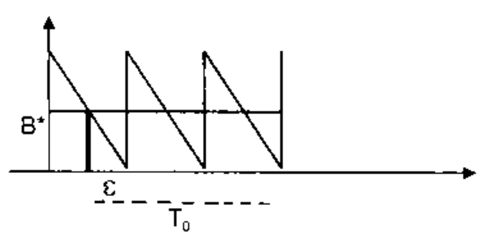
Việc xác định điểm đặt hàng sẽ đơn giản nếu như thời gian đặt hàng $T_0 < t^*$, nhưng trong thực tế có thể $T_0 \geq t^*$ như vậy cần đặt hàng trước một hay một số chu kỳ, ta quan sát hai sơ đồ kho sau:

Sơ đồ 1



$B^* = T_0Q$

Sơ đồ 2



$B^* = (T_0 - 2t^*)Q.$

Trong sơ đồ 1 điểm đặt hàng được tính bằng lượng hàng tiêu thụ trong thời gian đặt hàng T_0; còn trong sơ đồ 2 cần đặt hàng trước đó hơn hai chu kỳ, vì vậy điểm đặt hàng B* tính bằng lượng tiêu thụ trong phần dư của T_0 sau khi trừ đi 2 lần t*: $\varepsilon = T_0 - 2t^*$.

Trong trường hợp tổng quát ta có thể tính điểm đặt hàng B* theo công thức sau:

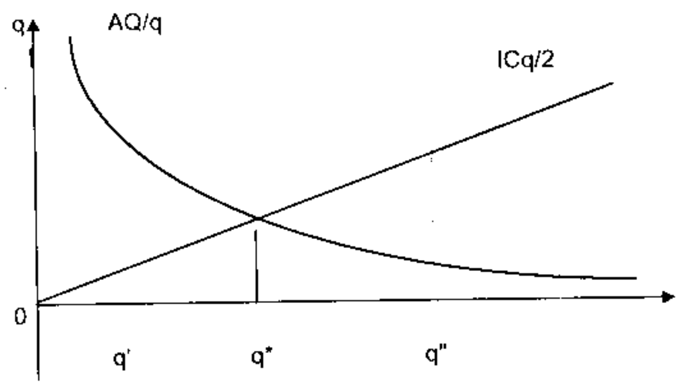
$$B^* = Q[T_0 - t^*.\mathrm{int}(T_0/t^*)];\ \ \mathrm{int}(T_0/t^*) \text{ là phần nguyên của } T_0/t^*.$$

d- Phân tích kết quả

Với kết quả trên ta có thể có một số phân tích sơ bộ sau đây:

+ Lượng hàng đặt tốt nhất q* trên đồ thị và hai khoản chi phí

Ta có thể mô tả hàm D(q) và lời giải trên đồ thị như sau:



ta thấy q* là điểm giao của hai đường biểu diễn:

- Đường AQ/q mô tả chi phí đặt hàng

- Đường ICq/2 mô tả chi phí dự trữ

và $AQ/q > ICq/2$ với $q < q^*$

$AQ/q < ICq/2$ với $q > q^*$.

Điểm q* trên đồ thị cho thấy rằng nếu ta đang thực hiện một chiến lược dự trữ nào đó mà chi phí đặt hàng (hay chi phí cố định) quá cao so với chi phí dự trữ (q' chẳng hạn) thì cần tăng khối lượng hàng đặt mỗi lần, ngược lại nếu ở tình trạng q" thì cần giảm khối lượng hàng đặt mỗi lần.

+ Lượng hàng đặt tốt nhất q* và qui mô kho- Mô hình **Baumol-Tobin**

-Ta xét trước tiên sự thay đổi tổng nhu cầu Q tác động đến qui mô kho và vốn.

Nếu Q' =αQ thì

$$q'^* = \sqrt{\frac{2\ A\ \alpha Q}{IC}} = q^* \sqrt{\alpha}$$

như vậy qui mô kho cần thiết không tỷ lệ với Q, mà thay đổi với hệ số căn bậc hai.

- Mô hình **Baumol-Tobin** về cung tiền là một trong những ứng dụng quan trọng khi nghiên cứu yếu tố này. Mô hình đó được trình bày như sau:

Giả sử một người có một khoản tiền mặt V= 50000$ để tiêu dùng trong một năm. Người đó có thể giữ một lượng tiền mặt nhất định, phần còn lại đem mua trái khoán, tiền mặt có lợi tức bằng không còn trái khoán có lợi tức I=0,01. Mỗi lần mua, bán trái khoán cần bỏ ra một khoản chi phí A=20$. Hãy xác định lượng tiền mặt người đó giữ mỗi kỳ sao cho có lợi nhất, nếu việc chi tiêu là đều đặn.

Giải: Giả sử người đó chia làm n kỳ giữ tiền mặt, mỗi kỳ lượng tiền mặt nhận từ bán trái khoán là C. Như vậy chi phí cơ hội là IC/2, còn chi phí cho n lần giao dịch mua bán trái khoán là nA hay AV/C. Bài toán trên dẫn đến bài toán dự trữ với hàm tổn thất là:

$$N(C) = AV/C + IC/2.$$

Dễ dàng nhận được lời giải theo công thức của mô hình Wilson.

Ta có :

$$C^* = \sqrt{\frac{2AV}{I}} = 14142\$.$$

Với bài toán này người ta có thể tính toán lượng tiền phát hành cần thiết để đảm bảo quá trình lưu thông tiền tệ với tổng lượng lưu thông của một quốc gia đã được dự báo.

Công thức căn bậc hai nổi tiếng được phát biểu đơn giản là: Khi tổng lượng lưu thông tăng gấp 4 lần thì cầu tiền tăng 2 lần.

+ Lượng vốn cần thiết cho chu kỳ dự trữ và tiêu thụ:

$$K^* = \frac{F(q^*)}{n^*} = \frac{(\sqrt{2AQIC} + CQ)}{Q}.\sqrt{\frac{2AQ}{IC}} = 2A + C\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}.$$

Khi Q thay đổi: Q' =αQ

$$\text{Vốn } K'^* = 2A + C\sqrt{\frac{2A\alpha Q}{IC}} = 2A + \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}.$$

Có thể thấy rằng khi α >1 (tăng tổng nhu cầu Q) thì:

$$K'^* = 2A + \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}} < 2A\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2AQ}{IC}} = K^*\sqrt{\alpha}$$

tức là mức tỷ lệ tăng vốn còn thấp hơn mức tăng qui mô kho.

Ngược lại khi giảm tổng nhu cầu ta có thể thấy mức giảm vốn cũng chậm hơn mức giảm qui mô kho.

Có thể nói rằng khi Q tăng α lần (α>1) thì nhu cầu vốn tăng ít hơn $\sqrt{\alpha}$ lần, nhưng khi Q giảm với hệ số α (α <1) thì nhu cầu vốn không thể giảm với hệ số $\sqrt{\alpha}$.

+ Sự thay đổi của giá hàng: Trong trường hợp chủ hàng đặt mốc qui mô lô hàng mua để hạ giá có nhằm khuyến mại, hành vi dự trữ sẽ thay đổi như thế nào?

Giả sử có mốc q_0 với $q \geq q_0$ thì giá hàng hạ ε tức là c' =c(1-ε).

+ Khi $q_0 > q^*$

Nếu $q_0\sqrt{1-\varepsilon} \leq q^*$ thì đặt hàng với khối lượng $q'^* = \dfrac{q^*}{\sqrt{1-\varepsilon}}$ (*).

Trong trường hợp ngược lại cần so sánh $F(q^*)$ và $F(q_0)$ để xác định lượng hàng đặt mua tối ưu.

+ Khi $q_0 \leq q^*$ không cần thay đổi chiến lược đặt hàng mà vẫn nhận được ưu đãi khuyến mại, tuy nhiên để nhận được lợi ích tối đa cần xác định q* theo công thức (*).

Một cách tổng quát chúng ta có thể phân tích sự thay đổi của các yếu tố ngoại sinh trong mô hình trên (từng yếu tố hay đồng thời các yếu tố) nhờ vi phân toàn phần của hàm mô tả biến nội sinh tại điểm tối ưu của bài toán. Dễ dàng thấy rằng mọi chỉ tiêu (biến nội sinh) của mô hình đều có thể tính qua q*, vì vậy ta sẽ chỉ ra công thức tính tác động đồng thời của A, I, C và Q đến q* làm cơ sở cho các tính toán khác.

Ta có: $$dq^* = \frac{1}{\sqrt{2AQIC}}\left(QdA - \frac{AQ}{C}dC - \frac{AQ}{I}dI + AdQ\right) \qquad (8)$$

Với (8) ta có thể điều chỉnh nhanh q* khi các yếu tố trong mô hình thay đổi nhỏ.

+ Giá bán có thể kinh doanh

Giá bán luôn là vấn đề trong kinh doanh thương mại, thông thường người ta so sánh toàn bộ chi phí tính cho đến khi hàng hoá được tiêu thụ tại một chiến lược nào đó. Nếu chi phí này còn thấp hơn giá bán thì coi là ngành hàng này kinh doanh có lãi, ngược lại ngành hàng này kinh doanh không có lãi. Cách quan niệm như vậy có thể rất chủ quan, chúng ta có thể chỉ ra giá bán tối thiểu chấp nhận được nhờ mô hình trên.

Với tổng chi phí:

$$F(q^*) = \sqrt{2AQIC} + CQ$$

chúng ta thấy nếu giá bán trung bình P thoả mãn điều kiện:

$$P \geq \sqrt{\frac{2AIC}{Q}} + C$$

thì có thể kinh doanh mặt hàng đang xét không lỗ. Thực tế có thể còn phải chấp nhận một mức giá thấp hơn vì một khoản chi phí cố định luôn phát sinh khi một doanh nghiệp không hoạt động hoặc chuyển sang hoạt động ở một thị trường khác với hạn chế của thị phần hiện có.

e- Thí dụ

Chúng ta sẽ xét một số thí dụ cùng các tình huống đơn giản đối với bài toán Wilson.

Thí dụ 1: Một cửa hàng kinh doanh thép xây dựng tại một khu vực có tổng nhu cầu 36000 tấn năm, việc tiêu thụ là đều đặn trong năm, thời gian nhập hàng không đáng kể. Cửa hàng mua thép từ một nguồn không hạn chế về số lượng. Chi phí cho một lần đặt là 400$, giá một tấn là 240$, hệ số chi phí bảo quản là 0,05. Thời gian từ lúc đặt hàng đến khi có hàng vào kho là 2 tháng.

Hiện tại cửa hàng đang đặt hàng mỗi năm 18 lần, mỗi lần 2000 tấn. Hãy cho biết chi phí cơ hội cửa hàng đang gánh chịu và xác định các chỉ số cơ bản trong dự trữ và tiêu thụ của cửa hàng ở trạng thái tối ưu.

Giải: Sau đây là kết quả nhận được từ MH4

Tong nhu cau Q= 36000.0

Chi phi dat hang A= 400.00

He so chi phi du tru I=0.050

Don gia C=240.00

Thoi gian dat hang (ngày) T= 60

Ban dang dat hang mot lan bao nhieu don vi?:2000

Hien tai chi phi dat hang la: 7200.000, Chi phi du tru la: 12000.000

LO HANG LON HON MUC CAN THIET, thiet hai la: 609.680

KET QUA GIAI BAI TOAN

Luong hang dat tot nhat la q*= 1549.19

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 8658590.320

Thoi gian mot chu ky t*=0.0430

So lan dat hang n*= 23.24

Diem dat hang B*= 1270.23

Thí dụ 2: Một cơ sở chế biến lương thực dự báo tổng nhu cầu nguyên liệu chính hàng năm là 120000 tấn. Việc tiêu thụ đều đặn và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể. Có hai phương thức mua nguyên liệu như sau:

Phương thức I: Mua mỗi đợt từ tổng công ty lương thực với số lượng tuỳ chọn, giá mỗi tấn là 240$, chi phí bảo quản bằng 12% giá mua, chi phí giao dịch, tổ chức mua mỗi lần là 150$.

Phương thức II: Chia đều tổng nhu cầu thành 4 lần đặt mua, giá mỗi tấn sẽ là 225$ và chi phí bảo quản bằng 15% giá mua, chi phí giao dịch, tổ chức mua mỗi lần như phương thức I.

a- Nên mua theo phương thức nào, nếu định chiến lược sai thì thiệt hại tối thiểu là bao nhiêu?

b- Nếu tổng nhu cầu hàng năm tăng 10% và giá cả cũng tăng 10% cho cả hai phương thức mua còn chi phí giao dịch, tổ chức mua không đổi thì năm sau nên mua như thế nào.

Giải:

a- Tổng chi phí theo phương thức I:

Tong nhu cau Q=120000.0

Chi phi dat hang A= 150.00

He so chi phi du tru I=0.120

Don gia C=240.00

KET QUA GIAI BAI TOAN

Luong hang dat tot nhat la q*= 1118.03

Tong chi phi nho nhat N(q*)=28832199.379

Thoi gian mot chu ky t*=0.0093

So lan dat hang n*=107.33

Tổng chi phí theo phương thức II:

Tong nhu cau Q=120000.0

Chi phi dat hang A= 150.00

He so chi phi du tru I=0.150

Don gia C=225.00

Ban dang dat hang mot lan bao nhieu don vi?:30000

Hien tai chi phi dat hang la: 600.000, Chi phi du tru la: 506250.000

Chi phí mua hàng là: 27000000

Tổng chi phí là: 27506850

Vậy chọn phương thức II, nếu chọn phương thức I chi phí cơ hội (thiệt hại) sẽ là:1325349.379.

b- Nếu tổng nhu cầu tăng 10%, giá tăng 10% cho cả hai phương thức mua ta có: Tổng nhu cầu Q= 132000

Tổng chi phí theo phương thức I tăng 10%: N(q*)= 34883419.317.

Tổng chi phí theo phương thức II: N(33000)=33283162.5

Chọn phương thức II.

Thí dụ 3: Một người dự định mở một cửa hàng bán rượu, cơ sở tư vấn thương mại đã cung cấp các số liệu sau:

Tổng nhu cầu hàng năm trong khu vực do cửa hàng cung cấp là 14000 thùng. Giá mỗi thùng về đến cửa hàng là 144$, chi phí cho ký hợp đồng mua bán mỗi lần cố định là 100$, chi bảo quản và khoản lãi tiền gửi gộp lại bằng 7% giá hàng (không tính chi phí hợp đồng mua bán).

Hãy xác định giá bán tối thiểu nếu thuế doanh thu là 3%. Biết cường độ tiêu thụ đều và thời gian nhập hàng không đáng kể. Thời gian từ khi làm hợp đồng đến khi có hàng là 1 tháng. Trong trường hợp không thể thực hiện được phương án tối ưu thì tiền lãi thay đổi như thế nào?

Giải:Trước hết chúng ta giải bài toán nhờ mô hình Wilson

Tong nhu cau Q= 14000.0

Chi phi dat hang A= 100.00

He so chi phi du tru I=0.070

Don gia C=144.00

Thoi gian dat hang T= 60

KET QUA GIAI BAI TOAN

Luong hang dat tot nhat la q*= 527.05

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 2021312.626

Thoi gian mot chu ky t*=0.0376

So lan dat hang n*= 26.56

Diem dat hang B*= 193.18

Vậy giá P có thể chấp nhận tối thiểu được xác định qua điều kiện:

$$Px14000x0,97- N(q^*) \geq 0$$

$$P \geq 148,8448 \text{ (\$/thùng)}$$

Lãi thực là:

$$L = Px14000x0,97 - 2021312,626$$

Nếu thực hiện phương án q ≠q* thì tiền lãi có thể tính như sau:

$$L = P_0\, x14000x0,97 - \left(\frac{100x14000}{q} + 0,07x144\frac{q}{2} + 144x14000\right)$$

Tại q=q*+ Δq ta có mức thay đổi tiền lãi:

$$\Delta L = -\frac{1400000}{527,05 + \Delta q} - 5,04\Delta q + \frac{1400000}{527,05} = \frac{1400000\Delta q}{527,05(527,05 + \Delta q)} - 5,04\Delta q$$

Chú ý: *Tại q=q* chúng ta không thể sử dụng đạo hàm của L theo q để đánh giá sự thay đổi của L dù lượng đặt mua rất gần q*.*

2- Một số mô hình mở rộng từ mô hình Wilson

Các thí dụ trên đã gợi ý tính mở của lớp mô hình Wilson. Trong phần này ta sẽ mở rộng mô hình Wilson đối với một số tình huống thường gặp và chỉ ra lời giải cũng như sự thay đổi của lời giải theo một số yếu tố được xem là quan trọng nhất trong từng mô hình.

a- Bài toán chọn nguồn

Giả sử nhu cầu thường xuyên một loại hàng là Q đơn vị/năm. Có thể thoả mãn nhu cầu này từ hai nguồn, nguồn I với chi phí đặt hàng A_1, giá hàng về đến kho C_1; nguồn II với chi phí đặt hàng A_2 và giá hàng về đến kho C_2. Chi phí dự trữ tính theo hiện vật C_0 cho mỗi đơn vị dự trữ/năm. Xác định chiến lược dự trữ, tiêu thụ tối ưu trong điều kiện:

1- Không cần xem xét các yếu tố khác liên quan đến quá trình dự trữ và tiêu thụ.

2- Nguồn I là sản phẩm của chính cơ sở dự trữ tiêu thụ với khả năng cung cấp S đơn vị/năm (S<Q), nguồn II là nguồn mua ngoài. Nếu ngừng sản xuất thì toàn bộ thiệt hại phải chịu mỗi năm là F_0. Ngược lại nếu chỉ thoả mãn nhu cầu ở mức S thì "thiệt hại" ước tính là α (Q-S). Biết giá hàng bán ra là P.

Thiết lập mô hình và lời giải

Trường hợp 1: Đây là trường hợp đơn giản vì không có hạn chế về khối lượng cung cấp từ các nguồn. Bài toán đơn giản là so sánh hai trị tối ưu của hai hàm chi phí:

$$F_1(q_1^*) = (\sqrt{2A_1QIC_1} + C_1Q); \qquad F_2(q_2^*) = (\sqrt{2A_2QIC_2} + C_2Q)$$

Chọn nguồn có chi phí nhỏ hơn.

Trường hợp 2: Để có kết luận tổng quát hơn, giả sử chúng ta đưa ra chiến lược trên cơ sở phân chia nguồn thành hai phần S và (Q-S) tương ứng với các nguồn I và II. Ta sẽ chứng tỏ rằng chiến lược tối ưu chỉ có thể là một trong hai cách chọn S=Q hoặc S=0, tức là mua hàng ở chỉ một nguồn nếu số lượng là không hạn chế.

Thật vậy: Tổng chi phí nguồn I khi đảm bảo S đơn vị hàng là:

$$F_1(q_1, S) = \frac{SA_1}{q_1} + C_0 \frac{q_1}{2}\frac{S}{Q} + C_1 S \text{ , với } 0 \le S \le Q$$

Giá trị cực tiểu hàm chi phí là:

$$F_1(q_1{}^*) = \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S$$

Tương tự, tổng chi phí từ nguồn II cực tiểu là:

$$F_2(q_2{}^*) = \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S) \text{, với } 0 \le S \le Q$$

trong đó $C_{01} = C_1 I$ và $C_{02} = C_2 I$.

Tổng chi phí nhỏ nhất:

$$F = \frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S + \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)$$

Đạo hàm riêng của F theo S:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{Q}[\sqrt{2A_1QC_{01}} - \sqrt{2A_2QC_{02}}] + (C_1 - C_2)$$

Ta có kết luận: *Hàm tổng chi phí là một hàm đơn điệu theo S vì dấu của $\frac{\partial F}{\partial S}$ không phụ thuộc S.*

Như vậy tổng chi phí sẽ cực tiểu tại một trong 2 điểm:

hoặc S=0 nếu $\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{Q}[\sqrt{2A_1QC_{01}} - \sqrt{2A_2QC_{02}}] + (C_1 - C_2) > 0$

hoặc S = Q nếu $\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{Q}[\sqrt{2A_1QC_{01}} - \sqrt{2A_2QC_{02}}] + (C_1 - C_2) < 0.$

Kết luận này cho phép lựa chọn một nguồn theo cách so sánh trực tiếp hai trị số:

$$F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q \text{ và } F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q$$

Thật vậy:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{Q}[\sqrt{2A_1QC_{01}} - \sqrt{2A_2QC_{02}}] + (C_1 - C_2)$$

$$= \frac{1}{Q}[(\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q) - (\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q)]$$

Với Q> 0 dấu của biểu thức này phụ thuộc dấu của hiệu:

$$(\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q) - (\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q)$$

Đây chính là các giá trị cực tiểu của các hàm chi phí với giả thiết không có hạn chế về khối lượng cung cấp của mỗi nguồn.

Trong các bài toán thực tế chi phí dự trữ có thể được tính theo các cách khác nhau, lúc đó C_0 có thể thay thế bằng các đại lượng tương ứng. Các phân tích trên không phụ thuộc cách tính chi phí dự trữ nên có thể áp dụng cho các bài toán với cách tính chi phí dự trữ theo mỗi đơn vị hàng.

Thí dụ 1: Một cơ sở kinh doanh một loại hàng với nhu cầu 4500 đơn vị/năm. Việc tiêu thụ là đều đặn, hai nguồn hàng có thể là:

Nguồn I: Chi phí đặt hàng A_1=2,5 triệu/lần, giá hàng C_1=0,12 triệu/đơn vị.

Nguồn II: Chi phí đặt hàng A_2=3 triệu/lần và giá hàng C_2=0,11 triệu/đơn vị.

Chi phí dự trữ tính theo giá hàng với hệ số I=0,05.

Để xác định nguồn mua và số lượng mua, trước tiên ta so sánh hai trị số:

$$F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q \text{ và } F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q$$

trong đó C_{01}= C_1I và C_{02}=C_2I.

Ta có: $F_1(Q) = \sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1Q$ =551,619

$F_2(Q) = \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q$ =507,168

Vậy chọn nguồn II với lượng hàng đặt mỗi lần là q*=2215,65 đơn vị.

Trường hợp 2: Với những kết quả phân tích ở trên chúng ta có thể thấy nếu nguồn 1 hạn chế (lượng tối đa S_0) có chi phí lớn hơn ta mua ở nguồn không hạn chế. Ngược lại so sánh chi phí khi chia tổng nhu cầu thành hai phần S_0 và Q-S_0 với chi phí mua ở nguồn không hạn chế để đưa ra quyết định tối ưu.

Trong điều kiện nguồn hạn chế chính là khả năng cung cấp của cơ sở dự trữ-tiêu thụ, việc lựa chọn chiến lược sản xuất, tiêu thụ dựa trên hàm tổng lợi nhuận (thô). Có thể xác định giá trị lớn nhất của tổng lợi nhuận qua việc so sánh các giá trị sau:

+ Lợi nhuận tối đa trong trường hợp mua ngoài:

$$\pi_2(Q) = PQ - (F_0 + \sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2Q) \tag{9}$$

+ Lợi nhuận tối đa khi tự cung cấp S và mua ngoài (Q-S):

$$\pi_{12}(Q) = PQ - [\frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S + \frac{Q-S}{Q}\sqrt{2A_2QC_{02}} + C_2(Q-S)] \tag{10}$$

+ Lợi nhuận tối đa khi chỉ thỏa mãn nhu cầu bằng nguồn tự sản xuất:

$$\pi_1(Q) = PS - (\frac{S}{Q}\sqrt{2A_1QC_{01}} + C_1S + \alpha(Q-S)) \tag{11}$$

trong đó α là thiệt hại do không thoả mãn tính cho mỗi đơn vị nhu cầu.

Nếu việc thoả mãn nhu cầu là bắt buộc thì việc tìm lời giải của bài toán không xét đến (11) và giá bán không có ý nghĩa trong quá trình giải bài toán.

Thí dụ 2: Một cơ sở sản xuất kinh doanh mặt hàng M, năng lực cung cấp của chính cơ sở này hàng năm là 20000 tấn, với giá tính đến khi có thể tiêu thụ là 250 nghìn đồng/tấn, mỗi đợt chuẩn bị sản xuất có chi phí cố định là 2 triệu đồng, chi phí dự trữ cho mỗi tấn/năm là 12 nghìn đồng; nhu cầu từ năm t là 35000tấn/năm. Do không có khả năng mở rộng sản xuất cơ sở này đã tìm được một nguồn hàng đủ lớn với giá tính đến khi có thể đưa hàng vào tiêu thụ là 215 nghìn đồng/tấn, chi phí mỗi lần đặt hàng là 3 triệu. Lựa chọn phương án sản xuất-mua hàng và tiêu thụ tối ưu trong các trường hợp sau:

a- Nếu cơ sở thoả mãn nhu cầu mà không sản xuất hàng M thì khấu hao thiết bị vẫn phải trích là 12 triệu/năm.

b-Có thể không thoả mãn yêu cầu với tiền thiệt hại ước tính 2 nghìn đồng/tấn và giá bán 262 nghìn đồng/tấn

Giải:

a- Thoả mãn nhu cầu

+ Mua ngoài toàn bộ

Tong nhu cau Q= 35000.0

Chi phi dat hang A= 3000.00

He so chi phi du tru I=0.056

Don gia C=215.00

Luong hang dat tot nhat la q*= 4183.82

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 7575193.326

Cộng cả khấu hao: F =**7587193.326**

+ Tự sản xuất 20000 tấn và mua ngoài 15000 tấn:

- Tự sản xuất:

Tong nhu cau Q= 20000.0

Chi phi dat hang A= 2000.00

He so chi phi du tru I=0.027

Don gia C=250.00

Luong hang dat tot nhat la q*= 3417.43

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 5023409.400

Thoi gian mot chu ky t*=0.1709

So lan dat hang n*= 5.85

- Mua ngoài:

Tong nhu cau Q= 15000.0

Chi phi dat hang A= 3000.00

He so chi phi du tru I=0.024

Don gia C=215.00

Luong hang dat tot nhat la q*= 4185.07

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 3246504.999

Thoi gian mot chu ky t*=0.2790

So lan dat hang n*= 3.58

Tổng chi phí: F = **8269914.399** (nghìn đồng)

b- Với giá 262 nghìn đồng/tấn phương án mua ngoài có tổng lãi thô là:

$$L_1(35000) = 1582800 \text{ nghìn}$$

Nếu chỉ thoả mãn 20000 tấn thì lãi thu được là:

$$L_2(20000) = 186578.4 \text{ nghìn}$$

Vậy chọn phương án mua ngoài toàn bộ 35000 tấn.

b- Bài toán với giá vốn

Chi phí dự trữ trong các công thức (9)-(11) có thể thay đổi theo từng tình huống cụ thể. Hàm chi phí cũng thay đổi đặc biệt là khi chúng ta quan tâm đến vấn đề ứ đọng vốn hay giá vốn. Giá vốn thường được xác định bằng lãi suất ngân hàng (lãi suất tiền gửi hoặc tiền vay).

Trước tiên ta xét bài toán cổ điển Wilson. Trong khi thiết lập mô hình chúng ta đã bỏ qua giá vốn, một yếu tố thường trực trong mọi bài toán kinh doanh. Giả sử giá vốn đo bằng lãi suất danh nghĩa hàng năm là r không đổi. Hàm chi phí có xét đến giá vốn r có thể mô tả như sau:

$$F(q) = Ar + A\frac{Q}{q} + C_0\frac{q}{2} + r\frac{Cq}{2} + CQ \qquad (12)$$

Với C_0 là chi phí dự trữ tính cho một đơn vị hàng trong thời gian T=1 (năm). Hàm chi phí trên giả thiết rằng mọi chi phí được hoàn trả sau mỗi chu kỳ dự trữ-tiêu thụ vì vậy giá vốn r chỉ liên quan đến tiền đặt hàng mỗi kỳ và lượng hàng dự trữ trung bình trong kho tại một kỳ. Cực tiểu hàm (12) qui về tìm cực tiểu:

$$D(q) = A\frac{Q}{q} + \frac{q}{2}(C_0 + rC)$$

Lời giải đơn giản là:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{C_0 + rC}} \qquad (13)$$

$$D(q^*) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)}$$

$$F(q) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)} + Ar + CQ \qquad (14)$$

Có thể tính chi phí giá vốn trong (12) cho cả phần chi phí dựu trữ, cách tìm lời giải tương tự.

