LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP

TOÁN HỌC CAO CẤP

CHƯƠNG 1: MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

1.1 Lý Thuyết.

1.1.1. Ma trận

1.1.1.1. Cho m và n là 2 số nguyên dương.Một ma trận A cấp m x n là một bảng gồm m x n số được xếp thành m hàng và n cột, nghĩa là.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Ta kí hiệu $A = \left[a_{ij} \right], i = 1, 2, 3, ..., m \quad j = 1, 2, 3, ..., n$

1.1.1.2. Một số loại ma trận.

✓ Ma trận hàng (cột) là ma trận chỉ có một hàng (cột)

✓ Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử đều bằng không

✓ Ma trận vuông là ma trận có số hàng bằng số cột $m = n$

✓ Ma trận chéo là ma trận vuông mà mọi phần tử năm ngoài đường chéo chính đều bằng 0

✓ Ma trận đơn vị là ma trận chéo mà mọi phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1

✓ Ma trận tam giác là ma trận vuông mà mọi phần tử năm phía trên (dưới)đường chéo chính đều bằng 0

✓ Ma trận bậc thang là ma trận mà các hàng khác 0 đều ở trên các hàng bằng không , phần tử cơ sở của hàng dưới nằm bên phải phần tử cơ sở của hàng trên .

1.1.1.3. Các Phép Toán Trên Ma Trận

➢ Ma trận bằng nhau : hai ma trận A,B $\in M_{m\times n}$ bằng nhau kí hiệu A=B nếu

$A_{ij} = B_{ij}, i = \overline{1.m}, j = \overline{1,n}$

➢ Phép nhân một số với ma trận :

Cho A $\in M_{m\times n}, \alpha \in R$ ta có $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A_{ij}), i = \overline{1.m} \quad j = \overline{1,n}$

➢ Phép cộng ma trận: Cho A,B $\in M_{mxn}$. Tổng của A và B là:

$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$, i $= \overline{1,m}$; j $= \overline{1,n}$.

- .Phép nhân hai ma trận:Cho $A \in M_{mxn}$ và $B \in M_{mxn}$(số cột của A bằng số hàng của B).Tích của A và B là:

$(AB)_{ij}= \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik},(B)_{kj}$, $i=\overline{1,m}$;$j=\overline{1,r}$.

- .Phép chuyển vị ma trận:Cho $A \in M_{mxn}$.Ma trận chuyển vị của A, ký hiệu A^T:

$(A^T)_{ij}=(A)_{ij}$, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$.

- .Lũy thừa ma trận:

$A^p = A^{p-1}A$ (p là số tự nhiên ≥ 1)

1.1.1.4. Các phép biến đổi sơ cấp ma trận bậc thang:

- Phép biến đổi sơ cấp:

- Nhân các phần tử của 1 hàng với 1 số khác 0:$h_i \to \lambda h_j$ ($\lambda \neq 0$)
- Cộng vào các phần tử của 1 hàng các phần tử tương ứng của hàng khác đã được nhân với 1 số bất kỳ: $h_i \to h_i + \lambda h_j$.
- Đổi chỗ 2 hàng cho nhau: $h_i \to h_j$.

Tương tự ta có các phép biến đổi sơ cấp với các cột.

- Ma trận bậc thang: Là ma trận có các tính chất sau:

- Các hàng khác không đều ở trên các hàng bằng không
- Phần tử cơ sở của 1 hàng nằm cột bên phải so với phần tử cơ sở ở hàng trên

Định lý: Mọi ma trận đều đưa được về ma trận bậc thang nhờ các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng.

1.1.2.Định thức

1.1.2.1.Tính chất định thức

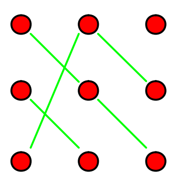
- Cho định thức A, A^T thu được bằng cách lấy hang i của A làm cột i của A^T
- det A = det A^T
- Đổi chỗ 2 hàng của A được bảng mới là B: detA = -detB
- Nếu Acó 2 hàng tỉ lệ, 2 hàng bằng nhau, 1 hàng có các phần tử bằng 0 thì detA=0
- Nếu các phần tử hang thứ i nhân $\lambda \neq 0$ thì detA cũng nhân λ

- ❖ Nếu mọi phần tử trong một hang của A có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể tách thành tổng hai định thức.
- ❖ Cộng một hang thứ i của A với bội một dòng khácthì định thức của nó không đổi.
- ❖ Nếu cộng vào một hang thứ i của A tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại thì định thức không đổi.

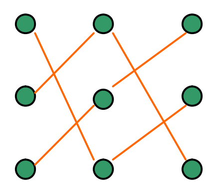
1.1.2.2.Một số phương pháp tính định thức:

+Cấp hai: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

+Cấp ba: Qui tắc Sariuse.



(+)



(-)

- ▪ *Khai triển một hang một cột*

+Hàng i : detA=

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+1} A_{ij} (A_{ij}$

$A \in M_n$

$i_1 < i_2$ $\qquad a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

$j_1 < j_2 < \ldots < j_k$

$A_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}} = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} \square_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}}$

$\square_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_k \\ j_1 j_2 \ldots j_k}}$

+ Cột j: detA= $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$

Trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+1} A_{ij}$: $\qquad$ (A_{ij} xoá đi hang i cột j)

▪ Khai triển laplace: khai triển theo k hang k cột

Cho A $\in M_n$ và k là số tự nhiên < n. Lấy k hang $i_1 < i_2$ và k cột $j_1 < j_2 < ... < j_k$

Các phần tử nằm ở giao của k hang và k cột này tạo nên một ma trận vuông cấp k, định thức của nó được ký hiệu là $a_{\substack{i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k}}$

bỏ đi k hang k cột đó, ta được ma trận vuông cấp n-k

Ta có phần bù đại số của $a_{\substack{i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k}}$ là $A_{\substack{i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k}} = (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} \square_{\substack{i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k}}$

Định lý Laplace:

chọn k hang bất kỳ trong detA. Gọi M_1, M_2…M_s là tất cả các định thức con cấp k do k hang vừa chọn kết hợp với k cột trong n cột của A và A_1,A_2,….A_s là phần bù đại số tương ứng

Ta có : detA= $M_1A_1+M_1A_2+\dots+M_sA_s$

- Phương pháp Gauss:

Sử dụng các phép biến đổi trên hang để biến đổi định thức về dạng tam giác. Khi đó định thức

sẻ bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính

1.1.2.3.Ứng dụng định thức:

1- Hạng của ma trận: Cho ma trận A = $(a_{ij})_{m*n.}$ Định thức con cấp r của A là định thức có các

phần tử nằm trên r cột và r hang nào đó của A.

Hạng của A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A

2- Ma trận nghịch đảo:

Để có ma trận nghịch đảo thì ma trận phải khả nghịch tức là detA khác không

Dùng định thức để tìm ma trậm nghịch đảo bằng công thức $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \tilde{A}$

1.2 Bài tập

1: Tính định thức:

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -2\times 4\times 2 + 2\times 4 = -8$$

2: Tính định thức:

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -2\times 4\times 2 + 2\times 4 = -8$$

3: Tính định

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 1\times 4\times 2 - 1\times 1\times 4 = 4$$

4: Tính định thức

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(1\times 4\times 2 - 1\times 1\times 4) = 4$$

5: Tính định thức:

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -1\times(1\times 4\times 2 - 1\times 1\times 4) = -4$$

6: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta \le 0$

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times(-1)^3 \times \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\times(2m-4)$$

Để: $\Delta \le 0$ thì ta có: $2m-4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 2$

7: Tính định thức:.Tìm m để $\Delta = 0$

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m\times(-1)^3 \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = -m(m^2-4)$$

Để: $\Delta = 0$ thì ta có: $-m(m^2-4) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = \pm 2$

8: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta = 0$

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m\times(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m(2m+4)$$

Để $\Delta = 0$ thì ta có: $m(2m+4) = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -2$

9: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta \ge 0$

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow[-h1+h3]{-h1+h2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & m-3 \\ 0 & 0 & m-3 \end{vmatrix} = 1\times1\times(m-3) = (m-3)$$

Để $\Delta \ge 0$ thì ta có $(m-3) \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 3$

10: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, Tìm m để $\Delta < 0$

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + m - 2m - 2) = 2 - m$$

Để $\Delta < 0$ thì ta có: $2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 0$

11: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 2m-2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta > 0$.

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 2m-2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - m$$

Để $\Delta > 0$ thì ta có: $2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 0$

12: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta > 0$.

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m + 2 - m^2$$

Để $\Delta > 0$ thì ta có: $m + 2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow$ thoả $\forall m \in R$

13: Tính A= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 5 & m+1 \\ 3 & 7 & m+2 \end{vmatrix}$ tìm m để A>0.

Giải:

A= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 5 & m+1 \\ 3 & 7 & m+2 \end{vmatrix}$ =1.5(m+2)+2.3.(m+1)+2.7.m – 3.5.m – 2.2(m+2) – 7.1.(m+1)

= -m +1. A>0 $\Leftrightarrow$ -m +1 >0 $\Leftrightarrow$ m<1

14: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m+2 & 4 \\ m & m & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}$

Giải: $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & m+2 & 4 \\ m & m & 0 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}, \Delta = 0 \Leftrightarrow m.(-1)^3 \begin{pmatrix} m+2 & 4 \\ 2 & m \end{pmatrix} + m.(-1)^4 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow -m(m^2 + 2m - 8) + (2m - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow -m(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 2 \end{array} \right.$$

Vậy $\Delta = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$

15: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2m+2 & 4 \\ m+1 & 2m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta = 0$

Giải:

$\Delta = 4m - 4m^3 = 4m(1-m^2)$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4m(1-m^2) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1 \vee m = 0$

16: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 0 & 0 \\ 3 & m+1 & 4+m \end{vmatrix}$

Giải: $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & m & 4 \\ m & 0 & 0 \\ 3 & m+1 & m+4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow m.(-1)^3 \begin{pmatrix} m & 4 \\ m+1 & m+4 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -m.(m^2 - 4) = 0 \qquad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$

Vậy $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$

17. Tìm m để $\Delta > 0$:

Giải

$$\begin{vmatrix} 2+2m & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -m \\ m+3 & 1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow[d2+d3]{d1-d3} \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 4-m \\ -3 & -1 & -m \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow m.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4-m \\ -1 & -m \end{vmatrix} \rightarrow m.(4-m) > 0 \rightarrow m \in (0,4);$$

18. Tìm m để $\Delta > 0$:

Giải:

$$\begin{vmatrix} 2+2m & -5 & 12 \\ m-3 & m+1 & -3m \\ m+3 & -m-1 & 3m \end{vmatrix} \xrightarrow[d2+d3]{d1-d3} \begin{vmatrix} m-1 & m-4 & 12-3m \\ 2m & 0 & 0 \\ m+3 & -m-1 & 3m \end{vmatrix}$$

$$\to 2m(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} m-4 & 12-3m \\ -m-1 & 3m \end{vmatrix} \to -6m(m-4).\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -m-1 & m \end{vmatrix}$$

$$\to 6m(m-4) > 0 \to m < 0 \cup m > 4;$$

19: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 2+2m & 1 & 4 \\ m+3 & 1 & m \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix}$ Tìm m để $\Delta > 0$.

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+2m & 1 & 4 \\ m+3 & 1 & m \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+m & 1 & 4 \\ m+3 & 1 & m \\ -m & 0 & 0 \end{vmatrix} = -m(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = -m(m-4)$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow -m(m-4) > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

20. Tìm m để Δ=0 :

Giải:

$$\begin{vmatrix} m+5 & 5 & 3 \\ m-1 & m-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to (m-1)\begin{vmatrix} m+5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c1-c2]{} (m-1)\begin{vmatrix} m & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to m(m-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\to m(m-1) = 0; \to m = 0; m = 1;$$

21: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 2m & m \\ 1 & m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta > 0$ .m >0

Giải: Ta có $\Delta = \begin{vmatrix} m & 0 & 2m & m \\ 1 & m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 m \begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix} = -m^3$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 0$$

22: Tính $\triangle = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ m & 2m & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2.(m-1) > 0 \Rightarrow m > 1$

23: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} m & 3 & m \\ 7 & 2 & m+7 \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta = 0$

Giải:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 3 & m \\ 7 & 2 & m+7 \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\frac{m}{3}h_3+h_1} \begin{vmatrix} 0 & 3-\frac{m^2}{3} & 0 \\ 7 & 2 & m+7 \\ 3 & m & 3 \end{vmatrix} \to (-1)^{1+3}(3-\frac{m^2}{2})\begin{vmatrix} 7 & m+7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(3-\frac{m^2}{3})(-3m)$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 3(3-\frac{m^2}{3})(-3m) \Leftrightarrow m = 0, m = \pm 3$$

24. Tìm m để Δ=0:

Giải:

$$\begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m-1 & m-1 & m-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{d2-d3} (m-1)\begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c3-c2]{c1-c2} (m-1)\begin{vmatrix} m+1 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & m-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\to (m-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} m+1 & -1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\to -(m-1)m^2 = 0; \to m = 1; m = 0;$$

25: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 4 & m & 1 \\ m+4 & m-1 & 5 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta = 0$

Giải:

$\Delta = 2m^2 + 8 > 0 \forall m$

Không có giá trị m để $\Delta = 0$

26: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}$. Tìm m để $\Delta \le 0$ .m≥ -1

Giải: $\Delta \le 0 \quad \Leftrightarrow \Delta = \begin{pmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ 0 & 1 & 2-m \end{pmatrix} \le 0$

$$\Leftrightarrow 1.(-1)^5 \begin{pmatrix} m+8 & 6 \\ m+1 & 2m-1 \end{pmatrix} + (2-m).(-1)^6 \begin{pmatrix} m+8 & 7 \\ m+1 & m \end{pmatrix} \le 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2.(m+1) \le 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m \ge -1 \end{array}\right. \ \Leftrightarrow m \ge -1$$

27. Tìm m để Δ<0:

Giải:

$$\begin{vmatrix} m+8 & 7 & 6 \\ m+1 & m & 2m-1 \\ m+1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c1-c2} \begin{vmatrix} m-1 & 7 & -1 \\ 1 & m & m-1 \\ 0 & m+1 & 0 \end{vmatrix} \to (m+1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$\to -(m+1)(m^2-2m+2) < 0 \to m+1 > 0 \to m > -1;$$

28: Cho hai định thức: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

Giải Ta có các định thức:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta 2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ Rõ ràng : định thức 2 và 1 chỉ đổi chỗ

các hang cho nhau : $h1 \rightleftarrows h2; h3 \rightleftarrows h4;$

vậy dáp án đúng là $\Delta_1 = \Delta_2$

29: Cho hai định thức: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix}$

Giải: Ta có:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix} = 2.2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}$$

Vậy: $\Delta_2 = 4\Delta_1$

30: Cho hai định thức: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}$

Giải:Ta có các định thức:

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta 2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Do } \Delta 2 = \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix} = 8.\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix} = 8\Delta 1.$$

Vậy đáp án đúng là $\Delta 2=8\Delta 1$;

31: Cho hai định thức: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 8 & 16 & -24 & 34 \end{vmatrix}$

$$\triangle 1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix} \qquad \triangle 2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 2a & 2b & -2c & 2d \\ 6 & 12 & -16 & 8 \\ 8 & 16 & -24 & 34 \end{vmatrix}$$

$$\triangle 2 = (2.2.2.2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ a & b & -c & d \\ 3 & 6 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & 17 \end{vmatrix} = 16\triangle 1$$

32: Cho hai định thức: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & 12 & 17 \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 14 \\ 3 & 6 & 8 & -8 \\ 4 & 8 & 12 & 34 \end{vmatrix}$

Ta có các định thức : $\Delta 1=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&5&4&7\\3&6&8&-4\\4&8&12&17\end{vmatrix};\Delta 2=\begin{vmatrix}2&4&6&8\\2&5&4&14\\3&6&8&-8\\4&8&12&34\end{vmatrix}$.

ta thấy $\Delta 2=4\begin{vmatrix}1&2&3&2\\2&5&4&7\\3&6&8&-4\\4&8&12&17\end{vmatrix}\neq 4\Delta 1$.Do vậy trong các đáp án đã cho không

có đáp án nào đúng.

