TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ SÀI GÒN

BAN KHOA HỌC CƠ BẢN

BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG

TOÁN CAO CẤP C1

(HỆ ĐẠI HỌC)

Biên soạn: TS TRẦN NGỌC HỘI

TP HỒ CHÍ MINH – 2009

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Lời nói đầu

Tập bài giảng Toán cao cấp C1 (Hệ đại học) được biên soạn trên cơ sở đề cương môn học của Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn; nhằm đáp ứng yêu cầu nâng cao chất lượng giảng dạy trong giai đoạn nhà trường thực hiện đào tạo theo học chế tín chỉ.

Tập bài giảng này chứa đựng nội dung mà tác giả đã giảng dạy ở Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn và các trường đại học khác. Tác giả bày tỏ lòng cảm ơn đối với các đồng nghiệp ở Ban Khoa học Cơ bản - Trường Đại học Công Nghệ Sài Gòn đã động viên, đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho việc biên soạn.

Tuy vậy, thiếu sót vẫn không thể tránh khỏi. Tác giả rất mong nhận được những nhận xét góp ý của quý đồng nghiệp cho tập bài giảng này và xin chân thành cám ơn.

Tp. Hồ Chí Minh, tháng 09 năm 2009

Tác giả

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

CHƯƠNG 2. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

CHƯƠNG 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A. HÀM SỐ

1. HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

1.1. Hàm lũy thừa $y = x^\alpha$ (α : Const)

Miền xác định D của hàm số $y = x^\alpha$ phụ thuộc vào α. Trường hợp α là số vô tỉ, ta có $D = [0; +\infty)$ nếu $\alpha > 0$; $D = (0; +\infty)$ nếu $\alpha < 0$.

1.2. Hàm số mũ: $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$: Const)

Hàm số $y = a^x$ có miền xác định D = **R**, miền giá trị là $(0; +\infty)$.

1.3. Hàm số logarit: $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$: Const)

Hàm số $y = \log_a x$ có miền xác định $D = (0; +\infty)$, miền giá trị là **R**. Nhắc lại một số công thức:

Với $0 < a, b \neq 1$; $x, x_1, x_2 > 0$ và $y, \alpha \in R$, ta có:

1) $\begin{cases} y = \log_a x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = a^y$. Đặc biệt, $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$.

2) $a^{\log_a x} = x$.

3) $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$.

4) $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$.

Đặc biệt, $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$.

5) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$.

6) $\log_{a^\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha} \log_a(x)$ $(\alpha \neq 0)$.

7) $\log_a x = \log_a b . \log_b x$;

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

8) $\ln x = \log_e x$: Logarit Nêpe của x.

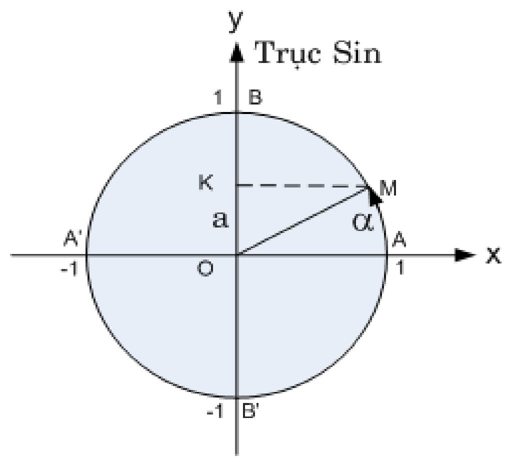
$\lg x = \log_{10} x$: Logarit thập phân của x.

Ví dụ: Tính $A = \log_{13} 25$.

Giải: $$A = \log_{13} 25 = \frac{\ln 25}{\ln 13} \approx 1,254947126.$$

1.4. Hàm số lượng giác và hàm ngược

1.4.1. Hàm y = sinx và y =arcsinx:



Với $-1 \le a \le 1$, ta định nghĩa:

$$\boxed{\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = a; \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

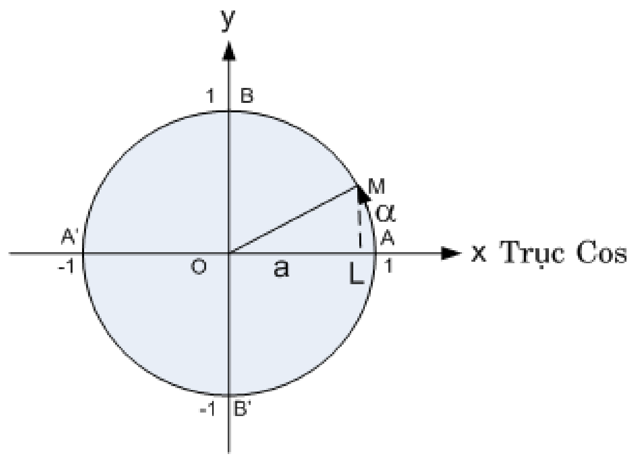
Khi đó arcsina ($-1 \le a \le 1$) được xác định duy nhất. Như vậy, y= arcsinx là hàm số có tính chất sau:

- Miền xác định: $D = [-1;1]$.
- Miền giá trị: $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
- $\forall\alpha \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}], \forall a \in [-1;1]; \sin\alpha = a \Leftrightarrow \arcsin a = \alpha.$
- y = arcsinx là hàm số lẻ, nghĩa là arcsin(–x) = – arcsinx.

Ví dụ: arcsin(1/2) = π/6; arcsin($-\sqrt{3}/2$) = – arcsin($\sqrt{3}/2$) = –π/3; arcsin(–1/2) = π/6;

arcsin(–3/4) = – arcsin(3/4) ≈ – 0,848062079; arcsin(–4) không tồn tại.

