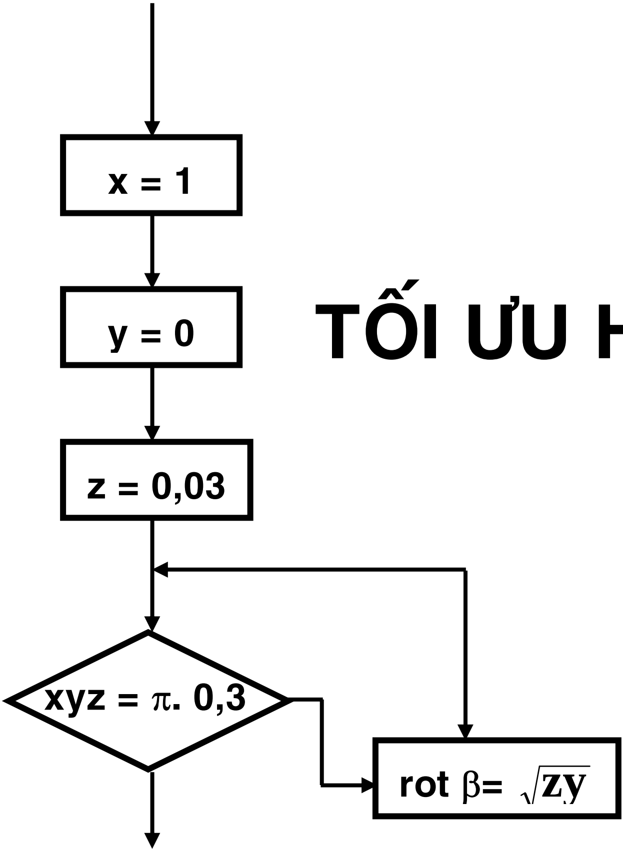
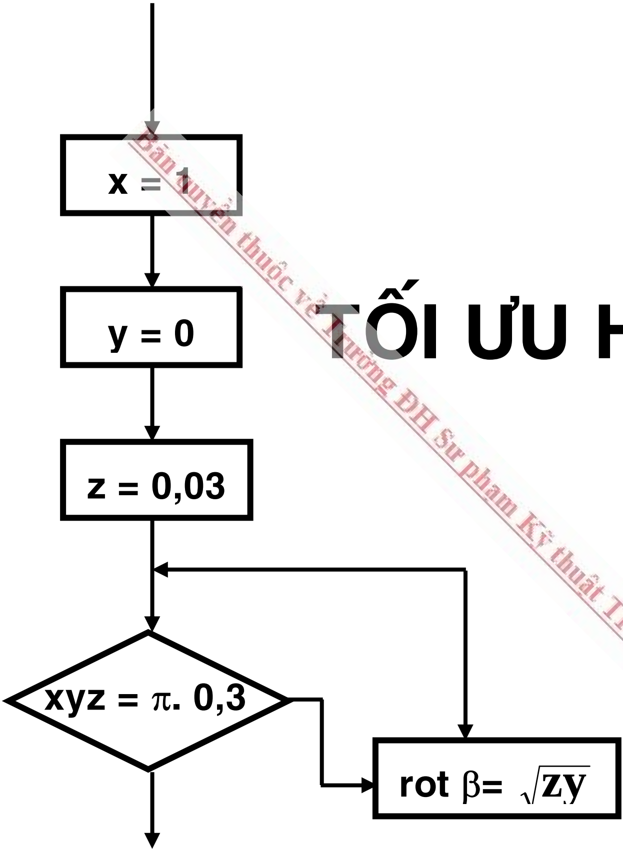
PGS.TS. PHÙNG RÂN
TS. NGUYỄN TIẾN DŨNG



TỐI ƯU HÓA

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
TP. HỒ CHÍ MINH, 2006

PGS.TS. PHÙNG RÂN
TS. NGUYỄN TIẾN DŨNG



TỐI ƯU HÓA

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
TP. HỒ CHÍ MINH, 2006

LỜI NÓI ĐẦU

"Tối ưu hóa" thuộc loại toán ứng dụng. Đây là phần kiến thức không thể thiếu đối với người làm việc trong các lĩnh vực ứng dụng khoa học, kỹ thuật, kinh tế.

Tài liệu khái quát giới thiệu về "tối ưu hóa" và tập trung đề cập về "Qui hoạch tuyến tính".

Qui hoạch tuyến tính là bài toán tối ưu đặc trưng giúp giải quyết các vấn đề kinh tế – kỹ thuật. Hy vọng qua tài liệu này, người học có thể nghiên cứu, phân tích các tình huống thực tế, xác lập được bài toán hữu ích cho công việc của mình.

Mặc dù tài liệu này đã được sửa chữa bổ xung nhưng khó tránh khỏi những sai sót. Rất mong nhận được những góp ý của độc giả để tài liệu hoàn chỉnh hơn.

Tp.HCM, 12-2006

Các tác giả

MỤC LỤC

Trang

I. NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TỐI ƯU HÓA

I.1. Định nghĩa và ý nghĩa các thuật ngữ

1. Tối ưu: là ***tốt nhất.***

Khái niệm này hàm chứa kết quả so sánh, lựa chọn. Tức là trong một tập hợp các sự kiện, các sự vật, các hiện tượng cùng trong một phạm vi điều kiện như nhau (cùng điều kiện ràng buộc), dựa vào một tiêu chí cần đạt nào đó (gọi là mục tiêu), ta chọn ra một sự kiện, sự vật hoặc hiện tượng đạt được mục tiêu cao nhất. Lúc này ta nói: Sự kiện, sự vật hoặc hiện tượng được chọn ra đó là tốt nhất (tối ưu).

Từ khái niệm trên ta có nhận xét:

- Số lượng sự kiện, sự vật, hiện tượng trong tập hợp dùng để so sánh càng lớn thì tính đại diện tốt nhất càng cao.

- Tập hợp các điều kiện ràng buộc tạo nên miền giới hạn phạm vi so sánh, lựa chọn – ta thường gọi là miền cho phép.

2. Tối ưu hóa: là ***làm cho tốt nhất***.

Khái niệm này chỉ rõ: Để có được kết quả tốt nhất cần có sự tác động, điều khiển từ bên ngoài.

Thực tế cho thấy: mọi sự kiện, sự vật, hiện tượng trong phạm vi cụ thể nào đó đều diễn biến dưới sự chi phối của nhiều yếu tố ảnh hưởng khác nhau. Nếu biết được qui luật chi phối của các yếu tố đến sự kiện, sự vật, hiện tượng thì ta sẽ điều khiển qui luật chi phối để nhận được kết quả mong muốn một cách tốt nhất.

Từ khái niệm này để làm cho tốt nhất ta cần xác định:

– Mục tiêu mong đợi của sự vật, sự kiện, hiện tượng mà ta quan tâm.

– Các yếu tố chi phối đến mục tiêu ta mong đợi và qui luật chi phối.

– Phạm vi diễn biến của sự vật, sự kiện, hiện tượng ta khảo sát.

3. **Bài toán tối ưu**

Khi tiến hành lập kế hoạch sản xuất; khi thiết kế sản phẩm, công trình hoặc hệ thống; khi điều khiển các quá trình, nếu biết dựa trên nguyên lý cực trị ta sẽ không chỉ đạt được những mục tiêu về kỹ thuật mà còn đạt được hiệu quả kinh tế cao.

Công cụ toán học giúp ta giải quyết dung hòa mâu thuẫn giữa yêu cầu kỹ thuật và hiệu quả kinh tế chính là bài toán tối ưu hay còn gọi là qui hoạch toán học.

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau:

Cực đại hóa (cực tiểu hóa) hàm:

$$f(x) \to \max\ (\min) \qquad (1\text{-}1)$$

Thỏa với các điều kiện:

$$g_i(x) \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i\ ,\ \ i = 1, \dots, m \qquad (1\text{-}2)$$

$$x \in X \subset R^n \qquad (1\text{-}3)$$

Bài toán trên được gọi là qui hoạch. Trong đó:

- f(x) gọi là hàm mục tiêu
- Các hàm g_i (x), i=1:m gọi là hàm ràng buộc. Mỗi đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hệ (1-2) gọi là một ràng buộc.
- Tập hợp $D = \{x \in X \mid g_i(x) \left\{\begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix}\right\} b_i \;\; i=1:m\}$ gọi là miền ràng buộc (hay miền chấp nhận được, miền cho phép).
- Mỗi điểm $x(x_1, x_2..., x_n) \in D$ gọi là một phương án (hay một nghiệm, một lời giải chấp nhận được).
- Một phương án $x^* \in D$ làm cho hàm mục tiêu f(x) đạt max (hoặc min), cụ thể là:

$f(x^*) \ge f(x), \forall x \in D$ (đối với bài toán Max)

$f(x^*) \le f(x), \forall x \in D$ (đối với bài toán Min)

được gọi là phương án tối ưu (lời giải tối ưu), khi đó $f(x^*)$ gọi là giá trị tối ưu của bài toán.

4. Phân loại bài toán tối ưu

Với định nghĩa bài toán tối ưu như trên ta có thể suy ra phương pháp tổng quát để giải bài toán là phương pháp duyệt toàn bộ. Bản chất phương pháp này là: tìm giá trị của hàm mục tiêu f(x) trên tất cả các phương án, sau đó so sánh các giá trị tính được để tìm ra giá trị tối ưu và phương án tối ưu của bài toán.

Tuy nhiên ta dễ dàng nhận thấy rằng: trong tập D gồm một số rất lớn các phần tử, thậm chí không đếm được. Vì vậy, thực tế phương pháp duyệt toàn bộ là không khả thi.

Để khắc phục khó khăn trên, cần có những nghiên cứu về mặt lý thuyết để có thể tách từ bài toán tổng quát thành những lớp bài toán để giải. Thường những nghiên cứu này là nghiên cứu các tính chất của các thành phần cấu thành bài toán (như hàm mục tiêu, các hàm ràng buộc, các biến số, tham số); các điều kiện tồn tại lời giải; các điều kiện cần và đủ của cực trị; tính chất của các đối tượng nghiên cứu khảo sát.

Thông thường dựa vào tính chất các thành phần của bài toán và đối tượng nghiên cứu để phân loại các bài toán, người ta phân ra:

- **Qui hoạch phi tuyến (QHPT):** Nếu hàm mục tiêu f(x) hoặc có ít nhất một trong các hàm ràng buộc $g_i(x)$ là phi tuyến, hoặc cả f(x) và một hàm $g_i(x)$ cùng là phi tuyến.

- **Qui hoạch tuyến tính (QHTT):** Bài toán tối ưu được gọi là QHTT nếu hàm mục tiêu f(x) và tất cả các hàm ràng buộc $g_i(x)$, i=1:m là tuyến tính.

- **Qui hoạch động (QHĐ):** Bài toán tối ưu được gọi là qui hoạch động nếu đối tượng xét là các quá trình có nhiều giai đoạn nói chung, hay các quá trình phát triển theo thời gian nói riêng.

- **Qui hoạch tham số (QHTS):** Bài toán tối ưu được gọi là qui hoạch tham số nếu các hệ số trong biểu thức của hàm mục tiêu và các ràng buộc phụ thuộc vào tham só.

- **<u>Qui hoạch rời rạc (QHRR)</u>:** Bài toán tối ưu được gọi là QHRR nếu miền ràng buộc D là tập hợp rời rạc. Trong trường hợp riêng khi các biến chỉ nhận giá trị nguyên thì ta có qui hoạch nguyên. Trường hợp qui hoạch nguyên mà biến chỉ nhận giá trị 0 hay 1 gọi là qui hoạch biến Boole.

- **<u>Qui hoạch đa mục tiêu (QHĐMT):</u>** Nếu trên cùng một miền ràng buộc ta xét đồng thời các hàm mục tiêu khác nhau.

Trong các lĩnh vực kinh tế kỹ thuật thì QHPT, QHTT và QHĐ là những bài toán thường gặp. Đặc biệt bài toán qui hoạch tuyến tính là bài toán thông dụng đã được nghiên cứu kỹ cả lý thuyết lẫn phương pháp giải.

I.2. <u>Một số khái niệm về giải tích lồi và đại số làm cơ sở nghiên cứu tối ưu hóa</u>.

I.2.1 <u>Một số khái niệm giải tích lồi</u>

<1> <u>Không gian Euclic</u>

- Một vectơ n chiều là một hệ gồm n số thực $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Các x_i, $i = 1,\dots,n$ gọi là các thành phần của vectơ.

- Hai vectơ x và y gọi là bằng nhau $x = y$ nếu $x_i = y_i$, $\forall i$.

- Có định nghĩa các phép toán trên các vectơ như sau:

- Tập hợp tất cả các vectơ n chiều xác lập phép cộng vectơ: $x + y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

- Nhân một số thực với vectơ gọi là không gian tuyến tính n chiều: $\alpha n = (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n)$, ký hiệu là R^n.

- Các vectơ $x, y, z, \dots, v \in R^n$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu: $\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \phi v = 0 \rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \dots = \phi = 0$

- Nếu $x = \lambda y + \mu z + ... + \rho v$ thì x là tổ hợp tuyến tính của y, z và v.

- Trong R^n có n vectơ độc lập tuyến tính lập thành cơ sở của nó. Giả sử $c^1, c^2, ..., c^n$ là một cơ sở của R^n thì bất kỳ một vectơ $x \in R^n$ đều là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $c^1, c^2, ..., c^n$.

- Ta gọi tích vô hướng của hai vectơ:

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

Ký hiệu là : $< x, y >$ là một số bằng:

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Ta cần chú ý đến tính chất của tích vô hướng:

1) Tính chất giao hoán:

$$< x, y > = < y, x >$$

2) Tính chất phân phối đối với phép cộng :

$$< x^1 + x^2, y > = < x^1, y > + < x^2, y >$$

3) $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$

4) $< x, x > \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

- Độ dài của một vectơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là một số thực không âm.

$$|x| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Không gian vectơ trong đó dựa vào phép toán tích vô hướng, và do đó đưa vào khoảng cách gọi là không gian

Euclid. Khoảng cách giữa hai vectơ x và y là một số xác định bởi:

$$\text{dis}(x,y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

<2> Khái niệm đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng

* Cho hai điểm a, b $\in R^n$:

- Ta gọi đường thẳng qua a, b là tập hợp điểm có dạng:

$$\{x \in R^n \mid x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in R\}$$

- Nếu $0 \le \lambda \le 1$ thì ta có đoạn thẳng [a,b].

* Trong không gian hai chiều, phương trình bậc nhất ax + by = c xác định một đường thẳng, bất phương trình ax+by ≤ c xác định một nửa mặt phẳng.

* Trong không gian ba chiều, một phương trình bậc nhất ax+by+cz = d xác định một mặt phẳng; một bất phương trình ax+by+cz ≤ d xác định một nửa không gian.

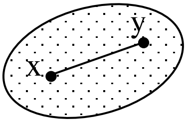
* Ta có thể suy rộng kết quả trên cho không gian n chiều: tập hợp tất cả các điểm trong không gian n chiều thỏa mãn phương trình bậc nhất: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \alpha$ là một siêu phẳng. Một bất phương trình: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le \alpha$ xác định một nửa không gian.

<3> Tập lồi

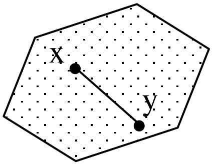
* Tập $X \subset R^n$ được gọi là lồi nếu cùng với việc chứa hai điểm x, y nó chứa cả đoạn thẳng nối hai điểm ấy, tức là chứa tất cả các điểm có dạng:

$$\lambda x + (1-\lambda)y\ ,\ 0 \le \lambda \le 1$$

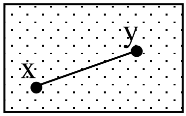
Ví dụ: Không gian Euclid, các nửa không gian, mặt phẳng, nửa mặt phẳng, hình chữ nhật, hình vuông, hình elip, hình hộp.



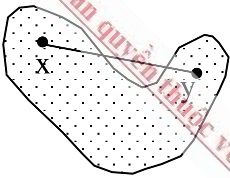
a)



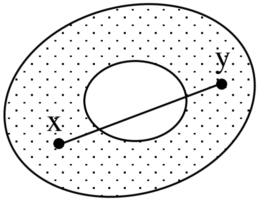
b)



c)



d)



e)

Ghi chú : - Hình a, b, c là các tập lồi.
- Hình d, e là các tập không lồi.

* **<u>Các định lý và hệ quả liên quan đến tập lồi</u>**

<u>Định lý 1</u>: Giao của hai tập lồi là một tập lồi.

Hệ quả 1: Giao của một số bất kỳ tập hợp lồi là tập lồi.

Hệ quả 2: Miền chứa nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

là một tập lồi – Người ta gọi là một tập lồi đa diện.

Định lý 2: Một tập lồi đa diện đóng X có ít nhất một đỉnh (có thể không giới nội) được biểu diễn bởi tập hợp tất cả những điểm có dạng:

$$x = \sum_{i\in I}\lambda_i d^i + \sum_{j\in J}\mu_j g^j$$

Trong đó: $\lambda_i \geq 0$; $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$, $\mu_j \geq 0$

Còn d^i với $i \in I$ là các đỉnh của X, g^j với $j\in J$ là phương các cạnh vô hạn của X. Nếu X giới nội thì trong biểu diễn chỉ còn lại tổng thứ nhất (biểu diễn một điểm $x\in X$ qua các đỉnh của nó).

I.2.2. Một số khái niệm từ đại số

<1> Ma trận

Ma trận là một bảng chữ nhật gồm m×n số sắp thành m hàng và n cột có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

và được ký hiệu: $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận có kích thước $m \times n$.

- Ma trận có số hàng bằng số cột (m = n) gọi là ma trận vuông và gọi là ma trận có cấp n.
- Ma trận mà các cột của nó là các hàng tương ứng của ma trận ban đầu A gọi là ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A'.

- Ma trận chỉ có một cột gọi là vectơ cột.
- Ma trận chỉ có một hàng gọi là vectơ hàng.
- Ma trận vuông có dạng:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & . & . & . & \alpha_n \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận đường chéo.

- Nếu ma trận đường chéo có $\alpha_i = 1$, i = 1:n thì gọi là ma trận đơn vị, thường được ký hiệu là E hoặc I.

- Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng kích thước và các phần tử tương ứng bằng nhau.

- Muốn nhân ma trận với một hằng số α, ta nhân mỗi phần tử của ma trận với số đó:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

- Tổng của hai ma trận A và B có cùng kích thước là một ma trận C mà mỗi phần tử của nó bằng tổng các phần tử tương ứng của ma trận A và ma trận B.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \;;\; \forall i, j$$

- Ma trận A nhân được với ma trận B chỉ trong trường hợp số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B, tức là:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \,,\; B = (b_{jk})_{n\times l} \,,\; c = (c_k)_{m\times l}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \,,\; i=1:m \,,\; k=1:l$$

<2> <u>Định thức</u>

* Ta gọi định thức cấp hai tương ứng với ma trận vuông cấp hai; ký hiệu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

* Ta gọi định thức cấp ba tương ứng với ma trận vuông cấp ba; ký hiệu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Cách tính của định thức cấp ba được mô tả bằng qui tắc Xarut như sau: ba số hạng đầu được thiết lập song song với đường chéo chính, ba số hạng sau được thiết lập song song với đường chéo phụ.

* Các tính chất của định thức:

<u>Tính chất 1</u>: Định thức không thay đổi khi ta thay đổi hàng thành cột, cột thành hàng. (chuyển vị)

<u>Tính chất 2</u>: Nếu đổi chỗ hai cột (hai hàng) cho nhau thì định thức đổi dấu.

<u>Tính chất 3</u>: Thừa số chung của một cột có thể đưa ra ngoài dấu của định thức.

<u>Tính chất 4</u>: Nếu các phần tử của một cột (hay hàng) tỷ lệ với các phần tử tương ứng của cột khác (hàng khác) thì định thức bằng 0.

Tính chất 5: Nếu mỗi phần tử của một cột có thể tách thành tổng của hai số thì định thức đó cũng tách thành tổng của hai định thức tương ứng.

Tính chất 6: Định thức sẽ không đổi nếu cộng thêm vào các phần tử của một cột (hàng) nào đó các phần tử của cột khác (hàng khác) đã nhân với một hằng số.

* Để tính định thức cấp cao (n≥4) ta phải sử dụng khái niệm phần phụ đại số và khai triển định thức theo một cột (hay một hàng).

Định thức ứng với ma trận vuông cấp n được gọi là định thức cấp n:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1j} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & . & . & . & a_{ij} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & .. & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nj} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định thức cấp (n-1) có từ định thức cấp n bằng cách bỏ đi hàng i và cột j được gọi là định thức con ứng với phần tử a_{ij} của định thức Δ và được ký hiệu là M_{ij}.

Định nghĩa:

Phần phụ đại số ứng với phần tử a_{ij}, ký hiệu là A_{ij} là định thức con M_{ij} kèm theo dấu (+) nếu tổng các chỉ số (i+j) là chẵn, kèm theo dấu (-) nếu tổng (i+j) là lẻ.

Ví dụ: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Định thức cấp n có thể khai triển theo cột j dưới dạng:

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$$

hoặc theo hàng i:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

<3> <u>Ma trận nghịch đảo, hạng của ma trận</u>

* Ma trận vuông A được gọi là không suy biến nếu nó có định thức $\Delta \neq 0$, ngược lại A gọi là suy biến.

* Đối với mỗi ma trận A không suy biến sẽ tồn tại một ma trận (ký hiệu là A^{-1}) thỏa mãn điều kiện:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A. Ma trận A^{-1} có dạng:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Trong đó A_{ij} là phần phụ đại số của a_{ij}.

* Xét ma trận $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Từ ma trận A lấy ra k hàng và k cột bất kỳ với $k \leq \min\{m,n\}$ thì những phần tử chung của k hàng và k cột đó tạo thành một ma trận vuông. Định thức ứng với ma trận vuông đó gọi là định thức con cấp k của ma trận A.

<u>Định nghĩa</u>:

Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A gọi là hạng của ma trận A, ký hiệu là r(A).

Ta dễ dàng thấy: $0 < r(A) \leq \min\{m,n\}$.

* Hạng của ma trận không đổi nếu ta thực hiện các phép:

- Đổi cột thành hàng, hàng thành cột.
- Đổi chỗ 2 hàng (hoặc 2 cột) cho nhau.
- Nhân các phần tử của cùng một hàng (một cột) cùng với một số khác 0.
- Cộng vào một hàng (cột) các phần tử tương ứng của hàng (cột) khác đã được nhân với một số.
- Thêm hoặc bớt đi một hàng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (cột) khác. Trong trường hợp riêng là thêm hoặc bớt đi một hàng (cột) gồm toàn số 0.
- Cách tính hạng ma trận: nếu một định thức cấp k nào đó của ma trận A khác 0 mà các định thức cấp (k+1) chứa nó đều bằng 0 thì r(A) = k.

<4> <u>Hệ phương trình đại số tuyến tính</u>

* Dạng đơn giản của hệ phương trình đại số tuyến tính là:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & . & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & . & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \;\; . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & . & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Hệ này viết dưới dạng ma trận Ax = b

Hệ phương trình đại số tuyến tính được phân biệt:

- Không thuần nhất: nếu có ít nhất một số $b_i \neq 0$.
- Thuần nhất: nếu có tất cả các số b_i đều bằng 0: $b_i = 0, \forall i$.

- Tương thích: nếu hệ có ít nhất một nghiệm, tức là tồn tại một bộ giá trị $x_1, x_2,..., x_n$ thỏa mãn hệ phương trình.

- Không tương thích: nếu hệ không có một nghiệm nào.

- Xác định: Nếu hệ chỉ có một nghiệm duy nhất.

- Bất định: nếu hệ tồn tại quá một nghiệm.

