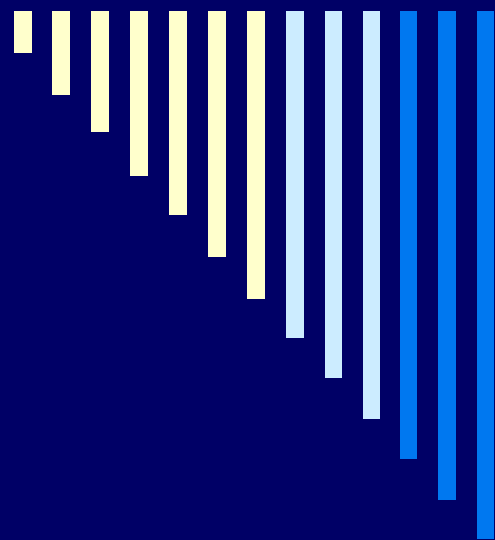
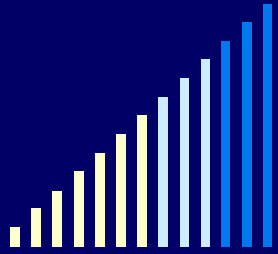


Chương 5



MÔ HÌNH HÀNG CHỜ



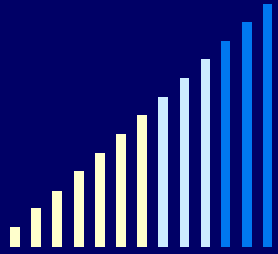
5.1. Dạng bài toán thường gặp trong kinh tế và phương hướng giải quyết

214

Trong sinh hoạt và các hoạt động sản xuất thường gặp nhiều hệ thống mang đặc trưng đám đông:

- ⊕ Nhà ga;
- ⊕ Bến xe;
- ⊕ Trạm bán xăng;
- ⊕ Các cửa hàng;
- ⊕ Các khách sạn...

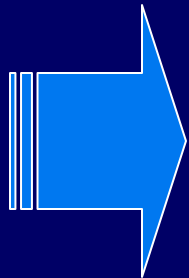
Có thể mô tả các hệ thống này thành những bài toán và tìm phương hướng giải quyết ?



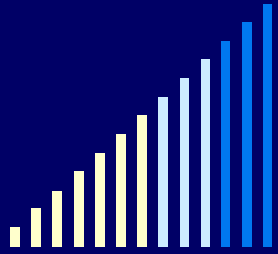
5.1.1. Bài toán

215

- ⊕ Trong hệ thống phục vụ thường diễn ra 2 quá trình:
 - ⊕ **Quá trình nảy sinh các yêu cầu**
 - ⊕ **Quá trình phục vụ các yêu cầu.**
 - ⊕ Hai tình trạng:
 - ⊕ **Khả năng phục vụ không đáp ứng yêu cầu**
 - ⊕ **Khả năng phục vụ của hệ thống vượt quá yêu cầu**
- ▶▶ Cả hai tình trạng trên đều gây nên thiệt hại về mặt kinh tế



Một bài toán đặt ra là phân tích bản chất của các quá trình diễn ra trong hệ thống và thiết lập mối quan hệ về lượng giữa các đặt trưng của các quá trình ấy để tính toán, phân tích và đưa ra quyết định nhằm điều khiển hệ thống hoạt động có hiệu quả.



5.1.2. Phương hướng chung để giải bài toán

216

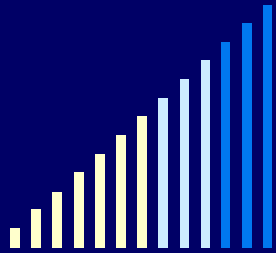
Đường lối chung của phương pháp giải gồm các bước:

Bước 1: Phân tích hệ thống mà chủ yếu là phân tích tính chất của dòng vào và các trạng thái của hệ thống;

Bước 2: Thiết lập hệ phương trình trạng thái để giải ra các xác suất trạng thái;

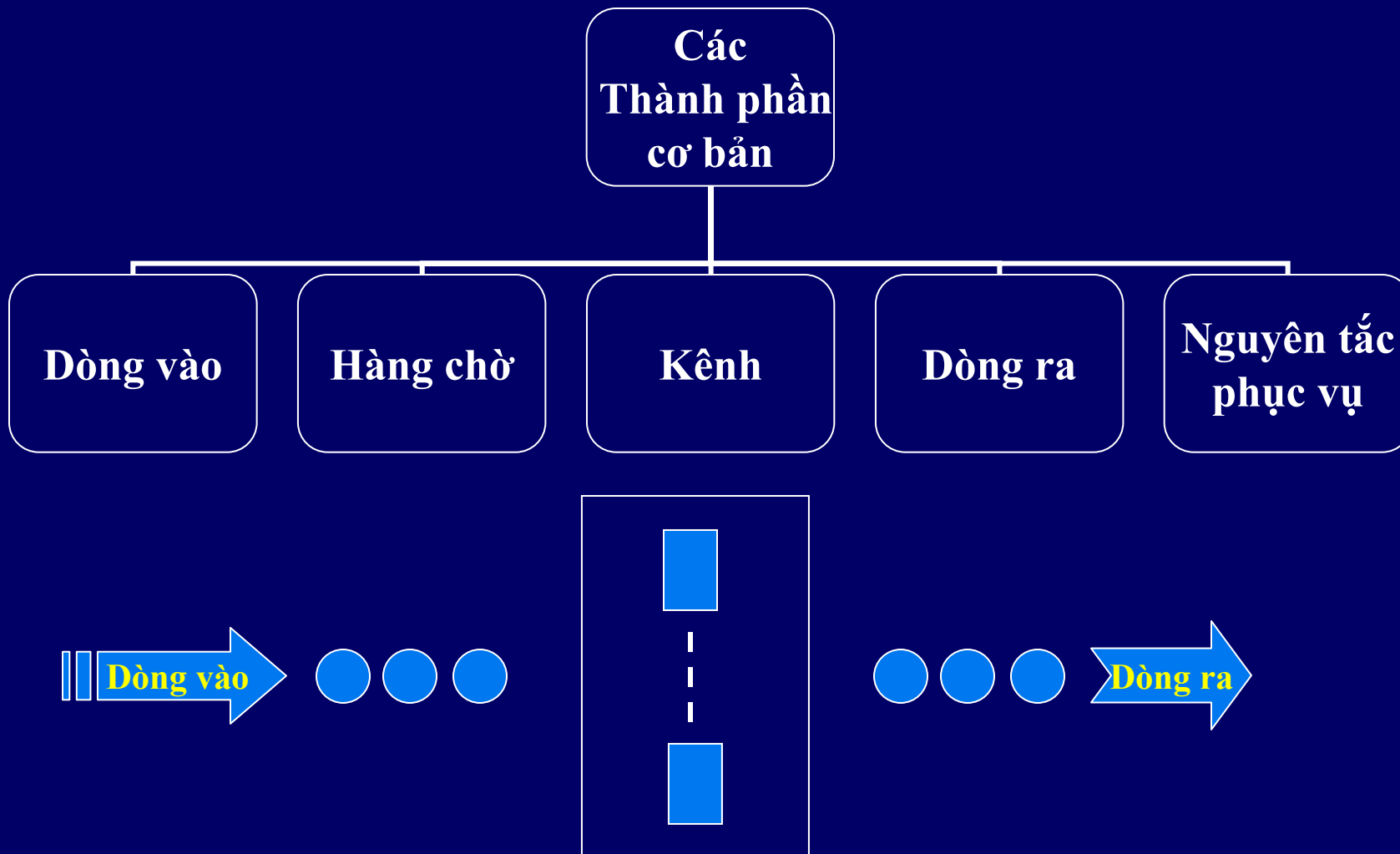
Bước 3: Giải hệ phương trình để tìm ra các xác suất trạng thái;

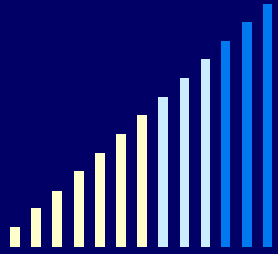
Bước 4: Tính toán, phân tích các chỉ tiêu, trên cơ sở đó đưa ra nhận xét và kết luận.



5.2. Các khái niệm cơ bản

217





Dòng yêu cầu đến hệ thống (dòng vào)

218

⊕ Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng các đối tượng đi đến hệ thống và đòi hỏi hệ thống phục vụ.

