Hè 2008

Nguyễn Văn Mậu (*Chủ biên*)

TOÁN RỜI RẠC
VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

(Tài liệu bồi dưỡng hè 2007)

HÀ NỘI, 05-14 THÁNG 8 NĂM 2007

Lời nói đầu

Trên bốn mươi năm thực hiện "Chương trình đào tạo và bồi học sinh năng khiếu toán bậc phổ thông" là một chặng đường của một chu trình đặc biệt gắn với sự khởi đầu, trưởng thành và ngày càng hoàn thiện xuất phát từ một mô hình đào tạo năng khiếu Tóan học đặc biệt tại Đại học Tổng hợp Hà Nội. Hướng đào tạo mũi nhọn này mang tính đột phá cao, đã đào tạo ra các thế hệ học sinh có năng khiếu trong lĩnh vực toán học, tin học và khoa học tự nhiên: Vật lý, Hoá học, Sinh học và khoa học sự sống. Trong điều kiện thiếu thốn về vật chất kéo dài qua nhiều thập kỷ và trải qua nhiều thách thức, chúng ta đã tìm ra hướng đi phù hợp, đã đi lên vững chắc và ổn định, đã tìm tòi, tích luỹ kinh nghiệm và có nhiều sáng tạo đáng ghi nhận. Các thế hệ Thầy và Trò đã định hình và tiếp cận với thế giới văn minh tiên tiến và khoa học hiện đại, cập nhật thông tin, sáng tạo phương pháp và tập dượt nghiên cứu. Gắn với việc tích cực đổi mới phương pháp dạy và học, chương trình đào tạo chuyên Toán đang hướng tới xây dựng hệ thống chuyên đề, đang nỗ lực và đã tổ chức thành công Kỳ thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 48, năm 2007 tại Việt Nam, được bạn bè quốc tế ca ngợi.

Sau gần nửa thế kỷ hình thành và phát triển, có thể nói, giáo dục mũi nhọn phổ thông (giáo dục năng khiếu) đã thu được những thành tựu rực rỡ, được Nhà nước đầu tư có hiệu quả, được xã hội thừa nhận và bạn bè quốc tế khâm phục. Các đội tuyển quốc gia tham dự các kỳ thi Olympic quốc tế có bề dày thành tích mang tính ổn định và có tính kế thừa. Đặc biệt, năm nay, các Đội tuyển Toán và Tin quốc gia tham dự thi Olympic quốc tế đã đạt được thành tích nổi bật. Đội tuyển Toán Việt Nam đã vươn lên đứng thứ ba (theo sự sắp xếp không chính thức) trong số 95 đội tuyển các nước tham dự IMO48.

Từ nhiều năm nay, các hệ năng khiếu Toán học và các Trường THPT Chuyên thường sử dụng song song các sách giáo khoa đại trà kết hợp với sách giáo khoa chuyên biệt và sách chuyên đề cho các Hệ THPT Chuyên. Học sinh các lớp năng khiếu đã tiếp thu tốt các kiến thức cơ bản theo thời lượng hiện hành do Bộ GD và ĐT ban hành.

Hiện nay, chương trình cải cách giáo dục đang bước vào giai đoạn hoàn chỉnh bộ SGK mới. Thời lượng kiến thức cũng như trật tự kiến thức cơ bản có những thay đổi đáng kể. Các kiến thức này đang được cân nhắc để nó vẫn nằm trong khuôn khổ hiện hành của các kiến thức nâng cao đối với các lớp chuyên toán. Vì lẽ đó, việc tiến hành viết hệ thống các sách chuyên đề cho các lớp năng khiếu cần được tiến hành khẩn trương và được xem xét toàn diện từ phía các chuyên gia giáo dục và các cô giáo, thầy giáo đang trực tiếp giảng dạy các lớp chuyên.

Được sự cho phép của Bộ GD và ĐT, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQGHN phối hợp cùng với các chuyên gia, các nhà khoa học, các cô giáo, thầy giáo thuộc ĐHSPHN, ĐHQG TpHCM, Viện Toán Học, Hội Toán Học Hà Nội, Tạp Chí Toán Học và Tuổi Trẻ, các Trường THPT Chuyên, Các Sở GD và ĐT,... tổ chức bồi dưỡng các chuyên đề nghiệp vụ sau đại học nhằm bồi dưỡng học sinh giỏi các môn Toán học và khối kiến thức khoa học tự nhiên như là một tủ sách đặc biệt phục vụ bồi dưỡng học sinh giỏi.

Chúng tôi xin giới thiệu cuốn sách của nhóm các chuyên gia, các thầy giáo với sự tham gia đông đảo của các đồng nghiệp tham dự Trường hè 2007 về chuyên đề "Tóan rời rạc và một số vấn đề liên quan".

Cuốn sách này nhằm cung cấp một số kiến thức chuyên đề bất đẳng thức ở mức độ khó về tóan rời rạc, đại số, số học, và giải tích. Đây cũng là chuyên đề và bài giảng mà các tác giả đã giảng dạy cho học sinh các đội tuyển thi Olympíc Toán học quốc gia và quốc tế.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn các bạn đọc cho những ý kiến đóng góp để cuốn sách ngày càng hoàn chỉnh.

Thay mặt Ban Tổ Chức

GS TSKH Nguyễn Văn Mậu

Mục lục

Đồ thị tô màu và một số bài toán không mẫu mực

Đặng Huy Ruận

Lý thuyết đồ thị nói chung, đặc biệt đồ thị tô màu được vận dụng để giải các *bài toán không mẫu mực* rất hiệu quả.

Để giải toán thông qua đồ thị cần thực hiện theo hai bước:

Đầu tiên xây dựng đồ thị để mô tả các quan hệ, điều kiện được phát biểu trong bài toán. Sau đó căn cứ vào các khẳng định của lý thuyết đồ thị để suy ra đáp án.

Trong phần này chỉ đề cập đến việc thông qua đồ thị tô màu để giải một số dạng *toán không mẫu mực*.

Đối với mỗi dạng *toán không mẫu mực* đều đưa ra khẳng định tương ứng về đồ thị tô màu để có thể vận dụng giải quyết hàng loạt bài toán thuộc dạng được xét.

Đồ thị được gọi là đầy đủ, nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều được nối bằng một cạnh. Đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh.

Đồ thị đầy đủ gồm 3 đỉnh (4 đỉnh) với các cạnh được tô màu bằng cùng một màu được gọi là tam giác (tứ giác) cùng màu.

1 Dạng 1

1.1 Bài toán

Bài toán 1 *(Đề thi Olympic Toán Quốc tế) Mười bảy nhà bác học viết thư cho nhau. Mỗi người đều viết thư cho tất cả người khác. Các thư chỉ trao đổi về 3 đề tài. Từng cặp nhà bác học chỉ viết thư trao đổi về cùng một đề tài. Chứng minh rằng chỉ có ít nhất 3 nhà bác học viết thư cho nhau trao đổi về cùng một vấn đề.*

Bài toán 2 *Trong một cuộc gặp gỡ quốc tế có 17 nhà ngoại giao tham gia. Mỗi cặp nhà ngoại giao chỉ trao đổi trực tiếp với nhau bằng một trong ba ngôn ngữ: Anh, Pháp, Đức.*

Chứng minh rằng luôn luôn tìm được ba nhà ngoại giao, mà họ có thể trao đổi trực tiếp được bằng một trong ba ngôn ngữ kể trên.

Bài toán 3 *Mỗi cặp đối tượng cho trước chỉ có một trong ba quan hệ: t_1, t_2, t_3. Chứng minh rằng luôn luôn tìm được ba đối tượng, mà mỗi cặp trong bộ ba này cùng có quan hệ t_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ đã cho.*

1.2 Khẳng định

Sau đây xét lớp đồ thị có chứa tam giác cùng màu.

Với các dãy số nguyên dương:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3, \ldots, a_{n+1} = (n+1).a_n + 1; \tag{1}$$
$$b_2 = 3,\ b_3 = 6, \ldots, b_{n+1} = (b_n - 1).n + 2 \tag{2}$$

có các khẳng định sau đây:

Khẳng định 1 *a) Đồ thị đầy đủ có $a_n + 1$ đỉnh với n màu cạnh luôn luôn có đồ thị con đầy đủ K_3 với cạnh cùng màu (tam giác cùng màu).*
b) Đồ thị đầy đủ có b_{n+1} đỉnh với n màu cạnh luôn luôn có đồ thị con đầy đủ K_3 với cạnh cùng màu.

Chứng minh. Khẳng định a) chứng minh bằng quy nạp theo chỉ số n.

1) Cơ sở quy nạp: $n = 1$. Đồ thị đầy đủ tương ứng gồm $a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ đỉnh lập thành một chu trình tam giác. Các cạnh của đồ thị này được tô bằng một màu, nên chu trình tam giác lập nên G_1 cùng màu.

2) Quy nạp: Giả sử khẳng định đã đúng với $n = k$, nghĩa là, đồ thị đầy đủ bất kỳ G_k gồm $a_k + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng k màu đã có chu trình tam giác cùng màu. Cần chứng tỏ khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Xét đồ thị đầy đủ tùy ý G_{k+1} với $a_{k+1} + 1$ đỉnh và các cạnh được tô bằng $k + 1$ màu.

Giả sử P là một đỉnh tùy ý của G_{k+1}. Khi đó P được nối với $a_{k+1} = (k+1)a_k + 1$ đỉnh bởi các cạnh được tô bằng không quá $k + 1$ màu, nên xuất phát từ P phải có ít nhất $a_k + 1$ cạnh được tô bằng cùng một màu. Giả sử màu này là màu đỏ và các cạnh $PA_1, PA_2, \ldots, PA_{a_k+1}$ được tô màu đỏ. Có hai khả năng xảy ra:

1°) Nếu một trong các cạnh nối giữa các đỉnh A_i, A_j $(1 \leqslant i,\ j \leqslant a_k + 1)$ được tô màu đỏ, chẳng hạn cạnh (A_1, A_2) màu đỏ. Khi đó chu trình tam giác A_1PA_2 màu đỏ, nên đồ thị G_{k+1} có chu trình tam giác màu đỏ.

2°) Trường hợp ngược lại, không có cạnh nào trong các cạnh (A_i, A_j) $(1 \leqslant i, j \leqslant a_k+1)$ được tô màu đỏ. Khi đó đồ thị con đầy đủ G_k với tập đỉnh $\{A_1, A_2, \ldots, A_{a_k}, A_{a_k+1}\}$ có các cạnh được tô bằng không quá k màu, nên theo giả thiết quy nạp G_k có chu trình tam giác cùng màu. Bởi vậy G_{k+1} có chu trình tam giác cùng màu.

Khẳng định được chứng minh.

Khẳng định b) chứng minh tương tự.

1.3 Giải toán

1°) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

Các đồ thị tương ứng với ba bài toán đã cho được xây dựng như sau:

a) Đỉnh: Lấy 17 điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với 17 nhà bác học (17 nhà ngoại giao, 17 đối tượng đã cho). Dùng ngay tên các nhà bác học (nhà ngoại giao, đối tượng đã cho) để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh: Dùng

- Cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với Hai nhà bác học trao đổi vấn đề thứ nhất (Hai nhà ngoại giao trao đổi trực tiếp được bằng tiếng Anh; Hai đối tượng có quan hệ t_1);

- Cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với Hai nhà bác học trao đổi vấn đề thứ hai (Hai nhà ngoại giao trao đổi trực tiếp được bằng tiếng Pháp; Hai đối tượng có quan hệ t_2);

- Cạnh vàng để nối giữa hai đỉnh tương ứng với Hai nhà bác học trao đổi vấn đề thứ ba (Hai nhà ngoại giao trao đổi trực tiếp được bằng tiếng Đức; Hai đối tượng có quan hệ t_3).

Đồ thị G_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) mô tả toàn bộ quan hệ điều kiện được cho trong bài toán i.
2°) Suy ra đáp án.

Theo khẳng định 1, trong các đồ thị G_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) đều có tam giác cùng màu. Nếu tam giác này

- Màu đỏ, thì Ba nhà bác học tương ứng trao đổi về vấn đề thứ nhất (Ba nhà ngoại giao tương ứng trao đổi trực tiếp được với nhau bằng tiếng Anh; Ba đối tượng tương ứng có quan hệ t_1);

- Màu xanh, thì Ba nhà bác học tương ứng trao đổi về vấn đề thứ hai (Ba nhà ngoại giao tương ứng trao đổi trực tiếp được với nhau bằng tiếng Pháp; Ba đối tượng tương ứng có quan hệ t_2);

- Màu vàng, thì Ba nhà bác học tương ứng trao đổi về vấn đề thứ ba (Ba nhà ngoại giao tương ứng trao đổi trực tiếp được với nhau bằng tiếng Đức; Ba đối tượng tương ứng có quan hệ t_3).

2 Dạng 2

2.1 Bài toán

Bài toán 1 *Một nhóm gồm 5 thành viên, trong đó mỗi bộ ba đều có 2 người quen nhau và 2 người không quen nhau. Chứng minh rằng có thể xếp cả nhóm ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà thành viên đó quen.*

Bài toán 2 *Cho 5 số nguyên dương tùy ý, mà cứ 3 số bất kỳ đề có 2 số có ước chung và 2 số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng có thể ghi 5 số trên lên một đường tròn, để mỗi số đều đứng giữa 2 số mà nó có ước chung.*

Bài toán 3 *Cho 5 đối tượng tùy ý, mà cứ ba đối tượng bất kỳ, đều có 2 đối tượng có quan hệ t_1 và 2 đối tượng có quan hệ t_2. Chứng minh rằng có thể xếp tất cả các đối tượng* *đứng trên một đường vòng, để mỗi đối tượng đều đứng giữa 2 đối tượng mà nó có quan hệ t_i $(1 \leqslant i \leqslant 2)$.*

2.2 Khẳng định

Với dãy (2) có khẳng định sau:

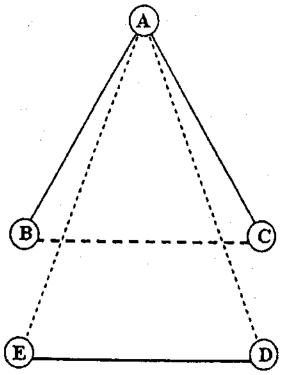
Khẳng định 2 *Đồ thị đầy đủ có $b_{n+1} - 1$ đỉnh $(n \geqslant 2)$ với n màu cạnh (các cạnh được tô bằng n màu), sao cho không tam giác cùng màu nào, luôn luôn có hình 5 cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô bằng các màu khác.*

Chứng minh. Bằng quy nạp theo n.

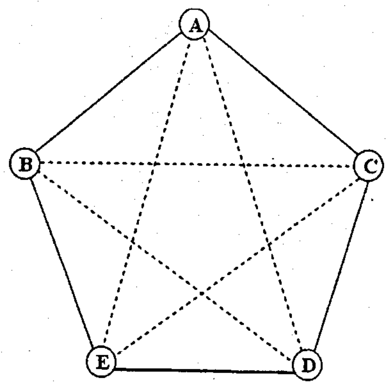
1. Cơ sở quy nạp: Với $n = 2$ đồ thị tương ứng G_2 đầy đủ có $b_3 - 1 = 5$ đỉnh và 2 màu cạnh (xanh, đỏ) không có đồ thị con K_3 cùng màu. Khi đó G_2 có thể biểu diễn ở dạng hình 5 cạnh với cạnh cùng màu đỏ và đường chéo màu xanh.

Thật vậy, do G_2 đầy đủ nên mỗi đỉnh xuất phát đúng 4 cạnh được tô bằng 2 màu. Chính xác hơn, tại từng đỉnh, mỗi màu được tô trên đúng 2 cạnh. Giả sử ngược lại, tại đỉnh A màu đỏ được tô trên 3 cạnh là AB, AC và AD. Khi đó một trong 3 cạnh BC, BD, CD màu đỏ, đồ thị có tam giác đỏ. Ngược lại cả 3 cạnh đều màu xanh, đồ thị có tam giác xanh. Như vậy mẫu thuẫn với giả thiết.

Giả sử tại A có các cạnh đỏ là AB và AC (đường liền nét), còn AD và AE là xanh, (đường nét đứt). Khi đó cạnh BC phải xanh và ED là đỏ (hình 1).



Hình 1



Hình 2

Hai cạnh BE và CE không thể cùng xanh. Giả sử BE đỏ, thì CE xanh. Suy ra CD đỏ và BD xanh. Vậy ta được hình 5 cạnh với cạnh màu đỏ và đường chéo xanh (hình 2).

2. Quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với $n = k$. Xét đồ thị G_{k+1} đầy đủ với $b_{(k+1)+1} - 1$ đỉnh, $k+1$ màu cạnh và không có đồ thị con K_3 cùng màu.

Mỗi đỉnh của G_{k+1} xuất phát $(b_{k+1} - 1).(k+1)$ cạnh với $k+1$ màu, nên phải có ít nhất $b_{k+1} - 1$ cạnh cùng màu. Giả sử tại đỉnh A có $b_{k+1} - 1$ cạnh cùng được tô bởi màu m_1. Khi đó trong các đỉnh đối của A không có cặp đỉnh nào được nối với nhau bởi cạnh màu m_1 (trái lại thì có K_3 cùng màu m_1). Xét đồ thị con đầy đủ G_k lập nên từ $b_{k+1} - 1$ đỉnh đối của A có cạnh chỉ tô bởi k màu (trừ màu m_1) và không có K_3 cùng màu, nên theo giả thiết quy nạp, trong G_k có hình 5 cạnh với cạnh cùng một màu và đường chéo là các màu khác (tất cả đều không là màu m_1). Vậy trong G_{k+1} có điều cần khẳng định.

3. Giải toán

1°) *Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ*

Các đồ thị tương ứng với 3 bài toán đã cho được xây dựng như sau:

a) Đỉnh: Lấy 5 điểm trên mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng tương ứng với 5 thành viên (5 số nguyên dương, 5 đối tượng đã chọn ra). Dùng ngay tên các thành viên (các tổ, tên các đối tượng) để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh: Dùng

- Cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người quen nhau (hai số có ước chung, hai đối tượng có quan hệ t_1).

- Cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người không quen nhau (hai số nguyên tố cùng nhau, hai đối tượng có quan hệ t_2).

Đồ thị G_i ($1 \leqslant i \leqslant 3$) mô tả toàn bộ quan hệ điều kiện được cho trong bài toán i, nên trong G_i không có tam giác cùng màu.

2°) *Suy ra đáp án.* Theo khẳng định 2 với $n = 2$ đồ thị G_i là đa giác 5 cạnh với các cạnh màu đỏ và các đường chéo màu xanh hoặc ngược lại. Khi đó dựa theo đường gấp khúc khép kín màu đỏ mà sắp xếp các thành viên (các số; các đối tượng) tương ứng người xung quanh một bàn tròn (lên một đường tròn), thì mỗi thành viên (mỗi số, mỗi đối tượng) sẽ ngồi giữa hai người mà thành viên có quen (đứng giữa hai số mà nó có ước chung; đứng giữa hai đối tượng mà nó có quan hệ t_1).

3 Dạng 3

3.1 Bài toán

Bài toán 1 *Trên mặt phẳng lấy 6 điểm tùy ý, không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một.*

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một cặp điểm mà đoạn thẳng nối giữa chúng là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó, đồng thời là cạnh dài nhất của một tam giác khác có đỉnh là các điểm đã cho.

Bài toán 2 *Chứng minh rằng trong n ($n \geqslant 6$) người tùy ý luôn chọn được $n-4$ bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này hoặc từng đôi một quen nhau hoặc từng đôi một không quen nhau.*

Bài toán 3 *Chứng minh rằng trong n ($n \geqslant 6$) số nguyên dương tùy ý luôn luôn chọn được $n-4$ bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này từng cặp số có ước chung hoặc nguyên tố cùng nhau.*

Bài toán 4 *Chứng minh rằng trong n ($n \geqslant 6$) đối tượng tùy ý luôn chọn ra được $n-4$ bộ ba, mà trong mỗi bộ ba này hoặc từng cặp có quan hệ t_1 hoặc từng cặp có quan hệ t_2.*

Bài toán 5 *Với $n = 5$ thì các khẳng định phát biểu trong các bài toán 2, 4 còn đúng nữa không? Nếu các khẳng định trên không đúng hãy cho phản ví dụ.*

3.2 Khẳng định

Khẳng định 3 *Đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh ($n \geqslant 6$) và được tô bằng không quá 2 màu cạnh, thì luôn có ít nhất $n-4$ tam giác cùng màu.*

Chứng minh. Trường hợp 1:

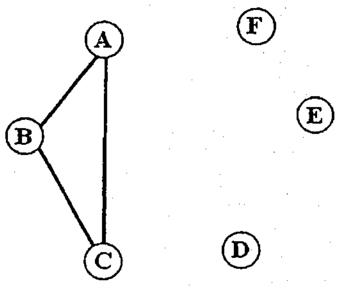
Đồ thị đầy đủ G_n có n đỉnh ($n \geqslant 6$) được tô bằng một màu cạnh. Khẳng định dễ dàng được chứng minh.

Trường hợp 2: Đồ thị đầy đủ G_n có n đỉnh ($n \geqslant 6$) với 2 màu cạnh (chẳng hạn xanh, đỏ). Ta phải khẳng định G_n có ít nhất $n-4$ tam giác cùng màu. Điều này được chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh của đồ thị.

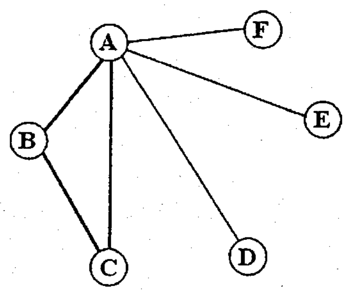
1. *Cơ sở quy nạp:* $n = 6$ thì đồ thị tương ứng G_6 đầy đủ với 2 màu cạnh (xanh, đỏ). Ta phải chứng minh G_6 có ít nhất $(6-4) = 2$ tam giác cùng màu.

Theo định lý 2.19, G_6 luôn có ít nhất một tam giác cùng màu. Do đó ta phải chứng minh trong G_6 có thêm ít nhất một tam giác cùng màu nữa.

Không mất tính tổng quát, ta gọi các đỉnh của G_6 là A, B, C, D, E, F và tam giác cùng màu là tam giác ABC với các cạnh màu đỏ (nét liền), (hình 3).



Hình 3



Hình 4

Ta xét các trường hợp sau có thể xảy ra:

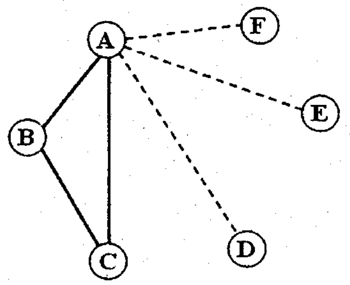
1°) Cả ba cạnh AD, AE, AF đều được tô màu đỏ (hình 4).

Khi đó, nếu có ít nhất một trong ba cạnh DE, EF, DF đỏ thì trong G_6 có thêm ít nhất một tam giác cùng màu nữa (tam giác đỏ).

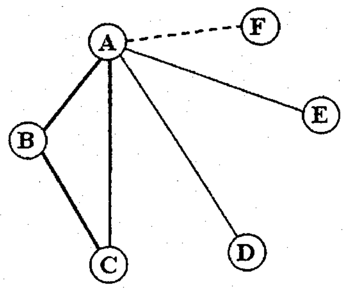
Ngược lại, nếu cả ba cạnh DE, EF, DF xanh (nét đứt) thì trong G_6 có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác xanh).

2°) Cả ba cạnh AD, AE, AF đều được tô màu xanh (hình 5).

Chứng minh tương tự trường hợp 1°).



Hình 5



Hình 6

Nếu có ít nhất một trong ba cạnh DE, EF, DF xanh thì trong G_6 có thêm ít nhất một tam giác nữa cùng màu (tam giác xanh).

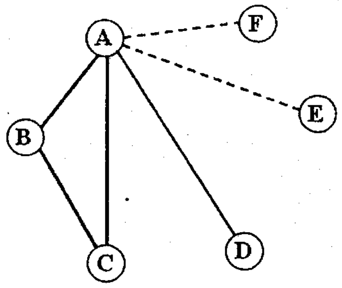
Ngược lại, cả ba cạnh DE, EF, DF đỏ thì trong G_6 có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác đỏ).

3°) Trong ba cạnh AD, AE, AF có hai cạnh đỏ, chẳng hạn AD, AE được tô màu đỏ (hình 6).

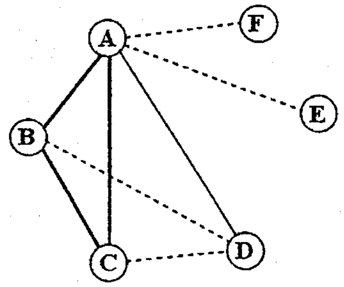
Khi đó, nếu có ít nhất một trong ba cạnh CD, DE, CE đỏ thì trong G_6 có thêm ít nhất một tam giác nữa cùng màu (tam giác đỏ).

Ngược lại, cả ba cạnh CD, DE, CE xanh thì trong G_6 có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác xanh).

4°) Trong ba cạnh AD, AE, AF có đúng một cạnh đỏ, chẳng hạn AD được tô màu đỏ (hình 7).



Hình 7



Hình 8

a) Một trong hai cạnh BD, CD đỏ. Khi đó trong G_6 có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác đỏ).

b) Cả hai cạnh BD, CD xanh (hình 8).

b$_1$) EF xanh: Khi đó trong G_6 có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác AEF xanh).

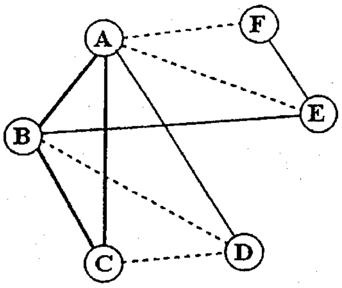
b$_2$) EF đỏ:

b$_{2.1}$) BE đỏ (hình 9)

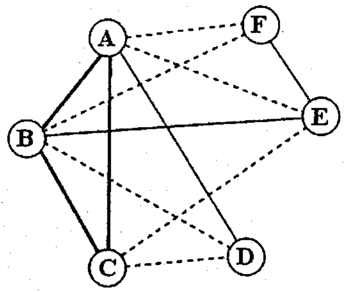
b$_{2.1.1}$) Hoặc BF hoặc CE đỏ, ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác đỏ).

b$_{2.1.2}$) Cả hai cạnh BF và CE xanh (hình 10).

b$_{2.1.2.1}$) Hoặc DE hoặc DF xanh, ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác xanh).



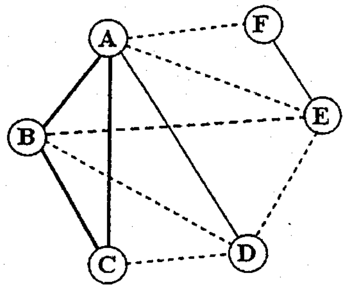
Hình 9



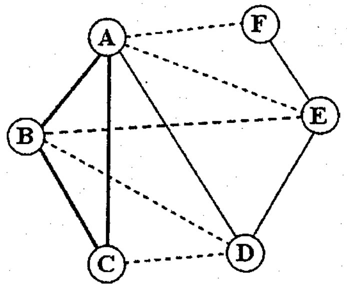
Hình 10

$b_{2.1.2.2}$) Cả hai cạnh DE và DF đều đỏ, ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác DEF đỏ).

$b_{2.2}$) BE xanh (hình 11).



Hình 11



Hình 12

$b_{2.2.1}$) DE xanh, ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác BDE xanh).

$b_{2.2.2}$) DE đỏ (hình 12).

$b_{2.2.2.1}$) DF đỏ, khi đó ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác DEF đỏ).

$b_{2.2.2.2}$) DF xanh (hình 13).

$b_{2.2.2.2.1}$) Hoặc BF hoặc CF xanh, ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác xanh).

$b_{2.2.2.2.2}$) Cả BF và CF đều đỏ, ta có tam giác cùng màu thứ hai (tam giác BCF đỏ).

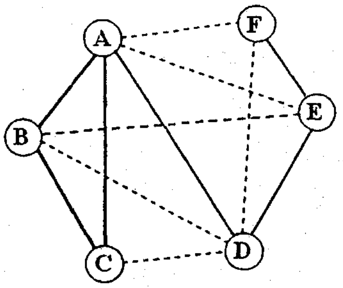
Vậy trong mọi trường hợp, G_6 đều có ít nhất hai tam giác cùng màu.

2. *Quy nạp:* Giả sử định lý đúng với $n = k$. Xét đồ thị G_{k+1} đầy đủ với $(k+1)$ đỉnh, được tô bằng 2 màu xanh, đỏ. Ta phải chứng minh G_{k+1} có ít nhất $(k+1-4) = (k-3)$ tam giác cùng màu.

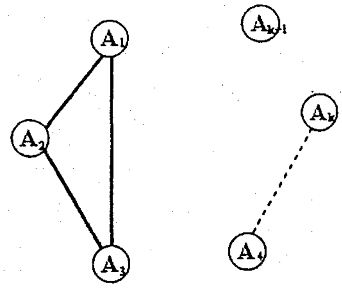
Thật vậy, vì G_{k+1} đầy đủ gồm $(k+1)$ đỉnh $(k+1 \geqslant 7)$ với hai màu cạnh nên có ít nhất một tam giác cùng màu.

Giả sử các đỉnh của G_{k+1} là $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ và tam giác cùng màu là tam giác $A_1A_2A_3$ (chẳng hạn màu đỏ) (hình 14).

Loại A_1 và các cạnh xuất phát từ A_1 ra khỏi đồ thị G_{k+1}, ta có đồ thị G_k với hai màu cạnh (xanh, đỏ). Nên theo giả thiết quy nạp, trong G_k luôn có ít nhất $(k-4)$ tam giác cùng màu.



Hình 13



Hình 14

Khôi phục đỉnh A_1 cùng các cạnh thuộc A_1 ta được đồ thị G_{k+1} với hai màu cạnh (xanh, đỏ) và G_{k+1} có ít nhất $(k-4+1)$ hay $(k-3)$ cạnh cùng màu. Khẳng định được chứng minh.

3.3 Giải toán

Giải bài toán 1. Xét tất cả các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Vì khoảng cách giữa các cặp điểm đã cho khác nhau từng đôi một, nên mỗi tam giác có đỉnh là các điểm đã cho đều có cạnh ngắn nhất và cạnh dài nhất. Đối với mỗi tam giác này ta dùng màu xanh để tô cạnh ngắn nhất. Sau khi tất cả các đoạn thẳng nối giữa các cặp điểm đã cho được phép tô màu xanh đã tô xong, phần đoạn thẳng còn lại tô màu đỏ.

Đồ thị G nhận được là đồ thị đầy đủ gồm 6 đỉnh với các cạnh được tô bằng 2 màu (xanh, đỏ), nên theo khẳng định 3 trong G có ít nhất hai tam giác cùng màu. Vì tam giác nào cũng có cạnh ngắn nhất được tô màu xanh trước, nên các tam giác cùng màu đều là tam giác xanh. Khi đó cạnh dài nhất trong mỗi tam giác này là đoạn thẳng cần tìm. Bởi vì trong tam giác ta xét nó đóng vai trò cạnh dài nhất, nhưng vì đoạn thẳng này có màu xanh, nên nó đã là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

Giải bài toán 2-3.

1°) *Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ.*

Các đồ thị tương ứng với các bài toán 2-4 được xây dựng như sau:

a) Đỉnh: Lấy n điểm ($n \geqslant 6$) tương ứng với n người (n số nguyên, n đối tượng) đã chọn ra. Dùng ngay tên người (các số, ký hiệu các đối tượng) để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh: Dùng

- Cạnh đỏ để nối giữa hai điểm tương ứng với hai người quen (hai số có ước chung, hai đối tượng có quan hệ t_1).

- Cạnh xanh để nối giữa hai điểm tương ứng với hai người không quen nhau (hai số nguyên tố cùng nhau, hai đối tượng có quan hệ t_2).

Đồ thị G_i $(2 \leqslant i \leqslant 4)$ nhận được mô tả toàn bộ quan hệ được cho trong bài toán i và thỏa mãn điều kiện của khẳng định 3.

2°) *Suy ra đáp án.* Theo khẳng định 3 trong G_i $(2 \leqslant i \leqslant 4)$ có ít nhất $n-4$ tam giác cùng màu.

- Nếu tam giác màu đỏ, thì ba người tương ứng quen nhau từng đôi một (ba số tương ứng có ước chung từng đôi một, ba đối tượng tương ứng từng đôi một có quan hệ t_1);

- Nếu tam giác màu xanh, thì ba người tương ứng không quen nhau từng đôi một (ba số tương ứng nguyên tố cùng nhau, ba đối tượng tương ứng từng đôi một có quan hệ t_2).

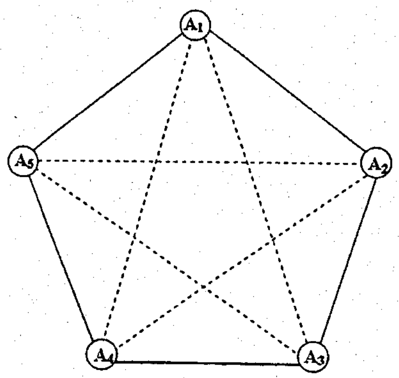
Giải bài toán 5.

Với $n = 5$, thì các khẳng định phát biểu trong các bài toán 2-4 không còn đúng nữa. Thật vậy, nếu xuất phát từ đồ thị G đầy đủ gồm 5 đỉnh (tương ứng với 5 đối tượng được xét) với các cạnh được tô bằng hai màu.

- Cạnh đỏ (nét liền) biểu hiện quan hệ quen nhau (có ước chung, có quan hệ t_1).

- Xạnh xanh (nét đứt) biểu hiện quan hệ không quen nhau (nguyên tố cùng nhau, có quan hệ t_2).

Vì đồ thị G không có tam giác cùng màu (hình 15), nên không có:



Hình 15

- Một bộ ba người nào tương ứng với các đỉnh mà hoặc quen nhau từng đôi một hoặc không quen nhau từng đôi một.

- Một bộ ba số nào tương ứng với các đỉnh mà hoặc có ước chung từng đôi một hoặc nguyên tố cùng nhau.

- Một bộ ba đối tượng tương ứng với các đỉnh, mà từng đôi một có quan hệ t_1 hoặc từng đôi một có quan hệ t_2.

4 Dạng 4

4.1 Bài toán

Bài toán 1 *Chứng minh rằng trong 9 người tùy ý, mà ba người bất kỳ đều có 2 người quen nhau luôn tìm được 4 người đều quen nhau (từng cặp quen nhau).*

Bài toán 2 *Chứng minh rằng trong 9 số nguyên dương tùy ý, mà ba số bất kỳ đều có 2* *số nguyên tố cùng nhau luôn luôn tìm được 4 số nguyên tố cùng nhau (từng cặp nguyên tố cùng nhau).*

Bài toán 3 *Chứng minh rằng trong 9 đối tượng tùy ý, mà mỗi cặp đối tượng hoặc chỉ có quan hệ t_1 hoặc chỉ có quan hệ t_2, sao cho ba đối tượng bất kỳ đều chứa một cặp có quan hệ t_1, luôn luôn tìm được 4 đối tượng, mà từng cặp có quan hệ t_1.*

Bài toán 4 *Để mừng người con đoạt giải trong kỳ thi Toán Quốc tế lần thứ 48, một gia đình dự định mời bạn đến dự tiệc. Trong số khách mời:*

a) Người vợ muốn có ít nhất 3 người từng đôi một quen nhau.

b) Người chồng lại muốn có ít nhất 4 người từng đôi một chưa quen nhau.

Hỏi họ phải mời ít nhất bao nhiêu bạn, để ít nhất mong muốn của chồng hoặc của vợ được thỏa mãn.

4.2 Khẳng định

Để giải các bài toán trên ta dựa vào khẳng định sau:

Khẳng định 4 *1. Đồ thị đầy đủ gồm 9 đỉnh với hai màu cạnh: xanh, đỏ, luôn hoặc có tam giác xanh (a) hoặc có tứ giác mà các cạnh và các đường chéo đều màu đỏ (b).*
2. Nếu đồ thị đầy đủ chỉ gồm 8 đỉnh, thì khẳng định trên không đúng.

Chứng minh.

1) Xét đồ thị đầy đủ G gồm 9 đỉnh: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ với các cạnh được tô bằng hai màu: xanh, đỏ.

Hai khả năng có thể xảy ra:

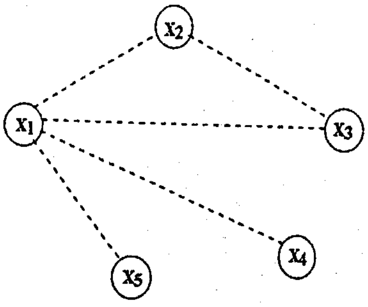
1°) Có một đỉnh thuộc ít nhất 4 xạnh màu xanh (nét đứt).

Giả sử tại x_1 có 4 cạnh màu xanh là $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5$. Khi đó trong các cạnh nối đôi một giữa 4 đỉnh x_2, x_3, x_4, x_5 tồn tại ít nhất một cạnh màu xanh, chẳng hạn x_2x_3 màu xanh. Khi đó tam giác $x_1x_2x_3$ màu xanh (hình 16). Khẳng định a) thỏa mãn. Ngược lại, nếu các đoạn thẳng nối từng cặp trong các điểm x_2, x_3, x_4, x_5 đều màu đỏ (nét liền). Khi đó tứ giác $x_2x_3x_4x_5$ có các cạnh và các đường chéo đều màu đỏ (hình 17). Khẳng định b) được thỏa mãn.

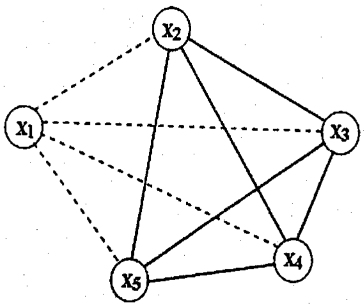
2°) Không có một đỉnh nào thuộc quá 3 cạnh màu xanh. Khi đó phải có ít nhất một đỉnh, chẳng hạn x_1 là đầu mút của không quá 2 cạnh xanh (vì nếu mỗi đỉnh đều xuất phát đúng 3 cạnh xanh, thì số cạnh của đồ thị sẽ là $\frac{3\times 9}{2}$ không nguyên). Bởi vậy, tại x_1 phải xuất phát ít nhất 6 cạnh đỏ. Giả sử 6 cạnh đỏ xuất phát từ x_1 là $x_1x_4, x_1x_5, x_1x_6, x_1x_7, x_1x_8, x_1x_9$ (hình 18).

Xét đồ thị con đầy đủ G_1 gồm 6 đỉnh $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ với hai màu cạnh xanh, đỏ. Theo khẳng định 1 với $n = 2$ trong G_1 có tam giác cùng màu.

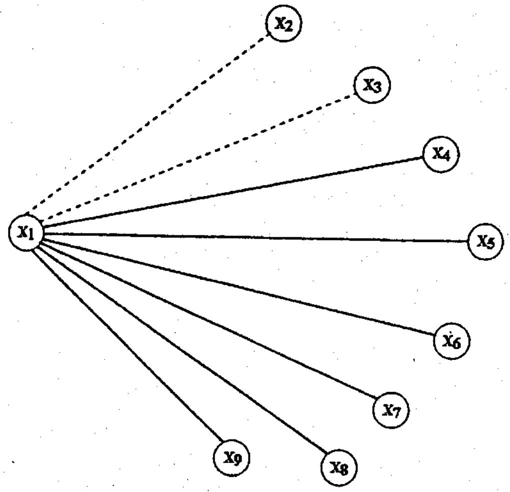
Nếu tam giác đó màu xanh, thì khẳng định a) thỏa mãn.



Hình 16



Hình 17



Hình 18

Nếu tam giác đó màu đỏ, thì ba đỉnh của nó hợp với x_1 thành tứ giác có các cạnh và các đường chéo đều màu đỏ, nên khẳng định b) thỏa mãn.

4.3 Giải toán

Giải bài toán 1-3.

1°) *Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ.* Các đồ thị tương ứng với các bài toán 1-3 được xây dựng như sau:

a) Đỉnh: Lấy 9 điểm tương ứng với 9 người tùy ý đã chọn ra (9 số nguyên dương tùy ý đã chọn ra, 9 đối tượng tùy ý đã chọn ra). Dùng ngay tên của họ (các số đã chọn ra, các đối tượng được xét) để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh: Dùng

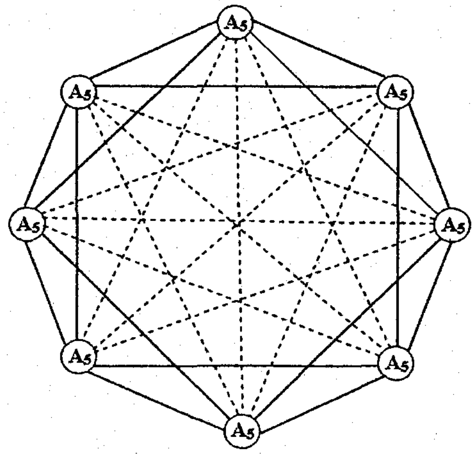
- Cạnh đỏ để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người quen nhau (hai số nguyên tố cùng nhau, hai đối tượng có quan hệ t_1).

- Cạnh xanh để nối giữa hai đỉnh tương ứng với hai người không quen nhau (hai số có ước chung, hai đối tượng có quan hệ t_2).

Đồ thị G_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ nhận được mô tả toàn bộ quan hệ được cho trong bài toán i và thỏa mãn điều kiện của khẳng định 4.

2°) *Suy ra đáp án.* Theo khẳng định 4 trong G_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ hoặc có tam giác xanh hoặc có tứ giác với các cạnh và đường chéo đều đỏ. Nhưng theo điều kiện đặt ra trong các bài toán 1-3 và cách tô màu cạnh tam giác bất kỳ trong các đồ thị G_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ đều có ít nhất một cạnh đỏ. Bởi vậy, trong các đồ thị G_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ đều có tứ giác với các cạnh và đường chéo màu đỏ, nên suy ra khẳng định được phát biểu trong các bài toán 1-3.

Giải bài toán 4. Đồ thị đầy đủ gồm 9 đỉnh với hai màu cạnh: xanh, đỏ luôn luôn có tam giác xanh hoặc tứ giác với cạnh và đường chéo đều màu đỏ. Nhưng khi số lượng đỉnh chỉ còn là 8, thì tồn tại đồ thị đầy đủ với hai màu cạnh: xanh (nét đứt biểu hiện quen nhau), đỏ (nét liền biểu hiện không quen nhau), mà trên đó không có một tam giác xanh nào cũng như không có một tứ giác nào với các cạnh và đường chéo đều màu đỏ (hình 19).



Hình 19

Bởi vậy, để hoặc thỏa mãn yêu cầu của vợ: trong số khách mời có ba người quen nhau từng đôi một (tương ứng với ba đỉnh của một tam giác xanh) hoặc thỏa mãn yêu cầu cầu của chồng: trong số khách mời có 4 người mà từng cặp không quen nhau (tương ứng với đỉnh của một tứ giác mà các cạnh và đường chéo đều màu đỏ), thì số khách mời tối thiểu phải tương ứng với đỉnh của một đồ thị đầy đủ gồm 9 đỉnh, tức là để thỏa mãn yêu cầu hoặc của chồng hoặc của vợ thì phải mời ít nhất 9 khách.

Logic hình thức và áp dụng

Nguyễn Văn Mậu

1 Mở đầu

Lý thuyết và các bài toán tổ hợp là một bộ phận quan trọng, hấp dẫn và lý thú của Toán học rời rạc. Có nhiều vấn đề về cơ sở lập luận và lý thuyết được trình bày dưới dạng rất đơn giản nhưng phạm vi ứng dụng thì rất phong phú và đa dạng. Nhiều bài toán của thực tiễn đời sống cần được giải quyết thấu đáo, cần đến một cơ sở lập luận có độ tin cậy cao và có khả năng áp dụng một cách thông dụng. Gắn chặt với các bài toán tổ hợp và các bài toán rời rạc là các bài toán về logic, về quy luật của những phép toán và các tính chất nội tại của tập hợp.

Các bài toán sơ cấp liên quan đến tổ hợp và logic thường xuất hiện trong rất nhiều bài toán lý thú và thường rất khó. Trong bài này trình bày lại kết quả của Sylvester về logic hình thức (xem [1]). Phần logic hình thức này không nằm trong lý thuyết logic mệnh đề quen biết. Tuy nhiên, nếu nhìn theo góc độ cơ sở lập luận cũng như cách thức dẫn dắt vấn đề, thì logic hình thức hòan toàn tương đồng với cách liệt kê các phần tử (lực lượng) của các phép tính tập hợp như phép hợp, phép giao, công thức bao hàm và loại trừ, ...

2 Tập hợp, các phép tính cơ bản

Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản liên quan đến tập hợp. Khi cho một tập hợp tức là ta có thể chỉ ra được cách mô tả tất cả các phần tử của nó. Các phần tử của một tập hợp có thể mô tả bằng cách liệt kê chúng (thường là cho tập hữu hạn phần tử) hoặc là chỉ ra các tính chất đặc trưng của chúng.

Số phần tử trong tập A được gọi là lực lượng của tập A và được ký hiệu bởi $|A|$. Mỗi tập B mà mọi phần tử của nó đều thuộc tập A đều được gọi là tập con của tập A và viết $B \subseteq A$. Tập hợp không chứa một phần tử nào được gọi là tập hợp rỗng (hay tập hợp trống) và thường được ký hiệu bằng $\emptyset$. Ta coi tập hợp rỗng là tập con của mọi tập A cho trước.

Trường hợp B là tập con của tập A và $B \neq A$, thì B được gọi là tập con không tầm thường (hay tập con thực sự) của tập A và viết $B \subset A$.

Giả sử tập B là tập con của tập A. Tập gồm tất cả các phần tử thuộc A, nhưng không thuộc B được gọi là tập phần bù (hay phần bù) của tập B (đối với tập A) và ký hiệu hoặc bằng $C_A(B)$.

tính chất nào trong số các tính chất α,β, γ,... và λ đã liệt kê là

$$\begin{aligned}&N - N_\alpha - N_\beta - N_\gamma - \cdots - N_\kappa - N_\lambda\\&\quad + N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\gamma} + \cdots + N_{\kappa\lambda}\\&\quad - N_{\alpha\beta\gamma} - \cdots -\\&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad \pm N_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\lambda}\end{aligned}$$

Chứng minh.

Giả sử số lượng các tính chất đã liệt kê α,β, γ,..., κ và λ là n. Nếu một đối tượng nào đó trong số đã cho có k tính chất $(1 \leqslant k \leqslant n)$, thì tổng đã nêu trong định lý cho ta

$$1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

đơn vị. Ngược lại, nếu một đối tượng nào đó không có bất cứ một tính chất nào trong số các tính chất đã liệt kê α,β, γ,..., κ và λ thì nó cho ta 1 đơn vị và vì vậy bằng số hạng N. □

Hệ quả 1 *Giả thiết đã cho trước n đối tượng tuỳ ý được sắp xếp theo một trật tự và các đối tượng đó có các tính chất α,β, γ,... và λ nào đó. Giả sử tất cả các đối tượng đều có tính chất α trừ đối tượng đầu tiên, tất cả các đối tượng đều có tính chất β trừ đối tượng thứ hai, ..., và tất cả các đối tượng đều có tính chất λ trừ đối tượng xếp cuối cùng. Khi đó công thức trong Định lý 1 có dạng*

$$n - \binom{n}{1}(n-1) + \binom{n}{2}(n-2) - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n). \qquad (1)$$

Chứng minh. Thật vậy, trong trường hợp đang xét, ta có $N = n$, $N_\alpha = N_\beta = N_\gamma = \cdots = N_\lambda = n - 1$,

$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\gamma} = N_{\alpha\lambda} = \cdots = N_{\kappa\lambda} = n - 2$,

...

Vậy nên

$$n - \binom{n}{1}(n-1) + \binom{n}{2}(n-2) - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n) = 0. \qquad (2)$$

do mọi đối tượng đều có ít nhất một tính chất đã liệt kê. □

Tiếp theo, ta phát biểu một mở rộng của định lý 1.

Các kiến thức đã trình bày liên quan mật thiết đến tính toán lực lượng của tập hợp mà chúng ta đã rất quen biết trong chương trình phổ thông.

chuyền và bóng rổ; 3 người tham gia bóng chuyền và bóng rổ; 3 người tham gia cầu lông, bóng bàn và bóng rổ; 2 người tham gia cầu lông, bóng chuyền và bóng rổ; 2 người tham gia đồng thời cầu lông, bóng bàn và bóng chuyền; một người tham gia đồng thời bốn môn cầu lông, bóng bàn, bóng chuyền, bóng rổ. Hỏi có bao nhiêu vận động viên tham gia thi đấu chính thức môn bơi?

Tương tự, ta có lời giải cho bài toán tổng quát sau đây.

Bài toán 3 *Cho bộ số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m > 1)$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Hỏi trong các số thuộc $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n > 1)$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào thuộc $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.*

Giải. Nhận xét rằng số các số nguyên dương không vượt quá n chia hết cho số a $(1 \leqslant a \leqslant n)$ bằng $\left[\frac{n}{a}\right]$. Tiếp theo, số các số nguyên dương không vượt quá n đồng thời chia hết cho số a và b $(1 \leqslant a, b \leqslant n$ và a, b nguyên tố cùng nhau, bằng $\left[\frac{n}{ab}\right]$, ...

Vậy nên số các số thuộc $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n > 1)$ không chia hết cho bất cứ số nào thuộc $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ tính bằng công thức

$$\begin{aligned} n- &\left(\left[\frac{n}{a_1}\right] + \left[\frac{n}{a_2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{a}\right]\right) \\ &+ \left(\left[\frac{n}{a_1a_2}\right] + \left[\frac{n}{a_1a_3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{a_{n-1}a_n}\right]\right) \\ &\cdots \\ &+ (-1)^m\left[\frac{n}{a_1a_2\cdots a_m}\right]. \end{aligned}$$

Nhận xét rằng, khi các tính chất được liệt kê như trong Định lý Silvester không có tính độc lập thì công thức tính toán phải thay đổi. Ta xét ví dụ sau đây.

Bài toán 4 *Hỏi trong tập $A = \{1, 2, ..., 280\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho 2, 3, 4,5, 6,7.*

Giải. Nhận xét rằng, số các số trong A không chia hết cho một trong các số 2, 3, 4,5, 6,7 cũng bằng một số các số trong A không chia hết cho một trong các số 2, 3, 5, 7. Ta xét xem trong tập A có bao nhiêu số chia hết cho một trong các số 2, 3, 5, 7. Kí hiệu A_1 là số các số thuộc A chia hết cho 2, A_2 là số các số thuộc A chia hết cho 3, A_3 là số các số thuộc A chia hết cho 5 và A_4 là số các số thuộc A chia hết cho 7. Khi đó $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ là tập các số chia hết cho một trong các số 2, 3, 5, 7. Ta có

$$|A_1| = \frac{280}{2} = 140;\ |A_2| = \left[\frac{280}{3}\right] = 93;\ |A_3| = \frac{280}{5} = 56;\ |A_4| = \frac{280}{7} = 40, \text{ và}$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{280}{6}\right] = 46;\ |A_1 \cap A_3| = \left[\frac{280}{10}\right] = 28;$$

$$|A_1 \cap A_4| = \left[\frac{280}{14}\right] = 20;\ |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{15}\right] = 18;$$

$$|A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{21}\right] = 13;\ |A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{35}\right] = 8,$$

và

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{280}{30}\right] = 9;\ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left[\frac{280}{42}\right] = 6,$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{70}\right] = 4;\ |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{105}\right] = 2,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left[\frac{280}{210}\right] = 1.$$

Sử dụng công thức của Định lý Silvester, ta thu được trong tập A có 64 số không chia hết cho 2, 3, 5, 7, tức trong A có 64 số không chia hết cho 2, 3, 4,5,6, 7.

Tiếp theo, ta phát biểu Định lý Sylvester cho trường hợp có trọng số.

Định lí 3 *Giả thiết đã cho trước N đối tượng tuỳ ý. Giả sử N_α là số các đối tượng trong số đã cho có tính chất α, β,γ,..., λ và mỗi tính chất đã cho gắn với một giá trị số (trọng số). Gọi V_α là tổng các trọng số của các đối tượng trong số đã cho có tính chất α, V_β là tổng các trọng số của các đối tượng trong số đã cho có tính chất β, V_γ là tổng các trọng số của các đối tượng trong số đã cho có tính chất γ,... và V_λ là tổng các trọng số của các đối tượng trong số đã cho có tính chất λ. Tương tự, giả sử $V_{\alpha\beta}$, $V_{\alpha\gamma}$, ..., $V_{\alpha\beta\gamma}$,..., $V_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda}$ là tổng các trọng số của các đối tượng trong số đã cho có đồng thời các tính chất α và β, tương ứng, α và γ,..., tương ứng α,β và γ, tương ứng α,β, γ,... và λ. Giả sử V tổng các trọng số của tất cả các đối tượng đang xét. Khi đó tổng các trọng số của các đối tượng không có tính chất nào trong số các tính chất α,β, γ,... và λ đã liệt kê là*

$$\begin{aligned}
&V - V_\alpha - V_\beta - V_\gamma - \cdots - V_\kappa - V_\lambda \\
&\quad + V_{\alpha\beta} + V_{\alpha\gamma} + \cdots + V_{\kappa\lambda} \\
&\quad - V_{\alpha\beta\gamma} - \cdots - \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \pm V_{\alpha\beta\gamma\ldots\kappa\lambda}
\end{aligned}$$

Chứng minh. Phương pháp chứng minh hoàn toàn như đối với Định lý Sylvester khi ta gắn mỗi đối tượng cùng một giá trị bằng 1.

Công thức tính số phần tử của một hợp các tập hợp

Vũ Đình Hòa

Trong cuộc sống nhiều khi xuất hiện những bài toán phải tính số lượng phần tử của một tập hợp thông qua những tập hợp con của chúng. Chẳng hạn:

Ví dụ 1 *Trong một bài kiểm tra toán có hai bài toán. Trong cả lớp có 30 em làm được bài thứ nhất và 20 em làm được bài thứ hai. Chỉ có 10 em làm được cả hai bài toán kiểm tra. Hãy tính số học sinh trong lớp.*

Gọi A là tập hợp học sinh giải được bài toán thứ nhất, và B là tập hợp hcọ sinh giải được bài toán thứ hai, thì $A \cap B$ là tập hợp học sinh giải được cả hai bài toán. Bài toán được đặt ra là phải tính số phần tử của $A \cup B$.

Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau, thì thấy dễ dàng rằng:

$$|A \cap B| = |A| + |B|.$$

Trong trường hợp A và B có giao khác rỗng thì đẳng thức trên không còn đúng nữa, mà ta sẽ có công thức

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

bởi vì trong tổng $|A| + |B|$ thì các phần tử chung trong $|A \cap B|$ (của cả A và B) được tính lặp đúng hai lần.

Sử dụng công thức này, ta thấy số học sinh của lớp trong ví dụ trên của ta là $30 + 20 - 10 = 40$ em.

Nhiều khi, bài toán ta gặp trở nên phức tạp hơn khi phải tính số phần tử của một tập hợp có nhiều hơn hai tập hợp.

Ví dụ 2 *Lớp 12A phải làm một bài kiểm tra Toán gồm có ba bài toán. Biết rằng mỗi em trong lớp đều làm được ít nhất một bài, trong lớp có 20 em làm được bài toán thứ nhất, 14 em giải được bài toán thứ hai, 10 em giải được bài toán thứ ba, 6 em giải được cả hai bài toán thứ nhất và thứ ba, 5 em giải được cả hai bài thứ hai và thứ ba, 2 em giải được cả hai bài thứ nhất và thứ hai, và có một em được 10 điểm vì đã giải được cả ba bài toán. Hỏi rằng lớp học có bao nhiêu em tất cả?*

Gọi A là tập hợp các em học sinh giải được bài toán thứ nhất, B là tập hợp các em học sinh giải được bài toán thứ hai và C là tập hợp các em học sinh giải được bài toán thứ ba, ta phải tính số phần tử của tập hợp $A \cup B \cup C$. Trong nhiều trường hợp khác, chúng ta phải tính số phần tử của một hợp gồm nhiều tập hợp con, và phần nhiều các bài toán này là các bài toán khó với học sinh không hề được học công thức tính tổ hợp.

1 Xếp có lặp với tần số cho trước

Một phần tử a_i của một dãy k phần tử cho trước $a_1a_2\ldots a_k$ được nói là có tần số lặp k_i, nếu như nó xuất hiện trong dãy đúng k_i lần. Trong mục này chúng ta xét bài toán sau:
Bài toán. *Cho trước một tập hợp $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ và k là một số dương nguyên cùng với các số tự nhiên $k_1, k_2, \ldots, k_n$ thỏa mãn $\Sigma_{i=1}^{m} k_i = k$. Hãy tính số $P(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ các dãy k phần tử của tập hợp A sao cho phần tử a_i của A có tần số lặp là k_i cho mọi $i \leqslant n$. Để đơn giản hóa trình bày, ta sẽ nói gọn là dãy k phần tử có lặp $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ nếu k_i là tần số lặp của phần tử a_i trong dãy.*

Ví dụ 3 *Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$. Tất cả các dãy có lặp $(3, 2, 0, 0)$ của A là*

$$aaabb, aabba, abbaa, bbaaa, aabab,$$
$$ababa, babaa, abaab, baaba, baaab.$$

Định lí 1 *Cho trước một tập hợp A có n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Số các dãy có độ dài k với $k = \Sigma_{i=1}^{n} k_i$ phần tử sao cho phần tử a_i xuất hiện đúng k_i lần trong dãy là*

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.$$

Chứng minh Không mất tính tổng quát có thể giả sử $k_i \geqslant 1$ cho mọi giá trị $i \leqslant n$. Ta xét tập hợp
$$B = \{a_1^1; a_1^2; \ldots; a_1^{k_1}; a_2^1; a_2^2; \ldots; a_2^{k_2}; \ldots; a_n^1; a_n^2; \ldots; a_n^{k_n}\}.$$
Như vậy mỗi dãy có lặp $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ là một hoán vị của các phần tử của B (tất cả có $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)! = k!$ hoán vị), trong đó mỗi dãy bị tính lặp $k_1!k_2!\ldots k_n!$ lần, do khi đổi chỗ các phần tử a_i^j $(1 \leqslant j \leqslant k_i)$ với nhau ta vẫn chỉ thu được chính dãy đó mà thôi.