* Khi giải hệ phương trình đại số tuyến tính, có thể xảy ra hai trường hợp: m = n và m≠n.

a) <u>Trường hợp m = n</u>

Giả sử ma trận A không suy biến (tức là tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}). Ta có:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

Bởi vì: $A^{-1}A = E$ và nhân bất cứ ma trận nào với E sẽ được đúng ma trận đó nên $x=A^{-1}b$ và ta có công thức Crame tính nghiệm duy nhất:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ \ i= 1, \dots , n$$

Trong đó Δ_i được thiết lập từ Δ của ma trận A bằng cách thay cột i bởi một số hạng tự do.

b) <u>Trường hợp m ≠ n</u>

* Sau khi thêm một cột các số hạng tự do b vào ma trận A ta lập được ma trận mở rộng B:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{vmatrix}$$

* Ta cần quan tâm hai định lý quan trọng sau đây:

<u>Định lý 1</u>: (Định lý Crôneke – Capeli)

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là: r(A) = r(B)

- Nếu r(A) = r(B) = n thì hệ có nghiệm duy nhất.
- Nếu r(A) = r(B) < n thì hệ có vô số nghiệm.
- Nếu r(A) = r(B) > n thì hệ không tương thích.

<u>Định lý 2</u>

- Nếu r(A) = n thì nghiệm thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường (***)
- Nếu r(A) < n thì hệ thuần nhất có vô số nghiệm, do đó ngoài nghiệm tầm thường còn có nghiệm không tầm thường.

(***) Giải thích nghiệm tầm thường:

Xét hệ phương trình thuần nhất :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & . & . & . & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{21}x_2 & + & . & . & . & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & . & . & . & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Hệ này luôn luôn tương thích vì nó có nghiệm tầm thường là $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$

II. QUI HOẠCH TUYẾN TÍNH (QHTT)

II.1. Những tình huống thực tế dẫn đến bài toán QHTT

1. Bài toán lập kế hoạch

Một xí nghiệp muốn sản xuất 2 loại sản phẩm S_1 và S_2 bằng 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3. Suất chi phí nguyên liệu để sản xuất các sản phẩm được thống kê theo bảng sau:

Nguyên liệu \ Sản phẩm	S_1	S_2
N_1	2	1
N_2	1	2
N_3	0	1

Số liệu trong bảng có nghĩa là:

- Để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_1 cần dùng 2 đơn vị nguyên liệu N_1 và 1 đơn vị N_2.

- Để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_2 cần dùng 1 đơn vị nguyên liệu N_1, 2 đơn vị N_2 và 1 đơn vị N_3.

- Để bảo đảm sản xuất liên tục, xí nghiệp dự trữ 8 đơn vị nguyên liệu N_1, 7 đơn vị nguyên liệu N_2, 3 đơn vị nguyên liệu N_3.

Theo thị trường: tiền lãi trên 1 đơn vị sản phẩm S_1 là 4 triệu đồng, tiền lãi trên 1 đơn vị sản phẩm S_2 là 5 triệu đồng.

Yêu cầu: Lập kế hoạch sản xuất (số lượng sản phẩm S_1 và S_2) sao cho xí nghiệp thu tiền lãi lớn nhất với những hạn chế về nguyên liệu như trên.

Phân tích mô hình toán học

Gọi x_1 là số lượng sản phẩm S_1, x_2 là số lượng sản phẩm S_2. Như vậy tiền lãi thu được từ sản xuất 2 loại sản phẩm S_1 và S_2 sẽ là $4x_1+5x_2$. Mong muốn lãi suất là lớn nhất, ta có thể biểu diễn:

$$f(x) = 4x_1+5x_2 \rightarrow \max$$

Từ bảng chi phí nguyên liệu và số lượng dự trữ nguyên liệu của xí nghiệp ta có:

+ Nguyên liệu N_1 dùng cho sản xuất S_1 và S_2 là $2x_1+x_2$, lượng nguyên liệu này không thể vượt quá lượng dự trữ được của xí nghiệp, tức là:

$$2x_1+x_2 \leq 8$$

+ Nguyên liệu N_2 dùng cho sản xuất S_1 và S_2 là x_1+2x_2, lượng nguyên liệu này không thể vượt quá lượng dự trữ được của xí nghiệp, tức là:

$$x_1+2x_2 \leq 7$$

+ Tương tự phân tích như vậy cho loại nguyên liệu N_3, ta có:

$$x_2 \leq 3$$

+ Tất nhiên x_1,x_2 số lượng sản phẩm S_1 và S_2, do đó:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Tổng hợp các phân tích trên ta có mô hình bài toán:

<1> $f(x) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

<2> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$

<3> $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Ở bài toán này người ta gọi:

<1> là hàm mục tiêu, thường ký hiệu là f(x), Z.

<2> là các ràng buộc cơ bản.

<3> là các ràng buộc phụ (ràng buộc về các dấu của các biến).

<u>Tổng quát hóa bài toán lập kế hoạch tối ưu:</u>

- Từ tình huống cụ thể trên, ta có thể tổng quát hóa như sau:

Giả sử một đơn vị (hoặc cá nhân) muốn sản xuất n loại sản phẩm (S_1, S_2,..., S_n) bằng cách sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau (N_1, N_2,..., N_m).

Ta đặt các ký hiệu sau:

x_j: là lượng sản phẩm các loại (j = 1 : n).

c_j: là tiền lãi trên 1 đơn vị sản phẩm.

a_{ij}: là suất chi phí nguyên liệu loại i để sản xuất ra 1 đơn vị sản phẩm loại j (đ/sản phẩm).

b_i: là lượng dự trữ các loại nguyên liệu (i = 1 : m)

Trong những điều kiện đã cho như trên, yêu cầu: hãy xác định giá trị x_j (j = 1:n) sao cho tổng tiền lãi là lớn nhất trong điều kiện nguyên liệu đang có: mô hình bài toán có dạng tổng quát như sau:

<1> $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

<2> $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, j = 1:n, i = 1:n$$

<3> $$x_j \ge 0, j = 1:n$$

2. Bài toán vận tải

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa (được đánh số i= 1:m), lượng hàng hóa ở kho thứ i được kí hiệu là a_i i= 1:m. Có n địa điểm nhận tiêu thụ hàng hóa trên (được đánh số j = 1:n), với nhu cầu tiêu thụ ở địa điểm j được kí hiệu là b_j, j = 1:n.

Ta gọi kho i là điểm xuất phát, điểm tiêu thụ j là điểm đến. Gọi c_{ij} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm xuất phát i đến điểm đến j.

Yêu cầu: Hãy lập kế hoạch vận chuyền hàng hóa từ điểm xuất tới điểm đến sao cho tổng chi phí vận chuyền là nhỏ nhất.

Phân tích lập mô hình toán:

Ta đặt x_{ij} là lượng hàng hóa vận chuyển từ điểm xuất phát i đến điểm đến j. Vậy tổng chi phí vận chuyển là $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, mong muốn tổng chi phí này là nhỏ nhất.

Các điều kiện đã cho ta có thể biểu diễn:

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ là lượng hàng hóa chuyển khỏi kho i
- $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$ là lượng hàng hóa chuyển đến điểm tiêu thụ j.

Vì x_{ij} là lượng hàng hóa nên $x_{ij} \geq 0$

Ngoài ra cần đảm bảo điều kiện cân bằng xuất - nhập nên:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Tổng hợp các phân tích trên ta có mô hình bài toán:

<1> $$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

<2> $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

<3> $$x_{ij} \geq 0, i = 1:m, j = 1:n$$

3. Bài toán sử dụng vật tư

Một nhà máy sử dụng m loại vật tư V_i (i=1:m) để sản xuất n mặt hàng H_j (j = 1:n).

Gọi:

- b_i là lượng vật tư thứ i
- a_{ij} là số đơn vị vật tư thứ i để sản xuất một đơn vị mặt hàng j
- c_j tiền lãi thu được từ một đơn vị mặt hàng H_j
- x_j là lượng sản phẩm của mặt hàng H_j .

Yêu cầu: Hãy tìm số lượng sản phẩm sản xuất ra trong điều kiện đã cho để tiền lãi thu về là lớn nhất.

Tương tự như cách phân tích ở các bài toán trên, ta có mô hình toán như sau:

<1> $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$

<2> $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;, i = 1:m$

<3> $x_j \geq 0, j = 1:n$

4. Bài toán cái túi

Một người khách du lịch muốn mang theo 1 cái túi nặng không quá b kg. Người khách dự định mang theo n loại vật dụng, mỗi loại vật dụng j có khối lượng là a_j kg và có giá trị là c_j.

Người khách du lịch muốn chất vào túi các vật dụng sao cho tổng giá trị các đồ vật mang theo là lớn nhất.

Ta ký hiệu x_j là số đồ vật loại j sẽ chất vào túi, ta có bài toán sau:

<1> $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$

<2> $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$

<3> $x_j \ge 0,\ j = 1:n$ x_j nguyên

5. Bài toán pha trộn

Một nhà máy luyện kim muốn sản xuất một hợp kim với thành phần 20% bạc, 30% đồng, 50% nhôm. Họ sử dụng các loại nguyên liệu: bạc, đồng, nhôm, hợp kim A, hợp kim B, hợp kim C. Hàm lượng các nguyên liệu và giá một đơn vị khối lượng mỗi loại (USD/kg) được cho ở bảng sau:

Hàm lượng Nguyên tố \ Nguyên tố	Bạc	Đồng	Nhôm	A	B	C
Bạc	100%	0	0	30%	50%	40%
Đồng	0	100%	0	40%	20%	35%
Nhôm	0	0	100%	30%	30%	25%
Đơn giá	1500	300	100	1000	1200	1100

Yêu cầu: Hãy lập phương án pha trộn thế nào để giá thành sản phẩm là thấp nhất.

Phân tích:

Đặt x_j, j = 1: 6 là khối lượng (kg) bạc, đồng, nhôm, A, B, C tương ứng để sản xuất 1kg hợp kim (các x_j này cũng đồng thời là tỷ lệ pha trộn các nguyên liệu khi sản xuất ra hợp kim).

Trong 1kg hợp kim mới tạo ra sẽ chứa 0,2kg bạc, 0,3kg đồng, 0,5kg nhôm. Từ bảng đã cho và các số liệu trên, ta có:

- $x_j \geq 0$, $j = 1: 6$
- Lượng bạc chứa trong 1 kg sản phẩm là:

  $x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6$ lượng này phải bằng 0,2kg.
- Lượng đồng chứa trong 1 kg sản phẩm là:

  $x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6$ lượng này phải bằng 0,3kg.
- Lượng nhôm chứa trong 1 kg sản phẩm là:

  $x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6$ lượng này phải bằng 0,5kg.
- Giá thành 1 kg sản phẩm sẽ là:

  $1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6$

Tổng này càng nhỏ càng tốt.

Tổng hợp các phân tích trên ta nhận được mô hình bài toán:

<1> $f(x) = 1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6 = 0,2 \\ x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6 = 0,3 \\ x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6 = 0,5 \end{cases}$$

<3> $x_j \geq 0$, $j = 1 : 6$

II.2. Định nghĩa và các dạng của bài toán QHTT

1. Định nghĩa

QHTT là một môn toán học nghiên cứu phương pháp tìm cực trị (nhỏ nhất hoặc lớn nhất) của một hàm tuyến tính, thỏa mãn một số hữu hạn các ràng buộc được biểu diễn bằng hệ các phương trình và bất phương trình tuyến tính.

2. Các dạng cơ bản của bài toán QHTT

Qua 5 ví dụ ở phần II.1, ta có nhận xét: mọi bài toán đều dẫn về mô hình toán học gồm có 3 thành phần:

- Hàm mục tiêu là một tổ hợp tuyến tính của các ẩn số biểu thị một đại lượng nào đó mà ta mong muốn của bài toán.
- Các ràng buộc cơ bản là các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính n ẩn số, nảy sinh do hạn chế về tài nguyên, về kế hoạch sản xuất, yêu cầu kỹ thuật...
- Các ràng buộc phụ là tính chất của các ẩn số.

Để tiện cho nghiên cứu, giải bài toán, căn cứ vào các kiểu ràng buộc, tính chất ẩn số...người ta phân bài toán QHTT thành các dạng khác nhau. Việc phân dạng các bài toán ở các tài liệu tham khảo không hoàn toàn giống nhau. Ở đây với mục đích tìm phương pháp giải, ta chỉ giới thiệu 3 dạng của bài toán là dạng tổng quát, dạng chính tắc và dạng chuẩn.

a/ Dạng tổng quát

<1> $$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \ (\max)$$

<2> $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\geq, \leq, =)\, b_i \ , i = 1{:}m$$

<3> $$x_j (\geq, \leq, \text{ tùy ý})\ 0,\ j = 1{:}n.$$

Bài toán được phát biểu như sau: Tìm giá trị $x^* = \{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\}$ làm cho hàm mục tiêu f(x) → min (max), thỏa mãn với các ràng buộc <2> và <3>.

Dạng tổng quát của bài toán được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

<1> $f(x) = c.x \rightarrow \min (\max)$

<2> $A.x \ (\geq, \leq, =)\ b$

<3> $x \ (\geq, \leq,$ Tùy ý$)\ 0$

b/ <u>Dạng chính tắc</u> (canonical)

<1> $f(x) = c.x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min\ (\max)$

<2> $A.x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1:m$

<3> $x = x_j \geq 0$

Khai triển các phần tử trên ta có:

- A: ma trận hệ số của các ràng buộc:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots.. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- x: ma trận các ẩn:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, x_j \geq 0$$

- b: ma trận vế phải các ràng buộc cơ bản:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Đặc trưng dạng chính tắc là:

+ Các ràng buộc đều ở dạng đẳng thức (phương trình)

+ Các ẩn số đều không âm.

<u>c/ Dạng chuẩn</u> (standar)

<1> $f(x) = c.x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$

<2> $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1{:}m$

<3> $x_j \ge 0, j = 1{:}n.$

3. Quy tắc biến đổi dạng bài toán QHTT.

a/ Đưa bài toán f(x) → min về f(x) → max và ngược lại:

Trong bài toán $f(x) = c.x \rightarrow \min$, ta đặt $f'(x) = -c.x \rightarrow \max$.

Gọi x^* là nghiệm tối ưu của $f'(x)$ và $-c.x^* = \max f'(x)$

Khi đó $-c.x^* \ge c.x$ hay $c.x^* \le c.x$.

Như vậy chứng tỏ: x^* cũng là nghiệm tối ưu của bài toán f(x) → min.

Tức là $\min f(x) = c.x^* = -\max f'(x) = \max(-f'(x))$

b/ Phương trình hóa các bất phương trình ở hệ ràng buộc và ngược lại

*** Khi ràng buộc có dạng A.x ≤ b** ta thêm vào các biến phụ:

w = [x_{n+1}, ..., x_{n+m}] khi đó A.x ≤ b sẽ là A.x + E.w = b.

trong đó E là ma trận đơn vị, w ≥ 0.

Chú ý:

Ẩn phụ thêm vào là ẩn chưa có ở hệ ràng buộc và có giá trị không âm. Hệ số ẩn phụ đưa vào là +1. Những ẩn phụ như vậy cũng là ẩn cơ bản (độc lập tuyến tính).

Hệ số của ẩn phụ trong hàm mục tiêu bằng không (ẩn phụ không chi phối hàm mục tiêu).

Ví dụ:

Dạng tổng quát ------> Dạng chính tắc

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18 \\ 0,5x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 \le 12 \\ x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1:2$$

$$f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ 0,5x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_5 = 12 \\ x_2 + x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1:6$$

*** Khi ràng buộc có dạng A.x ≥ b:** ta trừ các biến phụ không âm. Những biến phụ này cũng không chi phối hàm mục tiêu.

Ví dụ:

Dạng tổng quát -----> Dạng chính tắc

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$$

$$f(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 4 \\ 4x_3 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1:3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ 4x_3 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_7 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1:7$$

* **Ràng buộc ở dạng đẳng thức A.x = b** có thể thay bằng hai ràng buộc bất đẳng thức $A.x \le b$ và $-A.x \le -b$ hay $A.x \ge b$.

c/ Khử các ẩn $x_j \le 0$ hoặc x_j tùy ý

- Với các ẩn $x_j \le 0$: Ta đặt $x'_j = -x_j \ge 0$ và khử x_j này ra khỏi bài toán. Sau khi giải bài toán theo x'_j, ta lại căn cứ vào điều kiện đầu để tìm x_j.
- Với các ẩn x_j tùy ý (không hạn chế: khc): ta thay ẩn x_j tùy ý bằng hiệu 2 ẩn mới không âm và khử x_j tùy ý ra khỏi bài toán. Sau khi giải theo 2 ẩn mới, ta quay lại điều kiện đặt ban đầu để tìm giá trị ẩn x_j tùy ý.

Ví dụ:

<1> $f(x) = 15x_1 + 27x_2 + 18x_3 \to \max$

$$<2> \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$$

$$<3> \quad x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{ tùy ý}$$

Chú ý ở các ràng buộc phụ có $x_2 \le 0$ và x_3 tùy ý. Ta khử x_2 bằng cách đặt $x_2 = -x'_2$, với $x'_2 \ge 0$, loại x_2 ra khỏi bài toán. Khử x_3 bằng cách đặt $x_3 = x'_3 - x''_3$ với $x'_3, x''_3 \ge 0$, loại x_3 ra khỏi bài toán.

Bằng cách khử như vậy, ta nhận được, mô hình bài toán:

$$<1> \quad f(x) = 15x_1 - 27x'_2 + 18(x'_3 - x''_3) \to \max$$

$$<2> \quad \begin{cases} x_1 - x'_2 + 2(x'_3 - x''_3) \le -2 \\ x_1 - x'_2 - (x'_3 - x''_3) \le 1 \\ -x_1 - x'_2 - (x'_3 - x''_3) \le 0 \\ -x'_2 \le 1 \end{cases}$$

$$<3> \quad x_1, x'_2, x'_3, x''_3 \ge 0$$

Bài tập cho phần II.2

Đưa các bài toán QHTT sau đây về dạng chính tắc:

Bài 1

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 ; \ j = 1 \div 2$$

Bài 2

$$f(x) = 0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 + 0,6x_4 \le 600 \\ 0,1x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 + 0,5x_4 \le 800 \\ x_1 + x_2 \ge 1000 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$; x_2 tùy ý;(x_3, x_4) ≥ 0

II.3. Phương pháp đồ thị giải các bài toán QHTT

Phương pháp này thường áp dụng cho những bài toán QHTT có số biến số ≤ 3, phổ biến nhất là khi biến số bằng 2.

1. Bài toán phẳng.

Bài toán: Tìm $x^* = [x_1^*, x_2^*]$ thỏa mãn với các ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 & \text{(a)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 & \text{(b)} \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

làm cho $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$ (1)

Giải theo trình tự sau:

a/ Vẽ miền chấp nhận được (miền D mà x thỏa mãn các ràng buộc) – Hình 2.1.

Lưu ý:

+ Nếu các ràng buộc là những đẳng thức thì miền D là một điểm (giao điểm A).

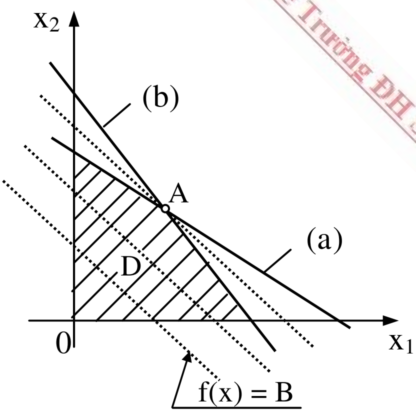
+ Nếu các ràng buộc là những bất đẳng thức thì miền chấp nhận được là một đa diện bao gồm cả đường biên (miền D).

b/ Vẽ các đường cùng mục tiêu (Đường mức)

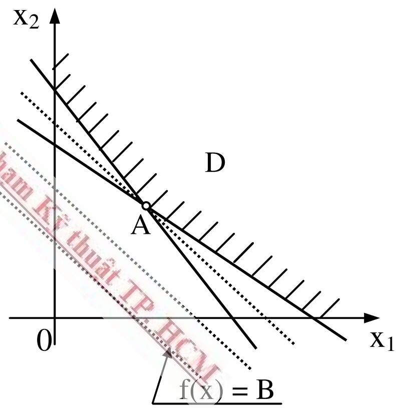
+ Cho f(x) bằng một giá trị cụ thể, ví dụ f(x) = B. Ta tiến hành vẽ đường:

$$x_2 = \frac{B}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} x_1$$

+ Cho đường mức vừa vẽ tịnh tiến song song với chính nó (tức thay đổi giá trị f(x)). Càng xa gốc tọa độ thì giá trị hàm mục tiêu càng tăng.



Hình 2.1



Hình 2.2

c/ Tìm nghiệm tối ưu:

+ Nếu đường đồng mức tiếp xúc với miền D tại một điểm (điểm A) thì nghiệm tối ưu là đơn trị.

+ Nếu đường đồng mức tiếp xúc với hai điểm (1 cạnh) thì nghiệm là đa trị.

+ Nếu các ràng buộc cơ bản có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \end{cases}$$

Miền D như hình 2.2 thì f(x) đạt giá trị min tại điểm A và không tồn tại max f(x).

2. <u>Bài toán mở rộng</u>

Đối với bài toán n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với m ràng buộc thì miền nghiệm cho phép là một đa diện lồi (n – m) chiều. Lúc đó:

a/ Nghiệm tối ưu là tọa độ của một đỉnh hay nhiều đỉnh của miền cho phép D.

b/ Nghiệm là đơn trị nếu một đỉnh của đa diện cho phép tiếp xúc với mặt cùng mục tiêu (mặt mức).

c/ Nghiệm là đa trị nếu mặt mức tiếp xúc với k đỉnh (k>1), k đỉnh này tạo nên một đơn hình (k – 1) chiều. Do đó có thể lấy (k – 1) giá trị biến tùy ý, còn [n – (k – 1)] biến khác là hàm tuyến tính của (k – 1) biến tùy ý. Đó chính là cơ sở của phương pháp đơn hình.

Chú thích:

Đơn hình là một hình có số đỉnh nhiều hơn 1 so với số chiều của không gian. Ví dụ:

- Trong không gian 2 chiều thì đơn hình là hình tam giác.
- Trong không gian 3 chiều thì đơn hình là tứ diện.

Bài tập:

Bài 1. Giải bài toán QHTT sau đây:

<1> $f(x) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

<2> $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

<3> $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Bài 2. Giải bài toán QHTT sau đây:

<1> $f(x) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$

<3> $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

II.4. Các định lý cơ bản của QHTT

Với mục đích ứng dụng nên trong phần này chỉ nêu các định lý mà không chứng minh.

Định lý 1: Tập hợp tất cả các phương án của một bài toán QHTT là tập lồi, hay còn gọi là miền nghiệm cho phép (ký hiệu tập D).

Định lý 2: Hàm mục tiêu của bài toán QHTT sẽ đạt Max (hoặc Min) tại điểm cực biên của tập D. Nếu hàm mục tiêu không chỉ đạt Max (hoặc Min) tại một điểm cực biên của tập D mà tại nhiều điểm cực biên thì nó sẽ đạt Max (hoặc Min) tại những điểm là tổ hợp lồi của các điểm đó.

Định lý 3: Nếu các vectơ $A_1, A_2, ..., A_k$ là độc lập tuyến tính và thỏa mãn: $A_1x_1 + A_2 x_2 +...+ A_kx_k = b$ trong đó $x_j > 0$, $j = 1:k$ thì điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0,..., 0)$

là điểm cực biên của tập hợp lồi đa diện D.

Định lý 4: Nếu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là điểm cực biên của tập hợp lồi đa diện D thì các vecto A_j trong biểu diễn: $A_1x_1 + A_2 x_2 + ...+ A_nx_n = b$ ứng với các thành phần $x_j > 0$ lập thành hệ độc lập tuyến tính. Vì ma trận A có m dòng nên suy ra rằng điểm cực biên không có quá m thành phần dương.

Định lý này có thể phát biểu cách khác như sau:

Phương án tối ưu của QHTT chứa một số biến dương đúng bằng số các ràng buộc dạng đẳng thức độc lập được thỏa mãn và các biến còn lại có giá trị không.

Ví dụ:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \qquad \rightarrow n = 5$$

$$\text{Các ràng buộc} \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{15}x_5 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{25}x_5 \\ a_{31}x_1 + ... + a_{35}x_5 \end{cases} \qquad \rightarrow m = 3$$

do đó nghiệm tối ưu chỉ có 3 biến khác không: $x^* = [\overset{*}{...}, 0, 0, \overset{*}{...}, \overset{*}{...}]$

Định lý 5: Để $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là phương án cực biên của QHTT dưới dạng chính tắc thì điều kiện cần và đủ là các vecto cột A_j của ma trận A ứng với các thành phần $x_j > 0$ là độc lập tuyến tính.