1.4.2. Hàm y = cosx và y =arccosx:



Với $-1 \le a \le 1$, ta định nghĩa:

$$\boxed{\arccos a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = a; \\ 0 \le \alpha \le \pi. \end{cases}}$$

Khi đó arccosa ($-1 \le a \le 1$) được xác định duy nhất. Như vậy, y= arccosx là hàm số có tính chất sau:

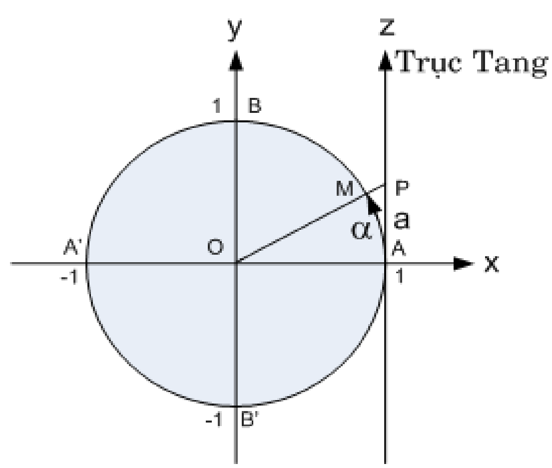
- Miền xác định: $D = [-1;1]$.
- Miền giá trị: $[0;\pi]$.
- $\forall\alpha \in [0;\pi], \forall a \in [-1;1]; \cos\alpha = a \Leftrightarrow \arccos a = \alpha.$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Ví dụ: $\arccos(1/2) = \pi/3$; $\arccos(-\sqrt{3}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$;

$\arccos(-\sqrt{2}/2) = \pi - \arccos(\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$; $\arccos(-3/4) = \pi - \arccos(3/4) \approx 2{,}418858406$;

$\arccos(-4)$ không tồn tại.

1.4.3. Hàm y = tgx và y =arctgx:



Với a ∈ **R**, ta định nghĩa:

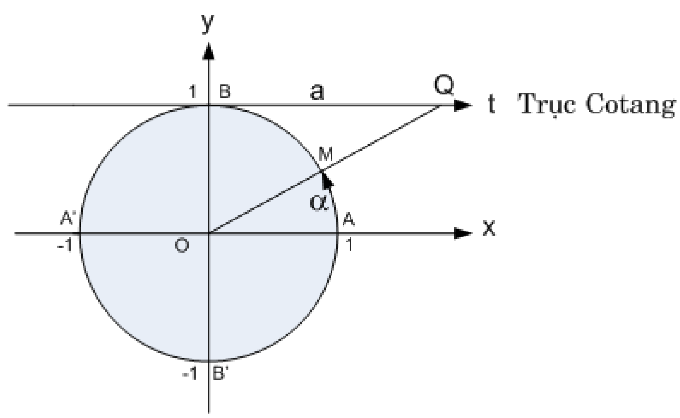
$$\boxed{\operatorname{arc}\operatorname{tg}a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = a; \\ -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

Khi đó arctga được xác định duy nhất. Như vậy, y= arctgx là hàm số có tính chất sau:

- Miền xác định: D = **R**.
- Miền giá trị: $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.
- $\forall\alpha \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}), \forall a \in \mathbb{R}, \operatorname{tg}\alpha = a \Leftrightarrow \operatorname{arctg}a = \alpha.$
- y = arctgx là hàm số lẻ, nghĩa là arctg(–x) = – arctgx.

Ví dụ: arctg1 = π/4; arctg($-\sqrt{3}$/3) = – arctg($\sqrt{3}$/3) = – π/6; arctg(–1)= –π/4; arctg(3/4) ≈ 0,643501108; arctg(– 4) ≈ –1,3258.

1.4.4. Hàm y = cotgx và y =arccotgx:



Với a ∈ **R**, ta định nghĩa:

$$\boxed{\operatorname{arc}\operatorname{cotg}a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{cotg}\alpha = a; \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}}$$

Khi đó arccotga được xác định duy nhất. Như vậy, y= arccotgx là hàm số có tính chất sau:

- Miền xác định: D = **R**.
- Miền giá trị: $(0;\pi)$.
- $\forall\alpha \in (0;\pi), \forall a \in \mathbb{R}, \cot g\alpha = a \Leftrightarrow \operatorname{arc}\cot ga = \alpha.$
- arccotg(–x) = π – arccotgx.

Ví dụ: arccotg1 = π/4; arccotg($-\sqrt{3}$/3) = π – arccotg($\sqrt{3}$/3) = π – π/3 = 2π/3;

arccotg($-\sqrt{3}$) = π – arccotg($\sqrt{3}$) = π – $\pi/6$ = $5\pi/6$;

arccotg(3/4) = $\pi/2$ – arctg(3/4) $\approx$ 0,927295218

arccotg(–4) = $\pi/2$ – arctg(–4) $\approx$ $\pi/2$ + arctg4 $\approx$ 2,89661399.

trong đó ta đã sử dụng tính chất sau:

1.4.5. Tính chất:

1) Với mọi $-1 \le x \le 1$, arcsinx + arccosx = $\pi/2$.

2) Với mọi x, arctgx + arccotgx = $\pi/2$.

2. HÀM SỐ SƠ CẤP

Hàm số sơ cấp là hàm số được xây dựng từ các hàm hằng và các hàm số sơ cấp cơ bản qua các phép toán đại số: cộng, trừ, nhân, chia và phép hợp nối ánh xạ.

Ví dụ: $y = \ln(1 + \sqrt{2x})$ là một hàm số sơ cấp.

$y = \begin{cases} \dfrac{\sin 6x}{x} & \text{nếu } x < 0; \\ \cos 3x & \text{nếu } x \ge 0. \end{cases}$ không là hàm số sơ cấp.

B. GIỚI HẠN

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1.1. Định nghĩa. 1) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0 (có thể loại trừ x_0). Ta nói f(x) có giới hạn là L∈ R khi x tiến về x_0, nếu f(x) có thể gần L tùy ý khi x tiến sát đến x_0.