Vậy số các dãy có lặp $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ là

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.$$

Ví dụ 4 *Tính số các số tự nhiên có bảy chữ số, trong đó có ba chữ số 1, hai chữ số 2 và hai chữ số 3.*

Giải. Số các số tự nhiên cần tìm là

$$P(3, 2, 2) = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

2 Khai triển lũy thừa của nhị thức

Chúng ta đã biết những công thức khai triển nhị thức sau

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Nếu nhân cả hai vế của đẳng thức cuối với $x+y$, ta nhận được công thức sau:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Chúng ta có công thức tổng quát tính hệ số của $(x+y)^n$ (còn gọi là công thức nhị thức Newton) như sau:

Định lí 2 *Cho mỗi số tự nhiên $n \geqslant 1$ ta có*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Chứng minh. Để khai triển $(x+y)^n$, ta thực hiện phép khai triển lũy thừa một cách hình thức mà không rút gọn chúng. Chẳng hạn

$$(x+y)^2 = xx + xy + yx + yy.$$

Như vậy ta có thể biểu diễn hình thức

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n} = \sum c_1c_2\ldots c_n,$$

ở đó có tất cả 2^n số hạng $c_1c_2\ldots c_n$ với $c_i \in \{x; y\}$. Trong khi thực hiện phép rút gọn, ta phải đem nhóm tất cả các số hạng có cùng số mũ của x và y lại với nhau. Với mỗi $0 \leqslant k \leqslant n$, ta tính số các dãy n phần tử trong đó x lặp k lần còn y lặp $n-k$ lần. Theo định lý 1 đã biết, thì số các dãy có lặp theo tần số này là $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, chính bằng C_n^k. Do đó ta có:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Ví dụ 5

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= C_5^0x^5 + C_5^1x^4y + C_5^2x^3y^2 + C_5^3x^2y^3 + C_5^4xy^4 + C_5^5y^5\\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.\\ (2x+3)^5 &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.\end{aligned}$$

Lưu ý. Tam giác Pascal, trong đó số bắt đầu và kết thúc của mỗi dòng trong tam giác Pascal là số 1, và mỗi số khác của mỗi dòng bằng tổng của hai số của dòng trên nó, cho cách tính nhanh chóng hệ số của nhị thức Newton.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

3 Tính số phần tử của một tập hợp các tập hợp

Quay lại với ví dụ 2 đã cho ban đầu: Gọi A là tập hợp các em học sinh giải được bài toán thứ nhất, B là tập hợp các em học sinh giải được bài toán thứ hai và C là tập hợp các em học sinh giải được bài toán thứ ba, ta phải tính số phần tử của tập hợp $A \cup B \cup C$.

Không khó khăn, chúng ta có thể thấy công thức sau là đúng:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Theo công thức của ta, số học sinh trong lớp sẽ là:

$$20 + 14 + 10 - 6 - 5 - 2 + 1 = 32.$$

Nhưng chúng ta có thể bắt gặp những bài toán có sự tham gia của nhiều hơn ba tập hợp con, chẳng hạn:

Ví dụ 6 *Tính số cách treo 5 đôi tất trên một dây phơi sao cho không có hai chiếc tất nào cùng đôi một được phơi cạnh nhau.*

Để giải bài toán này, cũng như nhiều bài toán tương tự, ta chứng minh định lý sau:

Định lí 3 *Cho trước các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó ta có*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\; i<j\; n} |A_i \cap A_j| + \cdots$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \quad (*)$$

Chứng minh. Định lý này có thể được chứng minh hai cách:

Cách 1: Chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ hiển nhiên đẳng thức (*) đúng. Với $n = 2$, ta cũng dễ kiểm tra để thấy rằng đẳng thức (*) đúng.

Ta giả sử (*) đúng cho $n \geqslant 2$ tập hợp tùy ý.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\quad i<j\quad n} |A_i \cap A_j| + \cdots$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Bây giờ xét $n+1$ tập hợp tùy ý $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Lưu ý rằng

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}). \qquad (**)$$

Cho nên ta có $|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})|$. Sử dụng (*) cho vế phải của (**), ta thu được

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\quad i<j\quad n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| +$$
$$+ \sum_{1\quad i<j<k\quad n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1} -$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.$$

Đặt $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ và $B = A_{n+1}$ và áp dụng đẳng thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (trường hợp $n = 2$), ta thu được điều cần chứng minh

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\quad i<j\quad n} |A_i \cap A_j| + \cdots$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|.$$

Vậy định lý được chứng minh cho trường hợp $n+1$. Định lý được chứng minh.

Cách 2: Ta xét một phần tử $a \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ bất kỳ. Giả sử rằng a thuộc vào r $(1 \leqslant r \leqslant n)$ tập hợp trong số các tập hợp này. Số lần xuất hiện của a trong công thức (*) theo định lý 2 cho $x = 1$ và $y = -1$ là

$$C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \cdots + (-1)^{r-1} C_r^r = 1 - (1-1)^r = 1.$$

Vậy (*) là một đẳng thức đúng.

Lưu ý. Trong trường hợp đặc biệt khi

$$\begin{aligned}
&|S| = m, \quad |S - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = m_o, \\
&|A_i| = m_1, \quad i = \overline{1,n}, \\
&|A_i \cap A_j| = m_2, \\
&|A_i \cap A_j \cap A_k| = m_3, \\
&\ldots, \\
&|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = m_n,
\end{aligned}$$

thì ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = C_n^1 m_1 - C_n^2 m_2 + C_n^3 m_3 - \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n m_n,$$
$$m_o = m - C_n^1 m_1 + C_n^2 m_2 - \cdots + (-1)^n C_n^n m_n.$$

Bài toán trong ví dụ 6 giải dễ dàng bằng cách sử dụng công thức của định lý 1 và định lý 2.

4 Bài tập

Bài tập 1 *Trong một kỳ thi học sinh giỏi Toán, Lý, Hóa có một số em tham gia. Biết rằng có 20 em tham gia thi Toán, 14 em tham gia thi Lý, 10 em tham gia thi Hóa, 6 em vừa thi Toán vừa thi Lý, 5 em vừa thi Lý vừa thi Hóa, 2 em thi Toán và thi Hóa và có một em tham gia tất cả ba kỳ thi Toán, Lý và Hóa. Hỏi rằng có bao nhiên em tham gia kỳ thi học sinh giỏi này?*

Bài tập 2 *Tính số các hoán vị của dãy chữ "TOANHOC" sao cho không có hai chữ cái nào giống nhau đứng cạnh nhau.*

Bài tập 3 *Tính số các hoán vị của dãy chữ "XAXAM" sao cho không có hai chữ cái nào giống nhau đứng cạnh nhau.*

Bài tập 4 *Bảy đa giác đều có diện tích là 1 nằm trong một hình vuông có độ dài cạnh là 2. Chứng minh rằng ít nhất có hai đa giác cắt nhau với diện tích phần chung không nhỏ hơn* $\frac{1}{7}$.

5 Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Đình Hòa, *Một số kiến thức cơ sở về hình học tổ hợp*, Nhà xuất bản Khoa học và Giáo dục, Hà Nội, 1999.
[2] Vũ Đình Hòa, *Lý thuyết tổ hợp và bài tập ứng dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, Đà Nẵng, 2002.

Mạng lưới ô vuông trên mặt phẳng

Vũ Đình Hòa

1 Đa giác có cạnh không tự cắt

Trong hình học phẳng chúng ta đã làm quen với nhiều hình lồi, chẳng hạn các hình tam giác, các hình vuông ... Trong sách giáo khoa, các đa giác lồi được định nghĩa như sau : *một đa giác được gọi là đa giác lồi khi nó nằm hoàn toàn về một phía của đường thẳng đi qua một cạnh bất kì của đa giác.*

Nếu trên mặt phẳng cho trước một tập hợp $n \geq 3$ điểm thì khi nối các điểm với nhau bởi các đoạn thẳng có đỉnh là điểm trong n điểm đã cho thì ta thu được một đa giác lồi hoặc một đoạn thẳng chứa các điểm còn lại ở bên trong, và ta gọi nó (đa giác lồi hoặc đoạn thẳng này) là *bao lồi* của tập hợp n điểm này.

Rất nhiều bài toán của lí thuyết tổ hợp có thể giải bằng cách vận dụng bao lồi của các hình hoặc của tập hợp điểm cho trước.

Ví dụ 1 *Trên mặt phẳng cho trước một số điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm sao cho đường tròn đi qua ba điểm này không chứa điểm nào cho trước ở bên trong.*

Ta xét bao lồi của tập hợp các điểm cho trước này. Do có ba trong số các điểm này không thẳng hàng, cho nên bao lồi của chúng là một đa giác lồi. Xét một cạnh AB của đa giác lồi này. Trong những đỉnh còn lại, giả sử C là đỉnh nhìn cạnh AB với một góc lớn nhất. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không chứa điểm nào đã cho bên trong.

Ngoài tam giác là đa giác có 3 đỉnh luôn là hình lồi, một n-giác bất kì với $n \geq 4$ có thể không phải là đa giác lồi. Một đa giác được gọi là *đa giác có cạnh không tự cắt* nếu như các cạnh của nó đôi một không cắt nhau trừ những cạnh liên tiếp có thể có đầu mút chung. Mọi đa giác lồi cũng là đa giác có cạnh không tự cắt. Cho trước một đa giác có cạnh không tự cắt, chúng ta luôn có thể chia nó thành các hình lồi, cụ thể là chia nó thành các tam giác, bởi các đường chéo không cắt nhau trong đa giác. Để chứng minh điều này, trước hết ta chứng minh kết quả sau:

Định lí 1 *Trong một đa giác có cạnh không tự cắt luôn có một đường chéo nằm hoàn toàn trong nó.*

Thật vậy, nếu đa giác đã cho là đa giác lồi thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên. Ngược lại, nếu đa giác đã cho không phải là đa giác lồi thì nó có một đỉnh, gọi là A, có góc lớn hơn 180°. Từ đỉnh A này ta kẻ một tia Ax nào đó, cắt biên của đa giác tại một điểm M. Do $\widehat{A} > 180°$, cho nên có một trong hai cạnh bên của A, chẳng hạn AB, sao cho tia AB (đi từ A tới B) không cắt cạnh của đa giác có chứa điểm M. Khi ta cho tia Ax quay quanh A theo chiều từ vị trí ban đầu tới vị trí AB, thì điểm M chạy trên biên của đa giác và lúc nào đó nó phải di chuyển từ một cạnh này sang cạnh khác của đa giác đã cho. Tại thời điểm đó, tia Ax phải đi qua một đỉnh C nào đó khác A của đa giác. Lúc đó đường chéo AC chính là đường chéo nằm hoàn toàn trong đa giác.

Định lí sau đây hiển nhiên là hệ quả của định lí trên:

Định lí 2 *Một n-giác có cạnh không tự cắt luôn có thể chia thành* $n - 2$ *tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau nằm hoàn toàn trong đa giác.*

Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp theo số đỉnh của đa giác.
Với $n = 3$ khẳng định của định lí hiển nhiên đúng. Giả sử kết luận của định lí đúng cho mọi k-giác ($k \leq n$) có cạnh không tự cắt.
Ta xét một $(n+1)$-giác có cạnh không tự cắt bất kì. Theo định lí đã chứng minh trên thì ta có thể chia nó thành hai đa giác với k và ℓ đỉnh có cạnh không tự cắt bởi một đường chéo nằm hoàn toàn trong đa giác. Ta có $k, \ell \geq 3$ và $k + \ell = n + 3$. Theo giả thiết quy nạp thì các k-giác và ℓ-giác này có thể chia thành $k - 2$ và $\ell - 2$ tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau và hoàn toàn nằm trong chúng. Bằng cách đó, ta đã chia $(n+1)$-giác đã cho thành $k + \ell - 4 = n - 1$ tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau và hoàn toàn nằm trong $(n+1)$-giác đã cho. Định lí được chứng minh cho trường hợp $(n+1)$-giác.

Ta gọi một tam giác có các đỉnh là đỉnh lưới của mạng lưới ô vuông là tam giác *đơn* nếu như nó không chứa một đỉnh lưới nào khác trên cạnh hoặc bên trong tam giác.

Định lí 3 *Các đỉnh của một k-giác có cạnh không tự cắt F (không nhất thiết phải lồi) nằm ở các điểm nguyên. Bên trong nó có n điểm nguyên, còn trên biên m điểm nguyên. Ta nối các điểm nguyên lại với nhau bằng các đoạn thẳng không cắt nhau sao cho tất cả các tam giác thu được là tam giác nguyên, khi đó số tam giác đơn thu được bằng nhau và bằng đúng* $2n + m - 2$.

Gọi s là số các tam giác đơn thu được. Tổng các góc của s tam giác đơn này là $\pi \times s$. Tổng này bằng đúng tổng các góc quanh các điểm ở bên trong F và các điểm trên chu vi của F (gồm các đỉnh của F và các điểm nguyên ở trên biên của nó). Tổng các góc quanh các đỉnh của F bằng $\pi \times (k-2)$ (do F có thể chia thành $k - 2$ tam giác bởi các đường chéo không tự cắt ở hoàn toàn bên trong nó theo định lí trên). Tổng các góc quanh mỗi điểm nguyên ở trên cạnh của F là π, và tổng các góc quanh mỗi đỉnh trong F là 2π. Do đó ta có đẳng thức:

$$\pi \times (k-2) + \pi \times (m-k) + 2\pi \times n = \pi \times s.$$

Và ta thu được đẳng thức $2n + m - 2 = s$.

Bài tập

1. Chứng minh rằng một đa giác là đa giác lồi khi và chỉ khi bốn đỉnh bất kì của chúng tạo thành một tứ giác lồi.

2. Trên mặt phẳng cho trước năm điểm sao cho không có 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng. Chứng minh rằng có thể chọn ra trong chúng 4 điểm là đỉnh của một tứ giác lồi.

3. Trên mặt phẳng cho trước $n \geq 5$ điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất C_{n-3}^2 tứ giác lồi mà các đỉnh của chúng là 4 điểm trong số n điểm đã cho. (Kì thi Toán quốc tế lần thứ 11, năm 1969)

4. Trên mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm. Chứng minh rằng luôn tìm được một điểm sao cho gần nó nhất có không quá 3 điểm đã cho.

5. Trên mặt bàn đặt n hình vuông bằng cát-tông và n hình vuông bằng nhựa sao cho các hình vuông cùng loại bằng cát-tông (cũng như các hình vuông cùng bằng nhựa) đôi một không có điểm chung. Sau khi xếp chúng lên mặt bàn, người ta nhận xét thấy rằng tập đỉnh hình vuông bằng nhựa hoàn toàn trùng với tập đỉnh hình vuông bằng cát-tông.

   Hãy chứng minh rằng các hình vuông bằng cát-tông được đặt trùng hoàn toàn với các hình vuông bằng nhựa.

2 Mạng lưới đỉnh ô vuông

Một hệ thống vô hạn ô vuông tạo trên mặt phẳng giống như ta lát gạch một cái sân bởi những viên gạch lát ô vuông được gọi là mạng lưới đỉnh ô vuông. Các ô vuông này được gọi là các ô vuông cơ sở. Các đỉnh ô vuông chính là các điểm nguyên (điểm có cả tung độ lẫn hoành độ là các số nguyên) của một hệ trục tọa độ song song với các cạnh của các hình vuông cơ sở và có đơn vị gốc là độ dài cạnh hình vuông cơ sở. Một đa giác có đỉnh là các đỉnh lưới của mạng ô vuông được gọi là đa giác nguyên.
Với mạng lưới đỉnh ô vuông có nhiều bài toán khá thú vị. Sau đây là một tính chất cơ bản của mạng lưới đỉnh ô vuông.

Định lí 4 *Đa giác đều duy nhất có đỉnh tại các điểm lưới ô vuông là hình vuông.*

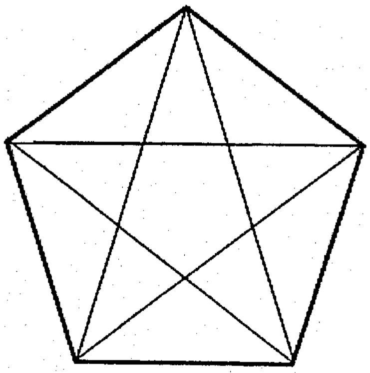
Dễ thấy rằng ta có thể dựng được những hình vuông có đỉnh tại các điểm lưới ô vuông, chẳng hạn hình vuông cơ sở của mạng lưới ô vuông là một hình vuông như vậy. Bây giờ ta chứng minh rằng ngoài hình vuông, ta không thể dựng một đa giác đều nào khác có đỉnh tại các điểm lưới của mạng lưới ô vuông nào cả.
Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.
Trước hết ta chứng minh rằng không thể dựng được tam giác đều có đỉnh tại các điểm lưới ô vuông. Thật vậy, giả sử dựng được tam giác đều cạnh a có đỉnh tại các điểm lưới của mạng lưới ô vuông. Khi đó diện tích của tam giác đều này là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ là một số vô tỉ, do a^2 là một số nguyên. Mặt khác, diện tích của tam giác có ba đỉnh là điểm lưới của mạng lưới ô vuông là một số hữu tỉ, vô lí. Vậy, không thể dựng được tam giác đều có

đỉnh tại các điểm lưới của mạng lưới ô vuông.
Bây giờ ta chứng minh rằng không thể dựng được ngũ giác đều có đỉnh tại các điểm lưới của hình vuông. Thật vậy, giả sử khẳng định này không đúng, và tồn tại ngũ giác đều có đỉnh tại điểm lưới của mạng ô vuông, để gọn ta gọi đó là ngũ giác đều tốt.
Xét tập hợp:

$$\mathcal{A} = \{a^2 : a \text{ là cạnh của ngũ giác đều tốt}\}.$$

Do $\mathcal{A}$ là một tập con khác rỗng của tập hợp các số nguyên, cho nên tồn tại một phần tử nhỏ nhất a của $\mathcal{A}$. Xét năm đỉnh của ngũ giác đều cạnh a này.

Ta đem nối các đường chéo của ngũ giác lại. Dễ thấy rằng mỗi đường chéo của một ngũ giác đều song song với cạnh đối diện của nó. Do đó hai đường chéo tùy ý của ngũ giác cùng với hai cạnh đối diện của chúng lập thành một hình bình hành, cho nên giao điểm của hai đường chéo cũng là một điểm của mạng lưới ô vuông. Để chứng minh điều này ta lập một hệ tọa độ có trục song song với cạnh của ô vuông cơ sở và có độ dài bằng độ dài của cạnh hình vuông cơ sở. Khi đó các đỉnh của mạng lưới ô vuông cơ sở chính là các điểm có tọa độ nguyên.
Bạn đọc dễ dàng chứng minh rằng giao điểm này có tọa độ bằng tổng hai tọa độ của hai đỉnh cuối của hai cạnh đối diện trừ đi tọa độ của đỉnh chung của hai cạnh này. Như vậy năm giao điểm của các đường chéo lập nên một hình ngũ giác đều có năm đỉnh là năm điểm nguyên.



Hình 1: Ngũ giác đều

Dễ thấy rằng ngũ giác đều này có cạnh nhỏ hơn a, mâu thuẫn với giả thiết rằng trong các ngũ giác đều có năm đỉnh là các điểm nguyên, ngũ giác đều có cạnh nhỏ nhất là a. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng không tồn tại ngũ giác đều nào có cả năm đỉnh là năm điểm nguyên.
Mặt khác, ta có thể thấy rằng không thể dựng được lục giác đều có đỉnh tại mạng lưới đỉnh mạng lưới ô vuông, vì nếu có một lục giác đều như vậy, thì cũng có một tam giác đều (được tạo bởi ba đỉnh đôi một không kề nhau của lục giác đều này) có đỉnh là đỉnh lưới của mạng ô vuông đã cho.
Bây giờ ta chứng minh rằng với $n \geq 7$ thì không thể dựng được n-giác đều có đỉnh tại đỉnh lưới mạng ô vuông. Thật vậy, giả sử dựng được một n-giác đều $A_1A_2 \cdots A_n$ có đỉnh tại các đỉnh của mạng lưới ô vuông. Khi đó bán kính R của đường tròn ngoại tiếp n-giác lớn hơn cạnh a của n-giác đều $A_1A_2 \cdots A_n$. Ta chọn một đỉnh O của mạng lưới ô vuông và chọn các đỉnh $B_1, B_2 \cdots B_n$ sao cho $\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ $(A_{n+1} = A_1)$. Vì các đỉnh A_i và O là đỉnh lưới ô vuông, cho nên các điểm B_i cũng là đỉnh lưới ô vuông. Ngoài ra, ta thấy

dễ dàng là $B_1B_2\cdots B_n$ là một n-giác đều, đồng dạng với n-giác đều $A_1A_2\cdots A_n$ theo hệ số $\frac{R}{a} < 1$. Cứ tiến hành như vậy, sau một số k bước hữu hạn đủ lớn, ta thu được một n-giác đều có cạnh nhỏ hơn cạnh của ô vuông cơ sở là điều vô lí. Do đó không thể dựng được n-giác đều (với $n \geq 7$) có đỉnh tại đỉnh lưới của mạng ô vuông.

Bài tập

1. Tìm bán kính lớn nhất của đường tròn chỉ đi qua các đỉnh của mạng lưới ô vuông mà không cắt cạnh ô vuông nào ở điểm trong của nó.

2. Cho trước một số đỉnh của mạng lưới ô vuông, chứng minh rằng ta có thể tô màu các đỉnh này bởi hai màu xanh và đỏ sao cho trên mỗi đường nằm ngang và trên mỗi đường thẳng đứng số điểm được tô đỏ và số điểm được tô xanh xấp xỉ nhau.
(Đề thi Toán quốc tế năm 1986)

3. Chứng minh rằng nếu đi dọc theo các cạnh của ô vuông cơ sở từ một đỉnh bất kì rồi ta trở về đỉnh ban đầu sau hữu hạn bước (có độ dài bằng cạnh hình ô vuông cơ sở), thì số bước đi của ta sẽ là một số chẵn.

4. Điền vào mỗi ô vuông cơ sở một số nguyên sao cho mỗi số này bằng đúng trung bình cộng của bốn số ở bốn ô vuông cơ sở có cạnh kề với nó. Hãy chứng minh rằng:
a) Tất cả các số được điền bằng nhau, nếu như nó bị chặn.
b) Có một cách điền sao cho các số được điền không nhất thiết phải bằng nhau tất cả.

5. Trên bàn cờ vô hạn ta thực hiện một trò chơi như sau:
Đầu tiên xếp n^2 quân vào một hình vuông gồm $n \times n$ ô vuông cạnh liền cạnh sao cho trong mỗi ô vuông của hình vuông chứa một quân cờ. Cách đi trong trò chơi là quân cờ chỉ được nhảy theo một chiều ngang hoặc chiều dọc qua một ô có chứa quân cờ ở ngay sát bên cạnh sang một bên một ô trống tiếp ngay sau đó. Khi đó quân cờ ở ô bị nhảy qua sẽ bị loại bỏ.
Tìm các giá trị của n để có thể kết thúc trò chơi sao cho trên bàn cờ chỉ còn lại đúng một quân cờ.
(Kỳ thi Toán quốc tế năm 1993)

3 Định lí Picard

Một ứng dụng khá thiết thực của mạng lưới ô vuông là ứng dụng vào việc tính diện tích của các hình phẳng. Ta có thể thực hiện việc tính diện tích của một hình phẳng bằng cách đem phủ nó bởi một lưới ô vuông đủ nhỏ rồi tính diện tích hình đã cho. Cơ sở cho việc tính diện tích đa giác nguyên (đa giác có đỉnh là các điểm tọa độ nguyên) là việc xác định diện tích của các hình tam giác có đỉnh là các đỉnh lưới (còn gọi là đỉnh nguyên) mà không chứa đỉnh nguyên nào khác bên trong hoặc trên cạnh của nó (tam giác đơn).

Định lí 5 *Diện tích của tam giác đơn trên mạng lưới ô vuông đơn vị đúng bằng $\frac{1}{2}$.*

Trước tiên ta thấy diện tích của một tam giác nguyên không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ vì ta có thể nội tiếp nó trong một hình chữ nhật bởi các cạnh đi qua đỉnh nó và song song với các đường thẳng của mạng lưới ô vuông. Khi đó diện tích của tam giác nguyên bằng tổng hoặc hiệu của diện tích của các hình chữ nhật con và các tam giác vuông có cạnh là số nguyên được tạo thành, nên có dạng $\frac{k}{2}$, với k là một số nguyên dương, tức là ít nhất cũng phải là $\frac{1}{2}$.
Mặt khác giả sử hình chữ nhật phủ tam giác đơn ABC cho trước theo cách trên có độ dài hai cạnh là m và n sẽ có diện tích bằng $m \times n$ và chứa $(m-1)(n-1)$ điểm nguyên bên trong và $2(n+m)$ điểm nguyên trên biên. Ta chia hình chữ nhật này ra thành các tam giác đơn bởi các đoạn thẳng nối các điểm nguyên, bắt đầu là các cạnh của tam giác ABC, và thu được như định lí 3 của mục trước cho ta là $2(m-1)(n-1)+2(m+n)-2 = 2mn$ tam giác đơn. Do diện tích của mỗi tam giác đơn (cũng là tam giác nguyên) không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, cho nên diện tích của hình chữ nhật phủ nó không nhỏ hơn mn. Do ở đây xảy ra đẳng thức, nên diện tích của mỗi tam giác đơn thành phần, đặc biệt là diện tích của tam giác đơn ABC, cũng bằng đúng $\frac{1}{2}$.

Định lí Picard sau đây cho ta cách tính diện tích của các đa giác nguyên có cạnh không tự cắt:

Định lí 6 *Các đỉnh của một đa giác F có cạnh không tự cắt (không nhất thiết phải lồi) nằm ở các điểm nguyên. Bên trong nó có n điểm nguyên, còn trên biên m điểm nguyên. Khi đó diện tích của nó bằng*

$$S_F = n + \frac{m}{2} - 1.$$

Theo định lí 3 đã chứng minh ở mục trước, ta có thể chia F thành $2n+m-2$ tam giác đơn bởi các đoạn thẳng nối các điểm nguyên nằm trong hoặc trên biên của nó. Theo định lí đã chứng minh ở trên, diện tích của mỗi tam giác đơn chính bằng $\frac{1}{2}$, nên diện tích của F đúng bằng

$$S_F = n + \frac{m}{2} - 1.$$

Bài tập

1. Các đỉnh của một tam giác nguyên ABC không chứa một điểm nguyên nào trên cạnh ngoài các đỉnh của nó và chứa đúng một điểm nguyên ở trong tam giác. Chứng minh rằng điểm nguyên ở trong tam giác này là trọng tâm của tam giác.

2. Trên mặt phẳng lấy năm điểm nguyên phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại trong chúng hai điểm nguyên sao cho đoạn thẳng nối hai điểm nguyên này đi qua một điểm nguyên nào đó.

3. Chứng minh rằng trong một hình ngũ giác lồi nguyên luôn có ít nhất một điểm nguyên là điểm trong.

4. Hãy tính diện tích nhỏ nhất mà một ngũ giác lồi có đỉnh là các điểm nguyên có thể có.

5. Trên một tờ giấy có kẻ mạng lưới ô vuông có n ô bị tô đen. Chứng minh rằng có thể cắt từ tờ giấy này ra một số hữu hạn các hình vuông thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:
a) Tất cả các ô đen đều nằm trong các hình vuông này,
b) Tỉ lệ diện tích bị tô đen và diện tích toàn phần trong mỗi hình vuông này ở giữa $\frac{1}{5}$ và $\frac{4}{5}$.

Nguyên lý Dirichlet và một số bài toán áp dụng

Nguyễn Duy Thái Sơn

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: *the pigeonhole principle*, cũng có nơi gọi là *the drawer principle*) - ở dạng đơn giản nhất - được phát biểu đầu tiên bởi G.Lejeune Dirichlet (1805-1859), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như sau:

"Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng ($n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng".

Một cách tổng quát, ta có nguyên lý Dirichlet mở rộng:

"Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng ($m, n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là $1 + \left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ con thỏ".

Ở đây, ký hiệu $[a]$ được dùng để chỉ phần nguyên của số thực a tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Dùng phưng pháp phản chứng, ta có thể đưa ra một cách chứng minh khá ngắn gọn cho nguyên lý Dirichlet (ngay cả dưới dạng mở rộng); học sinh THPT cũng có thể làm được việc này; và điều đó không hề làm giảm đi giá trị của bản thân nguyên lý. Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng (hiệu quả đến bất ngờ): sử dụng nó, ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Chính vì vậy, tại các cuộc thi học sinh giỏi toán (quốc gia và quốc tế), nguyên lý Dirichlet thường xuyên được khai thác. Để minh hoạ, dưới đây, ta xét một số bài toán cụ thể.

Bài 1 (*Putnam 1993*). *Cho một dãy số gồm 19 số nguyên dương không vượt quá 93 và một dãy số gồm 93 số nguyên dương không vượt quá 19. Chứng minh rằng từ hai dãy số đó ta có thể lần lượt trích ra hai dãy con có tổng các số hạng là bằng nhau.*

Giải. Ta xét bài toán tổng quát:

Cho hai dãy (hữu hạn) các số nguyên dưng:

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_m \le n, \quad y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n \le m.$$

Khi đó, tồn tại các "chỉ số" $1 \le i_1 \le i_2 \le m$, $1 \le j_1 \le j_2 \le n$ sao cho $\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i =$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc vào cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập con đó các phần tử chung (hai tập con 7-phần tử khác nhau thì có tối đa sáu phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con k-phần tử (với k nguyên dương, $k \leq 7$), thoả yêu cầu của bài toán: hiệu của hai tổng nghịch đảo các phần tử trong hai tập con này sẽ sai khác nhau ít hơn $1/1000$.

Bài 3 (*Iberoamerica 1998*). *Các đại diện của n quốc gia ($n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$) ngồi quanh một bàn tròn theo cách sao cho hai người ngồi sát bên phải hai đại diện bất kỳ với cùng quốc tịch thì phải có quốc tịch khác nhau. Hãy xác định (theo n) số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đó.*

Giải. Ta sẽ dùng $X_1, X_2, \ldots, X_n$ để ký hiệu n quốc gia có đại diện ngồi tại bàn tròn; các đại diện có quốc tịch X_i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) sẽ được đánh số là $x_i^1, x_i^2, \ldots$

1/ Trước tiên, nếu có nhiều hơn n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn, thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) để quốc gia X_i có ít nhất là $n+1$ đại diện, mà ta ký hiệu là $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n+1}$; nhưng chỉ có n quốc tịch, nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, trong số $n+1$ người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n+1}$, phải có hai người có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng có không quá n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn.

2/ Tiếp theo, giả sử mỗi quốc gia có đúng n đại diện: các đại diện của X_i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) là $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n$; ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp theo n rằng có một cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện đó vào bàn tròn sao cho mọi yêu cầu của bài toán đều được tho mãn.

Mỗi cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện vào bàn tròn thực chất là một hoán vị

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2}) \tag{1}$$

của tập hợp $\{x_i^j |\ i, j \in \mathbb{N}^*;\ i, j \leq n\}$ với quy ước rằng trong cách sắp xếp này:

1. a_{k+1} là đại diện ngồi sát bên phải a_k (với mọi k nguyên dưng mà $k < n^2$)

2. a_1 ngồi sát bên phải a_{n^2}

(ta đồng nhất các hoán vị có thể thu được từ nhau qua một phép hoán vị vòng quanh).

Khi $n = 2$ dễ thấy cách sắp xếp $(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2)$ thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán. Giả sử với $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ nào đó đã có một cách sắp xếp, mà ta vẫn giữ ký hiệu (1), thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán. Khi đó, có thể chứng minh rằng:

Với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [1, n]$, tồn tại duy nhất $j \in \mathbb{N} \cap [1; n]$ sao cho người ngồi sát bên phải x_i^j cũng có quốc tịch X_i.

Thật vậy, nếu n người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n$ đều có quốc tịch khác X_i (chỉ có $n-1$ quốc tịch như thế), thì theo nguyên lý Dirichlet, ít nhất hai người trong số họ phải có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn này chứng tỏ sự tồn tại của $j = j_i$. Hơn nữa, nếu $\mathbb{N} \cap [1; n] \ni k \neq j_i$, thì - theo yêu cầu của bài toán - người ngồi sát bên phải x_i^k sẽ không cùng quốc tịch X_i với người ngồi sát bên phải $x_i^{j_i}$. Điều đó cho thấy tính duy nhất của j_i và (2) đã được chứng minh.

làm của mỗi học sinh có thể được đặt tương ứng với một bộ $x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in I^5$; trong đó, x_i là số thứ tự của phương án mà học sinh đã chọn để trả lời cho câu hỏi thứ i ($i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq 5$). Ngoài ra, nếu $x \in I^5$ ta cũng sẽ chấp nhận cách viết $x \equiv (x_1; x')$ với $x' := (x_2; x_3; x_4; x_5) \in I^4$. Bằng cách như vậy, dễ thấy I^5 được phân hoạch thành $4^4 = 256$ tập con (rời nhau); mỗi tập con gồm đúng 4 bộ chỉ khác nhau ở thành phần thứ nhất, tức là tập con có dạng

$$\mathcal{A}_{x'} := \{(1; x'); (2; x'); (3; x'); (4; x')\} \subset I^5 \tag{1}$$

với $x' \in I^4$. Vì $2000 > 7 \times 256$ nên theo nguyên lý Dirichlet có tám học sinh (khác nhau) $A_1, A_2, \ldots, A_8$, mà bài làm của họ thì ứng với các bộ thuộc cùng một tập con $\mathcal{A}$ nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Nhưng $2000 - 8 = 1992 > 7 \times 256$, nên lại theo nguyên lý Dirichlet - tồn tại tám học sinh (khác nhau, trong số 1992 học sinh còn lại), là $B_1, B_2, \ldots, B_8$, có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con $\mathcal{B}$ nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Cuối cùng, vẫn có $1992 - 8 = 1984 > 7 \times 256$ nên dùng nguyên lý Dirichlet một lần nữa, từ 1984 học sinh còn lại, ta tiếp tục tìm ra tám học sinh (khác nhau), là $C_1, C_2, \ldots, C_8$, mà bài làm của họ ứng với các bộ trong cùng một tập con $\mathcal{C}$ nào đó. Từ bốn học sinh bất kỳ trong số 24 học sinh

$$A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1, B_2, \ldots, B_8, C_1, C_2, \ldots, C_8,$$

ta luôn chọn ra được hai học sinh có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con (một trong ba tập con $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ hoặc $\mathcal{C}$); giả sử, chẳng hạn, đó là các học sinh A_i và A_j ($i, j \in \mathbb{Z}$; $1 \leq i < j \leq 8$) mà bài làm ứng với hai bộ trong $\mathcal{A}$. Theo cách xây dựng các tập con (1), bài làm của hai học sinh này chỉ có thể khác nhau ở tối đa là một câu hỏi (chính là câu hỏi thứ nhất, nếu hai bài làm không hoàn toàn giống nhau); yêu cầu của bài toán đã không được thoả mãn!

2/ Bây giờ, ta chỉ ra một tình huống mà $n = 25$ thoả yêu cầu của bài toán. Muốn vậy, xét

$$S := \left\{x \in I^5 | \sum_{i=1}^{5} x_i \equiv 0 \pmod 4\right\} \tag{2}$$

Rõ ràng S gồm đúng $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 256$ bộ; hơn nữa, (2) cho thấy: khi $x, y \in S$ thì

$$x \neq y \Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}^*,\ i < j \leq 5,\ x_i \neq y_i,\ x_j \neq y_j. \tag{3}$$

Lấy $\mathcal{D}$ là một tập con 250 phần tử của S và xét tình huống mà: với mỗi $x \in \mathcal{D}$ tồn tại đúng 8 học sinh có bài làm cùng ứng với bộ x (tình huống này hoàn toàn có thể xảy ra vì $2000 = 8 \times 250$. Khi ấy (do $25 > 8 \times 3$ theo nguyên lý Dirichlet, cứ 25 học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số 25 học sinh này) có bài làm ứng với bốn bộ $x, y, z, t \in \mathcal{D} \subset S$ đôi một khác nhau; và theo (3), hai học sinh nào trong số bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất là hai câu hỏi, đúng như yêu cầu của bài toán.

Từ 1/ và 2/, ta thấy: số tự nhiên bé nhất phải tìm là $n = 25$.

Nguyên lý Dirichlet và một số bài toán áp dụng

Nguyễn Duy Thái Sơn

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: *the pigeonhole principle*, cũng có nơi gọi là *the drawer principle*) - ở dạng đơn giản nhất - được phát biểu đầu tiên bởi G.Lejeune Dirichlet (1805-1859), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như sau:

"Nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng ($n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng".

Một cách tổng quát, ta có nguyên lý Dirichlet mở rộng:

"Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng ($m, n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là $1 + \left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ con thỏ".

Ở đây, ký hiệu $[a]$ được dùng để chỉ phần nguyên của số thực a tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Dùng phưng pháp phản chứng, ta có thể đưa ra một cách chứng minh khá ngắn gọn cho nguyên lý Dirichlet (ngay cả dưới dạng mở rộng); học sinh THPT cũng có thể làm được việc này; và điều đó không hề làm giảm đi giá trị của bản thân nguyên lý. Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng (hiệu quả đến bất ngờ): sử dụng nó, ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Chính vì vậy, tại các cuộc thi học sinh giỏi toán (quốc gia và quốc tế), nguyên lý Dirichlet thường xuyên được khai thác. Để minh hoạ, dưới đây, ta xét một số bài toán cụ thể.

Bài 1 (*Putnam 1993*). *Cho một dãy số gồm 19 số nguyên dương không vượt quá 93 và một dãy số gồm 93 số nguyên dương không vượt quá 19. Chứng minh rằng từ hai dãy số đó ta có thể lần lượt trích ra hai dãy con có tổng các số hạng là bằng nhau.*

Giải. Ta xét bài toán tổng quát:

Cho hai dãy (hữu hạn) các số nguyên dưng:

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_m \le n, \quad y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n \le m.$$

Khi đó, tồn tại các "chỉ số" $1 \le i_1 \le i_2 \le m$, $1 \le j_1 \le j_2 \le n$ sao cho $\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i =$

$\sum_{j=j_1}^{j_2} x_j$.
Giải bài toán tổng quát:

Đặt $a_p := \sum_{i=1}^{p} x_i$ ($p \in \mathbb{Z},\ 1 \le p \le m$) và $b_q := \sum_{j=1}^{q} y_j$ ($q \in \mathbb{Z}, 1 \le q \le n$). Thay đổi vai trò của các "ký tự" x, a, m, i, p tương ứng với các ký tự y, b, n, j, q nếu cần, ta có thể xem rằng $a_m \le b_n$. Khi đó, với mỗi $p \in \mathbb{Z} \cap [1, m]$, tồn tại $f(p) := q \in \mathbb{Z} \cap [1, n]$ là chỉ số bé nhất mà $a_p \le b_q$. Xét m hiệu:

$$b_{f(1)} - a_1;\ b_{f(2)} - a_2;\ \dots ; b_{f(m)} - a_m. \qquad (1)$$

Trước hết, ta có nhận xét rằng mọi hiệu đều bé hơn m. Thật vậy, nếu có một chỉ số $p \in \mathbb{Z} \cap [1, m]$ nào đó sao cho $m \le b_{f(p)} - a_p$, thì ($m < b_{f(p)}$ nên $f(p) > 1$ và)

$$\begin{aligned} m \le b_{f(p)-1} + y_{f(p)} - a_p \ &\Rightarrow\ 0 \le m - y_{f(p)} \le b_{f(p)-1} - a_p \\ &\Rightarrow\ a_p \le b_{f(p)-1}, \end{aligned}$$

mâu thuẫn với định nghĩa của $f(p)$. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng: quả thực, mỗi hiệu ở (1) là bé hơn m.

Bây giờ, nếu một trong các hiệu đó triệt tiêu: $b_{f(p)} - a_p = 0$, thì rõ ràng ta có ngay đpcm với cách chọn $i_1 := 1 =: j_1,\ i_2 := p,\ j_2 := f(p)$. Trong trường hợp còn lại, theo nhận xét trên, toàn bộ m hiệu ở (1) đều thuộc $\mathbb{Z} \cap [1, m-1]$, một tập hợp chỉ có $m - 1$ phần tử, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai hiệu bằng nhau; tức là, tồn tại $r, s \in \mathbb{Z} \cap [1, m],\ r > s$, để

$$\begin{aligned} &b_{f(r)} - a_r = b_{f(s)} - a_s \\ \Rightarrow\ &b_{f(r)} - b_{f(s)} = a_r - a_s; \end{aligned}$$

và ta cũng có đpcm, với $i_1 := s + 1,\ i_2 := r,\ j_1 := f(s) + 1,\ j_2 := f(r)$.

Bài 2 (*Vô địch Cộng hoà Czech 1998*). *Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương $k \le 7$ và có hai tập con k-phần tử:*

$$\{a_1; a_2; \dots ; a_k\}, \{b_1; b_2; \dots ; b_k\}$$

rời nhau của X sao cho

$$\left|\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}\right) - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}\right)\right| < \frac{1}{1000}.$$

Giải. Xét $C_{14}^7 = 3432$ tập con 7-phần tử của X. Tổng (các) nghịch đo của các phần tử trong mỗi tập con này rõ ràng là không vượt quá $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} < 2,6$ nên phải thuộc vào một trong số 2600 nửa khoảng:

$$\left(\frac{0}{1000}; \frac{1}{1000}\right], \left(\frac{1}{1000}; \frac{2}{1000}\right], \dots, \left(\frac{2599}{1000}; \frac{2600}{1000}\right].$$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc vào cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập con đó các phần tử chung (hai tập con 7-phần tử khác nhau thì có tối đa sáu phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con k-phần tử (với k nguyên dương, $k \leq 7$), thoả yêu cầu của bài toán: hiệu của hai tổng nghịch đảo các phần tử trong hai tập con này sẽ sai khác nhau ít hơn $1/1000$.

Bài 3 (*Iberoamerica 1998*). *Các đại diện của n quốc gia ($n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$) ngồi quanh một bàn tròn theo cách sao cho hai người ngồi sát bên phải hai đại diện bất kỳ với cùng quốc tịch thì phải có quốc tịch khác nhau. Hãy xác định (theo n) số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đó.*

Giải. Ta sẽ dùng $X_1, X_2, \ldots, X_n$ để ký hiệu n quốc gia có đại diện ngồi tại bàn tròn; các đại diện có quốc tịch X_i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) sẽ được đánh số là $x_i^1, x_i^2, \ldots$

1/ Trước tiên, nếu có nhiều hơn n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn, thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) để quốc gia X_i có ít nhất là $n+1$ đại diện, mà ta ký hiệu là $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n+1}$; nhưng chỉ có n quốc tịch, nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, trong số $n+1$ người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{n+1}$, phải có hai người có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng có không quá n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn.

2/ Tiếp theo, giả sử mỗi quốc gia có đúng n đại diện: các đại diện của X_i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) là $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n$; ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp theo n rằng có một cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện đó vào bàn tròn sao cho mọi yêu cầu của bài toán đều được tho mãn.

Mỗi cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện vào bàn tròn thực chất là một hoán vị

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n^2-1}, a_{n^2}) \tag{1}$$

của tập hợp $\{x_i^j |\, i, j \in \mathbb{N}^*;\ i, j \leq n\}$ với quy ước rằng trong cách sắp xếp này:

1. a_{k+1} là đại diện ngồi sát bên phải a_k (với mọi k nguyên dưng mà $k < n^2$)

2. a_1 ngồi sát bên phải a_{n^2}

(ta đồng nhất các hoán vị có thể thu được từ nhau qua một phép hoán vị vòng quanh).

Khi $n = 2$ dễ thấy cách sắp xếp $(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2)$ thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán. Giả sử với $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ nào đó đã có một cách sắp xếp, mà ta vẫn giữ ký hiệu (1), thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán. Khi đó, có thể chứng minh rằng:

Với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [1, n]$, tồn tại duy nhất $j \in \mathbb{N} \cap [1; n]$ sao cho người ngồi sát bên phải x_i^j cũng có quốc tịch X_i.

Thật vậy, nếu n người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n$ đều có quốc tịch khác X_i (chỉ có $n-1$ quốc tịch như thế), thì theo nguyên lý Dirichlet, ít nhất hai người trong số họ phải có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn này chứng tỏ sự tồn tại của $j = j_i$. Hơn nữa, nếu $\mathbb{N} \cap [1; n] \ni k \neq j_i$, thì - theo yêu cầu của bài toán - người ngồi sát bên phải x_i^k sẽ không cùng quốc tịch X_i với người ngồi sát bên phải $x_i^{j_i}$. Điều đó cho thấy tính duy nhất của j_i và (2) đã được chứng minh.

Do (2), bằng cách hoán vị vòng quanh nếu cần, trong (1) ta có thể xem a_1 và a_2 có cùng quốc tịch; từ đó, a_1 khác quốc tịch với a_{n^2}: vậy, vẫn theo (2), với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [1; n]$, tồn tại duy nhất $k_i \in \mathbb{N} \cap [1; n^2 - 1]$ sao cho a_{k_i} và a_{k_i+1} có cùng quốc tịch X_i.

Bây giờ, giả sử mỗi quốc gia X_i ($\mathbb{N}^* \ni i \leq n$) có thêm đại diện thứ $n+1$ là x_i^{n+1} ngoài ra, có thêm quốc gia X_{n+1} với $n+1$ đại diện là $x_{n+1}^1, x_{n+1}^2, \ldots, x_{n+1}^{n+1}$. Khi đó, từ bộ (1), bằng cách:

+) thay cặp (a_{k_1}, a_{k_1+1}) bởi bộ năm $(a_{k_1}, x_{n+1}^1, x_{n+1}^{n+1}, x_1^{n+1}, a_{k_1+1})$

+) thay cặp (a_{k_i}, a_{k_i+1}) bởi bộ bốn $(a_{k_i}, x_{n+1}^i, x_i^{n+1}, a_{k_i+1})$ với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [2; n]$ ta sẽ thu được một cách sắp xếp thoả mãn mọi yêu cầu của bài toán cho trường hợp $n+1$ quốc gia. Vậy 2/ đã được chứng minh theo nguyên lý quy nạp.

Từ 1/ và 2/, ta thấy: số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đã cho là n^2.

Bài 4 (*Trích đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO, 1999). Cho $\mathcal{A} = \{a_1; a_2; a_3; \cdots\} \subset \mathbb{N}^*$ thoả mãn điều kiện $1 \leq a_{p+1} - a_p \leq 1999$ với mọi $p \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số p, q với $p < q$ sao cho a_p / a_1.*

Giải.

Đặt $A(1; j) := a_1 + j - 1$ với mọi j nguyên dương mà $j \leq 1999$ và bằng quy nạp, ta định nghĩa:

$$B_i := \prod_{k=1}^{1999} A(i-1; k), A(i; j) := B_i + A(i-1; j)$$

với mọi i, j nguyên dương mà $i \geq 2$, $j \leq 1999$. Từ cách xây dựng trên, dễ dàng chứng minh $A(m; j) < A(n; j)$, $A(m; j)/A(n; j)$ với mọi bộ ba số nguyên dương m, n, j mà $j \leq 1999$ và $m < n$. Từ cách xây dựng trên, cũng dễ thấy (với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$: $A(i; 1), A(i; 2), \ldots, A(i; 1999)$) là 1999 số nguyên dương liên tiếp (không bé hơn a_1) do đó, theo giả thiết của bài toán về tập hợp $\mathcal{A}$, thì tồn tại $j_i \in \mathbb{Z} \cap [1; 1999]$ để $A(i; j_i) \in \mathcal{A}$.

Bấy giờ, vì $j_1, j_2, \ldots, j_{2000} \in \mathbb{Z} \cap [1 : 1999]$, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai số nguyên dương $m < n \leq 2000$ mà $j_m = j_n =: j$; với chúng, ta tìm được cặp chỉ số $p < q$ sao cho

$$a_p = A(m; j_m) = A(m; j) | A(n; j) = A(n; j_n) = a_q \quad \text{(đpcm)}.$$

Bài 5 (*Vô địch Trung Quốc 2000). Có 2000 học sinh tham gia một cuộc thi trắc nghiệm gồm 5 câu hỏi; mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, và mỗi học sinh chỉ được phép chọn 1 trong số 4 phương án tương ứng để trả lời cho câu hỏi. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho các học sinh có thể làm bài thi theo cách nào đó mà cứ n học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số n học sinh này) để hai học sinh nào trong số bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất là hai câu hỏi.*

Giải.

1/ Trước tiên, ta chứng minh rằng nếu $n \leq 24$ thì trong mọi trường hợp (của bài làm các học sinh) yêu cầu của bài toán đều không được thoả mãn. Xét $I := \{1; 2; 3; 4\}$. Bài làm của mỗi học sinh có thể được đặt tương ứng với một bộ $x = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in I^5$; trong đó, x_i là số thứ tự của phương án mà học sinh đã chọn để trả lời cho câu hỏi thứ i ($i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le 5$). Ngoài ra, nếu $x \in I^5$ ta cũng sẽ chấp nhận cách viết $x \equiv (x_1; x')$ với $x' := (x_2; x_3; x_4; x_5) \in I^4$. Bằng cách như vậy, dễ thấy I^5 được phân hoạch thành $4^4 = 256$ tập con (rời nhau); mỗi tập con gồm đúng 4 bộ chỉ khác nhau ở thành phần thứ nhất, tức là tập con có dạng

$$\mathcal{A}_{x'} := \{(1; x'); (2; x'); (3; x'); (4; x')\} \subset I^5 \tag{1}$$

với $x' \in I^4$. Vì $2000 > 7 \times 256$ nên theo nguyên lý Dirichlet có tám học sinh (khác nhau) $A_1, A_2, \ldots, A_8$, mà bài làm của họ thì ứng với các bộ thuộc cùng một tập con $\mathcal{A}$ nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Nhưng $2000 - 8 = 1992 > 7 \times 256$, nên lại theo nguyên lý Dirichlet - tồn tại tám học sinh (khác nhau, trong số 1992 học sinh còn lại), là $B_1, B_2, \ldots, B_8$, có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con $\mathcal{B}$ nào đó (trong số 256 tập con nói trên). Cuối cùng, vẫn có $1992 - 8 = 1984 > 7 \times 256$ nên dùng nguyên lý Dirichlet một lần nữa, từ 1984 học sinh còn lại, ta tiếp tục tìm ra tám học sinh (khác nhau), là $C_1, C_2, \ldots, C_8$, mà bài làm của họ ứng với các bộ trong cùng một tập con $\mathcal{C}$ nào đó. Từ bốn học sinh bất kỳ trong số 24 học sinh

$$A_1, A_2, \ldots, A_8, B_1, B_2, \ldots, B_8, C_1, C_2, \ldots, C_8,$$

ta luôn chọn ra được hai học sinh có bài làm ứng với các bộ thuộc cùng một tập con (một trong ba tập con $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ hoặc $\mathcal{C}$); giả sử, chẳng hạn, đó là các học sinh A_i và A_j ($i, j \in \mathbb{Z}$; $1 \le i < j \le 8$) mà bài làm ứng với hai bộ trong $\mathcal{A}$. Theo cách xây dựng các tập con (1), bài làm của hai học sinh này chỉ có thể khác nhau ở tối đa là một câu hỏi (chính là câu hỏi thứ nhất, nếu hai bài làm không hoàn toàn giống nhau); yêu cầu của bài toán đã không được thoả mãn!

2/ Bây giờ, ta chỉ ra một tình huống mà $n = 25$ thoả yêu cầu của bài toán. Muốn vậy, xét

$$S := \left\{ x \in I^5 \middle| \sum_{i=1}^{5} x_i \equiv 0 \pmod 4 \right\} \tag{2}$$

Rõ ràng S gồm đúng $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 256$ bộ; hơn nữa, (2) cho thấy: khi $x, y \in S$ thì

$$x \neq y \;\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}^*,\ i < j \le 5,\ x_i \neq y_i,\ x_j \neq y_j. \tag{3}$$

Lấy $\mathcal{D}$ là một tập con 250 phần tử của S và xét tình huống mà: với mỗi $x \in \mathcal{D}$ tồn tại đúng 8 học sinh có bài làm cùng ứng với bộ x (tình huống này hoàn toàn có thể xảy ra vì $2000 = 8 \times 250$. Khi ấy (do $25 > 8 \times 3$ theo nguyên lý Dirichlet, cứ 25 học sinh thì tìm được bốn học sinh (trong số 25 học sinh này) có bài làm ứng với bốn bộ $x, y, z, t \in \mathcal{D} \subset S$ đôi một khác nhau; và theo (3), hai học sinh nào trong số bốn học sinh đó cũng có bài làm khác nhau ở ít nhất là hai câu hỏi, đúng như yêu cầu của bài toán.

Từ 1/ và 2/, ta thấy: số tự nhiên bé nhất phải tìm là $n = 25$.

Bài 6 (*Đề nghị, Toán 11, kỳ thi Olympic 30/4 năm 2006 chúng tôi đã dựa theo ý của một đề thi Vô địch Romania 1997). Gọi $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các bộ ba $x = (x_1, x_2, x_3)$ mà $x_1, x_2, x_3 \in [0, 7] \cap \mathbb{Z}$. Bộ $x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathcal{A}$ được gọi là trội hơn bộ $y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathcal{A}$ nếu $x \neq y$ và $x_i \geq y_i$ với mọi $i \in \{1; 2; 3\}$; khi đó, ta viết $x \succ y$. Tìm số tự nhiên n bé nhất sao cho mọi tập con n-phần tử của $\mathcal{A}$ đều chứa ít nhất là hai bộ x, y mà $x \succ y$.*

Giải.

1/ Trước hết, xét tập hợp $\mathcal{B} := \{x \in \mathcal{A} | x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$. Có thể kiểm tra trực tiếp rằng $\mathcal{B}$ là một tập con 48-phần tử của $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ gồm đúng: 4 phần tử có dạng $x = (0; x_2; 11 - x_2)$ với $4 \leq x_2 \leq 7$; 5 phần tử có dạng $x = (1; x_2; 10 - x_2)$ với $3 \leq x_2 \leq 7$; 6 phần tử có dạng $x = (2; x_2; 9 - x_2)$ với $2 \leq x_2 \leq 7$; 7 phần tử có dạng $x = (3, x_2, 8 - x_2)$ với $1 \leq x_2 \leq 7$; 8 phần tử có dạng $x = (4, x_2, 7 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 7$; 7 phần tử có dạng $x = (5; x_2; 6 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 6$; 6 phần tử có dạng $x = (6; x_2; 4 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 5$; và 5 phần tử có dạng $x = (7; x_2; 4 - x_2)$ với $0 \leq x_2 \leq 4$.

Rõ ràng $\mathcal{B}$ không chứa hai bộ x, y nào mà $x \succ y$.

2/ Tiếp theo, cho $\mathbb{N} \ni n \geq 49$, và $\mathcal{B}$ là một tập con n-phần tử bất kỳ của $\mathcal{A}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{B}$ chứa ít nhất hai bộ x, y mà $x \succ y$.

Muốn vậy, xét các tập con sau đây của $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{C}_1 := \{x \in \mathcal{A} | x_1 = 0 \vee x_2 = 7\}, \mathcal{C}_2 := \{x \in \mathcal{A} | (x_1 = 1 \vee x_2 \leq 6) \vee (x_1 \geq 1 \wedge x_2 = 6)\},$$
$$\mathcal{C}_3 := \{x \in \mathcal{A} | (x_1 = 2 \vee x_2 \leq 5) \vee (x_1 \geq 2 \wedge x_2 = 5)\},$$
$$\mathcal{C}_4 := \{x \in \mathcal{A} | (x_1 = 3 \wedge x_2 \leq 4) \vee (x_1 \geq 3 \wedge x_2 = 4)\}, \mathcal{C} := \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{C}_i,$$
$$\mathcal{D} := \mathcal{A}/\mathcal{C} \equiv \{x \in \mathcal{A} | x_1 \geq 4 \vee x_2 \leq 3\},$$
$$\mathcal{C}_{i,j} := \{x \in \mathcal{C}_i | x_3 = j\} \ (i, j \in \mathbb{Z}; 1 \leq i \leq 4;\ 0 \leq j \leq 7),$$
$$\mathcal{D}_{p,q} := \{x \in \mathcal{D} | x_1 = p, x_2 = q\} \ (p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7;\ 0 \leq q \leq 3);$$

và chỉ cần khảo sát hai trường hợp:

(i) Nếu $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ là một tập hợp có nhiều hơn 32 phần tử, thì do chỉ có 32 tập con $\mathcal{C}_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{Z}; 1 \leq i \leq 4;\ 0 \leq j \leq 7)$, tạo thành một "phân hoạch" của $\mathcal{C}$, nên theo nguyên lý Dirichlet, $\mathcal{B}$ phải chứa ít nhất là hai phần tử x và y $(x \neq y)$ của cùng một tập con $\mathcal{C}_{i,j}$ nào đó $(i, j \in \mathbb{Z};\ 1 \leq i \leq 4;\ 0 \leq j \leq 7)$; từ cấu trúc của $\mathcal{C}_{i,j}$ ta thấy x và y có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta có thể giả sử là $x \succ y$.

(ii) Nếu $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ có không quá 32 phần tử, thì $\mathcal{B} \cap \mathcal{D}$ chứa ít nhất $n - 32 \geq 17$ phần tử; nhưng chỉ có 16 tập con $\mathcal{D}_{p,q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7;\ 0 \leq q \leq 3)$ tạo thành một "phân hoạch" của $\mathcal{D}$; nên vẫn theo nguyên lý Dirichlet, $\mathcal{B}$ phải chứa ít nhất là hai phần tử x và y $(x \neq y)$ của cùng một tập con $\mathcal{D}_{p,q}$ nào đó $(p, q \in \mathbb{Z}; 4 \leq p \leq 7;\ 0 \leq q \leq 3)$; từ cấu trúc của $\mathcal{D}_{p,q}$ ta thấy x và y có thể so sánh được với nhau theo quan hệ "trội", mà ta cũng có thể giả sử là $x \succ y$ (đpcm).

Từ 1/ và 2/, ta thấy: số tự nhiên bé nhất cần tìm là $n = 49$.