II.5. Phương pháp đơn hình giải bài toán QHTT (SIMPLEX METHOD)

Phương pháp đơn hình do nhà toán học Mỹ G.B.Danzig công bố năm 1947.

Phương pháp này được thực hiện bằng 2 cách:

Cách 1: Lần lượt thử các đỉnh của đa diện nghiệm.

Cách 2: Phương pháp lập bảng.

II.5.1 Phương pháp thử lần lượt

Một cách tổng quát, phương pháp thử lần lượt được tiến hành như sau: Tìm điểm tối ưu của miền nghiệm cho phép (miền D) bằng cách thử lần lượt các đỉnh của đa diện D. Để việc thử không phải mò mẫm, người ta đưa ra thuật toán để đi từ nghiệm xấu hơn đến nghiệm tốt hơn, tức là dẫn tới nghiệm tối ưu nhanh nhất.

A. Nội dung thử lần lượt

Giả sử bài toán có m ràng buộc độc lập được cho ở dạng chính tắc:

$$A.x = b \qquad (1)$$

Ta thực hiện các bước sau:

<1> Chọn biến cơ sở

Trước hết ta chọn một điểm tùy ý thuộc đa diện D - đó là tập n số $(x_1,x_2,...,x_n)$. Theo định lý 4 của quan hệ tuyến tính thì có m số dương, còn những số khác bằng không. Gọi các biến dương của điểm xuất phát là biến cơ sở:

$$(x_1,x_2,...,x_m,0,...0)$$

<2> Tìm nghiệm xuất phát (nghiệm thử thứ nhất)

Thay các biến cơ sở vào ràng buộc (1) ta có m phương trình chứa m ẩn số:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rm}x_m = b_r , \qquad r = 1:m$$

Viết dưới dạng khai triển:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mm}x_m = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (2) ta tìm được nghiệm xuất phát:

$$(x_1^o, x_2^o, ..., x_m^o)$$

Giá trị tương ứng hàm mục tiêu là:

$$Z_o = c_1x_1^o + c_2x_2^o + ... + c_mx_m^o$$

<3> Chọn nghiệm thử thứ hai: Ta tiến hành như sau:

a/ Thử thêm vào biến x_{m+1}, lúc này ràng buộc có dạng:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rm}x_m + a_{rm+1}x_{m+1} = b_r , r = 1:m \qquad (3)$$

Hệ (3) gồm m phương trình với m+1 biến.

Hệ (3) có nghiệm đơn trị khi các phương trình tạo thành hệ phụ thuộc, do đó cột cuối cùng phụ thuộc tuyến tính vào các cột còn lại với hệ số là y_i :

$$a_{r,m+1} = y_1a_{r1} + y_2a_{r2} +...+ y_ma_{rm}$$

Hay:

$$a_{r1}y_1 + a_{r2}y_2 + ... + a_{rm}y_m = a_{r,m+1} \qquad (4)$$

Hệ (4) có nghiệm duy nhất là:

$$y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$$

b/ Lấy các số hạng tương ứng của hệ (3) trừ đi bội số của hệ (4) – ta ký hiệu bội số đó là $\lambda \geq 0$, ta nhận được:

$$\begin{cases} a_{r1}(x_1 - \lambda y_1) + a_{r2}(x_2 - \lambda y_2) + \ldots \\ + a_{rm}(x_m - \lambda y_m) + a_{r,m+1} + \lambda = b_r \\ r = 1 : m \end{cases} \qquad (5)$$

Hệ (5) là biến thể của hệ (4) chỉ có các ẩn là khác.

c/ Chọn nghiệm thử thứ 2 cho hệ (5) là:

$$(x_1^0 - \lambda y_1^0), (x_2^0 - \lambda y_2^0), \ldots, (x_m^0 - \lambda y_m^0), \lambda \qquad (6)$$

Do có m+1 biến nên một trong các biến phải nhận giá trị không.

Muốn biết biến nào trong hệ (6) nhận giá trị bằng không, ta phải thực hiện các nội dung sau:

* Tính giá trị của hàm mục tiêu với nghiệm thử thứ nhất và nghiệm thử thứ hai:

$$Z_o = c_1 x_1^o + c_2 x_2^o + \ldots\ldots + c_m x_m^o$$

$$Z_1 = c_1(x_1^0 - \lambda y_1^0) + c_2(x_2^0 - \lambda y_2^0) + \ldots + c_m(x_m^0 - \lambda y_m^0) + c_{m+1}\lambda$$

Ta có số gia:

$$\Delta Z_1 = Z_1 - Z_o = \lambda[c_{m+1} - (c_1 y_1^0 + c_2 y_2^0 + \ldots + c_m y_m^0)]$$
$$= \lambda[c_{m+1} - \gamma_{m+1}]$$

Trong đó $\gamma_{m+1} = c_1 y_1^0 + c_2 y_2^0 + \ldots + c_m y_m^0$

Ta gọi $[c_{m+1} - \gamma_{m+1}]$ là hiệu suất

Có thể có 3 trường hợp xảy ra:

- $\Delta Z = 0$: Nghiệm xuất phát và nghiệm mới như nhau. Suy ra có 2 đỉnh tiếp xúc giữa đa diện nghiệm D và mặt đồng mức Z.
- $\Delta Z < 0$: Nghiệm mới xấu hơn nghiệm xuất phát (vì bài toán $Z \to \max$).
- $\Delta Z > 0$: Nghiệm mới tốt hơn nghiệm xuất phát.

Khi đã chọn được nghiệm mới bằng hoặc tốt hơn nghiệm xuất phát ($\Delta Z \geq 0$) ta đưa nó vào cơ sở và cần phải loại bỏ bớt một nghiệm trong biến xuất phát (vì theo định lý 4: chỉ có m nghiệm dương).

Giả thiết đã đưa biến mới thứ m+1 vào cơ sở, khi đó có thể viết các biến mới của phương án theo hệ (6) – Một biến thứ i nào đó phải thỏa mãn phương trình:

$$x_i^0 - \lambda y_i^0 = 0 \to \lambda = \frac{x_i^0}{y_i^0}$$

Còn đối với các biến $j \neq i$ thì:

$$x_j^0 - \lambda y_j^0 > 0$$

Từ đó ta suy ra: Phải loại trừ biến nào ứng với $\lambda > 0$ và nhỏ nhất:

$$0 < \lambda = \mathrm{Min}\frac{x_i^0}{y_i^0}$$

<4> Thực hiện liên tục các thuật toán ở trên:

Đưa vào các biến chưa dùng m+2, m+3,...; tính $\Delta Z_2, \Delta Z_3$,... cho đến khi thử hết các biến cơ sở.

$$\Delta Z_1 = \lambda[c_{m+1} - \gamma_{m+1}]$$
$$\Delta Z_2 = \lambda[c_{m+2} - \gamma_{m+2}]$$
....
$$\Delta Z_i = \lambda[c_{m+i} - \gamma_{m+i}]$$

Ở mỗi bước cần tính hiệu suất $(c_{m+i} - \gamma_{m+i})$, kiểm tra ΔZ_i để rút ra kết luận tương ứng. Sau (n-m) lần lập, ta chọn được nghiệm tối ưu.

B. Ví dụ

Tìm (x_1, x_2) sao cho hàm mục tiêu

$$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 3x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1:2$$

Bài toán đã cho ở dạng tổng quát, vì vậy để tiến hành các bước giải ta phải đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách thêm các biến phụ x_3, x_4 và x_5. Ta có:

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, j = 1:5$$

Ta tiến hành giải như sau:

<1> Chọn biến cơ sở $(x_1, x_2, x_3, 0, 0)$: Theo định lý 4.

<2> Tìm nghiệm xuất phát: Giải hệ phương trình ràng buộc sau:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

Ta nhận được $x_1^0 = 6; x_2^0 = 3; x_3^0 = 6$

Vậy nghiệm xuất phát là:

x = [6, 3, 6, 0, 0] và Z_0 = 2.6 + 5.3 = 27

<3> Thử đưa x_4 vào cơ sở: Ta có hệ phương trình ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

Có 3 phương trình mà 4 ẩn nên:

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 0 \\ 3y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$

Giải ta được: $y_1^0 = \frac{1}{2};\ y_2^0 = -\frac{1}{2};\ y_3^0 = \frac{3}{2}$

Hiệu suất của x_4 là:

$$\gamma_4 = 2 \times \frac{1}{2} + 5 \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

$$c_4 - \gamma_4 = 0 - (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} > 0$$

Suy ra $\Delta Z_0 > 0$ do đó việc đưa x_4 vào là có lợi.

Ta xét: $\lambda_1 = \dfrac{x_1^0}{y_1^0} = 12$; $\lambda_2 = \dfrac{x_2^0}{y_2^0} = -6$; $\lambda_3 = \dfrac{x_3^0}{y_3^0} = 4$

Ta loại biến nào ứng với $0 < \lambda = \lambda_{min} \rightarrow$ Loại x_3 khỏi cơ sở.

Biến cơ sở mới sẽ là $(x_1, x_2, 0, x_4, 0)$.

Phương trình ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases}$$

Giải ta được:

$$x_1^0 = 4; x_2^0 = 5; x_4^0 = 4$$

$$Z_1 = 8 + 25 = 33$$

$$\Delta Z_1 = Z_1 - Z_0 = 33 - 27 = 6$$

<4> <u>Thử đưa nghiệm</u> x_5 <u>vào cơ sở</u>

Phương trình ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 21 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 + 4y_2 = 0 \\ 3y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $y_1^0 = \dfrac{4}{3}; y_2^0 = -\dfrac{1}{3}; y_0^4 = -\dfrac{11}{3}$

Hiệu suất của x_5 là: $\gamma_5 = 2 \times \dfrac{4}{3} - 5 \times \dfrac{1}{3} = 1$

và $c_5 - \gamma_5 = 0 - 1 = -1 < 0$

Ta suy ra: đưa x_5 vào sẽ xấu hơn.

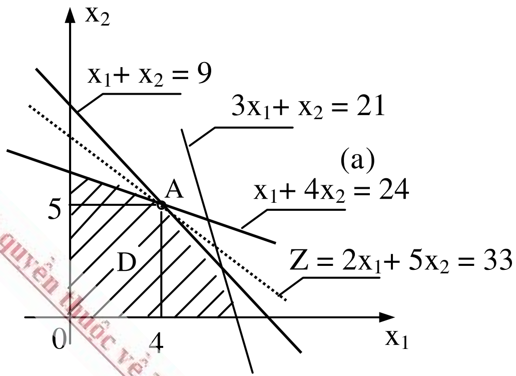
Vậy phương án tối ưu là:

$$x^* = [4,5,0,4,0]$$

$$Z_{x^*} = 2.4 + 5.5 = 33$$

<u>Nhận xét</u>:

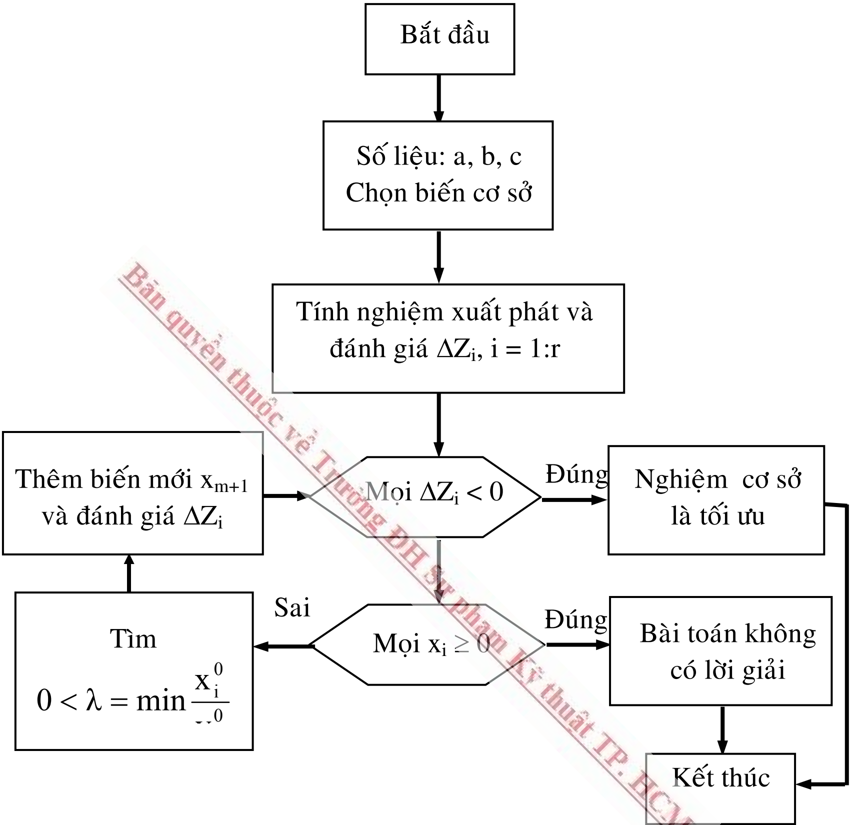
Giá trị biến $x_4 = 4$ có nghĩa là ràng buộc thứ hai bằng 21 là không chặt.



Hình 2.3

Ở ví dụ này bài toán có 2 biến nên ta có thể giải bằng phương pháp đồ thị và dễ dàng nhận thấy kết quả giải là như nhau và biến $x_4 = 4$ ở ràng buộc thứ hai bằng 21 là không chặt.

C. Sơ đồ khối tìm Z_{max}



D. Bài tập

Bài tập 1: Tìm x^* (x_1, x_2, x_3, x_4) sao cho hàm mục tiêu

$$Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 100 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 800 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; j = 1 \div 4$$

Đáp số: $x^* = [x_1^*, x_2^*, 0, 0] = [220, 120]$

$Z_{x^*} = 220 + 2.120 = 460$

Bài tập 2: Tìm $x^*(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sao cho hàm mục tiêu:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 90 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$; $j = 1 \div 4$

Đáp số: $x^* = [10, 0, 0, 40]$

$Z_{x^*} = 10 + 40 = 50$

II.5.2. Phương pháp lập bảng

Áp dụng phép xoay (Pivotage) của đại số tuyến tính.

A. Cơ sở toán học của phương pháp

Ta sẽ sử dụng một số tính chất sau đây của bài toán phương án cơ bản.

Tính chất 1: Nếu bài toán có phương án tối ưu thì cũng có phương án cơ bản tối ưu.

Tính chất 2: Số phương án cơ bản là hữu hạn (số đỉnh đa diện là hữu hạn).

Tính chất 3: Điều kiện cần và đủ để bài toán có phương án tối ưu là hàm mục tiêu của nó bị chặn dưới khi f(x) → min và bị chặn trên khi f(x) → max trên tập hợp các phương án.

Chú ý: Do tính chất thứ 1, ta chỉ xét các phương án cơ bản, tức là:

* Sau khi đưa về dạng chính tắc đã xuất hiện phương án cơ bản.

Ví dụ: $f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + 0{,}5x_4 + 1{,}5x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 \le 36 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1:5$$

Đưa về dạng chính tắc, ta có:

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + 0{,}5x_4 + 1{,}5x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1:6$$

Ẩn cơ bản $x_1 = 32, x_3 = 30, x_6 = 36, x_2 = x_4 = x_5 = 0$

* Nếu sau khi đưa về dạng chính tắc mà vẫn chưa xuất hiện phương án cơ bản, ta phải thêm các ẩn giả thông qua bài toán phụ M (đề cập ở phần sau).

Xuất phát từ phương án cơ bản ban đầu, dùng <u>tiêu chuẩn tối ưu</u> để xác định một trong ba khả năng của bài toán:

$\left.\begin{array}{l}\text{a/ Phương án đã tối ưu.} \\ \text{b/ Bài toán không có phương án tối ưu}\end{array}\right\} \to$ Dừng tính toán

c/ Cả 2 khả năng trên không khẳng định thì ta chuyển sang phương án cơ bản tiếp theo. Bài toán cứ lặp như vậy cho đến khi giải xong (trả lời khả năng a/ hoặc b/). Do tính chất 2, nên số lần lặp sẽ là hưũ hạn.

Việc chuyển phương án cơ bản này sang phương án khác bằng cách thay đổi hệ ẩn cơ bản nhờ phép khử Gauss - Jordan.

Để chuyển phương án cơ bản, ta cần hiểu rõ:

① Tiêu chuẩn tối ưu.

② Khi chuyển hệ ẩn cơ bản thì phải chọn ẩn đưa vào và ẩn đưa ra, phần tử trục xoay a_{kl} như thế nào?

Ta lấy trường hợp bài toán f(x) = Z → min để phân tích:

Ta có phương án cơ bản ban đầu là:

$$x^o = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, . . ., 0)$$

Giá trị hàm mục tiêu tương ứng là:

$$f(x^o) = Z(x^o) = \sum_{i-1}^{m} c_i b_i$$

Với mỗi ẩn x_j, ta tính ước lượng Δ_j của nó:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \ , j = 1{:}n$$

Với phương án bất kỳ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ta có quan hệ:

$$f(x) = f(x^o) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j$$

Như vậy:

① Nếu $\Delta_j \le 0 \ \ \forall_j$ thì $f(x) \ge f(x^o)$. Vì x là phương án bất kỳ nên x^o là phương án tối ưu.

② Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ khi đó có hai khả năng:

a/ Tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \le 0$ (i = 1:m) thì ta tìm được một dãy phương án x^k mà $f(x^k) \to -\infty$. Theo tính chất 3 thì bài toán không có phương án tối ưu.

b/ Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ nhưng với $\forall\Delta_j$ đều tồn tại $a_{ij} > 0$ thì ta có thể chuyển phương án để được phương án tốt hơn.

Từ những phân tích trên, ta có kết luận:

<u>Tiêu chuẩn tối ưu:</u>

Sau khi tính các Δ_j , j = 1:n

① Khi $\Delta_j \le 0 \ \ \forall_j$ ở bài toán Z → min và $\Delta_j \ge 0 \ \ \forall_j$ ở Z → max thì phương án đang xét là tối ưu.

② Tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \le 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z→ min

$\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \leq 0$ (i = 1:m) ở bài toán Z→ max

thì bài toán đang xét không có phương án tối ưu.

Chọn ẩn đưa vào và ẩn đưa ra:

Trong trường hợp ① và ② không xảy ra, ta chuyển phương án.

Ẩn đưa vào x_l

+ Bài toán Z → min: ẩn đưa vào ứng với cột có ước lượng $\Delta_l > 0$ và lớn nhất - ẩn x_l

+ Bài toán Z → max: ẩn đưa vào ứng với cột có ước lượng $\Delta_l < 0$ và nhỏ nhất - ẩn x_l

Ẩn đưa ra x_k: Chung cho cả bài toán Z → min và Z → max, ẩn đưa ra là ẩn ứng với hàng k có:

$$\lambda_k = \frac{b_k}{a_{kl}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{il}} \text{ với } a_{il} > 0\right\}$$

B. Trình tự lập bảng đơn hình

Giả sử ta có bài toán QHTT dạng chính tắc như sau:

$$f(x) = Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ , } i = 1:m$$

$$x_j \geq 0, j = 1:n.$$

Giả thiết rằng, sau khi đưa về dạng chính tắc, bài toán đã xuất hiện đủ các ẩn cơ bản: x_1, x_2, ..., x_r,.... x_m.

Ẩn cơ bản còn gọi là độc lập tuyến tính, là những ẩn có 2 đặc trưng:

- Chỉ xuất hiện một lần trong các phương trình của hệ ràng buộc.
- Có hệ số bằng + 1.

Với bài toán trên, trình tự lập bảng đơn hình như sau:

Bước 1: Lập bảng đơn hình.

Hướng dẫn cách lập bảng đơn hình

Cột 1: Ẩn cơ bản (ACB): Ghi các ẩn cơ bản theo thứ tự từng hàng.

Cột 2: Hệ số ACB: Ghi các hệ số của ACB trong hàm mục tiêu f(x).

Cột 3: Phương án: Ghi giá trị vế phải (b_i) của các phương trình ràng buộc theo thứ tự tương ứng với các hàng của ACB.

Cột 4: Ghi các hệ số của các ẩn tương ứng trong hệ ràng buộc.

Cột 5: Ghi tỷ số giữa cột phương án với cột chuẩn theo hàng tương ứng - Chỉ tính với các hệ số $a_{il} > 0$ $\left(\lambda_i = \dfrac{b_i}{a_{il}}\right)$.

Hàng cuối cùng: Ghi các hệ số đặc trưng Δ_j

+ Δ_0 là giá trị hàm mục tiêu ở phương án đầu

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

+ Với các ACB (x_1, x_2, …., x_r,…. x_m) thì hệ số đặc trưng $\Delta_j = 0$.

Ở đây: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_r = \Delta_m = 0$.

+ Hệ số đặc trưng của cột tương ứng các ẩn khác ẩn cơ bản:

Ở đây: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$; i = 1:m; j = (m+1):n

<u>Bảng đơn hình</u>

Hàng chuẩn

1	2	3	4											5
ACB	Hệ số ACB	Ph. án	x_1	x_2	.	x_r	.	x_m	x_{m+1}	.	x_l	.	x_n	λ
			c_1	c_2	.	c_r	.	c_m	c_{m+1}	.	c_l	.	c_n	
X_1	c_1	b_1	1	0	.	0	.	0	$a_1(m+1)$	.	a_{1l}	.	a_{1n}	λ_1
x_2	c_2	b_2	0	1	.	0	.	0	$a_2(m+1)$	.	a_{2l}	.	a_{2n}	λ_2
.	.	.	.	.	.		.			.		.		
.	.	.	.	.	.		.			.		.		
x_k	c_k	b_k	0	0	.	1	.	0	$a_k(m+1)$	.	$\boxed{a_{kl}}$	.	a_{kn}	λ_k
.	.	.	.	.	.		.			.		.		
.	.	.	.	.	.		.			.		.		
x_m	c_m	b_m	0	0	.	0	.	1	$a_m(m+1)$	.	a_{ml}	.	a_{mn}	λ_n
Δ_j		Δ_0	0	0	.	0	.	0	Δ_{m+1}	.	Δ_l	.	Δ_n	

Bước 2: Kiểm tra tính tối ưu

Dựa vào hệ số đặc trưng Δ_j, ta tiến hành kiểm tra như sau:

✓ Phương án ban đầu là phương án tối ưu nếu:

- $\Delta_j \leq 0$, j = 1:n với bài toán $Z \rightarrow min$
- $\Delta_j \geq 0$, j = 1:n với bài toán $Z \rightarrow max$

✓ Nếu phương án có tồn tại:

- $\Delta_j > 0$ mà $a_{ij} \leq 0$, i = 1:m với bài toán $Z \rightarrow min$
- $\Delta_j < 0$ mà $a_{ij} \leq 0$, i = 1:m với bài toán $Z \rightarrow max$

thì bài toán đang xét không có phương án tối ưu.

✓ Nếu phương án có tồn tại:

- $\Delta_j > 0$, nhưng với $\forall_j$ có $a_{ij} > 0$ với bài toán $Z \rightarrow min$
- $\Delta_j < 0$, nhưng với $\forall_j$ có $a_{ij} > 0$ với bài toán $Z \rightarrow max$

thì ta chuyển sang phương án tốt hơn.

Bước 3: Xác định cột chuẩn – tìm ẩn đưa vào (x_l)

Dựa vào tính chất củahệ số đặc trưng Δ_j, ta có qui tắc xác định cột chuẩn như sau:

✓ Với bài toán $Z \rightarrow min$: Cột ứng với $\Delta_l = max\Delta_j$ với những $\Delta_j > 0$ và x_j không cơ bản. Cột l là cột chuẩn.

✓ Với bài toán $Z \rightarrow max$: Cột chuẩn l là cột ứng với $\Delta_l = min\Delta_j$; $\Delta_j < 0$ và x_j không cơ bản.

Biến số x_l tương ứng với cột chuẩn là biến đưa vào trong bảng đơn hình mới.