Thí dụ 3: Một nhà máy sản xuất xi măng có tổng nhu cầu Clinke mỗi năm là 40000tấn. Nhà máy có thể nhập khẩu Clinke theo từng hợp đồng với giá 500 nghìn đồng/tấn, với chi phí hoàn tất hợp đồng mỗi lần là 2 triệu đồng, chi phí bảo quản là 20 nghìn cho mỗi tấn/năm. Hãy lựa chọn phương án cung cấp Clinke cho nhà máy nếu lãi suất vay ngân hàng 3% năm.

Giải: Ta có A=2000; Q=40000; C_0=20; r=0,03; C=500

Theo (13) ta có:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{C_0 + rC}} = 2138.09 \text{ (tấn)}$$

Tổng chi phí thấp nhất là:

$$F(q) = \sqrt{2AQ(C_0 + rC)} + Ar + CQ$$

$=[2.2000.40000.(20+0,03.500)]^{1/2}+2000.0,03+500.40000$ 20074893 (nghìn đồng).

c- Bài toán thuê kho

Giả sử một hệ thống dự trữ (của một cơ sở) có dung lượng kho cố định q^0. Mỗi đơn vị hàng ở đầu chu kỳ dự trữ vượt quá q^0 phát sinh một chi phí thuê kho với tỷ lệ k (k>0). Với tất cả các dữ kiện của mô hình Wilson ta có thể lập hàm chi phí theo lượng hàng đặt mỗi lần q như sau:

$$N(q) = \begin{cases} N_1 = \dfrac{AQ}{q} + IC\dfrac{q}{2} + CQ & khi \quad q \le q^0 \\ N_2 = \dfrac{AQ}{q} + IC\dfrac{q^0}{2} + (I+k)C\dfrac{q-q^0}{2} + CQ & khi \quad q > q^0 \end{cases}$$

Giải bài toán này, cùng với lời giải thông thường ta cần trả lời hai vấn đề:

- Có cần thuê kho hay không?

- Nếu có thì thuê kho như thế nào?

Các bước giải

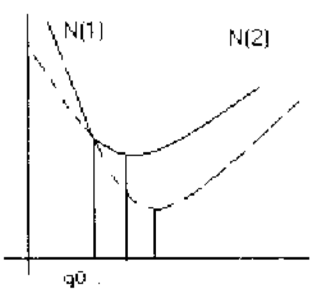
Bước 1: giải bài toán với hàm chi phí N_1 trên miền $q > 0$. Nghiệm của bài toán là: $q_1^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$. Nếu giá trị này không vượt quá q^0 ta có lời giải của bài toán $q^* = q_1^*$ và câu trả lời kèm theo là không cần thuê kho.

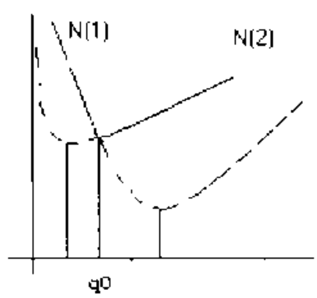
Bước 2: Nếu $q_1^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}} > q^0$, ta tìm cực trị của N_2 trên miền $q > 0$.

Điểm cực trị là: $q_2^* = \sqrt{\frac{2AQ}{(I+k)C}}$.

Chú ý là $q_1^* > q_2^*$ vì vậy ta cần xem xét quan hệ của điểm cực trị này so với q^0.

Hãy quan sát các đồ thị sau:





Hình (a) mô tả trường hợp $q_2^* > q^0$ lời giải của bài toán là $q^* = q_2^*$, câu trả lời kèm theo là thuê kho có dung tích $v = q_2^* - q^0$.

Hình (b) mô tả trường hợp $q_2^* < q^0$ lời giải của bài toán là $q^* = q^0$, câu trả lời kèm theo là không thuê kho.

d- Bài toán bố trí khoang chở hàng hay bài toán tổ chức xếp dỡ

Một bài toán tổ chức sản xuất dẫn đến bài toán dự trữ nêu trên như sau: Một tàu hàng có tổng dung tích hiệu dụng là Q, người ta có thể phân chia dung tích này thành một số khoang hàng trong mỗi lần chở. Việc thiết kế mỗi khoang hàng có một chi phí cố định A. Việc xếp dỡ hàng có thể làm đồng thời ở các khoang với chi phí cố định cho mỗi đơn vị dung tích là C. Thời gian xếp dỡ tỷ lệ nghịch với số khoang hàng, chi phí lưu bến cố định theo thời gian là C_1. Cần phân chia tổng dung tích thành các khoang sao cho chi phí phát sinh từ các yếu tố trên nhỏ nhất. Thực chất bài toán này là một bài toán tổ chức sản xuất, nó không mang tính chất của một quá trình dự trữ, nhưng do những đặc điểm nhất định người ta có thể mô tả bài toán như một bài toán dự trữ và việc tìm lời giải hoàn toàn tương tự như bài toán Wilson.

Giả sử ta chia n khoang với dung tích q như nhau. Tổng chi phí được xác định như sau:

$$F(n,q) = nA + CQ + \frac{T}{n}C_1 = \frac{AQ}{q} + \frac{C_1 q}{Q}T + CQ$$

T có thể xác định bằng thời gian xếp dỡ hàng nếu tàu chỉ có 1 khoang, vì vậy có thể qui đổi để nhận được T=1.

Hàm tổng chi phí có dạng:

$$F(n,q) = \frac{AQ}{q} + \frac{C_1 q}{Q} + CQ$$

Dung tích tối ưu của mỗi khoang xác định theo công thức sau:

$$q^* = Q\sqrt{\frac{A}{C_1}} \qquad (15)$$

Trên đây là một số bài toán có thể mô hình hoá thành mô hình Wilson với một vài điều chỉnh nhỏ. Điểm chung của lớp mô hình này là cách mô hình hoá và cách tìm lời giải. Các công thức xác định lời giải tương đối đơn giản. Tuy nhiên, tính chất phức tạp lại thể hiện ở việc phân tích các yếu tố và cách thức trừu tượng hoá, hình thức hoá để có được mô hình đơn giản nhất có thể, trên cơ sở đó lợi dụng lời giải cổ điển trong mô hình Wilson để tìm lời giải cho từng bài toán cụ thể.

3- Mô hình dự trữ tiêu thụ đều bổ sung dần

a- Mô tả bài toán

Giả sử nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T (T=1) là Q đơn vị. Việc tiêu thụ hàng là đều đặn và thời gian bổ sung hàng vào kho được tiến hành với cường độ không đổi K đơn vị trong thời gian T=1. Ta giả thiết rằng K>>Q vì nếu K ≤ Q thì không cần đặt vấn đề dự trữ. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, giá đơn vị hàng là C, hệ số chi phí dự trữ là I, thời gian đặt hàng là T_0. Hãy xác định số lần đặt hàng và lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất.

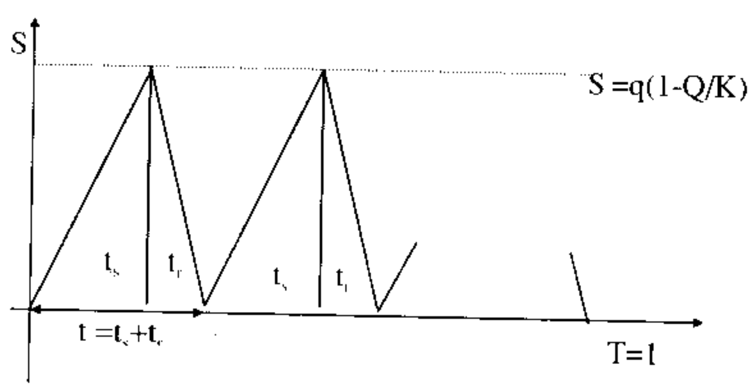
Mô hình này được xét như một trường hợp đại diện cho quy luật bổ sung hàng không tức thời. Những phân tích sau đây có thể làm tương tự cho các mô hình khác khi ta thay đổi các tình huống về giá cả, qui luật tiêu thụ hàng v.v...

b-Thiết lập mô hình

Tương tự như mô hình trên ta có thể xem số lượng hàng đặt mỗi lần bằng nhau và bằng q, số lần đặt hàng sẽ là n=Q/q. Vì Q << K nên trong mỗi chu kỳ dự trữ, tiêu thụ t có hai khoảng thời gian t_s - thời gian có bổ sung hàng vào kho; t_r- thời gian chỉ tiến hành tiêu thụ.

Nếu gọi lượng hàng tối đa trong kho là S:Ta có trong thời gian T=1 nếu nhập hàng liên tục thì lượng hàng dư là K-Q; trong thời gian t_s lượng hàng dư là S vậy,: $S/t_s=(K-Q)/T$ hay $S=t_s(K-Q)$.

Mặt khác trong thời gian t_s lượng hàng nhập được là q, nên $q/t_s=K/T$ hay $t_s=q/K$, từ đó ta có: S=q(K-Q)/K=**q(1-Q/K)**, và có sơ đồ biểu thị số lượng hàng dự trữ trong kho như sau:



Hàm tổng chi phí là: $$F(q)=\frac{AQ}{q}+IC\frac{q}{2}(1-\frac{Q}{K})+CQ \qquad (16)$$

Nếu đặt I' =I(1-Q/K) ta có hàm chi phí của mô hình Wilson trong đó I thay bằng I', và dễ dàng có lời giải tương tự.

c- Lời giải

Lượng hàng đặt tối ưu mỗi lần:

$$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC\left(1-\frac{Q}{K}\right)}} \tag{17}$$

và:
$$D(q^*) = \sqrt{2AQIC\left(1-\frac{Q}{K}\right)} \tag{18}$$

$$\Rightarrow F(q^*) = \sqrt{2AQIC\left(1-\frac{Q}{K}\right)} + CQ \tag{19}$$

Số lần đặt hàng tối ưu $n^* = Q/q^*$

Chu kỳ dự trữ, tiêu thụ : $t^* = 1/n^*$.

Điểm đặt hàng trong trường hợp này cần phân biệt mức B^* khi đang làm đầy kho và khi đang làm vơi kho.

Trước tiên ta tính: $B = Q[T_0 - t^*.\mathrm{int}(T_0/t^*)]$.

Nếu $B \le S^* = q^*(1-Q/K)$ thì $B^* = B$: đặt hàng khi đang làm vơi kho.

Nếu $B > S^*$ thì $B^* = (K-Q)(t^* - B/Q)$: đặt hàng khi đang làm đầy kho.

d- Phân tích lời giải

Các phân tích trong mô hình Wilson hoàn toàn có thể sử dụng cho mô hình dự trữ tiêu thụ đều, bổ sung dần dần. Một số bài toán mở rộng có thể ứng dụng được nếu ta có thể tiến hành được phép thay thế hệ số I bởi I' như đã nói ở trên.

Sau đây chúng ta chỉ xét những phân tích riêng có của mô hình này

+ Xấp xỉ bởi mô hình Wilson và huỷ bỏ dự trữ

Rõ ràng tỷ lệ Q/K là hoàn toàn xác định, vì vậy sự sai khác của lời giải trong mô hình này với mô hình Wilson phụ thuộc vào giá trị Q/K.

Nếu $Q/K \approx 0$ thì thực chất mô hình trở thành mô hình bổ sung tức thời. Ngược lại khi $Q/K \approx 1$ thì coi như không có dự trữ.

Mô hình dự trữ này phù hợp với quá trình tổ chức sản xuất - tiêu thụ hơn là quá trình kinh doanh thương mại. Trong đó có thể xem K là năng lực sản xuất một mặt hàng chính, Q là nhu cầu, A là chi phí chuẩn bị một đợt sản xuất, C là chi phí trực tiếp cho sản xuất một đơn vị hàng, T_0 là thời gian chuẩn bị sản xuất.

+ *Bài toán với khối lượng hàng không qua kho*

So với mô hình Wilson, tổng chi phí trong mô hình này nhỏ hơn, nguyên nhân là có một khối lượng hàng có thể xem là không phải qua kho trong mỗi chu kỳ, do đó giảm được chi phí dự trữ. Có thể xác định số lượng đó tại chiến lược tối ưu như sau:

$$r = (q^* - S^*) = q^* - q^*(1 - Q/K) = q^*Q/K.$$

Với số chu kỳ là Q/q^* và với T=1 tổng lượng hàng không qua kho là:

$$R^* = \frac{Q^2}{K};$$

R* cũng là một chỉ tiêu để đánh giá một khía cạnh của chiến lược dự trữ đang tồn tại. Trong thực tế, R* không phụ thuộc các chi phí, nó chỉ phụ thuộc K và Q. Vì vậy nếu doanh nghiệp thực hiện một chiến lược dự trữ q, mà lượng hàng không qua kho lớn hơn R* tức là nhu cầu lớn hơn mức dự báo hoặc khả năng sản xuất giảm, ngược lại khi lượng hàng không qua kho bé hơn R* thì nhu cầu lớn hơn mức dự báo hoặc khả năng sản xuất tăng.

Có hai tình huống đơn giản là:

- Vấn đề dự báo và điều chỉnh tổng nhu cầu: Q

- Vấn đề đánh giá năng lực thực tế của đơn vị: K

+ *Tổng nhu cầu Q*: Khi tiến hành lập kế hoạch tác nghiệp cho một thời kỳ T, chúng ta dựa trên nhiều nguồn thông tin để xác định tổng nhu cầu Q cho một doanh nghiệp, một khu vực.... . Không thể và cũng không có đủ khả năng xác định chính xác Q. Chúng ta có thể căn cứ vào tình hình dự trữ-tiêu thụ của một phần thời gian để hiệu chỉnh tham số này.

1- Giả sử trong thời gian T=1 ta đã dự báo một nhu cầu Q đều đặn. Bằng năng lực cung cấp K, sau thời gian αT ta xác định được lượng hàng không qua kho R_1 (hoặc tương ứng là lượng hàng qua kho $R_2 = \alpha K - R_1$). Như vậy lượng hàng không qua kho R_1 là lượng hàng thực tế tiêu thụ trong thời gian $\alpha T = \alpha$. Nhu cầu thực tế sẽ là $Q' = R_1/\alpha$.

2- Lời giải trong tình huống đơn giản nói trên có thể không thực tế, do doanh nghiệp luôn có một chiến lược theo chu kỳ. Vì vậy chỉ sau một chu kỳ hay cả năm người ta mới có khả năng đánh giá lại thị trường. Sau đây ta xét trường hợp thời gian sản xuất ban đầu làm cơ sở đánh giá là 1 chu kỳ.

Trong một chu kỳ giả sử ta sản xuất lượng hàng q, nếu nhu cầu cả năm là Q. lượng hàng qua kho là $S = q(1-Q/K)$. Giả sử lượng hàng qua kho thực tế là S' khác S và thời gian sản xuất của chu kỳ này là t_s^0, như vậy ta có thể thay $q = t_s^0K$. Nhu cầu thực tế Q' nhận được từ phương trình $S' = t_s^0K(1-Q'/K)$.

Nghiệm phương trình này là: $Q' = K - S'/t_s^0$.

3. Trường hợp đơn giản nhất, cơ sở đánh giá là một năm sản xuất và tiêu thụ. Như đã nói ở trên lượng hàng không qua kho lý thuyết là $R^* = \frac{Q^2}{K}$, nếu lượng hàng không qua kho thực tế là R' khác R* ta có thể xác định lại Q' nhờ công thức sau:

$$Q' = \sqrt{S'K}\ .$$

+ *Khả năng sản xuất K:* Hoàn toàn như trên, bài toán đánh giá lại khả năng sản xuất cũng có thể phân chia thành 3 trường hợp tương tự. Tuy nhiên, cần chú ý rằng đánh giá lại khả năng cung cấp thường chỉ có ý nghĩa khi bản thân doanh nghiệp không tự sản xuất, hàng hoá nhận được từ một hay một số nguồn cung khác. Về mặt kỹ thuật cũng như tính toán cụ thể không có gì khó khăn.

e- Thí dụ

Thí dụ 1 (bài toán cơ bản): Một cơ sở sản xuất xăm lốp xe hơi có công suất thiết bị 2000000 bộ năm, nhu cầu tiêu thụ 1400000 bộ/năm. Chi phí cho một lần chuẩn bị sản xuất là 400$, chi phí sản xuất mỗi bộ 140$. Chi phí bảo quản có hệ số 0,01. Thời gian chuẩn bị một đợt sản xuất 45 ngày.

a- Hãy phân chia nhu cầu trên thành các đợt sản xuất sao cho tổng chi phí bé nhất.

b- Nếu mỗi lần sản xuất 6000 bộ thì chi phí cho mỗi bộ là 138S, có nên làm theo qui mô này hay không?

Giải: (Kết quả nhận được từ MH4)

SO LIEU

Tong cong suat   K= 2000000.00

Tong nhu cau Q=1400000.00

Chi phi dat hang A=400.00

He so chi phi du tru =140.000

Don gia = 0.010

Thoi gian dat hang (so ngay) T= 45

KET QUA GIAI BAI TOAN

Luong hang dat tot nhat la q*=51639.78

Luong hang toi da trong kho s*=15491.93

Tong chi phi nho nhat F(q*)= 196021688,707

Thoi gian mot chu ky t*=0.0369

So lan dat hang n*= 27.11

Diem dat hang B* = 14552,73

Dat hang khi dang lam day kho

b- Nếu mỗi lần sản xuất 6000 bộ thì tổng chi phí sẽ là:

F(6000) = 400.1400000/6000 +

6000(1-1400000/2000000).130.0,01/2+1400000,138=

=179294503,3

Ta thấy F(6000) < F(q*) vậy nên chọn lô hàng sản xuất mỗi lần là 6000 bộ.

Thí dụ 2 (đánh giá lại như cầu): Một doanh nghiệp cung cấp thuốc bảo vệ thực vật dự báo trên địa bàn mình cung cấp lượng tiêu thụ mỗi năm là 30000 đơn vị. Công suất thực tế của doanh nghiệp là 45000 đơn vị/năm. Chi phí cho 1 lần chuẩn bị sản xuất là 2 triệu, chi phí sản xuất tính trực tiếp cho mỗi đơn vị thuốc bảo vệ thực vật này là 200 nghìn đồng. Chi phí bảo quản bằng 15% chi phí sản xuất trực tiếp. Thời gian chuẩn bị một đợt sản xuất là 3 tháng.

a- Hãy xác định số đơn vị thuốc cần sản xuất mỗi đợt sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Xác định điểm (lượng thuốc còn trong dự trữ) chuẩn bị sản xuất.

b- Giả sử với phương án xác định ở câu a, tiến hành sản xuất tiêu thụ một chu kỳ người ta thấy lượng thuốc qua dự trữ là 1000 đơn vị. Hãy xác định lại tổng nhu cầu và phương án sản xuất tiếp theo.

c- Nếu năm sau tình hình không có gì thay đổi so với năm hiện tại thì chiến lược sản xuất tiêu thụ như thế nào?.

Giải:

a- Ta có thể tóm tắt bài toán trên như một bài toán dự trữ với các dữ kiện sau:

Tong cong suat K= 45000.00

Tong nhu cau Q=30000.00

Chi phi dat hang A= 2.00

He so chi phi du tru =0.150

Don gia = 0.200

Thoi gian dat hang (so ngay) T= 30

Với MH4, lời giải của bài toán là:

Luong hang dat tot nhat la q*= 3464.10

Luong hang toi da trong kho s*= 1154.70

Tong chi phi nho nhat F(q*)= 6034.641

Thoi gian mot chu ky t*=0.1155

So lan dat hang n*= 8.66

Diem dat hang B* = 499,17

Ta có $B=Q(T_0 - t^*int(T_0/t^*))=2465{,}753 > S^*= 1154{,}7$

Đặt hàng khi đang làm đầy kho

b- Giả sử chúng ta tiến hành sản xuất và tiêu thụ trong một chu kỳ theo kết quả nhận được ở câu a, lượng hàng qua kho là 1000 đơn vị. Ta thấy lượng hàng qua kho nhỏ hơn S* tức là khả năng tiêu thụ lớn hơn hay tổng nhu cầu cao hơn.

Xác định lại tổng nhu cầu Q:

- Thời gian sản xuất trong một chu kỳ: t_s=0.07689

- Tổng nhu cầu dự báo lại: $Q' = K- S'/t_s$= 32009.6 (đơn vị).

Phương án cho thời gian còn lại trong năm:

Do thời gian sản xuất tiêu thụ của chu kỳ đầu không có khả năng hiệu chỉnh nên ta không xét đến việc bổ sung nhu cầu cho chu kỳ này. Tổng nhu cầu của thời gian còn lại có thể tính như sau: Q= Q' (1- 0.1155)=28312.

Tổng công suất còn lại là K = K(1-0.1155)= 39802. Thời gian còn lại là T = 0.8845.

Để đơn giản cho việc tính toán, trước tiên chúng ta xem một đơn vị thời gian là 0.8845 năm. Hiệu chỉnh hệ số chi phí dự trữ theo công thức: I'=I*0.8845= 0.132675.

Lời giải nhận được từ MH4 như sau:

Tong cong suat K= 39802.00

Tong nhu cau Q=28312.00

Chi phi dat hang A= 2.00

He so chi phi du tru =0.133

Don gia = 0.200

Thoi gian dat hang (so ngay) T= 30

KET QUA GIAI BAI TOAN

Luong hang dat tot nhat la q*= 3845.02

Luong hang toi da trong kho s*= 1109.98

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 5691.853

Thoi gian mot chu ky t*=0.1358x0.8845=0,122503

So lan dat hang n*= 7.36

Diem dat hang B* = 283,92

Ta có B=Q(T_0 - t*int(T_0/t*)) = 3140,73 > S*= 1109,89

Đặt hàng khi đang làm đầy kho

Với kết quả trên, trong thời gian còn lại ta chia tổng nhu cầu thành 7,36 lần, mỗi lần sản xuất 3845.02 đơn vị. Thời gian của mỗi chu kỳ sản xuất, tiêu thụ là:

t'*= t*0.8845 =.120115 = 43 ngày.

c. Tổng nhu cầu năm sau: Q=32009.

Giải bài toán với số liệu sau:

Tong cong suat K= 45000.00

Tong nhu cau Q=32009.00

Chi phi dat hang A= 2.00

He so chi phi du tru =0.150

Don gia = 0.200

Thoi gian dat hang (so ngay) T= 30

Kết quả với MH4 như sau:

Luong hang dat tot nhat la q*= 3844.95

Luong hang toi da trong kho s*= 1109.99

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 6435.100

Thoi gian mot chu ky t*=0.1201

So lan dat hang n*= 8.32

Diem dat hang B* = 202,74

Ta có $B=Q(T_0 - t^*int(T_0/t^*)) = 202,74 < S^* = 1109,99$

Đặt hàng khi đang làm với kho

Thí dụ 3 (đánh giá lại khả năng): Một cơ sở sản xuất bột giặt, với trang bị kỹ thuật, lao động, tiền vốn,... ước tính có thể sản xuất 60000 tấn/năm. Nhu cầu thị trường chỉ ở mức 40000 tấn/năm, chi phí cho mỗi đợt chuẩn bị sản xuất là 140$, chi phí sản xuất trực tiếp cho mỗi tấn là 900$, việc tiêu thụ có thể xem là đều đặn. Chi phí bảo quản bằng 0,01 chi phí sản xuất trực tiếp. Trong năm t cơ sở này đáp ứng vừa đủ nhu cầu nói trên và chia thành 4 đợt sản xuất, mỗi đợt 10000 tấn.

a- Hãy xác định khả năng sản xuất thực của cơ sở trong năm t. Biết rằng lượng hàng không qua kho là 20000 tấn.

b- Năm t+1 mọi chi phí tăng 10%; thời gian đặt hàng 120 ngày; tính số lượng cần sản xuất mỗi đợt sao cho tổng chi phí nhỏ nhất; tính điểm đặt hàng tương ứng.

Giải:

a- Lượng hàng không qua kho trong trường hợp chọn qui mô tối ưu tính được là $R^*=Q^2/K$ xấp xỉ 26666,666 tấn. Như vậy lượng hàng không qua kho nhỏ hơn mức lý thuyết. Ta thấy từ công thức tính S lượng hàng không qua kho có thể tính theo công thức sau: $R=Q^2/K$. Ta có thể ước tính khả năng thực của cơ sở là: $K^*=Q^2/R^*=$ 80000 tấn.

b. Tóm tắt số liệu: (với giả thiết mọi chi phí tăng 10%)

Tổng công suất K= 80000,00

Tổng nhu cầu Q=40000,00

Chi phí đặt hàng A=154,00

Hệ số chi phí dự trữ I =0,010

Đơn giá C =990,000

Thời gian đặt hàng (số ngày) T_0= 120

Kết quả giải bài toán:

Lượng hàng đặt tốt nhất là q*= 1577,62

Lượng hàng tối đa trong kho là S*= 788,81

Tổng chi phí nhỏ nhất N(q*)=39607809,225

Thời gian một chu kỳ t*=0,0394

Số lần đặt hàng n*= 25,35

Điểm đặt hàng B* =529,71

Ta có $B=Q(T_0 - t^*\mathrm{int}(T_0/t^*)) = 529,71 < S^* = 788,81$

Đặt hàng khi đang làm với kho.

Chúng ta hoàn toàn có khả năng mở rộng mô hình dữ trữ tiêu thụ đều, bổ sung dần dần như đối với mô hình Wilson. Tuy nhiên, ngoài việc thay một cách hình thức hệ số I bằng I' như trình bày ở trên cần chú ý đến yếu tố khả năng cung cấp K mà trong mô hình Wilson không có. Mặc dù về mặt toán học không có thay đổi nhiều trong cách tiếp cận khi mô hình hoá những bài toán như vậy, nhưng hầu hết các bài toán sản xuất-dự trữ tiêu thụ thực tế có thể mô hình hoá bởi loại mô hình này.

4- Mô hình dự trữ giá hàng thay đổi theo số lượng đặt mua (Mô hình nhiều giá)

Các mô hình đã xét nói chung giả thiết rằng giá hàng cố định theo mỗi phương thức. Trong phần này chúng ta xét trường hợp giá hàng thay đổi theo số lượng đặt mua mỗi lần (còn gọi là mô hình nhiều giá), loại mô hình như vậy thích ứng với các hiện tượng sản xuất kinh doanh thực tế đó là các hình thức đặt hàng, bán buôn công nghiệp, thương nghiệp... hay nói chung là xét đến tính hiệu quả của qui mô sản xuất kinh doanh khi xác định giá hàng. Chúng ta lấy cơ sở là mô hình Wilson, trong trường hợp bài toán thích ứng với mô hình bổ sung dần dần cách giải quyết không có gì khác.

a- Mô tả bài toán

Nhu cầu một loại hàng trong thời gian T là Q đơn vị. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A, hệ số chi phí dự trữ là I, giá hàng thay đổi theo số lượng mua mỗi lần q như sau:

nếu	$q < s_1$	giá c_1
	$s_1 \le q < s_2$	giá c_2
	$s_2 \le q < s_3$	giá c_3
	....	
	$s_{k-1} \le q < s_k$	giá c_k
	....	
	$s_{n-1} \le q$	giá c_n

trong đó : $s_1 < s_2 < \ldots\ldots < s_{n-1}$ và $c_1 > c_2 > \ldots\ldots > c_n$.

Có thể xem như $s_0 = 0$ và $s_n = +\infty$.

b-Thiết lập mô hình

Để đơn giản cho việc tìm lời giải ta giả thiết thời gian bổ sung hàng không đáng kể (bổ sung tức thời).