Ví dụ:

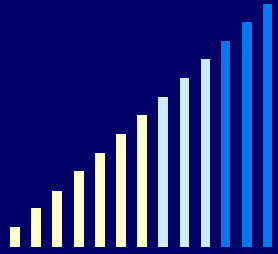
⊕ Dòng xe đến trạm xăng để mua xăng

⊕ Dòng khách đến nhà hàng để được phục vụ

⊕ Dòng tàu đến cảng để bốc dỡ hàng hoá...

⊕ Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng biến cố ngẫu nhiên và tuân theo những phân phối xác suất nhất định, như phân phối Poisson, phân phối Erlang, phân phối đều.

⊕ Trong kinh tế, các dòng vào thường tuân theo phân phối Poisson.



Dòng Poisson có 3 tính chất sau

219

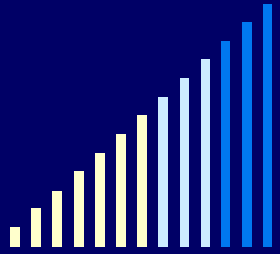
- ⊕ Không hậu quả
- ⊕ Đơn nhất
- ⊕ Dừng

Nếu dòng vào là dòng tới giản thì: $P_k(\tau) = \frac{e^{-a} a^k}{k!}$

Trong đó: $P_k(t)$: Xác suất trong khoảng thời gian t có k yêu cầu xuất hiện

K : số yêu cầu xuất hiện trong khoảng thời gian quan sát t

a : số yêu cầu trung bình xuất hiện trong từng khoảng thời gian quan sát τ .



Hàng chờ

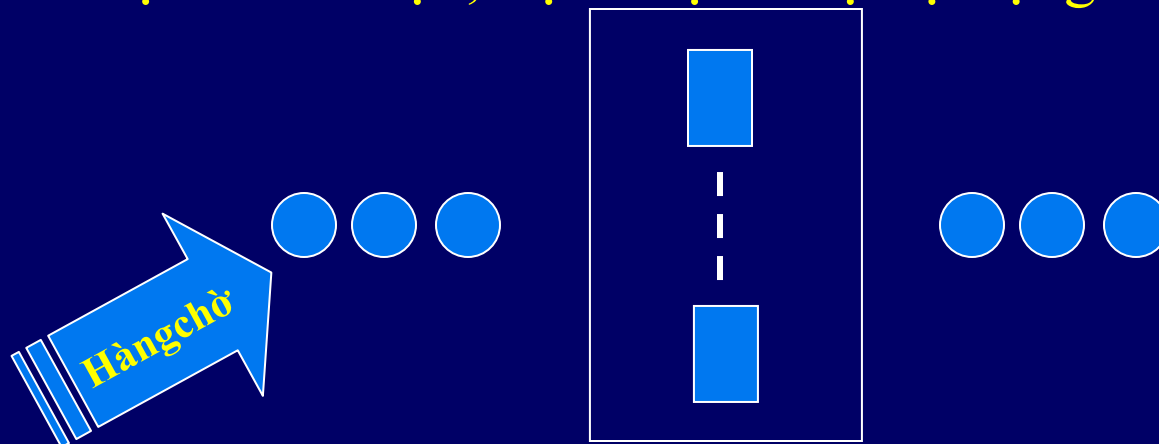
220

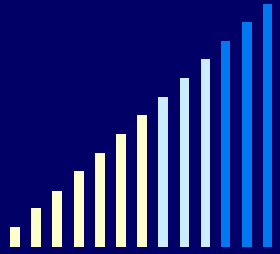
- ⊕ Là tập hợp các yêu cầu sắp xếp theo một trật tự nào đó để chờ được phục vụ.

Ví dụ: hàng người chờ mua vé, hàng người chờ công chứng...

- ⊕ Tuy nhiên, trong thực tế cũng có những hệ thống không có hàng chờ

Ví dụ: Khách sạn, trạm điện thoại tự động...

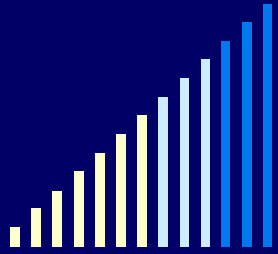




Kênh phục vụ

221

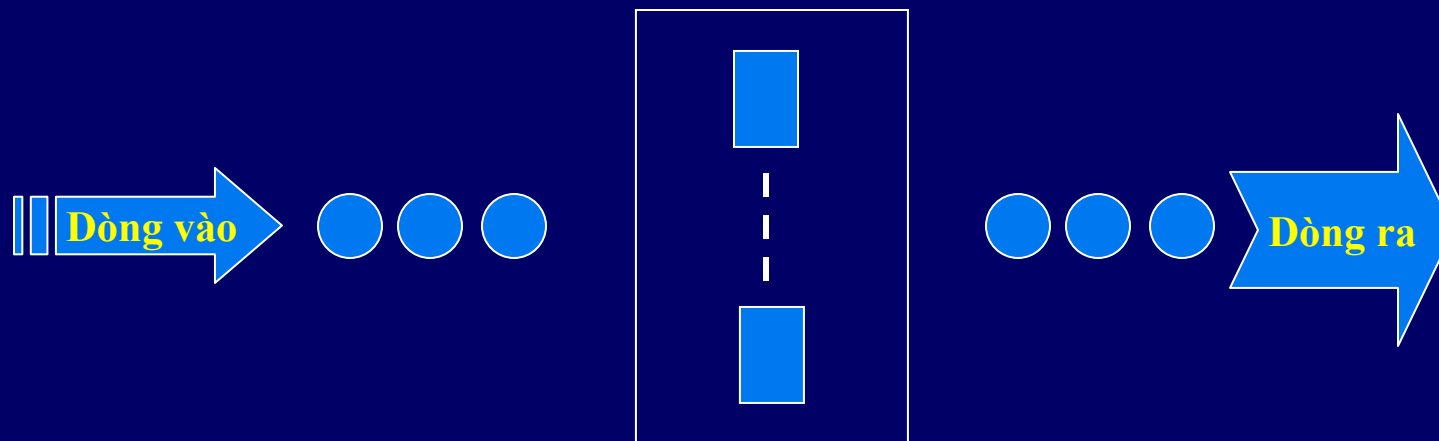
- ⊕ Kênh phục vụ là những thiết bị kỹ thuật, con người hoặc tổ hợp các thiết bị kỹ thuật và con người mà hệ thống dùng để phục vụ các yêu cầu đến hệ thống.
- ⊕ Một đặc trưng quan trọng nhất của các kênh phục vụ là thời gian phục vụ, đó là thời gian ít nhất mỗi kênh phải tiêu hao để phục vụ xong một yêu cầu. Nó là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo một qui luật phân phối xác suất nhất định trong đó qui luật phân phối mũ là phổ biến nhất.



Dòng ra

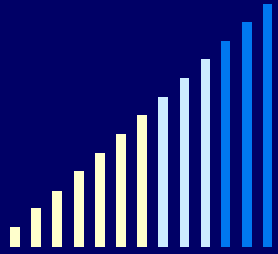
222

Là dòng các yêu cầu đi ra khỏi hệ thống bao gồm các yêu cầu đã được phục vụ và các yêu cầu bị từ chối.



Chú ý

Nếu hệ thống nhiều pha thì dòng ra của pha này sẽ trở thành dòng vào của pha khác



Nguyên tắc phục vụ của hệ thống

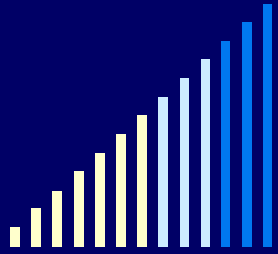
223

Đó là cách thức nhận các yêu cầu vào các kênh phục vụ. Nội dung nguyên tắc phục vụ:

- ⊕ Trường hợp nào thì các yêu cầu được nhận vào phục vụ;
- ⊕ Cách thức phân bố các yêu cầu vào các kênh như thế nào;
- ⊕ Trường hợp nào yêu cầu bị từ chối hoặc phải chờ và giới hạn cho phép của hàng chờ hoặc giới hạn của thời gian chờ.