Bước 4: Xác định hàng chuẩn k, tìm ẩn đưa ra (x_k), tìm phần tử xoay a_{kl}.

Qui tắc xác định hàng chuẩn k chung cho cả bài toán $Z \rightarrow \min$, $Z \rightarrow \max$.

✓ Hàng chuẩn là hàng ứng với hàng k có:

$$\lambda_k = \frac{b_k}{a_{kl}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{il}}\right\} \text{với } a_{il} > 0$$

✓ Ẩn tương ứng với hàng chuẩn k (x_k) là ẩn đưa ra khỏi bảng đơn hình.

✓ Phần tử a_{ij} ứng với cột chuẩn i = l, hàng chuẩn j = k được gọi là phần tử xoay a_{kl}.

Bước 5: Biến đổi thay phương án

Sau khi xác định được cột chuẩn l, tìm được ẩn đưa vào x_l; xác định được hàng chuẩn k; tìm được ẩn đưa ra x_k và xác định được phần tử xoay a_{kl}, ta sử dụng phép khử Gauss – Jordan để thành lập bảng đơn hình mới (phương án mới). Phép biến đổi này dùng chung cho cả bài toán $Z \rightarrow \min$, $Z \rightarrow \max$.

Những xác định trên có nghĩa là ở phương án mới này:

- Biến x_l sẽ là ẩn cơ bản. Để tiện gọi hàng ứng với biến x_l là hàng cơ sở trong bảng đơn hình mới.
- Biến x_k là ACB ở phương án cũ sẽ là ẩn không cơ bản, nhận giá trị không.

Các giá trị trong bảng đơn hình mới, được tính theo qui tắc sau.

1/ Thay biến cơ bản ở hàng k bằng biến x_l (loại x_k ra)

2/ <u>Giá trị số liệu ở hàng cơ sở</u> (hàng ứng với x_l) tính như sau:

- $a'_{kj} = \dfrac{a_{kj}}{a_{kl}}$, $j = 1 : n$
- $b'_k = \dfrac{b_k}{a_{kl}}$, $j = 1 : n$

<u>Chú thích</u>: a'_{kj}, b'_k giá trị ở bảng mới

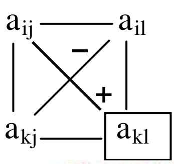
a_{kj}, b_k, a_{kl} là những giá trị ở bảng cũ

3/ Giá trị các hàng còn lại biến đổi theo quy tắc ở bảng sau:

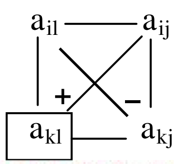
< a >	$a'_{ij} = \dfrac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il}}{a_{kl}}, \quad i = 1 : m, j = 1 : n$
< b >	$b'_i = \dfrac{b_i a_{kl} - b_k a_{il}}{a_{kl}}, \quad i = 1 : m, j = 1 : n$
< c >	$\Delta'_j = \dfrac{\Delta_j a_{kl} - a_{kj}\Delta_l}{a_{kl}}, \quad i = 1 : m, j = 1 : n$

<u>Chú ý</u>: Trong các công thức tính toán ở trên được nhắc nhiều tới phần tử xoay a_{kl}. Nếu chú ý các thành phần trong các công thức (a), (b), (c) ở bảng đơn hình cũ thì chúng sắp sếp theo <u>qui luật chữ nhật</u> như sau:

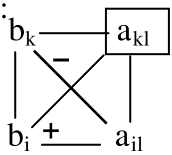
Ở công thức (a):



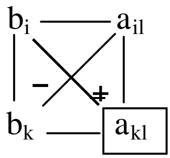
hoặc



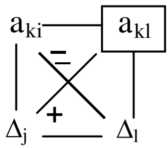
Ở công thức (b):



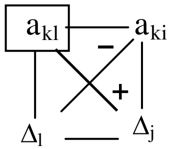
hoặc



Ở công thức (c):



hoặc



So sánh bảng qui tắc với các ô qui luật chữ nhật, thì đây là những định thức, nếu chú ý đến phần tử xoay a_{kl} thì ta có ngay qui tắc tính dễ nhớ như sau:

Bước 1: Lấy tích các phần tử ở đường chéo chứa phần tử xoay (+) trừ đi tích các phần tử đường chéo (-).
Bước 2: Lấy hiệu số nhận được chia cho phần tử xoay a_{kl}.
Bước 3: Kết quả chia được là kết quả ghi vào vị trí tương ứng bảng mới.

Ví dụ: Giải bài toán QHTT sau đây:

<1> $f(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\langle 2\rangle \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$$

<3> $x_j \geq 0,\ j = 1{:}6$

Giải

Nhận xét: Đây là bài toán QHTT dạng chính tắc, nhìn vào các phương trình của hệ ràng buộc, có thể chọn ẩn cơ bản cho từng phương trình là x_4, x_5, x_6. Vậy phương án cơ bản ban đầu là $x_4 = 6$, $x_5 = 10$, $x_6 = 12$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

① Ta lập được bảng đơn hình ban đầu như sau:

Bảng 1: Bảng đơn hình xuất phát

ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			$c_1=3$	$c_2=5$	$c_3=3$	$c_4=-3$	$c_5=2$	$c_6=1$	
x_4	- 3	6	1	3	-1	1	0	0	
x_5	2	10	2	0	3	0	1	0	10/3
x_6	11	12	0	2	$\boxed{4}$	0	0	1	3
Δ_j		14	-2	-12	10	0	0	0	

Từ bảng đơn hình xuất phát ta kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu, ta nhận thấy: Đây là bài toán $Z \to \min$, nhưng có hệ số đặc trưng $\Delta_3 = 10 > 0$, nên phương án xuất phát không phải là phương án tối ưu. Mặt khác ta lại thấy có $a_{ij} > 0$. Vì vậy có thể chuyển phương án.

② Biến đổi phương án

a) Xác định cột chuẩn, tìm ẩn đưa vào

Đây là bài toán $Z \to \min$, nên cột chuẩn là cột ứng với $\Delta_l = \max\Delta_j$, $\Delta_j > 0$.

Do vậy cột $l = 3$ là cột chuẩn và x_3 là ẩn đưa vào.

b) Xác định hàng chuẩn, tìm ẩn đưa ra

Điều kiện hàng chuẩn k phải là hàng có $\lambda_k = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{i3}}\right\}$ với $a_{i3} > 0$.

Vậy ở đây $\min\left\{\dfrac{b_i}{a_{i3}}\right\} = \min\left\{\dfrac{10}{3}, 3\right\} = 3$, do đó hàng k = 3 và phần tử đưa ra là x_6.

c) Từ 2 kết quả tính toán trên, phần tử xoay $a_{kl} = a_{33} = 4$. Theo qui ước: hàng chuẩn của bảng đơn hình mới là hàng k = 3.

Dựa vào cách tính toán giá trị ở bảng đơn hình biến đổi, ta lập được bảng đơn hình mới (bảng 2) như sau:

Bảng 2

ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ
			3	5	3	-3	2	1	
x_4	- 3	9	1	7/2	0	1	0	1/4	
x_5	2	1	2	- 3/2	0	0	1	-3/4	
x_3	3	3	0	1/2	1	0	0	1/4	
Δ_j		-16	-2	-17	0	0	0	-5/2	

Từ bảng 2 ta thấy với $\forall_j$ (j = 1:6) thì $\Delta_j \le 0$, đây là bài toán $Z \to \min$. Nên phương án ở bảng 2 là phương án tối ưu.

<u>Đáp số bài toán là</u>:

$$x_{opt} = \{x_4 = 9, x_5 = 1, x_3 = 3\}$$
$$f(x_{opt}) = \Delta_0 = -16$$

Bài tập

Bài 1: Giải bài toán QHTT sau đây:

<1> $f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 7 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

<3> $x_j \geq 0,\ j = 1:6$

Đáp án: Bài toán không có phương án tối ưu

Bài 2: Giải bài toán QHTT sau đây:

<1> $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 5 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

<3> $x_j \geq 0,\ j = 1:4$

Đáp án: $x^0 = (0, 0, 0, 0, 15)$

$f(x^0) = 0 + 5$

II.6. Thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng tổng quát

Trong phần II.5 đã đề cập đến cơ sở toán học và phương pháp giải bài toán QHTT dạng chính tắc đã có đủ ẩn cơ bản cho việc lập phương án cơ bản ban đầu. Trong phần này ta nghiên cứu thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng tổng quát.

II.6.1. Phát biểu bài toán

Tìm $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ làm cho hàm mục tiêu:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \ (\max)$$

Với các ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ , i = 1:m_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ , i = (m_1+1) : (m_1+ m_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , i = (m_1+ m_2+1) : m$$

$b_j \ge 0$

$x_j \ge 0$, $j = 1:n$.

II.6.2. Qui tắc biến đổi ràng buộc và hàm mục tiêu

Công việc biến đổi nhằm đạt 2 mục đích:

- Biến đổi đưa bài toán về dạng chính tắc.

- Biến đổi tạo ẩn cơ bản cho phương án cơ sở ban đầu.

A. Thêm biến phụ để đưa bài toán về dạng chính tắc: thực hiện như sau.

- Đối với các ràng buộc $\sum a_{ij} x_{ij} \le 0$ cộng thêm biến phụ $x_{n+i} \ge 0$. Những biến phụ này được đánh số từ $(n + 1)$ đến $(n + m_1)$.

- Đối với các ràng buộc $\sum a_{ij} x_{ij} \ge 0$ trừ bớt biến phụ $x_{n+i} \ge 0$. Những biến phụ này được đánh số từ $(m_1+ 1)$ đến $(m_1+ m_2)$.

- Trong hàm mục tiêu hệ số c_j ứng với các biến phụ bằng không.

Ví dụ: Tìm x_1, x_2 làm cho hàm mục tiêu

$f(x) = 30x_1 + 45x_2 \to \max$ $\quad$ $f(x) = 30x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 \to \max$

Các ràng buộc:

$$\begin{cases} x_1 \le 6000 \\ x_2 \le 4000 \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 \le 24000 \\ x_1 \ge 1000 \\ x_2 \ge 1000 \\ 3x_1 - x_2 \ge 0 \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 \ge 10000 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 6000 & (1) \\ x_2 + x_4 = 4000 & (2) \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 + x_5 = 24000 & (3) \\ x_1 - x_6 = 1000 & (4) \\ x_2 - x_7 = 1000 & (5) \\ 3x_1 - x_2 - x_8 = 0 & (6) \\ 2{,}5x_1 + 2x_2 - x_9 = 10000 & (7) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 3:9 \qquad (8)$$

B. <u>Lập bài toán M – Thêm ẩn giả để tạo ẩn cơ bản cho phương án ban đầu</u>

Sau khi đưa bài toán về dạng chính tắc, ở phương trình ràng buộc nào chưa có ẩn cơ bản, ta phải tạo ẩn cơ bản nhờ bài toán phụ M để tạo phương án cơ sở ban đầu.

Bài toán M được lập phân biệt đối với bài toán $f(x) \to \min$ và $f(x) \to \max$ được tiến hành như sau:

✓ Đối với bài toán $f(x) \to \min$:

- Ở phương trình ràng buộc nào chưa có ẩn cơ bản, ta thêm một ẩn mới không âm, có hệ số bằng +1. Ẩn mới thêm này gọi là ẩn giả, đồng thời cũng là ẩn cơ bản của phương trình ràng buộc đó.

- Trong hàm mục tiêu ta bổ sung ẩn mới thêm với hệ số $c_{j+1} = M$ đủ lớn, có thể chọn $c_{j+1} = M = \max\{|a_{ij}|, |b_I|, |c_j|\}$.

Lúc đó $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + Mx_{j+1} \to \min$.

✓ <u>Đối với bài toán f(x) → max:</u>

- Ở phương trình ràng buộc nào chưa có ẩn cơ bản, ta thêm một ẩn mới không âm, có hệ số bằng +1. Ẩn mới thêm này gọi là ẩn giả, đồng thời cũng là ẩn cơ bản của phương trình ràng buộc đó.
- Trong hàm mục tiêu ta bổ sung ẩn mới thêm với hệ số $c_{j+1} = -M$, M là số đủ lớn, có thể chọn M = max {$|a_{ij}|$, $|b_I|$, $|c_j|$}. Lúc đó $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - Mx_{j+1} \to \max$.

<u>Ví dụ:</u> Ta lấy lại ví dụ phần A. Sau khi đã đưa bài toán về dạng chính tắc thì ở phương trình ràng buộc (1), (2), (3) đã có ẩn cơ bản là x_3, x_4, x_5. Các phương trình ràng buộc (4), (5), (6), (7) chưa có ẩn cơ bản. Vì vậy ta lập bài toán M. Đây là bài toán f(x) → max, ta có kết quả sau:

$f(x) = 30x_1 + 45x_2 + 0(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9) \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 6000 \\ x_2 + x_4 = 4000 \\ 2,5x_1 + 2x_2 + x_5 = 24000 \\ x_1 - x_6 = 1000 \\ x_2 - x_7 = 1000 \\ 3x_1 - x_2 - x_8 = 0 \\ 2,5x_1 + 2x_2 - x_9 = 10000 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, j = 1:9

$f(x) = 30x_1 + 45x_2 + 0(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9) - M(x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13}) \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 6000 \\ x_2 + x_4 = 4000 \\ 2,5x_1 + 2x_2 + x_5 = 24000 \\ x_1 - x_6 + x_{10} = 1000 \\ x_2 - x_7 + x_{11} = 1000 \\ 3x_1 - x_2 - x_8 + x_{12} = 0 \\ 2,5x_1 + 2x_2 - x_9 + x_{13} = 10000 \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, j = 1:13

Phương án cơ sở ban đầu là:

x_3= 6000, x_4= 4000, x_5=24000, x_{10}=1000, x_{11} = 1000, x_{12} = 0, x_{13} = 10000

C. Lập bảng đơn trình ban đầu của bài toán mở rộng

C.1 Các định nghĩa

1/ Bài toán dạng chính tắc chưa đủ ẩn cơ bản nên phải thêm ẩn giả bằng bài toán M để tạo phương án cơ sở ban đầu ta gọi là bài toán mở rộng.

2/ Bài toán xuất phát từ bài toán mở rộng gọi là bài toán gốc.

C.2 Quan hệ giữa bài toán mở rộng và bài toán gốc đã được chứng minh:

1/ Nếu bài toán mở rộng không có phương án tối ưu, thì bài toán gốc cũng không có phương án tối ưu.

2/ Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu mà các ẩn giả đều bằng không, thì chỉ cần bỏ phần ẩn giả đi, ta còn lại phương án tối ưu của bài toán gốc.

3/ Nếu bài toán mở rộng có phương án tối ưu mà trong đó có ít nhất một ẩn giả dương (> 0) thì bài toán gốc không có phương án.

C.3 Cách lập bảng đơn hình cho bài toán mở rộng

1/ Trừ hàng hệ số ước lượng Δ_j (hàng cuối cùng), các hàng khác của bảng đơn hình ban đầu của bài toán mở rộng được lập theo các qui tắc đã được trình bày trong phần II.5.

2/ Do ở bài toán mở rộng có chứa thành phần $M_j\, x_j$ với M đủ lớn, để tiện cho quá trình xem xét, so sánh hệ số ước lượng Δ_j , ta phân Δ_j làm thành hai phần:

$$\Delta_j = \alpha_j M + \beta_j$$

Vì vậy hàng Δ_j được chia ra làm hai dòng:

- Dòng trên biểu thị phần phụ thuộc vào M bằng cách ghi hệ số của M.
- Dòng dưới biểu thị phần không phụ thuộc vào M.

Ví dụ: Ta có $\Delta_j = 2\,M - 9$ thì: Ở dòng trên của cột Δ_j ta ghi 2 , ở dòng dưới ta ghi – 9.

Ghi chú: Cả 2 dòng trên đều tuân theo qui tắc biến đổi bảng như đã giới thiệu ở phần II.5.

C.4 Tiêu chuẩn tối ưu của bài toán mở rộng:

Tiêu chuẩn tối ưu của bài toán mở rộng cũng xuất phát từ việc xét dấu của hệ số ước lượng Δ_j.

Ở bài toán mở rộng Δ_j được chia làm hai phần αM và β, vì M là số đủ lớn (lớn hơn bất cứ số nào cần so sánh), do đó muốn so sánh Δ_j ta chỉ cần đến dòng trên (dòng hệ số của M), khi nào dòng trên bằng không, hoặc bằng nhau, ta mới cần quan tâm đến dòng dưới (dòng β) mà thôi.

Ví dụ: Giải bài toán :

<1> $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} -3x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

<3> $x_j \geq 0$, $j = 1 : 5$

Nhận xét:

✓ Đây là bài toán dạng chính tắc, có $b_i \geq 0$

✓ Trong bài toán này còn thiếu ẩn cơ bản (vectơ đơn vị) ở phương trình ràng buộc thứ nhất và thứ 2.

Ta làm đủ ẩn cơ bản bằng cách lập bài toán M như sau:

$$f(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 + Mx_6 + Mx_7 \wedge \min$$

$$\begin{cases} -3x_3 - 9x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 + x_7 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $j = 1:7$

Ta đưa số liệu vào bảng đơn hình ban đầu (Bảng 1) và tính được:

$\Delta_o = f(\overline{x}) = 5M + \frac{2}{3}$: ta viết 5 ở dòng trên, $\frac{2}{3}$ ở dòng dưới.

$\Delta_1 = 0$ (dòng trên và dòng dưới đều ghi 0).

$\Delta_2 = M - \frac{7}{3}$ (dòng trên ghi 1 dòng dưới ghi $-\frac{7}{3}$)

$$\Delta_3 = -10M + \frac{2}{3} \text{ (dòng trên ghi } -10 \text{ dòng dưới ghi } \frac{2}{3}\text{)}$$

$$\Delta_4 = -14M + \frac{1}{3} \text{ (dòng trên ghi } -14 \text{ dòng dưới ghi } \frac{1}{3}\text{)}$$

$$\Delta_5 = -2M + \frac{16}{3} \text{ (dòng trên ghi } -2 \text{ dòng dưới ghi } \frac{16}{3}\text{)}$$

	ACB	Hệ số ACB	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	λ_i
				$c_1 = 1$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 1$	$c_5 = -5$	
Bảng 1	x_6	M	0	0	0	-3	-9	0	
	x_7	M	5	0	$\boxed{1}$	-7	-5	-2	5
	x_1	1	2/3	1	-1/3	2/3	4/3	1/3	
	Δ_j	α_j	5	0	1	-10	-14	-2	
		β_j	2/3	0	-7/3	2/3	1/3	16/3	
Bảng 2	x_6	M	0	0	0	-3	-9	0	
	x_2	2	5	0	1	-7	-5	-2	
	x_1	1	7/3	1	0	5/3	-1/3	-1/3	
	Δ_j	α_j	0	0	0	-3	-9	0	
		β_j	37/3	0	0	- 47/3	- 34/3	2/3	

Ta nhận thấy $\Delta_2 = M - \frac{7}{3} > 0$ (vì M rất lớn) nên theo tiêu chuẩn tối ưu thì phương án ban đầu chưa tối ưu, đồng thời chưa có dấu hiệu chứng tỏ không có phương án tối ưu. Vì vậy ta chuyển phương án khác tốt hơn.

Vì trong dòng trên thể hiện chỉ có duy nhất $\Delta_2 > 0$ nên ta chọn ngay cột chuẩn là cột 2, và ẩn đưa vào là x_2. Trong bảng 1 duy nhất chỉ có $a_{22} = 1 > 0$, nên hàng chuẩn là hàng thứ 2 và ẩn đưa ra là x_7. Từ cột chuẩn l = 2, hàng chuẩn k = 2, ta có phần tử xoay $a_{kl} = a_{22} = 1$.

Dựa vào qui tắc, sau khi biến đổi bảng ta nhận được bảng 2. Trong bảng 2 ta thấy có $\Delta_5 = \frac{2}{3} > 0$ mà $a_{i5} \leq 0 \; \forall i$ ($a_{15} = 0$, $a_{25} = -2$, $a_{35} = -\frac{1}{3}$) nên dựa vào tiêu chuẩn tối ưu ta kết luận: Bài toán mở rộng không có phương án tối ưu, nên bài toán gốc không có phương án tối ưu.

<u>Bài tập</u>

Bài 1: Giải bài toán:

<1> $f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \min$

<2> $\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$

<3> $x_j \geq 0$, $j = 1 : 3$

Đáp số: Sau 1 lần biến đổi phương án, phương án tối ưu của bài toán mở rộng là $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{7}{5}, \frac{22}{15}, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán mở rộng mà ẩn giả $x_4 = 0$ nên cũng là phương án tối ưu bài toán gốc.

<u>Bài 2</u>: Giải bài toán:

<1> $f(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

<2> $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$

<3> $x_j \geq 0$, $j = 1 : 3$

Đáp số: Sau 1 lần biến đổi phương án, đến đây phương án tối ưu của bài toán mở rộng là $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 25, 43, 2, 0)$ nhưng còn ẩn giả $x_5 > 0$ nên bài toán gốc không có phương án.

II.7. Bài toán đối ngẫu (DUAL PROBLEM)

II.7.1. Khái niệm

Bài toán đối ngẫu, có tài liệu gọi là "qui hoạch đối ngẫu" đều là những tên gọi khác nhau của cùng một khái niệm. Trong tài liệu này ta gọi là "bài toán đối ngẫu", ký hiệu là bài toán D.

Đối với mọi bài toán QHTT, ta luôn thiết lập được cho nó một bài khác gọi là bài toán đối ngẫu. Bài toán xuất phát để lập bài toán đối ngẫu ta gọi là bài toán gốc, ký hiệu là bài toán P.

Bài toán đối ngẫu D được coi là một trong các khái niệm cơ bản của bài toán QHTT.

Trong rất nhiều trường hợp để có được kết luận cho 1 bài toán QHTT, thì việc thông qua nghiên cứu, giải bài toán đối ngẫu của nó lại tỏ ra thuận tiện hơn nhiều.

II.7.2. Cặp bài toán tuyến tính đối ngẫu. Cách lập bài toán D

✓ Cho bài toán QHTT sau đây (Bài toán gốc). Bài toán P được phát biểu:

Tìm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ làm cho hàm mục tiêu:

$$Z_P = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \\ x_j \ge 0, j = 1:n, i = 1:m \end{cases}$$

✓ Bài toán đối ngẫu. Bài toán D tương ứng với bài toán P được phát biểu:

Tìm $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ làm cho hàm mục tiêu:

$$Z_D = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min$$

Với các ràng buộc:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

✓ Chú ý: Các biến đối ngẫu tương ứng một – một với các ràng buộc của bài toán gốc, trong khi đó những ràng buộc của bài toán đối ngẫu tương ứng một – một với các biến của bài toán gốc.

✓ Trình tự lập bài toán D từ bài toán P.

Để dễ thực hiện, ta phân trình tự này làm hai bước:

Bước 1: Lập sơ đồ.

Bước 2: Từ sơ đồ lập bài toán D.

1. Lập sơ đồ: Trình tự lập sơ đồ như sau:

1) Viết ma trận hệ số các ràng buộc thành dạng bảng (ma trận A).

2) Viết các biến x_j tương ứng với cột ma trận A lên phía trên cùng.

3) Viết các hệ số c_j tương ứng với cột ma trận A phía dưới cùng.

4) Viết các hệ số b_i tương ứng với hàng ma trận A về phía phải.

5) Viết các biến của bài toán D ứng với hàng ma trận A về phía trái.

6) Đánh dấu các hạn chế theo qui tắc bảng a).

Bảng a)

Bài toán P (D)	Bài toán D (P)
Hàm mục tiêu: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	Hàm mục tiêu: $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$
Ràng buộc thứ i: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left\{\begin{matrix} \leq \\ \geq \\ = \end{matrix}\right\} b_i$	Ẩn thứ i: $y_i \left\{\begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{matrix}\right\} 0$
Ẩn thứ j: $x_j \left\{\begin{matrix} \geq \\ \leq \\ \text{tùy ý} \end{matrix}\right\}$	Ràng buộc thứ j: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \left\{\begin{matrix} \geq \\ \leq \\ = \end{matrix}\right\} c_i$
Cách vận dụng bảng qui tắc: 1/ Trường hợp bài toán P, $Z_p \to \max$ thì bên trái bảng là bài toán P, bài toán D được chỉ ra bên phải bảng. 2/ Trường hợp bài toán $Z_p \to \min$ thì bên phải bảng là bài toán P, bài toán D được chỉ ra bên trái bảng.	