Đặt: $$F_i(q) = \frac{AQ}{q} + IC_i\frac{q}{2} + C_iQ$$

Ta có: $$F(q) = \begin{cases} F_1(q) & khi \quad q \in (0, s_1) \\ F_2(q) & khi \quad q \in [s_1, s_2) \\ & \ldots\ldots\ldots \\ F_{n-1}(q) & khi \quad q \in [s_{n-2}, s_{n-1}) \\ F_n(q) & khi \quad q \in [s_{n-1}, \infty) \end{cases}$$

c- Phân tích mô hình và thuật giải

Theo giả thiết $c_1>c_2>.....>c_n$ ta có: $F_1(q) > F_2(q) >......> F_n(q)$ với mọi giá trị $q > 0$.

Gọi q_i^* là điểm cực tiểu của hàm $F_i(q)$ ta có:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_i}}$$

do c_i giảm nên ta luôn có: $q_i^* > q_{i-1}^*$, tức là các điểm cực tiểu của các hàm chi phí $F_i(q)$ xếp theo thứ tự tăng dần. (20)

Mặt khác

$$F_i(q_i^*) = C_iQ + 2AQ/q_i^* < F_{i-1}(q_{i-1}^*) = C_{i-1}Q + 2AQ/q_{i-1}^*. \qquad (21)$$

Với (20) và (21) chúng ta có thể thiết lập các thuật toán giải bài toán nhiều giá như sau:

Thuật toán 1:

Vì hàm $F_j(q)$ luôn có trị số nhỏ nhất so với các hàm $F_i(q)$ với mọi $i<j$ và $q>0$, ta tìm cách xác định giá trị nhỏ nhất của F trong các khoảng của miền xác định giảm dần. Cụ thể là:

- Xét khoảng $[s_{n-1}, \infty)$, trên khoảng này F(q) được biểu diễn qua hàm $F_n(q)$, cực tiểu của $F_n(q)$ đạt tại $q_n^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_n}}$

Nếu $q_n^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_n}} \geq s_{n-1}$, tức là giá trị này thuộc miền xác định của $F_n(q)$ trong F, thì ta nhận được lời giải của bài toán với $q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_n}} = q_n^*$.

Nếu $q_n^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_n}} < s_{n-1}$, tức là giá trị này không thuộc miền xác định của $F_n(q)$ trong F, hơn nữa với $q > q_n^*$ hàm $F_n(q)$ tăng nên giá trị nhỏ nhất của hàm F(q) trong khoảng $[s_{n-1}, \infty)$ đạt tại $F_n(s_{n-1}) = \frac{AQ}{s_{n-1}} + IC\frac{s_{n-1}}{2} + C_nQ$. Tiếp tục xét khoảng $[s_{n-2}, s_{n-1})$

- Xét khoảng $[s_{n-2}, s_{n-1})$, trên khoảng này F(q) được biểu diễn qua hàm $F_{n-1}(q)$, cực tiểu của $F_{n-1}(q)$ đạt tại $q_{n-1}^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_{n-1}}}$

Nếu $q_{n-1}^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_{n-1}}} \geq s_{n-2}$, giá trị này thuộc miền xác định của $F_{n-1}(q)$ trong F, thì ta nhận được lời giải của bài toán nhờ so sánh hai giá trị của F tại s_{n-1} và q_{n-1}^*. Cụ thể là :

Nếu $F(q_{n-1}^*) = \sqrt{2AQIC_{n-1}} + C_{n-1}Q > F_n(s_{n-1})$ thì lượng hàng đặt tốt nhất là $q^* = s_{n-1}$.

Nếu $F(q_{n-1}^*) = \sqrt{2AQIC_{n-1}} + C_{n-1}Q < F_n(s_{n-1})$ thì lượng hàng đặt tốt nhất là $q^* = q_{n-1}^*$.

Nếu $F(q_{n-1}^*) = \sqrt{2AQIC_{n-1}} + C_{n-1}Q = F_n(s_{n-1})$, lượng hàng đặt tốt nhất $q^* = q_{n-1}^*$ hoặc $q^* = s_{n-1}$ (cực trị không duy nhất).

Nếu $q_{n-1}^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC_{n-1}}} < s_{n-2}$, tương tự như trên ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm F trên $[s_{n-2}, s_{n-1})$ đạt tại $\mathbf{F_{n-1}(s_{n-2})} = \frac{AQ}{s_{n-2}} + IC\frac{s_{n-2}}{2} + C_{n-1}Q$. Tiếp tục xét khoảng $[s_{n-3}, s_{n-2})$.

Thuật toán được tiếp tục cho đến khi có trị đầu tiên $q_i^* \in [s_{i-1}, s_i)$. Giá trị q_i^* như trên luôn tồn tại vì trường hợp xấu nhất ta luôn có $q_1^* > 0 = s_0$.

Có thể thực hiện thuật toán trên như sau:

Tính các giá trị q_k^* với k=n, n-1, n-2.... cho đến khi nhận được q_i^* thoả mãn điều kiện $q_i^* \in [s_{i-1}, s_i)$.

Tính $\{F_k(s_{k-1})$ với s>i$\}$ và $F_i(q_i^*)$.

Tìm Min$\{F_k(s_{k-1})$ với s>i ; $F_i(q_i^*)\}$.

Điểm đạt giá trị nhỏ nhất chính là điểm cực tiểu của hàm F(q).

Dễ dàng tập hợp các thông tin cần thiết cho việc tìm lời giải trên một bảng có dạng sau:

k	q_k^*	s_{k-1}	Min F(q)
n			
n-1			
n-2			....

Thuật toán 2:

Từ thuật toán 1 ta thấy các bước tính toán luôn phải so sánh hai đại lượng $\sqrt{\frac{2AQ}{IC_i}}$ và s_{i-1}, có thể chuyển việc so sánh này thành so sánh các lượng biến với cùng một lượng cố định như sau:

Điều kiện: $\sqrt{\frac{2AQ}{IC_n}} < (\geq)\ s_{n-1}$ (*)

tương đương điều kiện: $\frac{2AQ}{I} < (\geq) C_i[s_{i-1}]^2$

Đặt $\alpha = \frac{2AQ}{I}$; $C_i s_{i-1}^2 = \beta_i$ ta có (*) tương đương $\alpha < (\geq) \beta_i$.

Như vậy có thể xác định trước α, sau đó tính dãy $\{\beta_i\}$, kể từ i=n, n-1,... cho đến khi nhận được giá trị đầu tiên nhỏ hơn hay bằng α.

Dãy này kết thúc tại i = k, sau đó tìm Min$\{F_i(s_{i-1})$ với s>k ; $F_k(q_k^*)\}$. Trị số nhỏ nhất tìm được cho điểm cực trị tương ứng.

Thuật toán 2 tiện lợi cho việc tính toán nhờ các bảng tính, đặc biệt là khi có những thay đổi trong mức giá và mốc đổi giá.

d- Những lưu ý khi giải quyết các tình huống thông thường trong mô hình nhiều giá

Do tính chất không liên tục của hàm chi phí trong mô hình nhiều giá, các mở rộng bài toán hoàn toàn có thể thực hiện như với mô hình Wilson nhưng phải chú ý các vấn đề sau:

- Mô hình nhiều giá có hàm chi phí xây dựng trên cơ sở một lớp hàm mà mỗi hàm là một hàm mục tiêu của mô hình Wilson xác định trên một khoảng nửa đóng. Vì vậy việc phân tích phải chú ý các điểm biên.

- Một số bài toán nhiều giá không thuộc lớp mô hình này hoặc có một phần nội dung của lớp mô hình này như có một vài giá cố định với lượng đặt mua cố định.

- Trường hợp mô hình với việc bổ sung dần dần tham số K, là một yếu tố không được xét trong mô hình Wilson, có thể làm thay đổi cấu trúc mô hình vì vậy không thể sử dụng máy móc các thuật toán nêu trên.

e- Thí dụ

Thí dụ 1: Một công ty kinh doanh một loại bóng điện, tổng lượng hàng có khả năng tiêu thụ là 10000 thùng/năm. Chi phí cho một lần đặt mua là 20$; hệ số chi phí bảo quản là 10%, cường độ bán ra đều đặn. Thời gian nhập kho không đáng kể. Nếu mỗi lần đặt mua từ 2000 thùng trở lên thì giá 1 thùng là 120$, ngược lại giá 1 thùng là 12,5$. Xác định lượng hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất; tính thời gian một chu kỳ dự trữ và tiêu thụ, tính điểm đặt hàng tương ứng.

Giải: Đây là bài toán có thể mô hình hoá dưới dạng bài toán dự trữ 2 mức giá, với các dữ kiện sau:

Tổng nhu cầu Q =10000

Chi phí đặt hàng A =20

Hệ số chi phí dự trữ I=0.1

Thời gian đặt hàng T =90 (ngày)

Giá hàng: C_1=120.5; C_2=120

Mốc đổi giá: s_1 =2000

Thực hiện thuật toán: q*(2)=182.5742

Vì q_2*nhỏ hơn mức s_1 ta tính $F^*(s_1)$ =1212100 và $F^*(q_k^*)$=1207195

Ta thấy: $F^*(s_1)$ =1212100 > $F^*(q_k^*)$=1207195

Vậy q*= q*(1)=182.195

Kết quả: Lượng hàng đặt mỗi lần q*=182.195

Tổng chi phí bé nhất F*(q) =1207195

Thời gian một chu kỳ t* =0.01822

Số lần đặt hàng trong năm n* =54.88625

Điểm đặt hàng B* = 97.21833

Thí dụ 2: Một cửa hàng kinh doanh mặt hàng A, tổng nhu cầu trong khu vực là 4000 tấn/năm. Cường độ tiêu thụ đều và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể. Chi phí mỗi lần làm hợp đồng là 200$, hệ số chi phí dự trữ là 0,05, thời gian đặt hàng 120 ngày. Nếu mỗi lô hàng mua từ 1000 tấn trở lên thì giá 1 tấn là 56$, ngược lại giá là 57$/tấn. Xác định cỡ lô hàng đặt mỗi lần tối ưu, thời gian một chu kỳ và điểm đặt hàng.

Giải: Đây là bài toán có thể mô hình hoá dưới dạng bài toán dự trữ 2 mức giá, với các dữ kiện sau:

Tổng nhu cầu Q =4000

Chi phí đặt hàng A =200

Hệ số chi phí dự trữ I=0.05

Thời gian đặt hàng T =120 (ngày)

Giá hàng: C_1=57; C_2=56

Mốc đổi giá: s_1 =1000

Thực hiện thuật toán

q*(2)=755.9289

Vì q*(k) nhỏ hơn mức s_{k-1} ta tính $F^*(s_1)$= 226200

q*(1)=749.2686 với $F^*(q^*_k)$= 230135.4

Kết quả:

$q^* = s_1$

Lượng hàng đặt mỗi lần: q*=1000

Tổng chi phí bé nhất: F*(q) =226200

Thời gian một chu kỳ: t* =0.25

Số lần đặt hàng trong năm: n* =4

Điểm đặt hàng: B* =315.0685

Thí dụ 3: Một cửa hàng kinh doanh phân bón vô cơ, nhu cầu của khu vực là 20000 bao năm, chi phí mỗi lần đặt hàng là 50 $, hệ số chi phí dự trữ là 0,2. Giá hàng tuỳ thuộc lượng hàng mua mỗi lần q như sau:

$0 \le q < 5000$ giá 1 bao là 4,3$

$5000 \le q < 15000$ giá 1 bao là 4,1$

15000 ≤ q   giá 1 bao là 4$.

Hiện tại cửa hàng đang mua mỗi lần 4000 tấn.

Hãy xác định chiến lược dự trữ sao cho tổng chi phí bé nhất. Đánh giá chi phí tại mức đặt hàng hiện tại.

Giải: (Kết quả từ MH4)

Tong nhu cau   Q=20000.00

Chi phi dat hang   A= 50.00

He so chi phi du tru I=0.200

So muc gia   n=3

Don gia: 43.000   41.000   40.000

Moc doi gia: 5000.00   15000.00

Ban dang dat hang mot lan bao nhieu don vi?:4000

Hien tai tong chi phi la: 877450.000

Luong hang dat tot nhat la q*= 5000.00

Tong chi phi nho nhat   N(q*)= 840700.000

Khoan thiet hai ban dang chiu la: 36750.000

Thí dụ 4: (một thí dụ bằng số với bảng tính Excel)

Giải bài toán dự trữ nhiều giá

Tổng nhu cầu Q=	60000	alpha=	1200000000
Chi phí đặt hàng A=	500		
Hệ số chi phí dự trữ I=	0.05		

Mốc đổi giá		**Mức giá**		**Beta**	**So sánh**	**MinF**
S(0)	0	C(1)	12			
S(1)	10000	C(2)	11.5	1150000000	k	695874
S(2)	15000	C(3)	11	2475000000	tiếp tục	666125
S(3)	25000	C(4)	10.6	6625000000	tiếp tục	643825
S(4)	35000	C(5)	10.2	12495000000	tiếp tục	621782
S(5)	**40000**	C(6)	10	16000000000	tiếp tục	**610750**

Kết quả nhận được là $q^* = S_5$=40000 với MinF(q)= 610750.

Thí dụ 5: Một cửa hàng kinh doanh một mặt hàng lương thực chế biến. Nhu cầu hàng năm cho khu vực (tính trên cơ sở thị phần) cửa hàng này cung cấp là 1200 tấn. Cửa hàng có thể đặt mua tại một trong hai cơ sở sản xuất như sau:

Cơ sở I: Lượng bán tối đa cho cửa hàng là K_1= 2000tấn/năm nhưng chỉ chấp nhận bán mỗi lần từ S= 200 tấn trở lên, với giá C_1= 2450 nghìn đồng/tấn.

Cơ sở II: Lượng bán tối đa cho cửa hàng là K_2= 4000tấn/năm, chấp nhận bán với số lượng bất kỳ mỗi lần, với giá C_2= 2570 nghìn đồng/tấn.

Giá sử chi phí đặt hàng như nhau khi mua ở hai cơ sở là A= 4000nghìn đồng/1lần. Chi phí dự trữ mỗi tấn/năm là C_0=100nghìn. Các cơ sở cung cấp với cường độ đều bắt đầu từ mỗi đợt cung cấp theo lượng bán tối đa.

Giải: Xét trường hợp mua ở cơ sở I và II có hạn chế S ta có:

Cơ cở I: $q_1^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{C_0(1-\dfrac{Q}{K_1})}} = 195{,}959$ giá trị này không có thực (không thực hiện được), vì vậy chi phí thấp nhất đạt tại S=200. Giá trị này được tính theo công thức:

$$F(S) = \frac{AQ}{S} + C_0\frac{S}{2}(1-\frac{Q}{K_1}) + C_1Q$$

Thay các giá trị của các tham số ta có: $F_1(S)$= 2968000.

Cơ sở II: Tại phương án tối ưu ta có $F_2(q^*)$= 3109923 với khối lượng mua mỗi lần 259,23 tấn.

Vậy chọn mua ở cơ sở I với lượng mua mỗi lần 200 tấn, chi phí nhỏ nhất tương ứng là 2968000.

III- CÁC MÔ HÌNH DỰ TRỮ NGẪU NHIÊN

1. Mô hình dự trữ một giai đoạn

Phần này ta xét một mô hình mà nhu cầu là một biến ngẫu nhiên, mở đầu cho một lớp mô hình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng. Mô hình này tương ứng với bài toán dự trữ 1 giai đoạn. Tuy vậy có thể sử dụng để xác định tổng lượng hàng tối ưu cho một thời kỳ T khi nhu cầu có tính ngẫu nhiên.

a- Mô tả mô hình

Nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T là một biến ngẫu nhiên Q tuân theo qui luật phân phối xác suất F(q), với trung bình và phương sai hữu hạn. Người kinh doanh có thể mua với giá C_0 và bán với giá C_1 ($C_1 > C_0$), việc không thoả mãn nhu cầu dẫn đến tổn thất là C_t đối với một đơn vị hàng thiếu, số hàng thừa sẽ phải bán với giá C_s ($C_s < C_0$). Hãy xác định lượng mua S có lợi nhất trong thời gian T.

b- Thiết lập mô hình

a- Trường hợp Q là một biến ngẫu nhiên rời rạc

Nếu gọi S là lượng hàng cần mua thì lượng hàng tiêu thụ được trong thời gian T là Min (S,Q), như vậy lợi nhuận (với Q rời rạc) có thể tính như sau:

Với lượng mua S nếu nhu cầu Q ≤ S thì xuất hiện lượng hàng thừa, vì Q ngẫu nhiên nên lượng hàng thừa (S - Q) cũng là biến ngẫu nhiên. Xác suất có lượng hàng thừa (S - Q) rõ ràng là xác suất để nhu cầu bằng Q: P(Q).

Từ đó ta có thể tính lợi nhuận trung bình với điều kiện nhu cầu Q≤ S là:

$$D_1(S)=\sum_{Q\le S}(C_1Q - C_0S + C_s(S-Q))P(Q)$$

Ngược lại khi nhu cầu Q > S, xuất hiện tình trạng thiếu hàng và gây nên tổn thất do thiếu hàng. Xác suất có lượng hàng thiếu (Q- S) cũng tính tương tự như trên: P(Q). Vậy lợi nhuận trung bình với điều kiện nhu cầu Q >S là:

$$D_2(S)=\sum_{Q>S}(C_1S - C_0S + C_Z(Q-S))P(Q)$$

Hàm tổng lợi nhuận trung bình D(S) = $D_1(S) + D_2(S)$

Ta có thể viết:

$$D(S)=\sum_{Q=0}^{S-1}(C_1Q - C_0S + C_S(S-Q))P(Q) + \sum_{Q=S+1}^{\infty}(C_1S - C_0S + C_Z(Q-S)P(Q)$$

Vấn đề còn lại là phải xác định lượng mua S sao cho tổng lợi nhuận trung bình lớn nhất. Có thể nhận xét là hai hạng tử của D(S) biến đổi ngược chiều theo S, vì vậy trước hết chúng ta xác định S* sao cho:

$$D(S^*-1) \le D(S^*)$$

$$D(S^*+1) \le D(S^*)$$

Ta có : $D_1(S+1)=\sum_{Q=0}^{S}(C_1Q - C_0(S+1) + C_S(S+1-Q))P(Q)$

$$= \sum_{Q=0}^{S-1}[C_1Q - C_0(S+1) + C_S(S+1-Q)]P(Q)$$

$$+C_1SP(S) - C_0(S+1)P(S) + C_SP(S)$$

$$= \sum_{Q=0}^{S-1}[C_1Q - C_0S + C_S(S-Q)]P(Q)$$

$$-\sum_{Q=0}^{S-1}C_0P(Q) + \sum_{Q=0}^{S-1}C_SP(Q) + C_1SP(S) - C_0SP(S) - C_0P(S) + C_SP(S)$$

$$= D_1(S) - C_0\sum_{Q=0}^{S}P(Q) + C_S\sum_{Q=0}^{S}P(Q) + C_1SP(S) - C_0SP(S)$$

$$D_2(S+1) = \sum_{Q=S+1}^{\infty}(C_1(S+1) - C_0(S+1) - C_Z(Q-S-1)P(Q)$$

$$= \sum_{Q=S}^{\infty}[C_1S + C_1 - C_0S - C_0 - C_Z(Q-S) + C_Z]P(Q) - C_1(S+1)P(S)$$

$$+ C_0(S+1)P(S) + C_ZP(S)$$

$$= \sum_{Q=S}^{\infty}[C_1S - C_0S - C_Z(Q-S)]P(Q) + (C_1 - C_0 + C_Z)\sum_{Q=S}^{\infty}P(Q)$$

$$-(C_1 - C_0 + C_Z)P(S) - C_1SP(S) + C_0SP(S)$$

$$= D_2(S) + (C_1 - C_0 + C_Z)\sum_{Q=S+1}^{\infty}P(Q) - C_1SP(S) + C_0SP(S)$$

Kí hiệu F(S) là xác suất ($Q \leq S$), ta có thể tính được các biểu thức sau:

$D(S+1) - D(S) = C_1 - C_0 + C_z - (C_1 + C_z - C_s)F(S)$

$D(S) - D(S-1) = C_1 - C_0 + C_z - (C_1 + C_z - C_s)F(S-1)$

Điểm S* tối ưu thoả mãn $D(S^*+1) - D(S^*) \leq 0$

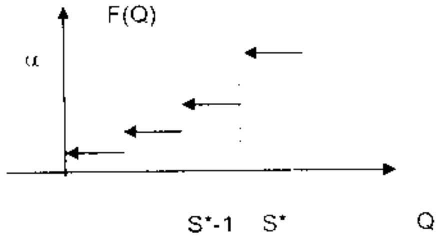
$D(S^*) - D(S^*-1) \geq 0$

tức là: $$F(S^*-1) \leq \frac{C_1 - C_0 + C_z}{C_1 + C_z - C_s} \leq F(S^*).$$

đặt $\alpha = \dfrac{C_1 - C_0 + C_z}{C_1 + C_z - C_s}$

Ta thấy với điều kiện $C_0 > C_s$ thì $0<\alpha<1$.

Như vậy S* chính là phân vị mức α của phân phối F(Q). Có thể mô tả kết quả như sau:



Trong trường hợp α = F(S*) ta có hai lời giải S* và S*+1, tuy nhiên trong thực tế ta có thể không quan tâm nhiều đến khả năng này, vì hai lý do: thứ nhất là hai giá trị gần bằng nhau và S* luôn là một nghiệm; thứ hai là hàm lợi nhuận được tính như giá trị trung bình của một phân phối xác suất.

Thí dụ 1: Số hộp thịt bán được trong mỗi ngày tại một cửa hàng là biến ngẫu nhiên tuân theo qui luật Poisson với trung bình là 100. Xác định số lượng cần mua của cửa hàng trong năm biết rằng giá mua buôn mỗi hộp là 15000 VNĐ, giá bán lẻ là 18000 VNĐ. Cửa hàng ước tính thiệt hại khi không thoả mãn nhu cầu (vì mất khách) là 1500 VNĐ/1 hộp, ngược lại mỗi hộp không bán được phải bảo quản và phải bán với giá 13000 VNĐ.

Giải: Bài toán trên có thể mô tả dưới dạng bài toán dự trữ 1 giai đoạn với các tham số sau:

$$C_1=18000;\ C_0= 15000;\ C_s= 13000;\ C_r= 1500;$$

Ta có α= 0,69

Với hàm phân phối Poisson trung bình 100 ta có: Q*=105.

Chú ý với trung bình của phân phối Poisson đủ lớn ta có thể lấy giá trị phân vị chuẩn với trung bình và phương sai tương ứng làm giá trị xấp xỉ cho giá trị S* cần tìm. Chẳng hạn với thí dụ này giá trị 104.99 nhận được nhờ hàm NORMINV(0.69,100,10)=104.99 của bảng tính Excel.

b- Trường hợp Q liên tục

Trong trường hợp phân phối của Q liên tục ta có thể làm tương tự và điểm S* xác định sao cho:

$F(S^*) = \alpha$, trong đó F(q) là hàm phân phối xác suất của nhu cầu Q.

Nếu biết hàm mật độ xác suất của Q: f(q) thì xác định S* nhờ công thức:

$$F(S^*) = \int_0^{S^*} f(q)dq = \alpha .$$

Thậy vậy: $$D_1(S)= \int_0^{S} ((C_1 q - C_0 S + C_s(S-q))f(q)dq$$

$$D_2(S)= \int_S^{\infty} ((C_1 S - C_0 S + C_z(q-S))f(q)dq \ .$$

Từ đó:

$$D(S) = (C_1 - C_0 + C_z)S - SF(S)(C_1 - C_S + C_Z) + (C_1 - C_s + C_z)\int_0^{S} qf(q)dq + C_z E(Q)$$

Lấy đạo hàm hàm D(S) và cho D'(S)=0 ta có kết quả như trên.

Thí dụ 2: Nhu cầu phân đạm trong năm của một khu vực do công ty A cung cấp là một biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với trung bình ước lượng là E(Q)=12000tấn, độ lệch tiêu chuẩn được ước lượng là 40 tấn. Giá mua vào là 120\$/tấn, giá bán lẻ thông thường là 140\$/tấn. Việc cung cấp thiếu mỗi tấn so với nhu cầu sẽ làm thất thiệt 10\$, lượng tồn kho cuối kỳ chuyển sang kỳ sau với giá bán 115\$/tấn.

a- Xác định lượng hàng mua sao cho tổng lợi nhuận cao nhất.

b- Giải bài toán trong trường hợp tình hình hàng năm được mô tả như trên, theo số lượng tính toán ở câu a. Biết chi phí dự trữ tính theo giá mua với hệ số 0,05; chi phí đặt hàng một lần 120\$.

Giải:

a-Theo các dữ kiện trên ta có: C_1=140, C_0=120;

C_s= 115; C_z= 10.

ta có: α= 0,86.

Cần tìm S* sao cho $\Phi[(S^* - 1200)/40] = 0,86$. Tra bảng phân phối chuẩn ta có: $U_{1,08032}$=0,86;

S*=1,08032. 40 +12000=12043 (tấn).

b- Với Q*=S*= 12043 ta giải bài toán Wilson và nhận được kết quả sau:

Tong nhu cau Q= 12043.0

Chi phi dat hang A= 120.00

He so chi phi du tru I=0.050

Don gia C=120.00

KET QUA GIAI BAI TOAN

Luong hang dat tot nhat la q*= 694.06

Tong chi phi nho nhat N(q*)= 1449324.363

Thoi gian mot chu ky t*=0.0576

So lan dat hang n*= 17.35

Chi phí thực tế cho mỗi tấn sẽ là 120,35($).

c- Một vài tình huống

- Trường hợp đơn giản là C_S=0 tức là lượng hàng thừa phải huỷ (chẳng hạn các loại vaxin, thực phẩm tươi sống, rau quả,....)

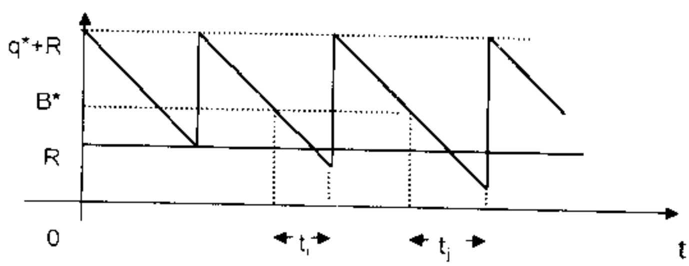
Ta có $\alpha = 1 - C_0/(C_1+C_2)$. như vậy tỷ lệ $C_0/(C_1+C_2)$ chính là xác suất của biến cố (Q>S*), tỷ lệ này cho biết khả năng thiếu hàng tại phương án tối ưu, tỷ lệ này tăng nếu như giá mua vào so với giá bán ra chênh lệch nhỏ, đồng thời thiệt hại do không thoả mãn nhu cầu không quá lớn.

- Như trên đã trình bày, Q được xem là biến ngẫu nhiên vì vậy sau khi xác định Q*=S* ta cần giải bài toán tìm chiến lược đặt hàng cho mỗi thời kỳ. Trong trường hợp này giá hàng ứng với mô hình Wilson phải bao gồm giá mua, chi phí dự trữ, chi phí thất thiệt tính cho mỗi đơn vị hàng bị thiếu hụt tại chiến lược dự trữ tối ưu. Việc phân bài toán thành hai bước giải như vậy chắc chắn không cho ta phương án tối ưu toàn bộ. Trong trường hợp giá hàng tính lại quá cao so với giá mua C_0 cần sử dụng thuật toán lặp nhiều vòng để nhận được lời giải gần đúng.

