CHƯƠNG 4

D NG TOÀN PHT ANG

Gi¶ng viªn: Phan §øc TuÊn

Đại Số Tuyến Tính

§7: Dạng Toàn phương

- Khi tìm cực trị của hàm 2 biến bài toán sẽ dẫn đến việc xác định dấu của vi phân cấp 2 của hàm f, nghĩa là ta cần xác định dấu của:

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''(x_0, y_0)dx^2 + 2f''(x_0, y_0)dxdy + f''(x_0, y_0)dy^2$$
$$= Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2$$

- Khi xét hàm 3 biến thì ta cần xác định dấu của vi phân cấp 2:

$$d^2 f = a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + 2a_{13}dxdz + a_{22}dy^2 + 2a_{23}dydz + a_{33}dz^2$$

§7: Dạng Toàn phương

- Tổng quát cho hàm nhiều biến thì việc tìm dấu của vi phân cấp 2 không đơn giản, do vậy “Dạng toàn phương” là một lý thuyết hổ trợ cho việc tìm dấu của vi phân cấp 2 của hàm nhiều biến.

Đại Số Tuyến Tính

§7: Dạng Toàn phương

- **Định nghĩa:** Cho V là không gian vector n chiều trên R, hàm

$$\omega : V \qquad R$$

xác định như sau: với mỗi

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \qquad V$$

Gi¶ng viªn: Phan §øc TuÊn

§7: Dạng Toàn phương

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ a_{33}x_3^2 + \ldots + 2a_{3n}x_3x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

được gọi là dạng toàn phương trên V.

§7: Dạng Toàn phương

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Cho dạng toàn phương:

$$\omega : R^3 \quad R, x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3$$

$$- x_2^2 + 2x_2x_3$$

$$+ 8x_3^2$$

$$= 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 8x_3^2$$

$$a_{11} \qquad 2a_{12} \qquad 2a_{13} \qquad a_{22} \qquad 2a_{23} \qquad a_{33}$$

§7: Dạng Toàn phương

Đại Số Tuyến Tính

- **Định nghĩa:** Cho dạng toàn phương

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ a_{33}x_3^2 + \ldots + 2a_{3n}x_3x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

khi đó, ma trận sau:

§7: Dạng Toàn phương

$$A_\omega = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Gọi là ma trận của dạng toàn phương

§7: Dạng Toàn phương

- **Ví dụ:** Cho dạng toàn phương

$$\omega : R^3 \quad R, x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 8x_3^2$$

- Khi đó, ma trận của dạng toàn phương là:

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

§7: Dạng Toàn phương

- **Bài tập:** Tìm ma trận của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$$

$$A_\omega =$$

§7: Dạng Toàn phương

- **Bài tập:** Tìm ma trận của dạng toàn phương sau:

$$\omega(x) = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 10x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

§7: Dạng Toàn phương

- **Ví dụ:** Cho dạng toàn phương có ma trận:

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- Khi đó, dạng toàn phương tương ứng là:

$$\omega(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

§7: Dạng Toàn phương

Nhận xét:

- Xác định dấu của các dạng toàn phương sau:

$$\omega_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

$$\omega_2(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2.$$

$$\omega_3(x) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2.$$

$$\omega_4(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2.$$

§7: Dạng Toàn phương

- **Dạng chính tắc của dạng toàn phương**

- Khi ma trận của dạng toàn phương là ma trận chéo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

§7: Dạng Toàn phương

- Hay $\omega(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2.$

- Thì ta gọi đó là dạng chính tắc của dạng toàn phương.

§7: Dạng Toàn phương

- **Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc**
- Phương pháp Lagrange (xem tài liệu)
- **Ví dụ:** Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc.

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

§7: Dạng Toàn phương

$$\omega(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2$$

- Đặt

$$y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = x_2 - 2x_3 \qquad \Rightarrow \omega(y) = y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2$$

$$y_3 = x_3$$

§7: Dạng Toàn phương

- **Ví dụ:** Đưa DT phương sau về dạng chính tắc:

$$\omega(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_2x_3$$

$$= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 2[x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_2x_3]$$

$$= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 2[(x_2 + \frac{5}{2}x_3)^2 - \frac{17}{4}x_3^2]$$

$$= (x_1 + 2x_2 - 3x_3)^2 + 2(x_2 + \frac{5}{2}x_3)^2 - \frac{17}{2}x_3^2$$

$$= y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{17}{2}y_3^2$$

§7: Dạng Toàn phương

- **Bài tập:** Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange:

$$\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 \qquad\qquad\qquad)^2$$

§7: Dạng Toàn phương

Đại Số Tuyến Tính

- **Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc**
- Phương pháp Jacobi (xem tài liệu)
- **Ví dụ:** Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc.

$$\omega(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

§7: Dạng Toàn phương

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Đặt

$$D_0 = 1,\ D_1 = a_{11} = 2,\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -35,$$

§7: Dạng Toàn phương

- Nếu $D_i \neq 0, \forall i = 1,2,...$ thì dạng toàn phương có dạng chính tắc là:

$$\omega(y) = \frac{D_1}{D_0} y_1^2 + \frac{D_2}{D_1} y_2^2 + \frac{D_3}{D_2} y_3^2$$

$$\omega(y) = \frac{2}{1} y_1^2 + \frac{5}{2} y_2^2 + \frac{-35}{5} y_3^2$$

§7: Dạng Toàn phương

Đại Số Tuyến Tính

- **Bài tập:** Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Jacobi:

$$\omega(x) = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$