Một số phương pháp giải các bài toán tổ hợp nâng cao

Đặng Hùng Thắng

Trong khoa học cũng như trong đời sống chúng ta thường gặp bài toán xác định số lượng các đối tượng có một tính chất nào đó. Ta gọi đó là bài toán đếm.Tổ hợp là một ngành toán học nghiên cứu các bài toán mang cấu trúc rời rạc trong đó có bài toán đếm . Kỹ năng và kiến thức của toán tổ hợp là rất cần thiết cho nhiều khoa học từ kinh tế tới sinh vật, tin học , hóa học và quản trị kinh doanh. Nhờ các phương pháp mà tổ hợp cung cấp, chúng ta có thể xác định được số lượng các phần tử của một tập hợp một cách nhanh chóng và chính xác mà không cần (và nhiều khi cũng không thể) liệt kê được vì số đó rất lớn.

Chương trình phổ thông (lớp 11) đã trang bị cho học sinh hai quy tắc đếm cơ bản(quy tắc cộng và quy tắc nhân) , các khái niệm hoán vị , chỉnh hợp, tổ hợp. Nhờ đó học sinh có thể giải được các bài toán tổ hợp cơ bản, tương đối đơn giản. Tuy nhiên đối với những bài toán tổ hợp phức tạp, cần có những các phương pháp "cao cấp" hơn,sắc bén hơn. Bài giảng này nhằm cung cấp một số phương pháp để có thể công phá được các dạng toán khó trong tổ hợp.

1 Quy tắc cộng tổng quát

Bản chất toán học của quy tắc cộng(phát biểu cho công việc với nhiều phương án) là công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp hữu hạn đôi một không giao nhau. Cụ thể ta có

Cho n tập hợp $A_1, ..., A_n$ đôi một không giao nhau. Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp n tập hợp bất kỳ (không nhất thiết rời nhau). Khi đó ta có quy tắc cộng cho số phần tử của hợp của n tập hợp bất kỳ , thường được gọi là công thức bao hàm và loại trừ.

Định lý (Công thức bao hàm và loại trừ)

Cho $n \geq 2$ tập hợp hữu hạn $A_1, ..., A_n$. Khi đó ta có

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\ \ i<k\ \ n} |A_i \cap A_k| + \sum_{1\ \ i<j<k\ \ n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + \sum_{1\ \ i_1<i_2<\cdots<i_k\ \ n} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}|$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|$$

Định lý này có thể chứng minh tương đối dễ bằng phương pháp quy nạp , xin dành cho bạn đọc.

Ví dụ 1 Trong tập $S = \{1, 2, ..., 280\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho 2, 3, 5, 7 ?

Giải

Ta đếm xem trong tập S có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7

Kí hiệu $A_1 = \{k \in S$: k chia hết cho 2$\}$, $A_2 = \{k \in S$: k chia hết cho 3$\}$ $A_3 = \{k \in S$: k chia hết cho 5$\}$, $A_4 = \{k \in S$: k chia hết cho 7$\}$. Khi đó $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ là tập các số chia hết cho ít nhất một trong các số 2, 3, 5, 7

Ta có

$$|A_1| = \frac{280}{2} = 140; |A_2| = \lfloor\frac{280}{3}\rfloor = 93; |A_3| = \frac{280}{5} = 56; |A_4| = \frac{280}{7} = 40$$

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor\frac{280}{6}\rfloor = 46; |A_1 \cap A_3| = \lfloor\frac{280}{10}\rfloor = 28; |A_1 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{14}\rfloor = 20;$$

$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor\frac{280}{15}\rfloor = 18; |A_2 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{21}\rfloor = 13; |A_3 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{35}\rfloor = 8$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor\frac{280}{30}\rfloor = 9; |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{42}\rfloor = 6$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{70}\rfloor = 4; |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{105}\rfloor = 2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \lfloor\frac{280}{210}\rfloor = 1$$

Sử dụng công thức bao hàm và loại trừ ta tìm được $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 216$. Thành thử, trong tập S có $280 - 216 = 64$ số không chia hết cho 2, 3, 5, 7.

Ví dụ 2 (Công thức hàm Euler)

Với mỗi số nguyên dương $n > 1$, ký hiệu $\phi(n)$ là số các số nguyên dương bé hơn n và nguyên tố với n. Hàm $\phi(n)$ được gọi là hàm Euler. Nó đóng một vai trò quan trọng trong nhiều bài toán số học.

Chứng minh rằng

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

trong đó $p_1, p_2, ..., p_m$ là tất cả các ước nguyên tố phân biệt của n.

Giải

Ký hiệu $S = \{1, 2, ..., n\}$. Ta đếm xem trong tập S có bao nhiêu số chia hết cho ít nhất một trong các số $p_1, ..., p_m$. Gọi $A_i = \{k \in S$: k chia hết cho $p_i\}$ $(i = 1, 2, ..., m)$. Khi đó $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_m$ là tập các số chia hết cho ít nhất một trong các số $p_1, ..., p_m$. Ta có

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$$

Do đó theo định lý 1

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m| = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i} - \sum_{1\ \ i<k\ \ n} \frac{n}{p_i p_j} + \sum_{1\ \ i<j<k\ \ n} \frac{n}{p_i p_j p_k} \\
&+ \cdots + \sum_{1\ \ i_1<i_2<\cdots<i_k\ \ n} (-1)^{k+1} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \\
&+ \cdots + (-1)^{m+1} \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_m}
\end{aligned}$$

Vì $\phi(n)$ chính bằng số các số không chia hết cho tất cả các số $p_1, ..., p_m$ nên

$$\begin{aligned}
&\phi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m| = \\
&n(1 - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\ \ i<k\ \ n} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{1\ \ i<j<k\ \ n} \frac{1}{p_i p_j p_k} \\
&+ \cdots + \sum_{1\ \ i_1<i_2<\cdots<i_k\ \ n} (-1)^{k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} \\
&+ \cdots + (-1)^{m} \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_m}) \\
&= n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

2 Thiết kế các công đoạn thích hợp

Để áp dụng được quy tắc nhân điều cốt yếu là phải thiết kế một mô hình gồm việc thực hiện liên tiếp các công đoạn. Quy tắc nhân phát biểu: Với mỗi cách thực hiện ở công đoạn trước thì công đoạn thứ k có thể làm theo n_k cách. Như vậy: số cách thực hiện ở mỗi công đoạn phải không phụ thuộc vào cách nào đã được thực hiện ở công đoạn trước đó.Thành thử, muốn sử dụng được quy tắc nhân , trong mô hình của ta gồm việc thực hiện liên tiếp các công đoạn, số cách thực hiện ở mỗi công đoạn là phải như nhau với mọi cách đã được thực hiện ở công đoạn trước đó.

Ví dụ 3 Có 4 người A,B, C, D cần chọn vào chức giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT.Giả sử việc chọn nhân sự phải thỏa mãn yêu cầu : ông A không thể được chọn làm giám đốc, chức chủ tịch HDQT phải là ông C hoặc ông D. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải:

Có một lời giải như sau: Việc chọn ba vị trí giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT tiến hành theo 3 công đoạn:

Công đoạn 1: Chọn giám đốc: Có 3 cách chọn chức giám đốc (chọn B,C,D).

Công đoạn 2: Chọn Kế Toán trưởng : Có ba cách chọn kế toán trưởng từ ba người còn lại .

Công đoạn 3: Chọn Chủ tịch HĐQT Có hai cách chọn (ông C hoặc ông D).

Theo quy tắc nhân thì số cách là 3.3.2=18.

Cách này không đúng: Vì số cách thực hiện công đoạn 3 phụ thuộc vào kết quả của các công đoạn 1,2 trước đó : Nếu ở các công đoạn trước , ông C và ông D không được chọn thì công đoạn 3 mới có hai cách. Còn nếu C hoặc D đã được chọn thì ở công đoạn 3 chỉ có một cách hoặc thậm chí không có.

Tuy nhiên nếu ta thiết kế việc chọn ba vị trí giám đốc, kế toán trưởng và chủ tịch HĐQT tiến hành theo 3 công đoạn khác thì vẫn có thể áp dụng quy tắc nhân. Cụ thể

Công đoạn 1: Chọn Chủ tịch HĐQT: Luôn có hai cách chọn: C hoặc D.

Công đoạn 2: Chọn Giám đốc: Ta luôn có có hai cách chọn dù ở kết quả của công đoạn 1 thế nào .Sau công đoạn 1 còn ba người trong đó có ông A. Bỏ ông A ra ta còn hai người có thể chọn vào chức Giám đốc.

Công đoạn 3: Chọn Kế Toán trưởng : luôn có hai cách (từ hai người còn lại).

Vậy kết quả là có 2.2.2=8 cách chọn. Đây là đáp số đúng.

Ví dụ 4 a) Giả sử có 8 vận động viên bóng bàn tham dự một giải đấu. Trong vòng đầu của giải, ban tổ chức cần phân ra 4 cặp đấu. Hỏi có bao nhiêu cách ghép thành 4 cặp đấu?

b) Giả sử có $2n$ vận động viên bóng bàn tham dự một giải đấu. Trong vòng đầu của giải, ban tổ chức cần phân ra n cặp đấu. Hỏi có bao nhiêu cách ghép thành n cặp đấu?

c) Từ b) chứng tỏ rằng với mỗi $n \in N^*$ ta có $(n+1)(n+2)(2n-1)(2n)$ chia hết cho 2^n .

Giải

a) Ta thiết kế việc thực hiện chọn theo các công đoạn sau:

Công đoạn 1: Chọn 2 người trong 8 người làm thành cặp đấu thứ nhất. Có C_8^2 cách chọn. Công đoạn 2: Chọn 2 người trong 6 người còn lại để làm thành cặp đấu thứ hai. Có C_6^2 cách chọn. Công đoạn 3: Chọn 2 người trong 4 người còn lại để làm thành cặp đấu thứ ba. Có C_4^2 cách chọn. Công đoạn 4: Có $C_2^2 = 1$ cách chọn: Hai người còn lại sẽ làm thành cặp đấu thứ tư.

Theo quy tắc nhân có $C_8^2.C_6^2.C_4^2C_2^2$ cách chọn. Vì thứ tự 4 cặp đấu không được xét đến nên số cách ghép thành 4 cặp đấu là

$$\frac{C_8^2.C_6^2.C_4^2.C_2^2}{4!} = 105.$$

b) Lý luận tưng tự như trên, số cách ghép thành n cặp đấu là

$$T = \frac{C_{2n}^2.C_{2n-2}^2 \dots C_4^2.C_2^2}{n!}$$

c) Dễ biến đổi

$$T = \frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{(n+1)(n+2)(2n-1)(2n)}{2^n}$$

Vì T là một số nguyên dưng nên công thức này chứng tỏ $(n+1)(n+2)(2n-1)(2n)$ chia hết cho 2^n .

3 Sử dụng phép song ánh

Có n người đến dự một buổi nói chuyện trong một hội trường gồm 200 ghế. Giả sử mỗi người chỉ chiếm một ghế ngồi và mỗi ghế chỉ có nhiều nhất một người ngồi. Nếu ta được thông báo rằng mọi người đều có chỗ ngồi thì ta kết luận được $n \leqslant 200$ Nếu ta biết thêm rằng không có ghế nào trống thì ta biết ngay là $n = 200$. Nếu có một số người phải đứng vì không có ghế thì ta suy ra $n > 200$. Nhưư vậy có thể xác định hay ước lượng số phần tử của một tập hợp A nào đó thông qua một tập hợp B mà ta đã biết số phần tử của B nhờ một phép tưng ứng (ánh xạ) giũa A với B.. Đây là một phương pháp được sử dụng rất hiệu quả để giải nhiều bài toán đếm nâng cao.

Cho ánh xạ $f : A \longrightarrow B$..

- Anh xạ f được gọi là một đơn ánh nếu với hai phần tử bất kỳ $a_1, a_2 \in A$, nếu $a_1 \neq a_2$ thì $f(a_1) \neq f(a_2)$. Tức là$f(a_1) = f(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$.
- Anh xạ f được gọi là một toàn ánh nếu với mọi $b \in B$ đều tồn tại $a \in A$ để $f(a) = b$.
- Anh xạ f được gọi là một song ánh nếu mọi $b \in B$, tồn tại và duy nhất $a \in A$ để $f(a) = b$. Nói cách khác f là song ánh khi và chỉ khi nó đồng thời là đơn ánh và toàn ánh .

Định lý Cho A và B là hai tập hợp hữu hạn.

- Nếu có một đơn ánh $f : A \longrightarrow B$ thì $|A| \leqslant |B|$
- Nếu có một toàn ánh $f : A \longrightarrow B$ thì $|A| \geq |B|$
- Nếu có một song ánh $f : A \longrightarrow B$ thì $|A| = |B|$

Ví dụ 5 Cho tập $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$. Một tập con B của A gọi là một tập cân nếu trong tập đó số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau.(Tập rỗng là một tập cân vì số các số chẵn và số các số lẻ trong tập rỗng đều bằng 0). Hỏi có A có chứa bao nhiêu tập cân? Chẳng hạn với $n = 2, A = \{1, 2, 3, 4\}$. A có 6 tập con cân là các tập sau $\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

Giải: Ký hiệu $X = \{2, 4, \ldots, 2n\}$ là tập hợp tất cả các số chẵn của A và $Y = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ là tập hợp tất cả các số lẻ của A. Gọi $\mathcal{C}$ là họ tất cả các tập cân của A và $\mathcal{D}$ là họ các tập con của A có đúng n phần tử.

Ta lập một ánh xạ f từ $\mathcal{C}$ vào $\mathcal{D}$ như sau: Giả sử B là một tập cân . Ký hiệu B_1, B_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của B. Khi đó đặt

$$f(B) = B_1 \cap (Y \setminus B_2).$$

Do B là tập cân nên$|B_1| = |B_2|$.Thành thử $|f(B)| = |B_1| + |Y \setminus B_2| = |B_1| + |Y| - |B_2| = |Y| = n$. Vậy $f(B) \in \mathcal{D}$,

Tiếp theo ta chứng minh f là một song ánh.

+ f là đơn ánh: Giả sử $f(B) = f(C)$. Suy ra $B_1 \cup (Y \setminus B_2) = C_1 \cap (Y \setminus C_2)$. Vì B_1, C_1 là tập các số chẵn ; $(Y \setminus B_2), (Y \setminus C_2)$ là tập các số lẻ nên từ đó suy ra $B_1 = C_1; (Y \setminus B_2) = (Y \setminus C_2)$. Do đó $B_1 = C_1; B_2 = C_2 \rightarrow B = C$..

+ f là một toàn ánh: Giả sử $M \in \mathcal{D}$ là một tập con của A có n phần tử. . Ký hiệu M_1, M_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của M. Đặt $B_1 = M_1; B_2 = Y \setminus M_2$ và $B = B_1 \cup B_2$. Ta có

$$|B_1| = |M_1|; |B_2| = |Y| - |M_2| = n - |M_2| = |M| - |M_2| = |M_1|$$

Vậy $|B_1| = |B_2|$ do đó B là một tập cân. Rõ ràng $f(B) = B_1 \cap (Y \setminus B_2) = M_1 \cup M_2 = M$.

Vì có một song ánh giữa họ các tập cân và họ các tập con có n phần tử của A nên theo định lý trên số các tập cân của A bằng số các tập con có n phần tử của A . VậyA có tất cả là C_{2n}^n tập cân.

Ví dụ 6. Cho trước số nguyên dương n và số nguyên dương r thoả mãn $r < n - r + 1$. Giả sử $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của X có r phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp. Chẳng hạn với $n = 7, r = 3, X = \{1, 2, , 7\}$. Các tập con A của X có ba phần tử mà không chứa hai số nguyên liên tiếp cả thảy gồm 10 tập sau đây

$$\{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,3,7\}, \{1,4,6\}, \{1,4,7\}, \{1,5,7\}, \{2,4,6\}\{2,4,7\}, \{2,5,7\}\{3,5,7\}$$

Giải: Gọi $\mathcal{A}$ là họ tất cả các tập con của Xcó tính chất đã nêu gọi $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập con có r phần tử của tập hợp $Y = \{1, 2, , n - (r-1)\}$. Ta thiết lập một ánh xạ $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ như sau: Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\} \in \mathcal{A}$ .Ta có thể gỉa thiết $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$. Đặt

$$b_i = a_i - (i-1) = a_i - i + 1 \quad i = 1, 2, ..., r$$

Ta có $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1$ (do $a_{i+1} - a_i \geq 2$). Do đó $b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant n - r + 1$ Ta định nghĩa $f(A) = B$ Ta có $B \in \mathcal{B}$, do vậy f là một ánh xạ từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$. Ta sẽ chứng minh f là song ánh.

+ f là đơn ánh: Từ công thức $b_i = a_i - (i-1) = a_i - i + 1$ suy ra $a_i = b_i + i - 1$. Do đó nếu $f(A) = f(A')$ thì $A = A'$.

+ f là toàn ánh: Giả sử $B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqslant n - r + 1\} \in \mathcal{B}$. Xét tập $A = \{a_1, ..., a_r\}$ ở đó $a_i = b_i + i - 1$. Ta có $a_1 < a_2 < \cdots < a_r \leqslant n - r + 1 + r - 1 = n$, và $a_{i+1} - a_i = b_{i+1} - b_i + 1 \geq 2$ do đó $A \in \mathcal{A}, f(A) = B$..

Suy ra $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = C^r_{n-r+1}$ Vậy có tất cả C^r_{n-r+1} các tập con của X có tính chất đã nêu.

Ví dụ 7. Một cửa hàng kem có bán ba loại kem : kem xoài, kem sô cô la và kem sữa. Một nhóm có 6 người vào ăn kem và gọi 6 cốc kem. Hỏi

a) Họ có tất cả bao nhiêu sụ lựa chọn?

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn trong đó cả ba loại kem đều có mặt? *Giải* :a) Ta thử liệt kê một vài sự lựa chọn

+) 2 kem xoài , 1 kem sô cô la, 3 kem sữa.

+) 1 kem xoài , 4 kem sô cô la, 1 kem sữa

+) 2 kem sô cô la, 4 kem sữa

+) 3 kem xoài , 3 kem sữa

Một sự lựa chọn : "a kem xoài, b kem sô cô la và c kem sữa " được ký hiệu bởi một bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Chẳng hạn bốn sự lựa chọn ở trên được ký hiệu là các bộ (2,1 ,3) ; (1,4,1); (0,2,4) và (3,0,3). Với mỗi bộ ba (a, b, c) như vậy ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân (dãy gồm các chữ số 0 và 1) theo quy tắc sau: viết từ trái sang phải a số 1 liên tiếp , số 0, b số 1 liên tiếp, số 0, rồi c số 1 liên tiếp.

$$\underbrace{11...1}_{a}0\underbrace{11...1}_{b}0\underbrace{11...1}_{c}$$

Như vậy mỗi bộ ba (a, b, c) được tưng ứng với một dãy nhị phân độ dài 8 (tức là gồm 8 ký tự) trong đó có 6 ký tự 1 và 2 ký tự 0. Chẳng hạn

$$(2,1,3) \to 11010111$$
$$(1,4,1) \to 10111101$$
$$(0,2,4) \to 01101111$$
$$(3,0,3) \to 11100111$$

Rõ ràng phép tương ứng đó là một đơn ánh. Ngược lại, với mỗi dãy 8 ký tự với 6 ký tụ 1 và 2 ký tự 0 khi ta đếm từ trái sang phải mà có :a số 1 liên tiếp ,số 0 , b số 1 liên tiếp , số 0 và c chữ số 1 liên tiếp thì dãy đó sẽ ứng với bộ (a, b, c) thoả mãn $a + b + c = 6$.

Chẳng hạn dãy 10110111 sẽ ứng với bộ (1,2,3) tức là ứng với sự lựa chọn : 1 kem xoài,2 kem sô côla và 3 kem sữa, Dãy 01011111 úng với bộ (0,1,5) tức là ứng với sự lựa chọn 1 kem sô côla và 5 kem sữa.

Như vậy ta đã thiết lập một song ánh giữa tập hợp các sự lựa chọn với tập họp các dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 ký tụ 1 và 2 ký tự 0. Do đó số các sự lựa chọn bằng số các dãy nhị phân độ dài 8 trong đó có 6 ký tự 1 và 2 ký tự 0. Mặt khác một dãy nhị phân độ dài 8 với 6 ký tụ 1 và 2 ký tự 0 tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để ghi số 0 (6 vị trí còn lại ghi số 1). Thành thử có $C^2_8 = 28$ dãy nhị phân độ dài 8 với 6 ký tụ 1 và 2 ký tự 0. Do đó số các sự lựa chọn là 28.

b)Một sự lựa chọn : " a kem xoài, b kem sô cô la và c kem sữa " được ký hiệu bởi một bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Với mỗi bộ (a, b, c) thoả mãn điều kiện trên ta cho tương ứng với bộ (x, y, z) với $x = a - 1; y = b - 1; z = c - 1$. Khi đó (x, y, z) là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $x + y + z = a + b + c - 3 = 3$. Dễ kiểm tra rằng đây là một phép song ánh giữa tập các bộ ba (a, b, c) trong đó a, b, c là các số nguyên dương thoả mãn điều kiện $a + b + c = 6$. với tập các bộ ba (x, y, z) là các số nguyên không âm thoả mãn điều kiện $x + y + z = a + b + c - 3 = 3$. Bằng suy luận tương tự như câu a) ta tìm được số các sự lựa chọn là $C_5^2 = 10$.

Chú ý: Ta có bài toán tổng quát sau:

Một cửa hàng kem có bán m loại kem . Một nhóm có n người vào ăn kem và gọi n cốc kem. Hỏi

a) Họ có tất cả bao nhiêu sụ lựa chọn?

b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn trong đó cả m loại kem đều có mặt?

Đáp số:

$$a) C_{n+m-1}^{m-1} \qquad b) C_{n-1}^{m-1}$$

4 Dùng công cụ số phức

Ví dụ 8 Cho p là một số nguyên tố và $m \in N^*$. Giả sử

$$E = \{(k_1, ..., k_{p-1}), 0 \leqslant k_i \leqslant m - 1 : \sum_{i=1}^{p-1} ik_i \equiv 0 \pmod{p}\}$$

Xác định số phần tử của tập $|E|$

Giải

Với mỗi $r = 0, 1, ..., p - 1$ ta định nghĩa tập E_r

$$E_r = \{(k_1, ..., k_{p-1}), 0 \leqslant k_i \leqslant m - 1 : \sum_{i=1}^{p-1} ik_i \equiv r \pmod{p}\}$$

Ta có $E = E_0$. Đặt $f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k, F(x) = \Pi_{i=1}^{p-1} f(x^i)$. Ta có

$$F(x) = \Pi_{i=1}^{p-1} (\sum_{k=1}^{m-1} x^{ik}) =$$

$$= \sum_{0 \quad k_i \quad m-1} x^{\ {}_{i=1}^{p-1} ik_i}$$

Giả sử $F(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$. Đặt

$$A_n = \{(k_1, ..., k_{p-1}) | \sum_{i=1}^{p-1} ik_i = n\} \quad a_n = |A_n|$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
E_r &= \cup_{n\equiv r \pmod p} A_n \\
\rightarrow |E_r| &= \sum_{n\equiv r \pmod p} |A_n| = \sum_{n\equiv r \pmod p} a_n.
\end{aligned} \quad (1)$$

Gọi ω là một nghiệm phức tuỳ ý của $g(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1 = 0$. Ta có $\omega^j \neq 1 \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant p-1$. Thật vậy nếu $\omega^j = 1$ thì gọi h là số nguyên dương bé nhất để $\omega^h = 1$ ta có $h|p, h|j \rightarrow h = p \rightarrow p|j$. Mâu thuẫn. Khi đó

$$F(\omega) = \Pi_{j=1}^{p-1} f(\omega^j) = \Pi_{j=1}^{p-1} \frac{\omega^{jm} - 1}{\omega^j - 1}$$

Trường hợp 1. $(m,p) = 1$. Dễ thấy nếu $jm \equiv r \pmod p \rightarrow \omega^{jm} = \omega^r$. Vì họ $\{jm\}, j = 1, 2, .., p-1$ là hệ thặng dư thu gọn (modulo p) nên$\{\omega^{jm}, i = 1, 2, .., p-1\} = \{\omega^j, j = 1, 2, .., p-1\}$. Suy ra $F(\omega) = 1$. Đặt $b_r = |E_r|$. Vì $n \equiv r \pmod p \rightarrow \omega^n = \omega^r$ nên từ (1) suy ra

$$1 = F(\omega) = \sum_{n=0}^{h} a_n \omega^n = \sum_{r=0}^{p-1} b_r \omega^r \quad (2)$$

Đặt $Q(x) = \sum_{r=1}^{p-1} b_r x^r + b_0 - 1$. Theo (2) với mỗi nghiệm ω of $g(x)$ ta có $Q(\omega) = 0$. Do đó tồn tại hằng số a $Q(x) = ag(x) \rightarrow b_{p-1} = \cdots = b_1 = b_0 - 1$. Từ đó

$$\begin{aligned}
b_0 - 1 &= \frac{\sum_{r=1}^{p-1} b_r + b_0 - 1}{p} \\
&= \frac{\sum_{r=0}^{p-1} b_r - 1}{p} = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n - 1}{p} \\
&= \frac{F(1) - 1}{p} = \frac{m^{p-1} - 1}{p}
\end{aligned}$$

Hence

$$|E_0| = b_0 = \frac{m^{p-1} - 1}{p} + 1 = \frac{m^{p-1} + p - 1}{p}$$

Trường hợp 2 $p|m$. Khi đó $\omega^{jm} = 1 \rightarrow f(\omega^j) = \frac{\omega^{jm}-1}{\omega^j - 1} = 0 \rightarrow F(\omega) = 0 \rightarrow 0 = F(\omega) = \sum_{n=0}^{N} a_n \omega^n = \sum_{r=0}^{p-1} b_r \omega^r \rightarrow b_{p-1} = \cdots = b_1 = b_0$. Do vậy vói mỗi $r = 0, 1, 2, ..., p-1$ ta có

$$\begin{aligned}
|E_r| = b_r &= \frac{\sum_{r=0}^{p-1} b_r}{p} = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n}{p} \\
&= \frac{F(1)}{p} = \frac{m^{p-1}}{p}
\end{aligned}$$

Tóm lại

$$|E| = \begin{cases} \frac{m^{p-1}+p-1}{p} & \text{nếu } (m,p) = 1 \\ \frac{m^{p-1}}{p} & \text{nếu } p|m \end{cases}$$

Ví dụ 9 Cho $p > 2$ là số nguyên tố lẻ và số nguyên dương $n > p$. Xác định số các tập con A của $S = \{1, 2, ..., n\}$ thoả mãn hai điều kiện sau

i) $|A| = p$

ii) $S(A) \equiv 0 \pmod p$ trong đó $S(A)$ là tổng các số nằm trong A.

Giải Với mỗi $r = 0, 1, 2, ..., p-1$ gọi n_r là số các tập con A của S thỏa mãn

i) $|A| = p$

ii) $S(A) \equiv r \pmod p$

Đặt $g(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x^i$. Cố định một nghiệm phức bất kỳ ω của $f(x)$. Ta có $\{\omega^i, i = 1, 2, ..., p-1\}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $f(x)$. (Thật vậy như trong ví dụ 8 đã chỉ ra $\omega^i \neq 1, (\omega^i)^p = (\omega^p)^i = 1$. Nếu $\omega^i = \omega^j \to \omega^{i-j} = 1 \to p|i-j$ mâu thuẫn)

Do đó

$$x^p - 1 = (x-1)g(x) = \prod_{i=1}^{p}(x - \omega^i) \tag{3}$$

Xét đa thức $Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \omega^i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. Theo định lý

$$\sum_{1 \quad < i_1 < i_2 < \cdots < i_p \quad n} \omega^{i_1}\omega^{i_2}...\omega^{i_p} = (-1)^p a_{n-p}$$

Suy ra

$$\sum_{A \subset S, |A| = p} \omega^{S(A)} = \sum_{1 \quad < i_1 < i_2 < \cdots < i_p \quad n} \omega^{i_1 + i_2 + \cdots + i_p} = -a_{n-p}$$

Nếu $S(A) \equiv r \pmod p \to \omega^{S(A)} = \omega^r$. Do đó

$$a_{n-p} = -\sum_{r=0}^{p-1} n_r \omega^r$$

Ta cần xác định hệ số a_{n-p}. Đặt $k = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \Leftrightarrow n = kp + r, 0 \leqslant r \leqslant p-1$. Vì rằng với $i = 1, 2, ..p$ ta có $\omega^{kp+i} = \omega^i, i == 1, 2, ..., r$ and $\omega^{lp+i} = \omega^i, l = 0, 1, ..., k-1, i = 1, 2, ..., p$ nên ta có

$$\begin{aligned} Q(x) &= \Pi_{i=1}^{n}(x - \omega^i) = \Pi_{i=1}^{p}(x - \omega^i)^k \Pi_{i=1}^{r}(x - \omega^i) \\ &= \left[x^{kp} - kx^{(k-1)p} + C_k^2 x^{(k-2)p} + \cdots + (-1)^k\right]\left[x^r + b_1 x^{r-1} + \cdots + b_r\right] \end{aligned}$$

Vì rằng $lp + i = hp + j, 0 \leqslant i, j \leqslant r \Leftrightarrow i = j, l = h$ nên vế phải của đẳng thức trên có $(k+1)(r+1)$ đơn thức và hệ số của $x^{n-p} = x^{(k-1)p+r}$ is $-k$. Vậy

$$\sum_{r=0}^{p-1} n_r \omega^r = k \tag{4}$$

Xét đa thức $R(x) = \sum_{r=1}^{p-1} n_r x^r + n_0 - k$. From (4) ta có $R(\omega) = 0$ vưới mỗi nghiệm ω của $g(x)$ Vậy tồn tại hằng số a sao cho $R(x) = ag(x) \to n_{p-1} = \cdots = n_1 = n_0 - k$. Từ đó

$$n_0 - k = \frac{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + n_0 - k}{p}$$
$$= \frac{\sum_{r=0}^{p-1} n_r - k}{p} = \frac{C_n^p - k}{p}$$

Hence $n_r = \frac{C_n^p - k}{p}, (r = 1, 2, ..., p-1), n_0 = k + \frac{C_n^p - k}{p}$

Thành thử đáp số của bài toán là

$$n_0 = k + \frac{C_n^p - k}{p}, \qquad k = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$$

Chú ý Bài toán số 6 của IMO 1995 là trường hợp riêng của ví dụ trên với $n = 2p$.

Hệ quả Nếu p là số nguyên tố và $n > p$ thì

$$C_n^p \equiv k \pmod p, \quad \text{ở đó } k = \lfloor \tfrac{n}{p} \rfloor$$

5 Thiết lập quan hệ truy hồi

Ví dụ 9 (Bài toán tháp Hà nội) Tương truyền rằng tại một ngôi tháp ở Hà nội có một tấm đế bằng đồng trên đó có đặt ba chiếc cọc bằng kim cương.Lúc khai thiên lập địa, trên cọc số 1, Phật tổ Như Lai đã xếp 64 chiếc đĩa bằng vàng có đường kính khác nhau sao cho các đĩa có đường kính lớn hơn xếp ở dưới, các đĩa ở phía trên càng ở trên cao càng nhỏ dần. Các nhà sư được yêu cầu chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2 với quy tắc sau:

- Mỗi lần chỉ được chuyển đi một chiếc đĩa.

- Trong quá trình di chuyển không được đặt đĩa lớn lên trên đĩa nhỏ (do đó cần thiết phi có thêm chiếc cọc trung gian thứ ba). Giả sử mỗi lần chuyển một chiếc đĩa mất một giây. Hỏi các nhà sư cần ít nhất là bao nhiêu năm để chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2?

Giải

Giả sử lúc đầu trên cọc số 1 có n chiếc đĩa. Gọi u_n là số lần ít nhất để chuyển tất cả các chiếc đĩa ở cọc số 1 sang cọc số 2. Ta thử tính một vài giá trị của u_n.

Với $n = 2$. Ta cần thực hiện ba phép chuyển sau

-Chuyển đĩa bé sang cọc số 3.

- Chuyển đĩa lớn sang cọc số 2.

- Chuyển đĩa bé về cọc số 2

Vậy $u_2 = 3$

Với $n = 3$. Ta cần thực hiện theo ba giai đoạn sau - Chuyển hai đĩa ở phía trên sang cọc số 3. Như đã thấy ở trường hợp $n = 2$, ta cần 3 phép chuyển.

- Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc số 2

- Chuyển hai đĩa ở cọc số 3 về cọc số 2. Như đã thấy ở trường hợp $n = 2$ ta cần 3 phép chuyển.

Vậy ta cần 3+1+3=7 phép chuyển. Do đó $u_3 = 7$.

Trường hợp $n = 3$ gợi ý cho ta thiết lập hệ thức truy hồi mà dãy (u_n) phải thoả mãn. Để chuyển được n chiếc đĩa theo quy tắc trên ta phải thực hiện theo ba công đoạn sau:

- Công đoạn 1: Chuyển $(n-1)$ đĩa ở phía trên chiếc đĩa lớn nhất sang cọc số 3 theo quy tắc trên. Ta cần u_{n-1} phép chuyển. Chiếc đĩa lớn nhất vẫn giữ nguyên ở cọc số 1 khi di chuyển $(n-1)$ chiếc đĩa ở trên nó.

- Công đoạn 2:Chuyển đĩa lớn nhất sang cọc số 2.

- Công đoạn 3: Chuyển $(n-1)$ đĩa ở cọc số 3 về cọc số 2 và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất Ta cần u_{n-1} phép chuyển. Do vậy để chuyển n chiếc đĩa từ cọc số 1 sang cọc số 2 ta cần $u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1$. Vậy ta có hệ thức truy hồi sau

$$u_n = 2u_{n-1} + 1.$$

Từ hệ thức truy hồi này ta có thể lập được công thức của số hạng tổng quát của dãy. Bằng quy nạp dễ chứng minh được

$$u_n = 2^n - 1$$

Với $n = 64$ thì $u_{64} = 18.446.744.073.709.531615$

Đó là số lần chuyển đĩa mà các nhà sư phải thực hiện để hoàn thành công việc. Nếu mỗi lần chuyển một đĩa mất 1 giây thì cần đến hơn 500 tỷ năm các nhà sư mới chuyển được tất cả 64 chiếc đĩa sang cọc số 2.

Ví dụ 10 (IMO 1979, bài số 6)

Giả sử A và E là hai đỉnh đối diện của một bát giác đều. Một con ếch bắt đầu nhảy từ đỉnh A. Tại mỗi đỉnh của bát giác (trừ đỉnh E) , mỗi cú nhảy con ếch chỉ có thể nhảy tới hai đỉnh kề với đỉnh đó. Khi con ếch nhảy vào đỉnh E nó sẽ bị kẹt vĩnh viễn ở đó. Cho trước số nguyên dương n . Hỏi với n cú nhảy, có bao nhiêu cách để con ếch nhảy vào đỉnh E.

Giải . Gọi a_n là số cách để con ếch nhảy vào đỉnh E. Dễ thấy $a_1 = a_2 = a_3 = 0; a_4 = 2$. Giả sử từ A theo chiều kim đồng hồ các đỉnh lần lượt là $A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to A$. Từ A con ếch đến B phải qua một sô lẻ bước;Từ B con ếch đến C phải qua một sô lẻ bước.Từ C con ếch đến D phải qua một sô lẻ bước.Từ D con ếch đến E phải qua một sô lẻ bước. Vậy số bước đến E dứt khoát phải là một số chẵn. Nói cách khác nếu n lẻ thì không có cách nào nhảy vào E. Vậy $a_{2k-1} = 0$. Ta cần tính $a_{2k}, k \geq 1$

Xuất phát từ A,với hai bước nhảy đầu tiên con ếch có thể có các cách sau :

1) $A \to B \to A$

2) $A \to H \to A$

2) $A \to B \to C$

3) $A \to H \to G$

Nếu theo cách 1) thì số cách tới E là a_{2k-2}.Nếu theo cách 2) thì số cách tới E là a_{2k-2}. Gọi c_n, g_n lần lượt là số cách để con ếch, xuất phát tương ứng từ C, G, nhảy vào đỉnh E với n cú nhảy. Vì lý do đối xứng ta có $c_n = g_n$. Vậy nếu theo cách 3) thì số cách tới E là c_{2k-2}; nếu theo cách 4) thì số cách tới E là g_{2k-2} . Theo quy tắc cộng ta có

$$a_{2k} = a_{2k-2} + a_{2k-2} + c_{2k-2} + g_{2k-2} = 2a_{2k-2} + 2c_{2k-2} \tag{5}$$

Xuất phát từ C,với hai bước nhẩy đầu tiên con ếch có thể có các cách sau :

1c) $C \to B \to A$

2c) $C \to B \to C$

3c) $C \to D \to C$

4c) $C \to D \to E$

Nếu theo cách 1c) thì số cách tới E là a_{2k-2}.Nếu theo cách 2c) thì số cách tới E là c_{2k-2}.Nếu theo cách 3c) thì số cách tới E là c_{2k-2}.Nếu theo cách 4c) thì số cách tới E là 0. Theo quy tắc cộng ta có

$$c_{2k} = a_{2k-2} + 2c_{2k-2} \tag{6}$$

Từ (5) và (6) rút ra $c_{2k} = a_{2k} - a_{2k-2} \to c_{2k-2} = a_{2k-2} - a_{2k-4}$. Thay vào (5) ta được

$$a_{2k} = 4a_{2k-2} - 2a_{2k-4}$$

Đặt $u_k = a_{2k}$ ta có $u_k = 4u_{k-1} - 2u_{k-2}, u_1 = a_2 = 0; u_2 = a_4 = 2$. Bằng cách giải phương trình đặc trưng ta đi đến công thức sau

$$a_{2k} = u_k = \frac{(2+\sqrt{2})^{k-1} - (2-\sqrt{2})^{k-1}}{\sqrt{2}}, k = 1, 2, \ldots$$

Ví dụ 11 Cho số nguyên dương n và $S = \{1, 2, ..., n\}$. Tìm số các tập con (kể cả tập rỗng) của S mà không chứa hai số nguyên dương liên tiếp.

Giải Gọi a_n là số phải tìm. Dễ thấy $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5$. Chẳng hạn với $n = 3$ có 5 tập con thoả là $\emptyset$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1; 3\}$. Gọi $\mathcal{A}_n$ là họ các tập con có tính chất đã nêu. Mỗi tập $A \in \mathcal{A}_{n+2}$ gồm hai loại : Loại 1 gồm các tập chứa $n+2$.Loại 2 gồm các tập không chứa $n+2$. Nếu A là tập loại 1 thì A không chứa $n+1$. Do đó nếu bỏ đi khỏi A phần tử $n+2$ ta được một tập con của $\mathcal{A}_n$. Ngược lại với mỗi tập con B của $\mathcal{A}_n$ thì tập $A = B \cup \{n+2\}$ là tập loại 1 của $\mathcal{A}_{n+2}$. Thành thử số tập loại 1 là a_n. Mõi tập loại 2 rõ ràng là một tập con của $\mathcal{A}_{n+1}$ và ngược lại. Thành thử số tập loại 2 là a_{n+1}. Do đó ta có quan hệ sau

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Mặt khác với dãy Fibonacy ta có $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Vì $a_1 = F_3 = 2; a_2 = F_4 = 3; a_3 = F_5 = 5$ ta suy ra $a_n = F_{n+2}$. Vậy

$$a_n = F_{n+2} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{\sqrt{5}}, \quad \text{ở đó } a = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, a = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 12 Cho số nguyên dương n và $S = \{1, 2, ..., n\}$. Gọi c_n là số các tập con của S mà *chứa đúng* hai số nguyên dương liên tiếp . Chứng minh rằng

$$c_n = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$$

Giải Gọi $\mathcal{C}_n$ là họ các tập con có tính chất đã nêu. Mỗi tập $C \in \mathcal{C}_{n+2}$ gồm ba loại : Loại 1 gồm các tập chứa $n+2, n+1$. Loại 2 gồm các tập không chứa $n+2$. Loại 3 là các tập chứa $n+2$ nhưng không chứa $n+1$.

+) Nếu C là tập loại 1 thì C cũng không chứa n (vì nếu C chứa n thì C chứa 2 cặp số nguyên liên tiếp là $n, n+1$ và $n+1, n+2$) . Bỏ đi khỏi C phần tử $n, n+1, n+2$ ta được một tập con của $\{1, 2, ..., n-1\}$ không chứa hai số nguyên dương liên tiếp, do đó nó là phần tử của $\mathcal{A}_{n-1}$.Ngược lại với mỗi tập con A của $\mathcal{A}_{n-1}$ thì tập $C = A \cup \{n+2, n+1\}$ là tập loại 1 của $\mathcal{C}_{n+2}$. Phép tương ứng này là song ánh. Thành thử số tập loại 1 là $a_{n-1} = F_{n+1}$.

+) Mỗi tập loại 2 rõ ràng là một tập con của $\mathcal{C}_{n+1}$ và ngược lại. Thành thử số tập loại 2 là c_{n+1}.

+) Nếu C là tập loại 3 thì C không chứa $n+1$. Do đó nếu bỏ đi khỏi C phần tử $n+2$ ta được một tập con của $\mathcal{C}_n$.Ngược lại với mỗi tập con B của $\mathcal{C}_n$ thì tập $C = B \cup \{n+2\}$ là tập loại 3 của $\mathcal{C}_{n+2}$. Thành thử ta có hệ thức sau

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n + F_{n+1}$$

Từ đó bằng quy nạp, sử dụng hệ thức truy hồi của dãy Fibonaci ta có công thức nêu trên.

Xây dựng song ánh giải một số bài toán tổ hợp

Huỳnh Tấn Châu (*THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên*)

Trở ngại lớn nhất khi giải một bài toán tổ hợp là xác định hướng đi. Rõ ràng để có khả năng định hướng tốt thì việc rèn luyện các phương pháp tiếp cận là rất cần thiết. Bài viết này giới thiệu với các bạn đọc một phương pháp hiệu quả trong nhiều bài toán tổ hợp mà ta tạm gọi là *phương pháp song ánh.*

Phương pháp này dựa trên kết quả hiển nhiên sau: "*Nếu có một song ánh đi từ một tập hữu hạn X tới một tập hữu hạn Y thì lực lượng (tức số phần tử) của X và Y bằng nhau*".

1. Một cách tự nhiên, kết quả trên hướng chúng ta đến ý tưởng sử dụng song ánh để so sánh lực lượng hai tập hợp.

Bài toán 1 (*Vô địch Liên Xô) Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, còn mỗi cặp không quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.*

Lời giải. Giả sử a quen b và tập các người quen của a và b (không kể a, b) là A và B. Mỗi người a' thuộc A sẽ quen với duy nhất một người thuộc B (do a' và b không quen nhau, hơn nữa họ đã có một người quen chung là a). Tương tự, mỗi người thuộc B cũng quen với duy nhất một người thuộc A. Vậy tồn tại một song ánh đi từ A tới B, tức a và b có số người quen bằng nhau.

Nếu a không quen b thì tồn tại c quen cả a và b, do đó số người quen của a và b bằng nhau do cùng bằng số người quen của c.

Bài toán 2 (*Trung Quốc - 1997) Trong các xâu nhị phân có độ dài n, gọi a_n là số các xâu không chứa quá 3 số liên tiếp* $0, 1, 0$ *và b_n là số các xâu không chứa 4 số liên tiếp* $0, 0, 1, 1$ *hoặc* $1, 1, 0, 0$. *Chứng minh rằng:* $b_{n+1} = 2a_n$.

Lời giải. Ta gọi một xâu thuộc loại A nếu nó không chứa 3 số liên tiếp $0, 1, 0$ và gọi một xâu thuộc loại B nếu nó không chứa 4 số hạng liên tiếp $0, 0, 1, 1$ hoặc $1, 1, 0, 0$.

Với mỗi xâu $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ta xây dựng $f(X) = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ như sau: $y_1 = 0$, $y_k \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} \pmod 2$. Rõ ràng X chứa 3 số liên tiếp $0, 1, 0$ khi và chỉ khi $f(X)$ chứa 4 số hạng liên tiếp $0, 0, 1, 1$ hoặc $1, 1, 0, 0$, tức là X thuộc loại A khi và chỉ khi $f(X)$ thuộc B.

Vậy f là một song ánh đi từ tập các xâu loại A độ dài n đến tập các xâu loại B độ dài $n+1$ mà bắt đầu bằng 0. Nhưng từ mỗi xâu X thuộc B ta nhận được một xâu $\overline{X}$ cũng thuộc B bằng cách đổi các phần tử của X theo quy tắc $1 \to 0, 0 \to 1$ nên số các xâu loại B có độ dài $n+1$ gấp đôi số các xâu loại B độ dài $n+1$ mà bắt đầu bằng số 0. Từ đó ta có đpcm.

2. Từ việc so sánh lực lượng các tập hợp, phương pháp song ánh có thể giúp chúng ta đếm số phần tử của một tập thông qua sự so sánh lực lượng của tập đó với một tập khác mà ta đã biết số phần tử của nó.

Bài toán 3 (*Vô địch Ucraina - 1996) Gọi M là các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có* $2n$ *chữ số, trong đó có* n *chữ số 1 và* n *chữ số 2. Gọi* N *là số tất cả các số viết trong hệ thập phân có* n *chữ số, trong đó chỉ có chữ số* $1, 2, 3, 4$ *và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh rằng* $M = N$.

Lời giải 1. Với mỗi số có n chữ số gồm các chữ số $1, 2, 3, 4$ và số chữ số 1 bằng số chữ số 2, ta "nhân đôi" thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc sau: đầu tiên, hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có hai chữ số, sau đó các chữ số 3 ở n chữ số đầu và các chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số sau và các chữ số 4 ở n chữ só đầu được đổi thành chữ số 2. Ví dụ: $1234142 \to 12341421234142 \to 12121221221112$.

Như thế, ta thu được một số có đúng n chữ số 1 và n chữ số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau: với mỗi số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối rồi cộng chúng theo cột với quy tắc: $1+1=1$, $2+2=2$, $1+2=3$, $2+1=4$, và ta thu được một số có n chữ số gồm các chữ số $1, 2, 3, 4$ với số chữ số 1 bằng số các số 2. Ví dụ $12121221221112 \to 1234142$ như sau:

$$\begin{array}{r} 1212122 \\ 1221112 \\ \hline 1234142 \end{array}$$

Như thế song ánh giữa hai tập hợp đã được thiết lập và ta có $M = N$. Cách xây dựng song ánh như trên khá đẹp song hơi cầu kỳ. Chúng tôi đã tìm ra một lời giải ngắn gọn hơn như sau:

Lời giải 2. $\forall k \in S = \{0, 1, \ldots, n\}$, ta thực hiện 2 lần (độc lập với nhau) việc đánh dấu k trong n vị trí trên một hàng. Sau đó, ở mỗi vị trí ta ghi: chữ số 3 nếu được đánh dấu 3 lần, chữ số 4 nếu không được đánh dấu lần nào, chữ số 1 nếu chỉ được đánh dấu lần đầu và chữ số 2 nếu chỉ được đánh dấu lần sau.

Rõ ràng khi cho k chạy trên S thì số tất cả các số thu được chính là N. Hơn nữa, $\forall k \in S$ thì có thể xem số cách đánh dấu lần đầu là số cách chọn k trong số n vị trí, còn số cách đánh dấu lần sau là số cách chọn $n-k$ vị trí trong n vị trí. Do đó tổng số cách đánh dấu khi k chạy trên S đúng bằng số cách chọn n phần tử từ $2n$ phần tử (tức là C_{2n}^{n}), và số này chính là M. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 4 *Cho các số nguyên dương n, k với $n \geqslant k$. Xét phép toán f đối với bộ sắp thứ tự $X = (x_1, \ldots, x_n)$ như sau: mỗi lần chọn k số liên tiếp tùy ý trong X và đổi dấu của chúng. Tìm số các bộ thứ tự $X = (x_1, \ldots, x_n)$ thỏa mãn các điều kiện:*

i) Mọi phần tử của X đều thuộc tập $\{0, 1\}$.

ii) Có thể thực hiện hữu hạn lần phép toán f để từ X nhận được bộ $(1, 2, \ldots, 1)$.

Lời giải. Xét bộ thứ tự $X = (x_1, \ldots, x_n)$ tùy ý. Ta có 2 nhận xét sau:

1) Có đúng $n - k + 1$ nhóm k số liên tiếp.

2) Sau một số chẵn lần thực hiện phép toán f cho một nhóm k số liên tiếp trong X thì giá trị k số đó không đổi.

Như vậy, mỗi phương án thực hiện hữu hạn lần phép toán f cho X tương ứng với một bộ nhị phân $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, trong đó a_i tính theo modun 2 của số lần thực hiện f cho nhóm k số liên tiếp $(x_1, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1})$, và X trở thành

$$\Big((-1)^{a_1}x_1, \ldots, (-1)^{a_1+\cdots+a_k}x_k, (-1)^{a_2+\cdots+a_{k+1}}x_{k+1}, \ldots, (-1)^{a_{n-k+1}}x_n\Big).$$

3. Cũng từ việc so sánh lực lượng các tập hợp, phương pháp song ánh là một công cụ đắc lực để thiết lập và chứng minh các công thức tổ hợp. Thông thường, người ta xây dựng một song ánh đi từ một tập vào chính nó, và nguyên tắc ở đây có thể phát biểu như sau: "Khi đếm số phần tử một tập hợp bằng nhiều cách thì các kết quả thu được bằng nhau". Chẳng hạn từ bài toán 3, nếu ta tính N theo cách "truyền thống": có $C_n^i C_{n-1}^i$ cách chọn vị trí cho i chữ số 1 và i chữ số 2, còn lại 2^{n-2i} cách chọn vị trí cho các chữ số 3 và 4, với i chạy từ 0 tới $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ thì ta đã chứng minh được một đẳng thức khá thú vị:

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^i C_{n-i}^i 2^{n-2i} = C_{2n}^n.$$

Bài toán 5 *Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$ thì*

$$C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \cdots + \left(C_n^k\right)^2.$$

Lời giải. Ta đếm số cách chọn n phần tử từ một tập gồm $2n$ phần tử theo hai cách. Cách thứ nhất: mỗi lần chọn ra n phần tử, khi đó số cách hiển nhiên là C_{2n}^n. Cách thứ hai: trước hết ta chia tập $2n$ phần tử thành hai tập con, mỗi tập gồm n phần tử; sau đó chọn từ tập con thứ nhất k phần tử (có C_n^k cách chọn) và chọn từ tập con thứ hai $n - k$ phần tử (có $C_n^{n-k} = C_n^k$ cách chọn), ta sẽ có $\left(C_n^k\right)^2$ cách chọn; cuối cùng cho k chạy từ 0 tới n ta được tổng số cách chọn cần tìm là $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \cdots + \left(C_n^k\right)^2$. Từ đó ta có đpcm.

Bài toán 6 *Chứng minh rằng với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m > k$ thì:*

$$C_{m+n+1}^k = C_m^k C_n^0 + C_{m-1}^{k-1} C_{n+1}^1 + \cdots + C_{m-k}^0 C_{n+k}^k.$$

Lời giải. Ta đếm số các bộ số nguyên $T = (a_1, a_2, \dots, a_{m+n+1-k})$ với $1 \leqslant a_1 < a_2 < \dots < a_{m+n+1-k} \leqslant m+n+1$ bằng hai cách. Cách thứ nhất: ta xem đó là số cách chọn $m+n+1-k$ số từ $m+n+1$ số nên sẽ có C^k_{m+n+1} cách chọn. Cách thứ hai: ta thấy số các bộ T có $a_{m+1-k} = m+1-i$ là $C^{k-i}_{m-i}.C^i_{n+i}$ do có C^{k-i}_{m-i} cách chọn các bộ $T_1 = (a_1, \dots, a_{m-k})$ thoả $1 \leqslant a_1 < \dots < a_{m-k} \leqslant m-i$ và C^n_{n+1} cách chọn các bộ $T_2 = (a_{m+2-k}, \dots, a_{m+n+1-k})$ thoả mãn $m+2-i \leqslant a_{m+2-k} < \dots < a_{m+n+1-k} \leqslant m+n+1$, từ đó cho i chạy từ 0 tới k (do $m+1-k \leqslant a_{m+1-k} \leqslant m+1$) ta được tổng số cách chọn là $C^k_m C^0_n + C^{k-1}_{m-1} C^1_{n+1} + \dots + C^0_{m-k} C^k_{n+k}$. Kết quả đó cho ta đpcm.

Bài toán 7 (*Vô địch Trung Quốc - 1994*) *Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C^k_n C^{[(n-k)/2]}_{n-k} = C^n_{2n+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Lời giải. Ta chọn ra n số từ $2n+1$ số như sau. Trước hết, từ $2n+1$ số, ta chia ra n cặp và số x. Sau đó bước 1: ta chọn ra k cặp rồi từ mỗi cặp chọn ra một số, bước 2: chọn $[(n-k)/2]$ cặp trong $n-k$ cặp còn lại, ngoài ra, số x sẽ được chọn nếu $n-k$ lẻ và không được chọn nếu $n-k$ chẵn. Rõ ràng bước 1 có $2^k C^k_n$ cách chọn và bước 2 có $C^{[(n-k)/2]}_{n-k}$ cách chọn và ta chọn được tổng cộng n số, trong đó k chạy từ 0 tới n. Lập luận đó cho ta đpcm.

Bài toán 8 *Cho trước các số nguyên dương m, n. Tính*

$$T = \sum_{k=0}^{m} \frac{C^k_{n+k}}{2^{m+k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{C^k_{m+k}}{2^{n+k}}.$$

Lời giải. Ta chứng minh tổng cần tính bằng 1, tức là

$$\sum_{k=0}^{m} C^k_{n+k} 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C^k_{m+k} 2^{n-k} = 2^{m+n+1}.$$

Các luỹ thừa của 2 gợi ta liên tưởng đến số đến số tập con một tập hợp.

Trong các tập con của tập $S = \{1, 2, \dots, m+n+1\}$, dễ thấy có $C^k_{n+k} 2^{m-k}$ tập dạng $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$, $(1 < i \leqslant m+1)$ trong đó $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ và $a_{n+1} = n+k+1$ với $0 \leqslant k \leqslant m$ (do có C^n_{n+k} cách chọn n phần tử từ tập $\{1, 2, \dots, n+k\}$, ngoài ra có thể "bổ sung" thêm một trong số 2^{m-k} tập con của tập $\{n+k+1, \dots, n+m+1\}$. Như vậy $\sum_{k=0}^{m} C^k_{n+k} 2^{m-k}$ là số tập con của S có nhiều hơn n phần tử.

Tương tự $\sum_{k=0}^{n} C^k_{m+k} 2^{n-k}$ là số tập con của S có nhiều hơn m phần tử, cũng tức là số tập con của S có không quá n phần tử.

Vậy $\sum_{k=0}^{m} C^k_{n+k} 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C^k_{m+k} 2^{n-k}$ là số tất cả các tập con của S, tức là 2^{m+n+1}. Đó chính là điều phải chứng minh.

4. Một ứng dụng nữa của phương pháp song ánh là dùng để tính tổng các phần tử một tập hợp nào đó. Có thể xem như ý tưởng này đã được đề xuất ngay trong bài toán

quen thuộc: "Tính $1+2+\cdots+100$", với cách giải tuyệt vời mà tương truyền là của Gauxơ, ở đây chúng ta có thể diễn đạt lại cách tính đó như sau: $\forall i \in S = \{1, 2, \ldots, 100\}$, gọi f là ánh xạ xác định như sau: $f(i) = 101 - i$. Rõ ràng f là một song ánh từ S tới S, do đó:

$$2\sum_{i\in S} i = \sum_{i\in S}(i + f(i)) = |A|.101 = 10100$$

Suy ra tổng cần tính bằng 5050.

Bài toán 9 (*VMO - 2002) Cho tập S gồm tất c các số nguyên trong đoạn* $[1, 2002]$. *Gọi T là tập hợp tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi X thuộc T, ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng các phần tử của X. Tính*

$$m = \frac{\sum m(X)}{|T|}.$$

(tổng lấy theo tất c các tập X thuộc T).

Lời giải. Xây dựng song ánh $f: T \to T$ như sau: $f(X) = \{2003 - x / x \in X\}, \forall X \in T$. Rõ ràng $m(X) + m(f(X)) = 2003$. Do đó:

$$2\sum m(X) = \sum (m(X) + m(f(X))) = |T|.2003 \Rightarrow m = \frac{\sum m(X)}{|T|} = \frac{2003}{2}.$$

Bài toán 10 *Hãy tính trung bình cộng tất cả các số N gồm 2002 chữ số thoả mãn $N \,\vdots\, 99$ và các chữ số của N thuộc $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.*

Lời giải. Gọi M là tập các số N tho điều kiện đề bài. Xây dựng ánh xạ f như sau:

Nếu $N = \overline{a_1a_2\ldots a_{2002}}$ thì $f(N) = \overline{b_1b_2\ldots b_{2002}}$, với $b_i = 9 - a_i$. Do $N + f(N) = \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{2002cs9} \,\vdots\, 99$ nên f là song ánh $M \to M$.

Từ đó:

$$2\sum_{N\in M} N = \sum_{N\in A}(N + f(N)) = |M|\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{2002cs9}.$$

Suy ra trung bình cộng các số N là:

$$\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{2002cs9} = \frac{10^{2002} - 1}{2}.$$

Các bạn thấy đấy, lời giải bằng phương pháp song ánh thường rất ấn tượng về sự ngắn gọn và đẹp đẽ. Song để có được những lời giải đó, chúng ta phải không ngừng tìm tòi, suy nghĩ đặng có một tư duy nhạy bén.

Cuối cùng là một số bài tập để rèn luyện.

Bài tập 1 *Cho* $m, n \in \mathbb{Z}^+$. *Chứng minh rằng số cách biểu diễn* n *dưới dạng tổng của những số nguyên dương không lớn hơn* m *bằng số cách biểu diễn* n *dưới dạng không ít hơn* m *số nguyên dương.*

Bài tập 2 *Người ta xếp* n *nam sinh và* n *nữ sinh thành một hàng, sau đó tìm cách cắt hàng thành hai khúc sao cho mỗi khúc có số nam sinh bằng số nữ sinh. Gọi* A *là số trường hợp không thể cắt hàng theo yêu cầu trên,* B *là số trường hợp chỉ có thể cắt hàng theo yêu cầu trên một cách duy nhất.*

Chứng minh rằng: $B = 2A$.

Bài tập 3 *Một câu lạc bộ leo núi có* n *thành viên tổ chức 4 cuộc leo núi và* E_1, E_2, E_3, E_4 *là các đội tham gia vào các cuộc leo núi ấy. Hỏi có bao nhiêu cách chia các đội sao cho* $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset, E_2 \cap E_3 \neq \emptyset, E_3 \cap E_4 \neq \emptyset$.