2- Mô hình dự trữ có bảo hiểm

a- Mô tả bài toán

Khi xét bài toán dự trữ đơn giản, ta giả thiết rằng thời gian đặt hàng cố định là T_0 từ đó xác định được điểm đặt hàng B*. Như vậy hàng trong kho vừa hết là có hàng bổ sung. Tuy nhiên trong thực tế thời gian đặt hàng có thể ngẫu nhiên, thì từ thời điểm đặt hàng đến khi có hàng mới, lượng hàng tiêu thụ có thể khác B*. Điều đó đòi hỏi đôi khi cần có một lượng dự trữ bảo hiểm nhằm thoả mãn nhu cầu tại mọi thời điểm với mức tin cậy cho trước. Để giải bài toán trong trường hợp này thay vì xét tính ngẫu nhiên của thời gian đặt hàng T, ta xem như lượng hàng tiêu thụ trong thời gian đó là một biến ngẫu nhiên B, tuân theo một qui luật phân phối xác suất nào đó, với trung bình và phương sai hữu hạn. Sơ đồ kho có thể mô tả như sau:



Có thể tóm tắt bài toán trong trường hợp này như sau: Nhu cầu một loại hàng trong thời kỳ T (T=1) là Q. Chi phí mỗi lần đặt hàng là A, giá hàng là C, hệ số chi phí bảo quản theo giá là I, thời gian đặt hàng là T phân phối G(t),với trung bình là T_0. Việc bổ sung hàng tức thời và tiêu thụ hàng phân phối đều theo thời gian. Hãy xác định lượng hàng cần mua mỗi lần và một lượng dự trữ bảo hiểm R sao cho khả năng thiếu hàng không lớn hơn ε đủ nhỏ (cho trước).

b- Thiết lập mô hình

Bài toán trên có thể qui về bài toán xác định lượng bảo hiểm R sao cho trong thời gian T lượng hàng tiêu thụ vượt quá (B* +R) với xác suất ε. Giả sử biết qui luật phân phối của T, vì việc tiêu thụ là đều đặn nên có thể suy ra qui luật phân phối của lượng hàng tiêu thụ Q_r trong thời gian cuối cùng : T_r=(T -t*.int(T/t*)) là $F(q_r)$ (Trong thực tế ta có thể xem như đã biết phân phối xác suất của Q_r). Ta cần xác định R tối thiểu sao cho: $P(Q_r > B^*+R) < \varepsilon$.

Gọi phân vị mức ε của phân phối F là F_ε (tức là $P(Q<F_\varepsilon)=\varepsilon$) ta có:$B^*+R>F_{1-\varepsilon}$ hay $R> F_{1-\varepsilon}-B^*=R^*$.

Trong trường hợp đó dự trữ trung bình trong kho sẽ là:0,5q*+R* và hàm tổng chi phí đạt giá trị nhỏ nhất: N(q*,R*)= IC(q*+R*) +C(Q+R*).

c- Thí dụ

Một cơ sở sản xuất xà phòng cần sử dụng mỗi năm 11,88 tấn xút, qui luật tiêu thụ đều theo thời gian. Thời gian nhập kho không đáng kể. Chi phí mỗi lần đặt hàng

60$, giá mỗi tấn xút 850$, chi phí dự trữ bằng 10% giá mua. Thời gian đặt hàng phân phối chuẩn trung bình là 60 ngày, với thời gian đó trung bình mỗi ngày tiêu thụ là 33kg với sai lệch tiêu chuẩn 1kg, mỗi ngày thiếu xút phải ngừng sản xuất gây tổn thất 40$. Với mức bảo hiểm có độ tin cậy 0,99, hãy xác định lượng dự trữ bảo hiểm sao cho tổn thất ít nhất, tính tổng chi phí đảm bảo dự trữ cho sản xuất.

Giải:

Trước hết ta tính lượng hàng mua mỗi lần tối ưu: $q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$

q*=4095(kg) từ đó ta có thời gian mỗi chu kỳ dự trữ-tiêu thụ là t*=q*/Q=0,341(năm). Ta tính được điểm đặt hàng B*= 2000(kg).

Với mức tin cậy 0,99 ta xác định lượng dự trữ $R^*=F_{0,99}-B^*$ hay $B^*+R^*>F_{0,99}$ với trung bình của phân phối chuẩn là M(X)=1980(kg), độ lệch tiêu chuẩn $\sigma_X=60$.

Ta có $F_{0,99}= 1980+U_{0,99}60=1980+2,32.60=2119,58$.

Vậy R*=2119,58-2000=119,58 (kg).

Lượng dự trữ trung bình trong kho là: 2047,5 + 119,58=2167,08.

Từ đó ta tính hàm tổng chi phí như sau:

N(q*,R*)= IC(q*+R*) +C(Q+R*)=10659,8823$.

3- Mô hình dự trữ bán thành phẩm

a- Mô tả mô hình

Trong sản xuất có một lớp bài toán khá phổ biến là để tạo ra 1 sản phẩm người ta có thể chia công việc thành nhiều công đoạn kế tiếp nhau. Trong trường hợp sản xuất hàng loạt, việc bố trí các khâu công việc nhằm đảm bảo sự gián đoạn của các khâu trước ảnh hưởng ít nhất đến toàn bộ các khâu sau là một bài toán có ý nghĩa đối với các nhà quản lý và tổ chức sản xuất. Như vậy xuất hiện vấn đề dự trữ bán thành phẩm trong sản xuất. Ở đây ta sẽ mô tả bài toán này dưới dạng một mô hình dự trữ và tìm lời giải của nó, với mục tiêu chi phí dự trữ bán thành phẩm và thiệt hại do phải ngừng sản xuất ít nhất.

Giả sử quá trình sản xuất sản phẩm A phải qua n công đoạn. Các công đoạn trừ công đoạn đầu không cần dự trữ bán thành phẩm, trong khi đó công đoạn i cần có lượng dự trữ từ công đoạn i-1 để có thể tiếp tục sản xuất khi công đoạn i-1 ngừng sản xuất vì lý do nào đó. Bài toán có thể qui về việc đảm bảo dự trữ giữa 2 công đoạn bất kỳ, trong trường hợp có nhiều công đoạn ta giải bài toán như một hệ ghép nối tiếp đơn giản.

Với qui trình 2 công đoạn ta ký hiệu:

X là thời gian giữa hai lần công đoạn 1 phải ngừng sản xuất vì lý do kỹ thuật. Giả sử X phân phối S(x) với trung bình μ.

T là thời gian ngừng sản xuất của công đoạn 1, T phân phối R(t) với trung bình và phương sai hữu hạn.

C_1 là thiệt hại do công đoạn 2 phải ngừng sản xuất vì thiếu bán thành phẩm của công đoạn 1 trong 1 đơn vị thời gian.

Q là lượng bán thành phẩm cần cho công đoạn 2 trong 1 đơn vị thời gian.

S là lượng bán thành phẩm dự trữ trước công đoạn 2.

IC là chi phí dự trữ bán thành phẩm trong 1 đơn vị thời gian.

Xác định S* sao cho tổng chi phí dự trữ và chi phí thiệt hại nhỏ nhất. Trong trường hợp này ta không xét đến năng suất của công đoạn 1 và cách tạo dự trữ, vấn đề này có thể giải quyết nhờ một bài toán khác tuỳ thuộc tình huống cụ thể. Trong trường hợp các công đoạn có năng suất như nhau có thể tính thêm chi phí phụ tạo nên dự trữ trong tổng chi phí.

b- Thiết lập mô hình

Gọi T là thời gian ngừng sản xuất của công đoạn 1 mỗi lần, T phân phối R(t),

G là thời gian công đoạn 2 phải ngừng sản xuất do thiếu bán thành phẩm.

Ta có

$$G = \begin{cases} 0 & \text{nếu } S > QT \\ T - \dfrac{S}{Q} & \text{nếu } S < QT \end{cases}$$

Thiệt hại trung bình trong thời gian này là: $C_K = C_1 \int_{S/Q}^{\infty} (t - S/Q) r(t) dt$

từ đó thiệt hại trung bình trong một đơn vị thời gian là: $D(S) = C_K/\mu + ICS$.

S* phải thoả mãn điều kiện: $D'(S) = IC - C_1/Q\mu \int_{S/Q}^{\infty} r(t) dt = 0$

hay: $$\int_{S/Q}^{\infty} r(t)dt = \text{IC Q}\mu / C_1.$$

Trong đó r(t) là hàm mật độ của phân phối R(t).

c- Thí dụ

Một cơ sở sản xuất mặt hàng A có 2 công đoạn kế tiếp nhau. Thời gian giữa hai lần ngừng sản xuất cũng như thời gian 1 lần ngừng sản xuất của công đoạn 1 là các biến ngẫu nhiên phân phối luỹ thừa với trung bình 16 giờ và 0,5giờ. Mỗi giờ công đoạn 2 ngừng hoạt động thiệt hại 40$, chi phí bảo quản bán thành phẩm theo giờ là 0,004$. Trong 1 giờ công đoạn 2 cần 20 đơn vị bán thành phẩm để có thể sản xuất bình thường. Hãy xác định lượng dự trữ cần thiết để chi phí bé nhất.

Giải: Gọi S* là lượng dự trữ cần thiết, S* là nghiệm của phương trình sau:

$$\int_{S^*/20}^{\infty} e^{-2t} dt = 20.16{,}004/40 = 0{,}032$$

ta có: $2e^{-2(S^*/20)} = 0{,}032.$

Suy ra: $S^* = -10\ln(0.016) = 41.3516$

4- Mô hình dự trữ với hàng hoá có khả năng tự huỷ

a- Mô tả mô hình

Một số loại hàng có khả năng tự hư hỏng trong dự trữ, như vậy để thoả mãn nhu cầu người ta cần đặt mua một khối lượng lớn hơn tổng nhu cầu.

Giả sử nhu cầu một loại hàng là Q đơn vị trong thời gian (T=1). Chi phí mỗi lần đặt hàng là A, giá hàng C và hệ số chi phí dự trữ là I. Mỗi đơn vị hàng trong thời gian dự trữ t hỏng với xác suất p(t), với $0 \le p(t) \le 1$.

Xác định lượng hàng mua mỗi lần sao cho tổng chi phí nhỏ nhất. Biết rằng mỗi đơn vị hàng hỏng gây thiệt hại C_r (bao gồm cả giá hàng, chi phí dự trữ và các thiệt hại khác).

b- Mô hình hoá với phân phối thời gian tự huỷ là phân phối chuẩn

Chúng ta xét trường hợp phân phối xác suất của thời gian hàng tự huỷ Z là phân phối chuẩn với trung bình E(Z) và độ lệch chuẩn S(Z).

Gọi S là lượng hàng đặt mỗi lần và n là số lần mua hàng một đơn vị thời gian:

- Chi phí mua hàng: nSC

- Chi phí dự trữ: S(1 - F(1/n))IC/2, trong đó F là hàm phân phối của Z.

- Chi phí huỷ hàng: SF(1/n)C_r.

- Chi phí đặt hàng: nA

Tổng chi phí: D(n,S) = nSC + S(1- F(1/n))IC/2 + SF(1/n)C_r+ nA.

Lượng hàng thực tiêu thụ là: nS(1-F(1/n)).

Vậy bài toán là: tìm n, S cực tiểu hàm D(n,S)

với điều kiện: nS(1-F(1/n))=Q (**)

n, S $\geq$ 0.

c- Cách giải

Bài toán (**) là một bài toán tối ưu ngẫu nhiên, có ràng buộc. Có thể sử dụng các thuật toán riêng để giải bài toán loại này. Tuy nhiên đơn giản hơn cả chúng ta có thể sử dụng thủ tục Solver của Excel để giải bài toán trên, thủ tục này còn cho phép chúng ta chọn biến n là biến nguyên.

Sau đây là một thí dụ bằng số và kết quả giải bài toán trên nhờ Solver

Q=	40000	E(Z)=	0.25
C=	12	S(Z)=	0.1
A=	500		
I=	0.1		
Cr=	15	D=	502576.5
n=	24		
S=	1698.272	n*S	40758.53

Lời giải là: chia T thành 24 chu kỳ, mỗi chu kỳ đặt một lượng hàng là S*=1698,272. Tổng chi phí nhỏ nhất D(n,S) = 502576,5 và tổng lượng hàng sẽ mua là 40758,53 (lớn hơn mức nhu cầu Q=40000).

Chúng ta hoàn toàn có thể xét trường hợp Z có các phân phối xác suất khác nhau. Tuỳ thuộc các đặc trưng của Z mà sử dụng các hàm phân phối phù hợp. Cũng cần chú ý rằng chính Excel cho phép dùng trực tiếp các hàm phân phối trong khi giải các bài toán nhờ thủ tục Solver, điều đó sẽ là một khó khăn nếu chúng ta thiết lập một thuật toán riêng cho lớp bài toán này nhờ một ngôn ngữ lập trình khác.

IV- CÁC MÔ HÌNH DỰ TRỮ CÓ RÀNG BUỘC

1- Mô hình với số lượng và đơn giá thay đổi theo giai đoạn

a- Mô tả bài toán

Bài toán dự trữ nhiều giai đoạn phát sinh khi hàng hoá có tính chất mùa vụ, trong trường hợp đó giá cả cũng thay đổi theo mùa vì vậy cần xác định một chiến lược dự trữ ít tốn kém nhất.

Giả sử nhu cầu và giá cả hàng hoá được cho ở bảng sau:

Giai đoạn	1	2	3.................n
Số lượng	d_1	d_2	d_3 .... d_n
Đơn giá	c_1	c_2	c_3.............. c_n

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là A; chi phí dự trữ theo số lượng mỗi giai đoạn cho mỗi đơn vị hàng là K. Người ta chỉ có thể mua các lô hàng bằng nhu cầu trong mỗi giai đoạn hoặc một số giai đoạn cộng lại.

Xác định một chiến lược mua tiết kiệm nhất trên cơ sở các chi phí trên.

b- Thiết lập mô hình

Gọi F(j) là chi phí tối thiểu đảm bảo dự trữ cho i giai đoạn đầu (j:=1,2,..,n).

L(i,j) là chi phí cho việc dự trữ, tiêu thụ đến hết giai đoạn j nếu mua hàng 1 lần ở đầu giai đoạn i (i≤j).

$L(i,i)=A+c_id_i$.

$L(i,j) = A + c_i(d_i+d_{i+1}+...+d_j)+Kd_{i+1}+2Kd_{i+2}+....+(j-i)Kd_j$.

Ta có: F(1)= L(1,1).

F(2) =Min[F(1)+L(2,2), L(1,2)].

F(3) = Min[F(2)+L(3,3), F(1)+L(2,3), L(1,3)].

F(4)=Min[F(3)+L(4,4), F(2)+L(3,4),F(1)+L(2,4), L(1,4)].

....

Kết thúc quá trình này ta nhận được F(n). Quá trình lập chiến lược dự trữ như sau:

- Nếu F(n) =F(0) + L(1,n) thì mua toàn bộ khối lượng hàng i ngay từ đầu: $(x(1)=\sum_{t=1}^{n} q_{it}$), x(t) =0 với mọi t >1.

- Nếu F(n)=F(t_1-1) +L(t_1,n) thì đầu giai đoạn t_1 mua hàng cho các giai đoạn từ t_1 đến n: $(x(t_1)=\sum_{t=t_1}^{n} q_t$), x(t) =0 với mọi t >t_1.

- Nếu F(t_1-1) = F(t_2-1) + L(t_2,t_1) thì đầu giai đoạn t_2 mua hàng cho các giai đoạn từ t_2 đến t_1-1: $x(t_2) =\sum_{t=t_2}^{t_1-1} q_t$, x(t)=0 với t_2< t< t_1.

Tiếp tục như vậy cho đến khi t_k=1 ta nhận được chiến lược đặt hàng tối ưu.

c- Thí dụ

Trong mỗi năm người ta dự báo lượng tiêu dùng xi măng và giá mua buôn tại một khu vực do công ty A dự trữ và bán lẻ theo các quí như sau:

Quí	1	2	3	4
Đơn giá ($)	600	620	560	750
Số lượng (1000tấn)	500	700	300	1000

Chi phí cho mỗi lần đặt mua là 200$, chi phí dự trữ tính theo số lượng (1000tấn) là 100$ trong 1 quí. Hãy xác định lượng mua ở các đầu quí sao cho tổng chi phí mua và dự trữ bé nhất.

Giải:

Ta có: F(1)=**L(1,1)**=A+c_1d_1=200+500.600=300200.

F(2)= Min[F(1)+L(2,2), L(1,2)]

=Min(300200+200+620.700, 200+600(500+700)+100.700).

=Min(734400, 790200)=734400= **F(1)+L(2,2).**

F(3)= Min[F(2)+L(3,3), F(1)+L(2,3), L(1,3)].

=Min(734400+200+300.560, 300200+620(300+700)+100.300,

200+600.1500+700.100+300.200).

=Min(902600, 950200,1030200)=902600= F(2)+L(3,3),

F(4) = Min[F(3)+L(4,4), F(2)+L(3,4),F(1)+L(2,4), L(1,4)].

=Min(902600+200+1000.750,734400+200+560.1300+1000.100, 300200+200+620.2000+300.100+1000.200,200+600.2500 +700.100+300.200+1000.300).

=Min(1562800, 1562600, 1770400, 1930200)= 1562600

=F(2)+L(3,4).

Như vậy phương án mua và dự trữ là:

Qui	1	2	3
Số lượng (1000tấn)	500	700	1300
Đơn giá ($)	600	620	560

2- Mô hình dự trữ một loại hàng có ràng buộc

Đơn giản cho quá trình thể hiện ta xét mô hình Wilson với ràng buộc về qui mô kho.

Chúng ta biết rằng với mô hình Wilson, qui mô kho coi như tuỳ chọn. Thực tế điều đó có thể không đúng, giả sử qui mô kho của doanh nghiệp dự trữ chỉ ở mức q^0. Bài toán lập từ mô hình Wilson có thể phát biểu như sau:

Tìm q làm cực tiểu hàm: $D(q) = \dfrac{AQ}{q} + \dfrac{ICq}{2}$

Với điều kiện: $0 \le q \le q^0$.

a- Nếu $q^0 \ge q^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC}}$ lời giải bài toán không bị ảnh hưởng bởi ràng buộc về qui mô kho.

b- Nếu Nếu $q^0 < q^* = \sqrt{\dfrac{2AQ}{IC}}$

Có hai tình huống cơ bản như sau:

1- Chấp nhận không thoả mãn nhu cầu, lời giải là: $q=q^0$. Tổng chi phí là:

$$N^0(q^0) = \frac{AQ}{\sqrt{\frac{2AQ}{IC}}} + IC\frac{(q^0)^2}{2q^*} + CQ\frac{q^0}{q^*}.$$

Với $$q^* = \sqrt{\frac{2AQ}{IC}}$$

(hãy tự chứng minh công thức này với giả thiết chia đều mức không thoả mãn cho các chu kỳ).

2- Buộc phải thoả mãn nhu cầu, lúc đó ta có $q=q^0$ và giá trị cực tiểu hàm chi phí là:

$$N(q^0) = \frac{AQ}{q^0} + IC\frac{q^0}{2} + CQ$$

3- Đảm bảo thoả mãn nhu cầu Q với các thông tin bổ sung cần thiết.

Một trong các tình huống thông thường đã được trình bày trong bài toán thuê kho ở mô hình Wilson. Như vậy ta phải có hệ số chi phí dự trữ thuê ngoài phụ thêm (k) như đã được trình bày.

3- Bài toán dự trữ nhiều loại hàng có ràng buộc

Dễ dàng nhận thấy rằng trong điều kiện không có một điều kiện ràng buộc nào trong quá trình dự trữ, tiêu thụ thì bài toán dự trữ nhiều loại hàng có thể phân chia thành các bài toán độc lập. Vì lý do đó chúng ta chỉ xét bài toán dự trữ nhiều loại hàng, có ràng buộc.

a- Mô tả bài toán

Giả sử cần dự trữ m loại hàng với nhu cầu thường xuyên trong mỗi đơn vị thời gian là Q_i đơn vị (i=1..m). Chi phí cho mỗi lần đặt hàng loại i là A_i, giá mỗi đơn vị hàng loại i là C_i, I_i là hệ số chi phí dự trữ hàng i, hệ số dung tích kho của đơn vị hàng i là f_i. Các giả thiết về tiêu thụ và cung cấp như mô hình Wilson. Hãy xác định chiến lược dự trữ, tiêu thụ tốt nhất, trong các trường hợp:

- Cơ sở dự trữ có một dung tích kho f_0 cho m loại hàng.

- Khả năng vốn cho mỗi chu kỳ dự trữ, tiêu thụ hạn chế là C_0.

b- Thiết lập mô hình và lời giải

Trước tiên cần phải nói rằng các tình huống nêu trên dẫn đến các ràng buộc của bài toán rất phong phú. Chúng ta chỉ xét một vài tình huống với mục đích tìm kiếm cách thiết lập mô hình và lời giải. Về mặt lý thuyết các bài toán như trên luôn dẫn đến bài toán tối ưu phi tuyến, chúng ta có thể nhận được lời giải nhờ các thuật toán của qui hoạch phi tuyến. Trong giới hạn nhất định về mặt công cụ, chúng ta chỉ đưa ra lời giải với những điều kiện có thể. Mặc dù các lời giải được nêu dưới đây có thể không tổng quát nhưng chúng có ý nghĩa thực tiễn nhất định.

1- Bài toán với ràng buộc dung tích kho

Hoàn toàn tương tự mô hình Wilson ta có thể thiết lập bài toán như sau:

Tìm $q=(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_m)$, $n=(n_1, n_2, \ldots\ldots, n_m)$ không âm, cực tiểu hàm

$$N(q,n) = \sum_{i=1}^{m} (n_i A_i + I_i C_i \frac{q_i}{2})$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i q_i \le f_0 \qquad n_i q_i = Q_i \qquad i = 1..m \tag{23}$$

Bài toán (23) là một bài toán qui hoạch phi tuyến với ràng buộc tuyến tính. Bài toán này luôn có lời giải vì N(q) là một hàm lồi trên miền q >0, với miền ràng buộc lồi đóng và bị chặn.

Trong điều kiện công cụ toán học đơn giản ta có thể tìm lời giải của bài toán như sau:

Bước 1: Giải bài toán (23) bỏ qua các ràng buộc $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i \le f_0$, ta nhận được lời giải như sau:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2 A_i Q_i}{I_i C_i}} \qquad (i = 1..m) \tag{24}$$

Nếu: $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i^* \le f_0$, ta nhận được lời giải của bài toán (24). Đây cũng là lời giải của bài toán dự trữ nhiều loại hàng không có ràng buộc.

Nếu: $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i^* > f_0$, ta có thể chọn một trong các cách giải ở bước 2.

Bước 2: - Trường hợp thoả mãn nhu cầu với chi phí phụ thêm cho việc thuê kho. Bài toán qui về bài toán sau:

Tìm $q=(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ không âm, cực tiểu hàm

$$N(q) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i}{q_i} A_i + I_i C_i \frac{q_i}{2} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i q_i = f_0 \tag{25}$$

Đây là bài toán cực trị vướng, hàm Lagrange tương ứng là:

$$L(q,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Q_i}{q_i} A_i + I_i C_i \frac{q_i}{2} \right) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} f_i q_i - f_0 \right).$$

Lời giải của bài toán nói chung không biểu diễn giải tích. Cụ thể là từ điều kiện cần của cực trị hàm Lagrange dẫn đến một phương trình phi tuyến đối với λ.

Tuy nhiên hãy chú ý đến ý nghĩa của nhân tử λ, dễ dàng nhận thấy: $\frac{\partial L}{\partial f_0} = -\lambda$. Như vậy λ chính là chi phí biên theo qui mô kho, cách lựa chọn hợp lý và đơn giản hơn cả là xác định thiệt hại khi phải thuê thêm một đơn vị dung tích kho $\lambda=\lambda^*$.

Lợi dụng hàm Lagrange ta xác định lời giải của bài toán nhờ công thức sau:

$$q_i^* = \sqrt{\frac{2Q_i A_i}{I_i C_i + 2\lambda^* f_i}} \quad (i=1..m). \tag{26}$$

- Trường hợp chấp nhận không thoả mãn nhu cầu, bài toán chỉ có lời giải có ý nghĩa khi bổ sung thông tin về thiệt hại do không thoả mãn nhu cầu của từng loại hàng C_i và giá bán P_i. Bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều, chúng ta chỉ có thể nhận được lời giải nhờ các thuật toán của qui hoạch phi tuyến với việc cực đại hàm lợi ích.

Sau đây chúng ta xét một thí dụ như vậy và nhờ thủ tục Solver của Excel để tìm lời giải của bài toán.

Giả sử thông tin về 5 loại hàng được cho ở bảng dưới đây:

i	1	2	3	4	5
Q	4500	3000	5000	4000	2500
f	12	8	10	9	14
A	40	20	25	100	40
C	9	14	12	15	10
I	0.05	0.1	0.05	0.05	0.1
C_z	6	8	5	2	3
P (giá bán)	16	20	17	22	18

Với tổng dung tích kho f_0=185000.

Kết quả nhận được như sau:

i	1	2	3	4	5	
n	1	2	1	1	1	
q	4500	1500	5000	4000	2357.143	
nq	4500	3000	5000	4000	2357.143	
Rbuoc	54000	12000	50000	36000	33000	185000
An	40	40	25	100	40	
ICq/2	1012.5	1050	1500	1500	1178.571	
C(z)(Q-nq)	0	0	0	5.28E-07	428.5714	
cq	40500	42000	60000	60000	23571.43	226071.4
D(q)=	1052.5	1090	1525	1600	1647.143	6914.643
Pnq	72000	60000	85000	88000	42428.57	347428.6
					MaxD(n,q)=	**114442.5**

Chú ý: Về mặt lý thuyết ràng buộc về dung tích kho là quá chặt vì trừ thời điểm bắt đầu dự trữ tiêu thụ (khi tất cả m loại hàng nhập kho), các thời điểm khác tổng lượng hàng lưu kho tối đa không phải là $\sum_{i=1}^{m} f_i q_i^*$. Hơn nữa với các loại hàng tiêu thụ thông thường và đều đặn thì thực tế không có thời điểm bắt đầu. Tuy vậy khi thời gian tăng vô hạn (đủ lớn) lượng hàng tối đa trong kho xấp xỉ mức nói trên. Điều này cho phép sử dụng ràng buộc dung tích kho để tính toán như đã trình bày ở trên.

2- Bài toán với ràng buộc vốn

Để đơn giản cho quá trình tính toán ta giả sử ràng buộc vốn chỉ đặt trên lượng tiền trực tiếp mua hàng mỗi chu kỳ dự trữ. Thay cho ràng buộc dung tích kho ta sử dụng ràng buộc: $\sum_{i=1}^{m} C_i q_i \le C_0$. Hoàn toàn tượng tự như trong trường hợp ràng buộc dung tích kho ta có thể tiến hành giải bài toán theo hai bước.

Tuy vậy có thể xây dựng mô hình riêng cho bài toán này bằng cách coi nguồn vốn là vô hạn và đưa thêm giá vốn vào mô hình, lúc đó ta có bài toán với giá vốn cho m loại hàng như sau:

Tìm $q=(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ cực tiểu hàm:

$$F(q) = \sum_{i=1}^{m} (A_i r + A_i \frac{Q_i}{q_i} + C_i I_i \frac{q_i}{2} + r \frac{C_i q_i}{2} + C_i Q_i)$$

Lời giải của bài toán là: $q_i^* = \sqrt{\dfrac{2A_i Q_i}{C_i I_i + rC_i}}$ (i=1..m).

Chúng ta có thể sử dụng cùng lúc nhiều ràng buộc cho bài toán dự trữ nhiều loại hàng. Nhưng cần chú ý rằng, giới hạn của công cụ không cho phép mở rộng bài toán quá mức. Trong trường hợp cần thiết ta có thể dùng các mô hình tối ưu khác để nhận được lời giải chính xác và dễ dàng hơn.

4- Mô hình dự trữ nhiều hàng hoá với nhu cầu ngẫu nhiên có hạn chế kho

Trong phần này chúng ta xét một bài toán sản xuất dự trữ và tiêu thụ của một cơ sở sản xuất. Mô hình tổng quát có thể áp dụng cho bài toán phân bổ nguồn lực với nhu cầu ngẫu nhiên.

a- Mô tả bài toán

Giả sử một cơ sở sản xuất n loại sản phẩm. Gọi Q_i là nhu cầu sản phẩm i trong thời gian đang xét. Q_i là biến ngẫu nhiên phân phối $F(q_i)$ với (i=1.2...n). Khả năng của kho hạn chế bởi A. Trong thời kỳ này nếu cơ sở sản xuất và cung cấp các lượng sản phẩm x_i thì có thể tồn tại hai loại chi phí đáng quan tâm:

- Chi phí do thiếu sản phẩm, mỗi đơn vị sản phẩm loại i thiếu gây thiệt hại Z_i.