Chú ý

Thường xét nguyên tắc phục vụ: đến trước phục vụ trước



5.3. Các điều kiện cần thiết để giải bài toán

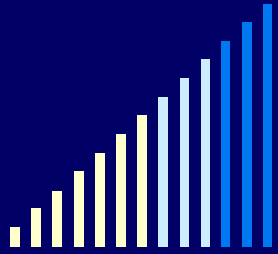
224

Mỗi bài toán có đặc thù riêng, dòng vào, dòng ra, thời gian phục vụ... tuân theo các phân phối khác nhau.

Chính vì vậy, không có công thức tính chung cho mọi bài toán mà phải có phương hướng giải quyết riêng.

Vấn đề đặt ra:

- ⊕ Tìm những điều kiện riêng, giả thiết riêng để thiết lập hệ công thức riêng cho từng bài toán.
- ⊕ Có thể đánh giá những giả thiết đó trong điều kiện cụ thể bằng những tiêu chuẩn nào?



5.3.1. Các điều kiện cần thiết để giải bài toán

225

- ⊕ **Điều kiện 1:** dòng vào hệ thống phải là dòng tối giản hoặc xấp xỉ tối giản.
- ⊕ **Điều kiện 2:** khoảng thời gian (T) giữa 2 lần xuất hiện liên tiếp các yêu cầu là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật hàm số mũ. Như vậy:

- ⊕ Hàm mật độ xác suất có dạng $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$

- ⊕ Hàm phân phối xác suất có dạng $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

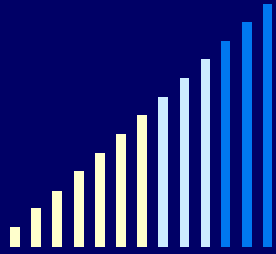
Với λ là cường độ dòng vào.

- ⊕ **Điều kiện 3:** Thời gian phục vụ của các kênh cũng là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật hàm số mũ. Như vậy:

- ⊕ Hàm mật độ xác suất có dạng $\varphi(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$

- ⊕ Hàm phân phối xác suất có dạng $\Phi(t) = 1 - e^{-\mu t}$

Với μ là năng suất phục vụ của các kênh.



5.3.2. Kiểm định dòng vào bằng tiêu chuẩn χ^2

226

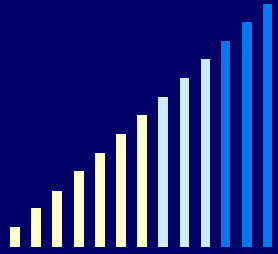
Bước 1: Xây dựng cặp giả thuyết:

⊕ H_0 : dòng vào là dòng Poisson

⊕ H_1 : dòng vào không phải là dòng Poisson

Bước 2: Phân khoảng thời gian dự định quan sát dòng yêu cầu đến hệ thống thành n khoảng thời gian nhỏ bằng nhau ($n \geq 50$) sau đó tiến hành quan sát số yêu cầu xuất hiện trong từng khoảng thời gian nhỏ ấy. Số liệu thu được trình bày như sau:

Số yêu cầu xuất hiện trong từng khoảng thời gian nhỏ (x_i)	x_1	x_2	x_3	...	x_m
Số khoảng thời gian có số yêu cầu xuất hiện tương ứng (n_i)	n_1	n_2	n_3	...	n_m



5.3.2. Kiểm định...

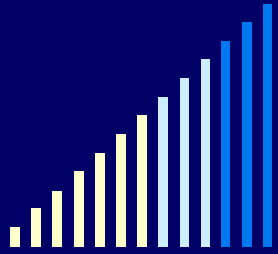
227

Tính giá trị quan sát của đại lượng ngẫu nhiên χ^2 theo công thức:

$$\chi_{qs}^2 = \sum_{i=1}^{m'} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

Trong đó:

- ⊕ n'_i là tần số lý thuyết tính theo công thức $n'_i = n \cdot p_{x_i}$, với p_{x_i} xác suất xuất hiện x_i yêu cầu được tính theo công thức Poisson $p_{x_i} = e^{-a} a^{x_i} / x_i!$, với a là số yêu cầu trung bình xuất hiện trong khoảng thời gian quan sát, $a = \sum x_i n_i / \sum n_i$
- ⊕ m' là số các giá trị quan sát đã được điều chỉnh theo yêu cầu các $n'_i \geq 5$.



5.3.2. Kiểm định...

228

Bước 3: Cho mức ý nghĩa α , sử dụng bảng phân bố χ^2 với mức ý nghĩa α và bậc tự do $(m'-2)$, chúng ta được $\chi^2_{(\alpha, m'-2)}$

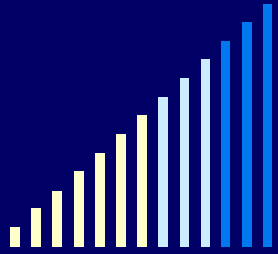
Bước 4: So sánh giá trị quan sát χ^2_{qs} và giá trị $\chi^2_{(\alpha, m'-2)}$.

Nếu $\chi^2_{qs} > \chi^2_{(\alpha, m'-2)}$.

Kết luận: Bác bỏ H_0 tức dòng yêu cầu đến hệ thống không phải là dòng Poisson với mức ý nghĩa α

Nếu $\chi^2_{qs} < \chi^2_{(\alpha, m'-2)}$

Kết luận: Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng Poisson với mức ý nghĩa α .



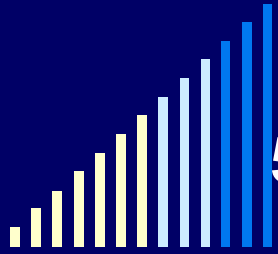
5.4. Quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái

229

Trong quá trình hoạt động, trạng thái của hệ thống luôn thay đổi.

Chính vì vậy:

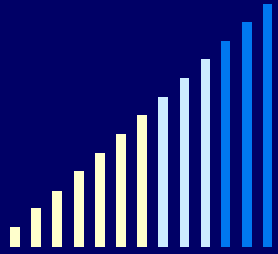
- ⊕ Cần phải mô tả quá trình thay đổi này bằng sơ đồ;
- ⊕ Hình thành quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái;
- ⊕ Tính toán các xác suất trạng thái.



5.4.1. Quá trình thay đổi trạng thái và sơ đồ trạng thái

230

- ⊕ Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống là quá trình thay đổi số kênh bận hay số yêu cầu có trong hệ thống.
- ⊕ Các trạng thái của quá trình được ký hiệu X_k (với $k=0, \dots, n$).
- ⊕ Quá trình thay đổi trạng thái của hệ thống có thể được thể hiện bằng một sơ đồ gọi là sơ đồ trạng thái.
- ⊕ Sơ đồ trạng thái của một hệ thống phục vụ gồm các hình chữ nhật tượng trưng cho các trạng thái có thể có của hệ thống và các mũi tên nối các hình chữ nhật tượng trưng cho các quá trình chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác của hệ thống. Trên các mũi tên có ghi cường độ của dòng yêu cầu tác động làm thay đổi các trạng thái của hệ thống.

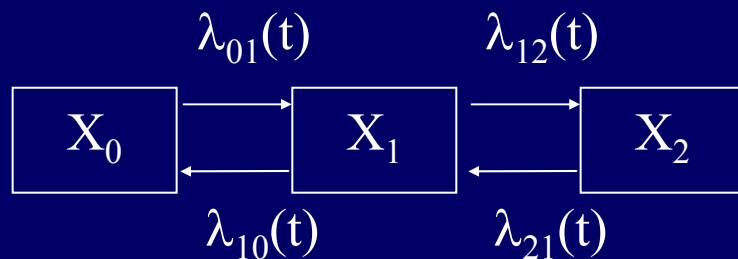


Ví dụ:

231

Một cửa hàng có 2 nhân viên bán hàng.

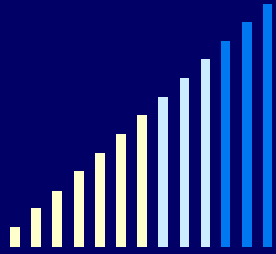
- ⊕ Nếu xét quá trình thay đổi trạng thái của cửa hàng là quá trình thay đổi số nhân viên bận, cửa hàng có 3 trạng thái:
 - ⊕ X_0 là trạng thái cửa hàng cả hai nhân viên rỗi,
 - ⊕ X_1 là trạng thái cửa hàng có 1 nhân viên bận,
 - ⊕ X_2 là trạng thái cửa hàng có 2 nhân viên bận.
- ⊕ Sơ đồ trạng thái của cửa hàng:



Trong đó:

$\lambda_{01}(t), \lambda_{12}(t)$: Là cường độ dòng khách hàng vào cửa hàng.