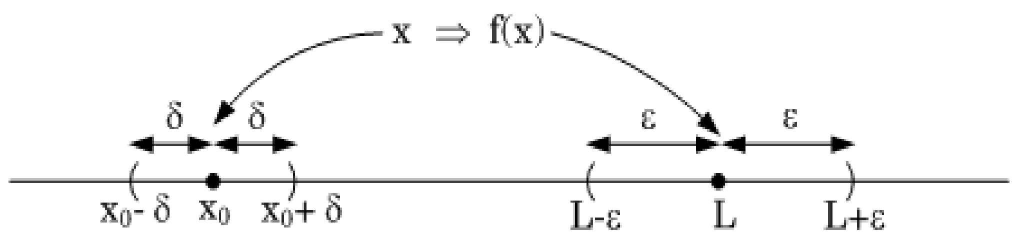
Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Chính xác hơn, theo ngôn ngữ toán học, ta có:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < | x - x_0 | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x \neq x_0 < x_0 + \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

Minh họa:



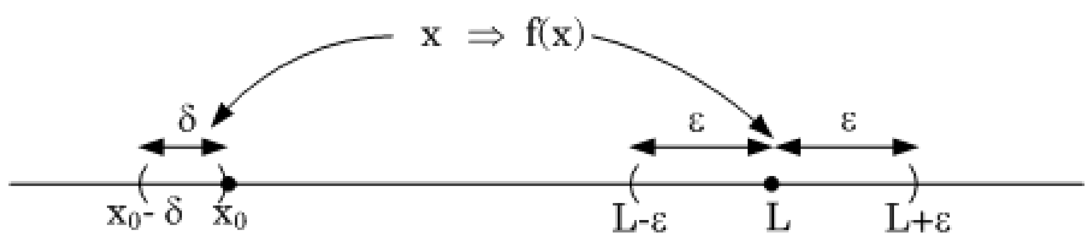
2) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng có dạng $(a;x_0)$. Ta nói f(x) có giới hạn là L∈ R khi x tiến về x_0 bên trái, nếu f(x) có thể gần L tùy ý khi x tiến sát đến x_0 về phía bên trái.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Chính xác hơn, theo ngôn ngữ toán học, ta có:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

Minh họa:



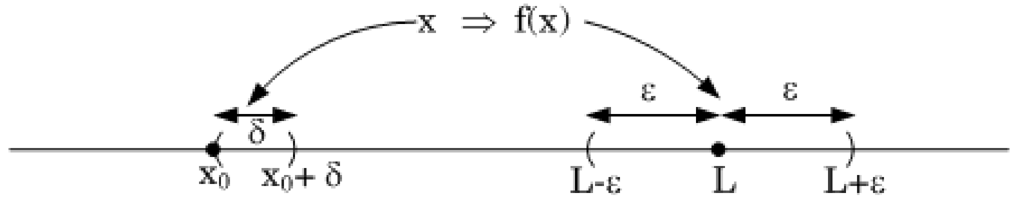
3) Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng có dạng $(x_0;b)$. Ta nói f(x) có giới hạn là L∈ R khi x tiến về x_0 bên phải, nếu f(x) có thể gần L tùy ý khi x tiến sát đến x_0 về phía bên phải.

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

Chính xác hơn, theo ngôn ngữ toán học, ta có:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$$

Minh họa:



Như vậy, từ các định nghĩa trên ta suy ra;

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L; \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L. \end{cases}$$

4) Tương tự, ta định nghĩa được các giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty; \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty; \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty; \dots .$$

1.2. Định lý. Cho các hàm số f(x), g(x) khi $x \to x_0$. Khi đó, với a, b $\in$R, ta có:

1) Nếu $f(x) \to a$, $g(x) \to b$ thì :

$f(x) + g(x) \to a + b;$

$f(x) - g(x) \to a - b;$

$f(x)g(x) \to ab;$

$f(x)/g(x) \to a/b$ (nếu $b \neq 0$).

2) Nếu $f(x) \to a$, $g(x) \to \infty$ thì $f(x) + g(x) \to \infty$.
3) Nếu $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x) + g(x) \to +\infty$.
4) Nếu $f(x) \to a \neq 0$, $g(x) \to \infty$ thì $f(x)g(x) \to \infty$.
5) Nếu $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ thì $f(x)g(x) \to \infty$.
6) Nếu $f(x) \to a \neq 0$, $g(x) \to 0$ thì $f(x)/g(x) \to \infty$.
7) Nếu $f(x) \to a$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x)/g(x) \to 0$.
8) Nếu $f(x) \to \infty$, $g(x) \to b$ thì $f(x)/g(x) \to \infty$.
9) Nếu $f(x) \to a > 1$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x)^{g(x)} \to +\infty$.
   Nếu $f(x) \to a$ với $0 < a < 1$, $g(x) \to +\infty$ thì $f(x)^{g(x)} \to 0$.
10) Nếu $f(x) \to a$ thì $|f(x)| \to |a|$.
11) $f(x) \to 0 \Leftrightarrow |f(x)| \to 0$.
12) (Giới hạn kẹp) Giả sử $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x$ khá gần x_0 và $f(x) \to a$; $g(x) \to a$. Khi đó $h(x) \to a$.

1.3. Định lý. Cho f(x) là một hàm số sơ cấp xác định tại x_0. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ví dụ: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin x} = \dfrac{1-\cos\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = 2.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos 2x}{\sin x} = \infty$ (vì $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 2x) = 1+\cos 0 = 2$ và $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0$)

1.4. Các dạng vô định trong giới hạn:

Có tất cả 7 dạng vô định trong giới hạn, đó là:

$$\infty - \infty;\ 0\infty;\ \frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 1^{\infty};\ 0^{0};\ \infty^{0}.$$

1) Dạng $\infty - \infty$: Khi f(x) $\to +\infty\ (-\infty)$ và g(x) $\to +\infty\ (-\infty)$ thì ta nói lim (f(x) – g(x)) có dạng vô định $\infty - \infty$.
2) Dạng 0∞: Khi f(x) $\to 0$ và g(x)$\to\infty$ thì ta nói lim f(x)g(x) có dạng vô định 0∞ (Lưu ý : f(x) $\to 0$ không có nghĩa là f(x) $\equiv 0$).
3) Tương tự cho 5 dạng còn lại.