- Chi phí thiệt hại do sản xuất nhiều hơn nhu cầu, C_i mỗi đơn vị sản phẩm i không được tiêu thụ trong kỳ.

Cần xác định lượng sản phẩm mỗi loại sẽ sản xuất sao cho tổng chi phí trung bình từ các khoản trên nhỏ nhất. Với dung tích đơn vị của sản phẩm loại i là w_i.

b- Mô hình và cách giải

Với các dữ kiện trên ta có thể lập bài toán trong hai trường hợp $F(q_i)$ liên tục và rời rạc.

Trước tiên ta xét F rời rạc:

Chi phí trung bình do thiếu hàng sẽ là:

$$F = \sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{q_i = x_i}^{c} (q_i - x_i) P_i(q_i)$$

trong đó $P_i(q_i)$ là xác suất nhu cầu hàng loại i đúng bằng q_i.

Chi phí dự trữ là: $G = \sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{q_i=0}^{x} (x_i - q_i) P_i(q_i)$

Tổng thiệt hại cần cực tiểu hoá sẽ là:

$$TC = F + G$$

Với điều kiện :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \le A$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1..n$$

Bài toán trên thực chất là một bài toán qui hoạch động, ngẫu nhiên. Tuy vậy chúng có thể giải bài toán này nhờ việc xét dãy các loại sản phẩm như một quá trình (xét việc sản xuất từng sản phẩm như từng giai đoạn của một quá trình sản xuất).

- Phương trình truy hồi

Ta có thể viết lại hàm mục tiêu bài toán trên dưới dạng:

$$TC = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

Trong đó: $g_i(x_i) = Z_i \sum_{q_i = x_i}^{c} (q_i - x_i) P_i(q_i) + C_i \sum_{q_i=0}^{x_i} (x_i - q_i) P_i(q_i)$

$$g_i(x_i) = Z_i\sum_{q_i=x_i}^{\infty} q_iP_i(q_i) - Z_ix_i(1-F(x_i)) + C_ix_iF(x_i) - C_i\sum_{q_i=0}^{x_i} q_iP(q_i).$$

Ký hiệu: $$S_{1i} = \sum_{q_i=x_i}^{\infty} q_iP_i(q_i)$$

$$S_{2i} = F(x_i) = \sum_{q<x_i} p(x_i)$$

$$m_i = E(Q_i)$$

Ta có: $g_i(x_i) = Z_iS_{1i} - Z_ix_i(1-S_{2i}) + C_ix_iS_{2i} - C_i(m_i-S_{1i})$

Công thức truy hồi cho bài toán này là:

$$f_k(A) = \mathrm{Min}[g_k(x_k) + f_{k-1}(A-x_k)]$$

Với: $$\sum_{i=1}^{k} x_iw_i \le A$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1..k$$

Điều kiện ban đầu là: $f_1(A) = \mathrm{Min}\ g_1(x_1)$ với $0 \le x_1 \le A$.

Thí dụ: Xét thí dụ bằng số với các dữ kiện A= 5000, phân phối của nhu cầu Poisson trung bình m_i.

i	Z_i	C_i	m_i
1	4	0.5	1500
2	3	0.4	1000
3	5	0.25	800
4	4	0.3	1200

Trước hết nhờ hàm phân phối Poisson tích luỹ ta tính các trị số của $g_i(x_i)$ như sau (để giảm khối lượng tính toán ta lấy đơn vị tính là 100)

Tính $g(x_1)$: Với m_1 =1,5 ta có:

$$+g_1(x_1=0) = Z_1\sum_{q_1=0}^{\infty} q_1P_1(q_1) = 1,5\ .\ 4 = 6$$

$$+\ g_1(x_1=1) = Z_1S_{11} - Z_1x_1(1-S_{21}) + C_1x_1S_{21} - C_1(m_1-S_{11})$$

$= 4.0,33469524 - 4.\ 0,4421746 + 0,5\ .\ 0,5578254 - 0,5.\ 1,16530476$

$= 3,004086.$

Tương tự tính cho các giá trị ứng với x_1 =2,3,4,5

Các giá trị S_{1i}, S_{2i} và kết quả tính toán được ghi ở bảng sau:

x_1	S_{1i} =Sum(qP(q))	S_{2i} =R(x_1,m_1)	m 1- S_{1i} = m1 -Sum(qP(q))	1- S_{2i} =1-R(x_1, m_1)	$g_1(x_1)$
0	0	0.2231302	1.5	0.77686984	6
1	0.33469524	0.5578254	1.16530476	0.4421746	3.004086
2	0.836738101	0.8088468	0.663261899	0.191153169	1.5143
3	1.213270246	0.9343575	0.286729754	0.065642454	1.154111
4	1.401536318	0.9814241	0.098463682	0.018575936	1.35872
5	1.472136096	0.995544	0.027863904	0.004455981	1.775128

Từ đó ta có giá trị hàm f_1 theo A và có kết quả sau:

Bảng 1

A	x_1(A)	f_1(A)
0	0	6
1	1	3.004086
2	2	1.5143
3	3	1.154111
4	3	1.154111
5	3	1.154111

Bảng tính $g(x_2)$

x_2	S_{1i} =Sum(qP(q))	S_{2i} =R(x_1,m_1)	m 1- S_{1i} = m1 -Sum(qP(q))	1- S_{2i} =1-R(x_1, m_1)	$g(x_2)$
0	0	0.3678794	1	0.632120559	3
1	0.367879441	0.7357589	0.632120559	0.264241118	1.25079
2	0.367879441	0.9196986	0.632120559	0.080301397	2.00316
3	0.183939721	0.9810118	0.816060279	0.018988157	3.380926
4	0.06131324	0.9963402	0.93868676	0.003659847	4.341761
5	0.01532831	0.9994058	0.98467169	0.000594185	4.937783

Để tính f_2 ta lập bảng sau

Bảng 2

x_2 / A	0	1	2	3	4	5	$f_2(A)$	$x_2(A)$
	$g_2(x_2) + f_1(A-x_2)$							
0	9						9	0
1	7.251	4.2549					4.2549	1
2	7.251	4.2549	2.7651				2.7651	2
3	7.251	4.2549	2.7651	2.4049			2.4049	3
4	7.251	4.2549	2.7651	2.4049	2.4049		2.4049	4
5	7.251	4.2549	2.7651	2.4049	2.4049	2.4049	2.4049	5

Số liệu tính toán ở bảng trên nhận được từ bảng tính $g(x_2)$ và kết quả tính toán hàm $f_1(x_1)$.

Bảng tính $g(x_3)$

x_3	S_{1i} =Sum(qP(q))	S_{2i} =R(x_1,m_1)	m 1- S_{1i} = m1-Sum(qP(q))	1- S_{2i} =1-R(x_1, m_1)	$g(x_3)$
0	0	0.449329	0.8	0.550671036	4
1	0.359463171	0.8087921	0.440536829	0.191207865	1.358977
2	0.287570537	0.9525774	0.512429463	0.047422596	2.492317
3	0.115028215	0.9909201	0.684971785	0.009079858	4.003094
4	0.030674191	0.9985887	0.769325809	0.00141131	4.809323
5	0.006134838	0.9998157	0.793865162	0.000184343	5.212953

Để tính f_3 ta lập bảng sau

Bảng 3

x_3 / A	0	1	2	3	4	5	$f_3(A)$	$x_3(A)$
	$g_3(x_3) + f_2(A-x_3)$							
0	7						7	0
1	4.359	2.6098					2.6098	1
2	4.359	2.6098	2.6098				2.6098	1,2
3	4.359	2.6098	2.6098	2.6098			2.6098	1,2,3
4	4.359	2.6098	2.6098	2.6098	2.6098		2.6098	1,2,3,4
5	4.359	2.6098	2.6098	2.6098	2.6098	2.61	2.6098	1,2,3,45

Bảng tính $g(x_4)$

x_4	S_{1i} =Sum(qP(q))	S_{2i} =R(x_1,m_1)	m1- S_{1i} = m1-Sum(qP(q))	1- S_{2i} =1-R(x_1, m_1)	g(x_4)
0	0	0.3011942	1.2	0.698805788	4.8
1	0.361433054	0.6626273	0.838566946	0.337372734	2.095135
2	0.433719665	0.8794871	0.766280335	0.120512901	2.498594
3	0.260231799	0.966231	0.939768201	0.033768968	4.145384
4	0.10409272	0.9922542	1.09590728	0.007745788	5.419174
5	0.031227816	0.9984998	1.168772184	0.001500225	6.133466

Để tính các giá trị f_4 ta lập bảng sau

Bảng 4

x_4	0	1	2	3	4	5	f_4(A)	x_4(A)
A	$g_4(x_4)+f_3(A-x_4)$							
0	8.8						8.8	0
1	6.0951	3.4541					3.4541	1
2	6.0951	3.4541	3.4541				3.4541	1,2
3	6.0951	3.4541	3.4541	3.4541			3.4541	1,2,3
4	6.0951	3.4541	3.4541	3.4541	3.4541		3.4541	1,2,3,4
5	6.0951	3.4541	3.4541	3.4541	3.4541	3.454	3.4541	1,2,3,45

Từ bảng trên ta thấy có nhiều phương án.

Sau đây là một phương án:

Chọn x_4= 1 như vậy còn lại 4 đơn vị kho cho 3 mặt hàng khác

Trên bảng tính cho f_3 ta có thể chọn x_3=1 còn 3 đơn vị kho cho 2 mặt hàng còn lại.

Trên bảng tính cho f_2 ta chỉ có thể chọn x_2=3 và lúc này x_1 =0.

X_1	0
X_2	3000
X_3	1000
X_4	1000

Giá trị hàm TC là: 12.83504

Có thể chọn tương tự như trên để được các phương án khác

Trường hợp $F_i(q_i)$ liên tục:

Thay các xác suất tích luỹ bởi các giá trị hàm phân phối ta có:

Chi phí trung bình do thiếu hàng sẽ là:

$$F = \sum_{i=1}^{n} Z_i \int_{x_i}^{\infty} (q_i - x_i) f_i(q_i) dq_i$$

trong đó $f_i(q_i)$ là hàm mật độ xác suất của Q_i.

Chi phí dự trữ là: $G = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_{0}^{x_i} (x_i - q_i) f_i(q_i) dq_i$

Tổng thiệt hại cần cực tiểu hoá sẽ là:

TC = F +G

Với điều kiện : $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \le A$

$x_i \ge 0 \qquad i = 1..n$

$TC = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$

Trong đó: $g_i(x_i) = Z_i \int_{x_i}^{\infty} (q_i - x_i) f_i(q_i) dq_i + C_i \int_{0}^{x_i} (x_i - q_i) f_i(q_i) dq_i$

Lời giải của bài toán nhận được nhờ các công cụ biến phân và phương trình vi phân.

5- Mô hình dự trữ ràng buộc kho với chi phí và giá bán

Trong các mô hình đã xét chúng ta không xem giá bán là yếu tố quan trọng. Tuy nhiên, thực tế có rất nhiều quá trình sản xuất- dự trữ không thể tiến hành vì ngay tại phương án dự trữ- tiêu thụ theo đợt tối ưu giá đầu ra của hàng hoá cũng không chấp nhận được. Sau đây chúng ta xét một mô hình có thể giải quyết bài toán này với một số điều kiện có thể chấp nhận được.

a- Mô tả bài toán

Giả sử một cơ sở sản xuất có khả năng dự trữ tối đa là B đơn vị hàng (dung tích kho). Dự trữ đầu kỳ thứ nhất là A đơn vị hàng. Gọi C_j là chi phí sản xuất 1 đơn vị hàng, P_j là giá hàng trong kỳ thứ j và x_j là số lượng hàng sản xuất, y_j là số lượng bán ra trong kỳ thứ j; lượng hàng x_j chỉ có ở cuối kỳ j. Chi phí dự trữ hàng trong mỗi giai đoạn tính cho mỗi đơn vị hàng là C_0.

Cần xác định một chiến lược với tổng lợi nhuận cực đại.

b- Thiết lập mô hình

Đây là bài toán thích ứng với một cơ sở cạnh tranh hoàn hảo, trong đó giá cả được xác định trên thị trường và lượng cung của họ không ảnh hưởng đáng kể đến quan hệ cung cầu.

Các ràng buộc của quá trình sản xuất, tiêu thụ được mô tả ở trên là:

+ Dự trữ hàng ở cuối mỗi giai đoạn:

$$D_i = A + \sum_{j=1}^{i}(x_j - y_j) \leq B \qquad (i = 1,2...n)$$

+ Số lượng bán ở các giai đoạn đầu:

$y_1 \leq A$

$y_{i+1} \leq D_i (i=1,2... n-1)$

+ Các lượng sản xuất và bán không âm:

$x_j \geq 0$

$y_j \geq 0$

Hàm tổng lợi ích có thể thiết lập như sau:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i + Z_S$$

Trong đó:

Lợi nhuận giai đoạn i: $Z_i = P_i y_i - C_i x_i - C_0(D_{i-1} - y_i)$ với (i =1,2, ...,n)

$(D_{i-1} - y_i)$ là lượng dự trữ trong giai đoạn i

và $\qquad Z_S = D_n P_0 \qquad$ (ước lượng lợi ích dự trữ cuối cùng).

c- Phân tích mô hình- Lời giải

Giống như bài toán dự trữ nhiều giai đoạn, thuật toán truy hồi được sử dụng để giải bài toán nói trên. Trước tiên ta xét trường hợp dự trữ cuối cùng D_n=0.

Gọi dự trữ đầu kỳ thứ i là A_i (theo công thức tính ở trên $A_i=D_{i-1}$) thì các dự trữ đầu giai đoạn i có thể tính như sau

$$A_i = A_{i-1} + x_{i-1} + y_{i-1}$$

Lợi nhuận giai đoạn i là nhận được từ bài toán sau:

$$Z_i = P_i y_i - C_i x_i - C_0(A_i - y_i)$$

Với $(x_i, y_i) \in S_i$, trong đó S_i là tập:

$$x_i, y_i \geq 0$$

$$y_i \leq A_i$$

$$x_i \leq B - A_i + y_i$$

Như vậy hàm tổng lợi nhuận sau n giai đoạn là một hàm của A và $\{(x_i, y_i)\}$. Gọi $F_n(A)$ là lợi hàm lợi nhuận cực đại với dự trữ ban đầu là A.

Với n=1 dễ dàng thấy rằng:

$$F_1(A) = Max(P_1y_1 - C_1x_1 - C_0(A - y_1))$$

Với:

$$x_1, y_1 \geq 0$$

$$y_1 \leq A$$

$$x_1 \leq B - A + y_1$$

Vì $P_1, C_1, C_0 > 0$ ta thấy $Max(P_1y_1 - C_1x_1 - C_0(A - y_1))$ đạt tại y_1 lớn nhất và x_1 nhỏ nhất.

Kết quả là: $F_1(A)=P_1A$ và $(y_1=A, x_1=0)$ - Dự trữ cuối kỳ bằng 0.

Nếu ta đòi hỏi dự trữ cuối giai đoạn là A_2 thì chắc chắn là phương án trên sẽ thay đổi, cụ thể là $x_1=A_2$. Ta ký hiệu $F^1(A_2)$ là hàm cực đại lợi nhuận của giai đoạn 1 với dự trữ cuối kỳ là A_2.

Với n =2, giả sử trong giai đoạn 1 ta có lượng sản xuất là x_1 và tiêu thụ là y_1 thì dự trữ đầu giai đoạn 2 là:

$$A_2 = A_1 - y_1 + x_1$$

$$F_2(A)=Max[P_2y_2 - C_2x_2 - C_0(A_2 - y_2) + F^1(A + x_1 - y_1)]$$

Với $(x_i, y_i) \in S_i$.

Từ biểu thức trên ta thấy rằng lợi nhuận cực đại tính đến cuối giai đoạn i phụ thuộc vào dữ trữ ban đầu, dự trữ cuối cùng và các tham số về giá cả, chi phí trong sản xuất và dự trữ. Trong điều kiện như vậy chúng ta phải sử dụng một thuật toán truy hồi để xác định phương án tốt nhất nhờ phương trình sau:

$$F_n(A)=Max[P_ny_n - C_nx_n - C_0(A_n - y_n) + F^{n-1}(A_{n-1} + x_n - y_n)]$$

Với $(x_i, y_i) \in S_i$.

Thuật toán giải bài toán theo từng giai đoạn:

Với đặc điểm của bài toán này ta cần giải bài toán theo hai quá trình

- Quá trình ngược: Bắt đầu với giai đoạn n tìm các liện hệ của các biến theo các tham số trung gian, đặc biệt là các dự trữ A_i.

- Quá trình xuôi: Tìm lại các giá trị của các biến với các quan hệ trên và dự trữ ban đầu A.

Vì mỗi bước tính như trên là việc giải một bài toán nên việc mô tả thuật toán tổng quát có thể quá phức tạp. Thay vào đó chúng ta mô tả thuật toán qua một thí dụ cụ thể, từ thí dụ này việc tương tự hoá là rất đơn giản.

Chẳng hạn trong năm ta chia các đợt sản xuất theo quí với giá cả và chi phí ổn định theo quí như sau:

Qui (i)	C_i	P_i
1	5	8
2	6	7
3	4	8
4	7	9

Với qui mô kho tối đa là B= 400, dự trữ ban đầu là 250 và dự trữ cuối cùng bằng không. Chi phí dự trữ C_0= 0,5.

- Quá trình ngược:

Giai đoạn 4: $F_4(A_4) = \max Z_4 = \max(P_4y_4 - C_4x_4 - C_0(A_4 - y_4))$

Với x_4, y_4 thoả mãn:

$x_4, y_4 \geq 0$

$y_4 \leq A_4$

$x_4 \leq B - A_4 + y_4$

Dễ dàng thấy rằng phương án tốt nhất là

$(x_4 = 0, y_4 = A_4)$;

với $F_4(A_4) = P_4A_4 = 9A_4$.

Giai đoạn 3:

$$F_3(A_3) = \max[P_3y_3 - C_3x_3 - C_0(A_3 - y_3) + F_4(A_4)]$$

Với $x_3, y_3 \geq 0$

$y_3 \leq A_3$

$x_3 \leq B - A_3 + y_3$

$A_4 = A_3 + x_3 - y_3$

Vậy $F_3(A_3) = \max[P_3y_3 - C_3x_3 - C_0(A_3 - y_3) + F_4(A_3 + x_3 - y_3)]$

$= \max[8y_3 - 4x_3 - 0.5(A_3 - y_3) + 9(A_3 + x_3 - y_3)]$

$= \max[8.5A_3 - 0.5y_3 + 5x_3] = 8A_3 + 5B$

$= 8A_3 + 5B.$

giá trị cực đại đạt tại: $x_3 = B$, $y_3 = A_3$.

Giai đoạn 2: $F_2(A_2) = \max[P_2y_2 - C_2x_2 - C_0(A_2 - y_2) + F_3(A_3)]$

Với: $x_2, y_2 \geq 0$; $y_2 \leq A_2$

$x_2 \leq B - A_2 + y_2$

$A_3 = A_2 + x_2 - y_2$.

Vậy $F_2(A_2) = \max[7y_2 - 6x_2 - 0.5(A_2 - y_2) + 8(A_2 + x_2 - y_2) + 5B]$

$= \max[-0.5y_2 + 2x_2 + 7.5A_2 + 5B]$

$= 7A_2 + 7B$

đạt tại $(x_2 = B, y_2 = A_2)$

Giai đoạn 1: $F_1(A_1) = \max[P_1y_1 - C_1x_1 - C_0(A_1 - y_1) + F_2(A_2)]$

Với: $x_1, y_1 \geq 0$; $y_1 \leq A_1$

$x_1 \leq B - A_1 + y_1$

$A_2 = A_1 + x_1 - y_1$.

Vậy $F_1(A_1) = \max[8y_1 - 5x_1 - 0.5(A_1 - y_1) + 7(A_1 + x_1 - y_1) + 7B]$

$= \max[1.5y_1 + 2x_1 + 6.5A_1 + 7B]$

Với hệ ràng buộc trên ta thấy khi y_1 lớn nhất thì giá trị lớn nhất của x_1 cũng đạt cực đại.

Vậy nghiệm là: $(y_1 = A_1, x_1 = B)$

$F_1(A_1) = 8A_1 + 9B$

- *Quá trình xuôi:*

Kết quả quá trình xuôi tóm tắt là:

$(y_1 = A_1, x_1 = B)$; $(x_2 = B, y_2 = A_2)$; $(x_3 = B, y_3 = A_3)$; $(x_4 = 0, y_4 = A_4)$

Với: $x_1 = B = 400$, $y_1 = A1 = A = 250$,

$A_{i+1} = A_i + x_i - y_i$ $(i=1,2,3,4)$

Ta có: $A_2 = 250 + 400 - 250 = 400$, suy ra $x_2 = 400$, $y_2 = A_2 = 400$.

$A_3 = 400$ suy ra $x_3 = B = 400$, $y_3 = 400$.

$A_4 = 400$ suy ra $x_4 = 0$, $y_4 = 400$.

Cuối cùng ta có phương án sản xuất, dự trữ và tiêu thụ như sau:

Quí (i)	**Chi phí C_i**	**Giá P_i**	**Sản xuất x_i**	**Tiêu thụ y_i**	**Dự trữ đầu kỳ**	**Còn lại cuối kỳ D_i**
1	5	8	400	250	250	400
2	6	7	400	400	400	400
3	4	8	400	400	400	400
4	7	9	0	400	400	0

Tổng lợi nhuận là: $F_1(A) = 8.250 + 9.400 = 5600$.

Thuật toán trên cho thấy khi D_n khác không, cách giải bài toán này không có gì khác biệt.

Ngoài ra trong trường hợp chi phí C_i và giá cả P_i là các hàm của x_i và y_i thuật toán trên cho lời giải khá thuận tiện, vì trong mỗi bước ta có 1 bài toán với hệ ràng buộc tuyến tính theo các biến.

Sử dụng thủ tục giải các bài toán tối ưu trên excel:

Thực chất bài toán trên là một bài toán qui hoạch toán học với các biến x_i, y_i, chúng ta có thể sử dụng thủ tục Solver của Excel để tìm lời giải của bài toán. Bài toán có thể viết lại như sau:

$$\text{Tìm Max hàm } Z = \sum_{i=1}^{n} [P_i y_i - C_i x_i - C_n (A_i - y_i)]$$

Với: $A_1 = A$

với mọi i: $x_i \geq 0$,

$y_i \geq 0$, (***)

$y_i \leq A_i$,

$x_i - y_i \leq B - A_i$,

$A_{i+1} = A_i + x_i - y_i$.

$D = A_n + x_n - y_n$.

trong đó: A, D, P_i, C_i, C_n đã biết.

Sau đây là một thí dụ và kết quả nhận được từ Solver

Tháng	Giá	Chi phí
1	5	4
2	6	4
3	7	5
4	6	4
5	8	5
6	5	4
7	9	5
8	9	5
9	8	5
10	6	4
11	7	5
12	6	4

Với qui mô kho tối đa B =500, dự trữ ban đầu và yêu cầu dự trữ cuối cùng như nhau và bằng 150, chi phí dự trữ C_0= 0.25 (cho mỗi tháng).

Bảng sau cho kết quả giải bài toán (***) với các dữ kiện trên nhờ thủ tục Solver của Excel.

KẾT QUẢ GIẢI BÀI TOÁN SẢN XUẤT, DỰ TRỮ-TIÊU THỤ

A=	150	B=	500
D_n=	150	C_0=	0.25

Z= 6061.36

i	P_i	C_i	x	y	d	A_i	B-A	Z_i
1	5	4	325	150	325	150	350	-550
2	6	4	500	325	500	325	175	-50
3	7	5	293.182	309.091	293.182	309.091	190.909	697.727
4	6	4	277.273	293.182	277.273	293.182	206.818	650
5	8	5	261.364	277.273	261.364	277.273	222.727	911.364
6	5	4	245.455	261.364	245.455	261.364	238.636	325
7	9	5	229.545	245.455	229.545	245.455	254.545	1061.36
8	9	5	213.636	229.545	213.636	229.545	270.455	997.727
9	8	5	197.727	213.636	197.727	213.636	286.364	720.455
10	6	4	181.818	197.727	181.818	197.727	302.273	459.091
11	7	5	165.909	181.818	165.909	181.818	318.182	443.182
12	6	4	150	165.909	150	165.909	334.091	395.455

Bảng trên cho Phương án sản xuất- dự trữ và tiêu thụ qua các tháng trong năm như sau:

i	Sản xuất	Tiêu thụ	Dự trữ
1	325	150	325
2	500	325	500
3	293.182	309.091	293.182
4	277.273	293.182	277.273
5	261.364	277.273	261.364
6	245.455	261.364	245.455
7	229.545	245.455	229.545
8	213.636	229.545	213.636
9	197.727	213.636	197.727
10	181.818	197.727	181.818
11	165.909	181.818	165.909
12	150	165.909	150

Với tổng lợi nhuận cực đại là Z= 6061.36

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1- Hãy mở rộng mô hình dự trữ với cường độ tiêu thụ đều và bổ sung dần dần tương tự như các mô hình mở rộng từ mô hình Wilson (nếu có thể).

2- Một cửa hàng kinh doanh một mặt hàng điện tử, nhu cầu về mặt hàng này trong khu vực là 40000 đơn vị/năm. Giá mua mỗi đơn vị là 14$, chi phí bảo quản mỗi đơn vị tính tỷ lệ với giá mua theo hệ số 0,05. Chi phí cho mỗi lần liên hệ và hợp đồng mua hàng là 120$. Thời gian từ lúc bắt đầu làm hợp đồng đến khi có hàng về để bán là 2 tháng.

a- Tính lượng hàng đặt mỗi lần sao cho tổng chi phí bé nhất; xác định thời gian mỗi chu kỳ mua và tiêu thụ hàng; mức hàng còn lại trong kho vào thời điểm cần tiến hành làm thủ tục mua hàng cho chu kỳ sau.

b- Vẽ đồ thị minh hoạ và dựa vào đồ thị mô tả hành vi hợp lý của cửa hàng khi có hạ giá cho lô hàng lớn hơn hoặc bằng S_0.

c- Giả sử S_0 được chọn trong câu b, nhưng kho của cửa hàng không cho phép mở rộng hơn mức tối ưu ở câu a, việc thuê kho là tăng chi phí kho với hệ số k=0.2 thì nên hiệu chỉnh lượng hàng dặt như thế nào?.

3. Nhu cầu một mặt hàng đồ điện dân dụng tại một thị xã do một công ty thương mại cung ứng hàng năm là 30000 chiếc. Giá mua mỗi chiếc 4$, chi phí dự trữ tính theo khối lượng hàng lưu kho mỗi chiếc 6$/năm. Chi phí cho mỗi lần đặt hàng 50$. Việc tiêu thụ đều đặn và thời gian nhập hàng vào kho không đáng kể.

a- Xác định lượng hàng đặt mỗi lần tốt nhất và điểm đặt hàng tương ứng nếu thời gian đặt hàng là 3 tháng. Giá bán tối thiểu chấp nhận được là bao nhiêu nếu thuế doanh thu mặt hàng này là 8%.

b- Giả sử cơ sở bán hàng muốn công ty mua với số lượng mỗi lô lớn hơn mức tính được ở câu (a), cơ sở này dự định sẽ hạ giá hàng 10% cho lô hàng tối thiểu là S chiếc, nhưng lại muốn công ty mua mỗi lô có số lượng tối thiểu đó thì cần đặt S trong khoảng nào? Trong trường hợp đó nếu công ty không mua mỗi lần lô hàng S thì sẽ chịu một chi phí cơ hội là bao nhiêu?