Bài tập 4 (*IMO - 1987*) *Gọi* $p_n(k)$ *là số hoán vị của tập* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *có đúng* k *điểm cố định. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!.$$

Bài tập 5 *Tính trung bình cộng các số* N *gồm* n $(n > 1)$ *chữ số thỏa mãn các điều kiện:*

i) N *gồm các chữ số* $\{1, 2, 4, 5\}$ *và hiệu 2 chữ số liên tiếp luôn lớn hơn 1.*

ii) N *chia hết cho 11.*

Bài tập 6 *Đặt*

$$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!},\ k \in \mathbb{N}$$

Tính

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{F(k)}{(n-k)!}.$$

Phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi trong tổ hợp

Huỳnh Tấn Châu

Một trong những phương pháp có hiệu quả để giải bài toán tổ hợp là thiết lập hệ thức truy hồi. Nội dung cơ bản của phương pháp này như sau: Thay vì ta đếm trực tiếp $f(n)$ theo yêu cầu bài toán, ta sẽ thiết lập hệ thức quan hệ giữa $f(n), f(n-1), \ldots$ để từ đó tính được $f(n)$.

Bài toán 1 (Bungari - 1995) *Cho số nguyên $n \geqslant 2$. Hãy tìm số các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của $1, 2, \ldots, n$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ thỏa $a_i > a_{i+1}$.*

Bài giải. Gọi S_n là số các hoán vị thỏa điều kiện bài toán. Để ý rằng số các hoán vị mà $a_n = n$ là S_{n-1}. Còn số các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với $a_i = n$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ là C_{n-1}^{i-1}. Do vậy:

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Chú ý rằng $S_2 = 1$, từ đó ta có: $S_n = 2^n - n - 1$.

Ở bài này ta thiết lập hệ thức truy hồi xuất phát từ S_n đi đến S_{n-1}. Trong một số trường hợp ta lại đi theo hướng ngược lại. Chẳng hạn:

Bài toán 2 *Giả sử F_k là tập hợp tất cả các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ trong đó A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ là một tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ (Các tập $A_1, A_2, \ldots, A_k$ có thể trùng nhau). Hãy tính*

$$S_n = \sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_k) \in F_k} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$

(Trường hợp $n = 1998$ là bài thi APMO 1998)

Bài giải. Do có 2^n tập con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ nên có 2^{nk} bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$. Với mỗi k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ta có thể thêm hoặc không thêm n vào tập A_i để được k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của $\{1, 2, \ldots, n\}$. Với chú ý rằng số k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ là $2^{(n-1)k}$ và có $2^k - 1$ cách thêm n vào k-bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ của tập $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ thì ta có: $S_n = 2^k S_{n-1} + (2^k - 1).2^{k(n-1)}$.

Dễ thấy: $S_1 = 2^k - 1$. Từ đấy bằng qui nạp ta chứng minh được: $S_n = n.2^{k(n-1)}(2^k - 1)$. Cũng giống bài toán 1, ta có bài toán sau:

Bài toán 3 *Tìm số tập con của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho trong mỗi tập con chứa ít nhất 2 phần tử là hai số nguyên liên tiếp.*

Bài giải. Gọi S_n là tập hợp các tập con không rỗng của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ mà trong mỗi tập con không có hai phần tử nào là hai số nguyên liên tiếp. Chia các phần tử của S_n thành hai nhóm:

Nhóm không chứa $\{n\}$: số các tập con như vậy là $|S_{n-1}|$

Nhóm chứa phần tử n: $\{n\}$ hoặc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, n\}$ $(k \geqslant 1)$. Rõ ràng $a_i \neq n-1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nên số các tập con như vậy là: $|S_{n-2}| + 1$.

Do vậy:

$$|S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| + 1$$

Với chú ý $|S_2| = 2$, $|S_3| = 4$ ta có:

$$|S_n| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] - 1$$

Mặt khác số tập con không rỗng của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ là $2^n - 1$. Vậy số tập con mà trong mỗi tập con không có 2 phần tử nào là hai số nguyên liên tiếp là:

$$2^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Bài toán 4 *Có n quả bóng $b_1, b_2, \ldots, b_n$ và $2n$ hộp $h_1, h_2, \ldots h_{2n}$. Biết rằng quả bóng b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ chỉ bỏ vào được các hộp $h_1, h_2, \ldots, h_{2i}$. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ quả bóng vào các hộp biết rằng mỗi hộp chứa nhiều nhất một quả bóng. (Hai cách bỏ bóng được gọi là khác nhau khi ít nhất một quả bóng được bỏ vào hai hộp khác nhau trong hai cách đó).*

Bài giải. Đặt $S_{n,k}$ là số cách bỏ k quả bóng vào các hộp. Giả sử $2 \leqslant k \leqslant n$. Nếu một trong k quả bóng được chọn là b_n thì $(k-1)$ quả bóng còn lại có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k-1}$ cách. Đồng thời, b_n có $2n-(k-1) = 2n-k+1$ cách chọn 1 hộp trong các hộp còn lại để bỏ. Do đó số cách bỏ bóng trong trường hợp này là: $(2n-k+1).S_{n-1,k-1}$.

Trường hợp quả b_n không được chọn. Để ý rằng $k \leqslant n-1$. Mọi quả bóng trong các quả bóng $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ đều có thể bỏ vào các hộp bằng $S_{n-1,k}$ cách.

Suy ra:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k} + (2n-k-1)S_{n-1,k-1}(n \geqslant 3, 2 \leqslant k \leqslant n)$$

Dễ thấy:

$$S_{n,n} = (n+1)S_{n-1,n-1},\ S_{n,1} = n(n+1),\ S_{1,1} = 2$$

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$S_{n,k} = \frac{(n+1).k!\left(C_n^k\right)^2}{n-k+1}$$

Bài toán 5 *Có $n > 1$ thí sinh ngồi trên một bài tròn. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau luôn có đề khac nhau, biết rằng trong ngân hàng đề có đúng m $(m > 1)$ đề và hiển nhiên mỗi đề có nhiều bản.*

Bài giải.

Nhận xét: Do thí sinh ngồi theo vòng tròn, nên một cách tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc tìm cách "cắt" vòng tròn thành hàng thẳng.

Cách 1. Ký hiệu P_n là số cách phát đề hợp lệ cho n học sinh $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ngồi theo vòng tròn (một cách phát đề được coi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ một đề và hai thí sinh bất kỳ ngồi gần nhau thì nhận được hai loại đề khác nhau).

Ta viết $a_i = a_j$ $(i \neq j)$ nếu a_i và a_j cùng loại đề và $a_i \neq a_j$ trong trường hợp ngược lại ta chứng minh:

$$P_{n+1} = (m-2)P_n + (m-1)P_{n-1} \tag{1}$$

Xét một cách phát đề hợp lệ cho $n+1$ thí sinh $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

Nếu $a_1 \neq a_n$ thì bỏ a_{n+1} đi ta có một cách phát đề hợp lệ cho n thí sinh $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, và có $(m-2)$ cách phát đề cho a_{n+1}.

Nếu $a_1 = a_n$ thì ta bỏ a_{n+1} và a_n đi ta có một cách phát đề hợp lệ cho $(n-1)$ thí sinh $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Ta có $(m-1)$ cách phát đề cho (a_n, a_{n+1}) để hợp lệ với $a_n = a_1$. Vậy ta có được (1).

Mặt khác dễ thấy: $P_2 = m(m-1)$; $P_3 = m(m-1)(m-2)$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được: $P_n = (m-1)^n + (m-1)(-1)^n$.

Cách 2. Bài toán tương đương với việc đếm số các dãy (a_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ thỏa: $a_i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ và $a_1 \neq a_2, a_2 \neq a_3, \ldots, a_n \neq a_1$.

Trong tập hợp các dãy (a_i) thỏa $a_i \in M$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ và $a_1 \neq a_2, a_2 \neq a_3, \ldots, a_n \neq a_1$, gọi A_n, B_n lần lượt là tập hợp các dãy (a_i) mà $a_1 \neq a_n$ và $a_1 = a_n$.

Do với mỗi dãy thuộc B_n, nếu bỏ đi số a_n thì ta được một dãy thuộc A_{n-1} nên $|B_n| = |A_n|$. Mặt khác, dễ thấy $|A_n| + |B_n| = m(m-1)^{n-1}$ (do a_1 có m cách chọn, a_{i+1} có $(m-1)$ cách chọn khác a_i với mọi $i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Vậy

$$|A_n| = m(m-1)^{n-1} - |A_{n-1}|$$

Với chú ý $|A_2 = m(m-1)$ ta được: $|A_n| = (m-1)^n + (m-1)(-1)^n$.

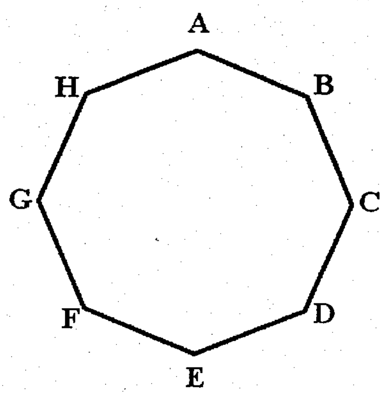
Đó chính là đáp số cần tìm.

Nhận xét: Thực chất cả hai lời giải là như nhau. Nhưng với lời giải 2, "dường như" ta đã hình thành nên một hướng giải mới. Để thấy rõ hiệu lực của hướng mới này, ta đến với bài toán sau:

Bài toán 6 (IMO - 1979) *Cho A và E là hai đỉnh đối tâm của một hình tám cạnh đều. Có một con ếch bắt đầu nhảy từ A. Tại bất cứ đỉnh nào trừ E, ếch có thể tới một trong hai đỉnh kề. Nếu ếch nhảy tới E thì nó dừng lại ở đó. Gọi a_n là số đường đi phân* *biệt của đúng n bước nhảy để ếch nhảy từ A đến E. Chứng minh rằng:*

$$a_{2n-1} = 0,\ \ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\big(2+\sqrt{2}\big)^{n-1} - \big(2-\sqrt{2}\big)^{n-1}\Big].$$

Bài giải. Kí hiệu các đỉnh như hình vẽ.



$a_{2n-1} = 0$ là hiển nhiên. Gọi b_n là số đường đi từ C tới E qua n bước nhảy. Qua 2 bước đầu tiên, ếch có thể về A hoặc đến C hoặc G.

Do đó:

$$a_{2n} = 2a_{2n-2} + b_{2n-2} \quad \forall n > 0 \tag{1}$$

Từ C (hoặc G), sau hai bước nhảy ếch có thể về lại C hoặc tới A, nếu $n > 2$, do đó:

$$a_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2} \quad \forall n > 1 \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a_{2n} = 4a_{2n-2} - 2a_{2n-4}.$$

Cùng với $a_2 = 0, a_4 = 2$ ta dễ dàng có điều phải chứng minh.

Bài toán 7 (Dự tuyển IMO - 1996) *Cho bảng ô vuông $n \times n$ $(n > 1)$. Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông 2×2 có đúng 2 ô vuông được đánh dấu. (Hai cách đánh dấu được coi là khác nhau nếu có một ô vuông nào đó mà trong cách này thì được đánh dấu còn trong cách kia thì không).*

Bài giải. Gọi S_n là số cách đánh dấu trong bảng $n \times n$. Xét tập T gồm các ô vuông nằm trong cột cuối cùng (tính từ phải sang) và hàng cuối cùng (tính từ trên xuống), ta gọi A_n là các cách đánh dấu mà có hai ô vuông kề nhau trong T cùng được đánh dấu hoặc cùng không được đánh dấu và B_n là các cách đánh dấu mà các ô vuông trong T được đánh dấu xen kẽ.

Dễ thấy mỗi cách đánh dấu thuộc B_n sẽ ứng với một cách đánh dấu thuộc B_{n-1}, còn mỗi cách đánh dấu thuộc A_n sẽ ứng với một cách đánh dấu thuộc A_{n-1} và một cách đánh dấu thuộc B_{n-1}. (Điều này suy ra khi xét bảng ô vuông $(n-1) \times (n-1)$ có được từ bảng $n \times n$ sau khi bỏ T).

Từ đó ta có:

$$|B_n| = |B_{n-1}|,\ |A_n| = |A_{n-1}| + |B_{n-1}|\ (n > 2)$$

Mà $S_n = |A_n| + |B_n|\ \forall n > 1$, nên $S_n = 2S_{n-1} - S_{n-2}\ \forall n > 3$.

Dễ thấy rằng: $S_2 = 6, S_3 = 14$. Từ đó bằng quy nạp ta có: $S_n = 8n - 10,\ \forall n \geqslant 2$.

Bài toán 8 *Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn:*

i) n có 1000 chữ số.

ii) Tất cả các chữ số của n là lẻ.

iii) Hiệu của 2 số liên tiếp bất kỳ của n luôn bằng 2.

Bài giải. Trong tập hợp S_k các số nguyên dương n có k chữ số thỏa (ii) và (iii), gọi A_k, B_k, C_k, D_k, E_k lần lượt là tập hợp các số tận cùng bởi $1, 3, 5, 7, 9$.

Từ mỗi số thuộc A_k nếu ta bỏ đi chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc B_{k-1}, mặt khác từ mỗi số thuộc B_{k-1} nếu ta bổ sung thêm số 1 làm chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc A_k, do đó $|A_k| = |B_{k-1}|$. Từ mỗi số thuộc B_k nếu ta bỏ đi chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc A_{k-1} hoặc C_{k-1}, nếu ta bổ sung thêm số 3 làm chữ số tận cùng thì nhận được một số thuộc B_k, do đó: $|B_k| = |A_{k-1}| + |C_{k-1}|$.

Tương tự: $|C_k| = |B_{k-1}| + |D_{k-1}|$, $|D_k| = |C_{k-1}| + |E_{k-1}|$ và $|E_k| = |D_{k-1}|\ \ (\forall k > 1)$

Sử dụng 5 đẳng thức trên, bằng cách thế liên tục, ta có:

$$\begin{aligned}|S_k| &= |A_k| + |B_k| + |C_k| + |D_k| + |E_k| \\ &= |A_{k-1}| + 2|B_{k-1}| + 2|C_{k-1}| + 2|D_{k-1}| + |E_{k-1}| \\ &= 2|A_{k-2}| + 3|B_{k-2}| + 4|C_{k-2}| + 3|D_{k-2}| + 2|E_{k-2}| \\ &= 3|A_{k-3}| + 6|B_{k-3}| + 6|C_{k-3}| + 6|D_{k-3}| + 3|E_{k-3}|\end{aligned}$$

Suy ra: $|S_k| = 3|S_{k-2}\ (\forall k > 3)$. Do $|S_2| = 8$ nên $|S_{1000}| = 8.3^{499}$.

Tương tự như trên ta có:

Bài toán 9 *Tìm số các bộ số nguyên* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n > 1)$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} |a_i| \leqslant 1, & \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ |a_i - a_{i+1}| \leqslant 1, & \forall i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Bài giải. Trong tập S_n gồm các bộ n số nguyên $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thỏa đề bài, gọi A_n, B_n, C_n là tập hợp các bộ có a_n bằng $-1, 0, 1$ tương ứng.

Ta có ngay: $|S_n| = |A_n| + |B_n| + |C_n|$.

Mặt khác, dễ thấy từ mỗi bộ thuộc A_n hoặc B_n ta có thể bổ sung $a_{n+1} = -1$ để được một bộ thuộc A_{n+1} nên $|A_{n+1}| = |A_n| + |B_n|$.

Tương tự ta có: $|C_{n+1}| = |C_n| + |B_n|$ và $|B_{n+1}| = |A_n| + |B_n| + |C_n| = |S_n|$.

Từ đó ta có:

$$|S_{n+1}| = |A_{n+1}| + |B_{n+1}| + |C_{n+1}| = (|A_n| + |B_n| + |C_n|) + |B_{n+1} + |B_n| = 2|S_n| + |S_{n-1}|$$

Kết hợp với $|S_2| = 3$, $|S_3| = 7$ ta tính được:

$$|S_n| = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

Ta có thể phát biểu bài toán dưới dạng phức tạp hơn, chẳng hạn:

Bài toán 10 *Tìm số các đa thức $P_n(x)$ bậc n chẵn thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) Các hệ số của $P_n(x)$ thuộc tập $\{0, \pm 1\}$.

ii) Tồn tại đa thức $Q(x)$ cũng có các hệ số thuộc tập $\{0, \pm 1\}$ sao cho $P_n(x) = (x^2 - 1)Q(x)$

Cuối cùng xin nêu ra một số bài tập để bạn đọc rèn luyện.

Bài tập 1 (VMO - 1997) *N đường tròn chia mặt phẳng ra làm bao nhiêu phần nếu bất cứ cặp hai đường tròn nào cũng cắt nhau tại hai điểm phân biệt và không có ba đường tròn nào có giao điểm chung.*

Bài tập 2 *Cho n là số nguyên dương. Đặt $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ trong đó a_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nhận giá trị 0 hoặc 1. Gọi $A(n), B(n)$ lần lượt là số 2n-bộ $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ có S lẻ và chẵn. Chứng minh:*

$$\frac{A(n)}{B(n)} = \frac{(2^n - 1)}{(2^n + 1)}.$$

Bài tập 3 *Ký hiệu $M = \{-1, 0, 1\}$. Tìm số các bộ $(a_1, \ldots, a_n)$ thỏa:*

1. a_i thuộc M với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. $a_i - a_{i+1}$ thuộc M với mọi $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Bài tập 4 *Cho trước số nguyên dương n. Xét tất cả các tổng*

$$S = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \quad \text{với} \quad x_i, y_i \in \{0, 1\}, \ \forall i = \overline{1, n}$$

Gọi S_n là số tổng lẻ, P_n là số tổng chẵn. Chứng minh:

$$\frac{S_n}{P_n} = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$$

Ý tưởng giải và sự tường minh lời giải qua một số bài toán tổ hợp

Lê Văn Quang

Trong các kỳ thi IMO, các bài toán tổ hợp (Combinatorics) được đặt trước đầu bài bằng chữ "C". Ví dụ: Bài 6 IMO 2005 do Rumani đề nghị được ghi: C6(ROM).

Khi đọc đầu bài của các BTTH (Bài toán tổ hợp) thì học sinh đều có thể hiểu các giả thiết và kết luận khá dễ dàng, nhưng giải được chúng là điều khó khăn. Từ bảng kết quả điểm cho thấy số học sinh giải được điểm tối đa rất ít, điều đó chứng tỏ đây là loại bài toán khó, thậm chí có trong tay lời giải của tác giả ra bài toán đó thì không phải học sinh nào cũng hiểu đầy đủ và cặn kẽ lời giải. Những người tự giải bài toán đó bằng một cách khác thường hiểu được lời giải của tác giả một cách khá dễ dàng. Tại sao lại như vậy?

Một số BTTH thường đề cập một số yếu tố ràng buộc theo những quy tắc nào đó. Yêu cầu của bài toán là đánh giá một đại lượng nào đó liên quan đến các yếu tố đã đề cập, hoặc chứng minh một quy tắc nào đó luôn thực hiện được, hoặc chứng minh một quy luật nào đó nghiệm đúng.

Lược đồ tự nhiên để tiếp cận việc giải loại bài toán này đã được hình thành cho học sinh từ các lớp dưới gồm các bước:

1. Chọn ẩn để mô tả các yếu tố trong đầu bài thành một phương trình, một bất phương trình hoặc một hệ hỗn hợp chứa ẩn đã chọn.

2. Xử lý các điều vừa mô tả theo yêu cầu của bài toán bằng cách giải ra nghiệm hoặc biến đổi thành những kết quả giúp cho việc hình thành quy tắc hay quy luật thỏa yêu cầu bài toán.

Từ ý tưởng giải như thế thì khâu then chốt nhất là thể hiện tường minh ra một lời giải cụ thể. Do bài toán khó, người giải được bài toán chắc chắn phải chỉ ra được mối quan hệ nội tại của các yếu tố trong bài toán thông qua các kỹ năng biến đổi tinh xảo hoặc những nhận xét tinh tế, bản chất nhất từ hệ đã mô tả được.

Ngay ở bước 1, việc khéo chọn ẩn, hoặc đặt thêm ẩn phụ hoặc tích hợp các yếu tố trong đầu bài... là sự sáng tạo rất cá biệt riêng của người giải.

Hoàn thành bước 1 đã là một thành công mà không phải học sinh nào cũng làm tốt, nhưng điều cốt yếu là xử lý thành công ở bước 2. Trong bước này thường nảy sinh một số vấn đề là các kết quả thu được thường là do các phép biến đổi hệ quả. Việc khảo sát ngược lại là cần thiết, hoặc ít ra giải quyết được vấn đề tồn tại tình huống mà đã chỉ ra. Đưa ra một ví dụ cụ thể để chứng tỏ tồn tại tình huống cũng không phải dễ dàng, còn tạo được một quy trình hợp lý, chặt chẽ, có hệ thống để xây dựng được tình huống đôi lúc lại khó hơn yêu cầu của đầu bài.

Các BTTH này đều do các nhà toán học lừng danh trên thế giới sáng tác nên trong lời giải của họ thường thông báo một khám phá mới về tri thức toán, một "bất biến" nào đó, hoặc kiến thiết một thuật toán nào đó... Đọc các lời giải của họ, học sinh học tập được những cách đặt vấn đề một cách sáng tạo, những kỹ năng biến đổi điêu luyện bậc thầy, những hoạt động về tích hợp các dữ kiện riêng lẻ thành những kết quả sâu sắc mà từ đó có thể đưa ra những kết luận xác đáng, các khẳng định mà họ thường đặt tên là các "bổ đề".

Cùng ý tưởng giải nhưng có thể có nhiều cách để thực hiện sự tường minh lời giải. Trong đó có lời giải mà học sinh cho là khó hiểu. Việc gợi ý cho học sinh một ý tưởng giải và động viên học sinh nỗ lực thực hiện theo cách của mình, để tường minh ra một lời giải cụ thể cho BTTH, phải chăng là cách hợp lý để giúp cho các em học sinh mới bắt đầu làm quen với các BTTH hóc búa này.

Sau đây là các bài toán minh họa cho các điều vừa đề cập.

Ba BTTH được chọn minh họa nằm trong các kỳ thi: Chọn học sinh giỏi Quốc gia 2005 của Việt Nam, USAMO lần thứ 30 và IMO 2005. Chúng ta sẽ xem xét chúng ở hai khía cạnh: ý tưởng giải và sự tường minh lời giải.

Bài toán 1 (HSGQG 2005, Bài 3) *Trong mặt phẳng, cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của bát giác là một nút. Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh là đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là tứ giác con.*

Hãy tìm số nguyên n nhỏ nhất có tính chất: có thể tô màu nút sao cho với mọi $i, k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $i \neq k$, nếu ký hiệu $s(i,k)$ là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị $s(i,k)$ đều bằng nhau.

Giải.

Gọi n là số nguyên nhỏ nhất thoả bài toán. Ta có $s(i,k) = s(1,2)$ với mọi $i,k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ và $i \neq k$.

Do một nút tương ứng với C_4^2 cặp đỉnh nên:

$$n.C_4^2 = \sum_{i<j} s(i,j) = C_8^2.s(1,2) \Leftrightarrow 3n = 14s(1,2)$$

Suy ra n chia hết cho 14. Từ đó: $n \geqslant 14$.

Cách tô màu 14 nút thoả mãn bài toán sau:

$\{1,2,3,4\}\{1,2,5,6\}\{1,2,7,8\}\{2,3,5,8\}\{2,3,7,6\}\{3,4,7,8\}\{3,4,5,6\}\{1,4,8,5\}\{1,4,7,6\}\{5,6,$

Nhận xét.

- Với một hình lập phương có thể ghi lại mỗi đỉnh một số chọn trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, hai đỉnh khác nhau ghi hai số khác nhau.

- Mỗi cạnh hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 cạnh song song với nó.

- Mỗi đường chéo của mặt hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 đường chéo của mặt cùng nằm trong mặt chứa nó hoặc trong mặt đối diện với nó.

- Mỗi đường chéo (chính) của hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 đường chéo (chính) còn lại.

Với ý tưởng trên có thể hiểu lý do tại sao lại chỉ ra được cách tô màu như trên.

Bài toán 2 (USAMO 2001, Bài 1) *Có 8 cái hộp, mỗi hộp chứa 6 trái banh. Tìm số nhỏ nhất sao cho mỗi banh tuỳ ý đều được tô một trong n màu thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

1. Trong mỗi hộp, không có hai banh nào được tô cùng một màu.

2. Hai hộp bất kỳ có chung khôg quá một màu.

Giải.

+) Gọi x_i là số màu xuất hiện i lần. $i = 1, 2, \ldots, k,\ (k \leqslant n)$. Ta có:

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \qquad (1)$$
$$48 = 1x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k \qquad (2)$$

+) Gọi y là số cách chọn hai hộp không có chung màu nào. Do hai hộp bất kỳ có chung không quá một màu nên:

$$C_8^2 = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + \cdots + C_k^2 x_k + y \qquad (3)$$

+) Với $i > 1$ ta có:

$$1 - \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}C_i^2 = \frac{(i-2)(i-3)}{6}.$$

Lấy (1) trừ $\frac{2}{3}$.(2) rồi cộng với $\frac{1}{3}$.(3) ta được:

$$n - \frac{68}{3} = \frac{1}{3}x_1 + \sum_{i\quad 2} \frac{(i-2)(i-3)}{6} x_i + \frac{1}{3}y \geqslant 0.$$

Từ đó:

$$n \geqslant 23.$$

+) Cách tô sau của 23 màu thỏa bài toán (gọi tên màu là: $1, 2, \ldots, 23$)

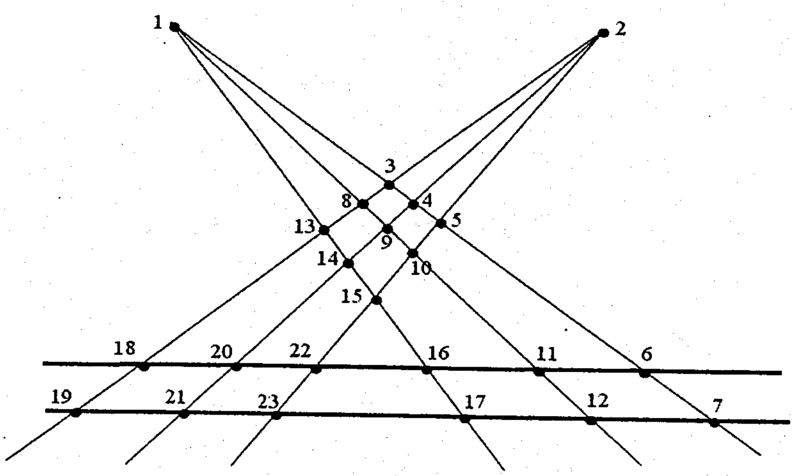
Hộp I	1	3	4	5	6	7
Hộp II	1	8	9	10	11	12
Hộp III	1	13	14	15	16	17
Hộp IV	2	3	8	13	18	19
Hộp V	2	4	9	14	20	21
Hộp VI	2	5	10	15	22	23
Hộp VII	6	11	16	18	20	22
Hộp VIII	7	12	17	19	21	23

Nhận xét.

+) Ở hình dưới, mỗi đường tượng trưng cho mỗi hộp, các giao điểm ở trên đường tượng trưng cho các banh.

+) Có đúng 8 đường, mỗi đường chứa đúng 6 giao điểm và có tất cả 23 giao điểm. Hai đường bất kỳ có tối đa một điểm chung.

+) Mỗi cách đánh số 23 giao điểm, từ 1 đến 23, cho ta một cách tô màu trên các banh ở 8 hộp thỏa các điều kiện bài toán.



Bài toán 3 (IMO 2005, Bài 6) *Trong một kỳ thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng với hai bài toán bất kỳ luôn có nhiều hơn $\frac{2}{5}$ số thí sinh dự thi, giải được cả hai bài toán này. Ngoài ra không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thí sinh sao cho mỗi người trong họ giải được đúng 5 bài toán.*

Giải.

+) Gọi n là số thí sinh tham gia kỳ thi và x_k là số thí sinh giải được đúng k bài toán $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Ta có:

$$x_6 = 0; \quad n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \tag{4}$$

Ta cần chứng minh: $x_5 \geqslant 2$

+) Với i, j và $i \neq j$, gọi $s(i,j) = s(j,i)$ là số thí sinh giải được cả bài i và bài $j, (i,j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Theo giả thiết luôn có: $5s(i,j) > 2n$. Do đó: $5s(i,j) \geqslant 2n+1$. Có tất cả $C_6^2 = 15$ cặp (i,j) mà $i < j$ nên:

$$\sum_{i<j} 5s(i,j) \geqslant 15(2n+1).$$

Do đó:

$$S = \sum_{i<j} s(i,j) \geqslant 3(2n+1) \tag{5}$$

+) Ta cũng có:

$$S = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + C_4^2 x_4 + C_5^2 x_5 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \tag{6}$$

Từ (4), (5), (6):

$$x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geqslant 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 3$$

hay

$$4x_5 \geqslant 6x_0 + 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3 \geqslant 3 \tag{7}$$

Từ đó:

$$x_5 \geqslant 1.$$

+) Ta chứng minh thêm x_5 không thể bằng 1.

Giả sử $x_5 = 1$. Lúc đó từ (7) cho $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$, và $x_4 = n - 1$.

Từ (6) cho:

$$S = 6n + 4. \tag{8}$$

Trường hợp này có duy nhất một thí sinh A làm được đúng 5 bài, còn lại tất cả đều làm được đúng 4 bài.

+) Gọi bài duy nhất mà thí sinh A không làm được là bài r và k là số thí sinh giải được bài r. Mỗi thí sinh trong k thí sinh này ngoài việc giải được bài r còn giải được đúng 3 bài nữa trong số các bài toán còn lại nên:

$$3k = \sum_{j=1, j\neq r}^{6} s(r,j) \tag{*}$$

+) Đặt $2n + 1 = 5a$. Ta có: $s(i,j) \geqslant a$.

Nếu a không phải là số nguyên thì:

$$s(i,j) > a \Leftrightarrow 5s(i,j) \geqslant 2n+2.$$

Suy ra:

$$\sum_{i<j} 5s(i,j) \geqslant 15(2n+2) \Leftrightarrow S \geqslant 6n+6.$$

Trái với (8).

+) Nếu a là số nguyên thì hiệu $s(i,j) - a$ là số nguyên không âm. Từ $S = 6n + 4$ viết lại $\sum_{i<j}(s(i,j) - a) = 1$, suy ra trong 15 số hạng $s(i,j)$ với $i < j$, phải có 14 số hạng có cùng giá trị là a và đúng một số hạng có giá trị là $a + 1$. Gọi $s(p,q) = a + 1$. Do đó giá trị của $\sum_{j=1,j\neq r}^{6} s(r,j)$ chỉ có thể là $5a$ hoặc $5a + 1$ tùy theo r không thuộc hoặc thuộc $\{p,q\}$.

Kết hợp với (*), ta có hoặc $5a$ chia hết cho 3 hoặc $5a + 1$ chia hết cho 3 (**).

+) vì thí sinh A giải được 5 bài, nên tồn tại một bài t khác với các bài p, q, r mà thí sinh A giải được. Gọi h là số thí sinh giải được bài t. Trong số h thí sinh này, thì thí sinh A giải được bài t và thêm đúng 4 bài nữa, và $h - 1$ thí sinh còn lại cũng giải được bài t và thêm đúng 3 bài nữa.

Vì vậy:

$$4 + 3(h-1) = \sum_{j=1,j\neq t}^{6} s(t,j) \text{ hay } \sum_{j=1,j\neq t}^{6} s(t,j) = 3h + 1.$$

Do $t \notin \{p,q\}$ nên:

$$\sum_{j=1,j\neq t}^{6} s(t,j) = 5a.$$

Suy ra $5a = 3h + 1$ và $5a + 1 = 3h + 2$.

Điều này mâu thuẫn với (**).

Qua lời giải bài toán trên, tôi cho rằng các bài toán sau cũng có cùng ý tưởng giải và các em học sinh có thể thực tập tường minh lời giải.

Bài toán 4 *Cho n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Trên mỗi cạnh và mỗi đường chéo của n-giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ người ta muốn ghi một số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng p, sao cho các điều kiện sau đều được thỏa mãn:*

i) Mọi số nguyên từ 1 đến p đều được ghi.

ii) Với mỗi tam giác $A_iA_jA_k$ tùy ý đều có hai cạnh được ghi hai số giống nhau và số này lớn hơn số được ghi trên cạnh còn lại.

Hãy xác định số nguyên p lớn nhất để có thể ghi các số thỏa mãn các điều kiện đặt ra.

Với giá trị này của p, hỏi có bao nhiêu cách ghi thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 5 *Có $m + 2$ cái hộp, mỗi hộp chứa m trái banh. Tìm số n nhỏ nhất sao cho mỗi banh được tô một trong n màu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

1. Trong mỗi hộp, không có hai banh nào được tô cùng một màu.

2. Hai hộp bất kì có chung không quá một màu.

Bài toán 6 *Trong một kỳ thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng* *với hai bài toán bất kỳ luôn có nhiều hơn* $\frac{2}{5}$ *số thí sinh dự thi giải được cả hai bài toán này. Ngoài ra không có thí nào giải được cả 6 bài toán.*

a. Gọi k là số thí sinh giải được đúng 5 bài toán. Tìm giá trị nhỏ nhất của k.

b. Chứng minh tồn tại ba bài toán mà có nhiều hơn $\frac{1}{5}$ *số thí sinh dự thi giải được.*

c. Chứng minh tồn tại bốn bài toán mà có nhiều hơn $\frac{1}{15}$ *số thí sinh dự thi giải được.*

Bài toán 7 *Cho một n-giác lồi có diện tích S. Chứng minh rằng tồn tại một cạnh AB của đa giác và một điểm M thuộc miền đa giác này sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB không nhỏ hơn* $\frac{4S}{nAB}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Toán học và Tuổi trẻ số 340/2005; 344/2006: Bài của Thầy Vũ Đình Hòa (ĐHSP Hà Nội).

[2] Toán học và Tuổi trẻ số 341/2005: Bài của Thầy Hoàng Ngọc Cảnh (THPT chuyên Hà Tĩnh).

[3] USA and International Mathematical Olympiads 2001 Titu Andreescu and Zuming Feng.

[4] http://www.mathlinks IMO Shotlist 2005.

[5] IMO 2006 Solutions.

Giới thiệu một số bài toán đại số có xuất xứ từ hình học

Nguyễn Đăng Phất

Bài viết này giới thiệu với bạn đọc một số bài toán đại số *đặc thù, có xuất xứ từ hình học*, mà nội dung bao gồm hai thể loại là *hệ phương trình đại số* và *cực trị đại số.*

1 Một số hệ phương trình đại số đặc biệt có xuất xứ từ hình học.

Trước hết, hãy xuất phát từ một số *hệ phương trình đại số bậc hai đơn giản* (có xuất xứ từ hình học).

Bài toán 1. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}, \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0); \tag{1}$$

Lời giải sơ lược

Đặt $\frac{1}{t}$ là giá trị chung của ba tỷ số trong hệ phương trình (1) rồi tính t (mà ta thường gọi là *ẩn phụ*) và x, y, z. Ta được:

$$a = t(x^2 - yz), \quad b = t(y^2 - zx), \quad c = t(z^2 - xy).$$

Từ đó suy ra (nếu $t < \infty$):

$$a^2 - bc = t^2.x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz); \tag{2}$$

và hai hệ thức nữa tương tự (đối với $b^2 - ca$ và $c^2 - ab$), thu được nhờ hoán vị vòng quanh $a \to b \to c \to a$ và $x \to y \to z \to x$.

Cuối cùng ta đi đến kết quả sau đây:

Trả lời.
1°) Nếu ba số a, b, c khác không đã cho và khác nhau đôi một thì x, y, z cũng vậy

($x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ $x,\ y,\ z$ đôi một khác nhau). Khi đó, t cũng khác không và *hệ phương trình (1) là vô định*), có biểu thức nghiệm như sau:

$$\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ca} = \frac{z}{c^2 - ab}\ (= \lambda \text{ tùy ý}); \tag{3}$$

2°) Nếu $a = b = c$ thì hệ phương trình (1) cũng là *vô định*, vì khi đó $x = y = z$ và lấy giá trị tùy ý, kể cả 0.

Nhận xét: 1°) Biểu thức nghiệm của hệ (1) có tính chất *đối xứng*, được suy ra từ (1) bằng cách thay các hằng số a, b, c lần lượt bởi các ẩn x, y, z, và ngược lại, thay x, y, z bởi a, b, c tương ứng. Ta nói rằng hệ (1) có tính chất *đối hợp*.
2°) Từ lời giải của hệ (1) ta dễ dàng suy ra hai hệ phương trình sau (hệ ba phương trình ba ẩn) có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c}; \\ x + y + z = a + b + c; \quad (abc \neq 0) \end{cases} \tag{1'}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c}; \\ xyz = abc; \quad (abc \neq 0) \end{cases} \tag{1''}$$

Bài toán 2. Giải hệ phương trình (ẩn là x, y, z):

$$\frac{x - a}{a' - a} = \frac{y - b}{b' - b} = \frac{z - c}{c' - c} = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2. \tag{*}$$

Đồng thời, chứng minh rằng: Nếu $a = b = c = 0$ và giữa a', b', c' có hệ thức

$$A(a'^2 + b'^2 + c'^2) + 2(pa' + qb' + rc') + B = 0, \tag{i}$$

(trong đó $A \neq 0,\ B \neq 0;\ a' \neq a,\ b' \neq b,\ c' \neq c;\ p \neq 0,\ q \neq 0,\ r \neq 0$) thì giữa x, y, z cũng có hệ thức sau đây:

$$B(x^2 + y^2 + z^2) + 2(px + qy + rz) + A = 0, \tag{ii}$$

Hướng dẫn. Đặt t là giá trị chung của ba tỉ số ở vế trái của (*), cũng có nghĩa đặt $t = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ là *ẩn phụ*. Lưu ý rằng đặt ẩn phụ như thế này cũng là phương pháp chung để giải hệ phương trình đại số có dạng (*) như hệ phương trình trên đây. Sau khi thực hiện một số phép biến đổi đại số tương đương ta thu được đáp số của bài toán. Phần này dành cho bạn đọc tự kiểm nghiệm.

Trả lời. Biểu thức nghiệm của hệ có thể được viết (sắp đặt) dưới dạng sau đây:

$$\frac{a' - a}{x - a} = \frac{b' - b}{y - b} = \frac{c' - c}{z - c} = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2; \tag{**}$$

Nhận xét. Biểu thức (**) của hệ (*) có tính chất đối xứng cũng giống như biểu thức nghiệm (3) của hệ (1) được chỉ ra trong bài toán 1 ở trên. Cụ thể là (**) được suy ra từ (*) bằng cách giữ nguyên các hằng số dữ kiện (đã cho) a, b, c nhưng lại thay các hằng số a', b', c' lần lượt bởi các ẩn x, y, z và ngược lại, thay x, y, z lần lượt bởi a', b', c'.

Xuất xứ của bài toán 2. Từ bài toán đại số 1 trên đây, nhân nhận xét về tính chất "*đối lập*" của biểu thức giữa nghiệm ("ẩn") và hằng số dữ kiện, tác giả bài viết này liên tưởng đến tính chất "đối hợp" của phép biến hình nghịch đảo trong mặt phẳng cũng như trong không gian. Trước hết, viết phương trình véctơ của phép nghịch đảo trong không gian cực O và phương tích $p = r^2 = 1$) rồi đề xuất thành bài toán 2 trên đây.

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 1 \ (\overrightarrow{OM'} \nearrow\!\nearrow \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{OM'^2},$$

hay là:

$$\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x_o} = \frac{\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_o}}{(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_o})^2} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_o} = \frac{\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x_o}}{(\overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x_o})^2}.$$

Sau đó, viết phương trình véctơ của mặt cầu (hay đường tròn trong mặt phẳng) $A\overrightarrow{x}^2 + 2\overrightarrow{C}.\overrightarrow{x} + B = 0$ rồi đề xuất bài toán chứng minh tiếp theo (Phép nghịch đảo biến mặt cầu thành mặt cầu hay mặt phẳng).

Bài toán 3. Giải và biện luận hệ phương trình (ẩn x, y, z):

$$\begin{cases} (a - x)\cos\alpha\tan^2\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma = 0, \\ (x - a)\cos\alpha + (b - y)\cos\beta\tan^2\beta + (z - c)\cos\gamma = 0, \\ (x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (c - z)\cos\gamma\tan^2\gamma = 0. \\ (\cos\alpha \neq 0, \quad \cos\beta \neq 0, \quad \cos\gamma \neq 0; \quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}) \end{cases} \qquad (***)$$

Hướng dẫn. Thay $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, $\tan^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1$, $\tan^2\gamma = \dfrac{1}{\cos^2\gamma} - 1$ vào hệ phương trình (***) thì đưa được hệ này về dạng sau đây:

$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\cos\beta + (z - c)\cos\gamma = \frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma}; \qquad (***')$$

Trả lời. 1°) Nếu α, β và γ không có mối liên hệ gì với nhau, cụ thể là: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \neq 1$ thì hệ phương trình *có nghiệm duy nhất*: $x = a, \ y = b, \ z = c$.
2°) Nếu $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, hệ phương trình có vô số nghiệm, dạng:

$$\begin{cases} x = a + \lambda\cos\alpha, \\ y = b + \lambda\cos\beta, \\ z = c + \lambda\cos\gamma, \end{cases} \qquad \text{(trong đó } \lambda \text{ là một tham số tùy ý, } \lambda \in \mathbb{R}\text{)}$$

Xuất xứ của bài toán 3. Bài toán trên đây được phát hiện đồng thời với bài toán 4 (được trình bày ngay sau đây), nảy sinh từ việc đặt bài toán 4. Bài toán này cố nhiên

dễ hơn nhiều so với Bài toán 4.
Nhận xét: Chúng ta có thể dễ dàng mở rộng bài toán cho trường hợp nhiều ẩn: n ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_n$, đồng thời cho n góc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Bài toán 4 cũng vậy.

Bài toán 4. Giải và biện luận hệ phương trình (ẩn là x, y, z):

$$\frac{a-x}{\cos\alpha} = \frac{b-y}{\cos\beta} = \frac{c-z}{\cos\gamma} = -\frac{p(x^2+y^2+z^2)+q(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{(p+q)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}; \qquad (****)$$

trong đó $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p+q \neq 0,\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ và thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad \text{(i)}$$

Hướng dẫn giải. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức

$$\frac{p(x^2+y^2+z^2)+q(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{(p+q)(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)} \qquad \text{(ii)}$$

không phụ thuộc vào x, y, z.

Cụ thể, gọi $-\lambda$ là giá trị của biểu thức (ii) ở trên, thế thì ta được: $a = x + \lambda\cos\alpha,\ b = y + \lambda\cos\beta,\ c = z + \lambda\cos\gamma$. Từ đó suy ra:

$$\lambda = \frac{p(a^2+b^2+c^2)+q(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2}{(p+q)(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)}. \qquad \text{(iii)}$$

Trả lời. 1°) Nếu $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \neq 0$, hệ (****) *có nghiệm duy nhất*, biểu diễn được dưới dạng:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} = -\frac{p(a^2+b^2+c^2)+q(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2}{(p+q)(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)}; \qquad \text{(iv)}$$

2°) Nếu $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0$, hệ phương trình (****) *vô nghiệm.*
3°) Nếu $a = b = c = 0$ thì $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = 0$, hệ phương trình *vô định.*

Nhận xét. 1°) Biểu thức (iv) của nghiệm của hệ phương trình (****) nhận được từ các hệ thức xuất phát của bài toán bằng cách thay trong đó x, y, z lần lượt bởi các hằng số a, b, c đã cho, và ngược lại. Như vậy, quan hệ $R(x, y, z; a, b, c)$ có tính chất *đối hợp*, nghĩa là:

$$R(x, y, z; a, b, c) = R(a, b, c; x, y, z)$$

2° Ngoài ra, dễ dàng thiết lập thêm hệ thức đối hợp nữa sau đây:

$$x^2+y^2+z^2+(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2 = a^2+b^2+c^2+(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)^2; \quad \text{(v)}$$

Đề nghị bạn đọc hãy tự kiểm tra hệ thức (v) này, xem là một bài tập.

Xuất xứ của bài toán 4. Bài toán đại số 4 trên đây được tác giả bài viết này phát hiện nhân quan tâm đến một phép biến hình đối hợp trong hình học "phi Euclide" [Còn bài toán 3 ở trên là một trường hợp riêng của bài toán 4 này, khi cho $p = 0$].
Chú thích. Đặc biệt, nếu chọn các góc nhọn α, β, γ thỏa mãn điều kiện (i) với những giá trị cụ thể, chẳng hạn $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = \frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$ thì Bài toán 4 bây giờ có dạng cụ thể sau đây:

Bài toán 4a. Giải hệ phương trình 3 ẩn sau:

$$\frac{a-x}{3} = \frac{b-y}{4} = \frac{c-z}{12} = \frac{169p(x^2+y^2+z^2) + q(3x+4y+12z)^2}{169(p+q)(3x+4y+12z)}$$

(trong đó: $p \neq 0,\ q \neq 0,\ p+q \neq 0$).

Sau đây tác giả bài viết này *giới thiệu bổ sung* một số bài toán nữa về giải (và biện luận) hệ phương trình đại số bậc hai cũng có xuất xứ từ hình học để *bạn đọc tự giải* và *làm quen hơn* với thể loại toán này.

Bài toán 5. Giả sử (x, y, z); (x', y', z') là hai bộ ba số dương, mỗi bộ đều thỏa mãn bất đẳng thức tam giác[1] , đồng thời thỏa mãn các đẳng thức sau đây:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2, & \text{(i)} \\ x^2+x'^2 = y^2+y'^2 = z^2+z'^2. & \text{(ii)} \end{cases}$$

Chứng minh rằng ta cũng có các hệ thức sau đây:
1°)

$$x^4+y^4+z^4 = x'^4+y'^4+z'^4, \tag{iii}$$

2°)

$$\Sigma(y^2+z^2-x^2)x^2 = \Sigma(y'^2+z'^2-x'^2)x'^2; \tag{iv}$$

trong đó $\Sigma(y^2+z^2-x^2)$ là ký hiệu tắt của tổng (có tính chất hoán vị vòng quanh): $\Sigma(y^2+z^2-x^2)x^2 = (y^2+z^2-x^2)x^2 + (z^2+x^2-y^2)y^2 + (x^2+y^2-z^2)z^2$.
Hướng dẫn Giải và Nhận xét. Nếu "hình học hóa" bài toán đại số này ta được và đưa về giải Bài toán hình học không gian sau đây.

Tuy nhiên, bài toán Đại số này còn có ý nghĩa như là "*lời giải đại số của Bài toán hình học không gian*" có nội dung như sau:

Bài toán 5'. Trong không gian xét một tam giác đều ABC và hai điểm D, D' (nằm ngoài mặt phẳng của tam giác ABC) đối xứng với nhau qua trọng tâm O của tam giác đều đã cho.

[1] Ta ký hiệu giả thiết này là: $\exists T_1(x, y, z)$ và $T_2(x', y', z')$, trong đó T_i chỉ tam giác có độ dài cạnh là x, y, z đối với T_1 và x', y', z' đối với T_2.

Chứng minh rằng hai tam giác $\mathcal{T}_1(DA, DB, DC)$ và $\mathcal{T}_2(D'A, D'B, D'C)$ là *tương đương* (cũng tức là có *diện tích bằng nhau*), trong đó $\mathcal{T} = \mathcal{T}(x, y, z)$ là ký hiệu tam giác có độ dài các cạnh là x, y, z; và lẽ đương nhiên 3 số dương x, y, z thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Chú thích. Sự tồn tại các tam giác $\mathcal{T}_i (i = 1, 2)$ được suy ra từ định lý Pompiu mà ta có thể dễ dàng chứng minh. Ngoài ra, ta cũng lưu ý rằng $\Sigma(y^2 + z^2 - x^2)x^2 = -(x^4 + y^4 + z^4) + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 16S_1^2$, trong đó $S_1 = s(\mathcal{T}_1)$ là diện tích của tam giác $\mathcal{T}_1(x, y, z)$.

Cũng vậy, $\Sigma(y'^2 + z'^2 - x'^2)x'^2 = 16S_2^2$, trong đó $S_2 = s(\mathcal{T}_2)$ là diện tích của $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2(x', y', z')$.

Bài toán 6. 1°) Chứng minh rằng các nghiệm dương x, y, z (nếu có) của hệ ba phương trình bậc hai:

$$(\mathcal{H}_1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \ (a, b, c > 0); & (i) \\ x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2; & (ii) \end{cases}$$

thỏa mãn hệ thức (iii) sau đây:

$$\Sigma(y^2 + z^2 - x^2)x^2 = \Sigma(b^2 + c^2 - a^2)a^2; \qquad \text{(iii)}$$

Chú thích: Không cần phải giải hệ phương trình

2°) Đảo lại, nếu x, y, z là các nghiệm dương của hệ phương trình $(\mathcal{H}_2)$ (gồm 2 phương trình (ii) và một phương trình (iii)):

$$\mathcal{H}_2 = \{(ii), (iii)\}$$

thì cũng thỏa mãn hệ thức (i).

Tóm lại:

$$\mathcal{H}_1\{(i), (ii)\} \ \Leftrightarrow \ \mathcal{H}_2\{(ii), (iii)\}$$

3°) Chứng minh rằng các hệ $\mathcal{H}_j$ $(j = 1, 2)$ có nghiệm (dương) khi và chỉ khi các số dương a, b, c đã cho thỏa mãn các bất đẳng thức sau đây:

$$a^2 < 2(b^2 + c^2), \ \ b^2 < 2(c^2 + a^2), \ \ c^2 < 2(a^2 + b^2).$$

Bài toán 7*. Cho 9 số dương $a, b, c; x, y, z; x', y', z'$ thỏa mãn các đẳng thức sau đây:

$$\begin{cases} \Sigma(b^2 + c^2 - a^2)a^2x^2 = \Sigma(b^2 + c^2 - a^2)a^2x'^2, & (1) \\ x^2 + x'^2 = y^2 + y'^2 = z^2 + z'^2. & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng ta cũng có đẳng thức sau:

$$\Sigma(b^2y^2 + c^2z^2 - a^2x^2)a^2x^2 = \Sigma(b^2y'^2 + c^2z'^2 - a^2x'^2)a^2x'^2. \qquad (3)$$

Chú thích. Bài toán 7 có xuất xứ từ bài toán hình học không gian sau đây:

Bài toán 7'. Hai tứ diện $ABCD$ và $ABCD'$ có đáy ABC chung và hai đỉnh D, D' đối xứng với nhau qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy ABC. Chứng minh rằng các tam giác $\mathcal{T}_1(BC.DA, CA.DB, AB.DC)$ và $\mathcal{T}_2(BC.D'A, CA.D'B, AB.D'C)$ có diện tích bằng nhau.

Bài toán 8. Giải và biện luận hệ phương trình sau (ẩn x, y, z, t đều > 0):

$$(\mathcal{H})\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,\ (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0); & (*)\\ x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2 = t^2 + d^2; & (**) \end{cases}$$

Xuất xứ của bài toán 8. Bài toán 8 trên đây có xuất xứ từ bài toán hình học không gian sau đây:

Bài toán 8'. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ (mà tứ diện đều là trường hợp đặc biệt), nghĩa là các cạnh đối diện bằng nhau: $BC = DA, CA = DB, AB = DC$.

Hãy xác định các khoảng cách từ một điểm P đã cho đến các đỉnh của tứ diện biết rằng điểm Q, đối xứng với P qua tâm O của mặt cầu $C(ABCD)$ ngoại tiếp tứ diện đã cho có khoảng cách đến các đỉnh A, B, C, D của tứ diện theo thứ tự bằng $QA = a, QB = b, QC = c, QD = d$.

Hướng dẫn. Áp dụng định lý về đường trung tuyến trong tam giác và tính chất của trọng tâm của một hệ điểm. Tuy nhiên cũng có thể sử dụng phương pháp vectơ.

Đáp số. Giải hệ $\mathcal{H}\{(*), (**)\}$, ta được kết quả:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2 + d^2 - a^2), & y^2 = \dfrac{1}{2}(c^2 + d^2 + a^2 - b^2),\\ z^2 = \dfrac{1}{2}(d^2 + a^2 + b^2 - c^2), & t^2 = \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - d^2). \end{cases} \qquad (***)$$

Bài toán luôn có nghiệm (dương) duy nhất, xác định bởi các hệ thức (***). Muốn vậy, hãy chứng minh tính chất sau đây, *đặc trưng cho một tứ diện gần đều* (bao gồm cả tứ diện đều), *tương tự* với định lý Pompiu trong hình học phẳng, đặc trưng cho một tam giác đều.

Định lý Pompiu (trong hình học không gian) có nội dung như sau:

Bình phương các khoảng cách từ một điểm P bất kỳ trong không gian đến các đỉnh của một tứ diện gần đều $ABCD$ đã cho luôn biểu thị diện tích các mặt của một tứ diện $(\mathcal{T})$ nào đó. (Điều đó có nghĩa cụ thể như sau: Bình phương khoảng cách từ P đến một đỉnh nào đó của tứ diện gần đều $ABCD$ đã cho không lớn hơn tổng bình phương các khoảng cách từ P đến ba đỉnh còn lại).

Tứ diện $(\mathcal{T})$ này suy biến thành một tứ điểm phẳng (tức là có thể tích $v(\mathcal{T}) = 0$) khi và chỉ khi điểm P trùng với điểm xuyên tâm đối của một đỉnh nào đó của tứ diện gần đều đã cho $ABCD$ trên mặt cầu $\mathcal{C}(ABCD)$ ngoại tiếp tứ diện đó.

Hướng dẫn chứng minh định lý Pompiu trong hình học không gian.

Sử dụng vectơ và tính chất của tâm tỉ cự của một hệ điểm, chứng minh các bất đẳng thức hình học sau:

$$\begin{cases} PA^2 \leqslant PB^2 + PC^2 + PD^2, \text{ và ba B.Đ.T tương tự} & (1) \\ PB^2 \leqslant PC^2 + PD^2 + PA^2, & (2) \\ PC^2 \leqslant PD^2 + PA^2 + PB^2, & (3) \\ PD^2 \leqslant PA^2 + PB^2 + PC^2. & (4) \end{cases}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $P \in \{A', B', C', D'\}$, trong đó $A' = Œ_0(A), B' = Œ_0(B), C' = Œ_0(C)$ và $D' = Œ_0(D)$, O là tâm cầu $\mathcal{C}(ABCD)$, tùy theo P tương ứng thuộc vào bất đẳng thức (1), (2), (3) hay (4).

Chú thích bổ sung. Trong mục 1.2 trên đây, tác giả bài viết này đã giới thiệu thêm 4 *bài toán mới* cũng về giải những hệ phương trình bậc hai có 3 hoặc 4 ẩn, trong đó có chỉ rõ xuất xứ hình học đối với ba bài toán 5, 7, và 8. Chính việc giải các bài toán này, các bạn đã cho *lời giải đại số* của các bài toán hình học 5', 7' và 8', là xuất xứ hình học của các bài toán đại số 5, 7 và 8. Ngoài ra, tác giả các đề toán này cũng đề nghị bạn đọc tìm tòi thêm lời giải thuần túy hình học của các bài toán hình học xuất xứ 5', 7' và 8', góp phần làm phong phú và đa dạng cho lời giải các bài toán đó. Đối với bài toán 6, tác giả của nó cũng xuất phát từ một bài toán hình học mà đề xuất, nhưng lại không giới thiệu trong bài viết. Tác giả có dụng ý để lại, dành cho bạn đọc *phán đoán, suy xét về nguồn gốc xuất xứ* nào từ hình học của bài toán đại số (bài 6) này. Tuy nhiên, xin lưu ý bạn đọc là *việc phán đoán về xuất xứ hình học* của bài toán 6 thực ra *không có gì khó khăn lắm.* Các bạn chỉ cần quan tâm đến *ý nghĩa hình học* của các đẳng thức (ii) và (iii) cũng như ý nghĩa hình học của hai bộ số dương (a, b, c) và (x, y, z). Từ đó bạn dễ dàng chỉ ra đối tượng hình học không gian nào ẩn ở đằng sau 6 con số, trong đó a, b, c là đã cho còn x, y, z là các ẩn số dương cần tìm.

Sau cùng, xin giới thiệu *hai bài toán về hệ phương trình đại số bậc hai phức tạp hơn và chứa nhiều ẩn (5 hoặc 6 ẩn).*

Bài toán 9*. *Giải và biện luận hệ phương trình bậc hai (sáu ẩn $x_i, y_i, i = 1, 2, 3$ là những số dương)*:

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} x_1 + y_2 = x_2 + y_3 = x_3 + y_1 = d, & (*) \\ x_1^2 + y_1^2 + kx_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + kx_2y_2 = x_3^2 + y_3^2 + kx_3y_3 = c^2; & (**) \end{cases}$$

trong đó c và d là những số dương và $k \in \mathbb{R}$; c, d, k cho trước.
a) **Lời giải thứ nhất:** Lời giải gồm hai bước sau đây:

Bước 1: Nếu hệ phương trình $\mathcal{H}\{(*),(**)\}$ có nghiệm thì $x_1 = x_2 = x_3\ (= x)$ và $y_1 = y_2 = y_3\ (= y)$.

Từ (*) thay $y_1 = d - x_3, y_2 = d - x_1$ và $y_3 = d - x_2$ vào (**), sau khi thực hiện các phép tính rồi rút gọn ta được hệ ba phương trình sau đối với ba ẩn x_1, x_2 và x_3:

$$(kx_1 - 2x_3)d - (x_2^2 + kx_3x_1) + X = 0 \tag{i}$$

và hai phương trình tương tự bằng cách hoán vị vòng quanh các chỉ số: $1 \to 2 \to 3 \to 1$, trong đó ta đã đặt $X = d^2 - c^2 + \sum_{i=1}^{3} x_i^2$.

Từ đó ta biểu thị được d bằng ba biểu thức khác nhau như sau đây, trong đó biểu thức sau được suy từ biểu thức đứng trước nó nhờ hoán vị nói trên

$$d = \frac{x_1^2 + kx_2x_3 - X}{kx_3 - 2x_2} = \frac{x_2^2 + kx_3x_1 - X}{kx_1 - 2x_3} = \frac{x_3^2 - kx_1x_2 - X}{kx_2 - 2x_1} \tag{ii}$$

(với quy ước nếu mẫu số triệt tiêu thì tử số cũng triệt tiêu).