Giả sử có bài toán QHTT (P):

<1> $Z_P = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max (\min)$

$$
<2> \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}
$$

$<3>$ $\quad x_1 \geq 0$, x_2 tùy ý, ...,$x_n \leq 0$

Theo trình tự và qui tắc đánh dấu như trên lập được sơ đồ bảng b và c.

Bảng b) $(Z_P \to \max)$

	x_1	x_2	...	x_n	(D)
	$\geq$	Tùy ý		$\leq$	
	0			0	
$y_1 \leq 0$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\geq b_1$
y_2 tùy ý	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$= b_2$
....	....	....	...	....	......
$y_m \geq 0$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$
	$\geq$	$=$		$\leq$	$Z_{P\ max}$
(P)	c_1	c_2	...	c_n	$Z_{D\ min}$

Bảng c) $(Z_P \to \min)$

	x_1	x_2	...	x_n	(D)
	$\geq$	Tùy ý		$\leq$	
	0			0	
$y_1 \geq 0$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\geq b_1$
y_2 tùy ý	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$= b_2$
....	....	....	...	....	....
$y_m \leq 0$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$
	$\leq$	$=$		$\geq$	$Z_{P\ max}$
(P)	c_1	c_2	...	c_n	$Z_{D\ min}$

2. <u>Lập bài toán: Từ sơ đồ bảng b) và c) ta viết được bài toán D như sau:</u>

✓ <u>Với bài toán $Z_P \to max$</u>, ta có:

<1> $Z_D = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \;\; = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$

<2> $$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m = c_2 \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}x_n \leq c_n \end{cases}$$

<3> $y_1 \leq 0$, y_2 tùy ý, ...,$y_m \geq 0$

✓ <u>Với bài toán $Z_P \to min$</u>, ta có:

<1> $Z_D = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \;\; = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to max$

<2> $$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m = c_2 \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}x_n \geq c_n \end{cases}$$

<3> $y_1 \geq 0$, y_2 tùy ý, ...,$y_m \leq 0$

<u>Ví dụ 1</u>: Lập bài toán đối ngẫu của bài toán QHTT sau:

<1> $Z_P = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to min$

<2> $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \end{cases}$$

<3> $x_j \geq 0, j = 1 : 3$

Theo trình tự như ở trên:

<1> $Z_D = 4y_1 + 5y_2 \rightarrow \max$

<2> $$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 27 \\ y_1 + 2y_2 \le 7 \\ y_2 \le 3 \end{cases}$$

<3> $y_j \ge 0,\ i = 1:2$

<u>Ví dụ 2</u>: Lập bài toán D của bài toán P sau:

<1> $Z_P = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$

<2> $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 1 \\ -2x_2 - x_4 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \end{cases}$$

<3> $x_j \ge 0,\ j = 1:4$

Theo trình tự đã giới thiệu và qui tắc đánh dấu bảng b) ta có:

<1> $Z_D = y_1 + 3y_2 + 3y_3 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} y_1 \ge 2 \\ 3y_1 - 5y_2 + y_3 \ge 4 \\ y_1 + 4y_3 \ge 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge 1 \end{cases}$$

<3> $y_j \ge 0,\ i = 1:3$

II.7.3. <u>Quan hệ giữa bài toán P và bài toán D</u>

A. <u>Các định lý đối ngẫu</u>

<u>Định lý 1:</u> Với cặp bài toán P và D chỉ xảy ra một trong 3 trường hợp sau:

1. Cả P và D đều không có phương án.

2. Cả P và D đều có phương án, lúc đó cả 2 đều có phương án tối ưu và giá trị $Z_{P\,(\text{tối ưu})} = Z_{D\,(\text{tối ưu})}$

3. Một trong hai bài toán không có phương án, còn bài toán kia có phương án, khi đó bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu và hàm mục tiêu của nó không bị chặn.

Định lý 2 (Định lý về độ lệch bù): Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán P và y^0 của bài toán D tối ưu là:

$$\begin{cases} x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^0 - c_j\right) = 0, \ j = 1:n \\ y_i^0\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j^0 - b_i\right) = 0, \ i = 1:m \end{cases}$$

Chú ý: Trong các tích trên nếu các thừa số này khác không thì thừa số kia phải bằng không. Nhờ tính chất này mà ta lập được hệ phương trình tuyến tính giúp cho việc giải bài toán D.

B. Tìm nghiệm bài toán P từ nghiệm bài toán D.

Giả sử đã giải được bài toán D, ta có thể suy ra kết quả của bài toán P như sau:

1/ Theo định lý 1: Nếu bài toán D không có phương án tối ưu, thì ta kết luận: bài toán P cũng không có phương án tối ưu.

2/ Theo định lý 1 và 2: Nếu bài toán D có phương án tối ưu là $y^o = (y_1^0, y_2^0, ... y_m^o)$ và giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{P(y^o)}$, ta có:

a/ Bài toán P cũng có phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ... x_n^0)$ với giá trị của hàm mục tiêu là $Z_{p(x^o)} = Z_{p(y^o)}$

b/ Việc tính toán các giá trị phương án tối ưu $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ... x_n^0)$ được tiến hành như sau:

Theo định lý 2 ta có:

Thứ 1. Nếu $Y_i^o \neq 0$ thì ta có $\Sigma a_{ij} x_j^o = b_i$

Nhờ đó ta lập được hệ phương trình tuyến tính để tính giá trị x_j^o.

Thứ 2. Ta thay $y^o = (y_1^0, y_2^0, ... y_m^o)$ vào các biểu thức $\left(\sum a_{ij} y_i^o - c_j\right) = E$. Với chỉ số j nào mà $E \neq 0$, thì theo định lý 2 có $x_j = 0$.

Với các phương trình lập được ở công việc thứ 1 và kết quả xác định được ở công việc thứ 2, ta tìm được nghiệm tối ưu x^o của bài toán gốc P.

Ví dụ:

- Ta có bài toán như sau:

<1> $Z_P = 52x_1 + 60x_2 + 36x_3 \rightarrow \min$

$$<2> \begin{cases} x_1 \geq -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_2 \geq -2 \\ x_3 \geq 3 \end{cases}$$

<3> x_j tùy ý, $j = 1 : 3$

- Bài toán đối ngẫu D tương ứng với bài toán P đã cho như sau:

<1> $Z_D = -2y_1 + 6y_2 + 4y_3 - 2y_4 + 3y_5 \rightarrow \max$

<2> $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 52 \\ 4y_2 + 2y_3 + y_4 = 60 \\ 3y_2 + y_5 = 36 \end{cases}$

<3> $y_i \geq 0, j = 1 : 5$

- Giải bài toán D, ta nhận được phương án tối ưu như sau:

$$y^o = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0, y_5^0) = (0, 11\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}, 0, 2)$$

$$Z_{p(y^o)} = 103\frac{1}{3}$$

Thứ 1: Kết quả giải bài toán D cho thấy $y_2^0, y_3^0, y_5^0 \neq 0$ nên có:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Thứ 2: Thay $y^o = (0, 11\frac{1}{3}, 7\frac{1}{3}, 0, 2)$ vào biểu thức tính E, ta nhận được kết quả $E_j = 0$, j= 1 : 3, do đó $x_j^o \neq 0$.

Giải hệ phương trình ở bước thứ 1 ta được:

Phương án tối ưu của bài toán P là:

$$x_o = (\frac{11}{6}, -\frac{5}{3}, 3); Z_{p(x^o)} = 103\frac{1}{3}$$

<u>Bài tập</u>

1/ Cho bài toán gốc

<1> $Z_P = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3 \rightarrow \max$

<2> $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le -2 \end{cases}$$

<3> x_1, x_2 tùy ý, $x_3 \le 0$

<u>Yêu cầu</u>:

a/ Lập bài toán đối ngẫu Z_D

b/ Giải bài toán đối ngẫu, suy ra kết quả bài toán gốc.

<u>Đáp số</u>:

a/ Bài toán Z_D:

<1> $Z_D = 2y_1 + 4y_2 - 2y_3 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 = 27 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 50 \\ y_1 - y_2 - y_3 \le 18 \end{cases}$$

<3> $y_i \ge 0$, $i = 1 : 3$

b/ Bài toán không có phương án tối ưu.

2/ Cho bài toán gốc

<1> $Z_P = -2x_1 + x_2 + x_4 \rightarrow \min$

<2> $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 27 \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 18 \end{cases}$$

<3> $x_j \ge 0$, $j = 1 : 4$

<u>Yêu cầu</u>:

a/ Lập bài toán đối ngẫu Z_D

b/ Giải bài toán bài toán gốc Z_p suy ra kết quả bài toán Z_D.

Đáp số:

a/ Bài toán Z_D:

<1> $Z_D = 15y_1 + 27y_2 + 18y_3 \rightarrow \max$

<2> $$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \le -2 \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 1 \\ -y_1 + y_2 - y_3 \le 0 \\ y_2 \le 1 \end{cases}$$

<3> $y_1, y_3 \le 0$, y_2 tùy ý

b/ Bài toán Z_p có phương án tối ưu:

$$x^o = (15, 0, 12, 0), Z_{p(x^o)} = -30$$

Phương án tối ưu bài toán Z_D là:

$$y^o = (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$$

$$Z_{D(y^o)} = -30$$

II.8. Bài toán QHTT nhiều mục tiêu

II.8.1. Khái niệm

Ở phần trước ta chỉ nghiên cứu bài toán QHTT một mục tiêu. Mục tiêu được thể hiện bằng hàm mục tiêu và khi giải bài toán thì cốt lõi là tìm cực tiểu hoặc cực đại hàm mục tiêu đó.

Trong thực tế ta cũng thường gặp những bài toán đòi hỏi phải cân nhắc, so sánh giữa nhiều mục tiêu khác nhau: ví dụ khi lập kế hoạch sản xuất, ngoài mục tiêu tiền lãi thu về lớn nhất, còn đòi hỏi ổn định lực lượng lao động, nâng cao đời sống người lao động... những bài toán như vậy yêu cầu ta phải đồng thời đạt nhiều mục tiêu khác nhau và ta gọi là những bài toán nhiều mục tiêu. Bài toán nhiều mục tiêu thường được gắn với mô hình toán tương ứng như bài toán QHPT nhiều mục tiêu, bài toán QHTT nhiều mục tiêu... Ở đây ta chỉ giới hạn nghiên cứu bài toán QHTT nhiều mục tiêu. Để tiện ta gọi tắt là bài toán nhiều mục tiêu.

Cách tiếp cận với bài toán nhiều mục tiêu là ta qui định cho mỗi mục tiêu một mức bằng số cụ thể, tiếp đến là xác định các hệ số phạt do vi phạm mức qui định và cuối cùng là tìm phương án đạt cực tiểu tổng độ lệch giữa các hệ số phạt đã xác định của các giá trị hàm mục tiêu so với mức đã qui định cho từng mục tiêu.

Thường người ta phân ra ba dạng mức mục tiêu:

<u>Mức một phía, cận dưới</u>: qui định giới hạn dưới cho giá trị mục tiêu cần đạt. Nếu đạt cao hơn mức này thì càng tốt.

<u>Mức một phía cận trên</u>: Qui định giới hạn trên mà giá trị mục tiêu không được vượt quá.

Nếu đạt thấp hơn mức này càng tốt.

<u>Mức hai phía</u>: Qui định giá trị mà mục tiêu phải đạt không hơn không kém.

Các bài toán nhiều mục tiêu được phân loại để nghiên cứu theo mức độ quan trọng của các mục tiêu:

- Qui hoạch nhiều mục tiêu không có ưu tiên.

- Qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên.

Sau đây là lần lượt xét từng loại bài toán.

II.8.2. Bài toán qui hoạch nhiều mục tiêu không có ưu tiên

Ta xét bài toán cụ thể sau đây:

Một xí nghiệp dự kiến sản xuất ba loại sản phẩm mới: A, B và C. Giám đốc xí nghiệp quan tâm tới 3 mục tiêu chính là lợi nhuận, lao động và vốn đầu tư. Cụ thể là:

1. Cần đạt được lợi nhuận tối thiểu là 125 triệu đồng từ các sản phẩm mới này.
2. Duy trì đội ngũ lao động hiện có ở mức 4000 người.
3. Giữ mức đầu tư không vượt quá 55 triệu đồng.

Giám đốc nhận thấy không có khả năng đạt đồng thời ba mục tiêu nêu ra, vì vậy ông quyết định các hệ số phạt như sau:

Hệ số phạt 5 trên 1 triệu đồng lợi nhuận đạt thấp hơn mức qui định.

Hệ số phạt 2 trên 100 lao động phải sử dụng thêm vượt qui định.

Hệ số phạt 4 trên 100 lao động không được sử dụng theo qui định.

Hệ số phạt 3 trên 1 triệu đồng vốn đầu tư phải tăng thêm so với mức qui định.

Giả sử: mức lợi nhuận, số lao động và mức vốn đầu tư tỉ lệ thuận với mức sản xuất sản phẩm.

Các số liệu, định mức và các hệ số phạt được cho trong bảng a.

Bảng a)

Mục tiêu	Sản phẩm			Mức mục tiêu	Hệ số phạt
	A	B	C		
Lao động	12	9	15	≥ 125 (tr.đ)	5
Lợi nhuận	5	3	4	= 40 (× 100 lđ)	2(+), 4(-)
Vốn đầu tư	5	7	8	≤ 55 (tr.đ)	3

Giải thích bảng số liệu trên (ở cột sản phẩm):

- ✓ Số liệu 12, 9, 15 là lợi nhuận thu được từ một đơn vị sản phẩm mới A, B, C.
- ✓ Số liệu 5, 3, 4 là số lao động cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm.
- ✓ Số liệu 5, 7, 8 là số vốn bỏ ra để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại A, B, C.

Rõ ràng trong bài toán trên có đủ cả ba dạng mức mục tiêu: cận dưới (lợi nhuận); cận trên (vốn đầu tư) và hai phía (lao động).

Ta đặt x_1, x_2, x_3 lần lượt là sản phẩm A, B, C muốn sản xuất. Vậy các mục tiêu trên có thể diễn đạt như sau:

$$12x_1 + 9x_2 + 15x_3 \geq 125 \text{ (lợi nhuận)}$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40 \text{ (lao động)}$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \leq 55 \text{ (vốn đầu tư)}$$

Kí hiệu Z là lượng phạt do vi phạm các mục tiêu qui định. Với các hệ số phạt đã cho ở bảng trên thì mục tiêu tổng thể là tìm các biến x_1, x_2, x_3 sao cho làm cực tiểu lượng phạt Z.

Để tiện việc nghiên cứu, ta đưa vào các biến phụ y_1, y_2, y_3 như sau:

$y_1 = (12x_1 + 9x_2 + 15x_3) - 125$ (lợi nhuận trừ mức qui định).

$y_2 = (5x_1 + 3x_2 + 4x_3) - 40$ (lao động trừ mức qui định).

$y_3 = (5x_1 + 7x_2 + 8x_3) - 55$ (vốn đầu tư trừ mức qui định).

Do y_i (i = 1, 2, 3) có thể nhận giá trị dương (+) hay âm (-) nên ta thay mỗi biến này bằng hiệu hai biến không âm:

$$y_1 = y_1^+ - y_1^- \text{ với } y_1^+,\ y_1^- \geq 0$$
$$y_2 = y_2^+ - y_2^- \text{ với } y_2^+,\ y_2^- \geq 0$$
$$y_3 = y_3^+ - y_3^- \text{ với } y_3^+,\ y_3^- \geq 0$$

Quan hệ giữa các biến trên có thể viết:

$$y_1^+ = \begin{cases} y_i & \text{nếu } y_i \geq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases} \qquad y_1^- = \begin{cases} |\,y_i\,| & \text{nếu } y_i \leq 0 \\ 0 & \text{nếu trái lại} \end{cases}$$

Rõ ràng như vậy y_i^+ biểu thị phần dương của biến y_i, còn y_i^- biểu thị phần âm của biến y_i (tương ứng với dấu + và dấu -).

Với những biến phụ này, về mặt toán học mục tiêu đã nêu trên có thể diễn đạt bằng phương trình hàm mục tiêu sau:

$$Z = 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + +3y_3^+ \rightarrow \min$$

Ghi chú: Vì sẽ không bị phạt nếu lợi nhuận đạt hơn 125 và mức đầu tư ít hơn 55, nên các biến y_1^+ và y_3^- không có mặt trong hàm mục tiêu.

Để chuyển bài toán qui hoạch nhiều mục tiêu về mô hình QHTT, ta cần đưa các biến phụ vào các ràng buộc. Ví dụ:

$$y_1 = y_1^+ - y_1^- = 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 125$$

Hay:

$$12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125$$

Tương tự như vậy đối với y_2 và y_3. Cuối cùng ta nhận được mô hình QHTT như sau:

$$<1> \quad Z = 5y_1^- + 2y_2^+ + 4y_2^- + +3y_3^+ \rightarrow \min$$

$$<2> \quad \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$<3> \quad x_j \geq 0, y_k^+ \geq 0, y_k^- \geq 0 \text{ với } j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3.$$

Giải bài toán QHTT trên bằng phương pháp đơn hình, ta nhận được phương án tối ưu như sau: $x_1 = 25/3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 5/3$; Với $y_1^+ = 0$, $y_1^- = 0$, $y_2^+ = 25/3$, $y_2^- = 0$, $y_3^+ = 0$, $y_3^- = 0$.

Ta nhận thấy:

$$y_1 = y_1^+ - y_1^- = 0 - 0 = 0$$

$y_2 = y_2^+ - y_2^- = 25/3 - 0 = 25/3 = 8\frac{1}{3} > 0$

$y_3 = y_3^+ - y_3^- = 0 - 0 = 0$

Tức là:

- Mục tiêu thứ nhất và mục tiêu thứ ba hoàn toàn thoả mãn ($y_1 = y_3 = 0$)
- Mục tiêu thứ hai đã vượt mức qui định ($y_2 = y_2^+ = 8\frac{1}{3} = 8{,}33$). Tức là số lao động vượt qui định là 833 người so với 4000 người qui định.

Lượng phạt do vi phạm mục tiêu lao động là $Z = 16\frac{1}{3}$.

II.8.3. Bài toán qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên

Trong thực tế có nhiều trường hợp bài toán qui hoạch nhiều mục tiêu, nhưng yêu cầu có mức ưu tiên các mục tiêu khác nhau. Để tiện khảo sát, người yêu cầu phải đặt thứ tự mức ưu tiên (ví dụ mức ưu tiên 1, mức ưu tiên 2,...).

Với tình huống đó trước hết ta tập trung vào việc đạt được các mục tiêu ưu tiên mức 1 – Sau khi có lời giải đối với các mục tiêu có mức ưu tiên 1, ta xét tới các mục tiêu ở mức ưu tiên tiếp theo.

Khi xét các mục tiêu cùng vơi mức ưu tiên, cách tiến hành như đã làm ở phần trước (mục II.8.2).

Trong phần này ta sử dụng phương pháp tuần tự để giải bài toán Qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên.

Nội dung phương pháp tuần tự:

Thực chất của phương này là giải một dãy các bài toán QHTT theo các giai đoạn:

a) Giai đoạn 1

Chỉ đưa vào mô hình QHTT các mục tiêu có mức ưu tiên 1 và áp dụng phương pháp đơn hình để giải bài toán. Nếu lời giải (phương pháp tối ưu) là duy nhất thì ta dừng quá trình giải mà không cần xem xét tiếp các mục tiêu còn lại. Trường hợp có nhiều lời giải ứng với cùng giá trị tối ưu hàm mục tiêu Z^* thì ta chuyển sang giai đoạn 2 và đưa vào mô hình các mục tiêu ở mức ưu tiên 2.

b) Giai đoạn 2

Trong trường hợp cần chuyển sang giai đoạn 2, ta phân biệt cách xử lý trên cơ sở giá trị của hàm mục tiêu Z^* tính được ở giai đoạn 1 như sau:

Nếu $Z^* = 0$: tức là mọi biến phụ biểu thị độ lệch giữa giá trị của các mục tiêu có mức ưu tiên 1 và mục tiêu tương ứng với chúng phải bằng 0 (mọi mục tiêu đều đạt được). Trong trường hợp này, mọi biến phụ có thể loại bỏ khỏi mô hình ở giai đoạn 2. Trong mô hình giai đoạn 2 các ràng buộc đẳng thức chứa các biến phụ được thay thế bằng các ràng buộc đẳng thức hay bất đẳng thức đối với các mục tiêu có mức ưu tiên 1 nhằm để đảm bảo điều kiện tiếp tục đạt được các mục tiêu ở mức ưu tiên 1.

Nếu $Z^* > 0$ thì ở giai đoạn 2 chỉ thêm vào mô hình đã thiết lập ở giai đoạn 1 các mục tiêu có mức ưu tiên 2, nhưng sau đó cần thêm vào ràng buộc phản ánh giá trị hàm mục tiêu của giai đoạn 1 bằng Z^* - (Ràng buộc này cho phép ta loại trừ khỏi hàm mục tiêu giai đoạn 2 các số hạng liên quan tới các mục tiêu có mức ưu tiên 1)

Sau khi giải theo thuật toán đơn hình, nếu thấy mô hình nhận được có nhiều lời giải, ta tiếp tục lặp lại các giai đoạn tiếp theo cho các mục tiêu có mức ưu tiên thấp hơn.

Ví dụ: Ta quay trở lại bài toán nhiều mục tiêu không có ưu tiên ở phần trước. Từ kết quả giải bài toán ở phần II.8.2, giám đốc xí nghiệp không chấp nhận phương án sử dụng tăng thêm nhân lực lao động (tăng trên 20% ≈ 833 người). Vì vậy ông ta đã đặt lại mục tiêu của bài toán là: ưu tiên hàng đầu là tránh tăng lực lượng lao động và tránh đầu tư quá mức – mức ưu tiên 1, và mức ưu tiên 2 là giữ lợi nhuận tối thiểu 125tr.đ và tránh giảm lao động dưới mức 4000.

Với quyết định hai mức ưu tiên như vậy, cùng với qui định hệ số phạt như ở bảng a, ta thành lập được bảng số liệu cho bài toán qui hoạch nhiều mục tiêu có ưu tiên như ở bảng b.

Bảng b)

Mức ưu tiên	Sản phẩm			Mức mục tiêu	Hệ số phạt
	A	B	C		
Mức 1	5	3	4	≤ 40 (×100LĐ)	2
	5	7	8	≤ 55 (tr.đ)	3
Mức 2	12	9	15	≥ 125 (tr.đ)	5
	5	3	4	≥ 40(×100LĐ)	4

Theo những số liệu cho ở bảng b, thì ở giai đoạn 1 chỉ có hai mục tiêu ở mức ưu tiên 1 được đưa vào mô hình bài toán QHTT. Tương tự như cách làm đối vơi bài toán nhiều mục tiêu không ưu tiên ở phần II.8.2. (Để so sánh với mô hình mà cả 4 mục tiêu có cùng mức ưu tiên trong phần II.8.2., ta giữ nguyên chỉ số dưới của các biến phụ) Lúc này ta có mô hình bài toán QHTT như sau:

<1> $Z = 2y_2^+ + 3y_3^+ \rightarrow \min$

<2> $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (y_2^+ - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (y_3^+ - y_3^-) = 55 \end{cases}$

<3> $x_j \geq 0,\ y_k^+ \geq 0,\ y_k^- \geq 0,\ j = 1,2,3;\ k = 2,3$

Sử dụng phương pháp đơn hình, ta nhận được lời giải $y_2^+ = 0,\ y_3^+ = 0$ và $Z^* = 0$, tức là 2 mục tiêu ở mức ưu tiên 1 đều đạt.

Vì đã có các phương án (x_1, x_2, x_3) thoả các điều kiện:

$$5x_1 + 3x_2 + 4\,x_3 \leq 40$$

$$5x_1 + 7x_2 + 8\,x_3 \leq 55$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

do đó ở giai đoạn tiếp theo, hai mục tiêu có mức ưu tiên 1 được dùng như những ràng buộc để tiếp tục đạt các mục tiêu đó. Các ràng buộc này phần đảm bảo y_2^+ và y_3^+ bằng không và bị loại bỏ khỏi mô hình.