$\lambda_{10}(t), \lambda_{21}(t)$: Là cường độ phục vụ của cửa hàng.



5.4.2. Quy tắc thiết lập hệ phương trình trạng thái

232

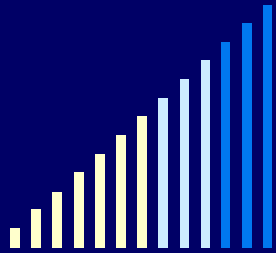
Quy tắc

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian của các xác suất trạng thái bằng tổng đại số của tích giữa cường độ dòng hướng theo mũi tên và xác suất trạng thái mà mũi tên xuất phát.

Gọi X_j và X_k là 2 trạng thái liên tiếp của hệ thống và X_k là trạng thái đang xét, qui ước như sau:

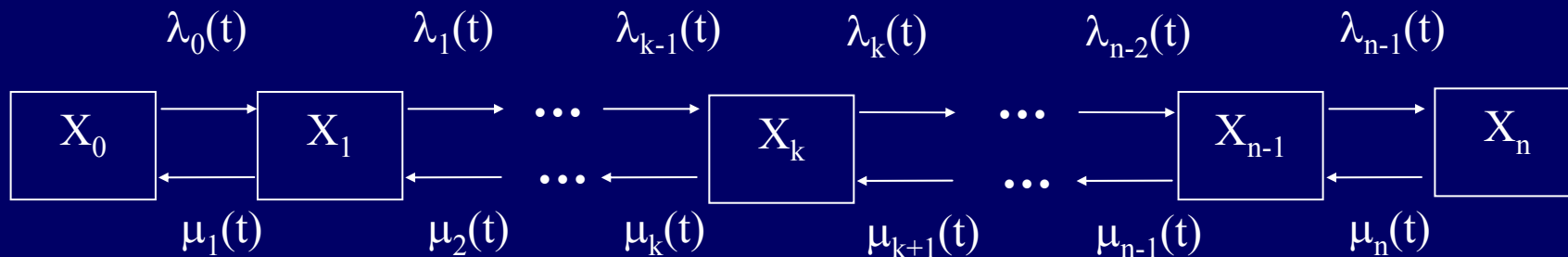
Hệ phương trình trạng thái

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{⊕ Việc chuyển từ trạng thái } X_j \text{ sang } X_k \text{ đại lượng tích mang dấu dương (+).} \\ \text{⊕ Việc chuyển từ trạng thái } X_k \text{ sang } X_j \text{ đại lượng tích mang dấu âm (-).} \end{array} \right. \begin{cases} p'_k(t) = \sum_{j \neq k} \lambda_{jk}(t) p_j(t) - \sum_{j \neq k} \lambda_{kj}(t) p_k(t) \\ \sum_{k=0}^n p_k(t) = 1 \end{cases}$$



5.4.3. Quá trình hủy và sinh

Sơ đồ trạng thái của quá trình hủy và sinh:

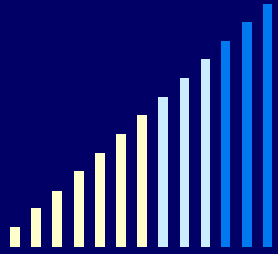


Trong đó:

- $\lambda_i(t)$ là cường độ dòng vào hệ thống;
- $\mu_j(t)$ là cường độ phục vụ của hệ thống.

Chú ý

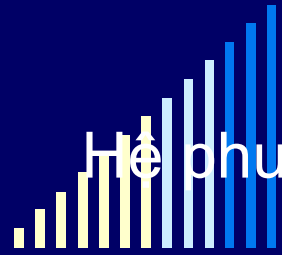
Các trạng thái đều có 4 mũi tên liên hệ trừ 2 trạng thái biên chỉ có 2 mũi tên.



5.4.3. Quá trình hủy và sinh

Hệ phương trình trạng thái của quá trình hủy và sinh

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p'_0(t) = -\lambda_0(t) \cdot p_0(t) + \mu_1(t) \cdot p_1(t) \\
 \text{M} \quad \text{M} \quad \text{M} \\
 p'_k(t) = \lambda_{k-1}(t) \cdot p_{k-1}(t) - \mu_k(t) \cdot p_k(t) - \lambda_k(t) \cdot p_k(t) + \mu_{k+1}(t) \cdot p_{k+1}(t) \quad k = \overline{1, n} \\
 \text{M} \quad \text{M} \quad \text{M} \\
 p'_n(t) = \lambda_{n-1}(t) \cdot p_{n-1}(t) - \mu_n(t) \cdot p_n(t) \\
 \sum_{k=0}^n p_k(t) = 1
 \end{array} \right.$$



Hệ phương trình trạng thái của quá trình hủy và sinh

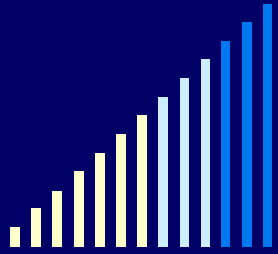
235

Với dòng tới giản thì $\lambda_k(t) = \lambda_k$, $\mu_k(t) = \mu_k$ và $P_k(t) = P_k$, vậy:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\ M \quad M \quad M \\ 0 = \lambda_{k-1} p_{k-1} - \mu_k p_k - \lambda_k p_k + \mu_{k+1} p_{k+1} \quad k = \overline{1, n} \\ M \quad M \quad M \\ 0 = \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n \\ \sum_{k=0}^n p_k = 1 \end{array} \right.$$



$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \quad p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

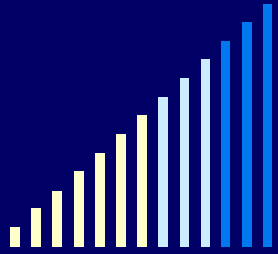


5.5. Một số bài toán thường gặp trong kinh tế

236

- ⊕ Trong kinh tế có rất nhiều hệ thống phục vụ mang đặc trưng đám đông nhưng có thể khái quát thành ba dạng sau:
 - ⊕ Hệ thống từ chối
 - ⊕ Hệ thống chờ tuần nhất
 - ⊕ Hệ thống chờ hạn chế

- ⊕ Mỗi hệ thống này có đặc trưng như thế nào và phân tích chúng bằng những chỉ tiêu nào?



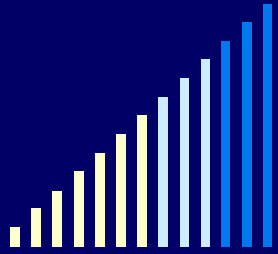
5.5.1. Hệ thống từ chối cổ điển éc- lăng

237

Trong thực tế sinh hoạt và hoạt động sản xuất , nhiều hệ thống thuộc hệ thống từ chối này.

Vậy,

- ⊕ Mô tả hệ thống này thành dạng tổng quát như thế nào?
- ⊕ Sơ đồ trạng thái và công thức tính các xác suất trạng thái ra sao?
- ⊕ Hệ thống chỉ tiêu phân tích gồm những chỉ tiêu gì?

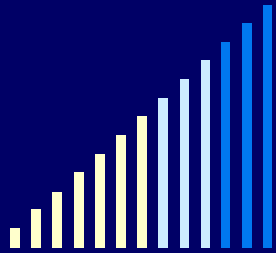


a. Bài toán

238

Một hệ thống có n kênh phục vụ, năng suất như nhau và bằng μ . Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tới giản với cường độ λ . Thời gian phục vụ của các kênh là đại lượng ngẫu nhiên tuân theo qui luật hàm số mũ với tham số μ . Hệ thống phục vụ theo nguyên tắc: mỗi một yêu cầu đến hệ thống nếu gặp lúc trong hệ thống có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ, ngược lại, mọi kênh đều bận thì bị từ chối và đi ra khỏi hệ thống.

Hãy thiết lập hệ thống chỉ tiêu để phân tích đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.