33: Cho hai định thức: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&3&x\\2&5&4&y\\3&6&8&z\\4&8&12&t\end{vmatrix};\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&3&6-2x\\2&5&4&8-2y\\3&6&8&16-2z\\4&8&12&24-2t\end{vmatrix}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

a) $\Delta_1=\Delta_2$ b) $\Delta_2=2\Delta_1$ c) $\Delta_2=-2\Delta_1$ d) $\Delta_2=-4\Delta_1$

Ta có

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&3&2(3-x)\\2&5&4&2(4-y)\\3&6&8&2(8-z)\\4&8&12&2(12-t)\end{vmatrix}\to$$

$$2.\begin{vmatrix}1&2&3&3\\2&5&4&4\\3&6&8&8\\4&8&12&12\end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix}1&2&3&x\\2&5&4&y\\3&6&8&z\\4&8&12&t\end{vmatrix}\to 2.0-2.\begin{vmatrix}1&2&3&x\\2&5&4&y\\3&6&8&z\\4&8&12&t\end{vmatrix}$$

$=-2\Delta_1$

Vậy c) $\Delta_2=-2\Delta_1$ là đáp án đúng

34: Tính định thức: $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2&0\\2&3&4&1\\1&1&7&0\\2&2&2&1\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&1&2&0\\2&3&4&1\\1&1&7&0\\2&2&2&1\end{vmatrix}\xrightarrow{d2-d4}\begin{vmatrix}1&1&2&0\\0&1&2&0\\1&1&7&0\\2&2&2&1\end{vmatrix}\to(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\1&1&7\end{vmatrix}\xrightarrow{d3-d1}\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&5\end{vmatrix}.$$

$$\to(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\0&5\end{vmatrix}\to 5$$

vậy Δ=5

35: Tính định thức $\Delta=\begin{vmatrix}4&1&0&0\\2&3&0&0\\0&0&7&1\\0&0&2&1\end{vmatrix}$

Giải: $\Delta=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}4&1&0\\2&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}4&1&0\\2&3&0\\0&0&7\end{vmatrix}=50$

36: Tính định thức: $\Delta=\begin{vmatrix}0&2&1&2\\0&1&3&4\\2&1&0&0\\1&1&0&0\end{vmatrix}$

Giải: $\Delta=\begin{pmatrix}0&2&1&2\\0&1&3&4\\2&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&2&1&2\\0&1&3&4\\2&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=-1.(-1)^5\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&4\\1&0&0\end{pmatrix}=4-6=-2$

37 Tính định thức: $\Delta=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&4\\1&1&1&2\\2&1&3&5\end{vmatrix}$

Ta có $\Delta=\begin{vmatrix}0&0&1&2\\0&0&3&4\\1&1&1&2\\0&-1&1&1\end{vmatrix}=1.(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1&2\\0&3&4\\-1&1&1\end{vmatrix}=(-1).(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2$

38 Tính định thức: $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\2&0&3&2\\1&1&2&4\\2&4&4&8\end{vmatrix}$

Ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2).(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

39: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Giải: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1).(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$

40. Tính định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c3-2c2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 6 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\to -1(-1)^{5+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{d3-2d2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\to (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[d3+d1]{d1-2d2} \begin{vmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \to (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \to 24.$$

41: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 14 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

Giải: Ta có $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ 14 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 14 & 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$

42. Tính định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ b-a & c+a & a+b \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ b-a & c-b & a+b \end{vmatrix} \to 0$$

43: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$

Giải: $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+4 & x+4 & x+4 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$

$$= (x+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x+4)(x-2)^2$$

44: Tính định thức: $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \to x+3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$\to (x+3).(x-1)^3$

45: Tính định thức $\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & x & 1 & 1 \\ 2 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

Giải:

$$\Delta = (-1)^{1+2} x \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} x^2 \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = x^5 - 2x^3 + x$$

46: Tìm số nghiệm phân biệt r của phương trình. $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Giải: $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow (-2).(-1)^7.\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & x^2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

47. Tìm số nghiệm r của phương trình Δ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 & -1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 \\ 1 & x & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Leftrightarrow 2\begin{vmatrix} 0 & 2x & -1 \\ 0 & x & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ x & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Leftrightarrow 8(-2x + x) = 0; \Leftrightarrow x = 0; \Rightarrow r = 1;$$

48. Tìm số nghiệm phân biệt r

$\begin{vmatrix} 1 & 2x & -1 & -1 \\ 0 & x^2 - 2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $=2x.(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ pt có số nghiệm phân biệt r =2

49: Tìm số nghiệm phân biệt r của phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$

Giải: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4 = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

50. Giải pt

$\begin{vmatrix} x & x & -1 & -1 \\ 1 & x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =0 (do có hai cột tỉ lệ) $\Rightarrow 0 = 0$ vậy pt có nghiệm $\forall x$

51. Giải phương trình:

$\begin{vmatrix} x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2 & 1 \\ x & x & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[c4-c1]{c3-c1} \begin{vmatrix} x & x & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \rightarrow (x-x^2)(3-x) = 0 \rightarrow x = 0;1;3;$

Vậy nghiệm của phương trình là:x=0;1;3;

52. Giải phương trình:

$\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ x & x & 2 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[c2-c4]{c1-c4} \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} \rightarrow x(x-4) \rightarrow x = 0;4.$

vậy nghiệm của phương trình là x=0;x=4

53: Giải phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ -1 & -1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

Giải: $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ -1 & -1 & 2 & x \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}.2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}.x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

$= -2(2x^2 - 2) + x(x^3 - x) = x^4 - 5x^2 + 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, x = \pm 1$

54. Tìm nghiệm của phương trình: $\begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 4 \\ 0 & 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 4 \\ 0 & 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix} \to (x^2+1)(x^2+4) \Rightarrow VN$$

55: Tính hạng r(A) của ma trận $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{bmatrix}$

Giải:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r = 2$$

56: Tính hạng r(A) của ma trận $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

Giải: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -11 & -16 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy A có hạng r=3

57: Tính hạng r(A) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 35 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 35 \\ 3 & 7 & 9 & 12 & 14 \\ 4 & 8 & 13 & 16 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to r = 4$$

58: Tính hạng r(A) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to r = 4$$

59. Tính hạng r(A) của ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & 17 & 4 & 21 \end{pmatrix}$

<u>*Giải:*</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & 17 & 4 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \\ 0 & -14 & -2 & -16 \\ 0 & 14 & 2 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \\ 0 & -14 & -2 & -16 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -8 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \text{r(A)=2}$$

60. Tìm hạng của ma trận:

$$\left\|\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 10 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 18 & 36 \end{bmatrix}\right\| \xrightarrow[h5-h1]{\substack{h2-2h1 \\ h3-3h1 \\ h4-3h1}} \left\|\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & -14 & -14 & -28 \\ 0 & 14 & 14 & 28 \end{bmatrix}\right\| \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

=>hạng của ma trận bằng 2

61: Tính hạng r(A) của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Giải: Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to r = 3$$

62. Tìm hạng của ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 8 & 16 & 10 \\ 5 & 2 & 10 & 20 & 12 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&4&3\\2&1&4&8&5\\4&2&8&16&10\\5&2&10&20&12\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&4&3\\0&-1&0&0&-1\\0&-2&0&0&-2\\0&-3&0&0&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&4&3\\0&-1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

=>hạng của ma trận bằng 2

63: Tính hạng r(A) của ma trận $\begin{bmatrix}2&3&3&1&5\\4&4&6&2&10\\8&6&12&4&20\\10&8&15&5&26\end{bmatrix}$

Giải:

$$\begin{bmatrix}2&3&3&1&5\\4&4&6&2&10\\8&6&12&4&20\\10&8&15&5&26\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-4h_1+h_3\\-5h_1+h_4}]{-2h_1+h_2}\begin{bmatrix}2&3&3&1&5\\0&1&0&0&0\\0&-6&0&0&0\\0&-7&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{do:h_3=-6h_2}\begin{bmatrix}2&3&3&1&5\\0&1&0&0&0\\0&-7&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&3&3&1&5\\0&0&0&1&-7\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow r(A)=3$$

64. Tìm hạng của ma trận:

$$\begin{bmatrix}4&1&3&4&5\\1&5&-2&1&4\\5&4&1&5&9\\2&-5&7&2&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&1&3&4&5\\1&5&-2&1&4\\1&3&-2&1&4\\2&-5&7&2&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2&1&4\\0&2&0&0&0\\2&-5&7&2&-3\\4&1&3&4&5\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2&1&4\\0&2&0&0&0\\2&-5&7&2&-3\\2&6&-4&2&8\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2&1&4\\0&2&0&0&0\\2&-5&7&2&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2&1&4\\0&2&0&0&0\\0&-11&11&0&-11\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-2&1&4\\0&2&0&0&0\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

vậy hạng của ma trận :r(A)=3

65: Tính hạng r(A) của ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 13 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Giải: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow r = 2$

66:: Tính hạng r(A) của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Giải: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 9 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 9 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 15 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -10 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -10 & 5 \\ 0 & -5 & -2 & -10 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vậy A có hạng r=3

67 tính hạng của ma trận $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & -9 & 8 & 18 \end{vmatrix}$

$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & -1 & 2 & 2 \\ 7 & 15 & -9 & 8 & 18 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \to r = 3$

68 tính hạng của ma trận $A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2\\ 4 & -1 & 2 & 8 & 2\\ 7 & -9 & 8 & 14 & 18\end{vmatrix}$

$$A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 4 & -2\\ 4 & -1 & 2 & 8 & 2\\ 7 & -9 & 8 & 14 & 18\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 6 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 6 & 0\\ -2 & 0 & -1 & -4 & 0\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 6 & 0\\ -2 & 0 & -1 & -4 & 0\end{vmatrix}$$

$$\to\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 6 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\to r=3$$

69: Tính hạng r(A) của ma trận $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 9 & -1 & 2 & -2 & 1\\ 15 & 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

Giải:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1\\ 9 & -1 & 2 & -2 & 1\\ 15 & 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2\\ 0 & 2 & -1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & -3 & 12 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2\\ 0 & 6 & -3 & 12 & -6\\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & & & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & -2\\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}\Rightarrow \text{r(A)=2}$$

70 Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 3 $A=\begin{vmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4\\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7\\ 2 & 2m & 2 & 4\end{vmatrix}$

$$A=\begin{vmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4\\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7\\ 2 & 2m & 2 & 4\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 0 & m-1 & 0 & m\\ 0 & m-1 & m & 2m-1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\to\begin{vmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 0 & m-1 & 0 & m\\ 0 & 0 & m & m-1\end{vmatrix}$$

$\to r=3\forall m$

71: Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 3

Giải: Ta có

$$A=\begin{pmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4\\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7\\ 2 & 2m & 2 & m+4\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 2 & 3m-1 & 2 & m+4\\ 4 & 5m-1 & m+4 & 2m+7\\ 2 & 2m & 2 & m+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 0 & m-1 & 0 & m\\ 0 & m-1 & m & 2m+3\\ 0 & 0 & 0 & m\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & m & 1 & 2\\ 0 & m-1 & 0 & m\\ 0 & 0 & m & m+3\\ 0 & 0 & 0 & m\end{bmatrix}$$

$r=3 \Leftrightarrow m=0$

72 Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 2 $A=\begin{vmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 6 & 2m & m & 2\\ 9 & 3m & 0 & m+2\\ 15 & 5m+1 & 0 & 7\end{vmatrix}$

$$A=\begin{vmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 6 & 2m & m & 2\\ 9 & 3m & 0 & m+2\\ 15 & 5m+1 & 0 & 7\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & m-1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & m-1\end{vmatrix}$$

Với $m\neq 0 \vee m\neq 1$ r=4

Với m=0 A=$\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\rightarrow$r=3

Với m=1 A=$\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\rightarrow$r=3

Vậy không có giá trị m nào thỏa điều kiện đề bài

73: Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2. $\begin{bmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 6 & 2m & m & 2\\ 9 & 3m & 0 & m+2\\ 15 & 5m & 0 & 7\end{bmatrix}$

Giải: $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 6 & 2m & m & 2\\ 9 & 3m & 0 & m+2\\ 15 & 5m & 0 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-3h_1+h_3\\ -5h_1+h_4}]{-2h_1+h_2}\begin{bmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & m-1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & m & 0 & 1\\ 0 & 0 & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

với $m \neq 0 : r(\mathrm{A}) = 3$

$m = 0 : r(\mathrm{A}) = 2$

Vậy để ma trận có hạng bằng 2 thì m=0

74. Tìm m để ma trận có hạng bằng 2

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 4 & 5\\ 3 & 8 & 6 & m+9\\ 2 & 5 & 4 & m+6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & m\\ 0 & -1 & 0 & m\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & m\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & m+1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow m \neq -1 \rightarrow r = 3$

$\Rightarrow m = -1 \rightarrow r = 2$

75: Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2 : A= $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 8 & 8\\ 3 & 2 & 8 & m+9\\ 2 & 1 & 5 & m+6\end{pmatrix}$

Giải:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & m\\ 0 & -1 & -1 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & m+1\end{pmatrix}$$

Để A có hạng bằng 2 thì $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$

76: Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 8 & -4 & 16 & 2m+5\\ 3 & -2 & 7 & m\\ 5 & -2 & 9 & m\end{pmatrix}$

Giải: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 8 & -4 & 16 & 2m+5\\ 3 & -2 & 7 & m\\ 5 & -2 & 9 & m\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -8 & 2m-27\\ 0 & 1 & -2 & m-12\\ 0 & 3 & -6 & m-20\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -8 & 2m-27\\ 0 & 0 & 0 & -2m+21\\ 0 & 0 & 0 & -2m+1\end{pmatrix}$$