Ta nói các dạng trên là các dạng vô dịnh vì không có qui tắc chung để xác định giá trị của giới hạn nếu chỉ dựa vào các giới hạn thành phần.

Đề tính các giới hạn có dạng vô định, ta cần biến đổi để làm mất đi dạng vô định, gọi là khử dạng vô định.

2. HÀM TƯƠNG ĐƯƠNG

2.1. Định nghĩa. Cho các hàm số f(x), g(x) xác định và không triệt tiêu trên một khoảng chứa x_0 (có thể loại trừ x_0). Ta nói f(x) tương đương với g(x) khi x $\to x_0$, ký hiệu f(x)~ g(x) khi x $\to x_0$, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Như vậy,

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ (f(x), g(x) \neq 0) \end{array}}$$

Các tính chất sau được thỏa:

1) f(x) ~ f(x).
2) f(x) ~ g(x) $\Rightarrow$ g(x) ~ f(x).

3) $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \sim h(x) \Rightarrow f(x) \sim h(x)$.

2.2. Định lý. 1) Nếu $f(x) \to L \in R$, $L \neq 0$, thì $f(x) \sim L$.

2) Nếu $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \to A$ thì $f(x) \to A$.

3) Nếu $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x); \\ f_2(x) \sim g_2(x). \end{cases}$ thì $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x); \\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}. \end{cases}$

4) Nếu $f(x) \sim g(x)$ thì $\sqrt[n]{f(x)} \sim \sqrt[n]{g(x)}$ (giả sử các căn có nghĩa).

Chú ý:

- Ta không thể viết $f(x) \sim 0$ hay $f(x) \sim \infty$ (ngay cả khi $f(x) \to 0$ hay $f(x) \to \infty$) vì điều này vô nghĩa!
- $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x); \\ f_2(x) \sim g_2(x). \end{cases} \not\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x) + f_2(x) \sim g_1(x) + g_2(x); \\ f_1(x) - f_2(x) \sim g_1(x) - g_2(x). \end{array}\right.$

Chứng minh: 1) Nếu $f(x) \to L \in R$, $L \neq 0$, thì $\lim \dfrac{f(x)}{L} = 1$ nên $f(x) \sim L$ (ở đây L được xem như hàm hằng).

2) Nếu $f(x) \sim g(x)$ và $g(x) \to A$ thì $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} g(x) \to 1.A = A$.

3) Giả sử $\begin{cases} f_1(x) \sim g_1(x); \\ f_2(x) \sim g_2(x). \end{cases}$ Khi đó

$$\lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1.$$

từ đó

$$\lim \frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.\lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1.1 = 1;$$

$$\lim \frac{f_1(x)/f_2(x)}{g_1(x)/g_2(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)} / \lim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 1/1 = 1.$$

Suy ra $\begin{cases} f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x); \\ \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}. \end{cases}$

4) Giả sử $f(x) \sim g(x)$. Khi đó

$$\lim \frac{\sqrt[n]{f(x)}}{\sqrt[n]{g(x)}} = \lim \sqrt[n]{\frac{f(x)}{g(x)}} = \sqrt[n]{1} = 1.$$

Suy ra $\sqrt[n]{f(x)} \sim \sqrt[n]{g(x)}$.

2.3.Một số giới hạn và tương đương cơ bản:

GIỚI HẠN	TƯƠNG ĐƯƠNG
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (x: rad)	$\sin x \sim x$ khi $x\to 0$ (x: rad)
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (x: rad)	$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$ khi $x\to 0$ (x: rad)
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x}{x}=1$ (x: rad)	$\text{tg}x \sim x$ khi $x\to 0$ (x: rad)
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$	$\arcsin x \sim x$ khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}x}{x}=1$	$\text{arctg}x \sim x$ khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$e^x-1\sim x$ khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\ln(1+x)\sim x$ khi $x\to 0$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$	$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$ khi $x\to 0$ $(\alpha\neq 0)$
• $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty.$ • $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\text{tg}x=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\text{tg}x=-\infty.$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\text{arctg}x=\dfrac{\pi}{2};\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\text{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}.$ • $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$	• Khi $x\to\infty$: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_mx^m\sim a_mx^m$ • Khi $x\to 0$: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_mx^m\sim a_mx^m$ $(m<n;\ a_n\neq 0;\ a_m\neq 0)$

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

a) $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{(x^2+3x)\sin x}$; b) $L_2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-5x+4)\arcsin(x^2-x)}{(e^x-e)(1-\sqrt{4x-3})}$;

c) $L_3=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^8-5x^6+4x+2}{x^8-5x^7+14x^4+1}$.

Giải. a) $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{(x^2+3x)\sin x}$. Khi $x\to 0$ ta có

$$\ln\cos 2x=\ln[1+(\cos 2x-1)]\sim \cos 2x-1\sim -(1/2)(2x)^2=-2x^2 \qquad (1)$$

$x^2 + 3x \sim 3x$ (2)

$\sin x \sim x$ (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra: $(x^2 + 3x)\sin x \sim 3x.x = 3x^2$ (4)

Từ (1) và (4) ta suy ra:

$$\frac{\ln\cos 2x}{(x^2+3x)\sin x} \sim \frac{-2x^2}{3x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Do đó $L_1 = -\dfrac{2}{3}$.

b) $L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-5x+4)\arcsin(x^2-x)}{(e^x-e)(1-\sqrt{4x-3})}$. Đặt $t = x - 1 \Leftrightarrow x = t+1$. Khi $x\to 1$ ta có $t \to 0$. Do đó