Sau khi loại bỏ y_2^+ và y_3^+, đồng thời thêm vào các mục tiêu ở mức ưu tiên 2, mô hình bài toán QHTT giai đoạn 2 là:

<1> $Z = 5y_1^- + 4y_2^- \rightarrow \min$

$$<2> \quad \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 15x_3 - (y_1^+ - y_1^-) = 125 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - (0 - y_2^-) = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 - (0 - y_3^-) = 55 \end{cases}$$

$$<3> \quad x_j \geq 0;\ y_1^+ \geq 0;\ y_k^- \geq 0;\ j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3$$

Dùng phương pháp đơn hình để giải ta nhận được nghiệm duy nhất $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3{,}75$

$$y_1^+ = 0,\ y_1^- = 8{,}75,\ y_2^- = 0,\ y_3^- = 0$$

Với $Z^* = 43{,}75$

Do lời giải là duy nhất, nên quá trình giải kết thúc với $x^* = (x_1; x_2; x_3) = (5 ; 0 ; 3{,}75)$ là phương án tối ưu của toàn bộ bài toán.

Rõ ràng với lời giải này thoả mãn đầy đủ cả hai mục tiêu ở mức ưu tiên 1 và một trong hai mục tiêu ở mức ưu tiên 2 (không giảm số lao động hiện có($y_2 = 0$)). Gần đạt mục tiêu ưu tiên 2 còn lại (thiếu 8,75) tức lợi nhuận ≥ 125.

III. QUI HOẠCH ĐỘNG

III.1. Khái niệm

Qui hoạch động là một trong những phương pháp tối ưu hiện đại, có phạm vi ứng dụng rất rộng rãi như: các quá trình kỹ thuật công nghiệp, tổ chức sản xuất, kế hoạch hoá kinh tế, vật lý, sinh học, quân sự...

Đối tượng của qui hoạch động là các quá trình tối ưu nhiều bước, đặc biệt là các quá trình phát triển theo thời gian.

Qui hoạch động được nhà toán học Mỹ R. Bellman đưa ra từ những năm 50 của thế kỷ XX và nhanh chóng được đưa vào áp dụng trong thực tế, nó đã trở thành một công cụ toán học quan trọng, người ta hay gọi là *nguyên tắc tối ưu*. Nguyên tắc tối ưu của Bellman có hai tính chất quan trọng là: tính đơn giản và tính tường minh, vì vậy nó được chú ý đặc biệt.

Ngoài nguyên tắc tối ưu, qui hoạch động còn có nguyên tắc thứ hai cũng không kém phần quan trọng đó là nguyên tắc lồng bài toán tối ưu đang xét vào một họ các bài toán tương tự.

Việc áp dụng nguyên tắc tối ưu và nguyên tắc lồng dẫn đến các phương trình hàm truy toán đối với giá trị tối ưu. Nhờ những phương trình hàm truy toán thu được cho phép ta lần lượt lập ra các điều khiển tối ưu cho bài toán xuất phát.

Điều đáng quan tâm ở đây là bài toán tính toán điều khiển cả quá trình được chia ra thành một dãy các bài toán tính toán điều khiển đơn giản hơn cho các giai đoạn của quá trình.

III.2. Phương pháp phương trình truy toán

III.2.1. Bài toán phân phối

Giả sử ta có nhiều tài nguyên khác nhau như: nhiên liệu, tiền, thiết bị máy móc, nhân lực...Mỗi loại tài nguyên trên có nhiều cách sử dụng khác nhau và tất nhiên sẽ dẫn đến nhiều hiệu quả không giống nhau.

Vấn đề đặt ra là: cần phân phối các tài nguyên đó như thế nào để hiệu quả sử dụng là lớn nhất.

Để giải quyết vấn đề đặt ra trên, ta xét quá trình phân phối một tài nguyên với trữ lượng của tài nguyên đó là a và có n cách sử dụng. Bài toán đặt ra như sau:

Nếu sử dụng x_i đơn vị theo cách thứ i (i = 1:N) thì sẽ được hiệu quả đo bằng hàm $\varphi_i(x_i)$. Hãy xác định số đơn vị x_i cần dùng theo mỗi cách i để tổng hiệu quả là lớn nhất.

Mô hình của bài toán có dạng:

$$\max \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x_i) = \max R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = a \qquad (3.2)$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, N \qquad (3.3)$$

Trong đó x_i và $\varphi_i(x_i)$ là những đại lượng thường có đơn vị đo khác nhau.

Độ lớn của hiệu quả phụ thuộc vào trữ lượng tài nguyên (a) và vào quá trình chọn lựa (N).

III.2.2. Phương pháp phương trình truy toán

Để nghiên cứu bài toán trên, ta lồng nó vào một họ các quá trình phân phối nào đó. Như vậy thay cho một bài toán với số lượng tài nguyên cho trước (a) và số cách sử dụng cố định (N), ta xét một họ các bài toán mà trong đó a và N thay đổi, tức là ta chuyển quá trình tĩnh thành quá trình động.

Vì cực đại của hàm R $(x_1, x_2,..., x_N)$ chỉ phụ thuộc vào và N. Nếu gọi giá trị tối ưu của bài toán là $f_N(a)$ thì:

$$f_N(a) = \max R(x_1, x_2,..., x_N)$$

Trong đó x_i thoả mãn (3.2) và (3.3). Khi N thay đổi, ta hãy tìm mối liên hệ giữa các hàm $f_N(a)$. Vì ở đây $f_1(a)= \varphi_1(a)$ nên có thể nói rõ hơn là: biết $\varphi_1(a)$ với a thay đổi, hãy tìm mối liên hệ giữa f_2 và f_1,... f_N và f_{N-1}.

Giả thiết $0 \le x_N \le a$ là lượng tài nguyên quyết định đối với quá trình thứ N. Khi đó, bất kì x_N như thế nào, số lượng còn lại $(a-x_N)$ sẽ được sử dụng để sao cho nhận được thu nhập cực đại của (N-1) quá trình còn lại.

Vì thu nhập tối ưu của (N-1) quá trình theo định nghĩa là $f_{N-1}(a- x_N)$ nên sự quyết định x_N cho quá trình thứ N đi đến thu nhập tổng cộng đối với N quá trình là:

$$\varphi_N(x_N) + \varphi_{N-1}(a-x_N)$$

Phương trình truy toán là:

$$f_N(a) = \max\left\{R(x_1, x_2, ..., x_n)\ \middle|\ \sum_{j=1}^{N} x_i = a,\ x_i \ge 0, i = 1:N\right\}$$

$$= \max_{0\le x_N \le a}\left\{\max\left\{R(x_1, x_2, ..., x_n)\ \middle|\ \sum_{i=1}^{N-1} x_i = a - x_N,\ x_i \ge 0, i = 1:N-1\right\}\right\}$$

$$= \max_{0\le x_N \le a}\left\{\varphi_N(x_n) + \max\left\{\sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i(x_i)\ \middle|\ \sum_{i=1}^{N-1} x_i = a - x_N,\ x_i \ge 0, i = 1:N-1\right\}\right\}$$

Từ đó ta suy ra:

$$f_N(a) = \max_{0 \le x_N \le a} \{\varphi_N x_N + f_{N-1}(a - x_N)\}, \; N = 2, 3, \ldots \qquad (3.4)$$

Rõ ràng ta đã đưa bài toán cực trị của N biến về N bài toán cực trị một biến và phương trình (3.4) gọi là phương trình truy toán của qui hoạch động. Đó là ý đồ cơ bản của phương pháp qui hoạch động giải bài toán cực trị bằng phương pháp phương trình truy toán.

Cụ thể là: Biết $f_1(a) = \varphi_1(a)$, dựa vào phương trình truy toán (3.4) ta tìm được $f_2(a)$, sau đó thay $f_2(a)$ vào (3.4) ta tìm được $f_3(a)$,.... Cứ như vậy tới khi tìm được $f_N(a)$.

Cơ sở của việc làm như trên là nguyên lí tối ưu tổng quát.

III.2.3. Các nguyên tắc cơ bản của QHĐ

Qui hoạch động là qui hoạch từng giai đoạn của quá trình nhiều giai đoạn, mà trong đó từng giai đoạn ta chỉ tối ưu hoá một bước.

Tuy nhiên khi qui hoạch một quá trình nhiều giai đoạn, ở mỗi bước ta phải lựa chọn điều khiển trên cơ sở không chỉ xuất phát từ lợi ích của chính bước đó mà từ lợi ích chung của toàn bộ quá trình.

Từ ý tưởng trên qui hoạch động có những nguyên tắc cơ bản sau:

NT1: *Nguyên tắc đánh số các giai đoạn từ dưới lên*

Đối với giai đoạn cuối có thể làm cho nó tốt nhất mà không lo hậu quả. Khi đó giai đoạn này trở nên ổn định và ta có thể xét giai đoạn trước đó, và cứ tiếp tục cho tới lúc tìm được giai đoạn đầu của quá trình.

NT2: *Thông số hoá bài toán*

Ở giai đoạn sát giai đoạn cuối cùng, ta chưa biết kết quả nên ta phải đặt giả thiết cho giai đoạn này, rồi ứng với giả thiết đó ta tìm điều khiển tối ưu cho giai đoạn cuối cùng.

Ở các bước khác cũng tương tự như vậy. Do đó quá trình điều khiển tối ưu sẽ phụ thuộc vào các thông số đặc trưng cho kết quả ở bước trước.

NT3: *Nguyên tắc lồng*

Lồng bài toán ban đầu vào một bài toán rộng hơn hay vào một họ các bài toán và do đó bài toán ban đầu là một trường hợp riêng của họ bài toán.

Họ bài toán nhờ có các thông số nên giải được. Ta sẽ thử kết quả của bài toán với các thông số khác nhau cho tới lúc được thông số ứng với bài toán xuất phát thì dừng lại.

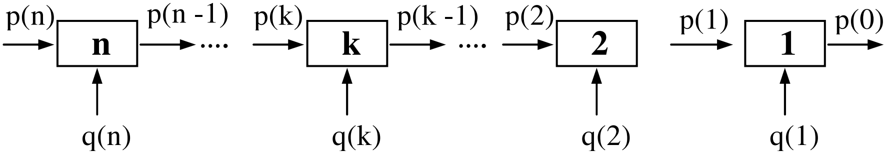
NT4: *Nguyên tắc tối ưu (Bellman)*

Dáng điệu tối ưu có tính chất là: dù trạng thái ban đầu và điều khiển ban đầu có dạng như thế nào thì điều khiển tiếp theo cũng là tối ưu đối với trạng thái thu được trong kết quả tác động những điều khiển ban đầu.

III.3. Quá trình nhiều giai đoạn và phương trình hàm

III.3.1. Quá trình nhiều giai đoạn

Giả sử cần xét một quá trình gồm n giai đoạn, ta đánh số bắt đầu từ giai đoạn cuối đến giai đoạn đầu tiên:



Để xác định một quá trình n giai đoạn, ta cần 6 yếu tố:

1. Vectơ trạng thái

Giả sử vectơ trạng thái tham gia vào quá trình ở giai đoạn n (chính là trạng thái ban đầu của quá trình) sẽ là $p(n) = (p_1(n),..., p_s(n))$.

Khi giai đoạn n kết thúc, ta nhận vectơ trạng thái $p(n -1) = (p_1(n -1),..., p_s(n -1))$. Ta gọi đây là trạng thái ban đầu của giai đoạn n -1.

2. Vectơ điều khiển

Đối với giai đoạn n, trạng thái thu được p(n - 1) không chỉ phụ thuộc vào trạng thái ban đầu p(n) mà còn phụ thuộc và vectơ điều khiển $q(n) = (q_1(n),..., q_r(n))$.

Ta gọi hệ vectơ (q(n), q(n - 1), ...q(1)) là một chiến lược.

3. Phương trình của quá trình

Nếu p(k) và q(k) đã được xác định và chọn thì ta thu được trạng thái xác định p(k-1)

Có mối quan hệ hàm:

$$p(k-1) = T\{p(k), q(k)\}, k = 1,\dots, n.$$

4. Ràng buộc của quá trình

Ngoài phương trình cùa quá trình, p(k) và q(k) còn phải thoả mãn các ràng buộc của quá trình:

$$R_i(p(n),\dots, p(0); q(n),\dots, q(1) \geq 0, i = 1,\dots, m$$

5. Hàm mục tiêu của quá trình

Hàm mục tiêu của quá trình kí hiệu f(p(n), ..., p(0); q(n),...,q(1)).

Trong nhiều trường hợp, hàm mục tiêu còn được kí hiệu:

$$\sum_{k=1}^{n} g_k\left(p(k), q(k)\right)$$

6. Các thông số của quá trình

Thông số của quá trình là những hằng số xác định quá trình. Nếu xác định chính xác các thông số thì có thể xác lập được mối quan hệ giữa chiến lược tối ưu và quá trình, do đó có thể nhận biết hai quá trình cùng một họ hay không?

Nếu chúng cùng một họ thì có thể dựa trên chiến lược tối ưu của quá trình trước mà suy ra chiến lược tối ưu của quá trình sau.

III.3.2. Xây dựng phương trình hàm

Kí hiệu $f_k(p(k))$ là kết quả tối đa của k giai đoạn nếu trạng thái vào là p(k) và dùng chiến lược tối ưu.

Chia quá trình k giai đoạn ra thành hai phần: giai đoạn k và k-1 giai đoạn còn lại, giả sử k-1 giai đoạn còn lại được điều khiển tối ưu.

Ta ký hiệu $g_k(p(k), q(k))$ là kết quả ở giai đoạn k.

Áp dụng nguyên tắc tối ưu ta có thể lập luận như sau:

Dùng điều khiển q(k) nào đó cho giai đoạn k thì kết quả của k giai đoạn là $g_k(p(k), q(k))+ f_{k-1}(p(k-1))$, nhưng theo phương trình của quá trình thì:

$$p(k-1) = T(p(k), q(k)).$$

Vậy ta có thể viết kết quả của cả k giai đoạn là:

$$g_k(p(k), q(k))+ f_{k-1}(T(p(k), q(k))) \qquad (3.5)$$

Ta chọn q(k) sao cho đạt max của (3.5), đó chính là $f_k(p(k))$. Từ đó ta có:

$$f_k(p(k)) = \max_{q(k)}\{g_k(p(k), q(k)) + f_{k-1}(T(p(k), q(k)))\} \quad (3.6)$$

Phương trình (3.6) còn gọi là phương trình hàm qui hoạch động.

Cho $f_0(p(0)) \equiv 0$, thì từ phương trình hàm (3.6) ta xác định được $f_t(p(t))$, t = 1,2, .., đến khi ta nhận được $f_n(p(n))$ thì bài toán được giải xong.

III.4. Sơ đồ tính toán

Việc giải tối ưu bài toán qui hoạch động dựa vào phương trình hàm (3.6), theo trình tự sau:

1. Viết phương trình hàm cho trạng thái cuối cùng của quá trình

Gọi $f_1(p(1))$ là giá trị cực đại của hiệu quả ở bước này:

$$f_1(p(1)) = \max_{q(1)}\{g_1(p(1), q(1)) + f_0(p(0))\}$$

Tìm $g_1(p(1), q(1))$ từ bộ rời rạc các giá trị của nó với một số các giá trị xác định p(1) và q(1) từ miền chấp nhận được tương ứng.

Vì $f_0(p(0)) \equiv 0$ (hiệu quả không có vì quá trình đã kết thúc), nên:

$$f_1(p(1)) = \max_{q(1)} g_1(p(1), q(1))$$

2. Xét bước thứ hai

Gọi $f_2(p(2))$ là giá trị cực đại của hiệu quả trong cả hai bước 1 và 2 với trạng thái p(1) ở đầu bước 2 và với quyết định $\overline{q}(1)$.

Lúc này ta có:

$$f_2(p(2)) = \max_{q(2)}\{g_2(p(2), q(2)) + f_1(p(1))\}$$

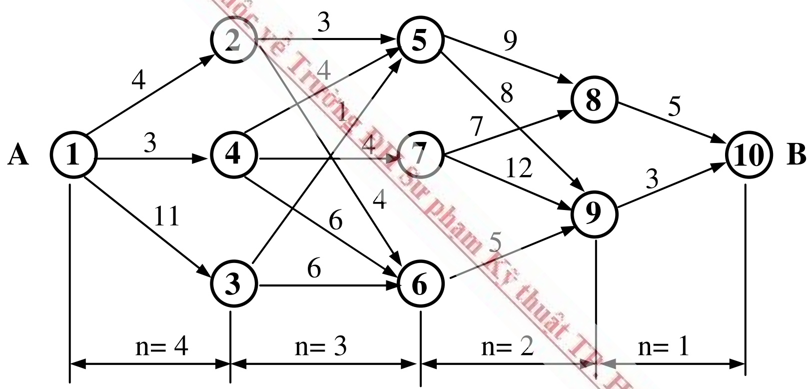
3. Tiếp tục quá trình cho tới bước thứ n

Ta có $f_n(p(n))$ là giá trị tối ưu của n bước.

III.5. Các ví dụ

Ví dụ 1

Cần chuyên chở hàng hoá từ thành phố A đến thành phố B. Mạng tuyến đường nối hai thành phố được mô tả trên hình.



Ta đồng nhất A ≡ 1, B ≡ 10

Trên hình:

- Đỉnh của mạng tương ứng với các thành phố, các dây cung của mạng biểu thị cung đường.
- Chi phí chuyên chở từ thành phố s (s = 1, 2,...,9) đến thành phố j (j = 1, 2,...,10) được biểu thị trên các cung của mạng.

Yêu cầu: Hãy tìm hành trình nối hai thành phố A và B sao cho tổng chi phí chuyên chở là nhỏ nhất.

Giải

Ta chia tập tất cả các đỉnh thành 5 tập con:

- Tập con 1 gồm đỉnh số 1: $\{1\}$
- Tập con 2 gồm các đỉnh có các cung đi từ đỉnh 1 vào chúng: $\{2,3,4\}$
- Tập con 3 gồm các đỉnh có các cung đi từ các đỉnh tập con 2 vào chúng: $\{5,6,7\}$.
- Tập con 4 gồm các đỉnh có các cung đi từ các đỉnh tập con 3 vào chúng: $\{8,9\}$.
- Tập con 5 gồm các đỉnh có các cung đi từ các đỉnh tập con 4 vào chúng: $\{10\}$.

Bất cứ hành trình nào đi từ thành phố 1 đến thành phố 10 đều chứa 4 cung đường. Mỗi cung trong chúng nối 2 đỉnh thuộc 2 tập con tương ứng. Vì vậy quá trình giải bài toán tìm hành trình tối ưu được chia ra 4 giai đoạn.

Nguyên tắc của hệ điều hành là đánh số các giai đoạn từ dưới lên. Ta đưa vào các ký hiệu sau:

- n: ký hiệu bước (giai đoạn), ở đây n = 1, 2, 3, 4.
- $f_n(s)$: chi phí nhỏ nhất để chuyển hàng từ thành phố s đến thành phố cuối cùng nếu đến thành phố cuối cùng còn n giai đoạn
- $j_n(s)$: ký hiệu thành phần mà từ thành phố s cần đi qua để đạt được chi phí nhỏ nhất $f_n(s)$.
- c_{sj}: chi phí chuyên chở hàng từ thành phố s đến thành phố j.

Ý nghĩa các ký hiệu như sau:

f: thể hiện hàm điều khiển

s: trạng thái của hệ thống

n: chỉ số mạng thông tin động với ý nghĩa là từ thành phố s đến thành phố cuối cùng còn n bước.

Ta có ngay $f_0(10) = 0$ vì không có chở hàng từ thành phố 10 đi.

<u>Xét n = 1</u>: Hàng có thể lấy từ thành phố 8 hoặc 9. Tức là:

$f_1(8) = c_{8,10} + f_0(10) = 5 + 0 = 5$, $s = 8$, $j_1(s) = 10$

$f_1(9) = c_{9,10} + f_0(10) = 3 + 0 = 3$, $s = 9$, $j_1(s) = 10$

<u>Xét n = 2</u>: Ta phải đưa ra các giả thiết về vị trí có hàng:

- ✓ Giả thiết 1: hàng ở thành phố 5
- ✓ Giả thiết 2: hàng ở thành phố 6
- ✓ Giả thiết 3: hàng ở thành phố 7

Lúc đó ta có:

- $f_{2(5)} = \min_j\{c_{5,8} + f_1(8), c_{5,9} + f_1(9)\} = \min_j\{9 + 5, 8 + 3\} = 11$

$s = 5$, $j_2(5) = 9$

- $f_{2(6)} = c_{6,9} + f_1(9) = 5 + 3 = 8$, $s = 6$, $j_2(6) = 9$

- $f_{2(7)} = \min_j\{c_{7,8} + f_1(8), c_{7,9} + f_1(9)\} = \min_j\{7 + 5, 12 + 3\} = 12$

$s = 7$, $j_2(7) = 8$

Tương tự như vậy khi xét n = 3, n= 4. Quá trình và kết quả tính toán được trình bày dưới dạng các bảng sau:

n = 1

s \ j	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$
8	5 + 0	5	10
9	3 + 0	5	10

n = 2

s \ j	8	9	$f_2(s)$	$j_2(s)$
5	9 + 5	8 + 3	11	9
6		5 + 3	8	9
7	7 + 5	12 + 3	12	8

n = 3

s \ j	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$
2	3 + 11	4 + 8		12	9
3	1 + 11	6 + 8		12	9
4	4 + 11	6 + 8	4 +12	14	8

n = 4

s \ j	2	3	4	$f_4(s)$	$J_4(s)$
1	4 +12	11+12	3 + 14	16	2

Vậy tổng chi phí nhỏ nhất là $f_4(1) = 16$ và hành trình tối ưu là 1→ 2 → 6→ 9 → 10.

Ví dụ 2: Giải qui hoạch động:

$$\sum_{i=1}^{4} g_i(x_i) \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 60$$

$x_i \geq 0$, i = 1, 2, 3, 4

Với số liệu được cho ở bảng sau:

x_i \ g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
0	0	0	0	0
15	16	30	24	18
30	46	36	40	52
45	62	54	60	64
60	80	74	90	78

Giải

Áp dụng công thức:

$$f_k(a) = \max_{0 \leq x_k \leq a} \{g_k(x_k) + f_{k-1}(a - x_k)\}$$

Với $f_0(0) = 0$, a biến đổi từ 0, 15, 30, 45, 60; k biến đổi từ 1, 2, 3, 4.