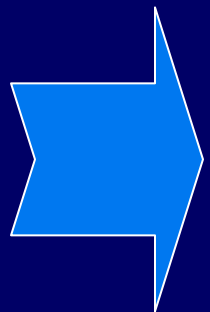
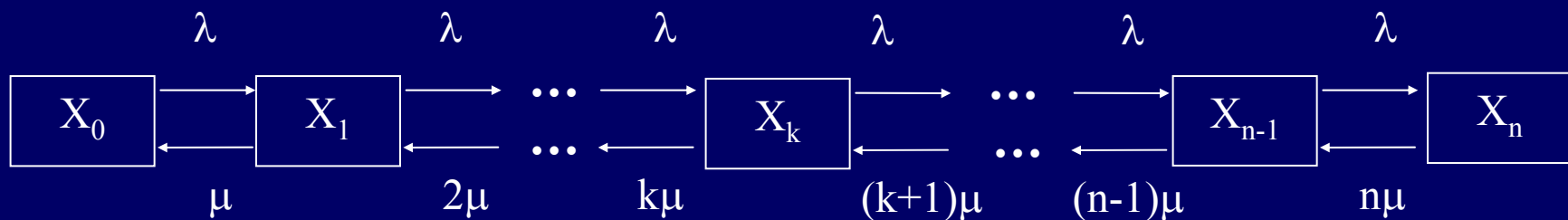
b. Sơ đồ trạng thái và xác suất trạng thái

239

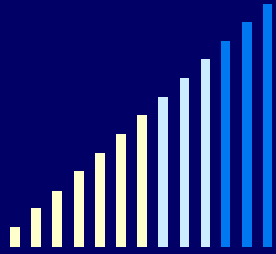
Theo giả thiết bài toán, hệ thống có các trạng thái sau:

- ⊕ X_0 là trạng thái trong hệ thống không có yêu cầu;
- ⊕ X_k ($k=1, \dots, n$) là trạng thái hệ thống có k kênh bận.

Sơ đồ trạng thái như sau:



$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \left(\alpha = \frac{\lambda}{\mu} \right) \quad p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}$$



c. Hệ thống chỉ tiêu phân tích tình hình hoạt động

240

01. Xác suất trong hệ thống không có yêu cầu (P_0)

Phản ánh khả năng để mọi kênh đều rỗi, đồng thời cho biết tỷ lệ thời gian mọi kênh đều rỗi so với toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

Công thức tính như sau:

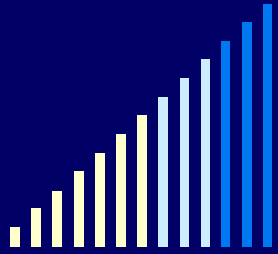
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}}$$

02. Xác suất từ chối yêu cầu (P_{tc})

Cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống bị từ chối so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

Công thức tính như sau:

$$p_{tc} = \frac{\alpha^n}{n!} p_0$$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

241

03. Xác suất phục vụ yêu cầu (P_v)

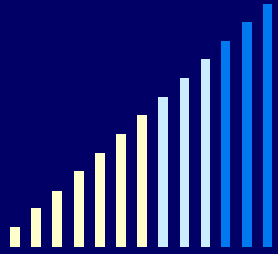
Cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống được nhận vào phục vụ, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống được phục vụ.

Công thức tính: $P_v = 1 - P_{tc}$

04. Số trung bình các kênh bận (L_b)

Cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh bận.

Công thức tính:
$$L_b = \sum_{k=0}^n k p_k = \alpha p_v$$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

242

05. Số trung bình các kênh rỗi (n_r)

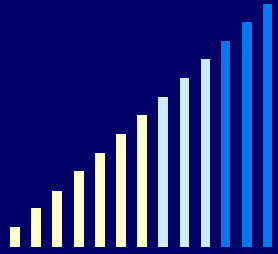
Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh không làm việc.

Công thức tính: $n_r = n - L_b$

06. Hệ số các kênh bận (K_b)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ số kênh của hệ thống được huy động để phục vụ các yêu cầu.

Công thức tính: $K_b = L_b / n$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

243

07. Hệ số kênh rỗi (K_r)

Cho biết tỷ lệ số kênh rỗi so với toàn bộ số kênh của hệ thống.

Công thức tính: $K_r = n_r / n$

08. Tổng chi phí và tổn thất (TC)

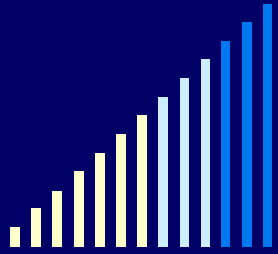
Cho biết toàn bộ chi phí cho các kênh làm việc, các kênh bận và tổn thất do các yêu cầu bị từ chối.

Công thức tính: $TC = T(L_b C_b + n_r C_r + \lambda p_{tc} C_{tc})$

Trong đó:

C_b, C_r là chi phí bình quân cho một kênh bận, kênh rỗi trong một đơn vị thời gian;

C_{tc} : tổn thất do từ chối một yêu cầu trong một đơn vị thời gian.



c. Hệ thống chỉ tiêu...

244

09. Doanh thu (D)

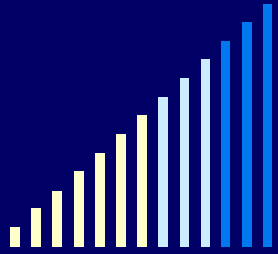
Phản ánh toàn bộ kết quả thu được do phục vụ các yêu cầu.

Công thức tính: $D = T \cdot \lambda \cdot P_v \cdot d$

10. Hiệu quả kinh tế (E)

Cho biết trong thời gian hoạt động sau khi đã trừ chi phí và tổn thất, hệ thống còn thu được một lượng giá trị là bao nhiêu.

Công thức tính: $E = D - TC$



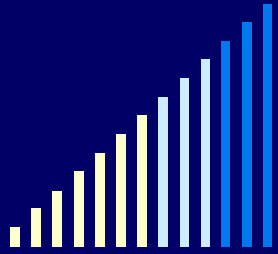
Ví dụ

245

- ⊕ Một trạm điện thoại tự động có khả năng phục vụ đồng thời 6 yêu cầu đàm thoại. Trung bình một cuộc đàm thoại mất 1.5 phút. Dòng yêu cầu đàm thoại đến trạm giả thiết là dòng tối giản có cường độ với 4 yêu cầu mỗi phút.
 - ⊕ **Hãy xây dựng hệ thống chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của trạm.**

Giải

- ⊕ Trạm điện thoại được xem như hệ thống từ chối cổ điển.
- ⊕ Cường độ dòng vào là $\lambda=4$ yêu cầu/phút
- ⊕ Năng suất phục vụ là $\mu=1/w_b = 1/1,5$ yêu cầu/phút
- ⊕ Như vậy, $\alpha=\lambda/\mu = 6$



Ví dụ

246

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^6 \frac{6^k}{k!}} = \frac{1}{244,6} = 0,0041$$

$$p_{tc} = \frac{\alpha^n}{n!} p_0 = \frac{6^6}{6!} 0,0041 = 0,265$$

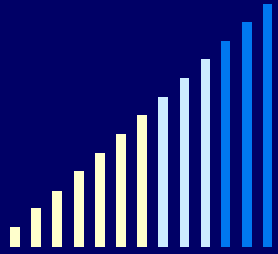
$$P_v = 1 - p_{tc} = 1 - 0,265 = 0,735$$

$$L_b = \alpha p_v = 6 \times 0,735 = 4,41$$

$$n_r = n - L_b = 6 - 4,41 = 1,59$$

$$K_b = L_b / n = 4,41 / 6 = 0,735 \text{ hay } 73,5\%$$

$$K_r = 100 - K_b = 26,5\%$$



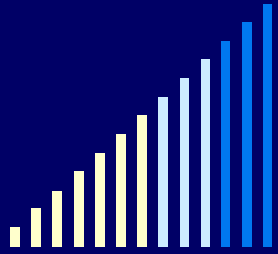
5.5.2. Hệ thống chờ thuần nhất

247

Trong thực tế sinh hoạt và hoạt động sản xuất , nhiều hệ thống thuộc hệ thống chờ thuần nhất này.

Vậy,

- ⊕ Mô tả hệ thống này thành dạng tổng quát như thế nào?
- ⊕ Sơ đồ trạng thái và công thức tính các xác suất trạng thái ra sao?
- ⊕ Hệ thống chỉ tiêu phân tích gồm những chỉ tiêu gì?