Sau đó áp dụng tính chất của dãy các tỷ số bằng nhau để khử đại lượng X, ta thu được ba đẳng thức sau:

$$d = t_1 = t_2 = t_3,$$

trong đó

$$t_1 = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 + x_2 - kx_1)}{2(x_3 - x_1) + k(x_2 - x_1)} \tag{iii}$$

và t_2 nhận được từ t_1 cũng như t_3 nhận được từ t_2 bởi hoán vị vòng quanh các chỉ số $1 \to 2 \to 3 \to 1$. (Lẽ đương nhiên cũng dễ nhận ra rằng đến lượt t_1 thì nhận lại từ t_3 cũng bởi hoán vị vòng quanh các chỉ số như đã nói ở trên). Đến đây từ các cặp đẳng thức $t_i = t_j$ $(i \neq j \in \{1, 2, 3\})$ ta đều thu được sự triệt tiêu của một biểu thức có dạng một tam thức bậc hai đối với k sau đây:

$$f(k) = \alpha k^2 + \beta k + \gamma = 0 \tag{iv}$$

Chẳng hạn, từ $t_3 = t_1$ thì α, β và γ lần lượt đều có dạng là những đa thức bậc 3 thuần nhất và đối xứng đối với các đối số x_1, x_2, x_3 theo nghĩa hoán vị vòng quanh các chỉ số $1, 2, 3$ như đã nói ở trên. Cụ thể là:

$$\begin{cases} \alpha = -x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_3, & \text{(v)} \\ \beta = -2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3) + \gamma, & \text{(vi)} \\ \gamma = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_2x_1^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2) + 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_3x_1^2 - x_1x_2^2 - x_2x_3^2) & \text{(vii)} \end{cases}$$

Sau vài phép biến đổi đơn giản nữa, các hệ số α, β và γ trong phương trình (iv) còn được biểu thị dưới dạng một số biểu thức khác nữa, thuận tiện hơn cho việc xét dấu của chúng. Thật vậy, ta có các biểu thức sau:

$$\begin{cases} -\alpha = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)x_2 + (x_3 - x_2)^2 x_1, & \text{(v')} \\ \beta = -(x_1 + x_2 + x_3)\left[(x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2\right] + \gamma, & \text{(vi')} \\ \gamma = (x_2 - x_1)\left[2(x_2^2 - x_1^2) + (x_3^2 - x_1^2)\right] + (x_3 - x_2)(2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2). & \text{(vii')} \end{cases}$$

Ngoài ra, cùng với biểu thức (v') của α và biểu thức (vii') của γ ta còn nhận được thêm hai biểu thức nữa của α cũng như hai biểu thức nữa của γ nhờ hoán vị vòng quanh $1 \to 2 \to 3 \to 1$ như đã nói ở trên. Từ đó suy ra, ngoài (vi') thì β cũng còn có hai biểu thức khác nữa. Đối với việc xét dấu của α, β và γ, không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả định quy ước rằng: $0 < x_1 \le x_2 \le x_3$ (hoặc $0 < x_2 \le x_3 \le x_1$, hoặc $0 < x_3 \le x_1 \le x_2$). Chẳng hạn, với giả định $0 < x_1 \le x_2 \le x_3$ ta thấy ngay rằng $\alpha \le 0$ và $\gamma \ge 0$ còn $\beta^2 \ge 0$. Từ đó suy ra biệt số của (iv) không âm: $\triangle = \beta^2 - 4\alpha\gamma \ge 0$. Ngoài ra, với các biểu thức (v') và (vii') của α và γ, ta nhận ra ngay rằng:

$$\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 = x_3; \;\; \gamma = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 = x_3.$$

Và do đó: $\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma = 0$, kéo theo $\beta = 0$. Mặt khác, dễ thấy: Từ $\triangle = \beta^2 + (-4\alpha\gamma)$ suy ra:

$$\triangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \text{ và } \beta = 0, \\ \gamma = 0 \text{ và } \beta = 0. \end{array}\right.$$

Bởi vậy, ta đi đến kết luận:

$$\triangle = 0 \;\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \;(= x) \text{ và do đó, kéo theo } y_1 = y_2 = y_3 \;(= y).$$

Nhưng $\triangle = 0$ lại là *điều kiện cần và đủ* để k là *nghiệm duy nhất* của hệ phương trình $\mathcal{H}\{(*), (**)\}$ được xét (nếu hệ này có nghiệm).

Tóm lại là; lập luận trên đây chứng tỏ rằng: Nếu hệ $\mathcal{H}$ sáu phương trình $\{(*), (**)\}$ có nghiệm thì các ẩn x_1, x_2, x_3 bằng nhau (và đặt bằng x), đồng thời các ẩn y_1, y_2, y_3 cũng bằng nhau (và đặt bằng y). Đó là đpcm. Và do đó, bài toán quy về việc giải một hệ hai phương trình bậc hai đối với hai ẩn x và y sau đây:

Bước 2: Giải và biện luận hệ hai phương trình (ẩn x và y đều dương)

$$\begin{cases} x + y = d, & (1) \\ x^2 + y^2 + kxy = c^2. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta được

$$(2 - k)xy = d^2 - c^2 \tag{3}$$

Từ đó dễ dàng suy ra:

- Nếu $k = 2$ và $c \neq d$ thì hệ phương trình $\{(1), (2)\}$ vô nghiệm.

- Nếu $k = 2$ và $c = d$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm, miễn sao thỏa mãn (1). Cụ thể là

$$\begin{cases} x = \frac{d}{2} + \lambda, \\ y = \frac{d}{2} - \lambda; \end{cases} \qquad (0 < \lambda < \frac{d}{2})$$

- Nếu $k \neq 2$ thì

$$xy = \frac{d^2 - c^2}{2 - k} \tag{4}$$

và do đó, x và y là hai nghiệm X_i $(i = 1, 2)$ của phương trình bậc hai sau:

$$X^2 - dX + \frac{d^2 - c^2}{2 - k} = 0 \tag{5}$$

Muốn cho phương trình bậc hai (5) có hai nghiệm dương (phân biệt hoặc trùng nhau), điều kiện cần và đủ là:

$$\Delta = d^2 - 4\frac{d^2 - c^2}{2 - k} \geq 0 \text{ và } (2 - k)(d^2 - c^2) > 0. \tag{6}$$

Cuối cùng, từ các bất đẳng thức (6) dễ dàng suy ra:

Phương trình bậc hai (5) có hai nghiệm dương khi và chỉ khi:

1°) Hoặc

$$k \leq 2 - 4\Big(\frac{d^2 - c^2}{d^2}\Big) < 2, \quad c < d; \tag{7}$$

2°) Hoặc

$$k \geq 2 + 4\Big(\frac{c^2 - d^2}{d^2}\Big) > 2, \quad c > d. \tag{8}$$

Còn các nghiệm dương x, y của hệ $\{(1), (2)\}$ là hai nghiệm của (5), xác định bởi:

$$\{x, y\} = \{X_1, X_2\}; \;\; X_i = \frac{1}{2}\Big(d \pm \sqrt{\frac{4c^2 - (2 + k)d^2}{2 - k}}\Big); \; (i = 1, 2) \tag{9}$$

b) Nhận xét. Sau khi thực hiện hai bước giải như đã trình bày ở trên, việc giải và biện luận hệ phương trình bậc hai với 6 ẩn dương $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ đến đây đã hoàn tất. Đây là một hệ phương trình đại số đặc biệt, gồm ba phương trình bậc nhất (*) và ba phương trình bậc hai (**) đồng thời đòi hỏi tất cả các ẩn x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ đều là những số thực dương. Bây giờ chúng ta hãy quan tâm đến quá trình biện luận về việc giải hệ phương trình $\{(1), (2)\}$. Trước hết hãy để ý đến giá trị đặc biệt $k = 2$ làm cho hệ phương trình hoặc vô nghiệm, hoặc có vô số nghiệm. Nếu $k = 2$ và $c = d$ thì (2) được viết lại là (đối chiếu với (1)):

$$x^2 + y^2 + 2xy = c^2 = d^2 \text{ hay là } x^2 + y^2 - 2xy\cos\pi = c^2 \; (= d^2) \tag{10}$$

Khi đó, hệ thức (10) biểu thị định lý hàm số cosin đối với một tam giác "*suy biến*" có hai cạnh với độ dài x, y còn cạnh lớn nhất c bằng tổng hai cạnh có độ dài x và y (với $c = d$ thì từ (10) suy ra: $x + y = c \; (= d)$. Sau nữa, trong hai bất đẳng thức (7) và (8) biểu thị điều kiện có hai nghiệm dương (cố nhiên là duy nhất) của phương trình bậc hai (5), ta hãy để ý đặc biệt đến bất đẳng thức (7). Đó là bất đẳng thức điều kiện quy định mối liên hệ giữa hai số thực dương c, d và số thực k để (5) có nghiệm dương, cũng tức là để bài toán có lời giải. Đối với bất đẳng thức kép (7) ta đặc biệt chú ý đến bất đẳng thức $k < 2$ (với $c < d$). Khi đó ta có thể đặt $k = -2\cos\gamma$ (với $0 < \gamma < \pi$), γ được hoàn toàn xác định: $\gamma = \arccos\frac{-k}{2}$ và do đó, (2) được viết lại dưới dạng:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma = c^2; \;\; (c < d) \tag{2'}$$

Lúc này, hệ thức (2') biểu thị định lý hàm số cosin đối với một tam giác có một cạnh với độ dài c, đối diện với góc có độ lớn γ và hai cạnh của góc γ đó có độ dài x và y. Ngoài ra, theo (1) thì tổng độ dài $x+y$ của hai cạnh đó bằng d và trong các đại lượng x, y, c, d và γ thì các độ dài c, d và độ lớn góc γ là đã cho.

Nhận xét nói trên cũng đáp ứng hoàn toàn cho cả ba đẳng thức (**), trong đó x_i và y_i $(i = 1, 2, 3)$ còn thỏa mãn cả ba đẳng thức (*). Nói một cách khác, các đẳng thức đại số đề cập đến trong hệ phương trình $\mathcal{H} = \{(*), (**)\}$ của bài toán 9 được xét ở trên cũng phản ánh sự kiện mang nội dung hình học liên quan đến ba tam giác nào đó có một góc (ba góc tương ứng) bằng nhau và bằng γ, cạnh đối diện (ba cạnh đối diện tương ứng) bằng nhau và bằng c và các cạnh còn lại thì thỏa mãn ba đẳng thức (*). Với ý nghĩa đó, ta có thể phát biểu kết quả phần chứng minh được chỉ ra trong bước 1 của lời giải bài toán 9-một bài toán đại số về giải hệ phương trình bậc hai-sang ngôn ngữ hình học như sau.

Bài toán 9a. *Giả sử ba tam giác $A_iB_iC_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ thỏa mãn các điều kiện:*

$\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \widehat{C_3}$; $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$ *và* $B_1C_1 + C_2A_2 = B_2C_2 + C_3A_3 = B_3C_3 + C_1A_1$

Chứng minh rằng ba tam giác đó bằng nhau.

Tiếp theo, cũng với ý nghĩa như trên, chúng ta cũng có thể phiên dịch sang ngôn ngữ hình học toàn bộ nội dung của bài toán đại số 9 về giải hệ phương trình. Nói một cách khác, sau đây chúng ta sẽ *thiết lập một mô hình hình học của bài toán 9*, cũng tức là *hình học hóa* bài toán đó.

c) Hình học hóa nội dung bài toán 9, cũng có nghĩa là: Phát biểu sang ngôn ngữ hình học nội dung bài toán (về giải và biện luận một hệ phương trình đại số bậc hai).

Bài toán 9b. *Cho một cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ chứa góc γ; $AB = c$. Tìm trên cung đó (không kể hai đầu mút A và B) tất cả những bộ ba điểm C_1, C_2, C_3 sao cho*

$$BC_1 + AC_2 = BC_2 + AC_3 = BC_3 + AC_1 = d, \qquad (*)$$

trong đó d là độ dài của một đoạn thẳng cho trước. Biện luận.

d) Lời giải thứ hai (Lời giải hình học) của bài toán 9-Lời giải bài toán 9b. Lời giải gồm các bước theo trình tự sau:

Bước 1. Trước hết ta chứng tỏ rằng: *Nếu hai trong ba điểm C_1, C_2, C_3 trùng nhau thì dãy đẳng thức (*) được thỏa mãn khi và chỉ khi cả hai điểm đó trùng nhau.*

Thật vậy, đặt $BC_i = a_i, AC_i = b_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$. Khi đó dãy đẳng thức (*) được viết lại là:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_3 = a_3 + b_1 \qquad (1)$$

Nếu chẳng hạn $C_1 \equiv C_2$ thì $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$. Do đó từ (1) ta được: $b_2 = b_3$ và $a_3 = a_1$. Suy ra: $a_1 = a_2 = a_3$, đồng thời $b_1 = b_2 = b_3$; nghĩa là $C_3 \equiv C_1 \equiv C_2\ (\equiv C)$.

Bước 2. Ta chứng minh rằng: Điều đó cũng có nghĩa là (theo khẳng định được chỉ ra ở bước 1):

Nếu bài toán có lời giải thì, trước hết ba điểm C_1, C_2, C_3 phải trùng nhau. Để chứng minh khẳng định này, ta cần đến bổ đề (bài toán phụ trợ) sau.

Bổ đề. *Nếu một tứ giác lồi $ABCD$ có hai cạnh đối diện AD và BC bằng nhau nhưng không song song thì $AB \neq CD$; cụ thể là AB lớn hơn hay nhỏ hơn CD tùy theo hai tia AD và BC cắt nhau hay hai tia DA và CB cắt nhau (ở điểm O).*

(Có thể chứng minh điều này bằng cách dựng hình bình hành $BCDE$ (Hình 1) nếu $OC \leq OD$, (hoặc hình bình hành $ADCE$ nếu $OD \leq OC$) sau đó sử dụng định lý về so sánh cạnh và góc vào tam giác ABE thì được $AB > BE = CD$, đ.p.c.m).

Bây giờ ta trở lại chứng minh điều khẳng định trên đây bằng phương pháp *phản chứng*. Thật vậy, giả sử trên cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ đã cho ta tìm được ba điểm C_1, C_2, C_3 đôi một phân biệt thỏa mãn (*), cũng tức là thỏa mãn dãy đẳng thức (1). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả định rằng: $a_1 < a_2 < a_3$ và do đó theo (1) thì đưa đến:

$$b_1 < b_3 < b_2; \tag{2}$$

Sau đó, ta dựng một góc $\widehat{xCy} = \gamma$ rồi lấy các điểm A_0, A_1, A_2, A_3 trên Cx và B_0, B_1, B_2, B_3 trên Cy sao cho $CA_0 = CB_0 = \frac{d}{2}$; $CA_i = b_i$ và $CB_i = a_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$. Thế thì ta được: $\triangle A_iB_iC = \triangle ABC_i$ (c.g.c); do đó:

$$A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = AB = c. \tag{3}$$

Và từ các bất đẳng thức (2) suy ra $\triangle A_1B_1C$ nằm gọn trong cả hai tam giác A_2B_2C và A_3B_3C. Ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$A_1B_1 < A_2B_2 \text{ hoặc } A_1B_1 < A_3B_3.$$

Thật vậy, từ (1) ta được $b_2 - b_3 = a_2 - a_1$ và $b_3 - b_1 = a_3 - a_2$. Do đó ta có

$$A_3A_2 = B_1B_2; \text{ (Hình 2)} \tag{4}$$

và

$$A_1A_3 = B_2B_3. \tag{5}$$

Trên hình 2 ta được hai tứ giác lồi $A_2B_2B_1A_3$ và $A_3B_3B_2A_1$ tương ứng thỏa mãn (4) và (5), trong đó hai cặp tia (A_2A_3, B_2B_1) và $A_3A_1, B_3B_2)$ đều cắt nhau ở C. Bởi vậy, theo bổ đề ở trên ta được

$$A_2B_2 > A_3B_1, \tag{6}$$

và

$$A_3B_3 > A_1B_2. \tag{7}$$

Xét hai trường hợp có thể xảy ra:

1°) Nếu $a_1 \leq b_1$ (Hình 2) thì $\widehat{CA_1B_1} \leq \widehat{CB_1A_1}$ suy ra $\widehat{A_1A_3B_1} < \widehat{CA_1B_1} < 90° < \widehat{B_1A_1A_3}$ và do đó, trong $\triangle A_1B_1A_3$ ta có $A_3B_1 > A_1B_1$ nên đối chiếu với (6) ta được:

$$A_1B_1 < A_2B_2 \tag{8}$$

2°) Nếu $a_1 \geq b_1$ thì cũng lập luận tương tự (bạn đọc tự vẽ hình tương ứng) ta được $\widehat{A_1B_2B_1} < 90° < \widehat{A_1B_1B_2}$ và do đó, trong $\triangle A_1B_1B_2$ ta có $A_1B_2 > A_1B_1$ nên đối chiếu với bất đẳng thức (7) ta được:

$$A_1B_1 < A_3B_3. \tag{9}$$

Các bất đẳng thức (8) hoặc (9) thu được từ giả định có các bất đẳng thức nghiêm ngặt (2), mâu thuẫn với giả thiết của bài toán là có dãy đẳng thức (3). Mâu thuẫn đó chứng tỏ hoặc $a_1 = a_2 = a_3$ và do đó, $b_1 = b_2 = b_3$, [nghĩa là các điểm C_i ($i = 1, 2, 3$) trùng nhau ở một điểm C_0 nào đó trên cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$], hoặc ít nhất hai trong ba số a_i bằng nhau (hay hai trong ba số b_i bằng nhau, $i \in \{1, 2, 3\}$).

Bây giờ ta chứng minh rằng: Nếu hai trong ba số a_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) bằng nhau thì cả ba số a_i đó bằng nhau, do đó cả ba số b_i cũng bằng nhau. Thật vậy, chẳng hạn giả sử $a_2 = a_3$, thế thì từ (1) suy ra $b_3 = b_1$ và bây giờ thì dãy đẳng thức (1) thu về chỉ còn một, đó là:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1. \tag{10}$$

Bài toán quy về chỉ còn hai tam giác, trong đó điều kiện (*) được thay bởi (10). Sau đó cũng chứng minh tương tự như ở phần trên, sử dụng bổ đề đã nêu thì chứng minh được rằng: $a_1 = a_2 = a_3$ và do đó $b_1 = b_2 = b_3$, ta được đ.p.c.m.

Bước 3. Rốt cuộc bài toán quy về bài toán dựng hình đơn giản sau đây:

Bài toán 9c. *Tìm trên cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ một điểm C sao cho: $BC + CA = d$, trong đó $AB = c$, c và d là những độ dài cho trước. Biện luận:*

Kéo dài tia BC về phía C rồi dựng điểm D sao cho $CD = CA$ và do đó, $BD = BC + CD = BC + CA = d$. (Có đẳng thức này là do ta giả sử rằng C trên cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ là điểm đã tìm được, thỏa mãn điều kiện đặt ra). Thế thì $\triangle CAD$ cân ở C có góc ở đáy $\widehat{CDA}$ $(= \widehat{BDA} = \frac{\gamma}{2})$. Từ đó suy ra D là một trong hai giao điểm D_1, D_2 của đường tròn (B, d) tâm B bán kính d và cung tròn $\overset{\frown}{A\delta B}$ chứa góc $\delta = \frac{\gamma}{2}$ [có tâm là trung điểm C_0 của cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ đã cho] dựng trên đoạn AB và nằm cùng phía với $\overset{\frown}{A\gamma B}$.

- Từ đó suy ra cách dựng điểm C: Điểm C là giao điểm của tia BD và cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$, trong đó $D \in \{D_1, D_2\} = (B, d) \cap \overset{\frown}{A\delta B}$. Dễ thấy rằng $BC + CA = d$. (Hình 3)

- *Biện luận:* Bài toán có lời giải (*nghiệm hình*) khi và chỉ khi:

$$AB = c < d \leq BD_0 = 2BC_0 = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} = c.\text{cosec}\,\frac{\gamma}{2} \tag{11}$$

Kết luận: Bài toán có 2 hoặc 1 nghiệm hình khi và chỉ khi $c < d \leq \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} = c.\text{cosec}\,\frac{\gamma}{2}$ (khi $c = d\sin\frac{\gamma}{2}$ thì bài toán có nghiệm duy nhất); vô nghiệm nếu $d \leq c$ hoặc $c < d\sin\frac{\gamma}{2}$.

Đến đây bài toán 9c) và do đó, *bài toán dựng hình 9b) đã được giải xong* (vì về mặt hình học, chúng ta đã hoàn toàn xác định được điểm C trên cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ đã cho bởi các phép dựng hình học theo trình tự đã được chỉ ra ở trên). Tuy nhiên, *lời giải hình học của bài toán đại số 9 đến đây chưa hoàn tất.*

Để hoàn tất lời giải hình học của bài toán 9 ta cần lưu ý rằng bài toán 9c) chính là nội dung hình học của bài toán đại số, phát biểu trong bước 2 của lời giải bài toán 9. Muốn vậy, sau khi đã xác định được điểm C trên $\overset{\frown}{A\gamma B}$ bằng những phép dựng hình học rồi, ta cần tính độ dài các đoạn $BC = x$ và $AC = y$ theo $AB = c, d$ và $\widehat{ACB} = \gamma$. (Việc làm này có ý nghĩa tương đương với việc xác định vị trí hình học của điểm C bằng phương pháp dựng hình). Ta chỉ việc giải và biện luận hệ phương trình (ẩn $x, y > 0$):

$$\begin{cases} x + y = d \\ x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = d \\ xy = \frac{d^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} > 0 \text{ (vì } c < d) \end{cases}$$

Vậy x và y là hai nghiệm dương X_1, X_2 của phương trình bậc hai:

$$X^2 - dX + \frac{d^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} = 0 \tag{12}$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình (12) có nghiệm (nghiệm dương) là: Biệt số

$$\begin{aligned} \triangle = \frac{c^2 - d^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} \geq 0 &\Leftrightarrow c \geq d\sin\frac{\gamma}{2} \text{ và } c < d \\ &\Leftrightarrow d > c \geq d\sin\frac{\gamma}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

Để ý rằng $\triangle$ có thể được viết lại như sau:

$$\triangle = \frac{2c^2 - (1 - \cos\gamma)d^2}{1 + \cos\gamma} = \frac{4c^2 - (2 + k)d^2}{2 - k} \tag{14}$$

Từ đó ta được kết quả (sau khi đã thay $-2\cos\gamma = k$, với $|k| < 2$)

$$\{x, y\} = \{X_1, X_2\} = \frac{1}{2}\left(d \pm \sqrt{\frac{4c^2 - (2 + k)d^2}{2 - k}}\right) \tag{15}$$

Kết quả (15) này tìm được phù hợp với kết quả (9) tìm ra ở bước 2, tiểu mục a).
e) **Nhận xét và lời bình** (về hai lời giải của bài toán 9).

Hai bài toán hình học 9a) và 9c) chính là nội dung hình học tương ứng với hai bài toán đại số mà lời giải được đề cập đến trong hai bước giải (bước 1 và bước 2) liên tiếp của bài toán 9 về giải và biện luận một hệ phương trình đại số bậc hai. Chúng là hai phần cấu thành bài toán hình học 9b – bản phiên dịch sang ngôn ngữ hình học của bài toán 9 (một bài toán hoàn toàn đại số về hệ phương trình) mà chúng ta có thể cho nó một tên gọi là "*Mô hình hình học*" của bài toán 9, một bài toán về giải và biện luận một hệ phương trình bậc hai. Nó cho ta một hình ảnh trực quan trong hình học vật lý của một hệ phương trình đại số bậc hai. Tuy nhiên, mỗi lời giải của bài toán 9 mặc dù khác nhau về phương pháp tiếp cận nhưng đều thể hiện sắc thái đặc thù, riêng biệt và rất ấn tượng của từng lời giải. Nếu như lời giải 1 (*lời giải đại số*) có *đòi hỏi kỹ năng biến đổi và tính toán tinh tế* và cần phải thực hiện nhiều phép toán nhưng lại cho được *chứng minh trực tiếp* điều khẳng định quan trọng phát biểu trong bước 1 của lời giải bài toán 9 [và điều đó cũng có nghĩa là chỉ ra được cách *chứng minh trực tiếp tính chất hình học* phát biểu trong nội dung của bài toán hình học 9a)] thì lời giải 2 (*lời giải hình học*) của bài toán 9 lại *không đòi hỏi tính toán* nhưng đòi hỏi thông minh sáng tạo, dựng thêm đường phụ, hình phụ và chỉ cần huy động vốn kiến thức ít ỏi thuộc chương trình hình học 8 cũng đủ dùng cho việc chứng minh tính chất hình học nói trên tuy lời giải này lại không thể cho được cách chứng minh trực tiếp mà sử dụng phương pháp *phản chứng*_một phương pháp *chứng minh gián tiếp*_để khẳng định tính chất hình học này.

Trên đây là phác họa đôi nét về *tổng thể* khi đối chiếu, so sánh hai lời giải của bài toán 9 về *phương pháp tiếp cận* cũng như *phương pháp giải quyết vấn đề* của từng lời giải đó mà bài viết này nêu ra nhằm mục đích trao đổi với bạn đọc những suy ngẫm, những ý tưởng đề xuất và kinh nghiệm xung quanh việc giải và khai thác một bài toán toán học hay (về đại số cũng như hình học) nào đó.

Nếu xem xét kỹ lưỡng, chi tiết hơn thì trước hết, phải nói rằng: Bài toán hình học 9b) chỉ là *mô hình hình học* của *một phần* bài toán đại số 9 mà thôi. Thật vậy, trở lại phần biện luận của lời giải thứ nhất của bài toán 9 (trình bày ở bước 2) chúng ta nhận ra ngay rằng lời giải thứ hai (lời giải hình học) của bài toán này chỉ đề cập đến những giá trị của tham số k thỏa mãn bất đẳng thức $|k| < 2$ sao cho có thể gán cho k *ý nghĩa hình học* $k = -2cos\gamma$, trong đó $0 < \gamma < \pi$ là độ lớn của một góc của một tam giác nào đó mà cạnh đối diện với góc đó có độ dài c và hai cạnh của góc γ đó có độ dài x và y mà tổng của hai cạnh đó $x + y = d$, đồng thời $d > c$. Những giá trị của k ở đây đòi hỏi $|k| < 2$ chỉ là một tập con những giá trị k thỏa mãn bất đẳng thức (7) chứ chưa nói tới những giá trị của k thỏa mãn bất đẳng thức (8) được chỉ ra đầy đủ trong phần biện luận thuộc bước 2 của tiểu mục a) trình bày lời giải thứ nhất của bài toán 9. Tác giả bài viết này còn để trống, chưa thấy được ý nghĩa hình học của những giá trị k khác, ngoài $|k| < 2$.

f) Xuất xứ của các bài toán 9, 9a), 9b) và một hướng đề xuất bài toán mới khác.

Trong kỳ thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 46 (46^{th} IMO, 7/2005) tổ chức ở Mexico có hai bài toán hình học phẳng, trong đó có bài toán (Bài 1) sau đây:

Trên các cạnh của một tam giác đều ABC sáu điểm đã được chọn lần lượt: A_1, A_2 trên BC; B_1, B_2 trên CA; C_1, C_2 trên AB. Các điểm này là các đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng quy.

Chính từ bài toán hình học này của kỳ thi IMO, 7/2005 vừa qua mà tác giả đã đề xuất bài toán hình học 9a), 9b) và bài toán đại số 9 ở trên. Để được thuận tiện cho việc phát biểu các bài toán này dưới dạng như đã trình bày trong bài viết, tác giả đã đặt lại tên như hình 4 đã ghi: Tam giác đều xuất phát được ký hiệu lại là $C_1C_2C_3$, còn lục giác lồi được xét ký hiệu là $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ với các cặp đỉnh B_2, A_3; B_3, A_1 và B_1, A_2 lần lượt trên C_2C_3, C_3C_1 và C_1C_2. Ba đường thẳng được xét sẽ là: A_1B_2, A_2B_3 và A_3B_1. Thế thì, theo giả thiết của bài toán và với ký hiệu như trên hình 4 chúng ta thiết lập được ngay dãy đẳng thức (*) nêu trong giả thiết của các bài toán 9, 9b) và 9a). Tuy nhiên, riêng về góc, góc 60° ở các đỉnh C_i (của $\triangle$ đều $C_1C_2C_3$ và cũng là của ba $\triangle A_iB_iC_i$) đã được thay bởi góc có độ lớn γ *tổng quát hơn*, miễn là $0 < \gamma < \pi$.

Bài toán 10.**[1] *Giải và biện luận hệ phương trình bậc hai 5 ẩn x, y, z, u, v sau đây*

$$(\mathcal{H}_o) \qquad \frac{xz - y^2}{a} = \frac{xu - yz}{b} = \frac{xv - yu}{c} = \frac{yu - z^2}{d} = \frac{zu - yv}{e} = \frac{zv - u^2}{f} \qquad (*)$$

trong đó a, b, c, d, e, f là các số thực khác không đã cho.

A. Lời giải "sơ cấp" của bài toán.

1°) *Nghiệm tầm thường của bài toán.*

a) Hệ phương trình $\mathcal{H}_o$ (*) có thể viết lại dưới dạng sau đây: Nếu đặt λ là giá trị chung (mà ta thường gọi là *ẩn phụ* của hệ) của dãy 5 tỉ số bằng nhau (*) thì ta có 6 đẳng thức sau:

$$(I) \qquad \begin{cases} \lambda a = xz - y^2 \\ \lambda b = xu - yz \\ \lambda c = xv - yu \\ \lambda d = yu - z^2 \\ \lambda e = zu - yv \\ \lambda f = zv - u^2 \end{cases}$$

b) Nhận thấy rằng với x, y, z, u, v tùy ý, bao giờ ta cũng có đồng nhất thức sau đây (dễ dàng kiểm nghiệm):

$$(xz - y^2)(zv - u^2) + (xu - yz)(zu - yv) + (xv - yu)(yu - z^2) \equiv 0, \ (\forall x, y, z, u, v); \ (*')$$

Đối chiếu (I) và (*') ta được hệ thức sau đây (nếu hệ (*) đã cho có nghiệm):

$$\lambda^2(af + be + cd) = 0$$

Từ đó suy ra:

1° Hoặc $\lambda = 0$, và do đó, hệ (*) có dạng đơn giản (I') sau:

$$\{xz - y^2 = xu - yz = xv - yu = yu - z^2 = zu - yv = zv - u^2 = 0\}; \qquad \text{(I')}$$

2° Hoặc $\lambda \neq 0$ thì hệ (*) cũng còn nghiệm khác nữa khi các hằng số đã cho ràng buộc với nhau bởi điều kiện sau:

$$af + be + cd = 0, \qquad (**)$$

Vậy ta cần xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu các số thực khác không a, b, c, d, e, f đã cho là tùy ý, không đòi hỏi phải thỏa mãn điều kiện (**) thì hệ phương trình (*) được xét chỉ có *nghiệm tầm*

[1] Bài toán 10** này đã được đưa vào cuốn sách của GS. Nguyễn Văn Mậu "Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ", NXB Giáo dục, 2002 (Bài toán 5, trang 48)

thường, ứng với giá trị $\lambda = 0$ trong (I). Nghiệm đó là nghiệm của hệ phương trình (I') như đã chỉ ra ở trên.
Từ hệ (I') này ta dễ dàng thiết lập được dãy đẳng thức sau:

$$(I') \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{u}{z} = \frac{v}{u} \ (= t \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra hệ (I') này có nghiệm sau đây:

$$x : y : z : u : v = 1 : t : t^2 : t^3 : t^4, \ (\text{với } t \text{ tùy ý}, \ t \in \mathbb{R}); \qquad (2)$$

Nếu để ý rằng $1 = t^o$ thì x, y, z, u, v theo thứ tự tỷ lệ với lũy thừa của t, từ $0, 1, 2, 3$ đến 4. Điều đó gợi ý rằng nếu ta thay đổi ký hiệu các ẩn số x, y, z, u, v lần lượt bởi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 thì biểu thức nghiệm của hệ (I) được viết gọn lại dưới dạng:

$$x_i = \rho t^i \ (\rho \neq 0 \text{ bất kỳ}, \ i \in \{0, 1, 2, 3, 4\})$$

hay đặc biệt, có thể cho $\rho = 1$ thì:

$$x_i = t^i, \ (i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}); \qquad (3)$$

Trường hợp 2. Hệ $\mathcal{H}_o$ được bổ sung thêm điều kiện (**) để trở thành hệ $(\mathcal{H}) = \{(*), (**)\}$. Từ đây không những chỉ thay đổi ký hiệu đối với các ẩn số như trên mà cũng thay đổi ký hiệu đối với các hằng số đã cho; cụ thể là a, b, c, d, e, f lần lượt được thay bởi $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Việc thay đổi này cũng còn có tác dụng giúp chúng ta theo dõi việc giải hệ phương trình phần nào được dễ dàng hơn. Với quy ước đó, ta viết lại hệ phương trình $(\mathcal{H}) = \{(*), (**)\} = (\mathcal{H}_o) \cup (**)$ sau khi được bổ sung thêm điều kiện (**):

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} \frac{x_0x_2 - x_1^2}{b_0} = \frac{x_0x_3 - x_1x_2}{b_1} = \frac{x_0x_4 - x_1x_3}{b_2} = \frac{x_1x_3 - x_2^2}{b_3} = \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{b_4} = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{b_5} \ (= \lambda \neq 0) & (*) \\ b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 = 0 & (**) \end{cases}$$

Còn đồng nhất thức (*') ở trên thì bây giờ được viết lại như sau:

$$(x_0x_2 - x_1^2)(x_2x_4 - x_3^2) + (x_0x_3 - x_1x_2)(x_2x_3 - x_1x_4) + (x_0x_4 - x_1x_3)(x_1x_3 - x_2^2); \quad (*')$$

2°) *Tìm nghiệm không tầm thường của bài toán.*

c) Ngoài đồng nhất thức (*') liên quan đến các ẩn số x_i ($i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) đã được phát hiện ở trên, bằng những quan sát đặc biệt các nhị thức thuần nhất của các ẩn có cùng bậc (đồng bậc) và có cùng tổng các chỉ số, ta còn phát hiện thêm 5 đồng nhất thức nữa sau đây (mà bạn đọc cũng dễ dàng kiểm nghiệm được):

$$\begin{cases} (x_2x_4 - x_3^2)x_2 + (x_2x_3 - x_1x_4)x_3 + (x_1x_3 - x_2^2)x_4 \equiv 0, & \text{(i)} \\ -2(x_2x_4 - x_3^2)x_1 - (x_2x_3 - x_1x_4)x_2 + (x_0x_4 - 2x_1x_3 + x_2^2)x_3 & \\ \quad -(x_0x_3 - x_1x_2)x_4 \equiv 0, & \text{(ii)} \\ (x_2x_4 - x_3^2)x_0 - (x_2x_3 - x_1x_4)x_1 - 2(x_0x_4 - x_1x_3)x_2 & \\ \quad +(x_0x_3 - x_1x_2)x_3 + (x_0x_2 - x_1^2)x_4 \equiv 0, & \text{(iii)} \\ (x_2x_3 - x_1x_4)x_0 + (x_0x_4 - 2x_1x_3 + x_2^2)x_1 + (x_0x_3 - x_1x_2)x_2 - 2(x_0x_2 - x_1^2)x_3 \equiv 0, & \text{(iv)} \\ (x_1x_3 - x_2^2)x_0 - (x_0x_3 - x_1x_2)x_1 + (x_0x_2 - x_1^2)x_2 \equiv 0. & \text{(v)} \end{cases}$$

Bây giờ ta thay các nhị thức ở trong ngoặc bởi nhị thức tương ứng có giá trị λb_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) rút từ dãy tỉ số bằng nhau (*) ở trên, sau đó khử ẩn phụ λ ta thu được một hệ mới $\mathcal{H}_1$ gồm 5 phương trình tuyến tính thuần nhất với 5 ẩn số x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 mà định thức Δ của hệ triệt tiêu (vì Δ được phân tích thành tích hai thừa số, trong đó một thừa số là $b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3$ ($= 0$); thừa số còn lại, ký hiệu $\Phi(b_i) \neq 0$.

$$(\mathcal{H}_1)\begin{cases} & & b_5x_2 & + & b_4x_3 & + & b_3x_4 & = & 0 & \quad (\text{i})_1 \\ & -2b_5x_1 & - & b_4x_2 & + & (b_2-b_3)x_3 & - & b_1x_4 & = & 0 & \quad (\text{ii})_1 \\ b_5x_0 & & -b_4x_1 & - & 2b_2x_2 & + & b_1x_3 & + & b_0x_4 & = & 0 & \quad (\text{iii})_1 \\ b_4x_0 & + & (b_2-b_3)x_1 & + & b_1x_2 & & -2b_0x_3 & & & = & 0 & \quad (\text{iv})_1 \\ b_3x_0 & & -b_1x_1 & + & b_0x_2 & & & & & = & 0 & \quad (\text{v})_1 \end{cases}$$

Vì định thức Δ của hệ $(\mathcal{H}_1)$ có dạng: $\Delta = (b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3).\Phi(b_i) = 0$ mà $\Phi(b_i) \neq 0$ nên $(\mathcal{H}_1)$ có *nghiệm không tầm thường duy nhất*, (xác định sai khác một thừa số $\neq 0$). Giải hệ $(\mathcal{H}_1)$ ta thu được nghiệm sau đây:

$$\begin{cases} \lambda_1x_0 = b_1^2 - b_0(b_2+b_3), \\ \lambda_1x_1 = b_0b_4 + b_1b_3, \\ \lambda_1x_2 = b_3^2 - b_0b_5, \\ \lambda_1x_3 = -(b_1b_5 + b_3b_4), \\ \lambda_1x_4 = b_4^2 - b_5(b_2+b_3). \end{cases} \tag{4}$$

[Để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $\mathcal{H}_1$ này (có định thức $\Delta = 0$) ta chỉ việc bỏ đi một trong 5 phương trình của hệ đó, chẳng hạn bỏ phương trình thứ ba $(\text{iii})_1$ sau đó chỉ việc giải hệ $\{\mathcal{H}_1 \backslash (\text{iii})_1\}$ gồm 4 phương trình còn lại với 5 ẩn x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 thì thu được nghiệm duy nhất có biểu thức (4)].

Tóm lại là, sau hai bước giải ta thu được kết quả:

Hệ phương trình bậc hai $(\mathcal{H})$ $\{(*), (**)\}$ với 5 ẩn x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 có nghiệm tầm thường (3) và nghiệm không tầm thường (4) như đã chỉ ra ở trên.

B. Cơ sở lý thuyết toán học dẫn đến hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $(\mathcal{H}_1)$ để tìm nghiệm không tầm thương của hệ $(\mathcal{H})$ nêu trong bài toán 3.

Chúng ta cần tìm hiểu ngọn ngành để *lý giải* con đường dẫn đến lời giải "*sơ cấp*" của bài toán 10** như đã nêu ra trong mục A ở trên.

1°) *Trước hết, để ý rằng các hiệu sau đây:*

$$x_0x_2 - x_1^2,\ x_0x_3 - x_1x_2,\ x_0x_4 - x_1x_3,\ x_1x_3 - x_2^2,\ x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2x_4 - x_3^2$$

là các nhị thức bậc hai thuần nhất của các ẩn x_i ($i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$), xuất hiện trong dãy (*) các tỷ số bằng nhau của hệ $(\mathcal{H}_o)$, được tạo thành từ các định thức con (minor) cấp 2 rút từ ma trận chữ nhật (2×4) sau:

$$\begin{Vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}$$

Có thể xem chúng là các *toạ độ Plücker* của một đường thẳng xạ ảnh trong không gian xạ ảnh 3 chiều P_3 xác định bởi hai điểm có các toạ độ: điểm $A(x_0, x_1, x_2, x_3)$ và điểm $B(x_1, x_2, x_3, x_4)$ trong toạ độ xạ ảnh thuần nhất.

2°) *Các ý tưởng cơ bản trong quá trình tìm tòi lời giải (nghiệm) của hệ phương trình* $(\mathcal{H})$ *ở trên.*

a) Như ở phần A đã chỉ ra: Hệ phương trình $\mathcal{H}_o$ (*) và do đó, hệ phương trình $(\mathcal{H})$ có nghiệm tầm thường mà biểu thức nghiệm có dạng (3)

$$x_i = \rho t^i, \quad i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \quad \rho \neq 0.$$

b) Hệ phương trình $\mathcal{H}_o$ (*) với các ẩn x_i được viết lại như sau:

$$(I') \begin{cases} \rho b_0 = x_0x_2 - x_1^2, \ \rho b_1 = x_0x_3 - x_1x_2, \ \rho b_2 = x_0x_4 - x_1x_3, \\ \rho b_3 = x_1x_3 - x_2^2, \ \rho b_4 = x_2x_3 - x_1x_4, \ \rho b_5 = x_2x_4 - x_3^2; \end{cases}$$

trong đó ρ là giá trị chung của 5 tỉ số bằng nhau của hệ phương trình (*) mà giá trị $\rho = 0$ cho ta *nghiệm tầm thường* (3) của hệ $(\mathcal{H})$ và chưa đòi hỏi đến điều kiện (**) của các hằng số cho trước b_i $(i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$.

Cũng như nhận xét b) phần A đã chỉ ra: Với x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 tuỳ ý bao giờ ta cũng có đồng nhất thức (*'):

$$\forall x_i \ (i = \overline{0, 1, 2, \ldots, 4}) : (x_0x_2 - x_1^2)(x_2x_4 - x_3^2) + (x_0x_3 - x_1x_2)(x_2x_3 - x_1x_4) + \\ + (x_0x_4 - x_1x_3)(x_1x_3 - x_2^2) \equiv 0; \quad (*')$$

Chính đồng nhất thức (*') này cùng với đẳng thức điều kiện (**) về các hằng số b_i $(i = \overline{0, 1, \ldots, 5})$ là cơ sở quyết định cho việc tìm nghiệm không tầm thường của hệ $(\mathcal{H})$.

c) Ta chứng minh điều khẳng định sau:
Nếu có hệ thức (**) nghĩa là các hằng số b_i $(i = \overline{0, 1, \ldots, 5})$ ràng buộc bởi điều kiện

$$b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 = 0$$

thì, ngoài nghiệm tầm thường (3) $[x_i = t^i \ (i \in \{0, 1, 2, 3, 4\})]$, hệ phương trình bậc hai thuần nhất $(\mathcal{H}) = \{(*), (**)\}$ còn có một nghiệm không tầm thường duy nhất mà (4) là biểu thức nghiệm đã chỉ ra ở phần A.

Thật vậy, hệ thức (**) được viết lại dưới dạng tương đương sau:

$$2\rho(b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3) = 0 \ \ (\text{với } \rho \neq 0),$$

hay là

$$b_0(\rho b_5) + b_5(\rho b_0) + b_1(\rho b_4) + b_4(\rho b_1) + b_2(\rho b_3) + b_3(\rho b_2) = 0. \qquad (*'')$$

Thay các giá trị của ρb_i $(i = \overline{0, 1, \ldots, 5})$ từ (I') vào (*'') ta được hệ thức sau đây (sau khi đã nhân hai vế của (*'') với 2):

$$2[b_0(x_2x_4 - x_3^2) + b_5(x_0x_2 - x_1^2) + b_1(x_2x_3 - x_1x_4) + b_4(x_0x_3 - x_1x_2) + \\ + b_2(x_1x_3 - x_2^2) + b_3(x_0x_4 - x_1x_3)] = 0. \quad (\text{I}'')$$

Với các b_i $(i = \overline{0,1,\ldots,5})$ là đã cho thì (I″) chính là phương trình trong tọa độ xạ ảnh thuần nhất của một siêu mặt bậc hai, suy biến thành một siêu nón trong không gian xạ ảnh 4 chiều P_4.

Bây giờ ta viết lại phương trình (I″) dưới dạng ma trận $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = 0$:

$$\sum_{i,j=0}^{4} q_{ij}x_ix_j = 0, \quad (q_{ij} = qji) \tag{5}$$

trong đó các hệ số q_{ij} có các giá trị cụ thể như sau:

$$\begin{cases} q_{00} = 0, & q_{01} = 0, & q_{02} = b_5, & q_{03} = b_4, & q_{04} = b_3; \\ q_{10} = 0, & q_{11} = -2b_5, & q_{12} = -b_4, & q_{13} = b_2 - b_3, & q_{14} = -b_1; \\ q_{20} = b_5, & q_{21} = -b_4, & q_{22} = -2b_2, & q_{23} = b_1^2, & q_{24} = b_0; \\ q_{30} = b_4, & q_{31} = b_2 - b_3, & q_{32} = b_1, & q_{33} = -2b_0, & q_{34} = 0; \\ q_{40} = b_3, & q_{41} = -b_1, & q_{42} = b_0, & q_{43} = 0, & q_{44} = 0. \end{cases} \tag{5'}$$

Vậy dưới dạng ma trận thì phương trình siêu quadric (5) có dạng:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_5 & b_4 & b_3 \\ 0 & -2b_5 & -b_4 & b_2 - b_3 & -b_1 \\ b_5 & -b_4 & -2b_2 & b_1 & b_0 \\ b_4 & b_2 - b_3 & b_1 & -2b_0 & 0 \\ b_3 & -b_1 & b_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

hay viết (6) một cách ngắn gọn hơn, dưới dạng toán tử:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \equiv 0, \ \forall \boldsymbol{x} \neq \overrightarrow{0} = (0,0,0,0,0) \tag{7}$$

trong đó: $\boldsymbol{x}^T = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ là véctơ hàng (chuyển vị của véctơ cột $\boldsymbol{x}(x_0, \ldots, x_4)$, và $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})$ là một ma trận vuông cấp 5, có các phần tử q_{ij} tạo thành từ các hằng số b_i đã cho (thỏa mãn (**)) theo bảng (5′) ở trên).

Sau khi thực hiện phép tính định thức $|\boldsymbol{Q}|$ của ma trận $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})$ trong đó $\boldsymbol{b} = (b_o, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ thì được: $|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})| = (b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3).\Phi(b_i) = 0$ (vì theo (**) thì $b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 = 0$), nghĩa là $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{b})$ là một ma trận suy biến và có hạng $r = 4$. Bởi vậy, (6) là phương trình của một siêu mặt bậc hai suy biến thành một *siêu nón bậc hai có 0-phẳng_đỉnh*, tức phẳng_đỉnh này là một điểm, được xác định bởi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau: Dưới dạng toán tử, hệ phương trình này được viết gọn lại là:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

Vì ma trận vuông cấp 5 $\boldsymbol{Q}$ có hạng r bằng 4 nên trong 5 phương trình tuyến tính thuần nhất của hệ (8) chỉ có 4 phương trình là độc lập tuyến tính. Bởi vậy, hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (8) xác định cho ta một *điểm duy nhất* trong không gian xạ ảnh bốn chiều P_4. Điểm này chính là *đỉnh của siêu nón bậc hai* có phương trình (6) hoặc (7) trong không gian xạ ảnh P_4 này.

Thật vậy, vì (*$'$) là một đồng nhất thức, kết hợp với đẳng thức điều kiện (**) thì (*$''$) và do đó, (6) hay (7) cũng là một đồng nhất thức. Và từ (7) suy ra (8) là một phương trình toán tử.

Nếu viết cụ thể ra thì (8) cho ta hệ 5 phương trình tuyến tính thuần nhất ($\mathcal{H}_1$) như đã viết rõ ở tiểu mục 2°)c) của phần A ở trên.

Sau cùng giải hệ phương trình tuyến tính (8) cũng tức là giải hệ ($\mathcal{H}_1$) ta được *nghiệm không tầm thường (4)* của hệ ($\mathcal{H}$) như đã chỉ ra trong phần A, tiểu mục 2°)c) ở trên. Điều khẳng định trên đây đã được chứng minh.

d) Với lời giải trên đây của bài toán đại số 10 trình bày ở tiểu mục c) ta thấy rằng việc giải bài toán này có liên quan đến một *lý thuyết hình học về mặt bậc hai trong không gian xạ ảnh*, trong đó có *mặt bậc hai suy biến thành nón bậc hai*. Về một ý nghĩa nào đó mà nói thì cũng có thể gọi lời giải này là *lời giải hình học của bài toán 10***. Điều đó còn nói lên rằng bài toán 10** chắc hẳn còn những lời giải khác nữa. Hy vọng bài toán này còn nhận được lời giải hay khác ở bạn đọc.

C. Nguồn gốc lịch sử hay xuất xứ của bài toán 10**.

Bài toán 10** xuất hiện cách đây đã được 42 năm. Năm 1965 trong một bài báo "Sur un espace riemannien à absolus locaux" đăng ở Tạp chí Acta Scient. Viet. (Sectio Math et Phys) Tome II, p. 5-42, nhân một vấn đề nghiên cứu đầu tiên về một không gian có tuyệt đối động, giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn đã đề xuất và giải bài toán đại số mà bài viết này đã đưa vào danh mục các bài toán cần khảo cứu về "*Một số hệ phương trình đại số đặc biệt*", bài toán đó đích thực là bài toán 10. Xuất phát từ một vấn đề nghiên cứu về hình học, tuy công cụ sử dụng lại là đại số, tác giả bài báo vốn giàu trí tưởng tượng không gian đã giải bài toán bằng phương pháp "*cắt*", "*chiếu*",... Và tác giả bài báo đã cho đáp số như chúng ta đã biết về hai công thức nghiệm (3) và (4) trên đây; tuy nhiên người mở đường "*khám phá*" đã cho lời giải khá dài (do tính toán nhiều và có phần phức tạp). Năm 1970, 5 năm sau đó tác giả bài viết này đã cho lời giải như đã trình bày ở mục B. Khoảng 20 năm sau nữa, giáo sư Nguyễn Văn Mậu đã quan tâm đến bài toán 10 này và đã giải nó bằng phương pháp "*hình học hoá*" (vì có sử dụng khái niệm và tính chất của tích vô hướng). Tác giả bài viết này hy vọng giáo sư Nguyễn Văn Mậu khôi phục lại lời giải đó để bổ sung một lời giải đẹp và hay nữa cho bài toán 10** này.

D. Bổ sung một bài toán tương tự: Bài toán đảo (ngược) của bài toán 10**.

Bài toán 10$'$. *Giải hệ 6 phương trình bậc hai thuần nhất (ẩn $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$) sau:*

$$(\mathcal{H}_2)\quad \begin{cases} y_0y_5 + y_1y_4 + y_2y_3 = 0, \\ \rho' a_0 = y_1^2 - y_0(y_2 + y_3), \\ \rho' a_1 = y_0y_4 + y_1y_3, \\ \rho' a_2 = y_3^2 - y_0y_5, \\ \rho' a_3 = -(y_1y_5 + y_3y_4), \\ \rho' a_4 = y_4^2 - y_5(y_2 + y_3); \end{cases}$$

trong đó a_i là những số thực khác không đã cho ($i = \overline{0, 1, \ldots, 4}$).

1°) Chứng minh rằng hệ phương trình ($\mathcal{H}_2$) này có một nghiệm duy nhất, trùng với nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ($\mathcal{H}_2'$) sau đây:

$$\mathcal{A}y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & -a_4 & a_3 & -a_3 & -a_2 & -2a_1 \\ a_4 & a_3 & -2a_2 & 0 & -a_1 & a_0 \\ -2a_3 & a_2 & a_1 & -a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & -a_1 & 0 & a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (\mathcal{H}_2')$$

2°) Giải hệ 6 phương trình tuyến tính thuần nhất ($\mathcal{H}_2'$) này ta thu được biểu thức nghiệm của hệ ($\mathcal{H}_2$) như sau: (Từ hệ ($\mathcal{H}_2'$) suy ra:

$$\begin{cases} \rho y_0 = a_0a_2 - a_1^2, \\ \rho y_1 = a_0a_3 - a_1a_2, \\ \rho y_2 = a_0a_4 - a_1a_3, \\ \rho y_3 = a_1a_3 - a_2^2, \\ \rho y_4 = a_2a_3 - a_1a_4, \\ \rho y_5 = a_2a_4 - a_3^2. \end{cases}$$

2 Một số bài toán cực trị đại số, giải tích và lượng giác có xuất xứ từ hình học

Trước hết, xin giới thiệu một bài toán *cực trị giải tích* có xuất xứ từ hình học.
Bài toán 11. *Xét hàm ba biến $f = f(x_1, x_2, x_3)$ cho bởi biểu thức:*

$$f = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} + \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2}; \quad (*)$$

trong đó các biến x_1, x_2, x_3 ràng buộc với nhau bởi điều kiện (các đẳng thức) sau:

$$\frac{x_1 - c_1}{u_1} = \frac{x_2 - c_2}{u_2} = \frac{x_3 - c_3}{u_3}, \quad v_i \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

còn a_i, b_i, c_i, u_i ($i = 1, 2, 3$) là những số thực cho trước sao cho các bộ ba số sắp thứ tự $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$ đôi một phân biệt (cũng có nghĩa là trong ba bộ đó không có hai bộ nào trùng nhau) và $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$.

Hãy tìm cực tiểu f_m của hàm f. Biện luận.

a) **Nhận xét.** Đây là một bài toán *cực trị giải tích* (có ràng buộc), cụ thể là tìm cực tiểu của hàm (*) ba biến thực x_1, x_2, x_3 ràng buộc với nhau bởi hai đẳng thức (1). [Tuy nhiên, cũng có thể phát biểu khác đi để được xem là một bài toán về *giải một hệ phương trình đại số* (bậc nhất, ba ẩn x_1, x_2, x_3) nhưng gắn với một điều kiện khác nữa, cụ thể là biểu thức (*) phải đạt giá trị nhỏ nhất f_m (thay cho việc bớt đi một phương trình].

Chính vì vậy, chúng ta có thể nghĩ ngay tới việc sử dụng phương pháp giải tích (cụ thể là định lý của giải tích toán về điều kiện cần của cực trị của hàm một biến số. Thật vậy, đặt giá trị chung của ba tỉ số trong các đẳng thức (1) bằng t, rồi thay $x_i = u_i t + c_i$ $(-\infty < t < +\infty;\ i = 1, 2, 3)$ vào (1), ta được f là hàm một biến t: $f = f(t)$, xác định trên toàn trục số.

Cụ thể là:

$$f(t) = \sqrt{(c_1 - a_1 + u_1 t)^2 + (c_2 - a_2 + u_2 t)^2 + (c_3 - a_3 + u_3 t)^2} + \\ + \sqrt{(c_1 - b_1 + u_1 t)^2 + (c_2 - b_2 + u_2 t)^2 + (c_3 - b_3 + u_3 t)^2}, \quad (2)$$

Tính đạo hàm $f'(t)$ rồi giải phương trình

$$f'(t) = 0, \quad (3)$$

ta sẽ tìm được những giá trị của tham số t để $f(t)$ đạt cực tiểu f_m (hay cực đại). Tuy nhiên, cũng còn phải khảo sát hàm một biến $f(t)$ (2) để xác định giá trị nào tìm được (rút ra từ $f'(t) = 0$) của t sẽ cho ta giá trị cực tiểu f_m cần tìm của $f(t)$. Trong thực tế, việc sử dụng phương pháp giải tích đối với trường hợp bài toán này đòi hỏi thực hiện nhiều phép tính cồng kềnh mới đi đến kết quả. Vì vậy, đối với bài toán này chúng ta cần tìm một phương án giải khác sao cho đỡ phải mất nhiều thời gian tính toán mà vẫn đi đến kết quả nhanh chóng hơn. Muốn thế, ta hãy quay trở lại để một lần nữa tìm hiểu đề toán (nội dung bài toán cực trị giải tích hay đại số này) kỹ lưỡng hơn. Quả thật, trước hết ta nhận ra ngay rằng (1) là phương trình chính tắc của một đường thẳng Δ trong không gian Ơclit ba chiều E_3, xác định bởi điểm C có toạ độ $C(c_1, c_2, c_3)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ (vì $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \neq 0$ theo giả thiết). Sau nữa, biểu thức của đại lượng f cho bởi vế phải của (*) biểu thị tổng khoảng cách $f = MA + MB$ từ một điểm $M(x_1, x_2, x_3)$ bất kỳ trên đường thẳng Δ đến hai điểm A và B phân biệt cho trước trong không gian mà trong hệ toạ độ Đề các vuông góc $Oxyz$ đã chọn thì (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) là các toạ độ của hai điểm đó. Trên cơ sở phân tích này, chúng ta đã "hình học hoá" được bài toán cực trị giải tích (1) và sau đây chúng ta hãy tìm cách giải bài toán đó bằng kiến thức của hình học trên cơ sở sử dụng kết hợp với những bất đẳng thức cơ bản của đại số.

b) Lời giải 1 (lời giải hình học) của bài toán 11. Bài toán cực trị giải tích 11 sau khi đã được "*hình học hoá*" có nội dung sau đây của một bài toán cực trị hình học quen thuộc trong không gian và được phát biểu như sau:

Bài toán 11' *Trong không gian cho một đường thẳng Δ và hai điểm A, B phân biệt, cố định. Tìm trên Δ một điểm M sao cho tổng khoảng cách $MA + MB$ từ đó đến hai điểm A và B đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo $AB = d$ và các khoảng cách d_1, d_2 từ A và B đến đường thẳng Δ.*

Gọi A' và B' tương ứng là hình chiếu (vuông góc) của A và B trên Δ. Nếu hai điểm A và B không nằm trên Δ thì $A' \neq A$, $B' \neq B$. Tuy nhiên dù cho $\{A, B\} \not\subset \Delta$ thì vẫn có thể xảy ra $A' = B'$ (khi và chỉ khi $(AB) \perp \Delta$). Khi đó điểm M cần tìm hiển nhiên trùng với điểm A' này.