Với k = 1 ta có:

$f_1(0) = g_1(0) = 0$

$f_1(15) = g_1(15) = 16$

$f_1(30) = g_1(30) = 46$

$f_1(45) = g_1(45) = 62$

$f_1(60) = g_1(60) = 80$

Với k = 2 ta có:

$$f_2(15) = \max_{0 \le x_2 \le 15} \{g_2(0) + f_1(15); g_2(15) + f_1(0)\}$$
$$= \max\{0 + 16; 30 + 0\} = 30$$

$$f_2(30) = \max_{0 \le x_2 \le 30} \{g_2(0) + f_1(30); g_2(15) + f_1(15); g_2(30) + f_1(0)\}$$
$$= \max\{0 + 46; 30 + 16; 36 + 0\} = 46$$

$$f_2(45) = \max_{0 \le x_2 \le 45} \{g_2(0) + f_1(45); g_2(15) + f_1(30); g_2(30) + f_1(15); g_2(45) + f_1(0)\}$$

$$= \max\{0 + 62; 30 + 46; 36 + 16; 54 + 0\} = 76$$

$$f_2(60) = \max_{0 \le x_2 \le 60} \{g_2(0) + f_1(60); g_2(15) + f_1(45); g_2(30) + f_1(30); g_2(45) + f_1(15); g_2(60) + f_1(0)\}$$

$$= \max\{0 + 80; 30 + 62; 36 + 46; 54 + 16; 74 + 0\} = 92$$

Với k = 3 ta có:

$$f_3(15) = \max_{0 \le x_3 \le 15} \{g_3(0) + f_2(15); g_3(15) + f_2(0)\}$$
$$= \max\{0 + 30; 24 + 0\} = 30$$

$$f_3(30) = \max_{0 \le x_3 \le 30} \{g_3(0) + f_2(30); g_3(15) + f_2(15); g_3(30) + f_2(0)\}$$
$$= \max\{0 + 46; 24 + 30; 40 + 0\} = 54$$

$$f_3(45) = \max_{0\le x_3\le 45}\{g_3(0)+f_2(45); g_3(15)+f_2(30);$$

$$g_3(30)+f_2(15); g_3(45)+f_2(0)\}$$

$$= \max\{0+76; 24+46; 40+30; 60+0\} = 76$$

$$f_3(60) = \max_{0\le x_3\le 60}\{g_3(0)+f_2(60); g_3(15)+f_2(45);$$

$$g_3(30)+f_2(30); g_3(45)+f_2(15); g_3(60)+f_2(0)\}$$

$$= \max\{0+92; 24+76; 40+46; 60+30; 90+0\} = 100$$

Với k = 4 ta có: ta xét ngay với a = 60 vì không cần các giá trị trung gian của $f_4(a)$ với $a \le 45$.

$$f_4(60) = \max_{0\le x_4\le 60}\{g_4(0)+f_3(60); g_4(15)+f_3(45);$$

$$g_4(30)+f_3(30); g_4(45)+f_3(15); g_4(60)+f_3(0)\}$$

$$= \max\{0+100; 18+76; 52+54; 64+30; 78+0\} = 106$$

Tổng hợp ta có:

$f_4(60) = 106$ ứng với $x_4 = 30$ và $f_3(30)$

$f_3(30) = 54$ ứng với $x_3 = 15$ và $f_2(15)$

$f_2(15) = 30$ ứng với $x_2 = 15$ và $x_1 = 0$

Vậy ta có phương án tối ưu:

$x_1 = 0$; $x_2 = 15$; $x_3 = 15$; $x_4 = 30$; $f_4(60) = 106$

IV. SỬ DỤNG MATLAB ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN QHTT

IV.1. Các tính toán về ma trận

Nhập ma trận

Một ma trận tổng quát có dạng:

$$\mathbf{A}(mxn) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Với m - là số hàng của ma trận

n - là số cột của ma trận

$\mathbf{A}$ - Tên của ma trận

a - tên của phần tử của ma trận

(mxn) - gọi là kích thước của ma trận

Phần tử tổng quát của ma trận kí hiệu là a_{ij}

Việc nhập ma trận được tiến hành theo lệnh sau:

>> tên_MT =

$$[a_{11}\ \ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}\,;a_{21}\ \ a_{22}\ \cdots\ a_{2n};\cdots\cdots;a_{m1}\ \ a_{m2}\ \cdots\ a_{mn}\ ]$$

tức là *nhập theo hàng*, trong một hàng - *mỗi phần tử cách nhau một khoảng trắng*, các hàng - *phân cách nhau bởi dấu chấm phẩy* “ ;”

Ví dụ:

Cần nhập ma trận $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, trong MATLAB thực hiện như sau:

```
>>A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
ans =
        1           2           3
        4           5           6
        7           8           9
```

IV.2. Các phép tính và hàm chuẩn về ma trận

TÍNH TOÁN TRÊN CÁC PHẦN TỬ MA TRẬN

Đôi khi chúng ta cần truy xuất đến từng phần tử của ma trận, việc truy xuất này có thể thực hiện thông qua chỉ số của các phần tử theo phương thức:

<Tên ma trận> (Chỉ số hàng, chỉ số cột)

Ví dụ: nhập ma trận

```
>>x =[2   -1    1]
>>b = x(1) + x(3)
b = 4
```

Ví dụ: nhập

```
» a =[1 2; 3 4]
a =
   1    2
   3    4
```

```
» b=[5 6; 7 8]
b =
    5    6
    7    8
» c = a(1,1)+b(1,1)
c =    6
» d=a(1,2)+b(1,2)
d =     8
```

MỘT SỐ PHÉP TÍNH MA TRẬN

Phép cộng (trừ) các ma trận (Dùng toán tử + , -)

```
» c=a+b
c =
    6    8
   10   12
```

*Phép nhân các ma trận (Dùng toán tử nhân - *)*

```
» d=a*b
d =
   19   22
   43   50
```

Phép chuyễn vị ma trận (Dùng dấu nháy đơn)

```
» e=a'
e =
    1    3
    2    4
```

Phép lấy ma trận nghịch đảo (Dùng hàm inv(x))

» f=inv(a)

f =

-2.0000 1.0000

1.5000 -0.5000

Phép chia hai ma trận (Dùng toán tử chia /)

Trong toán học không định nghĩa phép chia hai ma trận, tuy nhiên trong MatLab chúng ta có thể thực hiện phép tính chia như sau:

» g = a/b

g =

3.0000 -2.0000

1.00 -1.0000

Thực chất của phép tính này nghĩa là: *nhân ma trận a với ma trận nghịch đảo của ma trận b như sau:*

» h = a*inv(b)

h =

3.0000 -2.0000

2.0 -1.0000

IV.3. Các cách nhập ma trận khác

Nhập ma trận hàng (Các phần tử cách nhau một khoảng trắng)

Ví dụ:

» x =[1 2 3 4 5 6]

x =

1 2 3 4 5 6

Nhập ma trận cột (Các phần tử phân cách nhau bởi dấu chấm phẩy " ; ")

Ví dụ:

» x = [1;2;3;4;5;6]

x =

1

2

3

4

5

6

Nhập ma trận hàng THEO QUY LUẬT

x=[PT đầu: quy luật: giá trị của PTcuối]

Ví dụ: Cần nhập ma trận hàng có dạng:

x=[1 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5 4.0],

Phần tử đầu có giá trị bằng 1, Quy luật là: *phần tử sau bằng phần tử trước đó cộng với* 0.5, Giá trị lớn nhất có thể có của phần tử cuối bằng 4, trong matlab thực hiện như sau:

» x = [1:0.5:4]

x =

1.0000 1.5000 2.0000 2.5000 3.0000 3.5000 4.0000

Cần chú ý là trong cách nhập trên tùy thuộc vào quy luật mà số phần tử của ma trận sẽ khác nhau và giá trị cuối cũng khác nhau, ví dụ:

» x = [1:1.5:4] % quy luật là cộng thêm 1.5 cho phần tử đứng sau

x =

1.0000 2.5000 4.0000

» x =[1:2:4] % quy luật là cộng thêm 2 cho phần tử đứng sau

x =

1 3

» x = [1:2.5:4] % quy luật là cộng thêm 2.5 cho phần tử đứng sau

x =

1.0000 3.5000

» x = [1:4] % quy luật là cộng thêm 1 cho phần tử đứng sau

x =

1 2 3 4

<u>Ghép các ma trận (ma trận khối)</u>

Ví dụ:

» a = [1 2; 3 4]

a =

1 2

3 4

```
» a = [a a]
a =
    1    2    1    2
    3    4    3    4
»  b =[1 2; 3 4]
b =
    1    2
    3    4
» c = [b;b]
c =
    1    2
    3    4
    1    2
    3    4
```


IV.4. Một số hàm chuẩn cơ bản trong phép tính ma trận

```
» a = [1 2; 3 4]
a =
    1    2
    3    4
» length(a)    %trả về số phần tử lớn nhất theo hàng hoặc cột
ans =    2
» b = [a;a]
```

```
b =
     1     2
     3     4
     1     2
     3     4
» length(b)
ans =
     4
» size(a) %Trả về kích thước (mxn) của ma trận
ans =
     2     2        % ma trận a có kích thước 2x2 (hai hàng x hai cột)
» size(b)
ans =
     4     2        %ma trận b có kích thước 4x2 (bố hàng x hai cột)
» [m n]=size(b) %Lấy kích thước của ma trận gán và hai biến m và n
m =
     4
n =
     2
» det(a)          %tìm định thức của ma trận vuông a
ans =
    -2
```

zeros(m,n) – tạo ma trận mxn với các phần tử bằng 0.

Ví dụ:

» zeros(4,1)

ans =

0

0

0

0

eye(n) – tạo ma trận đơn vị kích thước nxn

Ví dụ

» eye(4)

ans =

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

ones(n) – tạo ma trận kích thước nxn với tất cả các phần tử bằng 1, ví dụ:

» ones(4)

ans =

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

diag(a) – tạo ma trận cột từ đường chéo chính của a, ví dụ:

» a = [1 2 3;4 5 6; 7 8 9]

a =

1 2 3

4 5 6

7 8 9

» diag(a)

ans =

1

5

9

diag(a,k) – tạo ma trận cột từ đường chéo thứ k của a, nếu k >0 là đường chéo nằm trên đường chéo chính, nếu k <0 – nằm dưới đường chéo chính, ví dụ:

» diag(a,1)

ans =

2

6

» diag(a,-1)

ans =

4

8

a(:,k) – tạo ma trận cột từ cột thứ k của ma trận a, ví du:

```
» a(:,1)
ans =
     1
     4
     7
```

a(k,:) – tạo ma trận hàng từ hàng thứ k của ma trận a, ví dụ:

```
» a(1,:)
ans =
     1     2     3
```

a(:) – chuyển ma trận a thành ma trận cột, ví dụ:

```
» a(:)
ans =
     1
     4
     7
     2
     5
     8
     3
     6
     9
```

IV.5. Giải các bài toán QHTT trong Matlab

GIỚI THIỆU HÀM LINPROG

Hàm Linprog trong Matlab dùng cho việc giải bài toán QHTT dạng:

$Z = c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ -> min

Thỏa mãn:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1$

. . . .

$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+...+a_{kn}x_n \le b_k$

$a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+...+a_{tn}x_n = b_t$

. . . .

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n = b_m$

và $x_i \ge 0$, i=1, 2, . . .n

Cú pháp sử dụng:

[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)

Trong đó:

x : véc tơ cột chỉ phương án của bài toán;

$x=[x_1\ x_2\ ...\ x_n]^T$

fval – là giá trị tối ưu

exit – giá trị chỉ định phương án tối ưu:

nếu p=1 : bài toán có phương án tối ưu;

nếu p = -3 : bài toán không có phương án tối ưu.

f – Ma trận các hệ số ở hàm mục tiêu

$f = [c_1\ c_2\ \ . . .\ c_n]^T$

A – Ma trận ứng với các ràng buộc dạng bất đẳng thức nhỏ hơn hoặc bằng.

A= $a_{11}\ a_{12} . . .a_{1n}$

$a_{21}\ a_{22} . . .a_{2n}$

. . . .

$a_{k1}\ a_{k2} . . .a_{kn}$

b – Ma trận cột ứng với các ràng buộc cơ bản dạng bất đẳng thức nhỏ hơn hoặc bằng.

b = $[b_1\ b_2 . . .b_k]^T$

Aeq – Ma trận ứng với các ràng buộc dạng đẳng thức.

Aeq= $a_{t1}\ a_{t2} . . .a_{tn}$

. . . .

$a_{m1}\ a_{m2} . . .a_{mn}$

beq – Ma trận cột ứng với các ràng buộc cơ bản dạng đẳng thức.

beq = $[b_t\ b_{t+1} . . .b_m]^T$

lb: ma trận các ràng buộc tự nhiên.

lb= zeros(n,1) , n số ẩn x_i

Các chú ý:

1. Trường hợp 1: bài toán có dạng chính tắc, trong hàm Linprog, nhập A= [ ], b= [ ].
2. Trường hợp 2: Trong các ràng buộc cơ bản có bất đẳng thức lớn hơn hay bằng thì biến đổi bất đẳng thức này về

dạng đẳng thức trước khi xác định các ma trận A, b, Aeq và beq.

3. Trường hợp 3: Các ràng buộc cơ bản chỉ ở dạng bất đẳng thức nhỏ hơn hay bằng , trong hàm Linprog ta nhập Aeq=[ ], beq=[ ]

IV.6. <u>Các ví dụ</u>

Ví dụ 1: Giải bài toán QHTT sau:

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 \leq 36 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \qquad (3)$$

Giải:

```
>>f=[2;5;4;1;-5];
>>Aeq=[1 -6 0 -2 -9;0 2 1 1/2 3/2];
>>A= [0 3 0 0 1];
>>beq=[32;30];
>>b=[36];
>>lb=zeros(5,1);
>>[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
Optimization terminated.
```

x =

32.0000

0.0000

30.0000

0.0000

0.0000

fval =

184.0000

exitflag =

1

Ví dụ 2: Giải bài toán QHTT sau:

$$Z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 \leq 36 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5} \qquad (3)$$

Giải:

Thực hiện phép biến đổi bất đẳng thức thú 3 trong hệ các ràng buộc cơ bản, phát biểu lại bài toán trong dạng sau:

$$Z' = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 + 0x_6 \rightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36 \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6} \qquad (3)$$

```
>>f=[2;5;4;1;-5;0];
>>Aeq=[1 -6 0 -2 -9 0;0 2 1 1/2 3/2 0;0 3 0 0 1 1];
>>A= [];
>>beq=[32;30;36];
>>b=[];
>>lb=zeros(6,1);
>>[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
Optimization terminated.
x =
   32.0000
    0.0000
   30.0000
    0.0000
    0.0000
   36.0000
fval =
  184.0000
exitflag =
     1
```

Ví dụ 3: Giải bài toán QHTT sau:

$$Z = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 7 \rightarrow Min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}$$

Giải:

```
>>f=[6;1;1;3;1;-7];
>>Aeq=[-1 1 0 -1 0 1;2 0 -1 0 0 2;4 0 0 2 1 -3];
>>A= [];
>>beq=[15; -9; 2];
>>b=[ ];
>>lb=zeros(6,1);
>>[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
x =
  1.0e+008 *
    0.0000
    0.0000
    1.5277
    0.7638
    0.7638
    0.7638
fval =
 -7.6383e+007
exitflag =
    -3
```

Bài toán không có phương án tối ưu.

V. BÀI TẬP

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Trường hợp sử dụng và đặc điểm của ẩn phụ trong bài toán QHTT? Cho ví dụ.

2. Ẩn giả trong bài toán QHTT dùng để làm gì? Đặc điểm của nó? Cho ví dụ.

3. Ẩn cơ bản là gì? Có những đặc điểm gì? Cho ví dụ.

4. Phương án cơ bản của bài toán QHTT phải thỏa những điều kiện gì? Cho ví dụ.

5. Cách làm đủ ẩn cơ bản để tạo phương án xuất phát khi giải bài toán QHTT theo phương pháp đơn hình lập bảng. Cho ví dụ.

6. Trình bày nội dung tiêu chuẩn tối ưu được sử dụng khi giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình lập bảng.

7. Cách tìm ẩn đưa vào (x_ℓ) khi biến đổi bảng đơn hình trong quá trình giải bài toán QHTT.

8. Cách tìm ẩn đưa ra (x_k) khi biến đổi bảng đơn hình trong quá trình giải bài toán QHTT.

9. Cách tính hệ số ước định Δ_0, Δ_j khi giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình lập bảng.

10. Hãy chứng minh với bài toán QHTT mở rộng khi ẩn giả khác 0 ($\neq 0$) thì bài toán QHTT không có phương án tối ưu.

11. Hàm mục tiêu trong bài toán tối ưu chứa đựng những nội dung gì? Cách thể hiện.

12. Ý nghĩa thực tế của các ràng buộc cơ bản trong bài toán tối ưu.

13. Khi đọc bảng đơn hình những trường hợp nào cho kết luận bài toán không có phương án tối ưu?

14. Với bài toán QHTT dạng chính tắc đủ ẩn cơ bản f(x) → max có $\Delta_j \geq 0$, $j = 1 \div n$ ta kết luận gì?

15. Với bài toán QHTT mở rộng $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + Mx_{j+1} \rightarrow \min$, có $\Delta_j \leq 0$, $j = 1 \div n$ và $x_{j+1} \neq 0$ thì kết luận thế nào?

16. Phương án cơ bản thực chất là gì của miền nghiệm D trong bài toán QHTT?

17. Bài toán QHTT có thể đơn nghiệm hoặc đa nghiệm. Điều đó thể hiện thế nào ở bài toán phẳng (2 ẩn số).

18. Thực chất việc giải bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình là gì? Cho biết tính ưu việt của phương pháp đơn hình?

19. Cho biết quan hệ giữa bài toán gốc Z_P và bài toán đối ngẫu Z_D?

20. Cho biết phương pháp tiếp cận bài toán QHTT đa mục tiêu?

II. GIẢI BÀI TOÁN QHTT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

1. $f(x) = 3x_1 + x_2 \to$ min và max

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 20 \\ 10x_1 + x_2 \ge 36 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 36 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

2. $f(x) = 20x_1 + 5x_2 \to$ min và max

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \ge 36 \\ 2x_1 + x_2 \ge 32 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

3. $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to$ max

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

4. $f(x) = 5x_1 + 5x_2 \to$ max

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

5. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

6. $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow$ min và max

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

7. $f(x) = 8x_1 + 7x_2 \rightarrow$ min và max

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 24 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 8 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

8. $f(x) = 10x_1 + 30x_2 \rightarrow$ min và max

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 16 \\ x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 14 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

9. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to$ min và max

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 6x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

10. $f(x) = x_1 + x_2 \to$ min và max

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

11. $f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to$ max

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

12. $f(x) = 10x_1 + 20x_2 \to$ min và max

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 36 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ \quad\quad\quad x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

13. $f(x) = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

14. $f(x) = 400x_1 + 100x_2 \rightarrow$ min và max

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 24 \\ x_1 + x_2 \ge 16 \\ x_1 + 3x_2 \ge 30 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

15. $f(x) = 30x_1 + 10x_2 \rightarrow$ min và max

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 6x_1 + 4x_2 \le 36 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

16. $f(x) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow$ min và max

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

17. $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

18. $f(x) = 20x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

19. $f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

20. $f(x) = 20x_1 + 10x_2 \to$ min và max

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 26 \\ -x_1 + 5x_2 \leq 34 \end{cases}$$

$x_1 , x_2 \geq 0$

III. PHÂN TÍCH LẬP MÔ HÌNH TOÁN

1) Một lớp sinh viên được phân công chuyển một số vật tư, thiết bị từ 2 kho I và II đến 3 phòng thí nghiệm của khoa A, B, C. Tổng số vật tư thiết bị có ở mỗi kho, số lượng vật tư, thiết bị cho mỗi phòng thí nghiệm và khoảng cách từ các kho đến các phòng thí nghiệm được cho ở bảng sau:

Cự ly / Phòng TN / Kho	A 15 T	B 20 T	C 25 T
I : 20 T	0,5 km	0,7 km	0,2 km
II : 40 T	0,4 km	0,3 km	0,6 km

Hãy lên kế hoạch vận chuyển sao cho:

- Các kho phải được giải phóng hết.
- Các phòng thí nghiệm phải nhận đủ vật tư, thiết bị.
- Tổng số (T×km) là nhỏ nhất.

2) Có hai địa phương A_1 và A_2 chuyên cung cấp cà phê cho 3 công ty xuất khẩu B_1, B_2 và B_3. Biết rằng khả năng cung cấp cà phê của địa phương A_1 là 150T và địa phương A_2 là 250T. Yêu cầu xuất khẩu của công ty B_1 là 100T, công ty B_2 là 130T và công ty B_3 là 170T. Cước phí vận chuyển (×1000đ/T) từ nơi cung cấp đến nơi nhận được cho theo bảng sau:

Cung cấp \ Tiêu thụ	B_1	B_2	B_3
A_1	12	16	28
A_2	20	31	15

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất.

3) Phân tích lập mô hình toán trong tình huống sau:

Một đại hội thể dục thể thao được tổ chức cùng ngày ở 4 địa điểm A, B, C, D. Các nhu cầu vật chất được cung cấp từ 3 trung tâm I, II, III.

Các dữ liệu về yêu cầu thu, phát, cự ly (km) cho ở bảng sau:

Cự ly / Thu / Phát	A: 15 (T)	B:10 (T)	C:17 (T)	D:18 (T)
I : 20 (T)	160 km	50 km	100 km	70 km
II : 30 (T)	100 km	200 km	30 km	60 km
III : 10 (T)	50 km	40 km	30 km	50 km

Tìm phương án chuyên chở sao cho tổng số T×km là nhỏ nhất trong điều kiện thu phát cân bằng.

4) Lập mô hình bài toán với tình huống sau đây sao cho cước phí vận chuyển thấp nhất.

Có hai hợp tác xã K_1 và K_2 cung cấp bắp cho ba nhà máy sản xuất thức ăn gia súc E_1, E_2 và E_3. Khả năng cung cấp của hợp tác xã K_1 là 100T, của hợp tác xã K_2 là 200T. Yêu cầu tiêu thụ của nhà máy E_1 là 75T, nhà máy E_2 là 125T, nhà máy E_3 là 100T. Cước phí vận chuyển (1000 $^{đ}/_{T}$) từ nơi cung cấp đến nơi yêu cầu được cho theo bảng sau:

Cung cấp \ Tiêu thụ	E_1	E_2	E_2
K_1	10	14	30
K_2	12	20	17

5) Nhân dịp Tết Trung thu, một xí nghiệp sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Để sản xuất 3 loại bánh trên, xí nghiệp cần có các loại nguyên liệu: đường, đậu xanh, bột, lạp xưởng...Tại thời điểm đó xí nghiệp chỉ chuẩn bị được 500 kg đường và 300 kg đậu xanh, còn các nguyên khác muốn bao nhiêu cũng có.

Biết rằng: lượng đường, lượng đậu xanh dùng để sản xuất ra 1 chiếc bánh mỗi loại, cũng như tiền lãi thu được khi bán 1 chiếc bánh mỗi loại được cho trong bảng dưới. Hãy lập kế hoạch sản xuất các loại bánh sao cho lãi thu về lớn nhất.

Nguyên liệu \ Loại bánh	Đậu xanh	Thập cẩm	Dẻo
Đường: 500 kg	0,06 kg	0,04 kg	0,07 kg
Đậu xanh: 300 kg	0,08 kg	0	0,04 kg
Tiền lãi / 1bánh	2000 đ	1700 đ	1800 đ

6) Một xí nghiệp muốn sản xuất 3 loại kẹo: k_1, k_2, k_3 từ 3 loại nguyên liệu chính Z_1, Z_2 và Z_3. Công thức sản xuất từng loại kẹo, khả năng tối đa về nguyên liệu và lãi ròng thu được khi bán 1 tấn các loại kẹo cho ở bảng sau. Yêu cầu lập kế hoạch sản xuất mỗi loại kẹo để tổng lãi ròng thu được là nhiều nhất.

Loại kẹo / Nguyên liệu	k_1	k_2	k_3	Khả năng cung cấp tối đa (Tấn)
Z_1	0,7	0,7	0,7	700
Z_2	0,3	0,3	0,2	300
Z_3	-	0,2	0,3	150
Lãi ròng (×1000 đ/tấn)	100	110	120	

7) Phân tích lập mô hình toán với tình huống sau:

Một đơn vị sản xuất được cho phép áp dụng 3 phương pháp sản xuất I, II, III để trong một đơn vị thời gian thì sản xuất ra ít nhất là 75 sản phẩm A, 58 sản phẩm B và 64 sản phẩm C.

Định mức năng suất của từng phương án ứng với từng loại sản phẩm và chi phí sản xuất cho từng phương án trong một đơn vị thời gian cho ở bảng sau:

Phương pháp sản xuất / Loại sản phẩm	I	II	III
A ≥ 75	3	6	7
B ≥ 58	5	9	3
C ≥ 64	2	8	4
Chi phí sx/ 1 đơn vị thời gian	2	4	3

Lập phương án quỹ thời gian cho các phương án sản xuất để sản xuất lượng hàng theo yêu cầu và chi phí sản xuất thấp nhất.

8) Cần sản xuất một loại thức ăn gia súc có thành phần dinh dưỡng 40% protein và 60% các chất khác từ khô đậu tương và bột cá khô.

Hàm lượng dinh dưỡng trong các nguyên kiệu như sau:

- Trong khô đậu tương có 45% protein và 55% các chất khác.
- Trong bột cá khô có 20% protein và 80% các chất khác.