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-5x+4)\arcsin(x^2-x)}{(e^x-e)(1-\sqrt{4x-3})} = \lim_{t\to 0}\frac{(t^2-3t)\arcsin(t^2+t)}{e(e^t-1)(1-\sqrt{1+4t})}.$$

Khi $t\to 0$ ta có:

$t^2 - 3t \sim -3t,$ (1)

$\arcsin(t^2 + t) \sim t^2 + t \sim t.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$(t^2 - 3t)\arcsin(t^2 + t) \sim -3t.t \sim -3t^2.$ (3)

Mặt khác,

$e^t - 1 \sim t$ (4)

$1-\sqrt{1+4t} = 1-(1+4t)^{\frac{1}{2}} \sim -\dfrac{1}{2}(4t) = -2t$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $e(e^t-1)(1-\sqrt{1+4t}) \sim et(-2t) = -2et^2$ (6)

Từ (3) và (6) ta suy ra:

$$\frac{(t^2-3t)\arcsin(t^2+t)}{e(e^t-1)(1-\sqrt{1+4t})} \sim \frac{-3t^2}{-2et^2} \to \frac{3}{2e}.$$

Do đó $L_2 = \dfrac{3}{2e}$.

c) $L_3 = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^8-5x^6+4x+2}{x^8-5x^7+14x^4+1}$.Khi $x\to\infty$ ta có

$3x^8 - 5x^6 + 4x + 2 \sim 3x^8$

$x^8 - 5x^7 + 14x^4 + 1 \sim x^8$

Suy ra $\dfrac{3x^8-5x^6+4x+2}{x^8-5x^7+14x^4+1} \sim \dfrac{3x^8}{x^8} \to 3.$ Do đó $L_3 = 3.$

3. VÔ CÙNG BÉ (VCB)-VÔ CÙNG LỚN

3.1. VÔ CÙNG BÉ (VCB)

1) Định nghĩa. Ta nói f(x) là một VCB khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

2) So sánh hai VCB: Cho f(x) và g(x) là VCB khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

a) Nếu $L = 0$ thì ta nói VCB f(x) có cấp cao hơn VCB g(x).

b) Nếu $L = \infty$ thì ta nói VCB f(x) có cấp thấp hơn VCB g(x).

c) Nếu $0 < |L| < +\infty$ thì ta nói hai VCB f(x) và g(x) có cùng cấp.

3) Bậc của VCB khi x → 0: Cho f(x) là một VCB khi $x \to 0$. Ta nói VCB f(x) có cấp α khi chọn x làm VCB chính nếu:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \text{ khi } x \to 0$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha > 0$.

Nhận xét: Các định nghĩa trong 2) và 3) tương thích nhau khi ta so sánh hai VCB khi $x \to 0$.

Ví dụ: Khi $x \to 0$, $1 - \cos 4x$ là một VCB cấp 2 vì

$$1 - \cos 4x \sim \frac{1}{2}(4x)^2 = 8x^2.$$ vaø coù cuøng caáp thaáp cao hôn

4) Tổng (hiệu) hai VCB: Cho f(x), g(x) là hai VCB khi $x \to x_0$.

a) Nếu f(x) và g(x) không có cùng cấp thì

$$f(x) + g(x) \sim \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \text{ có cấp thấp hơn } g(x); \\ g(x) & \text{nếu } f(x) \text{ có cấp cao hơn } g(x). \end{cases}$$

b) Nếu f(x) và g(x) có cùng cấp nhưng không tương đương thì f(x) – g(x) là VCB có cùng cấp với VCB f(x), hơn nữa

$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x). \qquad (*)$$

Đặc biệt, cho f(x), g(x) là hai VCB khi $x \to 0$ có cấp lần lượt là α, β:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \ (a \neq 0);$$

$$g(x) \sim bx^{\beta} \ (b \neq 0).$$

Khi đó

$$f(x) - g(x) \sim \begin{cases} ax^{\alpha} & \text{nếu } \alpha < \beta; \\ -bx^{\beta} & \text{nếu } \alpha > \beta; \\ (a-b)x^{\alpha} & \text{nếu } \alpha = \beta;\ a - b \neq 0. \end{cases}$$

Chú ý: Trường hợp hai VCB f(x) và g(x) tương đương và $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ thì f(x) – g(x) là VCB có cấp lớn hơn VCB f(x) nhưng (*) không còn đúng.

5) Qui tắc giữ lại VCB cấp bé nhất (Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao): Giả sử khi $x \to x_0$, VCB f(x) được phân tích thành tổng của nhiều VCB, trong đó chỉ có một VCB cấp thấp nhất là $f_0(x)$. Khi đó:

$$f(x) \sim f_0(x) \text{ khi } x \to 0.$$

Chú ý: Trường hợp có nhiều VCB cấp bé nhất trong phân tích của f(x) thì ta gộp các VCB đó lại, xem như là một VCB và dùng tính chất 4b) ở trên để khảo sát cấp của VCB đó, sau đó mới có thể áp dụng qui tắc trên.

3.2. VÔ CÙNG LỚN (VCL)

1) Định nghĩa: Ta nói f(x) là một VCL khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

2) So sánh hai VCL: Cho f(x) và g(x) là VCL khi $x \to x_0$. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

a) Nếu $L = 0$ thì ta nói VCL f(x) có cấp thấp hơn VCL g(x).

b) Nếu $L = \infty$ thì ta nói VCL f(x) có cấp cao hơn VCL g(x).

c) Nếu $0 < |L| < +\infty$ thì ta nói hai VCL f(x) và g(x) có cùng cấp.

3) Bậc của VCL khi x → ∞: Cho f(x) là một VCL khi $x \to \infty$. Ta nói VCL f(x) có cấp α khi chọn x làm VCL chính nếu:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \text{ khi } x \to \infty$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha > 0$.

Nhận xét: Các định nghĩa trong 2) và 3) tương thích nhau khi ta so sánh hai VCL khi $x \to \infty$.