Để A có hàng bằng 2 điều kiện cần và đủ là $\begin{cases}-2m+21=0\\ -2m+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{21}{2}\\ m=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (VN)

Vậy không có giá trị của m để A có hạng bằng 2

77. Tìm m để ma trận có hạng bằng 2

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 4\\ 2 & -3 & -4 & 5\\ 3 & -5 & -7 & 9\\ 5 & -7 & -9 & m\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 6 & m-20\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 3 & 6 & m-20\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & m-11\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow m=11\rightarrow r=2$

$\Rightarrow m\neq 11\rightarrow r=3$

78. Tìm m để ma trận có hạng bằng 2

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 4 & m+4\\ 4 & 10 & 9 & m+10\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & m+3\\ 0 & 2 & 5 & m+6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & m\\ 0 & 0 & 0 & m\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow m=0\rightarrow r=3$

$\Rightarrow m\neq 0\rightarrow r=4$

vậy không tồn tại m để r = 2

79: Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 3 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -3 & 4 & 5\\ 3 & -5 & 7 & m\\ 5 & -7 & 9 & m\end{pmatrix}$

Giải:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & -5 & 7 & m \\ 5 & -7 & 9 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & m-12 \\ 0 & 3 & -6 & m-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m-9 \\ 0 & 0 & 0 & m-11 \end{pmatrix}$$

$$\text{m=9,m=11} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \text{r(A)=2}$$

$$m \neq 9,\ m \neq 11 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m-9 \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \text{r(A)=3}$$

vậy: $m \neq 9$, $m \neq 11$ thì r(A)=3

81: Tìm m để ma trận sau đây có hạng bằng 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 11 & m+15 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 10+m \end{pmatrix}$

Giải: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 11 & m+15 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 10+m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & m-5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & m-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{bmatrix}$

$r = 2 \Leftrightarrow m+1=0 \Rightarrow m=-1$

82 Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 2 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & m \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & m \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & m-12 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & m-12 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m-9 \end{vmatrix}$$

Để ma trận có hạng bằng 2 thì m-9=0 $\to$ m=9

83 Tính ma trận tổng $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Không tồn tại ma trận tổng A

84 Cho ma trận A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tính ma trận tích B= A^3

Ta có $A^2 = A.A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = A^2.A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vậy B=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

85: Cho hai ma trận A= $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Và B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) AB=BA
b) AB xác đinh nhưng BA không xác định
c) BA= $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
d) AB= $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Giải:

BA= $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

AB không xác định vì không thoả điều kiện số cột của A bằng số hàng của B
Vậy đáp án đúng là câu c)

86: Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Giải: A.B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B.A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ta thấy A.B và B.A đều xảy ra

Vậy D là đáp án đúng .

87 Cho hai ma trận A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ và B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Khẳng định nào sau đây là đúng ?

Ta có BA = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ không xác định

Và AB = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Vậy b) AB xác định nhưng BA không xác định là đáp án đúng

88 Cho hai ma trận A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Khẳng định nào sau đây là đúng ?

Ta có AB = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ và BA = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Vậy các khẳng định trên đều sai

89: Cho 2 ma trận A và B $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Giải:

$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vậy tích AB và BA đều xác định

90 Cho hai ma trận A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ta có AB = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Và BA không xác định. Vậy AB = $\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là đáp án đúng

91 Cho hai ma trận A $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ và B = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

T a có AB = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 42 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Và BA không xác định. Vậy AB = $6\begin{pmatrix}14 & 7 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ là đáp án đúng

92 Với $|A|^1 \neq 0$, hãy tìm công thức tính ma trận X của phương trình XA= B.

a) X = $\dfrac{B}{A}$ b) X = A^{-1} B c) X = B A^{-1} d) X không xác định

Đáp án đúng là câu c) X = B A^{-1}

93: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ tìm tích B.A

Giải: $BA = \begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

94 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ Tìm tích BA.

Ta có $BA = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$

Vậy BA = $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ là đáp án đúng

95: Ma trận nào sau đây khả nghịch ?

a) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Giải:

A=0, B=12,C=0,D=0

Vậy đáp án đúng là đáp án B

96: Ma trận nào sau đây khả nghịch

Giải: A= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ =3.4.3+6.1.6-3.4.6=0 Vậy C có ma trận nghịch đảo

C là đáp án đúng

97: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ m-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3(m-1)(m+2)$$

Để A khả nghịch thì $A \neq 0 \rightarrow$ -3(m-1)(m+2) $\neq 0 \rightarrow m \neq 1 \vee m \neq -2$

98: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m+1 & m+2 & 0 \\ 2 & m+2 & 0 \\ m-4 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch .

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m+2 & 0 \\ 2 & m+2 & 0 \\ m-4 & 3 & m+2 \end{pmatrix} = (m+2)^2(m-1)$$

Để A khả nghịch thì $A \neq 0 \rightarrow (m+2)^2(m-1) \neq 0 \rightarrow m \neq 1 \vee m \neq -2$

99: Tính ma trận nghịch đảo của 2 ma trận $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Giải:

Đặt: A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 11 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{A} . \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$

100: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

detA=14

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{\bar{A}}{\det A} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}$$

101: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Giải: $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 14 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{85} & \frac{-3}{85} \\ \frac{2}{85} & \frac{-7}{85} \end{pmatrix}$

102. Tính ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

103: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Giải: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Đặt: $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

104: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2m+3 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 2m+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ -7 & 0 & 1-3m \\ -14 & 0 & 3-5m \end{pmatrix} = 7m+7$$

Để A khả nghịch thì $A \neq 0 \to 7m+7 \neq 0 \to m \neq -1$

105: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ m & -1 & m-1 \\ 1 & -3 & m-1 \end{bmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch

Giải:

$\Delta = 2m^2 - 2$

A khả nghịch $\Leftrightarrow 2m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

106: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ m & 1 & m+7 \\ m+3 & 0 & 2m+7 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch .

Giải: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ m & 1 & m+7 \\ m+3 & 0 & 2m+7 \end{pmatrix} = 3.(2m+7) - (m+7).(m+3) + 3.(m+3) + m.(2m+7)$

$$= (m+3)^2$$

A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$

107: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ m & 1 & m-1 \\ m+6 & -3 & m-7 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ m & 1 & m-1 \\ m+6 & -3 & m-7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ m & 1 & m-1 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ m & 1 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 0$$

Vậy không có giá trị nào của m

108: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ m & -1 & m-4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ m & -1 & m-4 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ m & -1 & m-4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow 2 + 3m + m - 4 - 4m = -2 < 0$$

109: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Giải:

Có : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

110: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 10 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

111: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & m \\ 0 & m+1 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$. Tìm m để A khả nghịch

Giải: Ta có $DetA = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & m \\ 0 & m+1 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix} = (m-1)^2(m+1)$

A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

112: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

detA=1

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{\bar{A}}{\det A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

113: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Giải: $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$

$A^* = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

114: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Giải: DetA= -1 $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

115: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. A có hạng bằng 2.
B. A có định thức bằng 0.
C. A khả nghịch.
D. Các khẳng định trên đều đúng.

Giải:

A có 3 hàng tỉ lệ với nhau nên A= 0. Vậy đáp án b) là đáp án đúng

116: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

Giải: A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 3 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -7m \Rightarrow$ A khả nghịch khi và chỉ khi m $\neq$ 0

Đáp án đúng là A

117: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

a) A có hạng bằng 3.
b) A có hạng bằng 1.
c) A Có định thức bằng 0.
d) Các khẳng định trên đều sai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có detA=0 và A có hạng bằng 2

Vậy câu c) đúng

118: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

a) A có hạng bằng 3.
b) A có định thức khác 0
c) A không khả ngịch. .
d) Các khẳng định trên đều sai.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có detA = 0 và A có hạng bằng 2

Vậy câu c) đúng

119: Cho 2 ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Tìm ma trận X thoả XA=B

Giải:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-5\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$XA=B\Leftrightarrow X.A.A^{-1}=B.A^{-1}\Leftrightarrow X=B.A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{5} & -\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

Vậy ma trận cần tìm là: X= $\begin{pmatrix}\frac{8}{5} & -\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$

120: Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa AX = B.

Ta có AX=B $\rightarrow$ X= A^{-1}B

Với $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Vậy X= $A^{-1}B=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -10\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

Vậy X= $\begin{pmatrix}-2 & -10\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

121: Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa XA=B.

Giải: XA=B $\Rightarrow X=B.A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

122: Cho hai ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 5 & -10\end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa AX=B.

Ta có AX=B $\rightarrow$ X= A^{-1}B

Với $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/7 & 2/7\\ -3/7 & 1/7\end{pmatrix}$

X= $A^{-1}B=\begin{pmatrix}1/7 & 2/7\\ -3/7 & 1/7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -8\\ 5 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Vậy X= $\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

123: cho 2 ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Giải: Do A là ma trận không vuông $\Rightarrow$ không tồn tại $A^{-1} \Rightarrow$ không có ma trận X nào thoả AX=B

124: Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa XA=B.

Giải: Ta có $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad X.A = B \Rightarrow X = B.A^{-1}$ Mà $B.A^{-1} = \varnothing$

$\Rightarrow$ không tồn tại X

125: Cho 2 ma trận A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ B= $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thoả AX=B.

Giải :

AX=B thì X=BA^{-1} $\quad$ X= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

126 : Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa XA=B.

Giải: Ta có X.A=B $\Rightarrow$ X = B. A^{-1}

Mà $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Không tồn tại X

1.3. Bài tập làm thêm

Câu 2.5 Cho A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Tính A^n

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theo nguyên tắc quy nạp ta có $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Câu 2.8 Cho A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$Tính A A^T và A^T .A

Ta có $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A.A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix};$$

$$A^T.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

Chương 2: Hệ phương trình tuyến tính:

2.1. Lý thuyết

2.1.1.Định nghĩa: Một hệ gồm *m* phương trình tuyến tính đối với *n* ẩn số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Gọi là hệ phương trình tuyến tính

- ❖ Phương pháp tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính
  - ➢ Định lý Cramer
- ❖ Hệ phương trình tuyến tính tổng quát
  - ➢ Định lý Kronecker – Capelli
  - ➢ Phương pháp Gauss

2.1.2. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

Hệ (2) luôn tương thích vì dễ dàng thấy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ là một nghiệm của hệ mà ta gọi là nghiệm tầm thường (hoặc do $r_A = r_{\overline{A}}$)

Định lý. Hệ thuần nhất (2) có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow r_A < n$

Hệ quả 1. Hệ (2) với số phương trình bằng số ẩn số ($m = n$)n có nghiệm không tầm thường $\Leftrightarrow |A| = 0$

Hệ quả 2. Nếu hệ (2) có số phương trình bé hơn số ẩn số ($m<n$) thì luôn luôn có nghiệm không tầm thường

2.2. Bài tập

127: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x+(m-1)y=1 \\ x+my=0 \end{cases}$$ vô nghiệm.

ta có $A=\begin{bmatrix} m-1 & m-1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & (m-1)(1-m) \end{bmatrix}$ và

$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ m-1 & m-1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & (m-1)(1-m) & 1 \end{bmatrix}$

Để hpt tuyến tính vô nghiệm $\Leftrightarrow r_A < r_{\overline{A}} \Leftrightarrow (m-1)(1-m)=0 \Leftrightarrow m=1$

128: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

$$\begin{cases} (m+1)x+(m+1)y=0 \\ x+my=0 \end{cases}$$

ta có A = $\begin{bmatrix} m+1 & m+1 \\ 1 & m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1-m^2 \end{bmatrix}$ và

$\overline{A}=\begin{bmatrix} m+1 & m+1 & 0 \\ 1 & m & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1-m^2 & 0 \end{bmatrix}$

Để hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm

129: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 2(m+1)x+(m+10)y=m \\ mx+(m+2)y=2m \end{cases}$$

Giải:

Xét:

$|A|=\begin{vmatrix} 2(m+1) & m+10 \\ m & m+2 \end{vmatrix}=2(m+1)(m+2)-m(m+10)=2m^2+6m+4-m^2-10m$

$=m^2-4m+4$

Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow m^2-4m+4\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq 2$

130 tìm m để Hpttt sau có n^0 duy nhất:

$\begin{cases} x\sin x+y\sin y=m \\ x\cos x-y\sin y=2m \end{cases}$,A=$\begin{bmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & -\sin a \end{bmatrix}$,$\overline{A}=\begin{bmatrix} \sin a & óosa & m \\ \cos a & -\sin a & 2m \end{bmatrix}$

Ta có: $\Leftrightarrow |A|=\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \cos a & -\sin a \end{vmatrix}$=-sin^{2}a-cos^{2}a =-1 $\neq 0 \Rightarrow$ rA=2

hpttt có n^0 duy nhất $\Leftrightarrow$ rA=r$\overline{A}$=2 mà r$\overline{A}$=2 với $\forall m$

vậy hpt tt có n^0 duy nhất với $\forall m \in$ R

131: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} mx+2y=1; \\ (m+1)x+3y=1. \end{cases}$ có nghiệm.

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{cc|c} m & 2 & 1 \\ m+1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & m & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m+2 & 1 \end{array}\right)$ để hệ phương trình có nghiệm điều kiện cần và đủ là $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

132 Tìm m để hpt tt có n^0 duy nhất :

$\begin{cases} mx+(m+2)y = m+1 \\ )m+2)x+y = 0 \end{cases}$,A= $\begin{bmatrix} m & m+2 \\ m+2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} m & m+2 & m+1 \\ m+2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Để Hpt tt có n^0 duy nhât $\Leftrightarrow$ rA=r$\overline{A}$ =n=2 $\Leftrightarrow$ $|A|$ = $\begin{vmatrix} m & m+2 \\ m+2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ -m-$(m+2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2+5m+4 \neq 0$

$\begin{cases} m \neq -8 \\ m \neq -2 \end{cases}$ vậy để hpt tt có n^0 duy nhất thì m$\neq$-8 và m$\neq$-2

133: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm $\begin{cases} (m+1)x+y=m+2 \\ x+(m+1)y=0 \end{cases}$

Giải: $\overline{A} = \left[\begin{array}{cc|c} m+1 & 1 & m+2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & m+1 & 0 \\ 0 & -m^2-2m & m+2 \end{array}\right]$

Để hệ phương trình có vô số nghiệm thì $\begin{cases} -m^2-2m=0 \\ m+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$

134: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} (m-1)x+(m-1)y=1; \\ x+my=0. \end{cases}$ vô nghiệm.

Giải: Ta có $A = \begin{pmatrix} m-1 & m-1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \text{Det } A = m^2-2m+1$$

Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi DetA=0 $\Leftrightarrow (m^2-1)=0 \Leftrightarrow m=1$

Với m=1 ta có $\begin{cases} 0x+0y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

Vậy với m=1 thì hệ dã cho vô nghiệm.