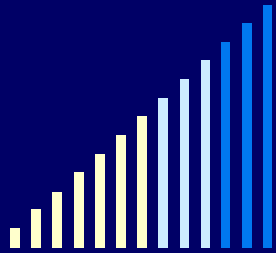


a. Bài toán

248

Một hệ thống có n kênh phục vụ, năng suất như nhau và bằng μ . Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tối giản với cường độ λ . Thời gian phục vụ của các kênh tuân theo qui luật hàm số mũ với tham số μ . Hệ thống phục vụ theo nguyên tắc: mỗi một yêu cầu đến hệ thống nếu gặp lúc trong hệ thống có ít nhất một kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ. Ngược lại nếu mọi kênh đều bận thì phải xếp hàng chờ cho đến khi có ít nhất 1 kênh được giải phóng thì được nhận vào phục vụ tại một kênh bất kỳ (thời gian chờ và độ dài hàng chờ không hạn chế).

Hãy xây dựng hệ thống chỉ tiêu phân tích, đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.

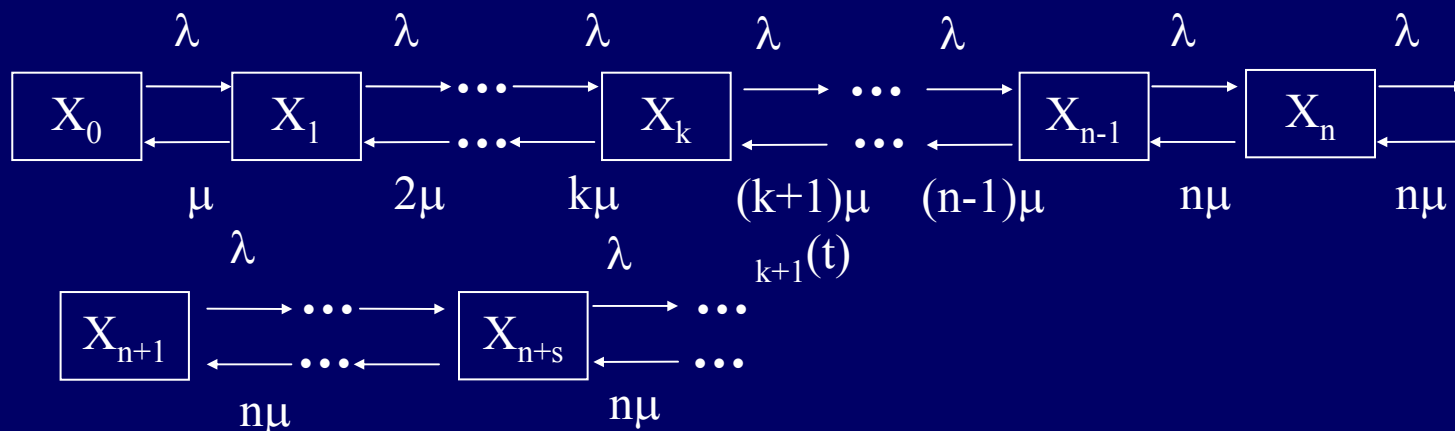


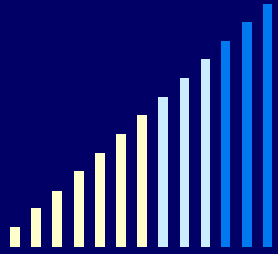
b. Sơ đồ trạng thái và các xác suất trạng thái

249

Theo giả thiết bài toán, hệ thống có các trạng thái sau:

- ⊕ X_k ($k=0\dots n$) là trạng thái hệ thống có k yêu cầu (cũng chính là trạng thái có k kênh bận).
- ⊕ X_{n+s} ($s=1,2\dots$) là trạng thái trong hệ thống có n yêu cầu đang được phục vụ và s yêu cầu chờ.
- ⊕ Sơ đồ trạng thái:





b. Sơ đồ trạng thái và các xác suất trạng thái

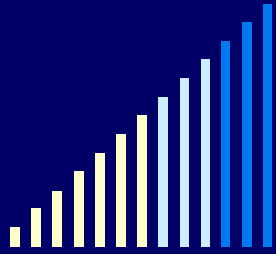
250

Công thức tính các xác suất trạng thái

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \forall k = \overline{1, n}$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0 \quad \forall s = 1, 2, \dots$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} \quad \left(\frac{\alpha}{n} < 1 \right)$$



c. Hệ thống chỉ tiêu phân tích tình hình hoạt động

251

01. Xác suất trong hệ thống không có yêu cầu (P_0)

Chỉ tiêu phản ánh khả năng để mọi kênh của hệ thống đều rỗi, đồng thời cho biết tỷ lệ thời gian mọi kênh đều rỗi so với toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

Công thức tính:

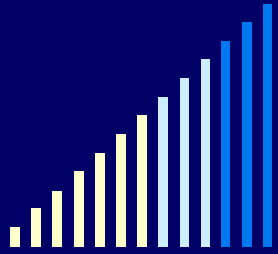
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}}$$

02. Xác suất chờ của các yêu cầu (P_w)

Chỉ tiêu này cho biết một yêu cầu đến hệ thống phải chờ là bao nhiêu. Đồng thời cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống phải chờ so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

Công thức tính:

$$p_q = \sum_{s=0}^{\infty} p_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!(1 - \frac{\alpha}{n})} p_0$$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

252

03. Số trung bình các yêu cầu chờ (L_q)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu yêu cầu phải chờ .

Công thức tính:

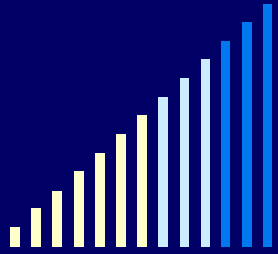
$$L_q = \frac{\alpha}{(n - \alpha)} p_q$$

04. Thời gian chờ trung bình (W_q)

Chỉ tiêu này cho biết một yêu cầu đến hệ thống nếu phải chờ thì trung bình chờ mất bao nhiêu thời gian.

Công thức tính:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

253

05. Số trung bình các kênh bận (L_b)

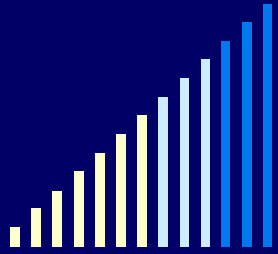
Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh làm việc.

Công thức tính: $L_b = \alpha P_v = \alpha$

06. Số trung bình các kênh rỗi (n_r)

Chỉ tiêu này cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh không làm việc.

Công thức tính: $n_r = n - L_b$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

254

07. Hệ số các kênh bận (K_b)

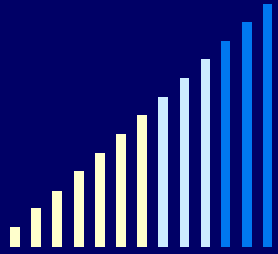
Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ số kênh của hệ thống được huy động để phục vụ các yêu cầu.

Công thức tính: $K_b = L_b/n$

08. Hệ số kênh rỗi (K_r)

Chỉ tiêu này cho biết tỷ lệ số kênh của hệ thống không được huy động để phục vụ các yêu cầu.

Công thức tính: $K_r = n_r/n$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

255

09. Tổng chi phí và tổn thất (TC)

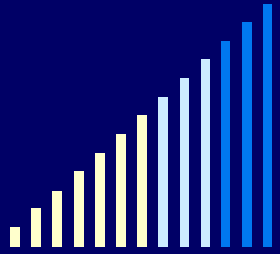
Chỉ tiêu này cho biết tổng chi phí cho hoạt động phục vụ của các kênh làm việc, chi phí cho các kênh không làm việc và tổn thất do các yêu cầu chờ.

Công thức tính: $TC = T(L_b C_b + n_r C_r + L_q C_q)$

10. Doanh thu (D)

Chỉ tiêu này phản ánh kết quả thu được của hệ thống trong toàn bộ thời gian hoạt động.

Công thức tính: $D = T \cdot \lambda \cdot P_v \cdot d = T \cdot \lambda \cdot d$



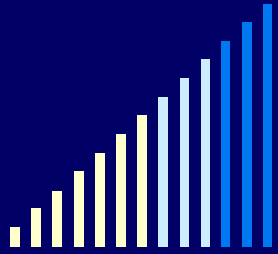
c. Hệ thống chỉ tiêu...

256

11. Hiệu quả kinh tế (E)

Chỉ tiêu này cho biết trong thời gian hoạt động sau khi đã trừ chi phí và tổn thất, hệ thống còn thu được một lượng giá trị là bao nhiêu.