4- Với các dữ kiện của mô hình Wilson

a- Hãy tìm biểu thức cho biết khi tăng tổng nhu cầu, chi phí mua hàng và chi phí đặt hàng cùng mức 1% thì tổng chi phí nhỏ nhất tăng bao nhiêu %. Nhận xét gì về giá trị biểu thức này tại qui mô tối ưu, giải thích.

b- Giả sử hệ thống kho có sẵn với dung tích M_{u} lớn hơn qui mô tối ưu trong mô hình. Vì vậy ngoài chi phí dự trữ tính theo giá đã nêu trong mô hình mỗi đơn vị dung tích bỏ trống chịu một thiệt hại là p. Hãy nêu cách giải quyết có lợi nhất và minh hoạ bằng một thí dụ cụ thể.

5- Nhu cầu một loại thuốc chữa bệnh thông thường hàng năm là 960000 hộp, một công ty dược dự định cung cấp số thuốc này từ một cơ sở sản xuất có công suất dự tính 1600000 hộp/năm. Chi phí cho mỗi đợt chuẩn bị sản xuất là 250$, chi phí sản xuất mỗi hộp là 12$, chi phí bảo quản bằng 20% chi phí sản xuất. Công ty có một kho đủ lớn để bảo quản, việc tiêu thụ coi như đều đặn và cường độ sản xuất trong mỗi kỳ không đổi. Trong năm đầu công ty dự định chia thành 6 đợt sản xuất bằng nhau. Sau một tháng sản xuất liên tục, với việc cung cấp đủ nhu cầu. Kiểm tra thấy lượng thuốc qua kho là 120000 hộp.

a- Hãy xác định lại khả năng sản xuất của cơ sở trên và đặt kế hoạch sản xuất cho các tháng còn lại với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi.

b- Nếu có thể mua từ một nguồn khác với khả năng cung cấp không hạn chế, thời gian nhập hàng vào kho coi như không đáng kể, giá mua mỗi hộp 10$, chi phí giao dịch hoàn tất hợp đồng mỗi lần 400$ thì có nên mua hay không trong hai trường hợp:

- Không chịu khấu hao cơ sở sản xuất bị bỏ không.

- Mỗi năm không sản xuất khấu hao phải chịu là 1000$.

6- Xét mô hình dự trữ xác định lượng hàng mua mỗi năm trong điều kiện nhu cầu Q phân phối chuẩn với trung bình và phương sai hữu hạn trong điều kiện tiêu thụ đều, bổ xung dần dần với các tham số Q, K, A, C, I như đã nêu.

a- Hãy xác định Q và tìm chiến lược đặt hàng có hàm chi phí nhỏ nhất tương ứng.

b- Nêu một thí dụ bằng số và giải bài toán cho 2 năm liên tiếp biết rằng nhu cầu tiêu thụ tăng α%/ năm và năng lực sản xuất tăng β% năm.

7- Nhu cầu một loại hoá chất sản xuất phân bón là 8000 tấn/năm. Chi phí cho mỗi hợp đồng mua hàng là 250$. Hệ số chi phí dự trữ là 0,2; giá mỗi tấn phụ thuộc lượng mua mỗi lần q như sau:

nếu $0 < q < 1500$ thì giá là 25$/tấn.

nếu $1500 \leq q < 3000$ thì giá 24$/tấn

nếu $q \geq 3000$ thì giá 23,5$/tấn.

Thời gian đặt hàng 90 ngày.

a- Xác định lượng hàng đặt tốt nhất; thời gian một chu kỳ và điểm đặt hàng tương ứng trong trường hợp bổ sung tức thời và tiêu thụ đều. Vẽ đồ thị minh hoạ kết quả.

b- Giả sử việc tiêu thụ là đều đặn và bổ sung dần với cường độ 16000tấn/năm. Hãy xác định lượng hàng mua mỗi lần tối ưu và tổng chi phí tương ứng.

8- Một nhà máy đường có tổng nhu cầu bán thành phẩm từ mía, mỗi năm 500000tấn.

Nhà máy có thể mua bán thành phẩm theo một trong hai phương thức:

- Phương thức thứ nhất là mỗi lần mua một khối lượng nào đó với giá không đổi bên bán thoả thuận là 125$/tấn. Chi phí cố định giao dịch là 20$ cho 1 lần.

- Phương thức thứ hai là mua theo mùa giá sẽ là 120$/tấn ở đầu tháng 1 và 132$/tấn ở đầu tháng 7, mỗi lần mua đủ cho sáu tháng sản xuất. Chi phí cố định cho giao dịch 1 lần là 45$.

Chi phí bảo quản bằng 5% giá mua. Hãy chọn cách mua sao cho tổng chi phí nhỏ nhất.

9- Nêu thuật toán giải bài toán dự trữ nhiều giai đoạn với giá hàng và hệ số chi phí dự trữ không đổi theo giai đoạn. Thực hiện thuật toán này với một thí dụ cụ thể cho bài toán 4 giai đoạn.

10- Giải bài toán dự trữ 4 loại hàng có ràng buộc về dung tích kho với số liệu cho ở bảng sau đây:

i	1	2	3	4
Q	400	300	500	4500
f	11	8	12	10
A	40	20	25	100
C	9	14	12	15
I	0.05	0.1	0.05	0.05
C_z	6	8	5	2
P (giá bán)	16	20	17	22

Với tổng dung tích kho f_0=15000.

11- Giải bài toán dự trữ ràng buộc kho với chi phí và giá bán trên cơ sở các số liệu sau:

Quí (i)	C_i	P_i
1	6	8
2	6	9
3	4	6
4	7	9

Với qui mô kho tối đa là B= 600, dự trữ ban đầu là 350 và dự trữ cuối cùng bằng không. Chi phí dự trữ C_0= 2.

PHỤ LỤC 2

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG CHƯƠNG TRÌNH MH4

Chương trình được viết với mục đích hỗ trợ tính toán các bài toán theo giáo trình " Mô hình toán kinh tế" của các tác giả Nguyễn Quang Dong, Ngô văn Thứ, Hoàng Đình Tuấn khoa Toán kinh tế - Đại học kinh tế quốc dân.

Chương trình hướng đến sự tiện lợi trong khi sử dụng vì vậy với mỗi loại bài toán cụ thể, bên cạnh chương trình giải chúng tôi tạo điều kiện cho người sử dụng nếu muốn có thể cập nhật những bộ số liệu để sau này sử dụng lại. Ngoài ra việc hiệu chỉnh các số liệu cũng là một nội dung được chú ý trong chương trình. Để phục vụ mục đích trên, bên cạnh các tệp cơ bản là MH4.EXE và CDLN2.TPU chúng tôi tạo sẵn một thư viện thí dụ cho từng loại bài toán. Thư viện này có thể bổ sung bởi người sử dụng, mỗi thư viện kèm theo một tệp chứa danh sách các thí dụ (bộ số liệu). Kết quả giải các bài toán được ghi dưới dạng văn bản nhằm tạo điều kiện đọc và in ấn trên bất kỳ hệ soạn thảo nào.

Để sử dụng MH4 chúng ta cần có tối thiểu hai tệp nguồn nêu trên và 8 tệp danh mục thí dụ đã được đặt sẵn có phần mở rộng TEX. và cũng tối thiểu 8 tệp thí dụ cho 8 bài toán cơ bản như "các thí dụ mới". Toàn bộ các tệp này được ghi vào một thư mục MH (hoặc một thư mục với tên tuỳ chọn của người sử dụng). Để tiện lợi hơn cho việc lựa chọn tình huống trong việc tự học và hỗ trợ bài giảng MH4 sẽ được bổ sung một số tình huống so với bản năm 1997.

Hãy xem như bạn có các tệp nêu trên ở thư mục MH. Từ dấu nhắc của DOS bạn gõ CD MH sau đó ấn phím enter (R). Bạn đã vào thư mục MH. Từ thư mục này bạn gõ MH4 (R), một thực đơn xuất hiện.

DAI HOC KINH TE QUOC DAN HA NOI

Tac gia: Ngo Van Thu; Dien thoai:(844)8690195

CHUONG TRINH MH4 GIAI CAC BAI TOAN

Phuong phap toan kinh te

****

THUC DON CHINH

0 - Thoat

1 - Bai toan du tru

2 - Bai toan phuc vu cong cong

3 - Bang can doi lien nganh I/O

....

Ban chon cong viec so:

một trong các công việc tương ứng với các số đầu dòng; một thực đơn cấp hai xuất hiện.

Chẳng hạn bạn chọn 1(R) bạn sẽ thấy thực đơn sau:

****

THUC DON BAI TOAN DU TRU

****

0 - Tro ve thuc don chinh

1 - Bai toan Wilson

2 - Bai toan Q - K

3 - Bai toan nhieu gia

4 - Chon nguon

5 - Nhieu giai doan

....

Ban chon cong viec so:

Với mỗi dạng bài toán việc đầu tiên là bạn được hỏi có chạy một thí dụ hay không.

- Nếu bạn chọn 1 (R) thì bạn sẽ thấy hiển thị danh sách các thí dụ đã có và bạn cần chọn một tên thí dụ để chạy thử. Tuỳ đặc điểm của bài toán thí dụ có thể chạy ngay mà không cho phép bạn sửa số liệu, tuy nhiên bạn có cơ hội sửa sau khi chạy thí dụ.

- Nếu bạn chọn 0 (R) (hay bất kỳ số nguyên nào) bạn có thể bắt đầu vào số liệu cho 1 bài toán mới của bạn. Chú ý là sau mỗi số (chứ không phải chữ số) bạn cần ấn phím enter (R) để máy ghi số đó vào biến tương ứng.

Sau khi vào xong số liệu bạn sẽ được hỏi có hiệu chỉnh số liệu không, nếu bạn muốn hiệu chỉnh hãy chọn số tương ứng theo chỉ dẫn trên màn hình. Việc hiệu chỉnh được tiến hành với từng biến cho đến khi bạn thấy số liệu đã hoàn toàn đúng (số lần hiệu chỉnh không hạn chế).

Sau khi đã hiệu chỉnh xong số liệu bạn ấn enter

Bạn cần trả lời câu hỏi về có hay không một qui mô đặt hàng hiện tại, câu hỏi này được trả lời bằng giá trị 1 thì bạn có cơ hội tính toán hai khoản chi phí cơ bản và đánh giá phương án đang thực hiện cùng lời giải tối ưu, ngược lại bạn chỉ nhận được lời giải nếu bạn trả lời (0) trong câu hỏi trên.

Bạn có thể xem qua kết quả và trả lời có ghi kết quả hay không (hầu hết các tệp kết quả bao gồm cả số liệu ban đầu). Tiếp tục bạn được hỏi có ghi số liệu của bài toán vừa giải thành 1 thí dụ, bổ sung cho thư viện thí dụ của bạn không. Bạn có thể ghi lại bằng cách chọn 1(R), ngược lại chọn 0 (R).

Sau đó bạn được hỏi có chạy lại bài toán với các hiệu chỉnh không, chức năng này cho phép bạn chạy một nhóm bài toán có dữ liệu gần như nhau.

Cuối cùng bạn được hỏi có tiếp tục giải bài toán cùng loại không, nếu bạn chọn 1 (R) bạn sẽ trở lại từ đầu công việc giải bài toán cùng dạng; nếu chọn 0 (R) bạn trở lại thực đơn cấp hai. Từ thực đơn này bạn có thể chọn dạng bài toán khác hoặc trở về thực đơn chính.

Để thoát khỏi chương trình từ thực đơn chính bạn chọn 4 (R). Bạn nhận được một dòng nhắc, dòng này muốn bạn khẳng định lại việc kết thúc công việc, nếu bạn lại muốn trở lại chương trình thì chọn 0 (R), bạn trở lại thực đơn chính. Chọn 1 (R) bạn nhận được lời chúc may mắn của tác giả, sau đó bạn ấn phím bất kỳ chấm dứt một lần làm việc với MH4.

Từ thực đơn chính nếu bạn chọn 2 (R), bạn thấy xuất hiện thực đơn giải các bài toán lý thuyết phục vụ công cộng

THUC DON BAI TOAN PHUC VU CONG CONG

****

0 - Tro ve thuc don chinh

1 - Bai toan Eclang

2 - Bai toan cho han che

3 - Bai toan cho thuan nhat

....

Ban chon cong viec so:

Mọi công việc được tiến hành từng bước như đối với các bài toán dự trữ. Chú ý là khi bạn nhập số liệu cho bài toán chờ thuần nhất, bạn cần chú ý đến điều kiện tồn tại hệ thống ($\alpha/n < 1$), nếu không máy sẽ yêu cầu bạn vào lại số liệu.

Khi ở thực đơn chính bạn chọn 3 (R), bạn thấy xuất hiện thực đơn giải một số bài toán bảng cân đối liên ngành:

THUC DON CAN DOI LIEN NGANH

****

0 - Tro ve thuc don chinh

1 - Cac bai toan CDLN gia tri

2 - Cac bai toan CDLN hien vat

....

Ban chon cong viec so:

Chương trình này cho phép giải các bài toán với số ngành tối đa là 10.

Các bài toán dạng giá trị bao gồm bài toán Kế hoạch A và tính chỉ số giá của các ngành khi biết các chỉ số giá đầu vào sơ cấp.

Các bài toán dạng hiện vật bao gồm bài toán Kế hoạch A hiện vật và bài toán xác định giá sản phẩm các ngành khi biết phần giá trị gia tăng của các ngành.

Chương trình cho phép bắt đầu các bài toán hoặc là từ bảng cân đối liên ngành kế hoạch với các hiệu chỉnh hoặc từ ma trận hệ số chi phí trực tiếp, và các hệ số đầu vào sơ cấp.

Mọi công việc tiến hành bình thường như đã nêu ở phần trên.

PHỤ LỤC 3

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG GAMS NHỮNG NỘI DUNG CƠ BẢN

GAMS (General Algebraic Modeling System) là một ngôn ngữ lập trình cao cấp và cũng là một hệ thống chương trình giải các bài toán qui hoạch toán học (các bạn có thể đón nhận một tài liệu hướng dẫn chi tiết hơn trong thời gian sắp tới). Các chương trình mà sau đây chúng ta tạm gọi là các thủ tục của GAMS khá phong phú, những gì trình bày trong tài liệu này chỉ là những kiến thức nhập môn, hết sức sơ lược. Tuy vậy, những nội dung ban đầu này được khai thác đầy đủ cũng cho chúng ta một công cụ mạnh để giải các bài toán tối ưu.

Hệ thống này có các thủ tục đáng quan tâm sau đây:

LP Tìm nghiệm đúng của bài toán qui hoạch tuyến tính

MIP Tìm nghiệm đúng của bài toán qui hoạch nguyên tuyến tính

RMIP Tìm nghiệm đúng của bài toán qui hoạch hỗn hợp nguyên, tuyến tính

NLP Tìm tối ưu địa phương của bài toán qui hoạch phi tuyến với các hàm trơn.

DNLP Tìm tối ưu địa phương của bài toán qui hoạch nguyên, phi tuyến với các hàm không trơn.

MIDNLP Tìm tối ưu địa phương của bài toán qui hoạch nguyên, phi tuyến với các biến liên tục.

RMIDNLP Tìm tối ưu địa phương của bài toán qui hoạch nguyên, phi tuyến hỗn hợp với các biến liên tục.

MCP Tìm các kết hợp hỗn hợp với các ràng buộc của các biến (bài toán cân bằng).

1- Nguyên tắc làm việc với GAMS

GAMS yêu cầu một khai báo (input) mô tả chính xác cấu trúc của mô hình, lựa chọn dạng bài toán theo một qui ước riêng. Toàn bộ khai báo này được ghi thành 1 tệp với phần mở rộng .gms. Có thể sơ lược các mục khai báo trong trường hợp đơn giản như sau:

- Khai báo tập hợp chỉ số
- Khai báo biến và các tham số
- Khai báo các phương trình ràng buộc và hàm mục tiêu
- Đặt tên cho mô hình và xác định các bộ phận
- Lựa chọn chương trình (thủ tục) giải
- Khai báo yêu cầu hiển thị kết quả.

Có thể gọi đây là một chương trình của GAMS, chương trình này được dịch với tên tự chọn và có phần mở rộng .gms.

Thực hiện 1 chương trình tentep.gms, GAMS tạo tệp kết quả ghi thành tệp có cùng tên tệp với phần mở rộng .lst.

Mỗi chương trình có thể chứa 1 hay nhiều mô hình và được giải nhờ các dòng lệnh khác nhau. Một chương trình dịch đúng được GAMS xác nhận và có thể chạy nhiều lần với các mô tả biến theo những kích thước khác nhau.

2- Dòng lệnh

Một dòng lệnh của gams có thể bắt đầu ở đầu dòng với một từ khoá và kết thúc bởi dấu (;).

Một dòng lệnh bắt đầu từ dấu (*) được bỏ qua khi thực hiện chương trình và coi đây là một chú thích.

Một tập hợp dòng nằm giữa cặp lệnh

$ontext

$offtext

được coi là một văn bản không có tác dụng khi thực hiện chương trình.

3- Các lệnh cơ bản dùng khai báo và nhập số liệu

1- Lệnh Set

Lệnh Set dùng cho các khai báo tập hợp đối tượng. Có hai loại đối tượng chủ yếu là tập đối tượng đã chỉ số hoá và tập đối tượng định danh.

Cấu trúc cơ bản: Set   tên tập hợp (name)   Lời giải thích (Nhãn) /......./;

Thí dụ:

Set   i   Tram phat hang / Ha noi, Hai phong, Lang son, Nghe an/

j   Tram thu hang / Quang ninh, Thanh hoa, Ninh binh/;

hay   Set   i   Tram phat hang /1*4/;

2- Lệnh Alias

Lệnh đặt danh hiệu alias cho phép sử dụng các chỉ số đã khai báo ở lệnh Set trước đó để tạo các tập chỉ số biến nhiều chiều.

Thí dụ:

Set   i   Đinh cua do thi / 1*10/;

Alias(i,j);

Lệnh này tạo một tập chỉ số gồm 100 phần tử trên cơ sở tập i được khai báo ở dòng trên.

Còn với :

Set   i   Tram phat hang / Ha noi, Hai phong, Lang son, Nghe an/

j   Tram thu hang / Quang ninh, Thanh hoa, Ninh binh/;

Alias(i,j) không có ý nghĩa vì bản thân hai khai báo trên đã cho phép chúng ta tạo các biến hai chiều với các chỉ số i và j.

3- Lệnh Scalar

Lệnh scalar cho phép khai báo các hằng số thực, nhằm tạo các hằng số cố định cho toàn bộ chương trình.

Thí dụ:

Scalar esilon   Hang so gioi han /0.0001/;

4- Lệnh Parameter

Sau từ khoá này có thể khai báo các giá trị cho các tham số, tạo giá trị các tham số. Cách thức khai báo như với lệnh Scalar và tạo các tham số hoàn toàn có thể chỉ là các khai báo.

Thí dụ:

Prarameter

A(i) Luong phat tram i /Ha noi 240, Hai phong 300, Lang son 360, Nghe an 600/

B(j) Luong thu tam j /Quang ninh 500,

Thanh hoa 560,

Ninh binh 440/

M(i) He so kho khan /Ha noi 1,

Hai phong 1.2,

Lang son 1.6,

Nghe an 2/

D(i) Luong cung có kha nang;

D(i)=A(i)/m(i);

5- Lệnh Table

Lệnh này cho phép tạo bảng nhập số liệu với ít nhất hai chỉ số

Thí dụ: Table C(i,j) cuoc phi tu i den j

	quangninh	thanhhoa	ninhbinh
hanoi	12	9	7
haiphong	8	17	14
langson	24	21	18
nghean	32	8	11;

6- Dấu $ với khai báo có điều kiện

Giả sử trong các quan hệ của các tập chỉ số, một số tham số chỉ tồn tại ở một số cặp chỉ số hay chỉ số. Ta có thể dùng khai báo:

Parameter$(điều kiện); Table$(điều kiện); ....

Chẳng hạn ở thí dụ trên không có tuyến nghean- thanhhoa và haiphong-quangninh ta có thể xác định một tập quan hệ như sau trong lệnh Set

set vc(i,j) cung duong /hanoi.quangninh, hanoi.thanhhoa, hanoi.ninhbinh, haiphong.thanhhoa, haiphong.ninhbinh, langson.quangninh, langson.thanhhoa, langson.ninhbinh, nghean.thanhhoa, nghean.quangninh/;

Như vậy trong khai báo C(i,j) ta chỉ có:

parameter

Table C(i,j)$(vc(i,j)) cuoc phi tu i den j

	quangninh	thanhhoa	ninhbinh
hanoi	12	9	7
haiphong		17	14
langson	24	21	18
nghean	32	8	;

Chỉ định $(điều kiện) không thật cần thiết ở phần khai báo tham số và các bảng số, tuy nhiên chúng cộ tác dụng lớn trong phần tạo các ràng buộc, phương trình ở phần sau.

Trường hợp tham số có hơn 2 chỉ số ta có thể khai báo theo khối như sau:

sets i /A,B/,

j /1,2/,

k /90,95/,

l /Y,Z/;

table yield(i,j,k,l) "process yield"

	90.Y	90.Z	95.Y	95.Z
A.1			1.23	
A.2				
B.1				
B.2				45 ;

trong đó: yieldA,1,95,Y = 1.23,

yieldB,2,95,Z = 45.

4- Các hàm thông dụng trong GAMS

Hàm	Giá trị
abs()	gía trị tuyệt đối
arctan()	arctang
ceil()	số làm tròn (nguyên)
cos()	cosine
exp()	hàm e mũ
floor()	phần nguyên
log()	logarit cơ số e
log10()	logarit cơ số 10
max(,...,)	giá trị lớn nhất của một dãy
min(,...,)	giá trị nhỏ nhất của một dãy
mod(,)	mod của số thứ nhất theo số thứ 2
power(,)	luỹ thừa của số thứ nhất với số mũ là số thứ 2
round(,)	số thứ nhất với số chữ số phần thập phân bằng số thứ 2
sign()	hàm dấu
sin()	hàm sin
sqr()	hàm bình phương
sqrt()	hàm căn bậc hai
uniform(,)	số ngẫu nhiên giữa số thứ nhất và số thứ hai

5- Các lệnh khai báo biến và phương trình ràng buộc

1- Biến

GAMS phân biệt hai loại biến:

+ Biến tự do: Biến này có thể xác định nhờ một biểu thức toán học và nó luôn là biến thực. Các biến tự do trong các mô hình thường là các hàm mục tiêu, chúng được khai báo đơn giản có hay không có nhãn nhờ dòng lệnh:

Variable tên biến 1, tên biến 2,...;

Thí dụ:

Variable Tcost "Total cost";

+ Biến định dạng: GAMS chấp nhận các biến liệt kê ở bảng sau:

Dạng biến	Khai báo
biến (liên tục) không có ràng buộc	free variable(s)
biến (liên tục) không âm	positive variable(s)
biến (liên tục) không dương	negative variable(s)
biến nhị phân (0-1)	binary variable(s)
biến nguyên không âm	integer variable(s)

Mỗi biến có thể khai báo cùng chỉ số hoặc không cùng chỉ số. Chẳng hạn một biến x gồm các thành phần (x_1, ..., x_i,...) không âm có thể khai báo:

positive variable x; hay positive variable x(i);.

Chú ý rằng các biến dùng làm hàm mục tiêu không khai báo định dạng của chúng.

Thí dụ:

variable F; (khai báo F dùng làm hàm mục tiêu)

positive variables x(i,j); (Khai báo các biến x(i,j) là lượng vận chuyển từ i đến j).

2- Phương trình

Khai báo phương trình gồm hai nội dung ở hai bước bắt buộc:

+ Khai báo tên và nhãn

Dùng từ khoá lệnh:

Equation

tênphương trình1 Nhãn

tên phương trình2 Nhãn

....;

Chú ý: phải khai báo tên phương trình xác định biểu thức hàm mục tiêu ở phần này.

Thí dụ:

Equation

hammt Tong chi phi can cuc tieu

rbphat	Cac rang buoc phat	
rbthu	Cac rang buoc thu;	

+ Khai báo biểu thức ràng buộc và hàm

Các ràng buộc được khai báo với cấu trúc sau:

tênphươngtrình..

biểu thức ràng buộc hoặc xác định hàm;

Dấu các phương trình:	bằng	=e=
	nhỏ hơn hoặc bằng	=l=
	lớn hơn hoặc bằng	=g=
Dấu các phép tính:	cộng	+
	trừ	-
	nhân	*
	chia	/
	luỹ thừa	**

Thí dụ:

hammt..   F=e=sum((i,j)$(vc(i,j)),c(i,j)*x(i,j));

Ràng buộc trên có nghĩa là hàm F được tính bằng tổng của các tích c(i,j)*x(i,j) với (i,j) xác định trên tập vc(i,j) đã định nghĩa ở phần trên.

rbphát(i)..   sum(j$(cv(i,j)),x(i,j))=l=a(i);

rbthu(j)..   sum(i$(cv(i,j)),x(i,j))=g=b(j);

Với cách viết như trên các tổng chỉ tính với những (i,j) được xác định bởi tập cv(i,j).

+ Ràng buộc trong một tập chỉ số

Trong một số mô hình các biến dùng chung tập chỉ số và có những ràng buộc (cân bằng chẳng hạn) ngay trong tập chỉ số đó. Chẳng hạn nếu trong mô hình cân bằng ta có:

$$K(t)=K(t-1)+I(t)-aK(t)$$

thì phương trình có thể khai báo là:

canbang(t)..   k(t)=e=k(t-1)+i(t)-a*k(t);

5- Đặt tên mô hình và lựa chọn các biến mục tiêu

+ Tên mô hình được đặt nhờ cấu trúc:

Model tenmohinh /..../;

Thông thường có thể chọn /all/ cho tất cả các mô hình. Trong một số trường hợp có thể liệt kê từng khối mô hình để tiện việc lựa chọn khi viết lệnh chỉ định giải các bài toán tương ứng.

Thí dụ:

Model vantai /all/;

6- Chỉ định loại thủ tục - dạng tối ưu hoá và hiển thị kết quả

Tạo giá trị ban đầu của các biến:

Trong một số thủ tục, đặc biệt là khi tìm cực trị các hàm phi tuyến, cần chỉ định giá trị ban đầu của các biến. Việc tạo giá trị ban đầu cho các biến tránh hiện tượng xuất phát từ điểm không xác định hàm mục tiêu hay các véc tơ gradient của hàm đó. Lệnh đặt giá trị ban đầu là:

tênbiến [hay tham số]= giá trị ;

Thí dụ: chương trình sau cần đặt giá trị ban đầu cho biến:

```
* Mo hinh Wilson /Wilson/;
set thamso Cac tham so cua mo hinh /D,A,C,I,K/;
free variable TC, TCQK;
positive variable q, qk;
parameters V(thamso)
      /D 5000, A 45, C 12, I  0.05, K 12000/;
equation
   Chiphi1  Tong chi phi du tru-tieu thu
Chiphi2  Tong chi phi mo hinh QK;
Chiphi1.. TC=e=V("A")*V("D")/(q)+V("I")*V("C")*(q)/2;
Chiphi2.. TCQK=e=V("A")*V("D")/(qk)+V("I")*V("C")*(1-V("D")/V("K"))*(qk)/2;
q.l=10;
qk.l=1;
```

Model Wilson /All/;

Solve wilson minimizing TC using NLP;

display TC.l, q.l;

Solve wilson minimizing TCQK using NLP;

display TCQK.l, qk.l;

Cách thức đặt giá trị ban đầu có thể liệt kê như sau:

tênbiến.l =...	đặt giá trị cho biến
variable.lo=...	đặt giá trị không thấp hơn
variable.up =...	đặt giá trị không cao hơn
variable.m=...	giá trị biến đối ngẫu của một ràng buộc

Chú ý rằng đây chỉ là các giá trị gán, nó khác với việc xác định giá trị cho một tham số. Giá trị gán là giá trị tạm thời của biến, nó sẽ bị biến đổi khi chương trình được thực hiện.