Ví dụ: Khi $x \to \infty$, $2x^3 - 9x^2 + 5x + 19$ VCL cấp 3 vì

$$2x^3 - 9x^2 + 5x + 19 \sim 2x^3.$$

4) Tổng (hiệu) hai VCL: Cho f(x), g(x) là hai VCL khi $x \to x_0$.

a) Nếu f(x) và g(x) không có cùng cấp thì

$$f(x) + g(x) \sim \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \text{ có cấp cao hơn } g(x); \\ g(x) & \text{nếu } f(x) \text{ có cấp thấp hơn } g(x). \end{cases}$$

b) Nếu f(x) và g(x) có cùng cấp nhưng không tương đương thì f(x) − g(x) là VCL có cùng cấp với VCL f(x), hơn nữa

$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) - g(x) \sim f_1(x) - g_1(x). \qquad (*)$$

Đặc biệt, cho f(x), g(x) là hai VCL khi $x \to \infty$ có cấp lần lượt là α, β:

$$f(x) \sim ax^{\alpha} \ \ (a \neq 0);$$

$$g(x) \sim bx^{\beta} \ \ (b \neq 0).$$

Khi đó

$$f(x) - g(x) \sim \begin{cases} ax^{\alpha} & \text{nếu } \alpha > \beta; \\ -bx^{\beta} & \text{nếu } \alpha < \beta; \\ (a-b)x^{\alpha} & \text{nếu } \alpha = \beta;\ a - b \neq 0. \end{cases}$$

Chú ý: Trường hợp hai VCL f(x) và g(x) tương đương và $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ thì f(x) − g(x) có thể không là VCL hoặc là VCL có cấp nhỏ hơn VCL f(x) nhưng (*) không còn đúng.

5) Qui tắc giữ lại VCL cấp cao nhất (Qui tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp): Giả sử khi $x \to x_0$, VCL f(x) được phân tích thành tổng của nhiều VCL, trong đó chỉ có một VCL cấp cao nhất là $f_n(x)$. Khi đó

$$f(x) \sim f_n(x) \text{ khi } x \to x_0.$$

Chú ý: Trường hợp có nhiều VCL cấp cao nhất trong phân tích của f(x) thì ta gộp các VCL đó lại, xem như là một đại lượng (có thể là VCL nhưng cũng có thể không), và dùng tính chất 4b) ở trên để khảo sát đại lượng này, sau đó mới có thể áp dụng qui tắc trên.

Ví dụ: Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - \sqrt{3x^2 + 4x - 1})$$

$$L_2 = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - \sqrt{3x^2 + 4x - 1})$$

$$L_3 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2 - 4x + 2} - \sqrt{2x^2 + 4x - 1})$$

$$L_4 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{2x^3 + 3x + 2})$$

$$L_5 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 9x^2 + 1} + \sqrt[3]{10 + 3x^2 - 2x^3})$$

$$L_6 = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2})$$

$$L_7 = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3\operatorname{tg}x) - x^2}{\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x}$$

$$L_8 = \lim_{x\to2}\frac{(x^2 - 6x + 8)\operatorname{arc\,tg}(x^3 - 8) + 2\ln(x^2 - 4x + 5) + (x-2)^3}{(e^x - e^2)(2 - \sqrt{x+2}) + 2x^2 - 8x + 9 - e^{(x-2)^4}}$$

Giải.

- $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-1})$

Khi $x\to+\infty$ ta có:

$A := \sqrt{3x^2-4x+2} \sim \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3} = x\sqrt{3}.$ (1)

$B := \sqrt{3x^2+4x-1} \sim \sqrt{3x^2} \sim |x|\sqrt{3} = x\sqrt{3}$ (2)

(Như vậy, theo trên ta có A – B không là VCL hoặc là VCL cấp nhỏ hơn 1, nhưng chưa xác định được cấp chính xác là bao nhiêu).

Ta biến đổi: $A - B = \dfrac{A^2-B^2}{A+B}$. Khi $x\to+\infty$ ta có

$A^3 - B^3 = (3x^2-4x+2)-(3x^2+4x-1) = -8x+3 \sim -8x$ (3)

$A + B = 2x\sqrt{3}$ (do (1) và (2)) (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra:

$$A - B = -\frac{8x}{2x\sqrt{3}} \to -\frac{4\sqrt{3}}{3} \quad \text{khi } x\to+\infty$$

Vậy $L_1 = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

- $L_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{3x^2+4x-1})$

Lý luận tương tự khi tính L_1 và chú ý rằng khi $x\to-\infty$ ta có

$\sqrt{3x^2-4x+2} \sim \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3} = -x\sqrt{3}.$

$\sqrt{3x^2+4x-1} \sim \sqrt{3x^2} \sim |x|\sqrt{3} = -x\sqrt{3}$

Từ đó, ta tính được $L_2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

- $L_3 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-4x+2}-\sqrt{2x^2+4x-1})$

Khi $x\to\infty$ ta có

$A := \sqrt{3x^2-4x+2} \sim \sqrt{3x^2} = |x|\sqrt{3}.$ $B := \sqrt{2x^2+4x-1} \sim \sqrt{2x^2} \sim |x|\sqrt{2}.$

Suy ra $A - B \sim |x|(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \to +\infty$ khi $x\to\infty$. Vậy $L_3 = +\infty$.

- $L_4 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3+2x^2-3x+1}-\sqrt[3]{2x^3+3x+2})$

Khi $x\to\infty$ ta có

$A := \sqrt[3]{2x^3+2x^2-3x+1} \sim \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}.$ (1)

$B := \sqrt[3]{2x^3+3x+2} \sim \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}.$ (2)

(Như vậy, theo trên ta có A – B không là VCL hoặc là VCL cấp nhỏ hơn 1, nhưng chưa xác định được cấp chính xác là bao nhiêu).