135: chọn đáp án đúng :hpt tt $\begin{cases} mx+2y=1 \\ (m+1)x+3y=1 \end{cases}$ có n^0 khi và chỉ khi :

A,m$\neq 2$,b,m$\in$ i c,m$\neq 0$ d,m$\neq$-1

Giải: A=$\begin{bmatrix} m & 2 \\ m+1 & 3 \end{bmatrix}$, $\overline{A}=\begin{bmatrix} m & 2 & 1 \\ m+1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$=2-3=-1$\neq 0$ $\Rightarrow$rA=2

Hpt tt có n^0 khi và chỉ khi:rA=r$\overline{A}$=2 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 2 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 3m-2(m+1)$\neq 0 \Leftrightarrow$ m-2$\neq 0 \Leftrightarrow$ m$\neq 2$

Vậy chọn đáp án a

136: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} mx+y=m; \\ x+my=m. \end{cases}$ vô nghiệm.

Giải: Ta có ma trận tương đương $\left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & m \\ 1 & m & m \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ m & m & m \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & m \\ 0 & 1-m^2 & m-m^2 \end{array}\right)$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 1-m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Ta có m=1 hpt vô định

m=-1hpt vô nghiệm

Vậy phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m \neq -1$

137: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} mx+(6m-9)y=2m^2+3m+2; \\ x+my=m^3+1. \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất

Ta có $A=\begin{bmatrix} m & 6m-9 \\ 1 & m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m & 6m-9 \\ 0 & m^2-6m+9 \end{bmatrix}$

và $\overline{A}=\begin{bmatrix} m & 6m-9 & 2m^2+3m+2 \\ 1 & m & m^3+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m & 6m-9 & 2m^2+3m+2 \\ 0 & m^2-6m+9 & m^4-2m^2-2m-2 \end{bmatrix}$

Để hpt tuyến tính có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow r_A = r_{\overline{A}} = n \Leftrightarrow m^2-6m+9 \neq 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 \neq o \Leftrightarrow m \neq 3$

Vậy $m \neq 3$ thì hpt tuyến tính có nghiệm duy nhất

138: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} (2m+1)x+(2+m)y=3m; \\ x+my=m. \end{cases}$$

vô nghiệm

Ta có $A=\begin{bmatrix} 2m+1 & 2+m \\ 1 & m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2m+1 & 2+m \\ 0 & 2(m^2-1) \end{bmatrix}$

Và $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2m+1 & 2+m & 3m \\ 1 & m & m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2m+1 & 2+m & 3m \\ 0 & 2(m^2-1) & 2m(m-1) \end{bmatrix}$

Để hpt tuyến tính vô nghiệm $\Leftrightarrow r_A < r_{\overline{A}} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1=0 \\ 2m^2-2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

139: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính sau đây có nghiệm duy nhất:

$\begin{cases} (m+1)x = (6m-4)y = 2m+4 \\ x+(m+1)y = m^2+4 \end{cases}$

Giải: Xét:

$\overline{A} = \begin{vmatrix} m+1 & 6m-4 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2-4m+6 \neq 0 \forall m \notin$ □

$\Rightarrow \overline{A} \neq 0 \forall m \notin$ □

Vậy hệ có nghiệm duy nhất với mọi m

140 : tìm m để hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} mx-y=2m^2+m+1 \\ (m-2)x+y=m. \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $A = \begin{bmatrix} m & -1 \\ m-2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m & -1 \\ 0 & 2m-2 \end{bmatrix}$

và $\overline{A} = \begin{bmatrix} m & -1 & \\ m-2 & 1 & m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} m & -1 & 2m^2+m+1 \\ 0 & 2m-2 & 2m^3-4m^2-m-2 \end{bmatrix}$

Để hpt tuyến tính có nghiệm $\Leftrightarrow r_A = r_{\overline{A}} \Leftrightarrow 2m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

141: Xét hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 4x-y=m+1; \\ 10x+3y=6m-3. \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & m+1 \\ 10 & 3 & 6m-3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & m+1 \\ 0 & 22 & 9m \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ khẳng định đúng là hệ luôn có nghiệm với mọi m.

142: Cho hệ phương trình tuyến tính

$\begin{cases} mx+y=1; \\ x+my=m. \end{cases}$

khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq 1.$

b) Hệ vô nghiêm khi $m=-1.$

c) Hệ có nghiêm khi và chỉ khi $m \neq \pm 1.$

d) Hệ trên có nghiệm với mọi m

ta có phương trình mở rộng

$\left[\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m^2-1 \end{array}\right] \rightarrow 0x+(m^2-1)y=m^2-1$

$\rightarrow y=1 \rightarrow mx=0 \rightarrow x=0$

` d) Hệ trên có nghiệm với mọi m

143: cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+y=1 \\ x+my=m \end{cases}$

Giải: $\overline{\mathrm{A}}=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \end{array}\right] \Rightarrow$ hệ có nghiệm với $\forall m$

144: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} mx+\left(8m-16\right)y=2m^2+3m+2; \\ x+my=m^3+1. \end{cases}$

có duy nhất nghiệm.

Giải: Ta có. $A=\begin{pmatrix} m & 8m-16 \\ 1 & m \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ DetA$==m^2-8m+16a\ =(m-4)^2$

Dể hệ có nghiệm duy nhất điều kiện cần và đủ là DetA $\neq$ 0

$\Leftrightarrow (m-4)^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$

Vậy với m $\neq 4$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất

145: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính

$\begin{cases} mx+3y=2m^2+3m+2; \\ 3x+my=m^3+1. \end{cases}$

có duy nhất nghiệm.

để phương trình có nghiệm duy nhất thì

det$\begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \to m^2-9 \neq 0 \to m \neq \pm 3$

146: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Giải: Có $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ 2x+5y-2z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\alpha \\ 2x+3y=5+2\alpha \\ 2x+5y=7+2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases}$

147: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$\begin{cases} 3x-y+2z=3; \\ 2x+y-2z=7. \end{cases}$

Ta lập ma trận mở rộng $A^{-}=\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \end{array}\right]$

$\rightarrow$ Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 5y - 10z = 15 \end{cases}$

Đặt z = α

$\rightarrow$ 5y = 15 +10α $\rightarrow$ y = 3 + 2α $\rightarrow$ x = 2

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

148: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 0 \end{cases}$$

Ta lập ma trận mở rộng

$$A^{-} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & -11 & 2 \\ 3 & 11 & -6 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Ta có 0x + 0y + 0z = -3 $\rightarrow$ hpt vô nghiệm

149: Tìm nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y - 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$

Giải:

Lập ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ hệ vô số nghiệm

Đặt z=t là ẩn tự do, vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

150: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x - y + 2z = 3; \\ -x + 2y + z = 2. \end{cases}$

Ta lập ma trận mở rộng

$$A^{-} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

Đặt z = α $\rightarrow$ y = 5 -3α $\rightarrow$ x = 8 -5α

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x = 8 - 5\alpha \\ y = 5 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

151: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 6y + 3z = 2 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$

152: Giải hệ phương trình tuyến tính

$\begin{cases} x - y - z = 3 \\ 2x - 2y - 2z = 6 \\ 5x - 5y - 5z = 15 \end{cases}$ Ta lập ma trận mở rộng

$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 5 & -5 & -5 & 15 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x - y - z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$

Đặt y=α ; z=β $\to$x=3+$\alpha + \beta$

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x = 3 + \alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$

153: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 3x + 6y + 2z = 11 \\ 4x + 9y + 4z = 17 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$

Giải: $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 2 & 11 \\ 4 & 9 & 4 & 17 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

154: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Do đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 7y+z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+9\alpha \\ y=\alpha \\ z=-2-7\alpha \end{cases}$

155: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+3y-4z=4 \\ x-2y+z-1 \\ x+2y-3z=3 \end{cases}$

Giải:

Hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

156: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$

Giải: $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=t \\ x+3y=-2t \\ 2x-y=-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=t \\ y=\dfrac{t}{7} \\ x=\dfrac{11t}{7} \end{cases}$

Vậy x=11t/7, y=t/7, z=t,

157: Giải hệ phương trình tuyến tính

$\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ 2x+5y-5z=1 \\ 3x+7y-7z=1. \end{cases}$ Ta lập ma trận mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$

Đặt z=α $\rightarrow$ y=1+α $\rightarrow$x=-2

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x=-2 \\ y=1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$

158: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 2x-2y+5z=1 \\ 3x-2y+6z=2. \end{cases}$$ Ta lập ma trận mở rộng

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 6 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]=\rightarrow\begin{cases} x-y+2z=0 \\ z=1 \\ y=2 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

159: giải hệ phương trình tuyến tính: $\begin{cases} 5x+12y-12z=2 \\ 2x+5y-5z=1 \\ 3x+7y-7z=1 \end{cases}$

Giải:

Lập ma trận mở rộng:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & -12 & 2 \\ 2 & 5 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[\left(\text{do } h_2+h_3=h_1\right)]{}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 15 & -15 & 3 \\ 6 & 14 & -14 & 2 \end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 15 & -15 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình $\begin{cases} 6x+15y-15z=3 \\ -y+z=-1 \end{cases}$

Xem z = t $(t\in\mathbb{R})$ là ẩn tự do, ta có nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=-2 \\ y=t+1 \\ z=t \end{cases}$

160: Tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-y+2z=-1 \\ 2x-2y+5z=-2 \\ 3x-2y+6z=-2. \end{cases}$

Ta lập ma trận mở rộng

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\rightarrow\begin{cases} x-y+2z=-1 \\ z=0 \\ y=1 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

161: Tìm nghiệm hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 3x-2y-z=0 \\ 4x-3y+z=2. \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Hệ vô nghiệm

162: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+z=1 \\ 3x+4y+3z=1. \end{cases}$

Ta lập ma trận mở rộng

$$\overline{\mathrm{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z=1 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

163: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-y-2z=0 \\ x+y+4z=2 \\ 2x-2y-5z=0 \end{cases}$

Giải: $$\overline{\mathrm{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=5 \\ z=-2 \end{cases}$$

164: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 2x+y-2z=0 \\ 5x+y-5z=3 \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{array}\right)$

Hê đã cho trở thành $\begin{cases} x-y-z=3 \\ 3y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\beta \\ y=-2 \quad (\beta \in R) \\ z=\beta \end{cases}$

165: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+z=2 \\ 5x-13y+6z=5 \end{cases}$$

Giải: Ta có $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 5 & -13 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -14 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=17\alpha+1 \\ y=7\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$

166: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+z=2 \\ 5x-13y+7z=5 \end{cases}$

Giải: Ta có ma trận tương đương

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 5 & -13 & 7 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -13 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3y+4z=1 \\ y-7z=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy x = 1, y = 0, z =0

167: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-6y+8z=2 \\ 5x-15y+21z=5. \end{cases}$

Ta lập ma trận mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 8 & 2 \\ 5 & -15 & 21 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x-3y+4z=1 \\ \\ z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=1+3\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x=1+3\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$

168: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-6y+8z=2 \\ 5x-15y+20z=5. \end{cases}$

Ta lập ma trận mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 8 & 2 \\ 5 & -15 & 20 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to x - 3y + 4z = 0 \to \begin{cases} x = 3\alpha - 4\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hpt $\begin{cases} x = 3\alpha - 4\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$

169: Giải hệ phương trình tuyến tính: $\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - 5y + z = 2 \\ 5x - 13y + 6z = -5 \end{cases}$

Giải:

Lập ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & -13 & 6 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -14 & -10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ y - 7z = 0 \\ 0 = -10 \end{cases}$ $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm

170: Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng : $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$

ta có hệ mới tương đương với hệ đã cho : $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 4 \\ 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

171: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 2. \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-2 \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases}$$

172: Giải hệ phương trình tuyến tính

Lập ma trận mở rộng : $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} 3x+4y-3z=2 \\ 5y=10 \end{cases}$

Đặt z= α ,y=2, $3x+8-3\alpha=2$ $\rightarrow$x =α -2

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x=\alpha-2 \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases}$

173: giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+y-8z=6 \end{cases}$

Giải: $\overline{\mathrm{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=5 \\ z=-2 \end{cases}$

174: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+3y-7z=7 \\ x+2y-4z=3 \\ -y+4z=-3. \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3y-7z=7 \\ -y+3z=-4 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=7 \\ z=1 \end{cases}$$

175: Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x+y-z=2 \\ y-3=1 \\ y-4z=3 \end{cases}$

Giải: Ta có

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&-3&1\\0&1&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&-3&1\\0&1&-4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\0&1&-3&1\\0&0&1&-2\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=-5\\z=-2\end{cases}$$

176: Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm: $\begin{cases}2x+2y-4z=m\\-3x+5y-z=3\\-4x-4y+8z=-2\end{cases}$

Giải: Ta có mttđ $\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&-4&m\\-3&5&-1&3\\-4&-4&8&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&-4&m\\0&16&-13&3m+6\\0&0&0&2m-2\end{array}\right)$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi và chỉ khi $2m-2=0\Leftrightarrow m=1$

Vậy $m=1$

177: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính sau có nghiệm

$$\begin{cases}2x+2y-z=3\\2x+5y-2z=7\\6x+6y-3z=2m+1.\end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng $\overline{\mathrm{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&-1&3\\2&5&-2&7\\6&6&-3&2m+1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&-1&3\\0&3&-1&4\\0&0&0&2m-8\end{array}\right]$

Để hpt tuyến tính có nghiệm $\Leftrightarrow$ 2m-8=0 $\Leftrightarrow$ m=4

Vậy m=4 thì hpt tuyến tính có nghiệm

178: Định *m* để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases}x+2y-2z=0\\2x+4y-5z=1\\3x+6y+mz=1.\end{cases}$

Lập ma trận mở rộng

$$\overline{\mathrm{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\2&4&-5&1\\3&6&m&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\0&0&-1&1\\0&0&m+6&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&m+7\end{array}\right]$$

Để hpt tuyến tính có nghiệm $\Leftrightarrow m+7=0\Leftrightarrow m=-7$

Vậy hpt tuyến tính có nghiệm $\Leftrightarrow$ $m=-7$

179: Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y-mz=1\\2x+3y+2z=1\end{cases}$

Giải: Lập ma trận :

$$\overline{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-m\\2&3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-m-1\\0&1&0\end{bmatrix}\to 1.(-1)^{1+1}\begin{bmatrix}1&-m-1\\1&0\end{bmatrix}$$

$\to -(-m-1)=m+1$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}}\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$

180: Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases}x+2y-2z=2\\3x+7y-z=5\\2x+4y+mz=7.\end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng $\overline{\mathrm{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\3&7&-1&5\\2&4&m&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\0&1&5&-1\\0&0&m+4&3\end{array}\right]$

Để hpt có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m+4\neq 0\Leftrightarrow m\neq -4$

Vậy $m\neq -4$ hpt có nghiệm duy nhất

181: Định m để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases}x+2y-2z=2\\2x+4y-5z=5\\3x+6y-mz=7.\end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\2&4&-5&5\\3&6&-m&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&2\\0&0&-1&1\\0&0&6-m&1\end{array}\right)$

để hệ phương trình có nghiệm điều kiện cần và đủ là $6-m\neq -1\Leftrightarrow m\neq 7$

182: Tìm m để hệ phương trình tuyến tính

$\begin{cases}4x+3y+z=7\\2x+4y-2z=m+7\\x+2y-z=4.\end{cases}$ vô nghiệm.