Toàn bộ lựa chọn khai báo trong một dòng lệnh dạng:

Solve tenmohinh minimizing (maximixing) hammuctieu using tenthutuc;

Để hiển thị kết quả cần khai báo theo cấu trúc sau:

Display tênbiến.[lựa chọn], tênbiến.[lựa chọn];

Thí dụ: Solve vantai minimizing f using lp;

display x.l, f.l;

Hãy đọc kỹ chương trình sau và kết quả của nó để hiểu rõ hơn về nội dung trên

```
variable f;
positive variable y;
scalar x        so thuc /3.91/;
parameter       d       lay x voi 1 chu so phan thap phan;
                d=round(x,1);
                y.l=2;
```

```
display x, d,y.l;
equation
        rb rang buoc cho bien y
        hamso   ham so;
rb..   y=l=10;
hamso.. f=e=1/(1+y);
model thidu1 /all/;
solve thidu1 minimizing f using nlp;
display y.l, f.l;
```

Kết quả: 8 PARAMETER X   =   3.910   so thuc

PARAMETER D   =   3.900 lay x voi 1 chu so phan thap phan

VARIABLE Y.L   =   2.000

Kết quả của lệnh display thứ nhất và sau đây là kết quả của lệnh Display thứ hai (sau khi tìm cực tiểu hàm 1/(1+y) với y không âm và không lớn hơn 10.

16 VARIABLE Y.L   =   10.000

VARIABLE F.L   =   0.091

7- Dịch và thực hiện chương trình

Để GAMS nhận một chương trình cần đặt cho mỗi chương trình một tên với phần mở rộng .gms (ngầm định). Chẳng hạn với các khai báo trên ta có thể tập hợp thành văn bản chương trình giải bài toán vận tải như sau:

```
Set    i        Tram phat hang / hanoi, haiphong, langson, nghean/
       j        Tram thu hang / quangninh, thanhhoa, ninhbinh/;
Parameter
A(i)   Luong phat tram i /hanoi  340, haiphong 320, langson  360, nghean 600/
B(j)   Luong thu tam j          /quangninh  500, thanhhoa 560, ninhbinh  440/;
set vc(i,j) cung duong /hanoi.quangninh, hanoi.thanhhoa, hanoi.ninhbinh,
haiphong.thanhhoa, haiphong.ninhbinh, langson.quangninh, langson.thanhhoa,
langson.ninhbinh, nghean.thanhhoa, nghean.quangninh/;
Table C(i,j) cuoc phi tu i den j
```

```
                quangninh     thanhhoa      ninhbinh
hanoi           12            9             7
haiphong                      17            14
langson          24           21            18
nghean          32            8                ;
variable F;
positive variables x(i,j);
Equation
        hammt          Tong chi phi can cuc tieu
        rbphat         Cac rang buoc phat
        rbthu          Cac rang buoc thu;
hammt..            F=e=sum((i,j)$(vc(i,j)),c(i,j)*x(i,j));
rbphat(i)..     sum(j$(vc(i,j)),x(i,j))=l=a(i);
rbthu(j)..      sum(i$(vc(i,j)),x(i,j))=g=b(j);
Model vantai /all/;
Solve vantai minimizing f using lp;
display x.l, f.l;
```

Trước khi yêu cầu GAMS dịch chương trình này ta cần ghi lại thành 1 tệp chẳng hạn vantai.gms.

Tổ hợp Ctrl-F9 chỉ thị cho Gams dịch chương trình này.

Quá trình dịch nếu có lỗi GAMS sẽ thông báo lỗi chi tiết trong từng dòng lệnh.

Sau khi dịch xong chúng ta có thể chạy chương trình nhờ ấn F9.

Kết quả được ghi ở tệp có tên vantai.lst, tệp này hiển thị trực tiếp (nếu chúng ta không đặt chế độ không hiển thị). Trường hợp chúng ta đặt chế độ không hiển thị kết quả thì tệp này được ghi ở thư mục hiện thời của GAMS.

Kết quả chạy chương trình trên như sau:

	quangninh	thanhhoa	ninhbinh
Hanoi	340.000		
Haiphong			320.000
Langson	160.000		120.000
Nghean		560.000	

F.L = 19040.000

8- Lỗi và thông báo lỗi

Error Wording	Likely Problem
unknown symbol	Một biến, tập hợp....... không được khai báo hoặc khai báo không đúng qui cách.
set identifier or quoted element expected	Tên hoặc nhãn hiện đã được sử dụng, hoặc thiếu dấu ngoặc
=l=, =e=, or =g= operator expected	Lỗi dấu phép toán
incompatible operands for relational operator	Một ký hiệu, chỉ số là một ký tự để xác định chúng cần dùng hàm ord() .
domain violation	Tên biến, nhãn chưa được khai báo hoặc chỉ số biến ngoài vùng khai báo
more/less indices	Chỉ số sử dụng không cùng tập hợp với chỉ số khai báo đối với các tham số và phương trình.
uncontrolled set	Một ký hiệu không có trong các tập đã khai báo
set under control already	Biến, tham số hay chỉ số dùng đồng thời mà không đặt danh hiệu bằng alias.
suffix is missing	Toán tử đối với biến thiếu phần chỉ định (l, lo,lup...).
endog arguments	Mô hình có phần tử phi tuyến không tồn tại nhưng có mặt trong chỉ định giải.
endog operands	Trong chỉ định giải có biến nội sinh không tồn tại.
variable wrong type	Biến ngoài giới hạn khai báo.
log of negative number sqrt of a negative number division by zero gradient too big	Loga và căn bậc hai của số âm, chia cho số không
no solution	Mô hình sai hoặc sử dụng thủ tuc không hợp lệ.

9- Thư viện chương trình và mô hình

GAMS cung cấp sẵn 193 chương trình đã được soạn thảo và chạy thử ở các nước, các khu vực khác nhau, trên các mô hình khác nhau. Việc khai thác các chương trình này có lẽ cũng là một nội dung tốt cho người học và sử dụng GAMS Chẳng hạn mô hình TBA của Dahl H, Meeraus A, and Zenios S về tài chính.

Chúng ta có thể nhận được khi chọn Open in gams Model library từ thực đơn File của Gams.

Title Financial Optimization: Financial Engineering (TBA,SEQ=115)

The delivery and settlement of mortgage-backed securities is governed by an extensive set of rules and regulations. Forward delivery settlements of not yet pooled mortgages are on a to-be-announced (TPA) basis. Some allowed variance allows to structure the TBAs in a cost effective manner.

Reference: Dahl H, Meeraus A, and Zenios S, Some Financial Optimization Models: Financial Engineering, in S Zenios (ed.), Financial Optimization, Cambridge University Press, New York, NY, 1993.

Sau lời giới thiệu này là toàn bộ chương trình tìm cực đại lợi ích trong một mô hình tài chính mà chúng ta có thể sử dụng được nếu có đủ các tham số cần thiết.

PHỤ LỤC 4

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI CHUẨN

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0	0.5	0.190	0.575345	0.380	0.648027	0.570	0.715661
0.005	0.501995	0.195	0.577304	0.385	0.649881	0.575	0.717354
0.010	0.503989	0.200	0.57926	0.390	0.651732	0.580	0.719043
0.015	0.505984	0.205	0.581214	0.395	0.653579	0.585	0.720726
0.020	0.507978	0.210	0.583166	0.400	0.655422	0.590	0.722405
0.025	0.509973	0.215	0.585116	0.405	0.657261	0.595	0.724078
0.030	0.511967	0.220	0.587064	0.410	0.659097	0.600	0.725747
0.035	0.51396	0.225	0.58901	0.415	0.660929	0.605	0.727411
0.040	0.515953	0.230	0.590954	0.420	0.662757	0.610	0.729069
0.045	0.517946	0.235	0.592896	0.425	0.664582	0.615	0.730723
0.050	0.519939	0.240	0.594835	0.430	0.666402	0.620	0.732371
0.055	0.521931	0.245	0.596772	0.435	0.668219	0.625	0.734015
0.060	0.523922	0.250	0.598706	0.440	0.670031	0.630	0.735653
0.065	0.525913	0.255	0.600638	0.445	0.67184	0.635	0.737286
0.070	0.527903	0.260	0.602568	0.450	0.673645	0.640	0.738914
0.075	0.529893	0.265	0.604495	0.455	0.675445	0.645	0.740536
0.080	0.531881	0.270	0.60642	0.460	0.677242	0.650	0.742154
0.085	0.533869	0.275	0.608342	0.465	0.679034	0.655	0.743766
0.090	0.535856	0.280	0.610261	0.470	0.680822	0.660	0.745373
0.095	0.537843	0.285	0.612178	0.475	0.682607	0.665	0.746975
0.100	0.539828	0.290	0.614092	0.480	0.684386	0.670	0.748571
0.105	0.541812	0.295	0.616003	0.485	0.686162	0.675	0.750162
0.110	0.543795	0.300	0.617911	0.490	0.687933	0.680	0.751748
0.115	0.545777	0.305	0.619817	0.495	0.6897	0.685	0.753328
0.120	0.547758	0.310	0.621719	0.500	0.691462	0.690	0.754903
0.125	0.549738	0.315	0.623619	0.505	0.693221	0.695	0.756472
0.130	0.551717	0.320	0.625516	0.510	0.694974	0.700	0.758036
0.135	0.553694	0.325	0.627409	0.515	0.696724	0.705	0.759595
0.140	0.55567	0.330	0.6293	0.520	0.698468	0.710	0.761148
0.145	0.557645	0.335	0.631187	0.525	0.700208	0.715	0.762696
0.150	0.559618	0.340	0.633072	0.530	0.701944	0.720	0.764238
0.155	0.561589	0.345	0.634953	0.535	0.703675	0.725	0.765774
0.160	0.563559	0.350	0.636831	0.540	0.705402	0.730	0.767305
0.165	0.565528	0.355	0.638705	0.545	0.707123	0.735	0.76883
0.170	0.567495	0.360	0.640576	0.550	0.70884	0.740	0.77035
0.175	0.56946	0.365	0.642444	0.555	0.710553	0.745	0.771864
0.180	0.571424	0.370	0.644309	0.560	0.71226	0.750	0.773373
0.185	0.573385	0.375	0.64617	0.565	0.713963	0.755	0.774876

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI CHUẨN

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0.760	0.776373	0.950	0.828944	1.140	0.872857	1.330	0.908241
0.765	0.777864	0.955	0.830211	1.145	0.873895	1.335	0.909062
0.770	0.77935	0.960	0.831472	1.150	0.874928	1.340	0.909877
0.775	0.78083	0.965	0.832728	1.155	0.875955	1.345	0.910687
0.780	0.782305	0.970	0.833977	1.160	0.876976	1.350	0.911492
0.785	0.783773	0.975	0.83522	1.165	0.87799	1.355	0.912291
0.790	0.785236	0.980	0.836457	1.170	0.878999	1.360	0.913085
0.795	0.786693	0.985	0.837688	1.175	0.880003	1.365	0.913873
0.800	0.788145	0.990	0.838913	1.180	0.881	1.370	0.914656
0.805	0.78959	0.995	0.840132	1.185	0.881991	1.375	0.915434
0.810	0.79103	1.000	0.841345	1.190	0.882977	1.380	0.916207
0.815	0.792464	1.005	0.842552	1.195	0.883956	1.385	0.916974
0.820	0.793892	1.010	0.843752	1.200	0.88493	1.390	0.917736
0.825	0.795314	1.015	0.844947	1.205	0.885898	1.395	0.918492
0.830	0.796731	1.020	0.846136	1.210	0.88686	1.400	0.919243
0.835	0.798141	1.025	0.847318	1.215	0.887817	1.405	0.919989
0.840	0.799546	1.030	0.848495	1.220	0.888767	1.410	0.92073
0.845	0.800945	1.035	0.849666	1.225	0.889712	1.415	0.921466
0.850	0.802338	1.040	0.85083	1.230	0.890651	1.420	0.922196
0.855	0.803724	1.045	0.851988	1.235	0.891585	1.425	0.922921
0.860	0.805106	1.050	0.853141	1.240	0.892512	1.430	0.923641
0.865	0.806481	1.055	0.854287	1.245	0.893434	1.435	0.924356
0.870	0.80785	1.060	0.855428	1.250	0.89435	1.440	0.925066
0.875	0.809213	1.065	0.856562	1.255	0.895261	1.445	0.925771
0.880	0.81057	1.070	0.85769	1.260	0.896165	1.450	0.926471
0.885	0.811922	1.075	0.858813	1.265	0.897064	1.455	0.927165
0.890	0.813267	1.080	0.859929	1.270	0.897958	1.460	0.927855
0.895	0.814606	1.085	0.861039	1.275	0.898845	1.465	0.92854
0.900	0.81594	1.090	0.862143	1.280	0.899727	1.470	0.929219
0.905	0.817267	1.095	0.863242	1.285	0.900604	1.475	0.929894
0.910	0.818589	1.100	0.864334	1.290	0.901475	1.480	0.930563
0.915	0.819904	1.105	0.86542	1.295	0.90234	1.485	0.931228
0.920	0.821214	1.110	0.8665	1.300	0.903199	1.490	0.931888
0.925	0.822517	1.115	0.867575	1.305	0.904054	1.495	0.932543
0.930	0.823814	1.120	0.868643	1.310	0.904902	1.500	0.933193
0.935	0.825106	1.125	0.869705	1.315	0.905745	1.505	0.933838
0.940	0.826391	1.130	0.870762	1.320	0.906582	1.510	0.934478
0.945	0.827671	1.135	0.871812	1.325	0.907414	1.515	0.935114

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI CHUẨN

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1.520	0.935744	1.710	0.956367	1.900	0.971284	2.090	0.981691
1.525	0.93637	1.715	0.956827	1.905	0.97161	2.095	0.981915
1.530	0.936992	1.720	0.957284	1.910	0.971933	2.100	0.982136
1.535	0.937608	1.725	0.957736	1.915	0.972254	2.105	0.982354
1.540	0.93822	1.730	0.958185	1.920	0.972571	2.110	0.982571
1.545	0.938827	1.735	0.95863	1.925	0.972885	2.115	0.982785
1.550	0.939429	1.740	0.959071	1.930	0.973197	2.120	0.982997
1.555	0.940027	1.745	0.959508	1.935	0.973505	2.125	0.983207
1.560	0.94062	1.750	0.959941	1.940	0.97381	2.130	0.983414
1.565	0.941209	1.755	0.96037	1.945	0.974113	2.135	0.98362
1.570	0.941792	1.760	0.960796	1.950	0.974412	2.140	0.983823
1.575	0.942372	1.765	0.961218	1.955	0.974709	2.145	0.984024
1.580	0.942947	1.770	0.961636	1.960	0.975002	2.150	0.984222
1.585	0.943517	1.775	0.962051	1.965	0.975293	2.155	0.984419
1.590	0.944083	1.780	0.962462	1.970	0.975581	2.160	0.984614
1.595	0.944644	1.785	0.962869	1.975	0.975866	2.165	0.984806
1.600	0.945201	1.790	0.963273	1.980	0.976148	2.170	0.984997
1.605	0.945753	1.795	0.963673	1.985	0.976428	2.175	0.985185
1.610	0.946301	1.800	0.96407	1.990	0.976705	2.180	0.985371
1.615	0.946845	1.805	0.964463	1.995	0.976979	2.185	0.985556
1.620	0.947384	1.810	0.964852	2.000	0.97725	2.190	0.985738
1.625	0.947919	1.815	0.965238	2.005	0.977519	2.195	0.985918
1.630	0.948449	1.820	0.965621	2.010	0.977784	2.200	0.986097
1.635	0.948975	1.825	0.966	2.015	0.978048	2.205	0.986273
1.640	0.949497	1.830	0.966375	2.020	0.978308	2.210	0.986447
1.645	0.950015	1.835	0.966747	2.025	0.978566	2.215	0.98662
1.650	0.950529	1.840	0.967116	2.030	0.978822	2.220	0.986791
1.655	0.951038	1.845	0.967481	2.035	0.979075	2.225	0.986959
1.660	0.951543	1.850	0.967843	2.040	0.979325	2.230	0.987126
1.665	0.952044	1.855	0.968202	2.045	0.979573	2.235	0.987291
1.670	0.95254	1.860	0.968557	2.050	0.979818	2.240	0.987455
1.675	0.953033	1.865	0.968909	2.055	0.980061	2.245	0.987616
1.680	0.953521	1.870	0.969258	2.060	0.980301	2.250	0.987776
1.685	0.954006	1.875	0.969604	2.065	0.980539	2.255	0.987933
1.690	0.954486	1.880	0.969946	2.070	0.980774	2.260	0.988089
1.695	0.954962	1.885	0.970285	2.075	0.981007	2.265	0.988244
1.700	0.955435	1.890	0.970621	2.080	0.981237	2.270	0.988396
1.705	0.955903	1.895	0.970954	2.085	0.981465	2.275	0.988547

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI CHUẨN

x	F(X)	x	F(X)	x	F(X)	x	F(X)
2.280	0.988696	2.470	0.993244	2.660	0.996093	2.850	0.997814
2.285	0.988844	2.475	0.993338	2.665	0.996151	2.855	0.997848
2.290	0.988989	2.480	0.993431	2.670	0.996207	2.860	0.997882
2.295	0.989133	2.485	0.993522	2.675	0.996263	2.865	0.997915
2.300	0.989276	2.490	0.993613	2.680	0.996319	2.870	0.997948
2.305	0.989417	2.495	0.993702	2.685	0.996373	2.875	0.99798
2.310	0.989556	2.500	0.99379	2.690	0.996427	2.880	0.998012
2.315	0.989694	2.505	0.993877	2.695	0.996481	2.885	0.998043
2.320	0.98983	2.510	0.993963	2.700	0.996533	2.890	0.998074
2.325	0.989964	2.515	0.994048	2.705	0.996585	2.895	0.998104
2.330	0.990097	2.520	0.994132	2.710	0.996636	2.900	0.998134
2.335	0.990228	2.525	0.994215	2.715	0.996686	2.905	0.998164
2.340	0.990358	2.530	0.994297	2.720	0.996736	2.910	0.998193
2.345	0.990486	2.535	0.994378	2.725	0.996785	2.915	0.998221
2.350	0.990613	2.540	0.994457	2.730	0.996833	2.920	0.99825
2.355	0.990739	2.545	0.994536	2.735	0.996881	2.925	0.998278
2.360	0.990863	2.550	0.994614	2.740	0.996928	2.930	0.998305
2.365	0.990985	2.555	0.994691	2.745	0.996974	2.935	0.998332
2.370	0.991106	2.560	0.994766	2.750	0.99702	2.940	0.998359
2.375	0.991226	2.565	0.994841	2.755	0.997065	2.945	0.998385
2.380	0.991344	2.570	0.994915	2.760	0.99711	2.950	0.998411
2.385	0.99146	2.575	0.994988	2.765	0.997154	2.955	0.998437
2.390	0.991576	2.580	0.99506	2.770	0.997197	2.960	0.998462
2.395	0.99169	2.585	0.995131	2.775	0.99724	2.965	0.998487
2.400	0.991802	2.590	0.995201	2.780	0.997282	2.970	0.998511
2.405	0.991914	2.595	0.99527	2.785	0.997324	2.975	0.998535
2.410	0.992024	2.600	0.995339	2.790	0.997365	2.980	0.998559
2.415	0.992132	2.605	0.995406	2.795	0.997405	2.985	0.998582
2.420	0.99224	2.610	0.995473	2.800	0.997445	2.990	0.998605
2.425	0.992346	2.615	0.995539	2.805	0.997484	2.995	0.998628
2.430	0.992451	2.620	0.995603	2.810	0.997523	3.000	0.99865
2.435	0.992554	2.625	0.995668	2.815	0.997561	3.005	0.998672
2.440	0.992656	2.630	0.995731	2.820	0.997599	3.010	0.998694
2.445	0.992757	2.635	0.995793	2.825	0.997636	3.015	0.998715
2.450	0.992857	2.640	0.995855	2.830	0.997673	3.020	0.998736
2.455	0.992956	2.645	0.995915	2.835	0.997709	3.025	0.998757
2.460	0.993053	2.650	0.995975	2.840	0.997744	3.030	0.998777
2.465	0.993149	2.655	0.996035	2.845	0.997779	3.035	0.998797

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI CHUẨN

x	F(X)	x	F(X)	x	F(X)	x	F(X)
3.040	0.998817	3.230	0.999381	3.420	0.999687	3.610	0.999847
3.045	0.998837	3.235	0.999392	3.425	0.999693	3.615	0.99985
3.050	0.998856	3.240	0.999402	3.430	0.999698	3.620	0.999853
3.055	0.998875	3.245	0.999413	3.435	0.999704	3.625	0.999855
3.060	0.998893	3.250	0.999423	3.440	0.999709	3.630	0.999858
3.065	0.998912	3.255	0.999433	3.445	0.999714	3.635	0.999861
3.070	0.99893	3.260	0.999443	3.450	0.99972	3.640	0.999864
3.075	0.998947	3.265	0.999453	3.455	0.999725	3.645	0.999866
3.080	0.998965	3.270	0.999462	3.460	0.99973	3.650	0.999869
3.085	0.998982	3.275	0.999472	3.465	0.999735	3.655	0.999871
3.090	0.998999	3.280	0.999481	3.470	0.99974	3.660	0.999874
3.095	0.999016	3.285	0.99949	3.475	0.999745	3.665	0.999876
3.100	0.999032	3.290	0.999499	3.480	0.999749	3.670	0.999879
3.105	0.999049	3.295	0.999508	3.485	0.999754	3.675	0.999881
3.110	0.999064	3.300	0.999517	3.490	0.999758	3.680	0.999883
3.115	0.99908	3.305	0.999525	3.495	0.999763	3.685	0.999886
3.120	0.999096	3.310	0.999533	3.500	0.999767	3.690	0.999888
3.125	0.999111	3.315	0.999542	3.505	0.999772	3.695	0.99989
3.130	0.999126	3.320	0.99955	3.510	0.999776	3.700	0.999892
3.135	0.999141	3.325	0.999558	3.515	0.99978	3.705	0.999894
3.140	0.999155	3.330	0.999566	3.520	0.999784	3.710	0.999896
3.145	0.999169	3.335	0.999573	3.525	0.999788	3.715	0.999898
3.150	0.999184	3.340	0.999581	3.530	0.999792	3.720	0.9999
3.155	0.999197	3.345	0.999589	3.535	0.999796	3.725	0.999902
3.160	0.999211	3.350	0.999596	3.540	0.9998	3.730	0.999904
3.165	0.999225	3.355	0.999603	3.545	0.999804	3.735	0.999906
3.170	0.999238	3.360	0.99961	3.550	0.999807	3.740	0.999908
3.175	0.999251	3.365	0.999617	3.555	0.999811	3.745	0.99991
3.180	0.999264	3.370	0.999624	3.560	0.999815	3.750	0.999912
3.185	0.999276	3.375	0.999631	3.565	0.999818	3.755	0.999913
3.190	0.999289	3.380	0.999638	3.570	0.999821	3.760	0.999915
3.195	0.999301	3.385	0.999644	3.575	0.999825	3.765	0.999917
3.200	0.999313	3.390	0.99965	3.580	0.999828	3.770	0.999918
3.205	0.999325	3.395	0.999657	3.585	0.999831	3.775	0.99992
3.210	0.999336	3.400	0.999663	3.590	0.999835	3.780	0.999922
3.215	0.999348	3.405	0.999669	3.595	0.999838	3.785	0.999923
3.220	0.999359	3.410	0.999675	3.600	0.999841	3.790	0.999925
3.225	0.99937	3.415	0.999681	3.605	0.999844	3.795	0.999926

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

a	0.05		0.1		0.15		0.2	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.95123	0.95123	0.90484	0.90484	0.86071	0.86071	0.81873	0.81873
1	0.04756	0.99879	0.09048	0.99532	0.12911	0.98981	0.16375	0.98248
2	0.00119	0.99998	0.00452	0.99985	0.00968	0.9995	0.01637	0.99885
3	2E-05	1	0.00015	1	0.00048	0.99998	0.00109	0.99994
4	2.5E-07	1	3.8E-06	1	1.8E-05	1	5.5E-05	1
5	2.5E-09	1	7.5E-08	1	5.4E-07	1	2.2E-06	1

a	0.25		0.3		0.35		0.4	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.7788	0.7788	0.74082	0.74082	0.70469	0.70469	0.67032	0.67032
1	0.1947	0.9735	0.22225	0.96306	0.24664	0.95133	0.26813	0.93845
2	0.02434	0.99784	0.03334	0.9964	0.04316	0.99449	0.05363	0.99207
3	0.00203	0.99987	0.00333	0.99973	0.00504	0.99953	0.00715	0.99922
4	0.00013	0.99999	0.00025	0.99998	0.00044	0.99997	0.00072	0.99994
5	6.3E-06	1	1.5E-05	1	3.1E-05	1	5.7E-05	1

a	0.25		0.3		0.35		0.4	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.7788	0.7788	0.74082	0.74082	0.70469	0.70469	0.67032	0.67032
1	0.1947	0.9735	0.22225	0.96306	0.24664	0.95133	0.26813	0.93845
2	0.02434	0.99784	0.03334	0.9964	0.04316	0.99449	0.05363	0.99207
3	0.00203	0.99987	0.00333	0.99973	0.00504	0.99953	0.00715	0.99922
4	0.00013	0.99999	0.00025	0.99998	0.00044	0.99997	0.00072	0.99994
5	6.3E-06	1	1.5E-05	1	3.1E-05	1	5.7E-05	1
6	2.6E-07	1	7.5E-07	1	1.8E-06	1	3.8E-06	1

a	0.45		0.5		0.55		0.6	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.63763	0.63763	0.60653	0.60653	0.57695	0.57695	0.54881	0.54881
1	0.28693	0.92456	0.30327	0.9098	0.31732	0.89427	0.32929	0.8781
2	0.06456	0.98912	0.07582	0.98561	0.08726	0.98154	0.09879	0.97688
3	0.00968	0.9988	0.01264	0.99825	0.016	0.99753	0.01976	0.99664
4	0.00109	0.99989	0.00158	0.99983	0.0022	0.99973	0.00296	0.99961
5	9.8E-05	0.99999	0.00016	0.99999	0.00024	0.99998	0.00036	0.99996
6	7.4E-06	1	1.3E-05	1	2.2E-05	1	3.6E-05	1

Cách sử dụng bảng giá trị phân phối Poisson

Các tham số:- k giá trị có thể có của biến ngẫu nhiên X phân phối Poisson.