Công thức tính: $E = D - TC$



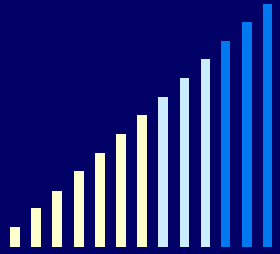
d. Ví dụ

257

Một bến cảng có 5 cầu xếp dỡ hàng hóa. Dòng các tàu đến cảng là dòng tối giản, trung bình trong một tháng có 20 tàu cập bến. Thời gian bốc dỡ xong một tàu là đại lượng ngẫu nhiên và trung bình mỗi tàu mất 6 ngày.

Hãy đánh giá tình hình phục vụ của bến cảng và cho biết nên tăng số cầu bốc dỡ của bến cảng lên bao nhiêu để tổng chi phí và tổn thất của bến cảng là nhỏ nhất. Cho biết:

- Chi phí cho 1 cầu xếp dỡ hàng làm việc là 1 triệu đồng/tháng.
- Nếu 1 cầu xếp dỡ không làm việc trong 1 tháng thì bến cảng sẽ thiệt hại 1 triệu đồng.
- Chi phí cho một tàu chờ 1 triệu đồng/tháng

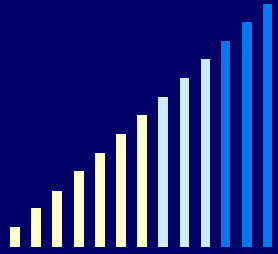


Ví dụ

258

⊕ Giải

- ⊕ Ta có thể coi bến cảng là một hệ thống chờ thuần nhất với số kênh $n=5$
- ⊕ $\lambda=20$ tàu/tháng; $W_b=6$ ngày/tàu; $\mu=30/6=5$ tàu/tháng. Vậy:
- ⊕ $\alpha=\lambda/\mu=20/5=4$
- ⊕ Kiểm tra điều kiện: $\alpha/n=4/5<1$



Ví dụ

259

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^5 \frac{4^k}{k!} + \frac{4^6}{5!(5-4)}} = 0.013$$

$$P_q = \frac{\alpha^n}{n! \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)} P_0 = \frac{4^5}{5! \left(1 - \frac{4}{5}\right)} 0.013 = 0.555$$

$$L_q = \frac{\alpha}{n-\alpha} \cdot P_q = \frac{4}{5-4} \cdot 0.555 = 2.2$$

$$W_q = L_q / \lambda = 2.2 / 20 = 0.1108 \text{ tháng } (\approx 3.3 \text{ ngày})$$

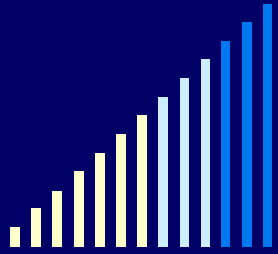
$$L_b = \alpha = 4$$

$$n_r = n - \alpha = 5 - 4 = 1$$

$$K_b = L_b / n = 4 / 5 = 0.8 \text{ hay } 80\%$$

$$K_r = n_r / n = 1 / 5 = 0.2 \text{ hay } 20\%$$

$$TC = T(L_b C_b + n_r C_r + L_q C_q) = (4 \times 1 + 1 \times 1 + 2.2 \times 1) = 7.2 \text{ (triệu đồng)}$$



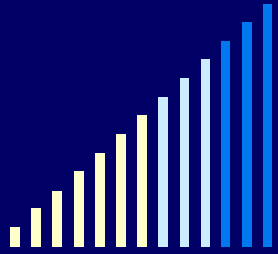
5.5.3. Hệ thống chờ hạn chế

260

Trong thực tế sinh hoạt và hoạt động sản xuất , nhiều hệ thống thuộc hệ thống chờ hạn chế này.

Vậy,

- ⊕ Mô tả hệ thống này thành dạng tổng quát như thế nào?
- ⊕ Sơ đồ trạng thái và công thức tính các xác suất trạng thái ra sao?
- ⊕ Hệ thống chỉ tiêu phân tích gồm những chỉ tiêu gì?



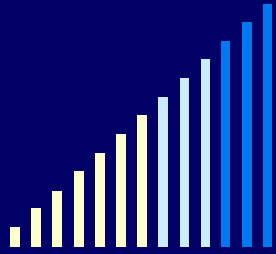
a. Bài toán

261

Một hệ thống có n kênh phục vụ, năng suất như nhau và bằng μ , thời gian phục vụ của các kênh tuân theo qui luật hàm số mũ với tham số μ . Dòng yêu cầu đến hệ thống là dòng tới giản với cường độ λ . Hệ thống phục vụ theo nguyên tắc: Mỗi một yêu cầu đến hệ thống nếu gặp lúc trong hệ thống có ít nhất 1 kênh rỗi thì được nhận vào phục vụ, ngược lại nếu gặp lúc tất cả các kênh đều bận thì sẽ xảy ra 2 trường hợp:

Nếu trong hệ thống số yêu cầu chờ còn ít hơn số yêu cầu chờ cho phép (m) thì yêu cầu đó được xếp hàng chờ tiếp theo. Nếu trong hệ thống số yêu cầu chờ đã đủ (bằng m) thì yêu cầu đó bị từ chối và ra khỏi hệ thống.

Hãy xây dựng hệ thống chỉ tiêu đánh giá tình hình hoạt động của hệ thống.

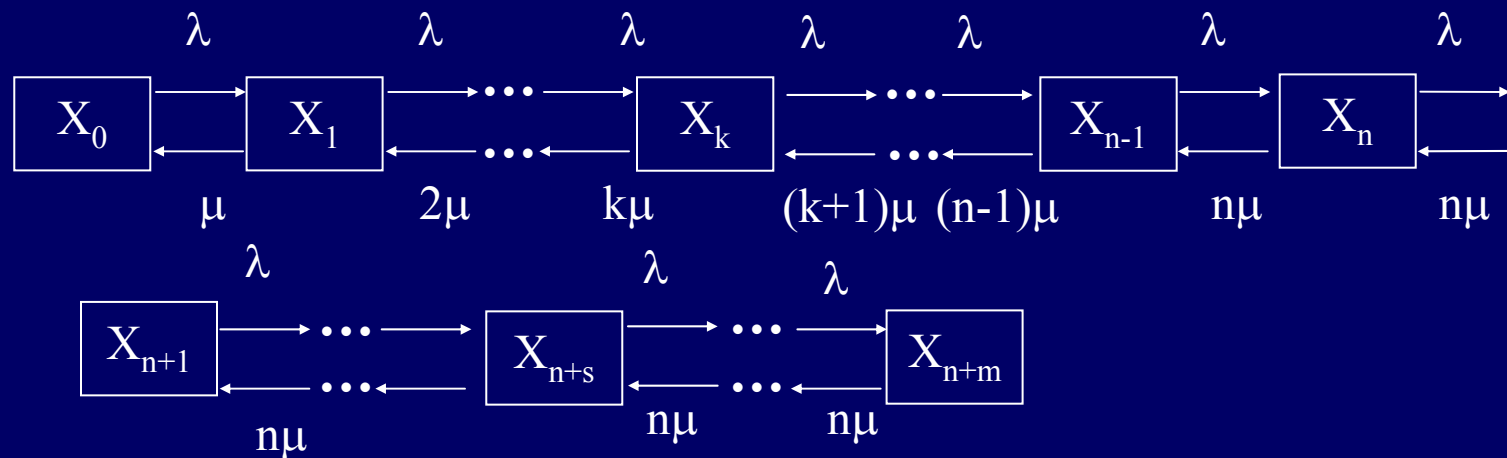


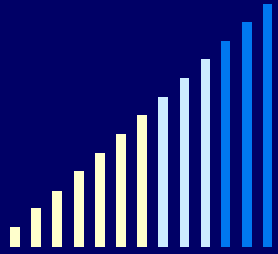
b. Sơ đồ trạng thái và các xác suất trạng thái

262

Theo giả thiết bài toán, hệ thống có các trạng thái sau:

- ⊕ X_k ($\forall k=0\dots n$) là trạng thái hệ thống có k yêu cầu;
- ⊕ X_{n+s} ($\forall s=1\dots m$) là trạng thái trong hệ thống có n yêu cầu đang được phục vụ và s yêu cầu chờ.
- ⊕ Sơ đồ trạng thái:





b. Sơ đồ trạng thái và các xác suất trạng thái

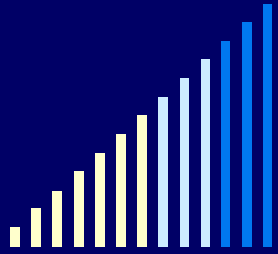
263

Công thức tính các xác suất trạng thái

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad \forall k = \overline{1, n}$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} p_0 \quad \forall s = 1, 2, \dots$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n} \right)^s}$$



c. Hệ thống chỉ tiêu phân tích tình hình hoạt động

264

01. Xác suất trong hệ thống không có yêu cầu (P_0)

Phản ánh khả năng để mọi kênh của hệ thống đều rỗi, đồng thời cho biết tỷ lệ thời gian mọi kênh đều rỗi so với toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

Công thức tính như sau:

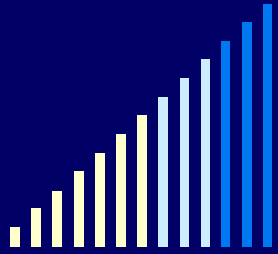
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}$$

02. Xác suất từ chối yêu cầu (P_{tc})

Cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống bị từ chối, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống bị từ chối so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

Công thức tính như sau:

$$p_{tc} = \frac{\alpha^{n+m}}{n!n^m} p_0$$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

265

03. Xác suất phục vụ yêu cầu (P_v)

Cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống được nhận vào phục vụ, đồng thời còn cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống được phục vụ.