Lập ma trận mở rộng

$$\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&1&7\\2&4&-2&m+7\\1&2&-1&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&1&7\\0&-5&5&-2m-7\\0&-5&5&-9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}4&3&1&7\\0&-5&5&-2m-7\\0&0&0&-2m+2\end{array}\right]$$

Để phương trình tuyến tính vô nghiệm thì : $-2m+2\neq 0\to m\neq 1$

183: tìm m để hệ phương trình tuyến tính có nghiệm $\begin{cases}3x-y+2z=3\\2x+y-2z=m\\x-2y+4z=4\end{cases}$

Giải: $\overline{\mathrm{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -2 & m\\ 1 & -2 & 4 & 4\end{array}\right]\xrightarrow[-2h_3+h_2]{-3h_3+h_1}\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 5 & -10 & -9\\ 0 & 5 & -10 & m-8\\ 1 & -2 & 4 & 4\end{array}\right]$

$\xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 4\\ 0 & 5 & -10 & m-8\\ 0 & 5 & -10 & -9\end{array}\right]\xrightarrow{-h_1+h_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 4\\ 0 & 5 & -10 & m-8\\ 0 & 0 & 0 & -m-1\end{array}\right]$

Để hệ có nghiệm thì: $-m-1=0 \Leftrightarrow m=-1$

184: Định m để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases}2x+3y-z=1\\ 4x+7y+2z=2\\ 8x+12y+(m+6)z=5.\end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 7 & 2 & 2\\ 8 & 12 & m+6 & 5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & m+10 & 1\end{array}\right)$

Để hệ phươnh trình có nghiệm điều kiện cần và đủ là $m+10\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -10$

185: Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm: $\begin{cases}2x+3y-z=1\\ 4x+7y+2z=2\\ 8x+12y+(m+6)z=4\end{cases}$

Giải: Ta có

$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 7 & 2 & 2\\ 8 & 12 & m+6 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & 7 & 2 & 2\\ 0 & 0 & m+10 & 0\end{vmatrix}$

Để hệ phương trình có vô số nghiệm thì $m+10=0 \Leftrightarrow m=-10$

186: Định m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}2x+3y-z=1\\ 4x+(m+5)y+(m-3)z=m+1\\ 8x+(m+11)y+(m-5)z=m+4.\end{cases}$

Giải: Ta có MTTĐ $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 1\\ 4 & m+5 & m-3 & m+1\\ 8 & m+11 & m-5 & m+4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1` & 1\\ 0 & m-1 & m-1 & m-1\\ 0 & m-1 & m-1 & m\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1` & 1\\ 0 & m-1 & m-1 & m-1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ $\Longrightarrow$ Hệ phương trình Vô Nghiệm

$\Longrightarrow$ không có giá trị của mđể hệ phương trình có nghiệm

187: Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z=m+1 \\ 8x+12y+(m-4)z=m+4. \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & m+5 & m-3 & m+1 \\ 8 & 12 & m-4 & m+4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & m & m \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ (m-1)y+(m-1)z=m-1 \\ mz=m \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ y+z=1 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm với mọi m

188: Định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z=m+2 \\ 8x+12y+(m-4)z=m+4. \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng : $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & m+5 & m-3 & m+2 \\ 8 & 12 & m-4 & m+4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 & m \\ 0 & 0 & m & m \end{array}\right]$

để hệ phương trình sau có nghiệm: m-1 $\neq 0 \rightarrow$ m$\neq 1$

189: Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm: $\begin{cases} x+my+z=2 \\ x+2y+2z=1 \\ 2x+(m+2)y+3z=m \end{cases}$

Giải:

Lập ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & m+2 & 3 & m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & 2-m & 1 & -1 \\ 0 & 2-m & 1 & m-4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & 2-m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-3 \end{array}\right]$$

Hệ phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m-3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

190: Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x+my+z=2 \\ x+2y+2z=1 \\ 2x+(m+2)y+4z=m. \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & m+2 & 4 & m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & 2-m & 1 & -1 \\ 0 & 2-m & 2 & m-4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 2 \\ 0 & 2-m & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & m-3 \end{array}\right]$$

191: Định m để hệ phương trình sau vô nghiệm: $\begin{cases} x+my+z=m \\ x+2y+2z=1 \\ 2x+(m+2)y+(m^2+2)z=2m. \end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & m+2 & m^2+2 & 2m \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 2-m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 & m-1 \end{array}\right)$

Để hệ vô nghiệm điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ m^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$

192: Định *m* để hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x+my+z=m \\ x+2y+2z=1 \\ 2x+(m+2)y+(m^2+2)z=m^2+m. \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & m+2 & m^2+2 & m^2+m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 2-m & 1 & 1-m \\ 0 & 2-m & m^2 & m^2-m \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 2-m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 & m^2-1 \end{array}\right] \to \begin{cases} x=\dfrac{3m-2}{2-m} \\ y=\dfrac{-m}{2-m} \\ z=1 \end{cases}$$

Để hpt vô nghiệm thì m-2=0 $\to$ m=2

Vậy m=2

193: định m để hệ phương trình sau vô nghiệm $\begin{cases} x+my+z=m \\ x+2y+2z=1 \\ 2x+(m+2)y+3z=m+2 \end{cases}$

Giải:

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & m & 1 & m\\ 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & m+2 & 3 & m+2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & m & 1 & m\\ 0 & 2-m & 1 & 1-m\\ 0 & 2-m & 1 & 2-m\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & m & 1 & m\\ 0 & 2-m & 1 & 1-m\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Hệ vô nghiệm với $\forall m$

194: Định m để hệ phương trình cóvô số nghiệm: $\begin{cases} x+2y+(7-m)z=2\\ 2x+4y-5z=1\\ 5x+10y+(m-5)z=4\end{cases}$

Giải: Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 7-m & 2\\ 2 & 4 & -5 & 1\\ 5 & 10 & m-5 & 4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 7-m & 2\\ 0 & 0 & 2m-19 & -3\\ 0 & 0 & 6m-40 & -6\end{array}\right)$

Để hệ có vô số nghiệm điều kiện cần và đủ là $\begin{cases}2(2m-19)=6m-40\\ 6m-40\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=1$

195: Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases}2x+4y+2(7-m)z=4\\ 2x+4y-5z=1\\ 5x+10y+(m-5)z=4\end{cases}$$

Giải: Ta có

$$\left|\begin{array}{cccc}2 & 4 & 2(7-m) & 4\\ 2 & 4 & -5 & 1\\ 5 & 10 & m-5 & 4\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}2 & 4 & 2(7-m) & 4\\ 0 & 0 & 19-2m & 3\\ 0 & 0 & 12m-80 & -12\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}2 & 4 & 2(7-m) & 4\\ 0 & 0 & 19-2m & 3\\ 0 & 0 & 4m-4 & 0\end{array}\right|$$

Để hệ phương trình có vô số nghiệm thì $4m-4=0\Leftrightarrow m=1$

196: Định m để hệ phương trình có vô số nghiệm: $\begin{cases}x+2y+(7-m)z=2\\ 2x+4y-5z=1\\ 3x+6y+mz=3.\end{cases}$

Giải: Ta có ma trận tương đương

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 7-m & 2\\ 2 & 4 & -5 & 1\\ 3 & 6 & m & 3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 7-m & 2\\ 0 & 0 & 2m-19 & -3\\ 0 & 0 & 4m-21 & -3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 7-m & 2\\ 0 & 0 & 2m-19 & -3\\ 0 & 0 & 17 & 3\end{array}\right)$$

Để hệ có vô số nghiệm điều kiện cần và đủ là $2m-19=-17\Leftrightarrow m=1$

197: Định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases}x+2y-(5-m)z=2\\ 2x+4y=1\\ 3x+4y=7.\end{cases}$$

hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì

$$\det A \neq 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to -4m + 20 \neq 0 \to m \neq 5$$

vậy m $\neq 5$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

198: Định *m* để hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x + 2y + (m-5)z = 2 \\ 2x - y = 1 \\ (5-m)x + y + (m-5)z = 6. \end{cases}$$

hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì

$$\det A \neq 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5-m & 1 & m-5 \end{vmatrix} \neq 0 \to (m-5).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (m-5).\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5-m & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\to (m-5).(2-m) \neq 0 \to m \neq 5, m \neq 2$$

vậy $m \neq 5, m \neq 2$ thì hệ phương trình có nghiiệm duy nhất

2.3 Bài tập làm thêm

Câu 3.3 giải và biện luận hệ phương trình theo tham số $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + (\alpha - 1)y + z = 3 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$

Lập phương trình mở rộng $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & \alpha - 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & -2 \end{array}\right]$

Với α =1 thì hệ vô nghiệm

Với α =2 thì hệ vô số nghiệm

Với $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$ thì hệ có nghiệm duy nhất

Câu 3.5 Giải các hệ phương trình $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Lập phương trình mở rộng $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & -8 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 4\alpha - 3\beta \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 4\alpha - 3\beta \\ x_4 = 0 \end{cases}$

CHƯƠNG 3: KHÔNG GIAN VECTƠ

3.1 Lý thuyết

3.1.1 Các phép toán về vectơ n chiều

Tổng của 2 vectơ : $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

Phép nhân vectơ với một số vô hướng : $kX = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$

Tính chất các phép toán về vectơ n chiều : Nếu X,Y,Z là các vectơ n chiều và $\alpha, \beta \in R$ ta có:

a) $X + Y = Y + X$
b) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
c) $X + 0 = X$
d) Tồn tại vectơ đối $-X$ sao cho $X + (-X) = 0$
e) $1.X = X$
f) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$
g) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)x$
h) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

3.1.2. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

1. Định nghĩa: Cho hệ gồm m vectơ trong R^n:

$$\{A_1, A_2, ..., A_m\} \qquad (1)$$

a) Hệ (1) gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu có những số thực $k_1, k_2, \ldots k_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m = 0$$

b) Hệ (1) gọi là độc lập tuyến tính nếu nó không phụ thuộc tuyến tính, tức là nếu

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m = 0 \text{ thì } k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$$

c) Vectơ X gọi là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nếu X được viết dưới dạng:

$$X = k_1A_1 + k_2A_2 + \ldots + k_mA_m,\ k_i \in R,\ (i=1,\ldots,m)$$

3.13. Tọa độ của vectơ đối với một cơ sở

$$X = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + ... + \alpha_nX_n$$

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ gọi là tọa độ của vectơ X đối cơ sở B

3.1.4. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

Giả sử U = $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ là một co sở nào đó của không gian R^n. xét phép biến đổi tuyến tính

$$f : R^n \to R^n.$$

$$f(Uj) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}U_i,\ j=1,2,\ldots,n.$$

3.2 Bài tập

199: Xác định m để vectơ (1,m,1) là tổ hợp tuyến tính của

u = (1,1,0), v = (2,1,1), w= (3,2,1)

Giải:

Xét phương trình: A = au + bv + cw

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & m-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right] \end{array}$$

200: Xác định *m* để vectơ $(2, m+4, m+6)$ là một tổ hợp tuyến tính của

$u = (1,2,3), v = (3,8,11), w = (1,3,4)$

Giả sử X = $(2, m+4, m+6)$ là một tổ hợ tuyến tính của

$u = (1,2,3), v = (3,8,11), w = (1,3,4)$

Thì $\quad \text{X} = au + bv + c\text{w} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b + c = 2 \\ 2a + 8b + 3c = m+4 \\ 3a + 11b + 4c = m+6 \end{cases}$ có nghiệm

Lập ma trận mở rộng $\quad \overline{\text{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & m+4 \\ 3 & 11 & 4 & m+6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & m \\ 0 & 2 & 1 & m \end{array}\right]$

Vậy m là tùy ý

201: Xác định m để vectơ $(m, 2m+2, m+3)$ là một tổ hợp tuyến tính của

$u = (3,6,3), v = (2,5,3), w = (1,4,3)$

Giải: Giả sử $(m, 2m+2, m+3)$ là tổ hợp tuyến tính của

$u = (3,6,3), v = (2,5,3), w = (1,4,3)$ tức là tồn tại k_1, k_2, k_3 sao cho.

$k_1(3,6,3) + k_2(2,5,3) + k_3(1,4,3) = (m, 2m+2, m+3)$

ta có $\begin{cases} 3k_1 + 2k_2 + k_3 = m \\ 6k_1 + 5k_2 + 4k_3 = 2m+2 \\ 3k_1 + 3k_2 + 3k_3 = m+3 \end{cases}$ có

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & m \\ 6 & 5 & 4 & 2m+2 \\ 3 & 3 & 3 & m+3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -3 & -6 & -2m+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ hệ vô nghiệm. Do đó không có giá trị m để $(m, 2m+2, m+3)$ là tổ hợp tuyến tính của u, v, w

202: Xác định *m* để vectơ (x_1, x_2, x_3) là một tổ hợp tuyến tính của

$u=(1,2,3), v=(2,4,5), w=(3,6,7)$

Gọi X = (x_1,x_2,x_3) là một tổ hợp tuyến tính của

$u=(1,2,3), v=(2,4,5), w=(3,6,7)$ nếu

$$\mathrm{X}=au+bv+c\mathrm{w} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=x_1 \\ 2a+4b+6c=x_2 \\ 3a+5b+7c=x_3 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Lập ma trận mở rộng

$$\overline{\mathrm{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 2 & 4 & 6 & x_2 \\ 3 & 5 & 7 & x_3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-2x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_3-3x_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_3-3x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-2x_1 \end{array}\right]$$

Để hpt tuyến tính có nghiệm $\Leftrightarrow x_2-2x_1=0 \Leftrightarrow x_2=2x_1$

203: Tìm điều kiện để vectơ (x_1,x_2,x_3) là met tổ hợp tuyến tính của

u = (1, 2, 3), v = (2, 4, 6), w = (2, 3, 12)

Giải:

$$\text{Xét} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 2 & 4 & 5 & x_2 \\ 3 & 6 & 7 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2-2h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & -2 & x_3-3x_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3-2h_2+h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3-2x_2+x_1 \end{array}\right]$$

Vectơ (x_1,x_2,x_3) là tổ hợp tuyến tính của u,v,w

$\Leftrightarrow x_3-2x_2+x_1=0 \Leftrightarrow x_3=2x_2-x_1$

$\Leftrightarrow$ vectơ (1,m,1) là tổ hợp tuyến tính của 3 vectơ còn lại $\Leftrightarrow$ a = b = c = 0