Giá mua 1 kg khô đậu tương là 5000 đồng và 1 kg bột cá khô là 4000 đồng.

Hãy lập kế hoạch mua nguyên liệu sao cho giá thành 1 kg thức ăn gia súc là thấp nhất.

9) Một xí nghiệp cơ khí có 32 công nhân nam và 20 công nhân nữ. Xí nghiệp có 2 loại máy: máy cắt đứt để tạo phôi và máy tiện. Năng xuất mỗi loại công nhân sử dụng mỗi loại máy như sau:

- Với máy cắt đứt: nam cắt được 30 phôi/giờ, nữ cắt được 28 phôi/giờ.
- Với máy tiện: nam tiện được 25 chi tiết/giờ, nữ tiện được 20 chi tiết /giờ.

Hãy lập phương án phân công lao động sao cho số sản phẩm trung bình sản xuất được là lớn nhất với điều kiện phải đảm bảo trong ngày cắt được bao nhiêu phôi thì tiệnhêt bấy nhiêu.

10) Phân tích lập mô hình toán tìm phương án sản xuất để tiền lãi bán sản phẩm lớn nhất trong tình huống sau:

Một xí nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm A và B trên bốn loại máy M_1, M_2, M_3, M_4. Thời gian cần thiết để sản xuất các loại sản phẩm trên mỗi loại máy cho ở bảng sau:

Loại máy / Loại sản phẩm	M_1	M_2	M_3	M_4
A	2 giờ	4 giờ	3 giờ	1 giờ
B	0,5 giờ	2 giờ	1 giờ	4 giờ

Biết rằng:

- Quỹ thời gian cho phép sử dụng các loại máy là: M_1: 45 giờ, M_2: 100 giờ, M_3: 300 giờ, M_4: 50 giờ.
- Tiền lãi khi bán một sản phẩm A là 600 đ, một sản phẩm B là 400 đ.

11) Phân tích lập mô hình toán với tình huống sau đây:

Có 3 loại thức ăn được dùng trong chăn nuôi là I, II, III. Thành phần dinh dưỡng cơ bản trong 3 loại thức ăn gồm: đường, chất béo và chất đạm. Mức độ yêu cầu về thành phần dinh dưỡng trong 1 ngày đêm, hàm lượng dinh dưỡng trong 1 đơn vị trong mỗi loại thức ăn và đơn giá từng loại thức ăn cho ở bảng sau:

Yêu cầu về các chất dinh dưỡng / 1 ngày đêm	Hàm lượng chất dinh dưỡng / 1 đơn vị loại thức ăn		
	I	II	III
Đường ≥ 20	0,3	0,8	2,0
Chất béo ≤ 10	3,0	0	0,4
Chất đạm ≥ 15	0	10	0
Giá mua 1 đơn vị thức ăn	800	1500	3000

Lập kế hoạch mua thức ăn cho một khẩu phần sao cho vừa đảm bảo chất dinh dưỡng theo yêu cầu mà giá thành khẩu phần thức ăn thấp nhất.

12) Phân tích lập mô hình toán với tình huống sau đây:

Cần vận chuyển vật liệu xây dựng từ 2 kho K_1, K_2 đến 3 công trường C_1, C_2 và C_3. Tổng số vật liệu ở mỗi kho, tổng số vật liệu có thể nhận được ở mỗi công trường (Tấn) và khoảng cách (km) từ các kho đến các công trường cho ở bảng sau:

Công trường / Cự ly (km) / Kho	C_1 (15 T)	C_2 (20 T)	C_3 (25T)
K_1 (20 T)	5 km	7 km	2 km
K_2 (40 T)	4 km	3 km	6 km

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho:

- Các kho được giải phóng hết vật tư.
- Các công trường được cung cấp đủ theo yêu cầu.
- Tổng số T × km phải thực hiện là nhỏ nhất.

13) Lập mô hình bài toán với tình huống sau đây sao cho cước phí vận chuyển thấp nhất.

Có hai hợp tác xã K_1 và K_2 cung cấp bắp cho ba nhà máy sản xuất thức ăn gia súc E_1, E_2 và E_3. Khả năng cung cấp của hợp tác xã K_1 là 100T, của hợp tác xã K_2 là 200T. Yêu cầu tiêu thụ của nhà máy E_1 là 75T, nhà máy E_2 là 125T, nhà máy E_3 là 100T. Cước phí vận chuyển (1000 $^{đ}/_{T}$) từ nơi cung cấp đến nơi yêu cầu được cho theo bảng sau:

Tiêu thụ / Cung cấp	E_1	E_2	E_2
K_1	10	14	30
K_2	12	20	17

14) Một bệnh nhân điều trị tại bệnh viện, hàng ngày phải uống tối thiểu 84 đơn vị loại dược phẩm D_1 và 120 đơn vị loại dược phẩm D_2. Hai dược liệu M và N có chứa có chứa 2 loại dược phẩm đó, nhưng cả M và N đều có chứa loại dược phẩm không cần thiết D_3.

Các dữ liệu cho ở bảng sau:

Loại dược phẩm	Loại dược phẩm/ gam dược liệu		Liều lượng tối thiểu yêu cầu / ngày
	M	N	
D_1	10 (đơn vị)	2 (đơn vị)	84 (đơn vị)
D_3	8 (đơn vị)	4 (đơn vị)	120 (đơn vị)
D_3	3 (đơn vị)	1 (đơn vị)	

Cần pha trộn bao nhiêu gam mỗi loại dược liệu M và N để thu được hỗn hợp dược phẩm tối thiểu hàng ngày cho bệnh nhân, đồng thời có lượng dược phẩm D_3 nhỏ nhất. Có bao nhiêu đơn vị D_3 trong hỗn hợp.

15) Một nhà máy sản xuất 2 loại thuyền cao su: 2 chỗ ngồi và 4 chỗ ngồi. Công việc sản xuất được tiến hành ở xưởng cắt và xưởng lắp ráp. Thời gian cần thiết để sản xuất mỗi loại thuyền tại các xưởng và lợi nhuận thu được trên một thuyền được cho ở bảng sau:

	Số giờ làm việc cần thiết		Năng suất/ tháng
	Thuyền 2 chỗ	Thuyền 4 chỗ	
Xưởng cắt	0,9	1,8	864 chiếc
Xưởng lắp ráp	0,8	1,2	672 chiếc
Lợi nhuận (USD/thuyền)	25	40	

Biết rằng: người nhận hàng không nhận quá 750 thuyền 4 chỗ trong một tháng.

Hãy lập kế hoạch sản xuất (số lượng mỗi loại thuyền) để lợi nhuận hàng tháng là lớn nhất.

16) Một hãng sản xuất máy tính có 2 xưởng lắp ráp A, B và 2 đại lý phân phối I, II. Xưởng A có thể lắp ráp tối đa 700 máy/ tháng. Xưởng B có thể lắp ráp tối đa 900 máy/ tháng. Đại lý I ít nhất tiêu thụ 1500 máy/tháng. Đại lý II ít nhất tiêu thụ 1000 máy/tháng. Cước phí vận chuyển một máy từ các xưởng đến các đại lý và mức tiêu thụ tối thiểu được cho ở bảng sau:

	Đại lý phân phối		Năng suất lắp tối đa/ tháng
	I	II	
Xưởng lắp ráp A	6 USD	5 USD	700 chiếc
Xưởng lắp ráp B	4 USD	8 USD	900 chiếc
Tiêu thụ tối thiểu	500	1000	

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho cước phí vận chuyển là thấp nhất.

17) Một hãng sản xuất hai mặt hàng A và B qua ba xưởng I, II và III. Mặt hàng A cần 5 giờ sản xuất ở xưởng I, 2 giờ sản xuất ở xưởng II và 1 giờ sản xuất ở xưởng III. Mặt hàng B cần 3 giờ sản xuất ở xưởng I, 3 giờ sản xuất ở xưởng II và 3 giờ sản xuất ở xưởng III.

Hãng thu lời được 8 và 6 đơn vị tiền tương ứng với mặt hàng A và B. Biết rằng năng suất tối đa trong ngày của xưởng I là 30 giờ/sản phẩm, của xưởng II là 24 giờ/sản phẩm và của xưởng III là 18 giờ/sản phẩm.

Hãy lập kế hoạch sản xuất để lợi nhuận là lớn nhất.

18) Một phân xưởng phụ trách 2 công đoạn S_1 và S_2 của quá trình sản xuất. Lực lượng lao động của phân xưởng được phân bố như sau: có 12 lao động loại A, 26 lao động loại B và 16 lao động loại C. Năng suất lao động của mỗi loại ứng với các công đoạn sản xuất được cho ở bảng sau:

Công đoạn SX / Loại lao động	S_1	S_2
A (12)	2	4
B (26)	3	3
C (16)	1	2

Hãy phân công lực lượng lao động cho từng công đoạn sao cho số sản phẩmsản xuất ra nhiều nhất mà không được tồn đọng ở dạng bán thành phẩm.

19) Một xí nghiệp sản xuất 4 loại mặt hàng A, B, C, D từ 3 loại vật tư I, II, III. Số lượng hạn chế của mỗi loại vật tư, định mức tiêu hao vật tư cho một đơn vị mặt hàng và lãi thu được từ một đơn vị mặt hàng được cho ở bảng sau:

Mặt hàng / Vật tư	A	B	C	D
I (300 đơn vị)	12	5	15	6
II (500 đơn vị)	14	8	7	9
III (200 đơn vị)	17	13	9	12
Tiền lãi/1 đơn vị sản phẩm	5	8	4	6

Hãy lập phương án sản xuất để tổng tiền lãi là lớn nhất đồng thời đảmbảo chủ động về vật tư.

20. Có 3 xí nghiệp may I, II, III cùng sản xuất áo vét và quần. Do nhiều hoàn cảnh khác nhau nên hiệu quả của đồng vốn đầu tư ở từng xí nghiệp cũng khác nhau. Giả sử đầu tư 1000 USD vào xí nghiệp I thì cuối kỳ có được 35 áo vét và 45 quần; vào xí nghiệp II thì cuối kỳ có được 40 áo vét và 42 quần; vào xí nghiệp III thì cuối kỳ có được 43 áo vét và 30 quần.

Lượng vải và số giờ công cần thiết để sản xuất 1 áo vét và 1 quần ở 3 xí nghiệp cho ở bảng sau:

Xí nghiệp / Sản phẩm	I		II		III	
Áo vét	3,5m	20g	4m	16g	3,8m	18g
Quần	2,8m	10g	2,6m	12g	2,5m	15g

Biết rằng tổng số vải có thể huy động được cho 3 xí nghiệp là 10000 m. Tổng số giờ lao động dành cho 3 xí nghiệp là 52000 giờ. Theo hợp đồng thì cuối kỳ phải đạt tối thiểu là 15000 bộ áo quần. Do tính chất của thị trường nếu lẻ bộ thì quần dễ bán hơn.

Hãy lập kế hoạch đầu tư vào mỗi xí nghiệp để sao cho hoàn thành kế hoạch sản phẩm, không khó khăn về tiêu thụ và không bị động về nguyên liệu và giờ lao động.

ĐÁP ÁN

Phần giải bằng đồ thị và phương pháp đơn hình

1) $f(x^*)_{min} = f(3,6) = 15$; $f(x^*)_{max} = f(8,4) = 28$

2) $f(x^*)_{min} = f(0,18) = 90$; $f(x^*)_{max}$ không có vì không chặn trên

3) Không tồn tại $f(x)_{max}$ vì không có miền nghiệm

4) $f(x^*)_{max} = f(4,2) = 30$

5) $f(x^*)_{max} = f(2,4) = 14$

6) $f(x^*)_{min} = f(4,2) = 14$; $f(x^*)_{max}$ không có vì không bị chặn trên.

7) $f(x^*)_{min} = f(6,4) = 48$; $f(x^*)_{max}$ không có vì không bị chặn trên.

8) $f(x^*)_{min} = f(14,0) = 140$; $f(x^*)_{max}$ không có vì không bị chặn trên.

9) $f(x^*)_{min} = f(0,2) = 2$; $f(x^*)_{max} = f(2,6) = 10$

10) $f(x^*)_{min} = f\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right) = 1$; $f(x^*)_{max} = 10$; $X^*_{max} = (10,0$ đến $0,10)$

11) $f(x^*)_{max} = f(12,0) = 48$

12) $f(x^*)_{min} = f(4,6) = f(16,0) = 160$; $f(x^*)_{max} = f(0,20) = 400$

13) $f(x^*)_{max} = f(3,5) = 54$

14) $f(x^*)_{min} = f(0,24) = 2400$; $f(x^*)_{max}$ không tồn tại vì không bị chặn trên

15) $f(x^*)_{min} = f(0,2) = 20$; $f(x^*)_{max} = f(5,0) = 150$

16) $f(x^*)_{min}$ và $f(x^*)_{max}$ không tồn tại

17) $f(x^*)_{min} = f(5,0) = 10$

18) $f(x^*)_{max} = f(6,3) = 150$

19) $f(x^*)_{max} = f(2,5) = 200$

20) $f(x^*)_{min} = f(3,8) = 140$; $f(x^*)_{max} = f(5,10) = 260$

Phần lập mô hình toán

1) Đặt X_{ij} là lượng vật tư, thiết bị được chuyển từ các kho i đến phòng thí nghiệm j (i=1:2, j=1:3)

Mô hình toán là:

$f(x) = 0{,}5X_{11} + 0{,}7X_{12} + 0{,}2X_{13} + 0{,}4X_{21} + 0{,}3X_{22} + 0{,}6X_{23} \rightarrow$ min

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 20 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 40 \\ X_{11} + X_{21} = 15 \\ X_{12} + X_{22} = 20 \\ X_{13} + X_{23} = 25 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1:2, j = 1:3

2) Đặt X_{ij} là lượng café chuyển từ các địa phương A_i đến các công ty B_j (i=1:2, j=1:3)

Mô hình tính toán:

$f(x) = 12X_{11} + 16X_{12} + 28X_{13} + 20X_{21} + 31X_{22} + 15X_{23} \rightarrow$ min

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 150 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 250 \\ X_{11} + X_{21} = 100 \\ X_{12} + X_{22} = 130 \\ X_{13} + X_{23} = 170 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1:2, j = 1:3

3) Đặt X_{ij} là số tấn hàng chuyển từ các điểm phát i đến các điểm thu j (i=1:3, j=1:4)

Mô hình toán là:

$f(x) = 160X_{11} + 50X_{12} + 100X_{13} + 70X_{14} + 100X_{21} + 200X_{22} + 30X_{23} + 60X_{24} + 50X_{31} + 40X_{32} + 30X_{33} + 50X_{34} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 20 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 30 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 10 \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} = 15 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 10 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 17 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 18 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0, i = 1:3, j = 1:4$

4) Đặt X_{ij} là số tấn bắp chuyển từ các hợp tác xã K_i đến các nhà máy E_j (i=1:2, j=1:3)

Mô hình tính toán:

$f(x) = 10X_{11} + 14X_{12} + 30X_{13} + 12X_{21} + 20X_{22} + 17X_{23} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 200 \\ X_{11} + X_{21} = 75 \\ X_{12} + X_{22} = 125 \\ X_{13} + X_{23} = 100 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0, i = 1:2, j = 1:3$

5) Đặt X_j là số lượng bánh mỗi loại cần sản xuất (X_1: bánh đậu xanh, X_2: bánh thập cẩm, X_3: bánh dẻo)

Mô hình toán:

$f(x) = 2000X_1 + 1700X_2 + 1800X_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 0{,}06X_1 + 0{,}04X_2 + 0{,}07X_3 = 500 \\ 0{,}08X_1 + 0{,}04X_3 = 300 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

6) Đặt X_1, X_2, X_3 là số tấn gạo K_1, K_2, K_3 cần sản xuất

Mô hình toán:

$f(x) = 1000(100X_1 + 110X_2 + 120X_3) \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 0{,}7X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}7X_3 \leq 700 \\ 0{,}3X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}2X_3 \leq 300 \\ 0{,}2X_2 + 0{,}3X_3 \leq 150 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

7) Đặt X_1, X_2, X_3 lần lượt là quỹ thời gian cho phương pháp sản xuất I, II, III.

Mô hình toán:

$f(x) = 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 + 7X_3 \quad 75 \\ 5X_1 + 9X_2 + 3X_3 = 58 \\ 2X_1 + 8X_2 + 4X_3 = 64 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

8) Đặt X_1, X_2 lần lượt là số Kg đậu tương và bột cá khô cần mua.

Mô hình toán:

$f(x) = 5000X_1 + 4000X_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 0{,}45X_1 + 0{,}20X_2 = 0{,}4 \\ 0{,}55X_1 + 0{,}80X_2 = 0{,}6 \\ X_1 + X_2 = 1 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

9) Đặt X_1 là số công nhân nam đứng máy cắt, $(32 - X_1)$ đứng máy tiện. X_2 là số công nhân nữ đứng máy cắt, $(20 - X_2)$ đứng máy tiện.

Mô hình toán:

$f(x) = 30X_1 + 28X_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 30X_1 + 28X_2 = 25(32 - X_1) + 20(20 - X_2) \\ X_1 = 30 \\ X_2 = 20 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

10) Đặt X_1 là số lượng sản phẩm A cần sản xuất. X_2 là số lượng sản phẩm B cần sản xuất.

Mô hình toán:

$f(x) = 600X_1 + 400X_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2X_1 + 0{,}5X_2 = 45 \\ 4X_1 + 2X_2 = 100 \\ 3X_1 + X_2 = 300 \\ X_1 + 4X_2 = 50 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

11) Đặt X_1, X_2, X_3 lần lượt là số lượng đơn vị thức ăn I, II, III cần mua.

Mô hình toán:

$f(x) = 800X_1 + 1500X_2 + 3000X_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 0{,}3X_1 + 0{,}8X_2 + 2X_3 = 20 \\ 3X_1 + 0{,}4X_3 = 10 \\ 10X_2 = 15 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

12) Đặt X_{ij} là số tấn vật liệu xây dựng từ các kho K_i đến các công trường C_j (i=1:2, j=1:3).

Mô hình toán:

$f(x) = 5X_{11} + 7X_{12} + 2X_{13} + 4X_{21} + 3X_{22} + 6X_{23} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 20 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 40 \\ X_{11} + X_{21} = 15 \\ X_{12} + X_{22} = 20 \\ X_{13} + X_{23} = 25 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1:2, j = 1:3

13) Đặt X_{ij} là số tấn bắp chuyển từ các hợp tác xã K_i đến nhà máy E_j (i=1:2, j=1:3)

Mô hình toán là:

$f(x) = 10X_{11} + 14X_{12} + 30X_{13} + 12X_{21} + 20X_{22} + 17X_{23} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 200 \\ X_{11} + X_{21} = 75 \\ X_{12} + X_{22} = 125 \\ X_{13} + X_{23} = 100 \end{cases}$$

$X_{ij} \geq 0$, i = 1:2, j = 1:3

14) Đặt X_1 là số gam dược liệu M, X_2 là số gam dược liệu N cần pha trộn.

Mô hình tính toán:

$f(x) = 3X_1 + X_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 10X_1 + 2X_2 = 84 \\ 8X_1 + 4X_2 = 120 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

Giải được: $X_1^* = 4, X_2^* = 22$, $f(x^*) = 34$

15) Đặt X_1 là số lượng thuyền 2 chỗ, X_2 là số lượng thuyền 4 chỗ cần sản xuất.

Mô hình toán:

$f(x) = 25X_1 + 40X_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 0{,}9X_1 + 1{,}8X_2 = 864 \\ 0{,}8X_1 + 1{,}2X_2 = 672 \\ X_2 = 750 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

Giải được: 480 thuyền 2 chỗ, 240 thuyền 4 chỗ, lợi nhuận cực đại 21.000USD.

16) Đặt X_{ij} là số máy cần vận chuyển từ các xưởng i đến các đại lý j (i=1:2, j=1:2).

Mô hình toán:

$f(x) = 6X_{11} + 5X_{12} + 4X_{21} + 8X_{22} \rightarrow \min$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} = 700 \\ X_{21} + X_{22} = 900 \\ X_{11} + X_{21} = 1500 \\ X_{12} + X_{22} = 1000 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

17) Đặt X_1, X_2 là số lượng mặt hàng A, B cần sản xuất.

Mô hình toán:

$f(x) = 8X_1 + 6X_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 = 30 \\ 2X_1 + 3X_2 = 24 \\ X_1 + 3X_2 = 18 \end{cases}$$

$X_1, X_2 \geq 0$

18) Đặt X_1 là số lao động loại A phân vào công đoạn S_1

$(12 - X_1)$ là số lao động loại A phân vào công đoạn S_2

X_2 là số lao động loại B phân vào công đoạn S_1

$(26 - X_2)$ là số lao động loại B phân váo công đoạn S_2

X_3 là số lao động loại C phân váo công đoạn S_1

$(16 - X_3)$ là số lao động loại C phân vào công đoạn S_2

Mô hình toán là:

$f(x) = 2X_1 + 3X_2 + X_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} X_1 = 12 \\ X_2 = 26 \\ X_3 = 16 \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 4(12 - X_1) + 3(26 - X_2) + 2(16 - X_3) \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

19) Đặt X_1, X_2, X_3, X_4 là lượng hàng A, B, C, D xí nghiệp cần sản xuất.

Mô hình toán:

$f(x) = 5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 6X_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 12X_1 + 5X_2 + 15X_3 + 6X_4 = 300 \\ 14X_1 + 8X_2 + 7X_3 + 9X_4 = 500 \\ 17X_1 + 13X_2 + 9X_3 + 12X_4 = 200 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

20) Đặt X_1, X_2, X_3 lần lượt là số ngàn USD đầu tư vào các xí nghiệp I, II, III .

Mô hình toán:

$f(x) = X_1 + X_2 + X_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 35X_1 + 40X_2 + 43X_3 > 1500 \\ 10X_1 + 2X_2 - 15X_3 \geq 0 \\ 248{,}5X_1 + 269{,}2X_2 + 238{,}4X_3 \leq 10000 \\ 1150X_1 + 1144X_2 + 1224X_3 \leq 5200 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Obádovies, J.Gyula: **Gyakorlati számitási eljárások**.
Gondolat Kiadó, Budapest 1972
2. Dr. Horváth, Dr. Somló : **A forgácsoló megmunkálások optimálása és adaptiv iranyitása.**
Muszaki Konyvkiado, Budapest, 1979.
3. Phùng Rân :**Tối ưu hóa và điều khiển quá trình cắt gọt.**
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật TP HCM, 1995.
4. Phùng Rân : **Lý thuyết sai số và xử lý số liệu quan sát thực nghiệm.**
Trường Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật TP HCM, 1994.
5. GS. Đặng Hấn : **Quy hoạch tuyến tính.**
Trường Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh, 1995.
6. PGS. TS. Bùi Minh Trí, PGS. Bùi Thế Tâm:**Tối ưu hóa, cơ sở lý thuyết, thuật toán, chương trình mẫu Pascal.**
Nhà xuất bản giao thông vận tải, 1996.
7. TS. Nguyễn Xuân Thuỷ: **Quy hoạch tuyến tính.**
Đại học Mở – bán công Tp. Hồ Chí Minh, 1994.
8. Lê Văn Phi : **Phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính và sơ đồ Pert.**
Trường Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh, 1994.
9. Lê Dũng Mưu : **Nhập môn các phương pháp tối ưu.**
Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà Nội, 1998.

10. PGS. TS. Hoàng Đình Hoà : **Tối ưu hóa trong công nghiệp thực phẩm.**

Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà Nội, 1999.

11. PGS. Bùi Thế Tâm, GS. Trần Vũ Triệu **: Các phương pháp tối ưu hóa.**

Nhà xuất bản giao thông vận tải. Hà Nội, 1998.

12. Nguyễn Cảnh : **Quy hoạch tuyến tính.**

Trường Đại học Kỹ Thuật Tp.Hồ Chí Minh.

13. Nguyễn Đức Nghĩa: **Tối ưu hóa- Qui hoạch tuyến tính và rời rạc.**

Nhà xuất bản giáo dục, 1998

14. PGS.TS. Nguyễn Nhật Lê : **Tối ưu hóa ứng dụng.**

Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà Nội, 2001.