Giả sử $A' \neq B'$, ta chọn hướng dương của $\triangle$ là hướng của véctơ $\overrightarrow{A'B'}$. Thế thì:

$$\overline{A'B'} = \overline{A'M} + \overline{MB'}, \quad (M \in \triangle).$$

Đặt $\overline{A'A} = d_1$, $\overline{B'B} = d_2$, $\overline{A'B'} = 2c$ $(\neq 0)$, $\overline{A'M} = u$, $\overline{MB'} = v$, ta luôn có $u + v = 2c$ (> 0, không đổi) với mọi điểm M trên $(\triangle)$.
Ta có:

$$MA + MB = \sqrt{u^2 + d_1^2} + \sqrt{v^2 + d_2^2}. \tag{4}$$

Nhưng ta lại có (bất đẳng thức Mincopski):

$$\sqrt{u^2 + d_1^2} + \sqrt{v^2 + d_2^2} \ \geq \ \sqrt{(u+v)^2 + (d_1 + d_2)^2}. \tag{5}$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi:

$$\frac{u}{d_1} = \frac{v}{d_2}, \text{ hay } \frac{u}{v} = \frac{d_1}{d_2}. \tag{5'}$$

Từ đó suy ra: $uv > 0$, nghĩa là $M \in [A'B']$. Vậy ta được:

$$MA + MB = \sqrt{u^2 + d_1^2} + \sqrt{v^2 + d_2^2} \ \geq \ \sqrt{4c^2 + (d_1 + d_2)^2} = \sqrt{d^2 + 4d_1 d_2}; \ (AB = d)$$

Trả lời. Tổng $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất $f_m = \sqrt{d^2 + 4d_1 d_2}$ ở điểm M thuộc đoạn thẳng $[A'B']$ (là đoạn hình chiếu của đoạn thẳng AB trên $\triangle$) và chia trong đoạn đó theo tỉ số số học $A'M : MB' = d_1 : d_2$, cũng tức là:

$$(A'B', M) = \frac{\overline{MA'}}{\overline{MB'}} = k = -\frac{d_1}{d_2}. \tag{6}$$

Trên đây là *lời giải đại số* (vì phương pháp giải đòi hỏi sử dụng bất đẳng thức đại số, cụ thể là bất đẳng thức Mincopski) của bài toán cực trị hình học 11' được phiên dịch sang ngôn ngữ hình học từ bài toán gốc (bài toán 11) về cực trị giải tích. Bây giờ ta lại phải phiên dịch trở lại kết quả của bài toán 11' sang bài toán gốc (bài toán 11).

- Để xác định các tọa độ của điểm M theo (6), ta cần xác định các tọa độ của A', B' và các khoảng cách d_1, d_2.

$AA' \perp \triangle = A'$, suy ra A' được xác định bởi $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CA'} = 0$, trong đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}(c_1 - a_1 + u_1 t, c_2 - a_2 + u_2 t, c_3 - a_3 + u_3 t); \\ \overrightarrow{CA'}(u_1 t, u_2 t, u_3 t); \end{cases}$$

(với $\overrightarrow{u}$ đã được chọn sao cho $\overrightarrow{u}^2 = 1$ tức $\overrightarrow{u}$ là véc tơ đơn vị chỉ phương của $\triangle$), nghĩa là véctơ $\overrightarrow{u}$ đã được chọn sao cho $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ mà

$$|\overrightarrow{u}| = 1; \ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |\overrightarrow{u}|^2$$

Từ đó ta được giá trị của tham số $t = t_1$ ứng với A'; tương tự $t = t_2$ ứng với B',

$$t_1 = \overrightarrow{u}\overrightarrow{CA} \ \ (t_1 = 0 \Leftrightarrow A' = C); \ \ t_2 = \overrightarrow{u}\overrightarrow{CB}.$$

Chuyển qua biểu thức tọa độ, ta được:

$$\begin{cases} t_1 = u_1(a_1 - c_1) + u_2(a_2 - c_2) + u_3(a_3 - c_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i(a_i - c_i) \\ t_2 = u_1(b_1 - c_1) + u_2(b_2 - c_2) + u_3(b_3 - c_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i(b_i - c_i) \end{cases} \tag{7}$$

Từ (6) ta được

$$(1-k)\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA'} - k\overrightarrow{CB'}$$

Thay $k = -\frac{d_1}{d_2}$ thì được

$$\overrightarrow{CM} = \frac{d_1 t_2 + d_2 t_1}{d_1 + d_2}\overrightarrow{u}. \tag{8}$$

Vậy tham số $t = t_3$ ứng với điểm M phải tìm được xác định bởi

$$t_3 = \frac{d_1 t_2 + d_2 t_1}{d_1 + d_2}. \tag{9}$$

Cũng từ đó ta suy ra điểm M phải tìm trên $\triangle$ được xác định bởi

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{u}t_3. \tag{10}$$

Từ đẳng thức véctơ (10) ta được các tọa độ của điểm M cần tìm

$$x_i = c_i + u_i t_3, \ \ (i = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Các khoảng cách $d_1 = AA'$ và $d_2 = BB'$ được xác định từ

$$d_1^2 = AA'^2 = CA^2 - CA'^2 = \overrightarrow{CA}^2 - (\overrightarrow{u}\overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{u}^2\overrightarrow{CA}^2 - (\overrightarrow{u}\overrightarrow{CA})^2 = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CA})^2$$

Như vậy

$$d_1 = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CA}\right|, \ d_2 = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CB}\right|, \ (|\overrightarrow{u}| = 1); \tag{12}$$

trong đó các tích véctơ $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CB}$ có các tọa độ như sau:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CA}\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ a_3 - c_3 & a_1 - c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{vmatrix}\right) \\ \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CB}\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ b_2 - c_2 & b_3 - c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ b_3 - c_3 & b_1 - c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ b_1 - c_1 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Từ (13) ta tính được

$$d_1 = \sqrt{(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CA})^2}, \ \ d_2 = \sqrt{(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{CB})^2} \tag{14}$$

Thay giá trị của d_1, d_2 từ (14) vào (9) thì được t_3, sau đó lại tiếp tục thay giá trị của t_3 vào (11) thì xác định được hoàn toàn các tọa độ x_1, x_2, x_3 của "*điểm cực tiểu*" M trên $\triangle$ phải tìm. Còn giá trị cực tiểu f_m của f được xác định bởi:

$$f_m^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + 4d_1d_2 \qquad (15)$$

trong đó d_1 và d_2 được xác định bởi các hệ thức (14).
Chú thích: Phần lời giải đại số của bài toán cực trị hình học 11' chưa đả động đến biện luận của bài toán dựng hình này mặc dầu đã chỉ ra đáp số đúng của bài toán về giá trị cực tiểu f_m của đại lượng f, kèm theo vị trí của "*điểm cực tiểu*" M phải tìm trên đường thẳng $\triangle$, cụ thể là trên đoạn $A'B'$, hình chiếu của đoạn thẳng AB trên $\triangle$. Chính vì vậy, khi ta phiên dịch trở lại kết quả thu được trong bài toán cực trị hình học 11' sang bài toán gốc (cực trị giải tích 11) cũng chưa thấy xuất hiện phần biện luận là bước cuối cùng của việc giải bài toán gốc (bài toán 11 về cực trị giải tích). Bởi vậy, để hoàn chỉnh lời giải bài toán dựng hình (bao gồm cả bài toán cực trị hình học) chúng ta cần bổ sung phần *biện luận* mà lẽ ra phần này phải xem là phần cuối cùng của lời giải. Tuy nhiên, để nhấn mạnh và làm nổi bật điều này chúng ta tách khỏi lời giải thành tiểu mục riêng.

c) Biện luận: Trở lại, theo dõi lời giải (đại số) của bài toán cực trị hình học 1' ta thấy rằng tỉ số đơn $(A'B', M)$ có biểu thức (6) được hoàn toàn xác định khi và chỉ khi $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$. Bởi vậy, bài toán 1' có nghiệm *duy nhất* khi và chỉ khi $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ tức là khi và chỉ khi ít nhất một trong hai điểm (phân biệt) A và B *không nằm trên* $\triangle$, cũng tức là khi và chỉ khi hoặc ba điểm A, B, C không thẳng hàng hoặc khi C trùng A, hoặc C trùng B nhưng $\triangle \neq (AB)$. Bài toán có *vô số nghiệm* [và bất cứ điểm M nào nằm trong đoạn AB (kể cả hai đầu mút A và B) cũng là điểm phải tìm] khi và chỉ khi *cả hai điểm A và B đều nằm trên đường thẳng* $\triangle$. Như vậy:

$$f \text{ đạt } \min f_m = AB \Leftrightarrow \{M\} = [AB] \subset \triangle \quad (f = MA + MB,\ M \in \triangle)$$

Trên cơ sở kết quả phần biện luận này của bài toán 11' ta phiên dịch ngược lại sang ngôn ngữ của bài toán gốc 11, ta có kết quả sau đây.

Nói chung, bài toán 11 có *nghiệm duy nhất* và biểu thức nghiệm x_i $(i = 1, 2, 3)$ có dạng (11), trong đó t_3 có biểu thức (9) và t_i $(i = 1, 2)$ có dạng (7) còn d_i được xác định bởi (12). Giá trị cực tiểu f_m của f được xác định bởi (15).

Bài toán 11 có *vô số nghiệm* khi và chỉ khi

$$a_1 - c_1 : a_2 - c_2 : a_3 - c_3 = b_1 - c_1 : b_2 - c_2 : b_3 - c_3 = u_1 : u_2 : u_3$$

Giá trị cực tiểu f_m của f được xác định bởi (15), trong đó $d_1 = d_2 = 0$. **d) Lời bình bổ xung.** Với nhận xét nêu ra ở mục 2.1 a) trên đây bài toán 11 về cực trị giải tích đã được giải nhờ hình học hóa nội dung bài toán cực trị gốc. Bài toán 11 đã được phiên dịch sang ngôn ngữ hình học thành bài toán cực trị trong hình học không gian (bài toán 11'). Chúng ta đã sử dụng một B. Đ. T đại số cơ bản (đó là B. Đ. T. Mincopski) để giải bài toán cực trị hình học11'này. Sau cùng chúng ta lại phải sử dụng đồng thời cả kiến thức về đại số (phương pháp tọa độ) và hình học (cụ thể là tích vô hướng và tích véc tơ của hai véc tơ trongkhông gian) để biểu thị kết quả tìm được (giá trị cực tiểu f_m của hàm f) hoàn toàn theo các dữ kiện (các số thực dã cho $a_i, b_i, c_i, u_i (i = 1, 2, 3)$ trong nội dung bài toán). Cụ thể là không những chỉ tính giá trị cực tiểu f_m của hàm f mà còn phải xác định giá trị cụ thể của các biến x_1, x_2, x_3 theo các số đã cho khi f đạt cực tiểu f_m. Vì vậy, lời giải không sử dụng phương pháp giải tích (cũng còn được gọi là phương pháp hàm số) này thực ra cũng khôngđược gọn gàng và tiện lợi cho lắm . Để ý quan sát kỹ về lời giải 1 (lời giải hình học) này chúng ta thấy việc sử dụng B. Đ. T. Mincopski có phần đã được gợi ý từ nội dung biểu thức (*) nằm ngay trong nội dung bài toán 11 rồi, nhất là khi (*) đã được biến đổi về dạng (2) của $f = f(t)$ phụ thuộctham số t. Điều đó khiến chúng ta cần quay trở lại thêm một lần nữa tìm cách sử dụng B. Đ. T. Mincopski để giải bài toán cực trị giải tích này hoàn toàn bằng phương pháp đại số.

d) Lời giải 2(lời giải đại số) của bài toán 11.

Trước hết để thực hiện các phép toán được gọn gàng ta luôn luôn giả thiết được rằng:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1, \tag{1'}$$

và đưa (1) về dạng (phương trình tham số):

$$x_i = c_i + u_i t, \ (i = 1, 2, 3), \tag{i}$$

trong đó u_i thỏa mãn điều kiện (1') và $(-\infty < t < +\infty$.

Đến đây, thay x_i bởi giá trị ở vế phải của (i) ta được:

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - a_i)^2 = t^2 + 2\alpha_1 t + \gamma_1^2; \ \sum_{i=1}^{3} (x_i - b_i)^2 = t^2 + 2\alpha_2 t + \gamma_2^2 \tag{ii}$$

trong đó ta đã đặt:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - a_i), \ \gamma_1^2 = \sum_{i=1}^{3} (c_i - a_i)^2; \\ \alpha_2 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - b_i), \ \gamma_2^2 = \sum_{i=1}^{3} (c_i - b_i)^2; \ (i = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{i'}$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\alpha_1^2 = [u_1(c_1 - a_1) + u_2(c_2 - a_2) + u_3(c_3 - a_3)]^2 \le (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)[(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2 + (c_3 - a_3)^2]$$

rồi để ý đến (1") và (i') ta được$\alpha_1^2 \le \gamma_1^2$.

Tương tự ta cũng được$\alpha_2^2 \le \gamma_2^2$.

Tuy nhiên, áp dụng hằng đẳng thức Lagrange thì ta có các đẳng thức sau:

$$\begin{cases} \gamma_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2; \\ \gamma_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2; \end{cases} \tag{iii}$$

trong đó

$$\begin{cases} \gamma_1^2 - \alpha_1^2 = \beta_1^2 = [u_2(c_3 - a_3) - u_3(c_2 - a_2)]^2 + [u_3(c_1 - a_1) - u_1(c_3 - a_3)]^2 + [u_1(c_2 - a_2) - u_2(\\ \gamma_2^2 - \alpha_2^2 = \beta_2^2 = [u_2(c_3 - b_3) - u_3(c_2 - b_2)]^2 + [u_3(c_1 - b_1) - u_1(c_3 - b_3)]^2 + [u_1(c_2 - b_2) - u_2(c_1 \end{cases} \qquad \text{(iv)}$$

Đối chiếu (ii) và (iii) ta được:

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - a_i)^2 = (t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2,$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_i - b_i)^2 = (t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2,$$

và do đó thu được biểu thức gọn của f như sau:

$$f = \sqrt{(t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \sqrt{(t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2}, \qquad (1)$$

trong đó $\alpha_i), \beta_i$ $(i = 1, 2)$ đều là những hằng số theo thứ tự được xác định bởi (i') và (iv) như đã chỉ ra ở trên.

Đến đây với biểu thức (*') đã được thu gọn của f chúng ta có thể tìm được giá trị cực tiểu (giá trị nhỏ nhất) f_m của hàm f bằng phương pháp giải tích (sử dụng điều kiện cần để hàm f đạt cực tiểu thông qua việc tính đạo hàm $f'(t)$ rồi giải phương trình $f'(t) = 0$ để chỉ ra giá trị $t = t_0$, ở đó f đạt cực tiểu f_m mà ta phải tìm.

Tuy nhiên việc giải phương trình $f'(t) = 0$ cũng chưa thật sự đơn giản như chúng ta mong muốn. Bởi vậy chúng ta nghĩ đến phương pháp sử dụng bất đẳng thức đại số để tìm giá trị nhỏ nhất f_m của biểu thức f.

Thật vậy, vì $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ và β_2 đều là những hằng số đã cho, trong đó β_1 và β_2 đều là những số không âm; bởi vậy ta nghĩ đến bất đẳng thức Mincopski. Theo bất đẳng thức Mincopski, ta được:

$$f = \sqrt{(t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \sqrt{(t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2} \geq \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2}; \qquad \text{(v)}$$

(Để ý rằng $(t + \alpha_2)^2 + \beta_2^2 = (-t - \alpha_2)^2 + \beta_2^2$). Dấu đẳng thức ở (v) đạt được khi và chỉ khi

$$\frac{(t + \alpha_1)}{\beta_1} = -\frac{(t + \alpha_2)}{\beta_2},$$

và do đó dễ dàng suy ra khi và chỉ khi

$$t = t_0 = -\frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, \qquad \text{(vi)}$$

trong đó

$$-\alpha_1 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - a_i);\ \alpha_2 = \sum_{i=1}^{3} u_i(c_i - b_i)$$

và β_1, β_2 được xác định bởi đẳng thức (iv).

Cuối cùng ta thu được kết quả cho giá trị nhỏ nhất f_m của f:

$$minf = f_m = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2} \qquad \text{(vii)}$$

khi và chỉ khi $t = t_0$, xác định bởi (vi), còn α_i, β_i $(i = 1, 2)$ được xácđịnh bởi (i')và (iv) như đã chỉ ra ở trên.

Biện luận. Bài toán có nghiệm khi giá trị của t (xác định bởi (vi) được hoàn toàn xác định. Vì $\beta \geq 0$ $(\forall i = 1, 2)$ nên $\beta_1 + \beta_2 \geq 0$. Bởi vậy bài toán có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$, cũng tức là khi và chỉ khi ít nhất có một nghiệm β_i $(i = 1, 2) \neq 0$ (và do đó hoặc $\beta_1 > 0$, hoặc $\beta_2 > 0$). Bài toán có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Và do đó, theo các hệ thức (iv) xác định β_1^2 và β_2^2 ở trên dễ dàng suy ra:

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \Leftrightarrow c_1 - a_1 : c_2 - a_2 : c_3 - a_3 = c_1 - b_1 : c_2 - b_2 : c_3 - b_3 = u_1 : u_2 : u_3. \qquad \text{(viii)}$$

Tóm lại: Bài toán 11 có nghiệm duy nhất f_m xác định bởi (vii) $\Leftrightarrow \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Bài toán 11 có vô số nghiệm có cùng giá trị $f_m = \mid \alpha_1 - \alpha_2 \mid \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$, cũng tức là các bộ số a_i, b_i, c_i, u_i $(i = 1, 2, 3)$ thỏa mãn điều kiện(Viii).

Cuối cùng, đối chiếu hai lời giải 1 và 2 (hình học và đại số) của bài toán 11 ta thấy được ý nghĩa hình học của α_i và β_i $(i = 1, 2)$ của lời giải đại số. Đó là:$t_0 = t_3, \beta_1 = d_1, \beta_2 = -d_2$ và $\alpha_i = -t_i$ $(i = 1, 2)$. Sau đây là *hai bài toán cực trị đại số và lượng giác* đều có xuất xứ từ cùng một bài toán cực trị hình học (trong hình học phẳng). Hai bài toán cực trị đó, nói khác đi chính là *lời giải đại số* và *lời giải lượng giác* của bài toán cực trị gốc.

Bởi vậy, trước hết xin đề cập *bài toán cực trị hình học gốc*, xuất xứ của hai bài toán cực trị đại số và lượng giác (về nội dung cũng như lời giải) để bạn đọc dễ theo dõi và đối chiếu.

Bài toán 12. (Bài toán cực trị hình học gốc)

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính a và một điểm P cố định nằm trong đường tròn $(OP = d < a)$. Trong các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P, hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo a và d.

Chú thích. Bài toán này chính là một bài toán hình học phẳng (Bài 1) trong kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán (Bảng A), tháng 3 năm 1997.

Bài toán này có nhiều cách giải.

Sau đây là *lời giải hình học* của bài toán (Lời giải 1).

a) Ký hiệu $p = AB + BC + CD + DA$ là chu vi của tứ giác $ABCD$, ta tính $p^2 = [(AB + CD) + (BC + DA)]^2$. Ta được:

$$p^2 = (AB^2 + CD^2) + (BC^2 + DA^2) + 2(AB.CD + BC + DA) + \\ + 2(AB.AD + CB.CD + BA.BC + DC.DA).$$

Vì $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, a) nên ta có (Hình 1):

$$AP.PC = BP.PD = -\mathcal{P}P/(O,a) = a^2 - d^2 = b^2, \tag{1}$$

$$AB.CD + BC.DA = AC.BD \text{ (Định lý Ptolémé);} \tag{2}$$

Lại vì $AC \perp BD = P$ nên ta dễ dàng thiết lập được các hệ thức sau:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = 4a^2, \tag{3}$$

$$\frac{AB.AD}{AP} = \frac{CB.CD}{PC} = \frac{BA.BC}{BP} = \frac{DA.DC}{PD} = 2a, \tag{4}$$

$$AC^2 + BD^2 = 4(2a^2 - d^2) = 4(a^2 + b^2). \tag{5}$$

Đến đây, từ (1), (2), (3), (4), (5), và $2AC.BD = (AC + BD)^2 - (AC^2 + BD^2)$ ta thu được biểu thức thu gọn của p^2 (vế phải của biểu thức (*) sau đây):

$$p^2 = (AC + BD)^2 + 4a(AC + BD) + 4(a^2 - b^2). \tag{*}$$

b) Biểu thức (*) của p^2 cho ta biết : p^2 và do đó, p đạt giá trị lớn nhất p_M hay giá trị nhỏ nhất p_m khi và chỉ khi tổng $AC + BD$ độ dài hai đường chéo của tứ giác $ABCD$, tương ứng đạt giá trị max hay min.

Bây giờ từ hệ thức (5) và hệ thức (6) sau đây liên quan đến AC và BD:

$$(AC + BD)^2 + (AC - BD)^2 = 2(AC^2 + BD^2), \tag{6}$$

ta suy ra: $AC + BD$ đạt giá trị max(min) khi và chỉ khi $|AC - BD|$ đạt min(max).

+) Từ (6) suy ra:

$$\max(AC + BD)^2 = 8(a^2 + b^2) \Leftrightarrow AC = BD.$$

Bởi vậy, ta được:

$$AC + BD \text{ đạt giá trị } \max = 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow AC = BD = \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \tag{7}$$

Cuối cùng thế giá trị (7) vào (*) ta thu được kết quả cần tìm của p_M:

$$p_M = 2(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + b^2}), \ (b^2 = a^2 - d^2) \\ \Leftrightarrow AC = BD = \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \tag{8}$$

Vì AC và BD là hai dây cung của đường tròn (O,a) nên chúng bằng nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thang cân ở vị trí $A_1B_1C_1D_1$ (hình 2) nhận (OP) làm trục đối xứng và cũng là trung trực chung của hai đáy B_1C_1 và A_1D_1.

+) Cũng từ (6) suy ra

$$\min(AC+BD)^2 = 8(a^2+b^2) - 4(a-b)^2 = 4(a+b)^2$$
$$\Leftrightarrow |AC-BD| \text{ đạt } \max = 2(a-b)$$

và do đó, khi và chỉ khi một trong hai đường chéo (AC hoặc BD) là đường kính đi qua P của (O,a), còn đường chéo kia (BD hoặc AC) là dây cung ngắn nhất đi qua P. Ta đi đến kết luận p đạt giá trị nhỏ nhất p_m

$$p_m = 4\sqrt{a(a+b)}, \tag{9}$$

khi và chỉ khi $ABCD$ ở vị trí của tứ giác $A_2B_2C_2D_2$ nhận đường chéo lớn làm trục đối xứng, trùng với đường kính đi qua P của (O,a); (chẳng hạn $A_2C_2 \ni P$ ở hình 3).

Lời giải 2. (Lời giải lượng giác)

a) Ký hiệu độ lớn các góc ở tâm AOB, BOC, COD và DOA lần lượt là $2x, 2y, 2z$ và $2t$. Khi đó $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = x, \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = y, \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = z, \widehat{DBA} = \widehat{DCA} = t$; (Hình 1) đồng thời thoả mãn các điều kiện sau

$$0 < x,y,z,t < \frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

$$x+z = y+t = \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Ngoài ra, theo định lý hàm sin ta có

$$\frac{AB}{\sin x} = \frac{BC}{\sin y} = \frac{CD}{\sin z} = \frac{DA}{\sin t} = 2a. \tag{12}$$

Từ (11) và (12) ta thu được biểu thức (**) sau đây về chu vi p của tứ giác $ABCD$

$$p = 2a(\sin x + \cos x + \sin y + \cos y). \tag{**}$$

Đến đây bài toán quy về tìm cực đại f_M và cực tiểu f_m của biểu thức lượng giác sau đây

$$f(x,y) = f(y,x) = \sin x + \cos x + \sin y + \cos y, \tag{**'}$$

trong đó hàm lượng giác $f(x,y)$ được xác định trong miền mở $(0, \frac{\pi}{2})$ của hai biến x, y không độc lập mà theo hệ thức (1) được chỉ ra trong lời giải 1 ở trên thì x, y ràng buộc với nhau bởi điều kiện (đẳng thức)

$$\sin 2x . \sin 2y = \frac{b^2}{a^2}. \tag{13}$$

Với nhãn quan này ta đề xuất được một *bài toán mới về cực trị lượng giác* sau:
Bài toán 13. Tìm cực đại f_M và cực tiểu f_m của biểu thức lượng giác sau (**'):

$$f(x,y) = \sin x + \cos x + \sin y + \cos y,$$

trong đó $f(x,y)$ được xác định trong miền mở $(0,\dfrac{\pi}{2})$ của hai biến thực x,y ràng buộc với nhau bởi hệ thức (13):

$$\sin 2x.\sin 2y=\frac{b^2}{a^2}.$$

b) Nhờ công thức $\sin u+\cos u=\sqrt{2}\sin(u+\frac{\pi}{4}), \forall u$ và hai công thức biến đổi các tổng $\sin u+\sin v$ và $\cos u+\cos v$ thành tích, chúng ta dễ dàng đưa được biểu thức (**') của $f(x,y)$ về một trong hai dạng sau

$$f(x,y)=\sqrt{2}[\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(y+\frac{\pi}{4})], \tag{14}$$

$$f(x,y)=2[\sin(\frac{x+y}{2})+\cos(\frac{x+y}{2})]\cos(\frac{x-y}{2}). \tag{15}$$

+) Đến đây, để tìm giá trị max f_M của $f(x,y)$ ta sử dụng biểu thức (14)của nó. Vì $0<x,y<\frac{\pi}{2}$ nên $0<\sin(x+\frac{\pi}{4}),\sin(y+\frac{\pi}{4})\leq 1$ và do đó $f(x,y)\leq 2\sqrt{2}$. Suy ra: $f_M(x,y)=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=y=z=t=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow d=0\Leftrightarrow P=O\Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông. Bởi vậy, nếu $P=O$ thì $f_M(x,y)<2\sqrt{2}$. Từ đó suy ra: Nếu $d\neq 0$, tức là $P\neq O$ thì $f(x,y)$ đạt max khi và chỉ khi hoặc $x=\frac{\pi}{4}$ hoặc $y=\frac{\pi}{4}$. Chẳng hạn, nếu $x=x_0=\frac{\pi}{4}$ thì $2x=2x_0=\frac{\pi}{2}$, do đó $\sin 2x_0=1$ và $z_0=x_0=\frac{\pi}{4}$. Khi đó ta được:

$$\max f(x,y)=f_M=f(x_0,y_0)=\sqrt{2}+\sin y_0+\cos y_0, \tag{16}$$

trong đó $0<y_0<\frac{\pi}{2}$ được xác định bởi:

$$\sin 2y_0=\frac{b^2}{a^2}. \tag{17}$$

Từ (17) ta tính được $\sin y_0$ và $\cos y_0$ như sau:

$$\frac{\sin y_0}{\sqrt{2(a^2-\sqrt{a^4-b^4})}}=\frac{\cos y_0}{\sqrt{2(a^2+\sqrt{a^4-b^4})}}=\frac{1}{2a}. \tag{18}$$

Thay giá trị của $\sin y_0$ và $\cos y_0$ từ (18) vào biểu thức (16) của f_M ta được:

$$\max f(x,y)=f(x_0,y_0)=f_M=\sqrt{2}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}, \tag{19}$$

đạt được khi và chỉ khi $x=x_0, y=y_0$, trong đó x_0,y_0 được xác định bởi (18).

Cuối cùng, từ giá trị f_M vừa tìm được ở (19), thay vào (**) ta tìm được giá trị lớn nhất p_M của p đúng như biểu thức (8) của nó đã được chỉ ra ở trên trong (lời giải hình học) của bài toán 12.

+) Bây giờ, đến lượt tìm giá trị min của $f(x,y)$ ta lại sử dụng biểu thức (15) của nó. Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương, ta được

$$f(x,y)\geq 2\sqrt{2\sin(x+y)}\cos(\frac{x-y}{2}). \tag{20}$$

Dấu đẳng thức ở (20) đạt được khi và chỉ khi:

$$\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \cos\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x+y = z+t = \frac{\pi}{2} \tag{21}$$
$$\Leftrightarrow \sin(x+y) = \sin(z+t) = 1.$$

Bởi vậy, $f(x,y)$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$f_m = f(x_0', y_0'),$$
$$f_m = 2\sqrt{2}\cos\Big(\frac{x_0'-y_0'}{2}\Big), \tag{22}$$

trong đó x_0', y_0' là nghiệm của hệ hai phương trình $\{(13),(21)\}$. Giải ra ta được $\cos(x_0'-y_0') = \sin 2y_0' = \frac{b}{a}$ rồi dễ dàng tìm được:

$$\cos\Big(\frac{x_0'-y_0'}{2}\Big) = \frac{1}{2a}\sqrt{2a(a+b)} = \sqrt{\frac{1}{2}\Big(1+\frac{b}{a}\Big)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\frac{b}{a}} \tag{23}$$

Từ đó suy ra:

$$f_m = 2\sqrt{1+\frac{b}{a}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0' = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}, \\ y = y_0' = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{b}{a}. \end{cases} \tag{24}$$

Sau đó, từ (24) ta thu được $p_m = 2af_m$ và thấy lại biểu thức (9) của p_m như đã chỉ ra trong lời giải hình học (Bài toán 12).

Sau đây là lời giải đại số (Lời giải 3) của bài toán 12.

a) Đặt $b = \sqrt{a^2-d^2}; PA = x; PC = x'; PB = y; PD = y'$. Ta thu được biểu thức sau đây của chu vi p của tứ giác $ABCD$:

$$p = p(x,x',y,y') = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+x'^2} + \sqrt{x'^2+y'^2} + \sqrt{y'^2+x^2}. \tag{***}$$

Ngoài ra, dễ dàng chỉ ra được các biến số x, x', y, y' ràng buộc với nhau bởi các điều kiện (bao gồm cả bất đẳng thức và đẳng thức) sau đây

$$a - d = a - \sqrt{a^2-b^2} \le x, x', y, y' \le a + \sqrt{a^2-b^2} = a+d, \tag{i}$$
$$xx' = yy' = b^2 \quad (0 < b \le a), \tag{ii}$$
$$x^2 + x'^2 + y^2 + y'^2 = 4a^2. \tag{iii}$$

Như vậy, với cách nhìn bài toán cực trị hình học (bài toán 12) dưới góc độ mới này, ta lại thu được một bài toán mới khác về *cực trị đại số* mà nội dung có thể phát biểu ngắn gọn như sau:

Bài toán 14. Tìm cực đại p_M và cực tiểu p_m của biểu thức đại số $p(x,x',y,y')$ của các biến x, x', y, y' ràng buộc với nhau bởi (i), (ii) và (iii).

Trước hết ta hãy tìm cách thu gọn vế phải của (***). Thật vậy, nhờ đẳng thức (ii) ta dễ dàng thu được các đẳng thức sau đây:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{(x+y')^2 + (x'+y)^2)}$$
$$\sqrt{x^2+y'^2} + \sqrt{x'^2+y^2} = \sqrt{(x+y)^2 + (x'+y')^2)}$$

tương tự với bài toán cực trị hình học (Bài toán 12) trong hình học phẳng (xem phần chú thích c) ở đoạn dưới).

a) **Phát biểu bài toán:**

Bài toán 15. *Xét $2n$ biến số thực dương x_i, x_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ thoả mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} a - \sqrt{a^2 - b^2} \leq x_i, x_i' \leq a + \sqrt{a^2 - b^2}, & (i) \\ x_i x_i' = b^2 \ (0 < b \leq a), & (ii) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + x_i'^2) = 4a^2 + 2(n-2)b^2. & (iii) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất p_M và giá trị nhỏ nhất p_m của hàm $2n$ biến x_i, x_i' $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ sau đây:

$$p(x_1, x_1'; \ldots; x_n, x_n') = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{x_i^2 + x_j^2} + \sqrt{x_i^2 + x_j'^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j'^2} \right). \quad (*)$$

Chú thích: Nếu đặt $p_{ij} = p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j')$ thì (*) được viết gọn lại hơn như sau:

$$p(x_1, x_1'; x_2, x_2'; \ldots; x_n, x_n') = \sum_{1 \leq i < j \leq n} p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j')$$

và dưới dấu $\sum$ có tất cả $\frac{1}{2}(n-1)n = C_n^2$ hàm $p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j')$ của bốn biến x_i, x_i', x_j, x_j' với $1 \leq i < j \leq n$, trong đó p_{ij} có dạng là tổng của bốn căn thức bậc hai ở vế phải của (*).

b) Phương án giải (lời giải) của bài toán.

Đặt: $X_i = x_i + x_i'$; $X_j = x_j + x_j'$; $x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2 = 4a_{ij}^2$; $x_0 = 2b$, $X_0 = 2a$. Thế thì từ (i), (ii) và (iii) ta suy ra $X_i^2 \geq 4x_i x_i' = 4b^2$, $X_i^2 + X_j^2 = 4a_{ij}^2 + 4b^2$ và do đó, $X_i^2 \leq 4a_{ij}^2$.

Từ đó ta được bất đẳng thức và đẳng thức sau:

$$\begin{cases} 2b = x_0 \leq X_i \leq 2a_{ij} \leq 2a \\ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 4a^2 + 2(n-2)b^2 + 2nb^2 = 4a^2 + 4(n-1)b^2 = X_0^2 + (n-1)x_0^2.. \end{cases}$$

+) Ta hãy tính p_{ij} theo X_i, X_j, a_{ij} và b.

Từ (ii) ta suy ra

$$\sqrt{x_i^2 + x_j^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j'^2} = \sqrt{(x_i + x_j')^2 + (x_j + x_i')^2},$$
$$\sqrt{x_i^2 + x_j'^2} + \sqrt{x_i'^2 + x_j^2} = \sqrt{(x_i + x_j)^2 + (x_i' + x_j')^2};$$

và do đó,

$$p_{ij} = p_{ij}(x_i, x_i', x_j, x_j') = \sqrt{(x_i + x_j')^2 + (x_j + x_i')^2} + \sqrt{(x_i + x_j)^2 + (x_i' + x_j')^2}. \quad (1)$$

Sau khi bình phương hai vế của (1) và sử dụng các hệ thức (ii) và ký hiệu rút gọn $x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2 = 4a_{ij}^2$, ta được biểu thức rút gọn sau của p_{ij}^2 dưới dạng một tam thức bậc hai đối với biến $X_i + X_j$:

$$p_{ij}^2 = (X_i + X_j)^2 + 4a_{ij}(X_i + X_j) + 4(a_{ij}^2 + b^2), \tag{2}$$

trong đó giữa X_i và X_j có các hệ thức sau đây:

$$X_i^2 + X_j^2 = 4a_{ij}^2 + 4b^2, \tag{3}$$
$$(X_i + X_j)^2 + (X_i - X_j)^2 = 8(a_{ij}^2 + b^2). \tag{4}$$

+) Vì $X_i > 0, X_j > 0$ nên biểu thức (2) của p_{ij}^2 cho biết: p_{ij}^2 và do đó, p_{ij} đạt giá trị $\max p_{ij_M}$ hay giá trị $\min p_{ij_m}$ khi và chỉ khi $X_i + X_j$ đạt max hay min. Do đó, từ (4) ta suy ra:

$$X_i + X_j \text{ đạt } \max(\min) \Leftrightarrow |X_i - X_j| \text{ đạt } \min(\max).$$

Từ (4) ta được: $(X_i + X_j)^2 \le 8(a_{ij}^2 + b^2)$ và do đó thay vào (2) ta được:

$$p_{ij}^2 \le 4\Big(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\Big)^2.$$

Vậy

$$p_{ij} \le p_{ij_M} = 2\Big(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\Big), \tag{5}$$
$$p_{ij} = p_{ij_M} = 2\Big(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\Big) \tag{6}$$
$$\Leftrightarrow X_i = X_j \ (2b \le X_i = X_j \le 2a_{ij} \le 2a).$$

Mặc khác, $|X_i - X_j|$ đạt max khi và chỉ khi hoặc X_i đạt max $= 2a_{ij}$, X_j đạt min $= x_0 = 2b$ hoặc X_j đạt max $= 2a_{ij}, X_i$ đạt min $= x_0 = 2b$. Suy ra:

$$\begin{aligned} p_{ij}^2 \ge p_{ij_m}^2 &= (2a_{ij} + 2b)^2 + 4a_{ij}(2a_{ij} + 2b) + 4(a_{ij}^2 - b^2) \\ &= 4(a_{ij} + b)^2 + 8a_{ij}(a_{ij} + b) + 4(a_{ij} + b)(a_{ij} - b) \\ &= 16a_{ij}(a_{ij} + b). \end{aligned}$$

Vậy

$$p_{ij} \ge p_{ij_m} \ (\min) = 4\sqrt{a_{ij}(a_{ij} + b)}, \tag{7}$$

và

$$p_{ij} = p_{ij_m} = 4\sqrt{a_{ij}(a_{ij} + b)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X_i = X_0 = 2a_{ij},\ X_j = x_0 = 2b, \\ X_j = 2a_{ij},\ X_i = x_0 = 2b. \end{array}\right. \tag{8}$$

Và do đó:

$$p_{ij_m} = \left[\begin{array}{l} 4b\sqrt{2} \ \text{(với } a_{ij} = b), \\ 4\sqrt{a^2 + ab} = 4a\sqrt{1 + \frac{b}{a}} \ \text{(với } a_{ij} = a). \end{array}\right.$$

Bây giờ ta trở lại với hàm $2n$ biến $p(x_1, x'_1; \ldots; x_n, x'_n)$ (*), từ (5) và (7) ta thu được bất đẳng thức kép sau:

$$4 \sum_{1\le i<j\le n} \sqrt{a_{ij}(a_{ij}+b)} \le p = \sum_{1\le i<j\le n} p_{ij} \le 2\Big[\sum_{1\le i<j\le n} (a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2})\Big], \qquad (*')$$

trong đó $0 < b \le a_{ij} \le a$.

+) Đến đây, ta có thể tìm được các giá trị lớn nhất p_M và nhỏ nhất p_m của p.

- Trước hết, ta tìm giá trị nhỏ nhất p_m của $p = p(x_1, x'_1; \ldots; x_i, x'_i; \ldots; x_n, x'_n)$. Để tính p_m, ta hãy để ý rằng:

$$(n-1)\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + x_i'^2)\Big] = \sum_{1\le i<j\le n} (x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2) = \sum_{1\le i<j\le n} (4a_{ij}^2). \qquad (9)$$

Từ (iii) và (9) ta được:

$$(n-1)[4a^2 + 2(n-2)b^2] = 4\Big(\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}^2\Big).$$

Suy ra

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}^2 = (n-1)a^2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)b^2 = (n-1)a^2 + C_{n-1}^2 b^2 = const \qquad (10)$$

$$= (n-1)max a_{ij}^2 + C_{n-1}^2 min a_{ij}^2.$$

Hệ thức (10) chứng tỏ rằng:

- Không thể xảy ra $a_{ij} = b$ với $\forall i, j$ (Điều này dễ dàng suy ra bằng phương pháp chứng minh phản chứng). Từ đó suy ra rằng phải có một số giá trị $a_{ij} = a$. Mặt khác, có tất cả $C_n^2 = (n-1) + C_{n-1}^2$ giá trị của a_{ij}, mà theo (10) thì tối đa có C_{n-1}^2 giá trị $a_{ij} = b$ và vì thế, phải có $n-1$ giá trị a_{ij} nào đó đạt cực đại bằng a (chẳng hạn, $a_{12} = a_{13} = \cdots = a_{1n} = a$, tức là $a_{1j} = a (j \ne 1)$. Cuối cùng, suy ra:

$$p_m = 4\Big[(n-1)\sqrt{a(a+b)} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)b\sqrt{2}\Big], \qquad (11)$$

hay là

$$\min p = 4\Big[(n-1)a\sqrt{1+\frac{b}{a}} + C_{n-1}^2 b\sqrt{2}\Big] = 4(n-1)\sqrt{a(a+b)} + 2(n-1)(n-2)b\sqrt{2}. \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_i = x_i + x'_i &= 2a, \quad (i \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ X_j \ (j \ne i) &= 2b, \quad j \ne i. \end{cases}$$

Với $n = 2$, ta được: $minp = 4\sqrt{a(a+b)}$, ta thấy lại kết quả đã thu được ở phần (I).

- Bây giờ tìm giá trị lớn nhất p_M của p. Ta sử dụng bất đẳng thức $\frac{u_i}{n} \leq \sqrt{\frac{u_i^2}{n}}$, ($u_i > 0$) để đánh giá tiếp bất đẳng thức ở vế phải của bất đẳng thức kép (*') có sử dụng đại lượng bất biến (10). Thế thì, vì $\sum_{i=1}^n u_i \leq \sqrt{n \sum u_i^2}$ nên ta được:

α) $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \leq \sqrt{C_n^2(\sum a_{ij}^2)}$, hay viết cụ thể hơn là:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \leq \sqrt{C_n^2[(n-1)a^2 + C_{n-1}^2 b^2]} = \left[\frac{n(n-1)}{2}(n-1)a^2 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{2}b^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Do đó ta được

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} \leq \left(\frac{(n-1)}{2}\right)\sqrt{2na^2 + n(n-2)b^2}. \tag{13}$$

β) Cũng vậy, $\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\sqrt{a_{ij}^2+b^2}\right) \leq C_n^2 \sqrt{\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_{ij}^2+b^2)}{C_n^2}}$, rồi sử dụng (10) thì được:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\sqrt{a_{ij}^2+b^2}\right) &\leq \sqrt{C_n^2\Big(\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}^2 + C_n^2 b^2\Big)} \\
&= \sqrt{C_n^2(n-1)a^2 + C_n^2 C_{n-1}^2 b^2 + (C_n^2)^2 b^2} \\
&= \left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{2n[a^2 + (n-1)b^2]}.
\end{aligned}$$

Do đó:

$$2\Big[\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\sqrt{a_{ij}^2+b^2}\right)\Big] \leq (n-1)\sqrt{2n[a^2+(n-1)b^2]}. \tag{14}$$

Cuối cùng, từ (13) và (14) ta được kết quả (sau khi thay vào vế phải của (*')):

$$p \leq (n-1)\left[\sqrt{2n[2a^2+(n-2)b^2]} + \sqrt{2n[a^2+(n-1)b^2]}\right]. \tag{15}$$

Vậy là:

$$\begin{aligned}
p_M &= (n-1)\left[\sqrt{2n[2a^2+(n-2)b^2]} + \sqrt{2n[a^2+(n-1)b^2]}\right] \qquad (16)\\
&\Leftrightarrow X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \frac{2}{n}\sqrt{na^2+n(n-1)b^2};\ (X_i = x_i + x_i';\ (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Với $n = 2$, thì được $p_M = 2(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2+b^2})$, ta thấy lại kết quả đã thu được ở phần I.

c) Chú thích: Đến đây, bài toán 15 - một bài toán cực trị đại số_đã được giải xong. Nhưng vì bài toán cực trị đại số này lại chính là nội dung (ngôn ngữ) đại số của một bài toán cực trị hình học trong không gian Oclit n chiều $E_n(n \geq 3)$, tương tự với bài toán cực trị hình học gốc trong mặt phẳng (đã được giới thiệu 3 lời giải); bởi vậy, chỉ việc cho $n = 3$ vào các biểu thức (12) và (16) trên đây của p_m và p_M ta được ngay tức khắc đáp số của bài toán cực trị tương tự trong hình học không gian khi ta thay đường tròn (O, a) bởi mặt cầu (O, a), tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O, a) có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau ở một điểm P nằm trong đường tròn bởi hình bát diện $\mathcal{K}(A.BCB'C'.A')$ nội tiếp mặt cầu $\mathcal{C}(O,a)$ có ba đường chéo AA', BB', CC' cũng là ba dây cung của $\mathcal{C}(O,a)$, vuông góc với nhau đôi một ở một điểm P cố định nằm trong mặt cầu $\mathcal{C}(O,a)$ $(OP = d < a)$.

Sau đây, một bài toán mới thứ hai khác, về cực trị đại số được đề xuất trên cơ sở phiên dịch sang ngôn ngữ đại số nội dung của bài toán cực trị hình học trong không gian vừa mới đề cập trong chú thích ở mục c) trên đây (cụ thể là cực trị về diện tích của một họ hình bát diện $\mathcal{K}(A.BCB'C'.A')$ nội tiếp mặt cầu $\mathcal{C}(O,a)$.

d) Phát biểu bài toán:

Bài toán 16. *Xét 6 biến số thực dương x_i, x'_i $(i = 1,2,3)$ thoả mãn các điều kiện sau:*

$$\begin{cases} a-\sqrt{a^2-b^2} \le x_i, x'_i \le a+\sqrt{a^2-b^2},\ (a \ge b > 0), & (i)\\ x_i x'_i = b^2,\ \ (i=1,2,3) & (ii)\\ \sum_{i=1}^{3}(x_i^2 + x_i'^2) = 4a^2+2b^2. & (iii)\end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất s_M và giá trị nhỏ nhất s_m của hàm 6 biến x_i, x'_i $(i = 1,2,3)$ sau đây:

$$s = s(x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3) = \sum \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2} \qquad (**)$$

trong đó: $\{x,y,z\} \subset \{x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3\}$ và x, y, z không có cùng chỉ số, tức là sao cho $\{x,y\} \ne \{x_i, x'_i\}$, $\{y,z\} \ne \{x_i, x'_i\}$ và $\{z,x\} \ne \{x_i, x'_i\}$; $i \in \{1,2,3\}$. Chú thích: Dưới dấu Σ có tất cả 8 căn thức bậc hai mà biểu thức dưới dấu căn thức là 8 đa thức thuần nhất bậc 4 của ba trong 6 đối số x_i, x'_i nhưng không cùng một chỉ số $(i \in \{1,2,3\})$. Cụ thể là biểu thức (**) của s có thể được viết lại như sau:

$$s = S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + S_3 + S'_3 + S_4 + S'_4,$$

trong đó

$$\begin{cases} 4S_1^2 = x_2^2x_3^2 + x_1'^2(x_2^2+x_3^2), & 4S_1'^2 = x_2'^2x_3'^2 + x_1^2(x_2'^2+x_3'^2);\\ 4S_2^2 = x_3^2x_1^2 + x_2'^2(x_3^2+x_1^2), & 4S_2'^2 = x_3'^2x_1'^2 + x_2^2(x_3'^2+x_1'^2);\\ 4S_3^2 = x_1^2x_2^2 + x_3'^2(x_1^2+x_2^2), & 4S_3'^2 = x_1'^2x_2'^2 + x_3^2(x_1'^2+x_2'^2);\\ 4S_4^2 = x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2, & 4S_4'^2 = x_2'^2x_3'^2 + x_3'^2x_1'^2 + x_1'^2x_2'^2;\end{cases}$$

là những biểu thức dưới dấu căn thức bậc hai ở vế phải của (**).

e) Gợi ý hướng giải. Sử dụng đại lượng bất biến (ii), hãy tìm cách rút bớt số căn thức ở vế phải của biểu thức (**) từ 8 xuống 4 rồi 2.

Đặt $X_i = x_i + x'_i$ $(i = 1,2,3)$, chứng tỏ rằng:

$$\sum_{i=1}^{2} X_i^2 = 4a^2 + 8b^2 = 4a^2 + 2.4b^2 = X_0^2 + 2x_0^2\ (X_0 = 2a, x_0 = 2b). \qquad \text{(iv)}$$

Ngoài ra, sử dụng các đại lượng bất biến (ii) và (iii), hãy thiết lập thêm những hệ thức liên quan đến các đại lượng $\sum_{i=1}^{4} S_i^2 + S_i'^2$, $\sum_{1\le i<j\le 4} X_i^2X_j^2$ và các đại lượng bất biến (ii), (iii) và (iv).

f) Đáp số của bài toán.

Hãy chứng minh rằng biểu thức đại số (**) của đại lượng biến thiên $s = s(x_1, x_1'; x_2, x_2'; x_3, x_3')$ của 6 biến x_i, x_i' $(i = 1, 2, 3)$ thực dương ràng buộc bởi các bất đẳng thức và đẳng thức điều kiện (i), (ii) và (iii) về các biến x_i, x_i', đạt cực đại s_M khi và chỉ khi $X_1 = X_2 = X_3$ và đạt cực tiểu s_m khi và chỉ khi, chẳng hạn: $X_1 = X_0 = 2a$ và $X_2 = X_3 = x_0 = 2b$. Từ đó mà thiết lập được các giá trị cực đại s_M và cực tiểu s_m theo a và b.

g) Vì nội dung bài toán cực trị đại số này chính là ngôn ngữ đại số của bài toán về cực trị hình học trong không gian được đề cập đến ở mục c) "chú thích" vừa mới nói ở trên (cụ thể là cực trị về diện tích toàn phần của một họ các hình bát diện $\mathcal{K}$ nội tiếp một mặt cầu (O, a) theo cách cấu tạo đã chỉ ra trong bài toán) nên giải bài toán này cũng tức là chúng ta đã giải bài toán cực trị hình học không gian bằng phương pháp đại số. Và do đó, đáp số chỉ ra ở đây cũng là đáp số của bài toán cực trị hình học không gian đó.

Bất biến, đơn biến và ứng dụng

Trần Nam Dũng

Tất cả rồi sẽ đổi thay, chỉ Tình yêu và Niềm tin là mãi mãi

Mở đầu

Bất biến là một trong những khái niệm trung tâm của toán học. Nó có mặt trong hầu hết các lĩnh vực của Toán học: Đại số, Hình học, Tô-pô, Lý thuyết số, Xác suất, Phương trình vi phân Ặ Chẳng hạn, các bất biến được sử dụng trong việc nghiên cứu các đồ thị phẳng (định lý Kuratowsky), giải tích hàm (chứng minh định lý về điểm bất động Brawer hay chứng minh hình cầu không đồng phôi với xuyến. Khó có định lý về phân loại (nhóm, đại số, đồ thị Ặ) nào lại thiếu sự có mặt của các bất biến. Có hẳn một lý thuyết bất biến nghiên cứu các dạng bất biến đại số của các biến đổi tuyến tính.

Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi. Chẳng hạn khi thực hiện phép tịnh tiến thì khoảng cách giữa hai điểm sẽ không thay đổi. Với phép vị tự thì khác: khoảng cách có thể sẽ thay đổi, nhưng sẽ có một bất biến khác, đó là tỷ lệ giữa hai đoạn thẳng.

Một ví dụ khác về bất biến: Lấy một số nguyên dương N (viết trong hệ thập phân). Phép biến đổi T biến N thành tổng các chữ số của N. Ví dụ: $1997 \to 26 \to 8 \to 8 \ldots$ Ặ Vậy có gì bất biến ở đây? Có đấy, tất cả các số $N, T(N), T(T(N)), \ldots$ Ặ đều có cùng số dư khi chia cho 8. Đó chính là bất biến.

Đơn biến, trái lại, là một đại lượng luôn thay đổi, nhưng chỉ theo một chiều (tức là tăng lên hay giảm xuống). Chúng ta sẽ định nghĩa một cách chặt chẽ về bất biến cũng như đơn biến trong các phần sau, ở đây chỉ dừng lại ở một số ví dụ.

Xét bộ số nguyên dương (a, b, c). Phép biến đổi T biến (a, b, c) thành $(|bc|, |ca|, |ab|)$. Khi đó có thể chứng minh được rằng hàm số

$$S(a, b, c) = a + b + c$$

là một hàm không tăng, tức là một đơn biến đối với phép biến đổi T.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu về bất biến, đơn biến và ứng dụng của chúng trong việc giải các bài toán Olympic. Có hai mẫu bài toán tổng quát thường được giải quyết bằng bất biến và đơn biến:

Bài 1. *Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Có hai trạng thái α và β thuộc Ω. Hỏi có thể dùng hữu hạn các phép biến đổi thuộc T để đưa trạng thái α về trạng thái β được không?*

Bài 2. *Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ωvào Ω. Cần chứng minh rằng, bắt đầu từ một trạng thái α bất kỳ, sau một số hữu hạn các phép biến đổi từ T, ta sẽ đi đến trạng thái kết thúc (trong nhiều trường hợp, đó là trạng thái ổn định, tức là sẽ không tiếp tục thay đổi khi tác động các phép biến đổi từ T, tình huống $T(8) = 8$ ở trên đây là một ví dụ).*

Bất biến và đơn biến sẽ giúp chúng ta giải quyết các tình huống căn bản này. Tất nhiên, các tình huống áp dụng sẽ muôn hình vạn trạng, nhưng cũng cần có những kiến thức cơ bản và lối tư duy chung để tiếp cận các vấn đề. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một số ví dụ đơn giản.

1 Các ví dụ mở đầu

Ví dụ 1. *Xét một bảng vuông 4×4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu $+$ hoặc dấu $-$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có 1 dấu $+$ và 15 dấu $-$. Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?*

Câu trả lời là không. Và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng -1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông (1, 15) sẽ chỉ đưa về các bảng vuông có số lẻ dấu -, có nghĩa là không thể đưa về bảng có toàn dấu cộng.

Ví dụ 2. *Trên bảng có các số $1/96, 2/96, 3/96, \ldots, 96/96$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng $a + b2ab$. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?*

Tôi rất thích ví dụ này. Khi đặt bài toán cho các học sinh, bạn nào cũng lắc đầu lè lưỡi vì đề bài yêu cầu tính toán quá nhiều. Hơn nữa, trong bài toán trên, thứ tự thực hiện các phép toán lại không được nói rõ, tạo ra một tình huống gần như không thể xử lý nổi.

Nhưng chính những khó khăn đó lại gợi mở ra cách giải. Ở đây tôi sẽ không trình bày cụ thể cách phân tích để tìm ra hướng giải. Chỉ biết rằng, khi lời giải được đưa ra, các bạn học sinh đều vô cùng bất ngờ và thích thú. Cũng từ sự thích thú này, việc đưa tiếp các ví dụ tiếp theo được đón tiếp một cách nồng nhiệt hơn hẳn.

Sau đây là lời giải đó.

Giả sử các số trên đang là $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ta cho tương ứng bảng này với

$$(2a_1 - 1)(2a_2 - 1)(2a_k - 1).$$

Khi đó, sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $(2a-1)(2b-1)$ và được thêm vào thừa số

$$2(a+b-2ab)-1=-(2a-1)(2b-1).$$

Do đó tích trên vẫn không đổi (chỉ đổi dấu). Vì tích ban đầu bằng 0 (do bảng ban đầu có chứa số $48/96=1/2$!) nên số cuối cùng s cũng phải cho tích số bằng 0, tức là $2s1=0$, suy ra $s=1/2$! Thật ấn tượng.

Kết quả không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện (điều này có thể dự đoán được qua cách đặt câu hỏi ở đề bài). Và lời giải mới ngắn gọn làm sao! Không cần một tính toán nào.

Ví dụ 3. *Cho 3 số nguyên không âm a,b,c bất kỳ. Mỗi một lần thực hiện, ta biến bộ (a,b,c) thành bộ $(|bc|,|ca|,|ab|)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta thu được bộ có chứa số 0.*

Đặt $M=\max\{a,b,c\}$. Ta chứng minh rằng nếu bộ (a,b,c) không chứa số 0 thì M sẽ giảm sau khi thực hiện phép biến đổi. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a\geqslant b\geqslant c$. Khi đó ta có

$$|bc|<b\leqslant a,\ \ |c-a|<a, |ab|<a,$$

suy ra

$$\max\{|bc|,|ca|,|ab|\}<a=\max(a,b,c).$$

Như vậy, nếu ta chưa thu được số 0 thì M sẽ nhỏ đi ít nhất một đơn vị (do tính chất của số nguyên). Quá trình này không thể kéo dài vô hạn. Vì thế, chắc chắn phải có lúc nào đó xuất hiện số 0.

Trong ví dụ trên, $\max\{a,b,c\}$ chính là một đơn biến. Đây là một phương pháp khá hiệu quả để chứng minh một quá trình là dừng.

Chú ý rằng phương pháp này thường sử dụng các tính chất cơ bản sau đây của số nguyên:

i) $m<n$ suy ra $m\leqslant n1$;

ii) Một tập con bất kỳ của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất (tính sắp thứ tự tốt).

Để thấy rõ điều quan trọng của các tính chất xem chừng rất đơn giản này, ta sẽ đưa ra ví dụ cho thấy rằng kết luận ở ví dụ 3 không còn đúng nếu a,b,c không còn là số nguyên (hay đúng hơn, không còn là số hữu tỷ).

Thật vậy, gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2x1=0$. Chọn các số $a=\alpha^2, b=\alpha, c=1$ thì ta có

$$|ab|=\alpha^2-\alpha=(\alpha-1)\alpha,\ \ |ac|=\alpha^21=(\alpha-1)(\alpha+1)=(\alpha-1)\alpha^2,\ \ |bc|=\alpha-1.$$

Suy ra bộ số mới tỷ lệ với bộ số cũ theo tỷ lệ $\alpha-1$. Và như thế, sau n lần thực hiện, bộ số của chúng ta sẽ là $(\alpha-1)n(\alpha^2,\alpha,1)$, không bao giờ chứa 0.

Ví dụ 4. *Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho trong mỗi viện, mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù.*

Đây cũng là một ví dụ mà tôi rất thích. Có nhiều cách giải khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách giải sử dụng đơn biến. Ý tưởng tuy đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng (trong nhiều bài toán phức tạp hơn).

Ta chia quốc hội ra thành 2 viện A, B một cách tùy ý. Với mỗi viện A, B, ta gọi $s(A), s(B)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thoả mãn yêu cầu, tức là vẫn có một nghị sĩ nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong viện của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử nghị sĩ x thuộc A có ít nhất 2 kẻ thù trong A. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau: chuyển x từ A sang B để được cách chia mới là $A = A \setminus \{x\}$ và $B = B \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A và A không còn chứa x nên ta có

$$s(A) \leqslant s(A)4$$

(trong tổng mất đi ít nhất 2 của $s(x)$ và 2 của các kẻ thù của x trong A).

Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B (hay B), cho nên

$$s(B) \leqslant s(B) + 2.$$

Từ đó $s(A) + s(B)$
$leqslants(A) + s(B)2$.

Như vậy nếu (A, B) là một cách chia chưa thoả mãn điều kiện thì ta có thể biến đổi A, B để có một cách chia mới có tổng $s(A) + s(B)$ nhỏ đi ít nhất 2 đơn vị. Rõ ràng quá trình này không thể thực hiện được mãi, có nghĩa là tồn tại cách chia $(A*, B*)$ mà ở đó không tồn tại nghị sĩ có quá 1 kẻ thù trong viện của mình, đó chính là đpcm.

Bất biến cũng có thể xuất hiện trong các bài toán về trò chơi. Trò chơi Nim là một ví dụ điển hình.

Ví dụ 5. *Có 3 đống sỏi có k, m, n viên sỏi. Hai người cùng chơi trò chơi sau: Người thứ nhất chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); sau đó đến lượt người thứ hai chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); và cứ như thế tiếp tục. Người nào đến lượt mình không thể bốc được nữa (tức là không còn viên sỏi nào) sẽ là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng.*

Ý tưởng của lời giải bài toán này là tìm một tính chất của bộ (k, m, n) sao cho với mọi cách bốc sỏi thành bộ (k, m, n), tính chất này sẽ bị mất đi, nhưng từ bộ (k, m, n) không có tính chất này, luôn tìm được một cách bốc để đưa về bộ mới có tính chất này.