$\Leftrightarrow$ m = 0

204: Tìm điều kiện để vectơ (x_1,x_2,x_3) là một tổ hợp tuyến tính của

$u=(1,0,2), v=(1,2,8), w=(2,3,13)$

Giải: Gọi $X(x_1,x_2,x_3)$ là tổ hợp tuyến tính của u(1, 0, 2) v(1, 2, 8) w(2, 3, 13)

$$\text{thì X=au+bv+cw} \Rightarrow \begin{cases} a+b+2c=x_1 \\ 2b+3c=x_2 \\ 2a+8b+13c=x_3 \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 3 & x_2 \\ 2 & 8 & 13 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 2x_1 - 3x_2 \end{array}\right)$

Để hệ có nghiệm thì $x_3 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2x_1 + 3x_2$

205: Tìm điều kiện để vectơ (x_1, x_2, x_3) là một tổ hợp tuyến tính của $u = (1,2,4)$, $v = (3,6,12)$, $w = (4,8,16)$

Giải:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & x_1 \\ 3 & 6 & 12 & x_2 \\ 4 & 8 & 16 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -4x_1 + x_3 \end{vmatrix}$$

Để thoả điều kiện bài toán thì $4x_1 = 2x_2 = x_3$

206: Xác định m để vectơ $(1, m, 1)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u = (1,1,3), v = (2,2,5), w = (3,4,3)$

Giải: $X(x_1, x_2, x_3)$ là tổ hợp tuyến tính của u(1,3,1), v(2,1,2) w(0,1,1) thì X=au+bv+cw

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = x_1 \\ 3a + b + c = x_2 \\ a + 2b + c = x_3 \end{cases} \text{ ta có } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 3 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -5 & 1 & x_2 - 3x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 - x_1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ hệ luôn có nghiệm

207: Tìm m để vectơ $(1, m, 1)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u = (1,2,4), v = (2,1,5), w = (3,6,12)$

Giả sử $(1, m, 1)$ không là tổ hợp tuyến tính của $u = (1,2,4), v = (2,1,5), w = (3,6,12)$ tức là tồn tại au+bv+cw $= (1, m, 1)$

Tức là $\begin{cases} a + 2b + 3c = 1 \\ 2a + b + 6c = m \\ 4a + 5b + 12c = 1 \end{cases}$ vô nghiệm

Lập ma trận mở rộng

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & m \\ 4 & 5 & 12 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & m-2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & -m-1 \end{array}\right]$$

Để hpt tuyến tính vo nghiệm $\Leftrightarrow -m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Vậy $m \neq -1$ thì vectơ $(1,m,1)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u=(1,2,4), v=(2,1,5), w=(3,6,12)$

208: Xác định *m* để vectơ $(1,m,1)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u=(1,1,3), v=(2,2,5), w=(3,4,3)$

Giả sử $(1,m,1)$ không là tổ hợp tuyến tính của $u=(1,1,3), v=(2,2,5), w=(3,4,3)$

tức là tồn tại au+bv+cw $=(1,m,1)$ sao cho $\begin{cases} a+2b+3c=1 \\ a+2b+4c=m \\ 3a+5b+3c=1 \end{cases}$ vô nghiệm

Lập ma trận mở rộng $\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \\ 3 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m-1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{array}\right]$

$\Rightarrow$ hpt tuyến tính có nghiệm duy nhất

Vậy không có giá trị nào của m để vectơ

$(1,m,1)$ là một tổ hợp tuyến tính của $u=(1,2,4), v=(2,1,5), w=(3,6,12)$

209: Xác định m để vectơ (1, m+2, m+4) không phải là một tổ hợp tuyến tính của: u = (1, 2, 3), v = (3, 7, 10), w = (2, 4, 6)

Giải:

Xét phương trình: A = au + bv + cw

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & m+2 \\ 3 & 10 & 6 & m+4 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 & m+1 \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Phương trình luôn có nghiệm với $\forall$ m $\Rightarrow \forall$ m vectơ (1, m+2, m+4) không phải là tổ hợp tuyến tính của 3 vectơ còn lại.

210: Tìm điều kiện m để vectơ (x_1,x_2,x_3) không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u=(1,2,1), v=(1,1,0), w=(3,6,3)$

Gọi X $=(x_1,x_2,x_3)$ không phải là một tổ hợp tuyến tính của

$u=(1,2,1), v=(1,1,0), w=(3,6,3)$ nếu $\begin{cases} a+b+3c=x_1 \\ 2a+b+6c=x_2 \\ a+3c=x_3 \end{cases}$ vô nghiệm

Lập ma trận mở rộng

$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & 6 & x_2 \\ 1 & 0 & 3 & x_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_2-2x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_3-x_1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3-x_2-x_1 \end{array}\right]$

Để hpt tuyến tính vô nghiệm $\Leftrightarrow x_3-x_2-x_1 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2+x_3$

Vậy $x_1 \neq x_2 + x_3$ thì vectơ (x_1, x_2, x_3) không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u = (1,2,1), v = (1,1,0), w = (3,6,3)$

211: Tìm điều kiện để vectơ (x_1, x_2, x_3) không phải là một tổ hợp tuyến tính của $u = (1,2,1), v = (1,1,0), w = (3,6,4)$

Giải: Giả sử (x_1, x_2, x_3) không là tổ hợp tuyến tính của u, v, w

tức là tồn tại k_1, k_2, k_3 sao cho

$k_1u + k_2v + k_3\text{w} = (x_1, x_2, x_3)$ tức là $\begin{cases} k_1 + k_2 + 3k_3 = x_1 \\ 2k_1 + k_2 + 6k_3 = x_2 \\ k_1 + 0k_2 + 4k_3 = x_3 \end{cases}$

Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & 4 & x_2 \\ 1 & 0 & 4 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 + x_3 \end{array}\right) \to$ Hệ có nghiêm duy nhất

Vậy không có gt của các x để vectơ (x_1, x_2, x_3) không phải là một tổ hợp tuyến tính

của

$u = (1,2,1), v = (1,1,0), w = (3,6,4)$

212: Cho các vectơ u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^4$ và

θ là vectơ không của $\mathbb{R}^4$. Trong 4 mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

$a) u_1, u_2, \theta$ độc lập tuyến tính.

$b) u_1, u_3, \theta$ độc lập tuyến tính.

$c) u_2, u_3, \theta$ độc lập tuyến tính.

$d) u_1, u_2, u_3, \theta$ phụ thuộc tuyến tính

Đáp án đúng là $d) u_1, u_2, u_3, \theta$ phụ thuộc tuyến tính

213: Xác định m để vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính
u = (m+1, m, m-1), v = (2, m, 1), w = (1, m, m-1)

Giải:

Xét $\begin{bmatrix} m+1 & m & m-1 \\ 2 & m & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_1 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & m & m-1 \\ 2 & m & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[h_2 - 2h_1]{h_3 - (m+1)h_1} \begin{bmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & -m & 3-2m \\ 0 & -m^2 & -m(m-1) \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 - mh_2} \begin{bmatrix} 1 & m & m-1 \\ 0 & -m & 3-2m \\ 0 & 0 & m^2 - 2m \end{bmatrix}$

Để vectơ phụ thuộc tuyến tính thì $m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = 2$

214: Xác định m để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:

$u=(m,1,3,4), v=(m,m,m+2,6), w=(2m,2,6,m+10)$

Giải: Ta có $A=\begin{pmatrix} m & m & 2m \\ 1 & m & 2 \\ 3 & m+2 & 6 \\ 4 & 6 & m+10 \end{pmatrix} \rightarrow m\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m+2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(m+2)(m-1) \end{pmatrix}$

Để hệ PTTT thì A có hạng bằng 2

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}(m+2)(m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$$

215: Xác định m để 3 vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính:

$u=(m,1,3,4)$, $v=(m,m,m+4,6)$, $w=(2m,2,6,m+10)$

Giải:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 & 4 \\ m & m & m+4 & 6 \\ 2m & 2 & 6 & m+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1-m & m-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \end{vmatrix}$$

Để thoả điều kiện bài toán thì $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$

216: u(m, 1, 1, 4), v(m, m, m, 6), w(2m, 2, 2, m+10) ta có

$$A=\begin{pmatrix} m & m & 2m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 4 & 6 & m+10 \end{pmatrix} \rightarrow m\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 2 \\ 4 & 6 & m+10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m+2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(m-1)(m+2) \end{pmatrix}$$

Để hệ phụ thuộc tuyến tính thì $(m-1)(m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$

217: Xác định *m* để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:

$u=(m,1,3,4), v=(m,m,m+2,6), w=(2m,2,6,10)$

Ta có $\begin{pmatrix} m & m & 2m \\ 1 & m & 2 \\ 3 & m+2 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow m.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow m\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m-1) \end{pmatrix}$

Để hệ phụ thuộc tuyến tính thì :m-1=0 $\rightarrow$m=1

218: Xác định *m* để 3 vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:

$u=(m,1,3,4), v=(m,m,m+2,6), w=(2m,2,7,10)$

Ta có

$$\begin{pmatrix} m & m & 2m \\ 1 & m & 2 \\ 3 & m+2 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} \to m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2(m-1) \end{pmatrix} \to m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to r = 3 < 4$$

Vậy 3 vector phụ thuộc tuyến tính với mọi m

219: Xác định m, các vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính:

u_1 = (2, 3, 1, 4), u_2 = (4, 11, 5, 10), u_3 = (6, 14, m+5, 18), u_4 = (4, 7, m+2, 15)

Giải:

$$\text{Xét hệ A=} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 11 & 5 & 10 \\ 6 & 14 & m+5 & 18 \\ 2 & 8 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & m+2 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & m+2 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & m+2 & 10 \\ 0 & 0 & -m & -11 \\ 0 & 0 & 1-m & -8 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & m+2 & 10 \\ 0 & 0 & -m & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ta có: $\forall$ m thì det A $\neq 0 \Rightarrow$ hệ vectơ dộc lập tuyến tính $\Rightarrow$ không có giá trị m để hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

220: Xác định *m* các vector sau đây phụ thuộc tuyến tính:

$u_1 = (1,2,1,4), u_2 = (2,3,m,7),$

$u_3 = (5,8,2m+1,19), u_4 (4,7,m+2,15)$

Ta có A=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 7 \\ 1 & m & 2m+1 & m+2 \\ 4 & 7 & 19 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & m-2 & 2(m-2) & m-2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to (m-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to (m-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to r_A = 3 < 4$ Vậy các vector trên phụ thuộc tuyến tính với mọi m

221: Xác định m để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:

$u=(m+1,1,m+1), v=(1,1,1), w=(2,0,m+2)$

Giải: Giả sử $k_1u+k_2v+k_3\text{w}=0 \Rightarrow \begin{cases} (m+1)k_1+k_2+2k_3=0 \\ k_1+k_2+0k_3=0 \\ (m+1)k_1+k_2+(m+2)k_3=0 \end{cases}$

Ta có $\left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ m+1 & 1 & m+2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m+1 & 2 & 0 \\ 0 & -m & -2 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \end{array}\right)$

$m \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $k_1=k_2=k_3=0$

$m=0$ thì hệ có vô số nghiệm

Vậy $m \neq 0$ thì hệ độc lập tuyến tính

222: Xác định *m* để 3 vector sau đây độc lập tuyến tính:

$u=(m+2,3,2), v=(1,m,1), w=(m+2,2m+1,m+2)$

Ta có

$$\text{A}=\begin{vmatrix} m+2 & 1 & m+2 \\ 3 & m & 2m+1 \\ 2 & 1 & m+2 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & m+2 & m+2 \\ m & 3 & 2m+1 \\ 1 & 2 & m+2 \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & m+2 & m+2 \\ 0 & 3-m(m+2) & 2m+1-m(m+2) \\ 0 & -m & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & m+2 & m+2 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & m(-m^2+1) \end{vmatrix}$$

Để hpt độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow r_{\text{A}}=n=3$

Khi đó $m(-m^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \neq \pm 1 \end{array}\right.$

223: Xác định m để vectơ sau đây độc lập tuyến tính:

u = (2, 1, 1, m), v = (2, 1, 4, m), w = (m, 1, 0, 0)

Giải:

Xét

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 4 & m \\ m & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 - \frac{m}{2}h_1]{h_2 - h_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{2-m}{2} & \frac{-m}{2} & \frac{-m^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 0 & \frac{2-m}{2} & \frac{-m}{2} & \frac{-m^2}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 3$$

$\Rightarrow$ 3 vectơ độc lập tuyến tính với $\forall\, m \in \mathbb{R}$

224: u(2, 1, 1,m) v(2, 1, 4,1m) w(m+2, 1, 0, 0)

Ta có $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ m & m & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Để hệ ĐLTT điều kiện cần và đủ là A có hạng bằng 2 suy ra $m \neq 0$

225: Xác định m để 3 vectơ sau đây độc lập tuyến tính

$u = (2,1,1,m)$, $v = (2,1,m,m)$, $w = (m+2,1,0,0)$

Giải:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m & m \\ m+2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1-m & 0 \\ m & 0 & 1 & m \end{vmatrix}$$

Để thoả điều kiện bài toán thì $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

226: u(2, 1, 1, m) v(2, 1, -1, m) w(10, 5, -1, 5m)

Ta có $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ m & m & 5m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & -1 \\ m & m & 5m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Hệ Phụ thuộc tuyến tính với mọi m.Do đó không tồn tại m để hệ độc lập tuyến tính.

227: Xác định *m* các vector sau đây độc lập tuyến tính:

$u_1 = (2,3,1,4), u_2 = (3,7,5,1),$

$u_3 = (8,17,11,m), u_4(1,4,4,-3)$

Ta có A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 8 & 17 & 11 & m \\ 1 & 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & 7 & m-16 \\ 0 & 5 & 7 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & m-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r = 3 < 4$

Vậy hệ phụ thuộc tuyến tính

Vậy không có giá trị nào của m để hệ độc lập tuyến tính

228: Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$?