Ta biến đổi: $A - B = \dfrac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$. Khi $x \to \infty$ ta có

$A^3 - B^3 = (2x^3 + 2x^2 - 3x+1) - (2x^3 + 3x + 2) = 2x^2 - 6x - 1 \sim 2x^2$ (3)

$A^2 \sim x^2\sqrt[3]{4}$; $AB \sim x^2\sqrt[3]{4}$; $B^2 \sim x^2\sqrt[3]{4}$. Suy ra $A^2 + AB + B^2 \sim 3x^2\sqrt[3]{4}$ (4)

Từ (3) và (4) ta suy ra:

$$A - B \sim \frac{2x^2}{3x^2\sqrt[3]{4}} \to \frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \quad \text{khi } x \to \infty.$$

Vậy $L_4 = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

- $L_5 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 9x^2 + 1} + \sqrt[3]{10 + 3x^2 - 2x^3})$

Lý luận tương tự khi tính L_4 và sử dụng công thức:

$$A + B = \frac{A^3 + B^3}{A^2 - AB + B^2},$$

từ đó ta tính được $L_5 = 2\sqrt[3]{2}$.

- $L_6 = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2})$

Khi $x \to \infty$ ta có:

$A := \sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 3x + 1} \sim \sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}$.

$B := \sqrt[3]{x^3 + 3x + 2} \sim \sqrt[3]{x^3} = x$.

Suy ra $A - B \sim x(\sqrt[3]{2} - 1) \to \infty$ khi $x \to \infty$.

Vậy $L_6 = \infty$.

- $L_7 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) + \ln(1 + 3\operatorname{tg}x) - x^2}{\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x}$

Khi $x \to 0$ ta có:

* $\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) \sim x^2 + 4x \sim 4x$,

$\ln(1+ 3\operatorname{tg}x) \sim 3\operatorname{tg}x \sim 3x$.

Suy ra $\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) + \ln(1+ 3\operatorname{tg}x) \sim 7x$

Từ đó $\operatorname{arctg}(x^2 + 4x) + \ln(1+ 3\operatorname{tg}x) - x^2 \sim 7x$ (1)

* $\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x = \operatorname{arctg}(4x) + (\cos 2x - 1) - (e^x - 1)$

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(4x) \sim 4x \\ e^x - 1 \sim x \end{cases} \Rightarrow \operatorname{arctg}(4x) - (e^x - 1) \sim 3x;$$

$\cos 2x - 1 \sim -(1/2)(2x)^2 = -2x^2$

Suy ra $\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x \sim 3x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{\arcsin(x^2+4x) + \ln(1+3\operatorname{tg}x) - x^2}{\operatorname{arctg}(4x) + \cos 2x - e^x} \sim \frac{7x}{3x} \to \frac{7}{3} \quad \text{khi} \quad x \to 0.$$

Vậy $L_7 = \dfrac{7}{3}$.

- $L_8 = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-6x+8)\operatorname{arctg}(x^3-8) + 2\ln(x^2-4x+5) + (x-2)^3}{(e^x-e^2)(2-\sqrt{x+2}) + 2x^2 - 8x + 9 - e^{(x-2)^4}}$

Đặt $t = x - 2 \Leftrightarrow x = t+2$. Khi $x \to 2$ ta có $t \to 0$. Do đó

$$L_8 = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-6x+8)\operatorname{arctg}(x^3-8) + 2\ln(x^2-4x+5) + (x-2)^3}{(e^x-e^2)(2-\sqrt{x+2}) + 2x^2 - 8x + 9 - e^{(x-2)^4}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2-2t)\operatorname{arctg}(t^3+6t^2+12t) + 2\ln(1+t^2) + t^3}{e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4}) + 2t^2 + 1 - e^{t^4}}$$

Khi $t \to 0$ ta có

* $(t^2-2t)\operatorname{arctg}(t^3+6t^2+12t) \sim -2t(t^3+6t^2+12t) \sim -24t^2$.

$2\ln(1+t^2) \sim 2t^2$

Suy ra $(t^2-2t)\operatorname{arctg}(t^3+6t^2+12t) + 2\ln(1+t^2) \sim -22t^2$

Từ đó $(t^2-2t)\operatorname{arctg}(t^3+6t^2+12t) + 2\ln(1+t^2) + t^3 \sim -22t^2$ (1)

* $e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4}) = e^2(e^t-1)\dfrac{-t}{2+\sqrt{t+4})} \sim -e^2 t\dfrac{t}{4} = -\dfrac{e^2}{4}t^2$

Suy ra $e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4}) + 2t^2 \sim (2-\dfrac{e^2}{4})t^2$

Mà $1 - e^{t^4} \sim -t^4$ nên

$$e^2(e^t-1)(2-\sqrt{t+4}) + 2t^2 + 1 - e^{t^4} \sim (2-\frac{e^2}{4})t^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{(t^2-2t)\operatorname{arctg}(t^3+6t^2+12t) + 2\ln(1+t^2) + t^3}{e(e^t-1)(2-\sqrt{t+4}) + 2t^2 + 1 - e^{t^4}} \sim \frac{-22t^2}{(2-\frac{e^2}{4})t^2} \to \frac{88}{e^2-8}.$$

Vậy $L_8 = \dfrac{88}{e^2-8}$.

4. DẠNG VÔ ĐỊNH 1^∞

Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ có dạng vô định 1^∞, nghĩa là khi x→ a ta có f(x) →1 và g(x) →∞. Đặt u = f(x) – 1. Ta có u →0. Suy ra

$$f(x)^{g(x)} = (1+u)^{g(x)} = \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{ug(x)} = \left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{[f(x)-1]g(x)}$$

Mà $(1+u)^{\frac{1}{u}} \to e$ khi $u \to 0$ nên

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]g(x)}}$$

Chú ý: Công thức trên chỉ được dùng cho giới hạn có dạng vô định 1^∞.

Ví dụ. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\cot g^2 x}$.