Giả sử có một tính chất như vậy (giả sử là T) và giả sử bộ $(0, 0, 0)$ có tính chất T. Khi đó người đi trước sẽ thắng cuộc nếu bộ (k, m, n) ban đầu không có tính chất T và sẽ thua cuộc nếu bộ ban đầu có tính chất T.

Ta sẽ quay lại lời giải của bài toán này ở phần sau, nhưng trước hết ta giải thích về Ótính chất TÕ thông qua một trường hợp đơn giản của bài toán Nim.

Cụ thể, xét bài toán Nim trong trường hợp chỉ có hai đống sỏi. Khi đó ta nói bộ (m, n) có tính chất T nếu $m = n$. Rõ ràng $(0, 0)$ có tính chất T. Từ bộ (m, n) có tính chất T (tức là m=n), với mọi cách bốc sỏi, ta đều phá đi tính chất T của nó. Ngược lại, với bộ (m, n) không có tính chất T, ta luôn đưa được về bộ có tính chất T bằng cách bốc đi $|mn|$ viên sỏi ở đống sỏi có số sỏi nhiều hơn. Như thế tính chất T của chúng ta thoả mãn yêu cầu đề bài. Và như thế, nếu ban đầu hai đống sỏi có số sỏi khác nhau thì người thứ nhất thắng cuộc, còn nếu hai đống sỏi có số sỏi giống nhau thì người thứ hai thắng cuộc.

Cuối cùng, ta xét đến một ứng dụng của bất biến trong hình học

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng trong một đa diện lồi, luôn tồn tại ít nhất 1 đỉnh là đỉnh của một góc tam diện hoặc ít nhất một mặt là tam giác.*

Ví dụ này hơi lạ so với các ví dụ trước vì không có phép biến đổi nào. Thực ra, bất biến không chỉ xuất hiện ở những chỗ có các phép biến đổi mà nó còn xuất hiện khi ta xét một lớp các đối tượng thoả mãn những tính chất nào đó. Ví dụ với các điểm (x, y) nằm trên đường tròn đơn vị thì $x^2 + y^2$ là một bất biến. Còn với một đa diện lồi bất kỳ thì ta có công thức Euler nổi tiếng

$$V\text{-}E + F = 2,$$

trong đó V là số đỉnh, F là số mặt và E là số cạnh của một đa diện lồi bất kỳ.

Ta sẽ dùng công thức này để giải bài toán của chúng ta.

Giả sử ngược lại, tồn tại một đa diện mà không có đỉnh nào là đỉnh của một góc tam diện và không có mặt nào là tam giác. Khi đó, do một mặt sẽ có ít nhất 4 cạnh và một cạnh chỉ có thể là cạnh của hai mặt nên ta có $F \leqslant E/2$. Với lý luận tương tự, ta có $V \leqslant E/2$. Vì vậy $V + F\text{-}E \leqslant E/2 + E/2E = 0$, mâu thuẫn.

Cuối cùng, chúng ta sẽ kết thúc phần ví dụ mở đầu bằng phép chứng minh công thức Euler nêu trên. Qua chứng minh này có thể thấy sự xuất hiện của các phép biến đổi. Phép chứng minh này do Cauchy đưa ra khi ông chỉ mới 20 tuổi.

Remove one face of the polyhedron.

By pulling the edges of the missing face away from each other, deform all the rest into a planar network of points and curves, as illustrated by the first of the three graphs for the special case of the cube. (The assumption that the polyhedron is homeomorphic to the sphere at the beginning is what makes this possible.) After this deformation, the regular faces are generally not regular anymore Ó in fact, they are not even polygons. However, the numbers of vertices, edges and faces remain the same as those of the given polyhedron. (The removed face corresponds to the exterior of the network.)

If there is a face with more than three sides, draw a diagonal Ó that is, a curve through the face connecting two vertices that aren't connected yet. This adds one edge and one face and does not change the number of vertices, so it does not change the quantity $V - E + F$. Continue adding edges in this manner until all of the faces are triangular.

Apply repeatedly either of the following two transformations:

1. Remove a triangle with only one edge adjacent to the exterior, as illustrated by the second graph. This decreases the number of edges and faces by one each and does not change the number of vertices, so it preserves $V - E + F$.

2. Remove a triangle with two edges shared by the exterior of the network, as illustrated by the third graph. Each triangle removal removes a vertex, two edges and one face, so it preserves $V - E + F$.

Repeat these two steps, one after the other, until only one triangle remains.

At this point the lone triangle has $V = 3, E = 3$, and $F = 2$ (counting the exterior), so that $V - E + F = 2$. This equals the original $V - E + F$, since each transformation step has preserved this quantity. Therefore at the start of the process it was true that $V - E + F = 2$. This proves the theorem.

2 Bất biến và ứng dụng

Bây giờ ta sẽ đưa ra định nghĩa chặt chẽ cho một dạng bất biến mà ta sẽ sử dụng nhiều nhất trong các bài toán áp dụng, cũng như một số các khái niệm liên quan như quỹ đạo, bất biến toàn năng, hệ bất biến toàn năng.

Định nghĩa 1. *Cho Ω là một tập hợp các trạng thái. T là tập hợp các phép biến đổi từ Ω vào Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là bất biến trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu*

$$f(t(\omega)) = f(\omega), \forall \omega \in \Omega, \forall t \in T.$$

Như vậy, bất biến f có thể giúp chúng ta giải quyết trọn vẹn câu hỏi ÓBằng các phép biến đổi T, có thể đưa từ trạng thái ω_s về trạng thái ω_fÕ trong trường hợp mà $f(\omega_s) \neq f(\omega_f)$. Cụ thể câu trả lời sẽ là ÓkhôngÕ (như ở ví dụ 1). Tuy nhiên, nếu $f(\omega_s) = f(\omega_s)$ thì ta lại chưa có thể kết luận gì. Chính vấn đề này dẫn đến một khái niệm mới: bất biến toàn năng.

Định nghĩa 2. *Bất biến f đối với cặp (Ω, T) được gọi là bất biến toàn năng nếu:*

Trạng thái ω_f có thể đưa về từ trạng thái ω_s bằng các phép biến đổi T khi và chỉ khi $f(\omega_f) = f(\omega_s)$.

Bất biến toàn năng sẽ giúp chúng ta giải quyết trọn vẹn bài toán Óchuyển đượcÕ. Tuy nhiên, việc xây dựng một bất biến như vậy không đơn giản. Trong nhiều trường hợp, sẽ dễ dàng hơn khi chúng ta xét đến một hệ bất biến toàn năng.

Định nghĩa 3. *Hệ các bất biến $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ đối với cặp (Ω, T) được gọi là hệ bất biến toàn năng nếu: Trạng thái ω_f có thể đưa về từ trạng thái ω_s bằng các phép biến đổi T khi và chỉ khi $f_i(\omega_f) = f_i(\omega_s)$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Một khái niệm quan trọng khác có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu các bất biến, đó là khái niệm quỹ đạo. Trên Ω, ta đưa ra quan hệ Óchuyển đượcÕ như sau: Ta nói trạng thái ω_s có thể chuyển được về trạng thái ω_f bằng các phép biến đổi T nếu tồn tại một dãy các phép biến đổi $t_1, t_2, \ldots, t_m$ thuộc T sao cho

$$\omega_f = t_k(t_k - 1((t_1(\omega_s) \ldots))$$

Khi đó ta viết $\omega_s \rightarrow_T \omega_f$.

Trong nhiều trường hợp, quan hệ $\rightarrow_T$ có tính phản xạ (ω_s có thể đưa về ω_s bằng cách Ặ không làm gì cả), bắc cầu (thực hiện phép hợp các phép biến đổi) và đối xứng (nếu các phép biến đổi T là khả nghịch). Trong trường hợp đó $\rightarrow_T$ là một quan hệ tương đương và ta sẽ viết $\omega_s \equiv \rightarrow_T \omega_f$ thay vì $\omega_s \rightarrow_T \omega_f$. Với quan hệ tương đương này, Ω sẽ được chia thành các lớp tương đương, có đại diện là $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, ký hiệu là $\Omega_i = \{\omega | \omega \equiv \rightarrow_T \omega_i\}$. Ta gọi Ω_i là các quỹ đạo sinh bởi ω_i. Dễ thấy hai quỹ đạo bất kỳ hoặc trùng nhau, hoặc không giao nhau.

Ví dụ 7. *Trên tập hợp các hàm số, cho phép thực hiện các phép toán sau:*

1) Nhân hai hàm số đã có với nhau,

2) Cộng hai hàm số đã có với nhau,

3) Nhân hàm số với một hằng số thực.

Các phép toán trên tiếp tục có thể được thực hiện với các hàm đã có và các hàm kết quả thu được. Chứng minh rằng từ hai hàm số $f_1(x) = x + 1/x$ và $f_2(x) = x^2$, bằng các phép toán trên không thể thu được hàm số $f(x) = x$.

số phức

Lời giải. Ta thấy $f_1(i) = 0$ và $f_2(i) = -1$. Qua các phép biến đổi trên, số thực luôn biến thành số thực do đó nếu f là một hàm kết quả thì $f(i)$ là số thực. Vì thế, hàm số $f(x) = x$ không thể là một hàm kết quả.

Ví dụ 8. *Hình tròn được chia thành n ô. Trên mỗi ô có một viên sỏi. Mỗi một bước đi cho phép chọn hai viên sỏi và chuyển sang ô bên cạnh, một viên chuyển theo chiều kim đồng hồ, một viên chuyển ngược chiều kim đồng hồ. Với những giá trị nào của n thì có thể chuyển tất cả các viên sỏi về một ô sau một số hữu hạn lần thực hiện.*

Ví dụ 9. *Cho bảng vuông 4×4. Trên mỗi ô vuông người ta ghi dấu + hoặc dấu -. Mỗi phép biến đổi cho phép chọn một hàng hoặc một cột và đổi dấu tất cả các dấu trên đó.*

1) Có thể biến một bảng gồm 9 dấu cộng, 7 dấu trừ về bảng có toàn dấu cộng được không?

2) Tập trạng thái có bao nhiêu phần tử? Có bao nhiêu quỹ đạo?

3) Hãy tìm một hệ bất biến toàn năng của bài toán này.

3 Đơn biến và ứng dụng

Đơn biến là đại lượng mà luôn tăng hoặc luôn giảm trong quá trình biến đổi. Sau đây là định nghĩa chặt chẽ của đơn biến.

Định nghĩa 4. *Cho Ω là một tập hợp các trạng thái. T là tập hợp các phép biến đổi từ Ω vào Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{N}$ được gọi là đơn biến trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu*

$$f(t(\omega)) < f(\omega),\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in T.$$

Chú ý là dấu bằng đôi khi có thể thay thế bằng dấu $>, \geqslant, \leqslant$. Ngoài ra, tập đích $\mathbb{N}$ cũng có thể được thay thế bằng một tập hợp có thứ tự tốt bất kỳ.

Đơn biến được sử dụng trong việc chứng minh một quá trình là dừng. Chúng ta minh hoạ ứng dụng này thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 10. *Cho hàm số $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) $f(0,0) = 5^{2005}$, $f(0,n) = 0$ *với mọi số nguyên* $n \neq 0$,

ii) $f(m,n) = f(m-1,n) - 2\left[\dfrac{f(m-1,n}{2}\right] + \left[\dfrac{f(m-1,n-1}{2}\right] + \left[\dfrac{f(m-1,n+1}{2}\right]$
với mọi số tự nhiên
Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N sao cho

$$f(m,n) = f(m,n)\,\forall m, m \geqslant N,\ n \in\in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 11. *Cho $2n$ điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành n cặp sao cho các đoạn thẳng nối chúng không cắt nhau.*

Lời giải. Đầu tiên ta phân cặp các điểm một cách ngẫu nhiên và nối chúng lại với nhau. Gọi S là tổng các đoạn thẳng được nối (Chú ý rằng, do chúng ta có hữu hạn cách phân cặp nên tập giá trị của S là hữu hạn). Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O thì ta thay AB, CD bằng AC, BD. Vì

$$AB + CD = (AO + OB) + (CO + OD) = (AO + OC) + (BO + OD) > AC + BD$$

theo bất đẳng thức tam giác, nên nếu cặp đoạn thẳng nào đó giao nhau, ta có thể thay thế cách nối để S giảm xuống. Vì S chỉ có hữu hạn các giá trị nên một lúc nào đó quá trình phải dừng. Và khi đó, sẽ không có các cặp đoạn thẳng giao nhau.

4 Bài tập

1. Ở Vương quốc ÒSắc màu kỳ ảoÕ có 45 hiệp sĩ: 13 hiệp sĩ tóc đỏ, 15 hiệp sĩ tóc vàng, 17 hiệp sĩ tóc xanh. Khi hai hiệp sĩ có màu tóc khác nhau gặp nhau, tóc của họ sẽ lập

tức đổi sang màu thứ ba. Hỏi có thể có một lúc nào đó, tất cả các hiệp sĩ đều có màu tóc giống nhau?

2. Có 7 chiếc cốc đựng nước: chiếc cốc thứ nhất chứa 1/2 nước, chiếc cốc thứ hai chứa 1/3 nước, chiếc thứ ba chứa 1/4 nước, chiếc thứ tư chứa 1/5 nước, chiếc thứ năm chứa 1/8 nước, chiếc thứ sáu chứa 1/9 nước và chiếc thứ bảy chứa 1/10 nước. Cho phép đổ tất cả nước từ cốc này sang cốc khác hoặc đổ nước từ cốc này sanng cốc khác cho đến khi cốc chưa đầy. Có thể sau một số lần đổ nước, một chiếc cốc nào đó chứa

a) 1/12 nước b) 1/6 nước?

3. Có 1 bảng vuông $n \times n$. Trong $n-1$ ô của bảng có ghi các số 1, trong các ô còn lại ghi số 0. Cho phép thực hiện trên bảng phép biến đổi sau: chọn một ô, giảm số đang viết ở ô đó đi 1 đơn vị và tăng tất cả các số ở các ô cùng hàng, cùng cột với ô này lên một đơn vị. Hỏi có thể từ bảng ban đầu, sau một số phép biến đổi, thu được bảng gồm toàn các số bằng nhau?

4. Trên bảng có 4 số 3, 4, 5, 6. Mỗi một lần thực hiện cho phép xóa đi hai số x, y có trên bảng và thay bằng $x+y+\sqrt{x^2+y^2}, x+y-\sqrt{x^2+y^2}$. Hỏi sau 1 số hữu hạn bước thực hiện, trên bảng có thể xuất hiện 1 số nhỏ hơn 1 được không?

5. Trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người cùng thay phiên nhau bốc đi k viên kẹo, trong đó $k \in \{1, 2, 3\}$. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng? Cùng câu hỏi trên với $k \in \{1, 2, a\}$, là số nguyên dương cho trước.

6. Trên bảng có 1 số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu trên bảng ghi số 7^{1998}. Hỏi có thể sau một số số lần thực hiện như thế, thu được số 1998^7?

7. Số nguyên dương có 4 chữ số trên bảng có thể biến đổi thành một số có 4 chữ số khác theo quy tắc sau: hoặc cộng thêm 1 vào hai chữ số liên tiếp của nó, nếu hai chữ số này đều không bằng 9; hoặc trừ đi 1 từ hai chữ số liên tiếp của nó, nếu hai chữ số này đều không bằng 0. Hỏi bằng các phép biến đổi như vậy, có thể thu được số 2002 từ số 1234?

8. Hai người chơi trò chơi sau. Ban đầu có các số 1, 2, 3, 4. Mỗi một lần thực hiện, người thứ nhất cộng vào hai số cạnh nhau nào đó 1 đơn vị, còn người thứ hai đổi chỗ hai số cạnh nhau nào đó. Người thứ nhất thắng nếu sau một nước đi nào đó tất cả các số bằng nhau. Hỏi người thứ hai có thể cản trở người thứ nhất chiến thắng?

Tài liệu tham khảo

1. Tolpygo, *Bất biến*, *Kvant*, 12/1976

2. N.Agakhanov, *Olympic Toán toàn nước Nga*, Nhà xuất bản MCCME, 2007 (tiếng Nga).

3. A.Schen, *Trò chơi và chiến thuật dưới quan điểm toán học*, Nhà xuất bản MCCME, 2007.

4. Kin Y.Li, Mathematical Games (I), *Mathematical Excalibur, July-October* 2002.

Một số vấn đề của Toán rời rạc

Nguyễn Văn Tiến

Đặt vấn đề

Trong chuyên đề này ta sẽ xét các bài toán mà đối tượng nghiên cứu là các đại lượng rời rạc. Trong cuộc sống ta có thể hiểu các hiện tượng rời rạc là những hiện tượng mà giữa các thời điểm xuất hiện cần có một khoảng thời gian nào đó. Trong toán học ta có thể định nghĩa các đại lượng rời rạc như sau:

Định nghĩa 1. *Phần tử $x \in A$ được gọi là phần tử rời rạc của tập A nếu*

$$\exists \epsilon > 0, \textit{ đủ bé, sao cho } V(x;\epsilon) \cup A = \{x\}$$

trong đó ta ký hiệu $V(x;\epsilon) := (x-\epsilon; x+\epsilon)$ và gọi là $\epsilon-$ lân cậncủa điểm x.

Định nghĩa 2. *Tập A được gọi là tập rời rạc nếu nó chỉ gồm các phần tử rời rạc. Các phần tử của tập rời rạc cũng được gọi là các phần tử rời rạc nhau.*

Chẳng hạn các tập: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\overline{0..9} := \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, ... là những tập rời rạc.

Toán rời rạc nghiên cứu các tập rời rạc cũng như các phần tử của tập rời rạc.Vì các khái niệm của Giải tích như giới hạn, đạo hàm, nguyên hàm, tích phân cũng như các hàm số sơ cấp được học trong chương trình phổ thông chỉ được áp dụng cho các hàm số liên tục nên trong Toán rời rạc không thể áp dụng các phương pháp và kiến thức của giải tích (Trừ một số trường hợp đặc biệt.)

Toán học nghiên cứu và mô hình hoá thế giới thông qua các quan trắc. Các kết quả quan trắc thu được trong những thời điểm rời rạc nhau. Bởi vậy có thể nói Toán học chủ yếu là dựa trên cơ sở rời rạc. Tính liên tục của các sự kiện, hiện tượng xảy ra trong thế giới thực chất là một sự giả định, tiên đề, in - Prior của các nhà toán học mà không thể nào kiểm định được tính đúng - sai. Điều này cũng giống như ánh sánglà lưỡng tính: có cả tính chất sóng và tính chất hạt. Bởi vậy, trong những năm gần đây, nhất là khi Tin học có những thành tựu đáng kể và thời gian tính toán được cải thiện nhiều thì Toán rời rạc càng được quan tâm nhiều hơn.

Trong những năm cuối của thế kỷ XX, ở Mỹ cũng như nhiều nước Tây Âu đã đưa Toán rời rạc vào giáo trình giảng dạy trong nhà trường phổ thông của mình. Tuy nhiên, ở Việt Nam hiện nay, tuy các bài tập Toán rời rạc cũng thường được thấy trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp nhưng Toán rời rạc vẫn là một điểm yếu trong giảng dạy và học tập không những trong các trường phổ thông mà ngay cả ở các trường đại học. Không những đối với học sinh mà ngay cả đối với các thày cô giáo.

Hy vọng tài liệu này phần nào khắc phục được hiện tượng trên.

1 Phương pháp phản chứng

1.1 Tiểu dẫn

Phương pháp phản chứng có lẽ là một trong những phương pháp chứng minh sớm nhất mà loài người đã biết đến, đặc biệt trong nghệ thuật diễn thuyết và tranh luận. Trong Toán học, phương pháp phản chứng (FC hay là CM: Contra-Method) cũng là một phương pháp rất thường được sử dụng, đặc biệt khi cần chứng minh tính duy nhất của một đối tượng T nào đó thoả mãn điều kiện (*) cho trước(mà sự tồn tại của T đã được chứng minh trước đó) ta thường giả sử còn $\forall\, T' \neq T$, T' cũng thoả mãn điều kiện (*), từ đó suy ra một điều vô lý. Vậy điều giả sử của chúng ta là sai, tức là T duy nhất.

Các ví dụ minh hoạ xin xem thêm trong chứng minh các định lý hình học, SGK HH11).

1.2 Cơ sở lý thuyết

Cơ sở lý thuyết của phương pháp FC là các định luật trong Logic: Gọi p ; q ; r là các mệnh đề toán học nào đó thì:

Định lí 1 (*Các định luật cơ bản*). *1. (Phi mâu thuẫn):* $p \,\&\, \overline{p} \equiv F$
2. (Bài trung): p *hoặc* $\overline{p} \equiv T$

Định lí 2 (*Các định luật phản chứng*). *1. (Phản chứng):* $\models \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.
2. (Phản chứng suy rộng):

$$\models \quad (\begin{cases} p \\ q \end{cases} \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\begin{cases} p \\ \overline{r} \end{cases} \Rightarrow \overline{q}) \quad (\alpha)$$

3. $\models (p \Rightarrow q \,\&\, \overline{q}) \Rightarrow \overline{p}$.
4. $\models (\overline{q} \Rightarrow F) \Rightarrow q$.

Các định luật trên có thể được chứng minh chẳng hạn bằng phương pháp lập bảng giá trị chân lý hoặc phương pháp biến đổi tương đương.

Chẳng hạn, ta có thể chứng minh (α) như sau:

$$\begin{aligned}
(p \,\&\, q \Rightarrow r) &\Leftrightarrow \overline{p \,\&\, q} \text{ hoặc } r \quad (\text{do } a \Rightarrow b \Leftrightarrow \overline{a} \text{ hoặc } b)\\
&\Leftrightarrow \overline{p} \text{ hoặc } \overline{q} \text{ hoặc } r \quad (\text{do } \overline{a \,\&\, b} \Leftrightarrow \overline{a} \text{ hoặc } \overline{b})\\
&\Leftrightarrow (\overline{p} \text{ hoặc } \overline{\overline{r}}) \text{ hoặc } \overline{q} \quad (\text{giao hoán, kết hợp và } \overline{\overline{r}} \Leftrightarrow r)\\
&\Leftrightarrow \overline{p \& \overline{r}} \text{ hoặc } \overline{q}\\
&\Leftrightarrow (p \,\&\, \overline{r} \Rightarrow \overline{q}) \text{ (đpcm)}.
\end{aligned}$$

1.3 Nội dung phương pháp phản chứng

Để chứng minh khẳng định: $p \Rightarrow q \quad (\alpha)$ bằng phương pháp phản chứng ta giả sử q sai (tức là $\overline{q}$ là mệnh đề đúng). Nếu từ đó thu được một điều vô lý (vl) thì điều đó chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là q đúng $\boxtimes$.

Điều vô lý vl có thể thuộc một trong các dạng sau:

+) Điều trái với giả thiết p $(vl \equiv \overline{p})$.

+) Điều trái với một trong những kiến thức đã biết $(vl \equiv F)$.

+) Điều trái với giả sử phản chứng $(vl \equiv \overline{\overline{q}})$.

Khi xây dựng mệnh đề phản chứng $(\overline{q})$ ta cần nhớ:

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$.
2. $\overline{p \,\&\, q} \Leftrightarrow \overline{p}$ hoặc $\overline{q}$.
3. $\overline{p \text{ hoặc } q} \Leftrightarrow \overline{p} \,\&\, \overline{q}$.
4. $\overline{\forall x,\, p(x)} \Leftrightarrow \exists\, x,\, \overline{p(x)}$.
5. $\overline{\exists x,\, p(x)} \Leftrightarrow \forall\, x,\, \overline{p(x)}$.
6. $\forall x,\, p(x) \Leftrightarrow \overline{\exists}\, x,\, \overline{p(x)}$.
7. $\exists x,\, p(x) \Leftrightarrow \overline{\forall}\, x,\, \overline{p(x)}$.
8. Nếu $p(x) := f(x) \Re g(x) \quad (\alpha)$ thì $\overline{p(x)}$ là: $f(x) \overline{\Re} g(x)$ trong đó, $\Re$ và $\overline{\Re}$ được xác định như sau:

Nếu	$\Re$:	$=$	$\neq$	$>$	$\geqslant$	$<$	$\leq$
thì	$\overline{\Re}$:	$\neq$	$=$	$\leq$	$<$	$\geqslant$	$>$

Ngoài ra còn có:

Định lí 3 (*Định luật về âm bản*). *Cho A là một công thức Logic mà trong đó chỉ chứa các phép toán: Phủ định ; &; hoặc đối với các mệnh đề: $p_1; p_2; \cdots; p_n$. Âm bản của A, ký hiệu là A_d là một công thức thu được từ A bằng cách thay: $p_j \sim \overline{p_j}$; $\overline{p_j} \sim p_j$; hoặc $\sim$ & ; & $\sim$ hoặc . Khi đó:*

$$\models \overline{A} \Leftrightarrow A_d$$

1.4 Trình bày lời giải của phương pháp phản chứng

Bài toán: Chứng minh $p \Rightarrow q$.

Lời giải . Giả sử ngược lại, q sai, tức là $\overline{q}$.

Mà $\overline{q} \Rightarrow \cdots \Rightarrow vl$.

Vậy giả sử của ta là sai, tức là q đúng. $\boxtimes$

2 Thí dụ minh hoạ

Ví dụ 1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$. Giả sử $|a| + |b| + |c| > 17$ $(*)$. Chứng minh rằng:

$$\exists x \in [0; 1], \ |f(x)| > 1 \quad (1)$$

Lời giải . (phản chứng), Giả sử (1) sai, tức là:

$$\forall x \in [0; 1], \ |f(x)| \leqslant 1 \quad (\bar{1})$$

Chọn $x = 0; \frac{1}{2}; 1$, từ $(\bar{1})$ ta được: $|c| \leqslant 1$ và:

$$\begin{cases} |a + b + c| \leqslant 1 \\ |\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow |a| + |b| + |c| \leqslant 17$$

Đó là điều vô lý (trái với (*)). Vậy điều giả sử của ta là sai, tức là (1) đúng.⊠

Ví dụ 2. Chứng minh rằng tập các số nguyên tố P là tập vô hạn.

Lời giải . (phản chứng) Giả sử ngược lại, tập P là hữu hạn. Giả sử $P = \{p_1; p_2; \cdots; p_n\}$. Khi đó, tồn tại số nguyên tố lớn nhất. Gọi đó là p_n. Tức là:

$$p_n \in P \ \& \ \forall p \in P, \ p \leqslant p_n.$$

Xét số $x = p_1.p_2.\cdots.p_n + 1$. Ta có, $x \in \mathbb{N}$; x không chia hết cho các số $p_1; p_2; \cdots; p_n$ (vì nếu $x \vdots p_j$ nào đó thì $1 \vdots p_j$: vô lý). Vậy $p \in P$. Mà hiển nhiên, $x > p_n$. Đó là điều vô lý (trái với cách chọn p_n). Vậy điều giả sử của ta là sai, tức là P hữu hạn.⊠

Ví dụ 3. Có thể chia các số tự nhiên từ 1 đến 21 thành các nhóm đôi một rời nhau sao cho trong mỗi nhóm số lớn nhất bằng tổng của các số còn lại hay không?.

Lời giải . Giả sử chia được. Khi đó tổng các số ở mỗi nhóm là một số chẵn (bằng hai lần số lớn nhất). Vậy tổng của tất cả 21 số đã cho là số chẵn (vì các nhóm đôi một rời nhau và tổng của các số chẵn là số chẵn). Nhưng tổng của 21 số đó là 21.11=231 là số lẻ. Điều vô lý đó chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là không chia được thành các nhóm thoả mãn yêu cầu bài ra.⊠

Ví dụ 4. Có thể tìm được hay không 5 số nguyên sao cho các tổng của hai số một trong 5 số đó lập thành 10 số nguyên liên tiếp?.

Lời giải . Giả sử tìm được 5 số như vậy, gọi s là tổng của 5 số đó và n là giá trị nhỏ nhất của tổng các cặp hai số. Khi đó 10 số nguyên liên tiếp nói trong đề bài là $n, \ n+1, \ \cdots, \ n+9$. Ta tính tổng $\mathcal{T}$ của 10 số đó theo hai cách khác nhau: Một mặt, $\mathcal{T} = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+9) = 5(2n+9)$. Mặt khác , $\mathcal{T} = 4s$ (do trong $\mathcal{T}$ mỗi số đã cho có mặt đúng 4 lần). Từ đó suy ra $4s = 5(2n+9)$ là điều vô lý. Vậy giả sử ban đầu là sai, tức là không thể chọn được 5 số thoả mãn yêu cầu bài ra.

Ví dụ 5. Cho ba điểm A, B, C phân biệt trên mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu tồn tại điểm G thuộc mặt phẳng đó thoả mãn

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

thì điểm G đó là duy nhất.

Ví dụ 6. (Mở rộng của ví dụ 5) Trên mặt phẳng cho n điểm phân biệt $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ và n số thực $m_1,\ m_2,\ \cdots m_n$ thoả mãn $m_1+m_2+\cdots+m_n := m \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm T thoả mãn:

$$m_1\overrightarrow{TA_1}+m_2\overrightarrow{TA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{TA_n}=\overrightarrow{0}.$$

Ví dụ 7. (IMO 1982) Cho phương trình $x^3-3xy^2+y^3=n\quad(1),\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

1) Chứng minh rằng nếu (1) có nghiệm nguyên thì nó không có nghiệm nguyên duy nhất.

2) Tìm nghiệm nguyên của (1) khi $n=2005$.

Lời giải .

1) Dễ dàng biến đổi:

$$x^3-3xy^2+y^3=(y-x)^3-3(y-x)x^2+(-x)^3=(-y)^3-3(-y)(x-y)^2+(x-y)^3.$$

Từ đó ta có: nếu $(x;y)$ là một nghiệm của (1) thì $(y-x;-x)$, $(-y;x-y)$ cũng là các nghiệm của (1). Ba nghiệm này đôi một khác nhau vì nếu có hai nghiệm nào đó bằng nhau thì ta có $x=y=0$ là điều vô lý do $n>0$.

Vậy nếu (1) có nghiệm thì nó có ít nhất ba nghiệm phân biệt, tức là (1) không thẻ có nghiệm duy nhất.$\boxtimes$

2) Với $n=2005$ giả sử (1) có nghiệm $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$. Ta viết các nghiệm theo $\mod 3$, phương trình đã cho trở thành

$$x^3+y^3=-1\pmod 3\Rightarrow x+y=-1\pmod 3.$$

Do vậy ta có các trường hợp sau:

(i) $x\equiv 0\pmod 3$ và $y\equiv -1\pmod 3$;

(ii) $x\equiv 1\pmod 3$ và $y\equiv 1\pmod 3$;

(iii) $x\equiv -1\pmod 3$ và $y\equiv 0\pmod 3$.

Trong trường hợp (i) đặt $x=3m,\ y=3n-1$, thay vào phương trình đã cho ta được $VT\equiv -1\pmod 9$ còn $VP=2005\equiv -2\pmod 9\Rightarrow$ vô lý.

Trong trường hợp (ii), do $(y-x;-x)$ cũng là nghiệm, mà $y-x\equiv 0\pmod 3$ và $-x\equiv -1\pmod 3$ nên ta cũng thu được một điều vô lý. Tương tự, từ trường hợp (iii) ta cũng thu được điều vô lý.

Vậy với $n=2005$ phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 8. (Từ IMO 83) Tìm tất cả những hàm số $f(x):\ \mathbb{R}^+\longmapsto\mathbb{R}^+$, là toàn ánh và thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) $f(xf(y))=yf(x),\ \forall\, x,\ y\in\mathbb{R}^+$.

2) $f(x)\to 0$ khi $x\to+\infty$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thoả mãn yêu cầu bài ra.

Do $f(x)$ là toàn ánh và $1\in\mathbb{R}^+$ nên $\exists\, y_0\in\mathbb{R}^+:\ f(y_0)=1$. Trong 1) cho $x=1,\ y=y_0$ được

$$f(1)=f(1.1)f(1.f(y_0))=y_0f(1)\Rightarrow y_0=1\ \ (\text{do } f(1)>0)\Rightarrow y_0=1\Rightarrow f(1)=1.$$

Vậy $f(x)$ có một điểm bất động là $x = 1$. Ta sẽ chứng minh đó là điểm bất động duy nhất. Thật vậy, giả sử $f(x)$ có hai điểm bất động x, y phân biệt, khi đó ta có:

(i) $f(xy) = f(xf(y)) = yf(x) = yx = xy \Rightarrow xy$ cũng là điểm bất động của $f(x)$.

(ii) $1 = f(1) = f(\frac{1}{x}f(x)) = xf(\frac{1}{x}) \Rightarrow \frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động của $f(x)$.

Giả sử $f(x)$ còn có điểm bất động $x \neq 1$, khi đó, theo (ii) $f(x)$ còn có điểm bất động $\frac{1}{x}$. Trong hai số đó phải có một số > 1. Giả sử $x > 1$. Theo (i) $f(x)$ sẽ có vô số điểm bất động $x_n = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có dãy đối số $(x_n) \to +\infty$ (do $x > 1$), do đó dãy hàm $(f(x_n)) = (x_n) \to +\infty$. Điều đó trái với 2): $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$.

Vậy giả sử của ta là sai, tức là $f(x)$ có duy nhất một điểm bất động là $x = 1$.

Nhưng trong (i) cho $y = x$ ta được $f(xf(x)) = xf(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow xf(x)$ cũng là điểm bất động của $f(x)$. Vậy ta phải có

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ : \ xf(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$$

Dễ thấy hàm số này thoả mãn các điều kiện của bài ra. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm số cần tìm.

Ví dụ 9. (Từ IMO 83) Cho các số a, b, $c \in \mathbb{N}^*$, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng phương trình

$$xbc + yca + zab = 2abc - ab - bc - ca \quad (1)$$

không có nghiệm tự nhiên.

Lời giải . Giả sử (1) có nghiệm $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$.

Từ (1) ta có $(z+1)ab \,\vdots\, c$. Mà $(a, c) = (b, c) = 1 \Rightarrow z + 1 \,\vdots\, c$, mà $z + 1 > 0$ nên từ đó có $z + 1 \geqslant c$.

Tương tự, có $x + 1 \geqslant a$, $y + 1 \geqslant b$. Từ các đánh giá này ta được

$$VT(1) \geqslant (a-1)bc+(b-1)ca+(c-1)ab = 3abc-ab-bc-ca > 2abc-ab-bc-ca = VP(1)$$

Điều vô lý này chứng tỏ giả sử của ta là sai, tức là phương trình (1) không có nghiệm tự nhiên. ⊠

Ví dụ 10. (Putnam 1998) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, b, c, luôn tìm được số nguyên dương n sao cho số

$$f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$$

không phải là số chính phương.

Lời giải . Ta cần chứng minh mệnh đề sau:

$$\forall\, (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \text{ không phải là số chính phương.} \quad (p)$$

Nhận xét rằng mọi số chính phương đều $\equiv 0 \pmod 4$ hoặc $\equiv 1 \pmod 4$.

Giả sử (p) là mệnh đề sai, tức là:

$$\exists\, (a; b; c) \in \mathbb{Z}^3,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \text{ là số chính phương.} \quad (\overline{p})$$

Đặc biệt, từ đó có:

$$\begin{cases} f(1) &= a+b+c+1 \quad \text{là số chính phương}(i) \\ f(2) &= 4a+2b+c+8 \quad \text{là số chính phương}(ii) \\ f(3) &= 9a+3b+c+27 \quad \text{là số chính phương}(iii) \\ f(4) &= 16a+4b+c+64 \quad \text{là số chính phương}(iv) \end{cases}$$

Từ (i) và (iv) ta có $f(4) - f(2) = 2b \pmod 4$.
Mà $2b$ là số chẵn, còn theo nhận xét thì:
$f(4) - f(2)$ chỉ có thể $\equiv 0,\ 1,\ -1 \pmod 4 \Rightarrow 2b \equiv 0 \pmod 4$.
Từ (ii) và (iii) ta có $f(3) - f(1) \equiv (2b+2) \pmod 4$.
Tương tự trên ta cũng có $2b + 2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod 4$ là điều vô lý. Vậy giả sử của ta là sai, tức là (p) là mệnh đề đúng.⊠

3 Phương pháp cực hạn.

3.1 Tiểu dẫn

Một trong những lời khuyên đối với người làm Toán là:

"Hãy xét các trường hợp đặc biệt"

Khái niệm trường hợp đặc biệt có thể hiểu theo nhiều góc độ:

1. Đối với một đa giác, các điểm đặc biệt là những điểm thuộc cạnh (điểm biên), các đỉnh (điểm cực biên) hoặc các điểm mà tại đó có một đặc trưng nào đó của hình đạt giá trị đặc biệt ($= 0$; $=\infty$; không xác định ; đạt Min ; đạt Max ;v.v...), thí dụ điểm trọng tâm của hình.

2. Đối với một tập hợp sắp thứ tự, các điểm đặc biệt là những phần tử lớn nhất hoặc phần tử nhỏ nhất của tập hợp.

3. Trên trục số có ba điểm đặc biệt là 0 ; $+\infty$; $-\infty$.

4. Đối với một bài toán có điều kiện, các trường hợp đặc biệt xảy ra khi các biến có mặt bằng nhau hoặc xảy ra dấu bằng trong các đánh giá của điều kiện.

5. Đối với một hàm số, các điểm đặc biệt là những điểm mà tại đó hàm số không xác định, hoặc $= 0$, hoặc đạt cực trị, v.v...

6. Đối với một đường cong, đó là các điểm gián đoạn, điểm cực trị, điểm uốn, điểm biên, điểm tự cắt, v.v...

7. Khi tìm quỹ tích, tập hợp điểm ta thường xét các vị trí đặc biệt của điểm chạy, từ đó tìm ra các vị trí tương ứng của điểm thuộc quỹ tích và dự đoán quỹ tích.

8. Trong Tâm thần học, Kinh tế học có một có một biện pháp chữa trị được gọi là "Liệu pháp sốc", đó chính là phương pháp đưa hệ thống đang xét về trạng thái khủng hoảng (đặc biệt) có kiểm soát.

Các điểm, trường hợp đặc biệt nói trên được gọi chung là các điểm cực hạn.

Tóm lại, điểm cực hạn là điểm mà tại đó một đặc trưng nào đó của đối tượng đang xét đạt khủng hoảng, hay là có thay đổi về chất. Tuỳ theo trường hợp mà điểm cực hạn có các tên gọi khác nhau. Chẳng hạn: "Điểm chuyển pha" trong Vật lý, "Điểm kỳ dị" trong lý thuyết hàm phức, "Điểm tới hạn" khi xét sự biến thiên của hàm số, "Điểm gián đoạn" khi xét tính liên tục của hàm số, "Hố đen" trong Thiên văn học (nhân tiện nói thêm là mới đây, tác giả của khái niệm "Hố đen", nhà Vật lý kiệt xuất người Anh là Hawkins đã phủ định khái niệm này) v.v....

Các điểm cực hạn của một hệ thống có một vai trò quan trọng trong việc khảo sát hệ thống đó, bởi vậy trong những thập kỷ cuối của thế kỷ XX đã xuất hiện một lý thuyết gọi là lý thuyết khủng hoảng hoặc lý thuyết về các điểm kỳ dị.

3.2 Cơ sở lý thuyết

Ta sẽ chỉ xét một số trường hợp đặc biệt, riêng của điểm cực hạn. Muốn vậy, trước hết phải chỉ ra sự tồn tại của nó.

Định lí 4. *(Về sự tồn tại điểm cực hạn của tập hợp)*
Trong tập gồm hữu hạn phần tử là các số luôn tồn tại phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

Định lý trên là trường hợp đặc biệt của

Định lí 5. *Xét tập $\mathcal{A}$ gồm hữu hạn phần tử. Mỗi phần tử $x \in \mathcal{A}$ được đặt tương ứng với một trạng thái $f(x)$ nào đó của nó. Khi đó, nếu mỗi trạng thái $f(x)$ có một đặc trưng $P(f(x))$ và tập các đặc trưng: $\{P(f(x)) \mid x \in \mathcal{A}\}$ có thể sắp thứ tự thì tồn tại*

$$\underset{x\in}{Min} P(f(x)) \quad \text{và} \quad \underset{x\in}{Max} P(f(x))$$

Hệ quả 1: Nếu vai trò của các chỉ số trong tập gồm n số: $x_1; x_2; \cdots; x_n$ là như nhau thì luôn có thể giả sử:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

Một trong những ứng dụng của điểm cực hạn là nguyên lý nổi tiếng của Pontriagin:

Nếu $\exists \underset{x\in}{Min} f(x)$; $\underset{x\in}{Max} f(x)$ thì các giá trị Min ; Max đó thường đạt tại những điểm cực hạn của $\mathcal{A}$

3.3 Nội dung phương pháp

Khi khảo sát một tính chất nào đó của các phần tử của tập $\mathcal{A}$ ta có thể xét tính chất đó tại điểm cực hạn $x \in \mathcal{A}$. Do x là điểm cực hạn nên ta có thêm những thông tin (điều kiện) phụ đối với x. Từ các kết quả của việc khảo sát tại những điểm cực hạn ta có thể dự đoán kết quả chung cho các phần tử $\in \mathcal{A}$.

3.4 Thí dụ minh hoạ

Ví dụ 1. (ĐN-IMO 1983) Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0 \quad (1)$$

Lời giải . Giả sử $a = max\{a;b;c\} \Rightarrow a-b\geqslant 0$; $a-c\geqslant 0$. Ta có:

$$VT(1) \stackrel{?}{=} a(b+c-a)(b-c)^2+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geqslant 0 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 2. (ĐS: 150; VĐCHLBĐức) Cho $a,b,c\in[0;1]$. Tìm Max của:

$$F=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{a+c+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải . Giả sử $a = max\{a;b;c\}$. Khi đó:

$$\frac{b}{a+c+1}\leqslant\frac{b}{b+c+1};\ \frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{c}{b+c+1}\quad(\alpha)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, có

$$(1-b)(1-c)(1+b+c)\leqslant\left(\frac{1-b+1-c+1+b+c}{3}\right)^3=1$$

$$\Rightarrow (1-b)(1-c)\leqslant\frac{1}{b+c+1}\quad(\text{do } 1+b+c>0)$$

Từ đó có:

$$(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\frac{1-a}{b+c+1}\quad(\beta)\quad(\text{do } 1-a\geqslant 0)$$

Từ (α) ; (β) có:

$$\begin{aligned}F&\leqslant\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{b+c+1}+\frac{1-a}{b+c+1}\\&=\frac{a+b+c+1-a}{b+c+1}\\&=1\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi $a=b=c=0\in[0;1]$. Vậy $Max\,F=1$.⊠

Ví dụ 3. Chứng minh rằng bốn hình tròn có các đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín miền tứ giác đó.

Lời giải . Gọi M là một điểm bất kỳ nằm trong miền tứ giác $ABCD$. Ta có:

$$\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360^o\quad(\text{tính chất tứ giác lồi})$$

Do đó, góc lớn nhất trong bốn góc này sẽ $\geqslant 90^o$. Giả sử $\widehat{BMC} \geqslant 90^o$. Khi đó, M nằm trong hình tròn đường kính BC. Từ đó có ⊠ .

Ví dụ 4. Trên đường thẳng cho tập $\mathbf{X}$ gồm các điểm sao cho mỗi điểm $M \in \mathbf{X}$ là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $\in \mathbf{X}$. Chứng minh rằng tập $\mathbf{X}$ là vô hạn.

Lời giải . Giả sử tập $\mathbf{X}$ là hữu hạn, khi đó tồn tại điểm B là biên của $\mathbf{X}$, nhưng B khi đó không thể là trung điểm của hai điểm $\in \mathbf{X}$, vậy giả sử sai, tức là tập $\mathbf{X}$ là vô hạn. ⊠

Ví dụ 5. Trên mặt phẳng cho tập $\mathbf{X}$ gồm các điểm sao cho mỗi điểm $M \in \mathbf{X}$ là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $\in \mathbf{X}$. Chứng minh rằng tập $\mathbf{X}$ là vô hạn.

Ví dụ 6. Tại mỗi ô của một bảng ô vuông vô hạn viết một số sao cho mỗi số được viết bằng trung bình cộng của bốn số kề với nó. Chứng minh rằng tất cả các số được viết đều bằng nhau.

Ví dụ 7. Trên một bàn cờ quốc tế cỡ $n \times n$ đặt các quân xe thoả mãn điều kiện sau: nếu có một ô nào đó không có quân xe thì tổng số các quân xe đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng trên bàn cờ có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ quân xe.

Lời giải . Tồn tại một đường (hàng hoặc cột, giả sử là hàng) có số quân xe nhỏ nhất (giả sử là k quân xe). Nếu $k \geqslant \frac{n}{2}$ thì tổng số các quân xe S thoả mãn $S \geqslant n.\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$.

Nếu $k < \frac{n}{2}$ thì trên đường đang xét còn $n-k$ ô trống. Trong mỗi cột của $n-k$ cột đi qua những ô trống đó có $\geqslant n-k$ quân xe và tổng số các quân xe như vậy là $\geqslant (n-k)^2$. Trong k cột còn lại có $\geqslant k^2$ quân xe. Mặt khác, dễ thấy:

$$[(n-k)^2 + k^2] - \frac{n^2}{2} = 2(\frac{n}{2} - k)^2 \geqslant 0.$$

Từ đó suy ra ⊠ .

Ví dụ 8. Một nước có 80 sân bay mà khoảng cách giữa các cặp sân bay bất kỳ đều khác nhau và không có ba sân bay nào thẳng hàng. Cùng một thời điểm từ mỗi sân bay có một chiếc sân bay cất cánh và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

Lời giải . Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì MN là cạnh lớn nhất trong tam giác OMN vì vậy $\angle MON$ là góc lớn nhất trong tam giác OMN và do đó $\angle MON > 60^o$. Giả sử O là sân bay có số máy bay bay đến là nhiều nhất ($= n$) và các máy bay đó bay đến từ các sân bay $M_1, M_2, \cdots, M_n$. (Tên của các sân bay được đặt sao cho các tia $[OM_i)$ và $[OM_{i+1})$ là kề nhau và được xếp ngược chiều kim đồng hồ, $M_{n+1} := M_1$.). Do không có ba sân bay nào thẳng hàng nên ta sẽ được n góc $\angle M_iOM_{i+1}$ có tổng bằng 360^0. Góc nhỏ nhất trong số các góc đó phải $\leqslant \frac{360^o}{n}$. Nhưng theo trên, góc đó phải $> 60^o$. Từ đó ta có:

$$\frac{360^o}{n} > 60^o \Rightarrow n < 6 \Rightarrow n \leqslant 5. \boxtimes .$$

Từ chứng minh trên ta thấy điều kiện không có ba sân bay nào thẳng hàng có thể bỏ qua.

Ví dụ 9. Một quốc gia có 2005 thành phố. Giữa hai thành phố bất kỳ đều có đường nối với nhau. Độ dài của các con đường đó đôi một khác nhau. Từ một thành phố A nào đó ta đi đến thành phố B khác theo con đường ngắn nhất. Từ B ta lại đi đến thành phố C khác theo con đường ngắn nhất khác với con đường vừa đi. Cứ như vậy cho đến khi không thể đi tiếp theo quy tắc đó nữa. Hỏi trên đường đi có thành phố nào được đi qua hai lần hay không?

Lời giải . Biểu diễn các thành phố bởi các điểm A_j, $(j \in \overline{1..2005}$ trên mặt phẳng. Giả sử ta xuất phát từ điểm A_1 và đi đến điểm A_2. Khi đó A_1A_2 là đoạn ngắn nhất trong các đoạn A_1A_j và A_2 là duy nhất. Xét các đoạn A_2A_j và tìm đoạn ngắn nhất trong số các đoạn đó. Có thể xảy ra hai khả năng:

Khả năng 1: $\underset{j\in\overline{1..2005}, j\neq 2}{\underline{\text{Min}}} A_2A_j = A_2A_1$. Khi đó đường đi kết thúc tại A_2 và không có thành phố nào được đi qua hai lần.

Khả năng 2: $\underset{j\in\overline{1..2005}, j\neq 2}{\underline{\text{Min}}} A_2A_j = A_2A_3$. Khi đó A_3 là duy nhất và $A_2A_3 < A_2A_1$. Ta đi tiếp đến điểm A_3. Đối với điểm A_3 ta cũng làm như vậy. Giả sử đường đi kết thúc tại điểm A_n thì theo lập luận trên, mỗi điểm A_k, $(k \in \overline{1..n})$ được chọn một cách duy nhất và

$$A_1A_2 > A_2A_3 > \cdots > A_iA_{i+1} > \cdots > A_{n-1}A_n.$$

Giả sử trên đường đi ta đi qua điểm A_i hai lần, thế thì đường đi trên chứa một đường gấp khúc khép kín:

$$A_iA_{i+1}A_{i+2}\cdots A_mA_i.$$

Theo nhận xét trên ta có:

$$A_iA_{i+1} > A_{i+1}A_{i+2} > \cdots > A_{m-1}A_m > A_mA_i \Rightarrow A_iA_{i+1} > A_iA_m.$$

Đó là điều vô lý (trái với cách chọn điểm A_{i+1} là điểm duy nhất có khoảng cách ngắn nhất tới A_i.

Vậy trên đường đi không có thành phố nào được đi qua hai lần.

4 Nguyên lý Dirichlet.

4.1 Tiểu dẫn

Phương pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet là phương pháp mà học sinh được làm quen sớm nhất (từ tiểu học) và là một trong những phương pháp thể hiện rõ cái đẹp của Toán học, làm cho học sinh thêm yêu thích môn toán. Lập luận của phương pháp Dirichlet thường được sử dụng trong các bài toán cho học sinh giỏi và dùng để chứng minh sự tồn tại một khả năng nào đó mà không cần chỉ rõ khả năng đó tồn tại khi nào, ở đâu và có bao nhiêu khả năng như vậy tồn tại. Phương pháp chứng minh như vậy còn được gọi là phương pháp chứng minh không kiến thiết.

4.2 Cơ sở lý thuyết

Định lí 6. **(Nguyên lý Dirichlet. Peter Gustav Lejeune Dirichlet là nhà toán học người Đức, 1805-1059)**

Có n phần tử được xếp hết vào m tập hợp. Khi đó, tồn tại (có ít nhất một) tập hợp chứa không ít hơn ($\geqslant$) $\frac{n}{m}$ phần tử. Hay là:

$$\models \mathcal{A} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j \Rightarrow \exists \mathcal{A}_k,\ k \in \overline{1;m},\ |\mathcal{A}_k| \geqslant \frac{|\mathcal{A}|}{m}$$

Vì số phần tử của một tập hợp $\mathbf{X}$, ký hiệu là $|\mathbf{X}|$, phải là số tự nhiên nên ta hiểu khái niệm: $|\mathbf{X}| \geqslant \frac{n}{m}$ như sau:

+) Nếu $\frac{n}{m} = k \in \mathbb{N}$ $\quad (n \,\vdots\, m)$ thì:

$$|\mathbf{X}| \geqslant \frac{n}{m} \Leftrightarrow |\mathbf{X}| \geqslant k \ (= \frac{n}{m})$$

+) Nếu $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$ $\quad$ (n không $\vdots$ m) thì:

$$|\mathbf{X}| \geqslant \frac{n}{m} \Leftrightarrow |\mathbf{X}| \geqslant \left[\frac{|\mathcal{A}|}{m}\right] + 1$$

(ta ký hiệu $[x] :=$ phần nguyên của số $x \in \mathbb{R}$).

Để dễ nhớ, nguyên lý trên còn được phát biểu như sau:

Có n con thỏ được nhốt hết vào m cái lồng. Khi đó, tồn tại (có ít nhất một) lồng chứa không ít hơn ($\geqslant$)$\frac{n}{m}$ con thỏ.

Đặc biệt, nếu số thỏ nhiều hơn số lồng ($n > m$) thì tồn tại lồng chứa ít nhất hai con thỏ.

Thường ta chỉ xét trường hợp $n \geqslant m$.

Lời giải . (phản chứng) Giả sử ngược lại, tức là: $\forall \mathcal{A}_j,\ j \in \overline{1;m},\ |\mathcal{A}_j| < \frac{|\mathcal{A}|}{m}$ $\quad (i)$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}| &= |\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j| \\
&= \sum_{j=1}^{m} |\mathcal{A}_j| \\
&< \sum_{j=1}^{m} \frac{|\mathcal{A}|}{m} \qquad \text{(theo } (i)\text{)} \\
&= m.\frac{|\mathcal{A}|}{m} = |\mathcal{A}|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\mathcal{A}| < |\mathcal{A}| \quad \text{là điều vô lý.}$$

Vậy giả sử của ta là sai, tức là: $\exists \mathcal{A}_k,\ k \in \overline{1;m},\ |\mathcal{A}_k| \geqslant \dfrac{|\mathcal{A}|}{m}$. (đpcm)

Hệ quả: Nếu $\mathcal{A}$ là tập vô hạn và $\mathcal{A}$ được phân hoạch thành hữu hạn các tập con $\mathcal{A}_j$ thì có ít nhất một tập con cũng là tập vô hạn.

4.3 Nội dung phương pháp

Để sử dụng nguyên lý Dirichlet ta phải làm xuất hiện tình huống nhốt "thỏ" vào "chuồng" thoả mãn các điều kiện:

+) Số "thỏ" phải nhiều hơn số chuồng.

+) "Thỏ" phải được nhốt hết vào các "chuồng", nhưng không bắt buộc là "chuồng" nào cũng phải có "thỏ".

Thường phương pháp Dirichlet được áp dụng kèm theo phương pháp phản chứng.

Chú ý:Có nhiều bài tập có kết luận "giống như" kết luận của nguyên lý Dirichlet, tuy nhiên, lời giải hoàn toàn không sử dụng nguyên lý Dirichlet.

4.4 Thí dụ minh hoạ

Ví dụ 1. Trong hình vuông có cạnh bằng 1 đặt 51 điểm bất kỳ, phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất ba trong số 51 điểm đó nằm trong một hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$.

Lời giải . Chia hình vuông đã cho thành 25 hình vuông con bằng nhau có cạnh bằng $\frac{1}{5}$. Theo nguyên lý Dirchlet, tồn tại ít nhất một hình vuông con (α) chứa ít nhất ba trong số 51 điểm đã cho. Đường tròn ngoại tiếp (α) có bán kính là $\dfrac{1}{5\sqrt{2}} < \dfrac{1}{7}$. Vậy ba điểm nói trên nằm trong hình tròn đồng tâm với đường tròn ngoại tiếp (α) có bán kính là $\frac{1}{7}$. (đpcm)

Ví dụ 2. Trong hình tròn (C) có diện tích bằng 8 đặt 17 điểm phân biệt, bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất ba điểm tạo thành một tam giác có diện tích bé hơn 1.

Lời giải . Chia hình tròn (C) thành 8 hình quạt bằng nhau, mỗi hình quạt có diện tích bằng 1. Theo nguyên lý Dirchlet, tồn tại ít nhất một hình quạt (α) chứa ít nhất ba trong số 17 điểm đã cho. Tam giác có ba đỉnh là ba điểm đó nằm trọn trong hình quạt (α) nên có diện tích nhỏ hơn diện tích của hình quạt, tức là bé hơn 1. ⊠

Ví dụ 3. Chọn 5 người bất kỳ. Chứng minh rằng có ít nhất hai người có cùng số người quen trong số 5 người đã chọn.

Ví dụ 4. Trong một giải vô địch bóng đá có 10 đội tham gia. Hai đội bất kỳ phải thi đấu với nhau đúng một trận. Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của giải luôn có hai đội đã có số trận đấu bằng nhau.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng từ 12 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được hai số có hiệu chia hết cho 11.

Ví dụ 6. Viết n số tự nhiên thành một hàng ngang. Chứng minh rằng hoặc có một số chia hết cho n hoặc có một số số liên tiếp có tổng chia hết cho n.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng từ 52 số tự nhiên bất kỳ sao cho hoặc tổng, hoặc hiệu của hai số đó chia hết cho 100. Kết luận còn đúng không đối với 51 số?.

Ví dụ 8. Trong một hình vuông đơn vị chọn tuỳ ý 101 điểm (có thể thuộc cạnh của hình vuông) sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác với ba đỉnh là các điểm được chọn và có diện tích nhỏ hơn $0,01$.

Ví dụ 9. Trong hình lập phương đơn vị có 2001 con ruồi. Chứng minh rằng có ít nhất ba con ruồi nằm trong một hình cầu bán kính $\frac{1}{11}$.

Ví dụ 10. Một số cung của một đường tròn được tô màu đen, các cung còn lại được tô màu đỏ. Biết rằng tổng độ dài các cung màu đen nhỏ hơn nửa chu vi của đường tròn. Chứng minh rằng có thể kẻ được một đường kính của đường tròn với hai đầu mút được tô màu đỏ.

Ví dụ 11. Trong hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $1cm$ đặt một số hình tròn có tổng các bán kính bằng $0,6cm$ (các hình tròn có thể có điểm chung hoặc kể cả trùng nhau). Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng song song với cạnh AB và có điểm chung với ít nhất hai trong số những đường tròn nói trên.

Ví dụ 12. Trong số 100.000.000 số hạng đầu tiên của dãy Fibonacei:

$$1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ \cdots$$

có tồn tại hay không số hạng tận cùng bằng 4 chữ số 0?.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, trong dãy số Fibonacei nói trên luôn tồn tại số hạng tận cùng bằng n chữ số 0.

Ví dụ 14. Trong các ô của một bảng cỡ $n \times n$ đặt một cách tuỳ ý các số nguyên từ 1 đến n^2. Xét khẳng định sau:

"*Luôn tìm được hai ô có cạnh chung sao cho hiệu của hai số nằm ở hai ô đó lớn hơn 5.*"

1) Chứng minh rằng khẳng định đó đúng với $n = 10$.
2) Chứng minh rằng khẳng định đó đúng với mọi $n > 10$.
3) Chứng minh rằng khẳng định đó đúng với $n = 9$.
4) Chứng minh rằng khẳng định đó không đúng với $n = 5$.
5) Hãy xét tính đúng, sai của khẳng định đó khi $n = 6,\ 7,\ 8$.

Ví dụ 15. Trên mặt phẳng cho 5 điểm $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ có các tọa độ là các số nguyên. Chứng minh rằng trong số các tam giác được tạo thành từ 5 điểm đó có ít nhất ba tam giác có các diện tích nguyên.