$a).(1,2,3);(0,2,3);(0,0,3)$

$b).(1,1,1);(1,1,0);(2,2,1)$

$c).(1,2,3);(4,5,6);(7,8,9)$

$d).(1,2,1);(2,4,2);(1,1,2)$

Để tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì hệ vectơ phải độc lập tuyến tính

Ta có A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to r_A = 3 = r_n$

Vậy hệ độc lập tuyến tính nên đáp án $a).(1,2,3);(0,2,3);(0,0,3)$

229: Tìm m để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

u = (1, 2, m), v = (1, m ,0), w = (m, 1, 0)

Giải:

Xét

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 0 \\ m & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-2 & -m \\ 0 & 1-2m & -m^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-2 & -m \\ 0 & -1-m & -m-m^2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ hệ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow \begin{cases} -1-m \neq 0 \\ -m-m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ các vectơ tạo thành một cơ sở $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$

230: Tìm *m* để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

$u = (m,1,1), v = (1,m,1), w = (1,1,m)$

Ta có A=

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-1 \\ 0 & m-1 & m^2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-1 \\ 0 & 0 & (m-1)(m^2+2m) \end{pmatrix}$$

để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $\begin{cases} m \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$

vậy với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$ hệ vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

231: Tìm *m* để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$:

$u = (1,2,3), v = (m, 2m+3, 3m+3), w = (1,4,6)$

Ta có A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m & 2m+3 & 3m+3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r_A = 2 = r_n$

Vậy hệ độc lập tuyến tính với mọi giá trị của m

232: Tìm *m* để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$

$u_1 = (3,1,2,m-1), u_2 = (0,0,m,0),$

$u_3 = (2,1,4,0), u_4(3,2,7,0)$

Ta có A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

để các vectơ sau tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$ thì $\begin{cases} m \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

vậy với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$ thì hệ vectơ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$

234: $u_1(1,2,3,4)$ $u_2(2,3,4,5)$ $u_3(3,4,5,6)$ $u_4(4,5,6,m)$

Để các vectơ tạo thành một cơ sở trước hết chúng phải độc lập tuyến tính

Ta có $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 \end{pmatrix}$

Ta thấy hạng của A lớn nhất là 3 suy ra có tối đa 3 vectơ độc lập tuyến tính
Suy ra không tồn tại giá trị m để 4 vectơ trên tạo thành cơ sở

235: Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các vectơ sau $u_1 = (2,3,4),\ u_2 = (5,-4,0),\ u_3 = (7,-1,5)$

$a)\ u_1, u_2$

$b)\ u_2, u_3$

$c)\ u_1, u_3$

$d)\ u_1, u_2, u_3.$

Ta có để tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^3$ thì hệ vectơ phải độc lập tuyến tính

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -23 & -20 \end{pmatrix} \to r_A = r_N$$

Vậy hệ này độc lập tuyến tính nên $a)\ u_1, u_2$ tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^3$

236: Xét 3 vectơ u_1, u_2, u_3 có $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 3 \quad \Rightarrow$ 3 vectơ u_1, u_2, u_3 tạo thành một cơ sở của không gian con W của R^3. Xét u_2, u_3, u_4 có

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ có } r = 2$$

$\Rightarrow$ 3 vectơ u_2, u_3, u_4 không tạo thành một cơ sở của không gian con W của R^3.

Đáp án đúng là C

237: Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau

$u_1 = (1,2,3,4),\ u_2 = (0,2,6,0),\ u_3 = (0,0,1,0), u_4 = (0,2,4,4)$

$a)\ u_1, u_2$

$b)\ u_2, u_3$

$c)\ u_1, u_2, u_3$

$d) u_1, u_2, u_3, u_4.$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to r_B = 3 < 4$$ Vậy hệ trên không tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$

Ta xét $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to r_A = r_N = 4$$

-Vậy hệ trên độc lập tuyến tính nên hệ tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$

238: Các vectơ nào sau đây tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau

$u_1 = (1,2,3,4),\ u_2 = (0,2,6,0),\ u_3 = (0,0,1,0), u_4 = (1,2,4,4)$

$a)\ u_1, u_2$

$b)\ u_2, u_3$

$c)\ u_1, u_2, u_3$

$d) u_1, u_3, u_4.$

Ta xét A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r_A = 2 < 4$

Vậy hệ trên không tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$

Ta xét B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r_B = 3 < 4$

hệ trên không tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$

Ta xét C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r_B = 3 < 4$

hệ trên không tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$

Ta xét D= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow r_D = 2 < 4$

trên không tạo thành một cơ sở của không gian con W của $\mathbb{R}^4$

vậy không có bất cứ hệ nào thỏa mãn

239: Tìm số chiều n = dimW của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau:

u_1 = (1, 2, 3, 4), u_2 = (2, 3, 4, 5), u_3 = (3, 4, 5, 6), u_4 = (4, 5, 6, 7)

Giải:

Xét

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-3&-4\\0&-3&-4&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&2\\0&0&2&4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow \dim W = 3$$

240: Tìm số chiều $n=\dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau

$u_1=(2,2,3,4)$, $u_2=(1,3,4,5)$,

$u_3=(3,5,7,9), u_4=(4,8,11,15)$

Xét A=

$$\begin{pmatrix}2&1&3&4\\2&3&5&8\\3&4&7&11\\4&5&9&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&2&4\\0&5&5&10\\0&3&3&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}\to r_A=3$$

Vậy số chiều $n=\dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ là n= 3

241: Tìm số chiều $n=\dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau

$u_1=(2,2,3,4)$, $u_2=(4,4,6,8)$,

$u_3=(6,6,9,12), u_4=(8,8,12,16)$

$$\text{Xét A=}\begin{pmatrix}2&4&6&8\\2&4&6&8\\3&6&9&12\\4&8&12&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&4&6&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to r=1$$

Vậy số chiều $n=\dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ là n= 1

242: Tìm số chiều $n=\dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các vectơ sau

$u_1=(1,2,3,4)$, $u_2=(2,0,6,0)$,

$u_3=(6,6,7,0), u_4=(8,0,0,0)$

Xét A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & -4 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & -8 & -24 & -32 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & -4 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -11 & -24 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & -16 & -6 \\ 0 & 0 & -24 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

$\rightarrow r = 4$

Vậy số chiều $n = \dim W$ của không gian con W của $\mathbb{R}^4$ là n= 4

243:Tìm hạng của hệ vectơ sau :

$u_1 = (3,1,5,7),\ u_2 = (4,-1,-2,2),$

$u_3 = (10,1,8,17), u_4 = (13,2,13,24)$

Xét A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 10 & 1 & 8 & 17 \\ 13 & 2 & 13 & 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 10 & 1 & 8 & 17 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & 8 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 3 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\mathrm{A}) = 3$

Vậy hạng của hệ bằng 3

244: $u_1 = (2,3,5,7)$ $u_2 = (4,1,3,2)$ $u_3 = (8,7,13,16)$ $u_4 = (6,4,8,9)$

Ta có

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 13 & 8 \\ 7 & 2 & 16 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -12 & -12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$

Vậy hạng của hệ r =2

245:Tìm hạng của hệ vectơ sau :

$u_1 = (1,1,5,7),\ u_2 = (1,-1,-2,2),$

$u_3 = (2,2,10,17), u_4 = (3,3,15,24)$

Ta có $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 10 & 17 \\ 3 & 3 & 15 & 24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r = 3$

Vậy hạng của hệ bằng 2

Câu 246: Định *m* để hệ sau có hạng bằng 2:

$u = (m, 1, 0, 2), v = (m, m+1, -1, 2), w = (2m, m+2, -1, 5)$

Ta có $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ m & m+1 & -1 & 2 \\ 2m & m+2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 3 \forall m$

Vậy không có giá trị nào của m để hệ bằng 2

246. Xét $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ m & m+1 & -1 & 2 \\ 2m & m+2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$ với mọi m

Do đó không có giá trị nào của m để hệ có hạng bằng 2

247: Định *m* để hệ sau có hạng bằng 3:

$u = (m, 1, 0, 2), v = (m, m+2, 0, 2), w = (2m, m+3, 0, 5)$

Ta có $\begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ m & m+2 & 0 & 2 \\ 2m & m+3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ 0 & m+1 & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ 0 & m+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Để hệ có hạng bằng 3 thì $\left[\begin{matrix} m+1 \neq 0 \\ m \neq 0 \end{matrix}\right. \to \left[\begin{matrix} m \neq -1 \\ m \neq 0 \end{matrix}\right.$

Vậy m $\neq$0; m $\neq$-1

248: Định *m* để hệ sau có hạng bằng 3:

$u = (m, 1, 0, 2), v = (m, m+2, 0, 2), w = (2m, m+3, 0, 4)$

Ta có

$\begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ m & m+2 & 0 & 2 \\ 2m & m+3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ 0 & m+1 & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 2 \\ 0 & m+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r \neq 3 \forall m$

Vậy không có giá trị nào của m để hệ có hạng bằng 3

249: Tìm toạ độ x_1, x_2, x_3 của vectơ u = (1, 2, 4) theo cơ sở B:

u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1) có u = (1, 2, 4)

Giải:

Tìm các toạ độ của vectơ u trong cơ sở B là x_1, x_2, x_3 nghĩa là: $|u|_B = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ có

phương trình: $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

Ta có: $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 4 \end{cases}$

250: Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (m, 0, 1)$ theo cơ sở

$u_1 = (0,0,1), u_2 = (0,1,0), u_3 = (1,0,0)$

Ta có x_1, x_2, x_3 thỏa: $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$\rightarrow \begin{vmatrix} m \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = m \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

Tọa độ cần tìm là (m,0,1)

251: Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (3,3,4)$ theo cơ sở

$u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,-3,0), u_3 = (0,0,2)$

Ta có x_1, x_2, x_3 thỏa: $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

Ta có $\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$ Tọa độ cần tìm là (3, -1, 2)

252: Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (1,2,1)$ theo cơ sở

$u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$

Ta có x_1, x_2, x_3 thỏa: $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ Tọa độ cần tìm là (-1, 1 ,1)

Vậy tọa độ cần tìm là (-1, 1, 1)

253: Tìm toạ độ (x_1, x_2, x_3) của vectơ u = (2, 3, 6) theo cơ sở:

$u_1 = (1,2,3), u_2 = (1,3,4), u_3 = (2,4,7)$

Giải: Ta có: $u = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 2x_3 \\ 2x_1 & 3x_2 & 4x_3 \\ 3x_1 & 4x_2 & 7x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix} \xrightarrow[h_3-3h_1]{h_2-2h_1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix} \xrightarrow{h_3-h_2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 2x_1 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -13 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow |u|_B = \begin{bmatrix}-13\\3\\6\end{bmatrix}$$

254: Toại độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (m,0,1)$ theo cơ sở

$u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3(0,-1,1)$

Nên x_1, x_2, x_3 thoả $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$. Ta có hệ $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} x_1 = m-1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

255: Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (m, m, 4m)$ theo cơ sở

$u_1 = (1,2,3), u_2 = (3,7,9), u_3 = (5,10,16)$

Ta có x_1, x_2, x_3 thỏa: $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = m \\ 2x_1 + 7x_2 + 10x_3 = m \\ 3x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 4m \end{cases}$$

Lập ma trận mở rộng $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & m \\ 2 & 7 & 10 & m \\ 3 & 9 & 16 & 4m \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & m \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array}\right]$

Khi đó ta được hpt mới $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = m \\ x_2 = -m \\ x_3 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m \\ x_2 = -m \\ x_3 = m \end{cases}$

Vậy tọa độ cần tìm là (-m, -m, m)

256: Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (1, 2m, 2)$ theo cơ sở

$u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,2,0), u_3 = (2,1,1)$

Ta có x_1, x_2, x_3 thỏa: $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 2m \\ x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = m-1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$ tọa độ cần tìm là (-3,m-1,2)

257: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ : <u>lưu ý:</u> $\mathbb{R}^3$ là R^3

$u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,1,0), u_3 = (1,3,3)$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

$a) u_1, u_2, u_3$ độc lập tuyến tính.

$b) u_1, u_2, u_3$ phụ thuộc tuyến tính.

$c) u_1, u_2, u_3$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

*d)*Hệ các vectơ u_1, u_2, u_3 có hạng bằng 3.

Xét A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r = 2$

Vậy 2 vecto u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính   câu b) đúng

258: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ phụ thuộc vào tham số *m*:

$u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,m,1), u_3 = (1,1,m)$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

$a) u_1, u_2, u_3$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $m = 1$.

$b) u_1, u_2, u_3$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $m = 0$.

$c) u_1, u_2, u_3$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi $m \neq 1$

d) Hệ các vectơ u_1, u_2, u_3 luôn có hạng bằng 3.

Xét A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$

3 vectơ u_1, u_2, u_3 phụ thuộc tuyến tính khi m-1=0$\rightarrow$m=1

3 vectơ u_1, u_2, u_3 độc lập tuyến tính khi m-1$\neq$0$\rightarrow$m$\neq$1

Vậy câu c) đúng

259: Trong không gian R^3cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m

$u_1 = (1,\ 2,\ m),\ u_2 = (2,\ 4,\ 0),\ u_3 = (0,\ 0,\ 7)$

Giải:

Xét A $=\begin{bmatrix}1&2&m\\2&4&0\\0&0&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&m\\0&0&-2m\\0&0&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&m\\0&0&-2m\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ hệ độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow -2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0$

Vậy dimW= 2

260: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ phụ thuộc vào tham số m :

$u_1=(1,2,m),u_2=(3,4,3m),u_3=(0,1,7)$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

$a)u_1,u_2,u_3$ luôn luôn độc lập tuyến tính

$b)u_1,u_2,u_3$ luôn luôn phụ thuộc tuyến tính.

$c)u_1,u_2,u_3$ tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi $m\neq 0$

d) Hệ các vectơ u_1,u_2,u_3 luôn có hạng bằng 2.