- a tham số của phân phối Poisson

Các giá trị: -P(k,a) =P(X=k) = $\frac{e^{-a}a^k}{k!}$

- R(k,a) =P(X ≤k)

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

k \ a	0.65 P(k,a)	0.65 R(K,a)	0.7 P(k,a)	0.7 R(K,a)	0.75 P(k,a)	0.75 R(K,a)	0.8 P(k,a)	0.8 R(K,a)
0	0.522	0.522	0.4966	0.4966	0.4724	0.4724	0.4493	0.4493
1	0.3393	0.8614	0.3476	0.8442	0.3543	0.8266	0.3595	0.8088
2	0.1103	0.9717	0.1217	0.9659	0.1329	0.9595	0.1438	0.9526
3	0.0239	0.9956	0.0284	0.9942	0.0332	0.9927	0.0383	0.9909
4	0.0039	0.9994	0.005	0.9992	0.0062	0.9989	0.0077	0.9986
5	0.0005	0.9999	0.0007	0.9999	0.0009	0.9999	0.0012	0.9998
6	5E-05	1	8E-05	1	0.0001	1	0.0002	1
7	5E-06	1	8E-06	1	1E-05	1	2E-05	1

k \ a	0.85 P(k,a)	0.85 R(K,a)	0.9 P(k,a)	0.9 R(K,a)	0.95 P(k,a)	0.95 R(K,a)	1 P(k,a)	1 R(K,a)
0	0.4274	0.4274	0.4066	0.4066	0.3867	0.3867	0.3679	0.3679
1	0.3633	0.7907	0.3659	0.7725	0.3674	0.7541	0.3679	0.7358
2	0.1544	0.9451	0.1647	0.9371	0.1745	0.9287	0.1839	0.9197
3	0.0437	0.9889	0.0494	0.9865	0.0553	0.9839	0.0613	0.981
4	0.0093	0.9982	0.0111	0.9977	0.0131	0.9971	0.0153	0.9963
5	0.0016	0.9997	0.002	0.9997	0.0025	0.9995	0.0031	0.9994
6	0.0002	1	0.0003	1	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999
7	3E-05	1	4E-05	1	5E-05	1	7E-05	1
8	3E-06	1	4E-06	1	6E-06	1	9E-06	1

k \ a	1.05 P(k,a)	1.05 R(K,a)	1.1 P(k,a)	1.1 R(K,a)	1.15 P(k,a)	1.15 R(K,a)	1.2 P(k,a)	1.2 R(K,a)
0	0.3499	0.3499	0.3329	0.3329	0.3166	0.3166	0.3012	0.3012
1	0.3674	0.7174	0.3662	0.699	0.3641	0.6808	0.3614	0.6626
2	0.1929	0.9103	0.2014	0.9004	0.2094	0.8901	0.2169	0.8795
3	0.0675	0.9778	0.0738	0.9743	0.0803	0.9704	0.0867	0.9662
4	0.0177	0.9955	0.0203	0.9946	0.0231	0.9935	0.026	0.9923
5	0.0037	0.9992	0.0045	0.999	0.0053	0.9988	0.0062	0.9985
6	0.0007	0.9999	0.0008	0.9999	0.001	0.9998	0.0012	0.9997
7	1E-04	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0002	1
8	1E-05	1	2E-05	1	2E-05	1	3E-05	1

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

a	1.25		1.3		1.35		1.4	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.2865	0.2865	0.2725	0.2725	0.2592	0.2592	0.2466	0.2466
1	0.3581	0.6446	0.3543	0.6268	0.35	0.6092	0.3452	0.5918
2	0.2238	0.8685	0.2303	0.8571	0.2362	0.8454	0.2417	0.8335
3	0.0933	0.9617	0.0998	0.9569	0.1063	0.9518	0.1128	0.9463
4	0.0291	0.9909	0.0324	0.9893	0.0359	0.9876	0.0395	0.9857
5	0.0073	0.9982	0.0084	0.9978	0.0097	0.9973	0.0111	0.9968
6	0.0015	0.9997	0.0018	0.9996	0.0022	0.9995	0.0026	0.9994
7	0.0003	1	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999
8	4E-05	1	6E-05	1	7E-05	1	9E-05	1

a	1.45		1.5		1.55		1.6	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.2346	0.2346	0.2231	0.2231	0.2122	0.2122	0.2019	0.2019
1	0.3401	0.5747	0.3347	0.5578	0.329	0.5412	0.323	0.5249
2	0.2466	0.8213	0.251	0.8088	0.255	0.7962	0.2584	0.7834
3	0.1192	0.9405	0.1255	0.9344	0.1317	0.9279	0.1378	0.9212
4	0.0432	0.9837	0.0471	0.9814	0.051	0.979	0.0551	0.9763
5	0.0125	0.9962	0.0141	0.9955	0.0158	0.9948	0.0176	0.994
6	0.003	0.9992	0.0035	0.9991	0.0041	0.9989	0.0047	0.9987
7	0.0006	0.9999	0.0008	0.9998	0.0009	0.9998	0.0011	0.9997
8	0.0001	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0002	1
9	2E-05	1	2E-05	1	3E-05	1	4E-05	1

a	1.65		1.7		1.75		1.8	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.192	0.192	0.1827	0.1827	0.1738	0.1738	0.1653	0.1653
1	0.3169	0.5089	0.3106	0.4932	0.3041	0.4779	0.2975	0.4628
2	0.2614	0.7704	0.264	0.7572	0.2661	0.744	0.2678	0.7306
3	0.1438	0.9141	0.1496	0.9068	0.1552	0.8992	0.1607	0.8913
4	0.0593	0.9735	0.0636	0.9704	0.0679	0.9671	0.0723	0.9636
5	0.0196	0.993	0.0216	0.992	0.0238	0.9909	0.026	0.9896
6	0.0054	0.9984	0.0061	0.9981	0.0069	0.9978	0.0078	0.9974
7	0.0013	0.9997	0.0015	0.9996	0.0017	0.9995	0.002	0.9994
8	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999
9	5E-05	1	6E-05	1	7E-05	1	9E-05	1

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

a	1.85		1.9		1.95		2	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.1572	0.1572	0.1496	0.1496	0.1423	0.1423	0.1353	0.1353
1	0.2909	0.4481	0.2842	0.4337	0.2774	0.4197	0.2707	0.406
2	0.2691	0.7172	0.27	0.7037	0.2705	0.6902	0.2707	0.6767
3	0.1659	0.8831	0.171	0.8747	0.1758	0.866	0.1804	0.8571
4	0.0767	0.9599	0.0812	0.9559	0.0857	0.9517	0.0902	0.9473
5	0.0284	0.9883	0.0309	0.9868	0.0334	0.9852	0.0361	0.9834
6	0.0088	0.997	0.0098	0.9966	0.0109	0.996	0.012	0.9955
7	0.0023	0.9993	0.0027	0.9992	0.003	0.9991	0.0034	0.9989
8	0.0005	0.9999	0.0006	0.9998	0.0007	0.9998	0.0009	0.9998
9	0.0001	1	0.0001	1	0.0002	1	0.0002	1

a	2.05		2.1		2.15		2.2	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.1287	0.1287	0.1225	0.1225	0.1165	0.1165	0.1108	0.1108
1	0.2639	0.3926	0.2572	0.3796	0.2504	0.3669	0.2438	0.3546
2	0.2705	0.6631	0.27	0.6496	0.2692	0.6361	0.2681	0.6227
3	0.1848	0.848	0.189	0.8386	0.1929	0.8291	0.1966	0.8194
4	0.0947	0.9427	0.0992	0.9379	0.1037	0.9328	0.1082	0.9275
5	0.0388	0.9816	0.0417	0.9796	0.0446	0.9774	0.0476	0.9751
6	0.0133	0.9948	0.0146	0.9941	0.016	0.9934	0.0174	0.9925
7	0.0039	0.9987	0.0044	0.9985	0.0049	0.9983	0.0055	0.998
8	0.001	0.9997	0.0011	0.9997	0.0013	0.9996	0.0015	0.9995
9	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999
10	5E-05	1	6E-05	1	7E-05	1	8E-05	1

a	2.25		2.3		2.35		2.4	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.1054	0.1054	0.1003	0.1003	0.0954	0.0954	0.0907	0.0907
1	0.2371	0.3425	0.2306	0.3309	0.2241	0.3195	0.2177	0.3084
2	0.2668	0.6093	0.2652	0.596	0.2633	0.5828	0.2613	0.5697
3	0.2001	0.8094	0.2033	0.7993	0.2063	0.7891	0.209	0.7787
4	0.1126	0.922	0.1169	0.9162	0.1212	0.9103	0.1254	0.9041
5	0.0506	0.9726	0.0538	0.97	0.057	0.9673	0.0602	0.9643
6	0.019	0.9916	0.0206	0.9906	0.0223	0.9896	0.0241	0.9884
7	0.0061	0.9977	0.0068	0.9974	0.0075	0.9971	0.0083	0.9967
8	0.0017	0.9994	0.0019	0.9994	0.0022	0.9993	0.0025	0.9991
9	0.0004	0.9999	0.0005	0.9999	0.0006	0.9998	0.0007	0.9998
10	1E-04	1	0.0001	1	0.0001	1	0.0002	1

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

a	2.45		2.5		2.55		2.6	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.0863	0.0863	0.0821	0.0821	0.0781	0.0781	0.0743	0.0743
1	0.2114	0.2977	0.2052	0.2873	0.1991	0.2772	0.1931	0.2674
2	0.259	0.5567	0.2565	0.5438	0.2539	0.5311	0.251	0.5184
3	0.2115	0.7682	0.2138	0.7576	0.2158	0.7468	0.2176	0.736
4	0.1295	0.8978	0.1336	0.8912	0.1376	0.8844	0.1414	0.8774
5	0.0635	0.9612	0.0668	0.958	0.0702	0.9546	0.0735	0.951
6	0.0259	0.9872	0.0278	0.9858	0.0298	0.9844	0.0319	0.9828
7	0.0091	0.9962	0.0099	0.9958	0.0109	0.9952	0.0118	0.9947
8	0.0028	0.999	0.0031	0.9989	0.0035	0.9987	0.0038	0.9985
9	0.0008	0.9998	0.0009	0.9997	0.001	0.9997	0.0011	0.9996
10	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999
11	4E-05	1	5E-05	1	6E-05	1	7E-05	1

a	2.65		2.7		2.75		2.8	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.0707	0.0707	0.0672	0.0672	0.0639	0.0639	0.0608	0.0608
1	0.1872	0.2579	0.1815	0.2487	0.1758	0.2397	0.1703	0.2311
2	0.2481	0.506	0.245	0.4936	0.2417	0.4815	0.2384	0.4695
3	0.2191	0.7251	0.2205	0.7141	0.2216	0.703	0.2225	0.6919
4	0.1452	0.8703	0.1488	0.8629	0.1523	0.8554	0.1557	0.8477
5	0.0769	0.9472	0.0804	0.9433	0.0838	0.9392	0.0872	0.9349
6	0.034	0.9812	0.0362	0.9794	0.0384	0.9776	0.0407	0.9756
7	0.0129	0.994	0.0139	0.9934	0.0151	0.9927	0.0163	0.9919
8	0.0043	0.9983	0.0047	0.9981	0.0052	0.9978	0.0057	0.9976
9	0.0013	0.9996	0.0014	0.9995	0.0016	0.9994	0.0018	0.9993
10	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0004	0.9999	0.0005	0.9998
11	8E-05	1	9E-05	1	0.0001	1	0.0001	1

a	2.85		2.9		2.95		3	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.0578	0.0578	0.055	0.055	0.0523	0.0523	0.0498	0.0498
1	0.1649	0.2227	0.1596	0.2146	0.1544	0.2067	0.1494	0.1991
2	0.2349	0.4576	0.2314	0.446	0.2277	0.4345	0.224	0.4232
3	0.2232	0.6808	0.2237	0.6696	0.2239	0.6584	0.224	0.6472
4	0.159	0.8398	0.1622	0.8318	0.1652	0.8236	0.168	0.8153
5	0.0906	0.9304	0.094	0.9258	0.0974	0.921	0.1008	0.9161
6	0.0431	0.9735	0.0455	0.9713	0.0479	0.9689	0.0504	0.9665
7	0.0175	0.991	0.0188	0.9901	0.0202	0.9891	0.0216	0.9881
8	0.0062	0.9973	0.0068	0.9969	0.0074	0.9966	0.0081	0.9962
9	0.002	0.9992	0.0022	0.9991	0.0024	0.999	0.0027	0.9989
10	0.0006	0.9998	0.0006	0.9998	0.0007	0.9997	0.0008	0.9997
11	0.0001	1	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

a / k	3.05 P(k,a)	3.05 R(K,a)	3.1 P(k,a)	3.1 R(K,a)	3.15 P(k,a)	3.15 R(K,a)	3.2 P(k,a)	3.2 R(K,a)
0	0.0474	0.0474	0.045	0.045	0.0429	0.0429	0.0408	0.0408
1	0.1444	0.1918	0.1397	0.1847	0.135	0.1778	0.1304	0.1712
2	0.2203	0.4121	0.2165	0.4012	0.2126	0.3904	0.2087	0.3799
3	0.2239	0.636	0.2237	0.6248	0.2232	0.6137	0.2226	0.6025
4	0.1708	0.8068	0.1733	0.7982	0.1758	0.7895	0.1781	0.7806
5	0.1042	0.911	0.1075	0.9057	0.1108	0.9002	0.114	0.8946
6	0.053	0.9639	0.0555	0.9612	0.0581	0.9584	0.0608	0.9554
7	0.0231	0.987	0.0246	0.9858	0.0262	0.9845	0.0278	0.9832
8	0.0088	0.9958	0.0095	0.9953	0.0103	0.9948	0.0111	0.9943
9	0.003	0.9988	0.0033	0.9986	0.0036	0.9984	0.004	0.9982
10	0.0009	0.9997	0.001	0.9996	0.0011	0.9996	0.0013	0.9995
11	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999

a / k	3.25 P(k,a)	3.25 R(K,a)	3.3 P(k,a)	3.3 R(K,a)	3.35 P(k,a)	3.35 R(K,a)	3.4 P(k,a)	3.4 R(K,a)
0	0.0388	0.0388	0.0369	0.0369	0.0351	0.0351	0.0334	0.0334
1	0.126	0.1648	0.1217	0.1586	0.1175	0.1526	0.1135	0.1468
2	0.2048	0.3696	0.2008	0.3594	0.1969	0.3495	0.1929	0.3397
3	0.2218	0.5914	0.2209	0.5803	0.2198	0.5693	0.2186	0.5584
4	0.1802	0.7717	0.1823	0.7626	0.1841	0.7534	0.1858	0.7442
5	0.1172	0.8888	0.1203	0.8829	0.1234	0.8768	0.1264	0.8705
6	0.0635	0.9523	0.0662	0.949	0.0689	0.9457	0.0716	0.9421
7	0.0295	0.9817	0.0312	0.9802	0.033	0.9786	0.0348	0.9769
8	0.012	0.9937	0.0129	0.9931	0.0138	0.9924	0.0148	0.9917
9	0.0043	0.998	0.0047	0.9978	0.0051	0.9976	0.0056	0.9973
10	0.0014	0.9994	0.0016	0.9994	0.0017	0.9993	0.0019	0.9992
11	0.0004	0.9999	0.0005	0.9998	0.0005	0.9998	0.0006	0.9998

a / k	3.45 P(k,a)	3.45 R(K,a)	3.5 P(k,a)	3.5 R(K,a)	3.55 P(k,a)	3.55 R(K,a)	3.6 P(k,a)	3.6 R(K,a)
0	0.0317	0.0317	0.0302	0.0302	0.0287	0.0287	0.0273	0.0273
1	0.1095	0.1413	0.1057	0.1359	0.102	0.1307	0.0984	0.1257
2	0.1889	0.3302	0.185	0.3208	0.181	0.3117	0.1771	0.3027
3	0.2173	0.5475	0.2158	0.5366	0.2142	0.5259	0.2125	0.5152
4	0.1874	0.7349	0.1888	0.7254	0.1901	0.716	0.1912	0.7064
5	0.1293	0.8642	0.1322	0.8576	0.135	0.8509	0.1377	0.8441
6	0.0743	0.9385	0.0771	0.9347	0.0799	0.9308	0.0826	0.9267
7	0.0366	0.9751	0.0385	0.9733	0.0405	0.9713	0.0425	0.9692
8	0.0158	0.9909	0.0169	0.9901	0.018	0.9893	0.0191	0.9883
9	0.0061	0.997	0.0066	0.9967	0.0071	0.9963	0.0076	0.996
10	0.0021	0.9991	0.0023	0.999	0.0025	0.9989	0.0028	0.9987
11	0.0007	0.9997	0.0007	0.9997	0.0008	0.9997	0.0009	0.9996
12	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

k \ a	3.65		3.7		3.75		3.8	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.026	0.026	0.0247	0.0247	0.0235	0.0235	0.0224	0.0224
1	0.0949	0.1209	0.0915	0.1162	0.0882	0.1117	0.085	0.1074
2	0.1731	0.294	0.1692	0.2854	0.1654	0.2771	0.1615	0.2689
3	0.2106	0.5046	0.2087	0.4942	0.2067	0.4838	0.2046	0.4735
4	0.1922	0.6969	0.1931	0.6872	0.1938	0.6775	0.1944	0.6678
5	0.1403	0.8372	0.1429	0.8301	0.1453	0.8229	0.1477	0.8156
6	0.0854	0.9225	0.0881	0.9182	0.0908	0.9137	0.0936	0.9091
7	0.0445	0.967	0.0466	0.9648	0.0487	0.9624	0.0508	0.9599
8	0.0203	0.9873	0.0215	0.9863	0.0228	0.9852	0.0241	0.984
9	0.0082	0.9956	0.0089	0.9952	0.0095	0.9947	0.0102	0.9942
10	0.003	0.9986	0.0033	0.9984	0.0036	0.9983	0.0039	0.9981
11	0.001	0.9996	0.0011	0.9995	0.0012	0.9995	0.0013	0.9994
12	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0004	0.9999	0.0004	0.9998
13	9E-05	1	1E-04	1	0.0001	1	0.0001	1

k \ a	3.85		3.9		3.95		4	
k	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)	P(k,a)	R(K,a)
0	0.0213	0.0213	0.0202	0.0202	0.0193	0.0193	0.0183	0.0183
1	0.0819	0.1032	0.0789	0.0992	0.0761	0.0953	0.0733	0.0916
2	0.1577	0.2609	0.1539	0.2531	0.1502	0.2455	0.1465	0.2381
3	0.2024	0.4633	0.2001	0.4532	0.1978	0.4433	0.1954	0.4335
4	0.1948	0.6581	0.1951	0.6484	0.1953	0.6336	0.1954	0.6288
5	0.15	0.8081	0.1522	0.8006	0.1543	0.7929	0.1563	0.7851
6	0.0962	0.9044	0.0989	0.8995	0.1016	0.8945	0.1042	0.8893
7	0.0529	0.9573	0.0551	0.9546	0.0573	0.9518	0.0595	0.9489
8	0.0255	0.9828	0.0269	0.9815	0.0283	0.9801	0.0298	0.9786
9	0.0109	0.9937	0.0116	0.9931	0.0124	0.9925	0.0132	0.9919
10	0.0042	0.0979	0.0045	0.9977	0.0049	0.9974	0.0053	0.9972
11	0.0015	0.9993	0.0016	0.9993	0.0018	0.9992	0.0019	0.9991
12	0.0005	0.9998	0.0005	0.9998	0.0006	0.9998	0.0006	0.9997
13	0.0001	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999
14	4E-05	1	4E-05	1	5E-05	1	6E-05	1

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

a / k	4.05 P(k,a)	4.05 R(K,a)	4.1 P(k,a)	4.1 R(K,a)	4.15 P(k,a)	4.15 R(K,a)	4.2 P(k,a)	4.2 R(K,a)
0	0.0174	0.0174	0.0166	0.0166	0.0158	0.0158	0.015	0.015
1	0.0706	0.088	0.0679	0.0845	0.0654	0.0812	0.063	0.078
2	0.1429	0.2309	0.1393	0.2238	0.1358	0.2169	0.1323	0.2102
3	0.1929	0.4238	0.1904	0.4142	0.1878	0.4047	0.1852	0.3954
4	0.1953	0.6191	0.1951	0.6093	0.1948	0.5996	0.1944	0.5898
5	0.1582	0.7773	0.16	0.7693	0.1617	0.7613	0.1633	0.7531
6	0.1068	0.8841	0.1093	0.8786	0.1118	0.8731	0.1143	0.8675
7	0.0618	0.9458	0.064	0.9427	0.0663	0.9394	0.0686	0.9361
8	0.0313	0.9771	0.0328	0.9755	0.0344	0.9738	0.036	0.9721
9	0.0141	0.9912	0.015	0.9905	0.0159	0.9897	0.0168	0.9889
10	0.0057	0.9969	0.0061	0.9966	0.0066	0.9963	0.0071	0.9959
11	0.0021	0.999	0.0023	0.9989	0.0025	0.9988	0.0027	0.9986
12	0.0007	0.9997	0.0008	0.9997	0.0009	0.9996	0.0009	0.9996
13	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999
14	6E-05	1	7E-05	1	8E-05	1	9E-05	1

a / k	4.25 P(k,a)	4.25 R(K,a)	4.3 P(k,a)	4.3 R(K,a)	4.35 P(k,a)	4.35 R(K,a)	4.4 P(k,a)	4.4 R(K,a)
0	0.0143	0.0143	0.0136	0.0136	0.0129	0.0129	0.0123	0.0123
1	0.0606	0.0749	0.0583	0.0719	0.0561	0.0691	0.054	0.0663
2	0.1288	0.2037	0.1254	0.1974	0.1221	0.1912	0.1188	0.1851
3	0.1825	0.3862	0.1798	0.3772	0.1771	0.3682	0.1743	0.3594
4	0.1939	0.5801	0.1933	0.5704	0.1926	0.5608	0.1917	0.5512
5	0.1648	0.7449	0.1662	0.7367	0.1675	0.7283	0.1687	0.7199
6	0.1167	0.8617	0.1191	0.8558	0.1215	0.8498	0.1237	0.8436
7	0.0709	0.9326	0.0732	0.929	0.0755	0.9253	0.0778	0.9214
8	0.0377	0.9702	0.0393	0.9683	0.041	0.9663	0.0428	0.9642
9	0.0178	0.988	0.0188	0.9871	0.0198	0.9861	0.0209	0.9851
10	0.0076	0.9956	0.0081	0.9952	0.0086	0.9948	0.0092	0.9943
11	0.0029	0.9985	0.0032	0.9983	0.0034	0.9982	0.0037	0.998
12	0.001	0.9995	0.0011	0.9995	0.0012	0.9994	0.0013	0.9993
13	0.0003	0.9999	0.0004	0.9998	0.0004	0.9998	0.0005	0.9998
14	0.0001	1	0.0001	1	0.0001	0.9999	0.0001	0.9999
15	3E-05	1	3E-05	1	4E-05	1	4E-05	1

BẢNG GIÁ TRỊ PHÂN PHỐI POISSON

k \ a	4.45 P(k,a)	4.45 R(K,a)	4.5 P(k,a)	4.5 R(K,a)	4.55 P(k,a)	4.55 R(K,a)	4.6 P(k,a)	4.6 R(K,a)
0	0.0117	0.0117	0.0111	0.0111	0.0106	0.0106	0.0101	0.0101
1	0.052	0.0636	0.05	0.0611	0.0481	0.0586	0.0462	0.0563
2	0.1156	0.1793	0.1125	0.1736	0.1094	0.168	0.1063	0.1626
3	0.1715	0.3508	0.1687	0.3423	0.1659	0.3339	0.1631	0.3257
4	0.1908	0.5416	0.1898	0.5321	0.1887	0.5226	0.1875	0.5132
5	0.1698	0.7114	0.1708	0.7029	0.1717	0.6944	0.1725	0.6858
6	0.126	0.8374	0.1281	0.8311	0.1302	0.8246	0.1323	0.818
7	0.0801	0.9175	0.0824	0.9134	0.0846	0.9092	0.0869	0.9049
8	0.0445	0.962	0.0463	0.9597	0.0481	0.9574	0.05	0.9549
9	0.022	0.984	0.0232	0.9829	0.0243	0.9817	0.0255	0.9805
10	0.0098	0.9938	0.0104	0.9933	0.0111	0.9928	0.0118	0.9922
11	0.004	0.9978	0.0043	0.9976	0.0046	0.9974	0.0049	0.9971
12	0.0015	0.9993	0.0016	0.9992	0.0017	0.9991	0.0019	0.999
13	0.0005	0.9998	0.0006	0.9997	0.0006	0.9997	0.0007	0.9997
14	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999	0.0002	0.9999
15	5E-05	1	5E-05	1	6E-05	1	7E-05	1

k \ a	4.65 P(k,a)	4.65 R(K,a)	4.7 P(k,a)	4.7 R(K,a)	4.75 P(k,a)	4.75 R(K,a)	4.8 P(k,a)	4.8 R(K,a)
0	0.0096	0.0096	0.0091	0.0091	0.0087	0.0087	0.0082	0.0082
1	0.0445	0.054	0.0427	0.0518	0.0411	0.0497	0.0395	0.0477
2	0.1034	0.1574	0.1005	0.1523	0.0976	0.1473	0.0948	0.1425
3	0.1602	0.3176	0.1574	0.3097	0.1545	0.3019	0.1517	0.2942
4	0.1863	0.5039	0.1849	0.4946	0.1835	0.4854	0.182	0.4763
5	0.1732	0.6771	0.1738	0.6684	0.1743	0.6597	0.1747	0.651
6	0.1343	0.8114	0.1362	0.8046	0.138	0.7978	0.1398	0.7908
7	0.0892	0.9005	0.0914	0.896	0.0937	0.8914	0.0959	0.8867
8	0.0518	0.9524	0.0537	0.9497	0.0556	0.947	0.0575	0.9442
9	0.0268	0.9792	0.0281	0.9778	0.0293	0.9764	0.0307	0.9749
10	0.0125	0.9916	0.0132	0.991	0.0139	0.9903	0.0147	0.9896
11	0.0053	0.9969	0.0056	0.9966	0.006	0.9963	0.0064	0.996
12	0.002	0.9989	0.0022	0.9988	0.0024	0.9987	0.0026	0.9986
13	0.0007	0.9997	0.0008	0.9996	0.0009	0.9996	0.0009	0.9995
14	0.0002	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999
15	8E-05	1	8E-05	1	9E-05	1	0.0001	1

Với a lớn sử dụng xấp xỉ chuẩn nhờ phép đổi biến: $U = \dfrac{X - a}{\sqrt{a}}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1- Giáo trình các phương pháp toán kinh tế. Đại học kinh tế quốc dân, 1987.

2- Nguyễn Cao Văn - Trần Thái Ninh: Giáo trình lý thuyết xác suất và thống kê toán. NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1996.

3- Hoàng Tuy: Lý thuyết hệ thống và ứng dụng. NXB Giáo dục, 1987.

4- Vũ Thiếu: Giáo trình qui hoạch phi tuyến và ứng dụng (Đại học KTQD, 1995).

5- Nguyễn Quang Dong- Ngô Văn Thứ- Hoàng Đình Tuấn: Giáo trình phương pháp toán kinh tế (1998).

6- Lưu Ngọc Cơ - Ngô Văn Thứ: Bài tập mô hình toán kinh tế ((Đại học KTQD, 1998).

7- Claude berge: Lý thuyết đồ thị và ứng dụng. Bản dịch NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1972.

8- Hoàng Chúng: Toán hữu hạn. Nhà xuất bản giáo dục, 1984.

9- Chu Tân : Bài giảng lý thuyết đồ thị và phương pháp sơ đồ mạng lưới.

10- A.T. Ventxel: Giáo trình lý thuyết xác suất và quá trình ngẫu nhiên. NXB Đại học và THCN. 1987.

11- T. A.Caatu: Lý thuyết phục vụ công cộng và ứng dụng (Bản tiếng Nga).1971.

12- Fredic S.Mishkin: The economis of Money, Banking and Financial Markets.Harper Collins,1992.

13- Alpha.C.Chiang: Fundamental methods of mathematical economics. McCraw-Hill book company- Singapore, 1985.

14- Ernest F.Haeusseler.Jr- Richard S.Paul: Introductory mathematical analysis. Pretice- Hall International, Inc.

15- Bùi Thế Tâm- Võ Văn Tuấn Dũng: Turbo Pascal 7.0. NXB Thống kê 1996.

16- Bellman R.E: Dynamic programming.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN
KHOA TOÁN KINH TẾ
NGÔ VĂN THỨ

GIÁO TRÌNH

MÔ HÌNH TOÁN ỨNG DỤNG

(CÓ HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG PHẦN MỀM)

Chịu trách nhiệm xuất bản : **PGS.TS. Tô Đăng Hải**

Biên tập : **Th.S. Vũ Thị Minh Luận**

Trình bày bìa : **Hương Lan**

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 - Trần Hưng Đạo, Hà Nội

In 700 bản, khổ 16 x 24cm, tại Nhà in Hà Nội thuộc Công ty Phát hành sách Hà Nội. Giấy phép xuất bản số: 06-18 cấp ngày 6/12/2004. In xong và nộp lưu chiểu tháng 1/2005.

205014

8 935048 943069

Giá: 34.000đ