Lời giải . Nhận xét rằng nếu thay đổi tọa độ của một đỉnh một số chẵn đơn vị thì tính nguyên của diện tích không đổi. Ta dịch chuyển tọa độ của các điểm đã cho những số chẵn đơn vị sao cho thu được các điểm mới $A',\ B',\ C',\ D',\ E'$ mà các tọa độ chỉ là các số 0 hoặc 1. Chỉ có 4 trường hợp:

$$(0;0)\ ;\ (0;1)\ ;\ (1;0)\ ;\ (1;1)$$

mà có 5 điểm nên sẽ có hai điểm trùng nhau. Giả sử $A' \equiv B' \equiv O(0;0)$. Khi đó, ba tam giác $OOC',\ OOD',\ OOE'$ sẽ có các diện tích bằng $0 \in \mathbb{Z}$ nên các tam giác $ABC,\ ABD,\ ABE$ sẽ có các diện tích nguyên.⊠

5 Một chút về sáng tạo trong Toán học

Trong phần này chúng ta sẽ làm quen với một trong những phương pháp sáng tạo trong Toán học, đó là phương pháp tổng quát hoá.

5.1 Thí dụ mở đầu

Ta sẽ tìm cách mở rộng một khẳng định hình học đã biết sau:

Qua hai điểm phân biệt có thể kẻ được một và chỉ một đường thẳng	(I)

Hiển nhiên, vì đó là một kết quả của hình học nên trước hết ta tìm những mở rộng về mặt hình học.

Mọi người đều biết, qua ba điểm không thẳng hàng có thể dựng được một và chỉ một đường tròn. Một số người với kiến thức toán học rộng hơn có thể biết rằng qua bốn điểm có thể dựng được một Parabol, còn qua năm điểm có thể dựng được một Elip. Nhưng sau đó là ngõ cụt! Ta không nghĩ ra được đường cong nào đi qua sáu điểm.

Ta sẽ tìm cách mở rộng theo con đường đại số. Ta biết rằng mọi đường thẳng không vuông góc với $x'Ox$ đều có phương trình:

$$y = ax + b \quad (d)$$

Khẳng định (I) "dịch" sang ngôn ngữ đại số có dạng (II):

Luôn tìm được duy nhất bộ số $a; b$ sao cho đường thẳng $(d)\ :\ y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(x_1; y_1)$; $N(x_2; y_2)$ cho trước $(x_1 \neq x_2)$. Nói cách khác, hệ:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \qquad (1)$$

(ẩn a ; b) **luôn có nghiệm duy nhất với mọi** x_1 ; y_1 ; x_2 ; y_2 $(x_1 \neq x_2)$

Nghiệm của hệ (1) là

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\ ;\ b = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}.$$

Nói cách khác , đường thẳng (d) có phương trình

$$y = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)x + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}. \quad (2)$$

Từ phương trình (2) ta rút ra được những nhận xét gì?

1) Trước hết, $x_1 - x_2$ là biểu thức duy nhất nằm ở mẫu thức.

Điều đó có nghĩa là nếu $x_1 = x_2$ thì biểu thức ở $VP(2)$ là vô nghĩa. Khẳng định đó phù hợp với bản chất hình học của bài toán vì khi $x_1 = x_2$ thì $(d) \perp x'Ox$ mà ta chỉ xét những đường thẳng không $\perp x''Ox$.

2) $VP(2)$ là bậc nhất đối với y_1 và y_2. Nói cách khác, khi ta cho $x_1; x_2; x$ những giá trị cụ thể, tuỳ ý thì (2) luôn có dạng

$$y = A.y_1 + B.y_2$$

trong đó, A ; B là các hằng số.

Từ nhận xét này ta viết lại (2) về dạng bậc nhất đối với y_1 và y_2, được

$$(2) \Leftrightarrow y = y_1\left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) + y_2\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) := y_1.u(x) + y_2.v(x) \quad (3)$$

3) Các hàm $u(x)$; $v(x)$ có những tính chất sau:

+) Không xác định khi $x_1 = x_2$.

+) $u(x_1) = 1$; $u(x_2) = 0$ và tương tự $v(x_1) = 0$; $v_(x_2) = 1$.

6 Mô hình hoá toán học của các bài toán

Phần lớn các bài tập toán mà ta gặp đều có kết luận được phát biểu dưới dạng tường minh, tức là trong đề bài yêu cầu rõ ta phải làm gì. Chẳng hạn phải giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, v.v....

Tuy nhiên giả thiết của các bài tập thường được tác giả "phức tạp hoá" nhằm làm cho chúng ta khó phát hiện ra mối liên hệ giữa "cái đã cho" và "cái cần tìm", không phân biệt được điều kiện chính và điều kiện phụ, hoặc đôi khi không phát hiện được những điều kiện thừa, điều kiện gây "nhiễu".

Nhiệm vụ của người giải toán là "phát biểu lại" bài toán đã cho, làm cho giả thiết và kết luận trở nên có liên hệ với nhau và đưa bài toán cần giải về một hoặc nhiều bài toán quen thuộc, đã có thuật toán giải sẵn.

Muốn vậy, khi giả thiết của bài toán được cho bằng "lời" , dưới "dạng văn học", ta phải "dịch" ngôn ngữ "văn học" của bài toán đã cho về ngôn ngữ toán học quen thuộc. Đôi khi chúng ta còn phải dùng các phương pháp đặc biệt để chuyển dạng bài toán. Chẳng hạn từ bài toán đại số về bài toán hình học hoặc lượng giác hay là ngược lại.

Con đường như vậy được gọi là "mô hình hoá" bài toán đã cho. Trong phần này ta sẽ đưa ra một số phương pháp "mô hình hoá" thường gặp, chủ yếu dùng để giải các bài toán tổ hợp.

Các ví dụ và bài tập của phần này xem thêm trong tài liệu: **Lý thuyết hệ thống.**

6.1 Tô mầu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong sáu người bất kỳ hoặc có ba người đôi một quen nhau, hoặc có ba người đôi một không quen nhau.

Lời giải . Biểu diễn mỗi người bởi một điểm trong không gian sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào đồng phẳng. Nối hai điểm bất kỳ bởi một đoạn thẳng. Tô mầu các đoạn thẳng thu được (15 đoạn) bởi hai mầu: xanh và đỏ như sau:

Nếu hai người quen nhau thì đoạn thẳng nối hai điểm biểu diễn hai người đó được tô bằng mầu đỏ. Trong trường hợp ngược lại đoạn thẳng tương ứng được tô mầu xanh.

Chọn một điểm A nào đó. Trong 5 đoạn thẳng nối A với các điểm còn lại có ít nhất ba đoạn thẳng cùng mầu (?). Không giảm tính tổng quát giả sử đó là mầu đỏ. Gọi ba đoạn đó là AB ; AC ; AD.

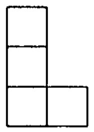
Xét mầu của ba đoạn BC ; CD ; DA. Có thể xảy ra hai khả năng:

+) Nếu có một đoạn mầu đỏ, chẳng hạn BC mầu đỏ, thế thì tam giác ABC có ba cạnh cùng mầu đỏ, tức là ba người tương ứng với ba điểm A ; B ; C đôi một quen nhau.

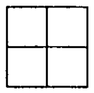
+) Nếu không có đoạn nàu mầu đỏ, thế thì cả ba đoạn đều có mầu xanh và khi đó ba người tương ứng với ba điểm B ; C ; D đôi một không quen nhau.

Tóm lại, luôn tồn tại hoặc ba người đôi một quen nhau, hoặc ba người đôi một không quen nhau. Đó chính là đpcm.

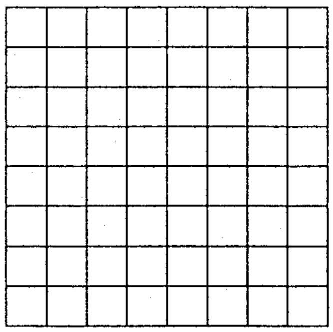
Ví dụ 2. Chứng minh rằng không thể lát kín một bàn cờ quốc tế (8×8) bằng 15 $L-$ *domino* và 1 $V-$ *domino* như hình sau:



$L - Domino$



$V - Domino$



Bàn cờ quốc tế

Lời giải . Tô mầu bàn cờ như hình vẽ. Khi đó, có 32 ô đen và 32 ô trắng. Với mọi vị trí, mỗi $V-$ *domino* phủ hai ô đen và hai ô trắng, còn mỗi $L-$ *domino* phủ một số lẻ ô đen và một số lẻ ô trắng. Như vậy, 15 $L-$ *domino* và 1 $V-$ *domino* chỉ phủ được một số lẻ ô đen và do đó không phủ kín hết bàn cờ (đpcm).

Ví dụ 3. Cho một bàn cờ cỡ 4×50. Một con mã đứng ở ô sát cạnh bàn cờ và đi theo đường chéo hình chữ nhật 2×3. Hỏi có tồn tại hay không một đường đi của quân mã liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ mỗi ô một lần hay không?

Lời giải . Tô mầu các ô của bàn cờ bằng 4 mầu: Trắng (T), đen (D), vàng (V), xanh (X) như hình vẽ sau:

Xanh:								... ...
Vàng:								... ...
Vàng:								... ...
Xanh:								... ...

Bàn cờ 4×50

Giả sử tồn tại một đường đi thoả mãn yêu cầu bài ra và ban đầu quân mã đứng ở ô XT, khi đó các ô tiếp theo mà quân mã có thể đi đến là:

$$XT \rightarrow VD \rightarrow XT \rightarrow VD \rightarrow \cdots .$$

Như vậy các ô VT, XD sẽ không bao giờ được đi qua. Vậy không tồn tại một đường đi thoả mãn yêu cầu bài ra.

6.2 Xây dựng bất biến

Để giải các bài toán dạng:

Cho tập M (mà các phần tử của nó sẽ được gọi là các trạng thái). Cho một quy tắc Q sao cho khi áp dụng quy tắc Q đó, từ một trạng thái $\in M$ ta thu được một trạng thái khác $\in M$. Cho trước hai trạng thái α ; $\beta \in M$. Hỏi sau một số hữu hạn bước áp dụng quy tắc Q, từ α ta có thể thu được β hay không?

Trước hết ta xây dựng một số ký hiệu:

+) Ta ký hiệu $\beta = Q(\alpha)$, hay là $\alpha \rightarrow \beta$ nếu theo quy tắc Q, từ trạng thái α ta thu được trạng thái β.

+) Ta ký hiệu $\beta \sim \alpha$ (đọc là α tương đương với β) nếu từ α có thể thu được β sau một số hữu hạn bước áp dụng Q. Phủ định của điều đó được ký hiệu là $\beta \nsim \alpha$.

Ta sẽ chỉ xét các quy tắc Q có những tính chất sau:

1) (Tính phản xạ) $\forall\, \alpha \in M,\ \alpha \sim \alpha$.

2) (Tính đối xứng) $\forall\, \alpha \in M, \alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$.

3) (Tính bắc cầu) Nếu $\alpha \sim \beta$ & $\beta \sim \gamma$ thì $\alpha \sim \gamma$.

Quy tắc thoả mãn cả ba tính chất trên còn được gọi là quy tắc có tính tương đương.

Định lí 7. (Về sự phân lớp tập trạng thái theo quy tắc tương đương)
Nếu Q là quy tắc có tính tương đương thì M được phân thành các tập con đôi một không giao nhau:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots$$

thoả mãn: Với mọi $i,\ j \in \mathbb{N}^*$, luôn có

i) $\forall\, \alpha\ ;\ \beta \in M_j,\ \alpha \sim \beta$.

ii) Nếu $i \neq j$ thì $\forall\, \alpha \in M_i,\ \forall\, \beta \in M_j,\ \alpha \nsim \beta$.

Định nghĩa 3. *1 Mỗi tập con M_j nói trong định lý trên được gọi là một quỹ đạo của quy tắc Q (xác định trên tập M).*

Hiển nhiên, các quỹ đạo có tính chất quan trọng sau: Nếu ta xuất phát từ một trạng thái bất kỳ thuộc quỹ đạo M_i nào đó thì sau một hoặc một số lần áp dụng Q ta chỉ có thể thu được những trạng thái cũng $\in M_i$ đó và không thể thu được các trạng thái thuộc các quỹ đạo khác.

Ngoài ra, nếu M là tập hữu hạn thì số quỹ đạo của quy tắc Q xác định trên tập M là hữu hạn.

Định nghĩa 4. *2 Hàm số f xác định trên tập các trạng thái M được gọi là một bất biến của quy tắc Q (xác định trên tập M) nếu nó thoả mãn*

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta).(1)$$

Định nghĩa 5. *3 Bất biến f được gọi là bất biến tổng quát nếu nó thoả mãn*

$$\alpha \nsim \beta \Rightarrow f(\alpha) \neq f(\beta).(2)$$

Vậy f là bất biến tổng quát khi và chỉ khi

$$\forall\, \alpha,\ \beta \in M,\ \alpha \sim \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta).$$

Vậy nếu ta xác định được một bất biến tổng quát f thì với hai trạng thái α ; β bất kỳ, có thể xác định được $\alpha \sim \beta$ hay là $\alpha \nsim \beta$ bằng cách so sánh $f(\alpha)$ và $f(\beta)$.
Nếu ta chỉ xác định được một bất biến f và với hai trạng thái α ; β ta có $f(\alpha) \neq f(\beta)$ thì ta kết luận $\alpha \nsim \beta$. Tuy nhiên, nếu $f(\alpha) = f(\beta)$ thì không thể kết luận gì về mối tương quan giữa α và β.
Để xây dựng bất biến tổng quát thường sử dụng định lý sau

Định lí 8. *Nếu*

a) Tồn tại tập $\Delta := \{\delta_1\ ;\ \delta_2\ ;\ \cdots\ ;\ \delta_l\}$ gồm l trạng thái phân biệt của M sao cho

$$\forall\, \alpha \in M,\ \exists\, \delta_i \in \Delta,\ \alpha \sim \delta_i.$$

b) Bất biến f nhận ít nhất l giá trị khác nhau.

Thì f là bất biến tổng quát và các trạng thái $\in \Delta$ là đôi một không tương đương.

Chứng minh:

Từ a) ta thấy có không quá l quỹ đạo.

Từ b) ta thấy có không ít hơn l quỹ đạo.

Vậy có đúng l quỹ đạo. Từ b) ta thấy f nhận đúng l giá trị, suy ra f là bất biến tổng quát.

Cuối cùng, từ a) ta thấy các trạng thái khác nhau của Δ sẽ thuộc các quỹ đạo khác nhau nên đôi một không tương đương.$\boxtimes$

6.3 Ví dụ

Ví dụ 1. *Hình tròn được chia thành n hình quạt. Ta xếp n viên sỏi một cách tuỳ ý vào n hình quạt đó. Được phép đồng thời chuyển một viên sỏi từ một hình quạt baaats kỳ sang hình quạt kề bên theo chiều kim đồng hồ và chuyển một viên sỏi từ một hình quạt bất kỳ sang hình quạt kề bên theo hướng ngược lại. Hỏi rằng làm như vậy sau một số hữu hạn bước có thể từ vị trí mà ở mỗi hình quạt có đúng một viên sỏi thu được vị trí mà tất cả các viên sỏi được tập trung về trong cùng một hình quạt hay không?*

HDG: *Đánh số các hình quạt từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ kể từ một hình quạt nào đó. Với mỗi trạng thái xếp sỏi α, gọi $a_k(\alpha)$ là số viên sỏi trong hình quạt thứ k.*

$$\text{Đặt } q(\alpha) := 1.a_1(\alpha) + 2.a_2(\alpha) + \cdots + n.a_n(\alpha)$$

$$\text{và } r(\alpha) := q(\alpha) \pmod{n}$$

Ta chứng minh các khẳng định sau:

1) $r(\alpha)$ là bất biến tổng quát.

2) Gọi β là trạng thái mà ở mỗi hình quạt có đúng một viên sỏi ; γ là trạng thái mà n viên sỏi tập trung vào hình quạt thứ l thì $r(\gamma) = 0$ và $r(\beta) = 0 \Leftrightarrow n$ là số lẻ.

3) Từ đó suy ra

$$\beta \sim \gamma \Leftrightarrow n \text{ là số lẻ.}$$

6.4 Xây dựng hàm đặc trưng

Với bài toán được phát biểu trong phần trước, nếu chỉ yêu cầu chứng minh từ trạng thái α sau một hoặc một số hữu hạn lần áp dụng quy tắc Q ta có thể thu được trạng thái β (α ; β là các trạng thái cho trước) ta có thể giải như sau:

1) Xây dựng hàm số $f(k)$ trong đó $k \in \mathbb{N}^*$ là số lần áp dụng quy tắc Q vào trạng thái α.

2) Chứng tỏ $f(k)$ là hàm không giảm (hoặc không tăng).

3) Chứng tỏ $f(k)$ nhận giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

4) Chứng tỏ trạng thái β tương ứng với trường hợp $f(k)$ nhận giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) đó.

5) Từ đó thu được đpcm.

Hàm rời rạc $f(k)$ còn được gọi là hàm đặc trưng của bài toán. Sự tồn tại Max (Min) của $f(k)$ thường được chứng minh dựa vào nguyên lý cực hạn.

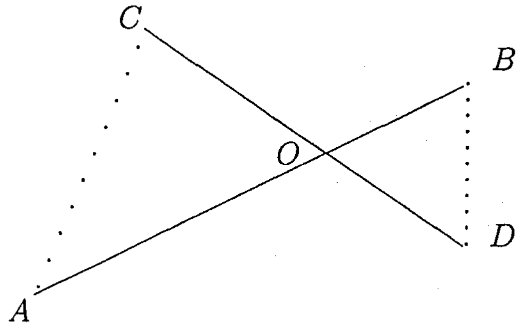
6.5 Ví dụ

Ví dụ 1. *Trên mặt phẳng cho 2004 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể dựng các đoạn thẳng nối 2 điểm một với nhau sao cho 1002 đoạn thẳng được dựng đôi một không có điểm chung.*

Lời giải . *Nối hai điểm một với nhau bởi các đoạn thẳng.*

Nếu các đoạn thẳng vừa dựng đôi một không có điểm chung thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu có hai đoạn thẳng, chẳng hạn AB và CD cắt nhau tại O (xem Hình 1).



Hình 1

Gọi f là tổng độ dài các đoạn thẳng được nối. Khi đó, nếu ta thay hai đoạn thẳng AB ; CD bởi hai đoạn đứt nét AC ; BD thì do $AB + CD > AC + BD$ (?) nên tổng độ dài các đoạn thẳng được nối khi đó sẽ giảm (do các đoạn thẳng khác vẫn được giữ nguyên). Mà tập giá trị của f là hữu hạn (?) nên sau một số hữu hạn lần thay đổi lại các đoạn thẳng như vậy f sẽ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi f đạt giá trị nhỏ nhất thì không có hai đoạn thẳng được nối nào cắt nhau vì nếu có hai đoạn thẳng cắt nhau thì ta lại tiếp tục làm như trên và sẽ thu được trạng thái mà trong đó f đạt giá trị nhỏ hơn, trái với giả thiết là f nhỏ nhất.

Vậy có thể dựng được 1002 đoạn thẳng thoả mãn yêu cầu bài ra (đpcm).

6.6 Bài tập luyện tập

Bài toán 1. *1 (D7) Cho một bàn cờ cỡ 7×7. Một quân mã đứng ở ô (1;4) và đi theo đường chéo hình chữ nhật 2×3. Hỏi có tồn tại hay không một đường đi của quân mã liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ mỗi ô một lần hay không?*
Đáp số: *Không. Tô màu như bàn cờ quốc tế và sử dụng tính chẵn, lẻ (có 25 ô đen và 24 ô trắng. Ban đầu, quân mã đứng ở ô trắng.)*

Bài toán 2. *2 (D71) Trên mặt phẳng cho n đường thẳng trong đó không có hai đường nào song song và không có ba đường nào đồng quy. chứng minh trong mỗi miền mặt phẳng mà các đường thẳng đó chia ra có thể đặt một số nguyên $\in (-n; n) \setminus \{0\}$ sao cho tổng các số được viết ở mỗi phía của một đường thẳng bất kỳ luôn bằng 0.*

Bài toán 3. *3 (D78) Trên bàn cờ quốc tế đặt 8 quân tốt sao cho ở mỗi hàng và ở mỗi cột đều có đúng một quân tốt. Chứng minh rằng số quân tốt nằm ở các ô đen là số chẵn.*

Bài toán 4. *4 (D85) Trên mỗi cạnh của tứ diện $ABCD$ lấy một điểm bất kỳ. Qua mỗi cặp ba điểm thuộc ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của tứ diện dựng một mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu ba trong số bốn mặt phẳng thu được mà tiếp xúc với cầu nội tiếp tứ diện thì mặt phẳng thứ tư cũng tiếp xúc với cầu đó.*

Bài toán 5. *5 (D70) Có $4m$ đồng xu, trong đó có một nửa là các đồng xu giả. Các đồng xu thật có khối lượng bằng nhau, các đồng xu giả cũng có khối lượng bằng nhau nhưng nhẹ hơn. chứng minh bằng không quá $3m$ phép cân đĩa (không có quả cân) ta có thể xác định được tất cả các đồng xu giả.*

Bài toán 6. *6 (D71) Trên mạng lưới nguyên đánh dấu các nút nào đó (số nút được đánh dấu $\geqslant 1$). Cho một tập hữu hạn các vectơ có tọa độ nguyên. Biết rằng nếu đặt điểm gốc của các vectơ đó tại một điểm nút được đánh dấu bất kỳ thì số điểm ngọn được đánh dấu nhiều hơn số điểm ngọn không được đánh dấu. Chứng minh rằng có vô số điểm nút được đánh dấu.*

Bài toán 7. *7 (D 73) Cho điểm A_0 và n vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ có tổng bằng $\overrightarrow{0}$. Mỗi hoán vị $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}, \cdots, \overrightarrow{b_n})$ của các vectơ đó xác định một tập các điểm :*

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \equiv A_0 \text{ sao cho}$$

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{A_0A_1}, \ \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{A_1A_2}, \ \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{A_2A_3}, \cdots, \ \overrightarrow{b_n} = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một hoán vị của các vectơ đã cho sao cho tất cả các điểm $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ đều nằm trong miền góc có số đo bằng 60^o với đỉnh là A_0 (miền góc được kể cả cạnh của góc).

Bài toán 8. *8 (D 72) Trên bờ một con sông thẳng đặt hữu hạn các súc gỗ không chồng lên nhau và mỗi súc gỗ tạo với bờ sông góc $< 45^o$. Chứng minh rằng ta có thể lần lượt lăn tất cả các súc gỗ đó xuống sông sao cho khi lăn không có súc gỗ nào va chạm với các súc gỗ khác. (Các súc gỗ chỉ được lăn theo phương vuông góc với nó và không được quay.)*

Bài toán 9. *9 (D 69) Chứng minh rằng nếu trên mặt phẳng có một số hữu hạn các đa giác lồi đặt tuỳ ý, không có điểm chung thì với mọi tia $\overrightarrow{Ox}$ luôn tồn tại một đa giác mà khi tịnh tiến song song nó theo hướng của tia sẽ không chạm vào các đa giác khác.*

Bài toán 10. *10 (D 65) Trên bàn cờ quốc tế đặt các dấu +, − một cách tuỳ ý vào các ô. Được phép đổi dấu đồng thời ở 15 ô thuộc cùng một hàng và cùng một cột. Hỏi có thể làm như vậy để sau một số hữu hạn bước, từ một bàn cờ với các dấu được đặt bất kỳ thu được một bàn cờ với các vị trí các dấu đã cho trước hay không?.*

7 Cực trị trên tập rời rạc

7.1 Phương pháp xây dựng cấu trúc của điểm mà tại đó đạt Min, Max

Dự đoán Min, Max *của biểu thức $f(x)$ đạt tại x^* nào đó và chứng minh dự đoán đó.*
Trong phương pháp này thường ta phải sử dụng các kiến thức của Số học, Tổ hợp và Toán rời rạc. Việc dự đoán thường được thực hiện bởi phép quy nạp dựa vào một số tính toán ban đầu.

7.2 Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 1. *Cho một n - giác lồi ($n > 4$), trong đó không có ba đường chéo nào đồng quy tại một điểm nằm trong đa giác. Gọi $f(n)$ là số các đường chéo có thể kẻ được sao cho các phần mà chúng cắt ra khỏi đa giác đã cho đều là các tam giác.*

Hãy xác định Max f(n).

Lời giải . *Gọi $f(n)$ là số các đường chéo có thể kẻ được thoả mãn yêu cầu bài ra. Xét một số trường hợp ban đầu của n. Bằng cách vẽ hình cụ thể ta được*

$n =$	4	5	6	7	8	9	10
$f(n) \leqslant$	2	3	5	6	8	9	11

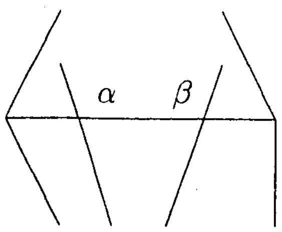
Từ đó ta có dự đoán

$$f(n) \leqslant \left[\frac{3n}{2}\right] - 4. \quad (*)$$

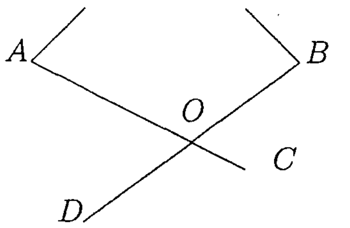
Trong đó ta ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Để chứng minh (*) trước hết ta chứng minh

Bổ đề: *Nếu tập S các đường chéo của một n - giác lồi ($n \geqslant 5$) chia n - giác đó thành các tam giác thì có ít nhất một đường chéo $\in S$ không cắt tất cả các đường chéo khác $\in S$ tại điểm trong của n - giác đã cho.*

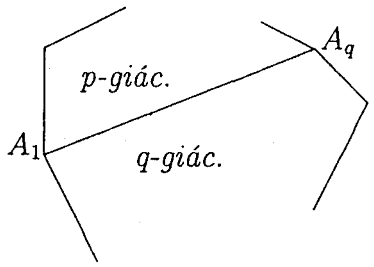
Chứng minh: *Xét các hình vẽ sau:*



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Từ các hình vẽ trên ta có các nhận xét hiển nhiên sau:

1) Không có đường chéo nào $\in S$ cắt $\geqslant 2$ đường chéo $\in S$ khác (xem Hình 1). Do hai góc α ; β có $\alpha + \beta \geqslant 180^o$).

2) Giả sử mọi đường chéo $\in S$ đều cắt đúng một đường chéo $\in S$. Xét hai đường chéo $\in S$ là AC ; BD cắt nhau tại O (xem Hình 2)). Do $n \geqslant 5$ nên có ít nhất một cạnh của tứ giác $ABCD$ là đường chéo của n - giác đã cho. Giả sử đó là cạnh AB. Ta có $AB \in S$ vì nếu không thì phần n - giác với biên chứa đường gấp khúc AOB sẽ không là tam giác nên sẽ có một đường chéo $\in S$ cắt AB, khi đó đường chéo đó còn cắt hoặc AC, hoặc BD. Điều đó trái với nhận xét 1) (Có một đường chéo $\in S$ cắt hai đường chéo $\in S$).

Từ hai nhận xét trên suy ra kết luận của bổ đề.

Trở lại bài toán đang xét. Hiển nhiên, (*) đã đúng với $n = 4; 5; 6$. Giả sử (*) đúng với mọi k, $5 \leqslant k < n$, $n \geqslant 6$. Theo bổ đề, tồn tại một đường chéo $\in S$ không cắt các đường chéo khác $\in S$ và chia n - giác đã cho thành hai phần rời nhau. Giả sử đường chéo đó là A_1A_q (xem Hình 3) và nó chia n - giác đã cho thành p - giác và q - giác (với $3 \leqslant p; q < n$; $p + q = n + 2$).

Khi đó, số $f(n)$ các đường chéo kẻ được thoả mãn yêu cầu bài ra là

$$f(n) = 1 + f(p) + f(q).$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}
1 + f(p) + f(q) &\leqslant 1 + \left[\frac{3p}{2}\right] - 4 + \left[\frac{3q}{2}\right] - 4 \\
&= \left[\frac{3p}{2}\right] + \left[\frac{3q}{2}\right] - 7 \\
&\leqslant \left[\frac{3(p+q)}{2}\right] - 7 \\
&= \left[\frac{3n}{2} + 3\right] - 7 \\
&= \left[\frac{3n}{2}\right] - 4 \\
\Rightarrow f(n) &\leqslant \left[\frac{3n}{2}\right] - 4.
\end{aligned}$$

Vậy (*) cũng đúng với n.

Do đó, theo nguyên lý quy nạp, (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$; $n \geqslant 4$. Vậy số lớn nhất các đường chéo kẻ được thoả mãn yêu cầu bài ra là $\left[\frac{3n}{2}\right] - 4$. ⊠

Ví dụ 2. *(VMO 2003) Tìm số $n \in \mathbb{N}$ lớn nhất sao cho hệ phương trình sau có nghiệm nguyên.*

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = (x+3)^2 + y_3^2 = \cdots = (x+n)^2 + y_n^2. \quad (1)$$

Lời giải . *Hiển nhiên nếu hệ (1) không có nghiệm* $(x\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\cdots;\ y_n)$ *nguyên khi* $n = k$ *thì nó cũng không có nghiệm nguyên với* $n \geqslant k$.
Với $n = 3$ *dễ thấy hệ có nghiệm:* $(x\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3) \equiv (-2\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
Ta sẽ chứng minh với $n = 4$ *thì hệ (1) không có các nghiệm nguyên.*
Thật vậy, giả sử tồn tại các số $x\ ; y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3\ ;\ y_4 \in \mathbb{Z}$ *và thoả mãn:*

$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = (x+3)^2 + y_3^2 = (x+4)^2 + y_4^2. \quad (2)$$

Từ (2), do $x+1$ *và* $x+3$ *cùng tính chẵn, lẻ nên* y_1 *và* y_3 *cùng tính chẵn, lẻ. Tương tự,* y_2 *và* y_4 *cùng tính chẵn, lẻ.*
Do $x+1$ *và* $x+2$ *khác tính chẵn, lẻ nên* y_1 *và* y_2 *khác tính chẵn, lẻ. Tương tự,* y_3 *và* y_4 *khác tính chẵn, lẻ.*
Nhận xét rằng:
Với $a \in \mathbb{Z}$; *a lẻ thì* $a^2 \equiv 1 \pmod 8$, *còn với* $a \in \mathbb{Z}$; *a chẵn thì* $2a^2 \equiv 0 \pmod 8$.
Từ (2) ta có:

$$(x+1)^2 + y_1^2 + (x+3)^2 + y_3^2 = 2[(x+2)^2 + y_2^2 \Leftrightarrow 2y_2^2 = y_1^2 + y_3^2 + 2. \quad (*)$$
$$(x+2)^2 + y_2^2 + (x+4)^2 + y_4^2 = 2[(x+3)^2 + y_3^2 \Leftrightarrow 2y_3^2 = y_2^2 + y_4^2 + 2. \quad (**)$$

Nếu y_2 *chẵn thì theo trên ta có* $y_1; y_3$ *lẻ, và từ (*) ta được:*

$$0 \equiv (1+1+2) \pmod 8 \ : \textit{vô lý}.$$

Nếu y_2 *lẻ thì theo trên ta có* y_4 *lẻ* ; y_3 *chẵn và từ (**) ta được:*

$$0 \equiv (1+1+2) \pmod 8 \ : \textit{vô lý}.$$

Vậy giả sử ban đầu là sai, tức là với $n = 4$ *thì hệ (1) không có các nghiệm nguyên.*
Do đó $n = 3$ *là giá trị lớn nhất để hệ phương trình đã cho có nghiệm* $\in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. *Cho* $n \geqslant 3$ *và các số* $x_1; x_2; \cdots; x_{n-1} \in \mathbb{N}$, *biến thiên và thoả mãn*

$$\begin{cases} 1)\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = n \\ 2)\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 2n-2 \end{cases} .(ii)$$

$$\textit{Tìm } \mathrm{Min\,f} \textit{ với } f = f(x_1; x_2; \cdots; x_{n-1}) := \sum_{k=1}^{n-1} k.x_k.(2n-k).$$

Lời giải . *Vì tập giá trị của f là tập con của* $\mathbb{N}$ *nên tồn tại* $\mathrm{Min\,f}$. *Giả sử*

$$\mathrm{Min\,f} = \mathrm{f(x^*) = f(x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*)}.$$

Từ điều kiện 2) suy ra $x_{n-1}^* \leqslant 2$. *Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi*

$$x_1^* = x_2^* = \cdots = x_{n-2}^* = 0 \Rightarrow n = 2 \textit{ (theo 1))}.$$

Đó là điều vô lý vì $n \geqslant 3$. Vậy $x_{n-1}^* \leqslant 1 \Rightarrow x_{n-1}^* \in \{0; 1\}$.

+) Nếu $x_{n-1}^* = 0$ thì

$$\begin{cases} 1)\ x_1^* + x_2^* + x_3^* + \cdots + x_{n-2}^* = n \\ 2)\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* + \cdots + (n-2)x_{n-2}^* = 2n-2 \end{cases} . \quad (i)$$

a) Nếu $\exists\, m \in \overline{1..n-2}$, $x_m^* > 0$ còn $x_i^* = 0$, $\forall\, i \neq m$ thì

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_m^* = n \\ mx_m^* = 2n-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow mn = 2n - 2$$

$$\Rightarrow n(2-m) = 2 \ : \ \textit{vô lý do } n \geqslant 3.$$

b) Nếu $\exists\, i,\ j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n-2,\ j \geqslant i+2.$ sao cho $x_i^*,\ x_j^* > 0$.

Xét bộ số $x' := (x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}')$ xác định như sau

$$\begin{cases} x_k' = x_k^* \quad \textit{khi } k \notin \{i; j; i+1; j+1\} \\ x_i' = x_i^* + 1\ ;\ x_{i+1}' = x_{i+1}^* - 1\ ;\ x_j' = x_j^* - 1\ ;\ x_{j+1}' = x_{j+1}^* + 1 \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng bộ các số $x' := (x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}')$ xác định như vậy thoả mãn điều kiện (ii). Nhưng

$$f(x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*) - f(x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}') = \cdots = 2(j-i) > 0$$

nên f không đạt Min *tại $x^* = (x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*)$.*

Vậy ta phải có: $\exists\, i,\ x_i^*,\ x_{i+1}^* > 0$ và $x_k^* = 0,\ \forall\, k \neq i,\ i+1$. Khi đó

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_i^* + x_{i+1}^* = n \\ ix_i^* + (i+1)x_{i+1}^* = 2n-2 \end{cases} \Rightarrow x_{i+1}^* = (2-i)n - 2.$$

Do $x_{i+1}^* > 0 \Rightarrow i < 2 \Rightarrow i = 1$. Vậy $x_2^* = n-2,\ x_1^* = 2$ và

$$f(x^*) = f(2; n-2; 0; 0; \cdots; 0) = 2(2n-1) + 2(n-2)(2n-2) = 4n^2 - 8n + 6.$$

+) Nếu $x_{n-1}^* = 0$ thì

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x_1^* + x_2^* + x_3^* + \cdots + x_{n-2}^* = n-1 \\ 2)\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* + \cdots + (n-2)x_{n-2}^* = n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2^* = x_3^* = \cdots = x_{n-2}^* = 0,\ x_1^* = n-1$$

$$\Rightarrow f(x^*) = 1.(n-1)(2n-1) + (n-1).1.(2n-n+1) = 3n^2 - 3n.$$

Nhưng với mọi $n \geqslant 3$ ta luôn có

$$(4n^2 - 8n + 6) - (3n^2 - 3n) = (n-3)(n-2) \geqslant 0$$

nên ta được kết quả sau

$$\mathrm{Min\,f} = 3\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} = \mathrm{f}(\mathrm{n}-1; 0; 0; \cdots; 0; 1).$$

Ví dụ 4. *Hàm số* $(f(n)) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *xác định như sau*

$$f(1) = 0\ ;\ f(n) = f([\frac{n}{2}]) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},\ n \geqslant 2.$$

1) Xác định Min; Max *của* $f(n)$ *với* $n \leqslant 1999$ *và tìm tất cả các giá trị* $n \in \overline{1..1999}$ *để* $f(n)$ *đạt* Min; Max.
2) Có bao nhiêu giá trị $n \in \overline{1..1999}$ *để* $f(n) = 0$.
Lời giải. *Ta có*

$$f(n) - f([\frac{n}{2}]) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1 & (\text{nếu } n = 0; 3 \pmod 4) \\ -1 & (\text{nếu } n = 1; 2 \pmod 4) \end{cases}.$$

Nhận xét rằng trong hệ cơ số 2, nếu $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$ *thì*

$$[\frac{n}{2}] = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}}.$$

Ngoài ra

$$n = 0; 3 \pmod 4 \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_k} = \overline{00} \text{ hoặc } \overline{11}.$$
$$n = 1; 2 \pmod 4 \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_k} = \overline{01} \text{ hoặc } \overline{10}.$$

Như vậy:
$f(n)$ *tăng 1 đơn vị đối với* $f([\frac{n}{2}])$ *nếu* $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$ *với* $a_k = a_{k-1}$.
$f(n)$ *giảm 1 đơn vị đối với* $f([\frac{n}{2}])$ *nếu* $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$ *với* $a_k \neq a_{k-1}$.
Ký hiệu $u(n)$ *là số cặp* 00 ; 11 *còn* $v(n)$ *là số cặp* 01 ; 10 *trong cách viết theo cơ số 2 của số* n. *Ta sẽ chứng minh*

$$f(n) = u(n) - v(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp toán học theo k là số chữ số trong cách viết nhị phân của số n.
Thật vậy, khi $k = 1 \Rightarrow n = 1$ *thì* $f(1) = 0$; $u(1) = v(1) = 0 \Rightarrow (*)$ *đúng với* $k = 1$.
Nếu $k = 2$ *thì*
+) *Hoặc* $n = 2 = 10_2 \Rightarrow u(2) = 0$; $v(2) = 1$ *còn* $f(2) = -1 \Rightarrow f(2) = u(2) - v(2)$.
+) *Hoặc* $n = 3 = 11_2 \Rightarrow u(3) = 1$; $v(3) = 0$ *còn*

$$f(3) = f(1) + 1 = 1 \Rightarrow f(3) = u(3) - v(3).$$

Giả sử (*) đúng tới k, hay là (*) đúng với mọi số $n = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}$.
Xét $m = \overline{a_1a_2\cdots a_{k-2}a_{k-1}a_ka_{k+1}}$.
Nếu $a_{k+1} = 0 \Rightarrow [\frac{m}{2}] = n,\ m+1$ *lẻ và*

$$f(m) = f(n) + (-1)^{n(m+1)}.$$

Nếu $a_k = 0$ *thì* n *chẵn và*

$$u(m) = u(n) + 1 \; ; \; v(m) = v(n) \; ; \; (-1)^{n(m+1)} = 1$$

$$\Rightarrow f(m) = f(n) + 1 = u(n) - v(n) + 1 = u(m) - v(m).$$

Nếu $a_k = 1$ *thì* n *lẻ và*

$$u(m) = u(n) \; ; \; v(m) = v(n) + 1 \; ; \; (-1)^{n(m+1)} = -1$$

$$\Rightarrow f(m) = f(n) - 1 = u(n) - v(n) - 11 = u(m) - v(m).$$

Nếu $a_{k+1} = 0$ *thì lập luận tương tự ta cũng được* $f(m) = u(m) - v(m)$. *Vậy (*) cũng đúng tới* $k+1$ *nên theo nguyên lý quy nạp ta được (*) đúng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

Trở lại bài toán đã cho

1) Từ (*) ta thấy để $f(n)$ *lớn nhất thì* $v(n)$ *phải nhỏ nhất. Mà* $v(n) \geqslant 0$ *nên ta phải tìm số* n *lớn nhất,* $\leqslant 1999$ *sao cho* $v(n) = 0$. *Nhận xét rằng*

$$11111111111_2 = 2047 > 1999 \; ; \; 1111111111_2 = 1023 < 1999$$

nên số n *lớn nhất* $\in \overline{1..1999}$ *có* $v(n)$ *nhỏ nhất là số 1023. Khi đó* $f(n) = 9 - 0 = 9$.

$$Vậy \max_{1 \;\; n \;\; 1999} f(n) = 9 = f(1023).$$

Để $f(n)$ *nhỏ nhất ta phải có* $u(n)$ *nhỏ nhất, đồng thời* $v(n)$ *lớn nhất. Lập luận tương tự trên ta được số* $10101010101_2 = 1365$ *là số có* $u(n) = 0$ *là nhỏ nhất và* $v(n) = 10$ *là lớn nhất. Khi đó* $f(n) = 0 - 10 = -10$.

$$Vậy \min_{1 \;\; n \;\; 1999} f(n) = -10 = f(1365).$$

2) Trong biểu diễn $n = \overline{a_1a_2 \cdots a_{k-2}a_{k-1}a_k}_2$ *giữa hai chữ số giống nhau ta đặt dấu "." còn giữa hai chữ số khác nhau ta đặt dấu ",". Khi đó* $u(n) =$ *số dấu "." và* $v(n) =$ *số dấu ",". Nếu nhớ rằng chữ số đầu tiên phải là chữ số 1 thì mỗi dãy gồm* m *ký hiệu "." và "," sẽ xác định duy nhất một số có* $m+1$ *chữ số trong hệ cơ số 2.*

Chẳng hạn dãy (. . , , .) sẽ ứng với số 111011_2

Như vậy $f(n) = 0 \Leftrightarrow u(n) = v(n) \Leftrightarrow$ *số dấu "." bằng số dấu ",". Từ đó* $\Rightarrow m$ *chẵn.*

Với m *chẵn có* $C_m^{\frac{m}{2}}$ *cách xếp* $\dfrac{m}{2}$ *dấu "." vào* m *chỗ .*

(Các chỗ còn lại đặt các dấu ","). Mà $1999 < 100000000000_2 = 2048$. *Trong 2047 số* $n < 2048$ *có*

$$C_0^0 + C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + C_8^4 + C_{10}^5 = 351$$

số có $f(n) = 0$. *Nhưng trong các số có* $f(n) = 0$ *đó có 5 số* $> 1999 = 11111001111_2$ *là các số*

$$11111010010_2 = 2002 \; ; \; 11111010100_2 = 2004 \; ; \; 11111010110_2 = 2006 \; ;$$

$$11111011010_2 = 2010 \; ; \; 11111101010_2 = 2016.$$

Vậy có tất cả $351 - 5 = 346$ *số* $\in \overline{1..1999}$ *là nghiệm của phương trình* $f(n) = 0$.

Ví dụ 5. *Cho* $a > 2$ *và hàm số* $a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *xác định như sau*

$$a(0) = 1,\ a(1) = a,\ a(n+1) = \left(\frac{a^2(n)}{a^2(n-1)} - 2\right) a(n), \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Với $k \in \mathbb{N}^*$*, đặt*

$$f(k) = \frac{1}{a(0)} + \frac{1}{a(1)} + \cdots + \frac{1}{a(k)}.$$

Chứng minh rằng

$$\underset{k\in\ ^*}{Sup} f(k) = \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2-4}\right).$$

Lời giải . *Ta có*

$$a > 2 \Rightarrow \exists\, b > 1,\ a = b + \frac{1}{b} \Rightarrow a^2 - 2 = b^2 + \frac{1}{b^2},\ a^2 - 4 = \left(b - \frac{1}{b}\right)^2.$$

Ta phải chứng minh

$$f(k) < \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2-4}\right) := \varrho \quad (1),\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

và ở vế phải của (1) không thể thay ϱ *bởi số nhỏ hơn. Từ định nghĩa của hàm số và từ cách đặt số* b *ta có*

$$a_2 = \left(\frac{a^2(1)}{a^2(0)} - 2\right) a(0) = (a^2-2).a = \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$$
$$a_3 = \left(\frac{a^2(2)}{a^2(1)} - 2\right) a(1) = (a^2-2).a = \left(b^4 + \frac{1}{b^4}\right)\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$a(n) = \left(b^{2^{n-1}} + \frac{1}{b^{2^{n-1}}}\right)\left(b^{2^{n-2}} + \frac{1}{b^{2^{n-2}}}\right)\cdots\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a(n)} = \frac{b^{2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)} = \frac{b^{2^n-1}}{M}$$

(với $M := (b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)$*). Mặt khác:*

$$\varrho = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b} + 2 - \left(b - \frac{1}{b}\right)\right) = 1 + \frac{1}{b}.$$

(Do $b > 1 \Rightarrow b - \frac{1}{b} > 0$*).*

Từ các kết quả trên ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{b^2+1} + \frac{b^3}{(b^2+1)(b^4+1)} + \cdots + \frac{b^{2^n-1}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)} < 1 + \frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{b^4}{(b^2+1)(b^4+1)} + \cdots + \frac{b^{2^n}}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)} < 1. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh với mọi $a_i > 0$, $(i \in \overline{1..n})$ *ta luôn có*

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_j)} = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}. \quad (3)$$

Thật vậy, có $S_1 = \frac{a_1}{1+a_1} = 1 - \frac{1}{1+a_1} \Rightarrow (3)$ *đúng với* $n = 1$.
Giả sử (3) đúng đến n, khi đó đặt $P := (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ *ta có*

$$S_{n+1} = S_n + \frac{a_{n+1}}{P.(1+a_{n+1})} = 1 - \frac{1}{P} + \frac{a_{n+1}}{P.(1+a_{n+1})} = 1 - \frac{1}{P.(1+a_{n+1})}.$$

Vậy (3) cũng đúng với $n+1$, *tức là theo nguyên lý quy nạp, (3) đúng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.
Theo (3), ta có

$$VT(2) = 1 - \frac{1}{(b^2+1)(b^4+1)\cdots(b^{2^n}+1)} < 1 \Rightarrow VT(2) < 1.$$

Vậy (2) đúng nên (1) đúng. Mặt khác , khi cho $b \to 1^+$ $(\Leftrightarrow a \to 2^+)$ *ta có* $VT(2) \to 1^-$ *nên ở* $VP(2)$ *không thể thay 1 bởi số nhỏ hơn, hay là ở* $VP(1)$ *không thể thay* ϱ *bởi số nhỏ hơn. Tóm lại, ta được*

$$\underset{k\in\ ^*}{Sup} f(k) = \varrho = \frac{1}{2}\left(2 + a - \sqrt{a^2-4}\right) \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 6. *Cho* $S_n = \{1;\ 2; \cdots;\ n\}$. *Phần tử* $j \in S_n$ *được gọi là điểm bất động của song ánh* $p : S_n \to S_n$ *nếu* $p(j) = j$.
Gọi $f(n)$ *là số song ánh không có điểm bất động, còn* $g(n)$ *là số song ánh có đúng một điểm bất động :* $S_n \to S_n$.
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $H(n)$ *với*

$$H(n) := |f(n) - g(n)|,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải . *Gọi p là một song ánh :* $S_n \to S_n$ *mà có đúng một điểm bất động* j.
Có n *cách chọn* $j \in S_n$ *và* $f(n-1)$ *cách lập các song ánh :* $S_n \setminus \{j\} \to S_n \setminus \{j\}$ *mà không có điểm bất động. Vậy*

$$g(n) = nf(n-1) \quad (1), \quad \forall\, n \geqslant 2$$

Bây giờ, gọi r là song ánh : $S_n \to S_n$ *mà không có điểm bất động.*
Khi đó, $r(1) = j$ *với* $j \neq 1$ *và có* $n-1$ *cách chọn* j *như vậy.*
Nếu $r(j) = 1$ *thì có* $f(n-2)$ *các song ánh :* $S_n \setminus \{1; j\} \to S_n \setminus \{1; j\}$ *mà không có điểm bất động. Nếu bổ sung thêm* $r(1) = j$, $r(j) = 1$ *thì song ánh r đó :* $S_n \to S_n$ *cũng không có điểm bất động. Vậy có* $(n-1)f(n-2)$ *các song ánh :* $S_n \to S_n$ *loại này.*

Nếu $r(j) \neq 1$ thì có $f(n-1)$ các song ánh : $S_n \setminus \{1\} \to S_n \setminus \{1\}$ mà không có điểm bất động. Gọi q là một song ánh như vậy. Bằng cách đặt

$$\begin{cases} p(i) = q(i) & \text{nếu } q(i) \neq j \\ p(i) = 1,\ p(1) = j & \text{nếu } q(i) = j \end{cases}$$

ta cũng được song ánh p không có điểm bất động : $S_n \to S_n$. Vậy có $(n-1)f(n-1)$ các song ánh : $S_n \to S_n$ loại này.

Tóm lại, ta có

$$f(n) = (n-1)f(n-2) + (n-1)f(n-1) \quad (2),\ \forall\, n \geqslant 3.$$

Từ (1) và (2) ta được với $n \geqslant 2$ thì

$$f(n+1) - g(n+1) = n[f(n) + f(n-1)] - (n+1)f(n) = nf(n-1) - f(n) = g(n) - f(n).$$

Mà $f(1) - g(1) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow f(2) - g(2) = 1,\ \cdots$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$f(n) - g(n) = (-1)^n \Rightarrow H(n) = |f(n) - g(n)| = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có

$$\operatorname*{Min}_{n\in \mathbb{N}^*} H(n) = \operatorname*{Max}_{n\in \mathbb{N}^*} H(n) = 1.$$

Ví dụ 7. *Trên mặt phẳng cho $2n+1$ đường thẳng ($n \in \mathbb{N}^*$). Chúng cắt nhau tạo thành các tam giác.*

Chứng minh rằng số các tam giác nhọn tạo thành không vượt quá $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải . *Gọi số các tam giác nhọn tạo thành là $f(n)$. Ta phải chứng minh*

$$f(n) \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Có thể giả sử trong $2n+1$ đường thẳng đã cho không có hai đường thẳng nào song song, không có hai đường thẳng nào vuông góc với nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy.

Thật vậy, nếu có hai đường thẳng nào song song hoặc vuông góc thì ta chỉ việc quay chúng một góc đủ nhỏ sao cho các tam giác nhọn vẫn là các tam giác nhọn, khi đó số các tam giác nhọn không giảm. Nếu có ba đường thẳng nào đồng quy thì ta tịnh tiến song song một đường với khoảng cách đủ nhỏ, số tam giác nhọn cũng không giảm.

Như vậy, ba đường thẳng bất kỳ trong số các đường thẳng đã cho luôn cắt nhau và tạo thành một tam giác hoặc nhọn hoặc tù.

Gọi $g(n)$ là số các tam giác tù. Ta gọi một tam giác tạo bởi ba đường thẳng a, b, c nào đó là "giả nhọn cạnh a" nếu các góc chung cạnh a của tam giác đó là các góc nhọn. Chọn một đường thẳng l nào đó và coi nó là trục hoành. Các đường thẳng còn lại được chia thành hai tập: Tập T^+ gồm các đường thẳng với hệ số góc dương và tập T^- gồm các đường thẳng với hệ số góc âm. Hai đường thẳng tạo với l một tam giác "giả nhọn" *nếu một đường $\in T^+$, đường kia $\in T^-$. Gọi p là số đường thẳng $\in T^+$, p là số đường thẳng $\in T^-$. Khi đó $p+q=2n$ và số tam giác "giả nhọn cạnh l" sẽ là pq. Nhớ rằng*

$$pq \leqslant \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 = n^2.$$

Nhưng l có thể là đường thẳng bất kỳ trong số $2n+1$ đường thẳng đã cho nên ta có số cặp (đường thẳng l ; tam giác "giả nhọn cạnh l") sẽ $\leqslant n^2(2n+1)$.

Trong cách tính trên mỗi tam giác nhọn được tính 3 lần (theo 3 cạnh) còn mỗi tam giác tù chỉ được tính một lần nên

$$3f(n) + g(n) \leqslant n^2(2n+1).$$

Thế nhưng tổng số các tam giác là C^3_{2n+1}, tức là

$$f(n) + g(n) = C^3_{2n+1} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}.$$

Vậy ta có

$$2f(n) \leqslant n^2(2n+1) - (f(n)+g(n)) = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\Rightarrow f(n) \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 8. *Cho $n \geqslant 3$ và các số $x_1; x_2; \cdots ; x_{n-1} \in \mathbb{N}$, biến thiên và thoả mãn*

$$\begin{cases} 1)\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = n \\ 2)\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 2n-2 \end{cases} .(ii)$$

$$\text{Tìm Min f với } f = f(x_1; x_2; \cdots ; x_{n-1}) := \sum_{k=1}^{n-1} k.x_k.(2n-k).$$

Lời giải . *Vì tập giá trị của f là tập con của $\mathbb{N}$ nên tồn tại Min f. Giả sử*

$$\mathrm{Min\,f} = \mathrm{f}(\mathrm{x}^*) = \mathrm{f}(\mathrm{x}^*_1; \mathrm{x}^*_2; \cdots ; \mathrm{x}^*_{n-1})$$

Từ điều kiện 2) suy ra $x^*_{n-1} \leqslant 2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$x^*_1 = x^*_2 = \cdots = x^*_{n-2} = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ (theo 1)).}$$

Đó là điều vô lý vì $n \geqslant 3$. Vậy $x^*_{n-1} \leqslant 1 \Rightarrow x^*_{n-1} \in \{0; 1\}$.

+) Nếu $x^*_{n-1} = 0$ thì

$$\begin{cases} 1)\ x^*_1 + x^*_2 + x^*_3 + \cdots + x^*_{n-2} = n \\ 2)\ x^*_1 + 2x^*_2 + 3x^*_3 + \cdots + (n-2)x^*_{n-2} = 2n-2 \end{cases} . \quad (i)$$

a) Nếu $\exists\, m \in \overline{1..(n-2)},\ x_m^* > 0$ *còn* $x_i^* = 0,\ \forall\, i \neq m$ *thì*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_m^* = n \\ m x_m^* = 2n - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow mn = 2n - 2$$

$$\Rightarrow n(2-m) = 2\ :\ \textit{Vô lý do } n \geqslant 3.$$

b) Nếu $\exists\, i,\ j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant n-2,\ j \geqslant i+2.$ *sao cho* $x_i^*,\ x_j^* > 0.$
Xét bộ số $x' := (x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}')$ *xác định như sau*

$$\begin{cases} x_k' = x_k^* \quad \textit{khi } k \notin \{i; j; i+1; j+1\} \\ x_i' = x_i^* + 1\ ;\ x_{i+1}' = x_{i+1}^* - 1\ ;\ x_j' = x_j^* - 1\ ;\ x_{j+1}' = x_{j+1}^* + 1 \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng bộ các số $x' := (x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}')$ *xác định như vậy thoả mãn điều kiện (ii). Nhưng*

$$f(x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*) - f(x_1'; x_2'; \cdots; x_{n-1}') = \cdots = 2(j-i) > 0$$

nên f *không đạt* Min *tại* $x^* = (x_1^*; x_2^*; \cdots; x_{n-1}^*)$.
Vậy ta phải có: $\exists\, i,\ x_i^*,\ x_{i+1}^* > 0$ *và* $x_k^* = 0,\ \forall\, k \neq i,\ i+1$. *Khi đó*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} x_i^* + x_{i+1}^* = n \\ i x_i^* + (i+1) x_{i+1}^* = 2n - 2 \end{cases} \Rightarrow x_{i+1}^* = (2-i)n - 2.$$

Do $x_{i+1}^* > 0 \Rightarrow i < 2 \Rightarrow i = 1$. *Vậy* $x_2^* = n - 2,\ x_1^* = 2$ *và*

$$f(x^*) = f(2; n-2; 0; 0; \cdots; 0) = 2(2n-1) + 2(n-2)(2n-2) = 4n^2 - 8n + 6.$$

+) Nếu $x_{n-1}^* = 0$ *thì*

$$(i) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x_1^* + x_2^* + x_3^* + \cdots + x_{n-2}^* = n - 1 \\ 2)\ x_1^* + 2x_2^* + 3x_3^* + \cdots + (n-2)x_{n-2}^* = n - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2^* = x_3^* = \cdots = x_{n-2}^* = 0,\ x_1^* = n - 1$$

$$\Rightarrow f(x^*) = 1.(n-1)(2n-1) + (n-1).1.(2n-n+1) = 3n^2 - 3n.$$

Nhưng với mọi $n \geqslant 3$ *ta luôn có*

$$(4n^2 - 8n + 6) - (3n^2 - 3n) = (n-3)(n-2) \geqslant 0$$

nên ta được kết quả sau

$$\mathrm{Min\,f} = 3\mathrm{n}^2 - 3\mathrm{n} = \mathrm{f}(\mathrm{n}-1; 0; 0; \cdots; 0; 1).$$

7.3 Bài tập tương tự

1. *Cho* $x, y, z \in \mathbb{N}^*$; $x + y + z = 100$. *Tìm Min, Max của* $P = xyz$.

2. *Cho* $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x + y = 2003$. *Tìm Min, Max của* $P = x!y!$.

3. *Cho* $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x + y = 2003$. *Tìm Min, Max của* $P = x! + y!$.

4. *Hãy viết số 2003 thành tổng của một số số nguyên dương sao cho tích của các số được viết là lớn nhất.*

5. *Cho* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *là các số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng:*

$$Inf\left[(1 - \frac{1}{p_1^2})(1 - \frac{1}{p_2^2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_n^2})\right] = \frac{1}{2}.$$

6. *Hãy tìm ước số chung lớn nhất của 20 số tự nhiên dương có tổng bằng 2002.*

7. *Cho* $n \in \mathbb{N}^*$. *Cho tập hữu hạn:*

$$S = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \text{ với } a_i \in (0; 1) \; ; \; \sum_{i=1}^{k} a_i > n.$$

$$\text{Đặt } d_S = \underset{X \subset S}{Inf}\left|n - \sum_{a_i \in X} a_i\right|.$$

Tìm
$Max d_S$ *khi S biến thiên, thoả mãn* $|S| < +\infty$

8. *Tìm số nhỏ nhất có dạng:(* $k, l \in \mathbb{Z}$*)*

   - $A = |11^k - 5^l|$.
   - $B = |36^k - 56^l|$.
   - $C = |53^k - 37^l|$.

9. *Một đội văn nghệ gồm cả học sinh nam và học sinh nữ. Hãy tính xem đội văn nghệ này có ít nhất bao nhiêu học sinh trong các trường hợp sau:*
a) Số học sinh nữ của đội nhỏ hơn 50% nhưng lớn hơn 40%.
b) Số học sinh nữ của đội nhỏ hơn 44% nhưng lớn hơn 43%.

10. *Trong một giải bóng đá có m đội tham gia theo thể thức vòng tròn một lượt. Đội thắng được hai điểm, đội hoà được một điểm, còn đội thua không được điểm. Sau giải, ban tổ chức xếp thứ tự các đội theo số điểm đạt được. Hỏi hai đội có vị thứ kề nhau có thể hơn kém nhau nhiều nhất bao nhiêu điểm?*