Xét A= $\begin{pmatrix}1&2&m\\3&4&3m\\0&1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&m\\0&-2&0\\0&1&7\end{pmatrix}\to r=3\forall m$

Vậy câu a) đúng

261: Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho các vectơ :

$u_1=(2,1),u_2=(-1,-1)$

Tìm ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ của $\mathbb{R}^2$

Ma trận chính tắc B_0 có dạng $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ của $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn

biểu thức $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_3\\x_2&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\\x_3=-1\\x_4=-1\end{cases}$ vậy ma trận trận chuyển cơ

sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ của $\mathbb{R}^2$ là $\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

Câu 262: Trong không gian $\mathbb{R}^2$ cho các vectơ : lưu ý: $\mathbb{R}^2$ là R^2

$u_1=(2,1),u_2=(-1,-1)$

Tìm ma trận chuyển cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ sang cơ sở chính tắc B_0 của $\mathbb{R}^2$

ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ của $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn biểu thức $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$ ma trận trận

chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B = \{u_1, u_2\}$ của $\mathbb{R}^2$ là $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

263: Trong không gian R^2 cho các vectơ:
$u_1 = (2,1), u_2 = (-1,-1), v_1 = (-1,0), v_2 = (0,1)$. Tìm ma trận chuyển cơ sở chính tắc $B_1 = (u_1, u_2)$ sang cơ sở $B_2 = (v_1, v_2)$ của R^2

Giải:

Có: $|v_1|_{B_1} = x_1u_1 + x_2u_2 = v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 \\ x_1 & -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow |v_1|_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$|v_2|_{B_1} = x_1u_1 + x_2u_2 = v_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 \\ x_1 & -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow |v_2|_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ma trận chuyển cơ sở chính tắc B_1 sang cơ sở B_2 là: $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

264: Ta có $\begin{matrix} v_1 / B_1 = -u_1 = (-2,-1) \\ v_2 / B_2 = u_2 = (1,1) \end{matrix} \Rightarrow$ ma trận chuyển cơ sở chính tắc $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

265: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ :
$u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,1)$

Tìm ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$

ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1 \\ x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1 \\ x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 1 \end{cases}$.vậy ma trận

trận chuyển cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ là $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

266: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ :

$u_1=(1,0,1), u_2=(0,1,1), u_3=(0,0,1)$

Tìm ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ sang cơ sở B_0 của $\mathbb{R}^3$

ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ sang cơ sở B_0 của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_4&x_7\\x_2&x_5&x_8\\x_3&x_6&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=1,x_2=0,x_3=-1\\x_4=0,x_5=1,x_6=-1\\x_7=0,x_8=0,x_9=1\end{cases}$ .Vậy

ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ sang cơ sở B_0 của $\mathbb{R}^3$ là

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

267: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ :

$u_1=(1,0,0), u_2=(0,-1,0), u_3=(0,0,-1)$

$v_1=(1,0,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1)$

Tìm ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ sang cơ sở $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$

ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ sang cơ sở $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$

thỏa mãn $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_4&x_7\\x_2&x_5&x_8\\x_3&x_6&x_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}x_1=1,x_2=0,x_3=-1\\x_4=0,x_5=-1,x_6=-1\\x_7=0,x_8=0,x_9=-1\end{cases}$

Vậy ma trận trận chuyển cơ sở chính tắc $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ sang cơ sở $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ là $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$

268: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ :

$u_1=(1,0,0), u_2=(0,-1,0), u_3=(0,0,-1)$

$v_1=(1,0,1), v_2=(0,1,1), v_3=(0,0,1)$

Tìm ma trận chuyển cơ sở chính tắc $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ sang cơ sở $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$

trận chuyển cơ sở chính tắc $B_2=\{v_1,v_2,v_3\}$ sang cơ sở $B_1=\{u_1,u_2,u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1 \\ x_4 = 0, x_5 = -1, x_6 = 1 \\ x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = -1 \end{cases}$$

Vậy ma trận chuyển cơ sở chính tắc $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ sang cơ sở $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$

của $\mathbb{R}^3$ là $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

269: Cho ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_0 sang cơ sở chính tắc B của $\mathbb{R}^3$ là:

P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.Tìm toạ độ x_1, x_2, x_3 của vectơ u = (1, 0, 1) theo cơ sở B

Giải:

Tìm toạ độ x_1, x_2, x_3 của vectơ u = (1, 0, 1) theo cơ sở B có P là ma trận chuyển B_0 sang cơ sở chính tắc B của $\mathbb{R}^3$ ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc B về cơ sở B_0 là:

Q=P^{-1}= $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Toạ dộ mới của vectơ u = (1, 0, 1) trong cơ sở mới B:

$$|u|_B = \mathrm{P}^{-1}|u|_{B_o} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

270: Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm tọa độ x_1, x_2, x_3 của vectơ $u = (2,1,0)$ theo cơ sở B

Tìm toạ độ x_1, x_2, x_3 của vectơ u = (1, 0, 1) theo cơ sở B có P là ma trận chuyển B_0 sang cơ sở chính tắc B của $\mathbb{R}^3$ ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc B về cơ sở B_0 là:

$$Q = P^{-} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tọa độ mới của vectơ $u = (2,1,0)$ là $|u|_B = \mathrm{P}^{-1}|u|_{B_o} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

271: Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc B_0 sang cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm tọa độ mới của vectơ x_1, x_2, x_3 $u = (2,3,3)$ theo cơ sở

toạ độ x_1, x_2, x_3 của vectơ u = (1, 0, 1) theo cơ sở B có P là ma trận chuyển B_0 sang cơ sở chính tắc B của $\mathbb{R}^3$ ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc B về cơ sở B_0

là: $Q = P^{-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

tọa độ mới của vectơ x_1, x_2, x_3 $u = (2,3,3)$ là

$$|u|_B = \mathrm{P}^{-1}|u|_{B_o} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

272: Cho biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở B_2 của $\mathbb{R}^3$ là

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

và tọa độ của vectơ *u* theo cơ sở B_1 là $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.$ Tìm vectơ *u* theo cơ sở *B_2*.

toạ độ x_1, x_2, x_3 của vectơ u = (1, 0, 1) theo cơ sở B có P là ma trận chuyển B_0 sang cơ sở chính tắc B của $\mathbb{R}^3$ ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc B về cơ sở B_0

là: $Q = P^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

tọa độ mới của vectơ x_1, x_2, x_3 là $|u|_B = \mathrm{P}^{-1}|u|_{B_o} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1` \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

273: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,-1,0), u_3 = (0,0,-1)$

Biết ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B_1 sang cơ sở $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ là:

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ và toạ độ vectơ u theo cơ sở B_1 là x_1 =1, x_2 =-1, x_3 =0. Tìm vectơ u theo cơ sở B_2.

Giải:

$$P = \left[P_1.P_2\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} .\left[u_1 \quad u_2 \quad u_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}B$$

$$\to y = P^{-1}u = B^{-1}.Au = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to |u|_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3 Bài tập làm thêm

4.1 tìm m để vectơ $V=(1,m,-3)$ là tổ hợp tuyến tính của $U_1=(1,-2,3),U_2=(0,1,-3)$

Lâp phương trình mở rộng $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & m\\ 3 & -3 & -3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & m+2\\ 0 & -3 & -6\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & m+2\\ 0 & 0 & 3m\end{array}\right]$

để vectơ $V=(1,m,-3)$ là tổ hợp tuyến tính của $U_1=(1,-2,3),U_2=(0,1,-3)$ hệ có nghiệm khi m=0

4.9 tìm hạng của hệ vectơ $U_1=(-1,2,0,1),U_2=(1,2,3,-1),U_3=(0,4,3,0)$

Biểu thức lập hạng $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & 3 & 0\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 3 & -2\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 0\\ 2 & -4 & 0 & -2\end{vmatrix}\rightarrow r_A=3$

Chương 4:

Trị riêng – vecto riêng

4.1 Lý thuyết

- Trị riêng của ma trận A là ngiệm λ của phương trình: det(A- λ I) = 0
- Với mỗi trị riêng ta có các vecto riêng tương ứng là ngiệm không tầm thường của hệ phương trình: (A- λ I)X=0 (*)
    - (*) được gọi là phương trình đặc trưng của A
    - Vế trái của (*) gọi là đa thức đặc trưng của A

⇨ Các vecto riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính

Cách tìm trị riêng – vecto riêng

⇒ Lập phương trình det(A- λ I) = 0

⇒ Tìm trị riêng λ của ma trận A

⇒ Tìm các vecto riêng ứng với các trị riêng bằng cách giải tìm nghiệm không tầm thường của hệ (A- λ I)X=0

Chéo hóa ma trận vuông cấp n

Nếu ma trận vuông A có n trị riêng khác biệt thì có thể chéo hóa được

1. Cách chéo hóa ma trận vuông A cấp n

✓ Tìm các trị riêng λ của A

✓ Tương ứng với các trị riêng tìm các vecto riêng độc lập tuyến tính

✓ Lập ma trận vuông P có các cột là các vecto riêng độc lập tuyến tính

✓ Ma trận chéo D=P^{-1}AP có các trị riêng nằm trên đường chéo chính

2. Chéo hóa ma trận đối xứng bằng ma trận trực giao

Cho ma trận vuông A

- Ma trận vuông A được gọi là ma trận đối xứng nếu $A=A^T$
- Ma trận vuông A được gọi là ma trận trực giao nếu A không suy biến và $A^T=A^{-1}$

3. Tính chất ma trận trực giao

⇒ $|A| = 1,-1$

⇒ Tổng bình phương các phần tử trên mỗi dòng (cột) của A bằng 1

⇒ Tổng các tích của các phần tử nằm trên một dòng (cột) nhân với các phần tử tương úng trên một dòng (cột) khác bằng 0

=> Với mỗi ma trận đối xứng A luôn tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

4.2 Bài tập

274: Tìm đa thức đặc trưng của ma trận $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2$$

275: Tìm đa thức đặc trưng của ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là.

$$A-\lambda I\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=(\sqrt{6}3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}=(2-\lambda)(1+\lambda)^2$$

276: Tìm đa thức đặc trưng của ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Giải: Đa thức đặc trưng của ma trận A là.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -7 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

277: Tìm đa thức đặc trưng của ma trận

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là

$A-\lambda I=$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -7 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}=-\lambda(2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

278: Tìm giá trị riêng λ của ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-9$$

Vậy giá trị riêng λ thỏa $\lambda^2-9=0 \rightarrow \lambda=\pm 3$

279: Tìm giá trị riêng λ của ma trận $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Giải:

Có: $\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \text{del}\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$

Câu 280: Tìm giá trị riêng λ của ma trận $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$=(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)$

Vậy giá trị riêng λ thỏa $(3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-3)=0 \rightarrow \lambda=-1,\ \lambda=3$

281: Với giá trị nào của m thì vector $u=(m,m)$ là vector riêng của ma trận

$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-6$$

giá trị riêng λ thỏa $\lambda^2-6=0 \rightarrow \lambda=\pm\sqrt{6}$

Với $\lambda=\sqrt{6}$ thì $(A-\lambda I)X=\begin{pmatrix} -\sqrt{6} & 2 \\ 3 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}=0 \rightarrow m=0$

Tương tự ta có với $\lambda=-\sqrt{6}$ thì m=0

Vectơ riêng của ma trận là $u=(0,0)$

282: Với giá trị nào của m thì vector $u=(m,m,m)$ là vector riêng của ma trận

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^3$

giá trị riêng λ thỏa 5-λ =0$\rightarrow$ λ =5

Với λ =5 thì($A-\lambda I$)X=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ m \\ m \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ mtùy ý

283: Tìm các vectơ giá trị riêng ứng với trị riêng λ = -1 của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Giải:

Xét phương trình thuần nhất: $\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) X = 0$. Với λ = -1 thì ta có:

$\left(A + \mathrm{I}\right) X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

Vectơ riêng A ứng với λ = -1 là nghiệm không tầm thường của hệ

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$

Vậy vectơ riêng của A ứng vơi trị riêng λ = -1 là X=($(\alpha, -\alpha)$

284: Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng $\lambda = 2$ của ma trận $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Giải: vectơ riêng là nghiệm của hệ $(A - \lambda I)X = 0 \quad (X = (x_1, x_2))$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 25x_1 - 7x_2 = 0 \\ -7x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Vậy vectơ trị riêng $X = (0,0)$

285: Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng $\lambda = 0$ của ma

trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Xét phương trình thuần nhất: $\left(A - \lambda \mathrm{I}\right) X = 0$.Với $\lambda = 0$ ta có

$$\left(A+0\right)X=0\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

Vectơ riêng A ứng với $\lambda = 0$ là nghiệm không tầm thường của hệ

$$\begin{cases}2x_1=0\\0x_1+0x_2+0x_3=0\\0x_1+0x_2+0x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=\alpha\\x_3=\beta\end{cases}$$

Vậy vectơ riêng của A ứng vơi trị riêng $\lambda = 0$ là X=($(0,\alpha,\beta)$

286: Tìm các vector giá trị riêng ứng với trị riêng $\lambda=2$ của ma trận $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Giải: Vectơ trị riêng là nghiiệm của hệ $(A-\lambda I)X=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\-2x_2=0\\-2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\end{cases}$

Vậy vectơ trị riêng $X=(0,0,0)$

287: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}1&0\\m&0\end{pmatrix}$ với $m\in$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

a) A chéo hoá được khi và chỉ khi $m=0$
b) A không chéo hoá được khi và chỉ khi $m=0$
c) A chéo hóa được với mọi m
d) A chỉ có một trị riêng

Câu 288: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}0&-m\\m&0\end{pmatrix}$ với $m\in$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

a) A chéo hoá được khi và chỉ khi $m=0$
b) A không chéo hoá được khi và chỉ khi $m=0$
c) A chéo hóa được với mọi m
d) A không có một trị riêng nào
ta có giá trị riêng thỏa

$$A-\lambda I=0\rightarrow\begin{pmatrix}0&-m\\m&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=0\rightarrow\begin{pmatrix}-\lambda&-m\\m&-\lambda\end{pmatrix}=0\rightarrow\lambda^2+m^2$$

$=0\rightarrow\lambda=m=0$

Vậy d) A không có một trị riêng nào

289: Cho ma trận $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&2&b\\0&0&3\end{pmatrix}$ với a, b$\in$R

Giải:

Giá trị riêng λ của A:

$\det(A-\lambda I)=0$

$\Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=3, \lambda=1, \lambda=2$

$\Rightarrow$ A không chéo hoá được

290: Cho ma trận $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ với $a\in$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

a) A chéo hoá được khi và chỉ khi $a=0$

b) A chéo hoá được khi và chỉ khi $a=1$

c) A chéo hóa được với mọi a

d) A không chéo hóa được với mọi a

Giải: *xét*

$$A-\lambda I=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & a \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=0 \\ \lambda=1 \end{array}\right.$$

$\lambda=1$ (bội 2) $\Rightarrow$ A có 3 tri riêng. $\Rightarrow$ A chéo hóa được với mọi a

291: Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là $(1,2,1);(1,0,1);(1,0,0)$ lần lượt ứng với các trị riêng là 1,2và 3. Đặt $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

a) A được chéo hóa và $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) A được chéo hóa và $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) A được chéo hóa và $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Các khẳng định trên đều đúng.

Giải do A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là $(1,2,1);(1,0,1);(1,0,0)$ lần lượt ứng với các trị riêng là 1,2và 3.nên A chéo hóa được và

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Vậy d là đáp án đúng

292: Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là $(2,2,1);(1,1,1);(2,0,0)$ lần lượt ứng với các trị riêng là 3,2và 4. Ma trận P nào sau đây thỏa đẳng thức $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

$a)\ P=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&1\\2&0&0\end{pmatrix}$ b) $P=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

$c)P=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ d) $P=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$

Giải Do A là một ma trận vuông cấp 3 có 3 vector riêng là $(2,2,1);(1,1,1);(2,0,0)$ lần lượt ứng với các trị riêng là 3,2và 4 và

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix} \text{ nên } P=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&1&1\\2&0&0\end{pmatrix}$$

293: Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là: $\varphi(\lambda)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)$

Giải $\varphi(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=0,\lambda=2,\lambda=4 \Rightarrow A$ chéo hoá được $\Leftrightarrow$ A có 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính.

294: Giả sử A là một ma trận vuông cấp 3 có đa thức đặc trưng là $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$ Khẳng định nào sau đây đúng ?

Giải $\varphi(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)$ Ta có $\varphi(\lambda)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=2\\ \lambda=4\end{array}\right.$

Ma trận vuông cấp 3 có 2 trị riêng $\Rightarrow$ A không chéo hóa được

4.3 Bài tập làm thêm

Câu 5.1 tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Giá trị riêng λ thỏa mãn $A-\lambda I=0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

ứng với λ =1 thì X=(2α,2α ,α)
ứng với λ =-1 thì X=(α,0,- α)
ứng với λ =2 thì X=(0,0,0)