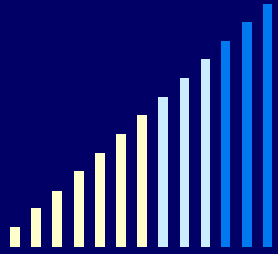
Công thức tính: $P_v = 1 - P_{tc}$

04. Xác suất chờ của yêu cầu (P_q)

Cho biết khả năng một yêu cầu đến hệ thống phải chờ, đồng thời cho biết tỷ lệ số yêu cầu đến hệ thống phải chờ so với toàn bộ số yêu cầu đến hệ thống.

Công thức tính:

$$P_q = \sum_{s=0}^{m-1} P_{n+s}$$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

266

05. Số trung bình các yêu cầu chờ (L_q)

Cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu yêu cầu phải chờ.

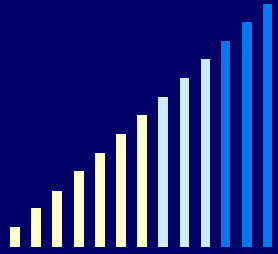
Công thức tính:

$$L_q = \sum_{s=1}^m s p_{n+s}$$

06. Số trung bình các kênh bận (L_b)

Cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh bận.

Công thức tính: $L_b = \alpha p_v$



c. Hệ thống chỉ tiêu ...

267

07. Số trung bình các kênh rỗi (n_r)

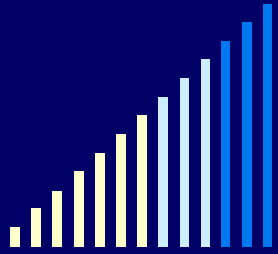
Cho biết trong hệ thống trung bình có bao nhiêu kênh rỗi.

Công thức tính: $n_r = n - L_b$

08. Số trung bình các yêu cầu lưu lại trong hệ thống (L)

Cho biết trung bình có bao nhiêu yêu cầu lưu lại trong hệ thống.

Công thức tính: $L = L_b + L_q$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

268

09. Thời gian chờ trung bình (W_q)

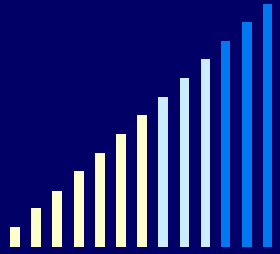
Cho biết thời gian trung bình mỗi yêu cầu phải chờ.

Công thức tính: $W_q = L_q / \lambda$

10. Thời gian trung bình các yêu cầu lưu lại trong hệ thống (W)

Cho biết thời gian trung bình một yêu cầu phải lưu lại trong hệ thống, nó bao gồm thời gian chờ và thời gian phục vụ.

Công thức tính: $W = W_q + W_b$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

269

11. Hệ số các kênh bận (K_b)

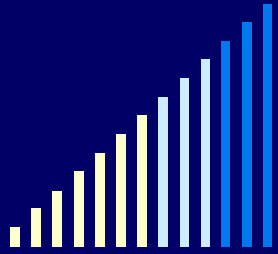
Cho biết tỷ lệ số kênh bận so với toàn bộ các kênh của hệ thống.

Công thức tính: $K_b = L_b/n$

12. Hệ số kênh rỗi (K_r)

Cho biết tỷ lệ số kênh rỗi so với toàn bộ các kênh của hệ thống.

Công thức tính: $K_r = n_r/n$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

270

13. Năng lực phục vụ thực tế của hệ thống (Q)

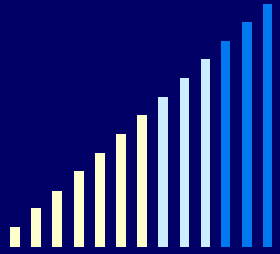
Cho biết trung bình trong một đơn vị thời gian, hệ thống phục vụ được bao nhiêu yêu cầu.

Công thức tính: $Q = \lambda P_v$

14. Tổng chi phí và tổn thất (TC)

Cho biết tổng chi phí cho các kênh làm việc, các kênh không làm việc, cho các yêu cầu chờ và tổn thất do từ chối các yêu cầu.

Công thức tính: $TC = T(L_b C_b + n_r C_r + L_q C_q + \lambda P_{tc} C_{tc})$



c. Hệ thống chỉ tiêu...

271

15. Doanh thu (D)

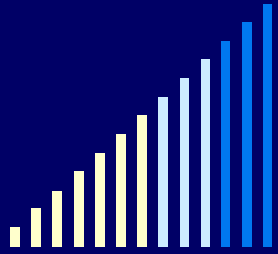
Phản ánh toàn bộ kết quả thu được do phục vụ các yêu cầu.

Công thức tính: $D = T \cdot \lambda \cdot P_v \cdot d$

16. Hiệu quả kinh tế (E)

Cho biết kết quả cuối cùng của hệ thống trong toàn bộ thời gian hoạt động của hệ thống.

Công thức tính: $E = D - TC$



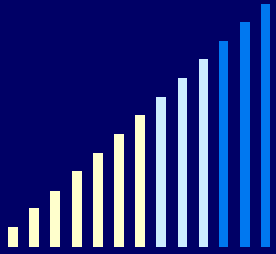
d. Ví dụ

272

Một trạm sữa chữa máy nông nghiệp có một căn nhà chứa được một máy đang sửa chữa và một sân có diện tích chứa được 3 máy chờ. Biết rằng trạm sữa chữa xong một máy trung bình mất 2 ngày và trung bình 2 ngày có một máy đến trạm sữa chữa. Nguyên tắc phục vụ của trạm là nguyên tắc phục vụ của hệ thống chờ với độ dài hàng chờ hạn chế.

Yêu cầu:

- Hãy đánh giá tình hình phục vụ của trạm;
- Giả sử tăng thêm 1 dây chuyền sữa chữa nữa thì tình hình phục vụ của trạm như thế nào. Biết rằng năng suất phục vụ và cường độ dòng vào không đổi.



Ví dụ

273

$n=1$; $m=3$; $w_b=2$ ngày/máy; $\lambda=0,5$ máy/ngày . Vậy $\alpha=\lambda/\mu=1$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s} = \frac{1}{\sum_{k=0}^1 \frac{1^k}{k!} + \frac{1^1}{1!} \cdot \sum_{s=1}^3 \left(\frac{1}{1}\right)^s} = 0.2$$

$$P_{tc} = P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n! \cdot n^m} \cdot P_0 = \frac{1}{1! \cdot 1} \cdot 0,2 = 0,2$$

$$P_v = 1 - P_{tc} = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$P_w = P_0 \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{m-1} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = 0,2 \cdot \frac{1^1}{1!} \cdot \sum_{s=0}^2 \left(\frac{1}{1}\right)^s = 0.6$$

$$L_q = P_0 \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{s=1}^m s \cdot \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s = 0,2 \cdot \frac{1^1}{1!} \cdot \sum_{s=1}^3 s \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^s = 1.2$$

$$L = L_q + L_b = 1.2 + 0.8 = 2; \quad W_q = L_q / \lambda = 1.2 / 0.5 = 2.4; \quad Q = \lambda P_v = 0,5 \times 0,8 = 0,4 \text{ máy}$$