Giải. Dễ thấy L có dạng vô định 1^∞. Áp dụng công thức cho giới hạn dạng vô định 1^∞, ta có

$$L = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x-1)\cot g^2 x}$$

Xét $L' = \lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x - 1)\cot g^2 x$. Khi x→0 ta có

$$(\cos 3x - 1)\cot g^2 x = \frac{\cos 3x - 1}{tg^2 x} \sim \frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} \to -\frac{9}{2}$$

Do đó $L' = -\frac{9}{2}$. Suy ra $L = e^{-\frac{9}{2}}$.

C. LIÊN TỤC

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1.1. **Định nghĩa**.

1) Hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0 được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Hàm số f(x) xác định trên nửa khoảng (a; x_0] được gọi là liên tục bên trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

3) Hàm số f(x) xác định trên nửa khoảng [x_0; b) được gọi là liên tục bên phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Từ các định nghĩa trên, ta thấy

$$\text{f(x) liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục bên trái tại } x_0; \\ \text{f(x) liên tục bên phải tại } x_0. \end{cases}$$

4) f(x) liên tục trên (a; b) $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại mọi $x_0 \in$ (a; b).

$$\text{f(x) liên tục trên [a; b)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục trên (a; b);} \\ \text{f(x) liên tục bên phải tại a.} \end{cases}$$

$$\text{f(x) liên tục trên (a; b]} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục trên (a; b);} \\ \text{f(x) liên tục bên trái tại b.} \end{cases}$$

$$\text{f(x) liên tục trên [a; b]} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{f(x) liên tục trên (a; b);} \\ \text{f(x) liên tục bên phải tại a;} \\ \text{f(x) liên tục bên trái tại b.} \end{cases}$$

1.2. Định lý. Nếu f(x) là một hàm số sơ cấp xác định trên D thì f(x) liên tục trên D.

Ví dụ: Định các tham số a, b để hàm số sau liên tục trên R:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 6x}{x^2} & \text{nếu } x < 0; \\ ax + b & \text{nếu } 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{\ln x}{x^2 + 2x - 3} & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Giải.

- Trên $(-\infty; 0)$, y trùng với hàm $f(x) = \dfrac{1 - \cos 6x}{x^2}$. Vì f(x) là hàm số sơ cấp xác định với mọi $x \neq 0$, nên y liên tục trên $(-\infty; 0)$.

- Trên (0; 1), y trùng với hàm g(x) = ax + b. Vì g(x) là hàm số sơ cấp xác định với mọi $x \in R$, nên y liên tục trên (0; 1).
- Trên (1; +∞), y trùng với hàm $h(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 4x + 3}$. Vì h(x) là hàm số sơ cấp xác định với mọi $x > 0, x \neq 1$, nên y liên tục trên (1; +∞).

Suy ra

$$\text{y liên tục trên R} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y liên tục tại } x = 0; \\ \text{y liên tục tại } x = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\bullet \text{ y liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y liên tục bên trái tại } x = 0; \\ \text{y liên tục bên phải tại } x = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} y = y(0); \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y = y(0). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos 6x}{x^2} = b; \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (ax+b) = b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2} = b$$

$$\Leftrightarrow b = 18 \qquad (2)$$

$$\bullet \text{ y liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y liên tục bên trái tại } x = 1; \\ \text{y liên tục bên phải tại } x = 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} y = y(1); \\ \lim\limits_{x\to 1^+} y = y(1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (ax + b) = a+b; \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{x^2 + 2x - 3} = a+b. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x^2 + 2x - 3} = a+b$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t(t+4)} = a+b \qquad (t = x-1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{4t} = a+b$$

$$\Leftrightarrow a+b = \frac{1}{4} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$\text{y liên tục trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{1}{4}; \\ b = 18. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{71}{4}; \\ b = 18. \end{cases}$$

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT ĐOẠN

2.1. Định lý. Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Khi đó

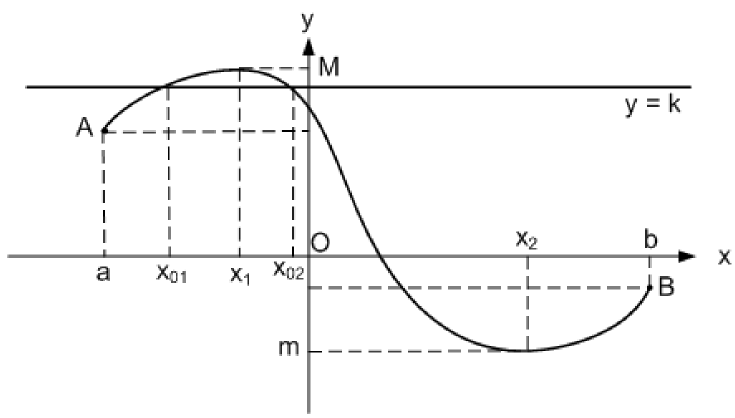
1) f(x) đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên [a; b], nghĩa là

$$\begin{cases} \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in [a;b], m \le f(x) \le M; \\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = M; f(x_2) = m. \end{cases}$$

2) f(x) đạt mọi giá trị trung gian giữa giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên [a; b], nghĩa là

$$\forall m \le k \le M, \exists x_0 \in [a;b], f(x_0) = k.$$

Minh họa:



2.2. Hệ quả. 1) Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b]. Giả sử f(a)f(b) < 0, nghĩa là f(a) và f(b) trái dấu. Khi đó phương trình f(x) = 0 có nghiệm trên khoảng (a; b), nghĩa là tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

2) Giả sử hàm số f(x) liên tục trên khoảng (a; b) và phương trình f(x) = 0 vô nghiệm trên khoảng này. Khi đó f(x) không đổi dấu trên khoảng (a; b).

Ví dụ 1. Chứng minh mọi phương trình đại số bậc lẻ:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+ a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \qquad (1)$$

với n nguyên dương lẻ, luôn luôn có nghiệm thực.

Giải. Đặt $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+ a_0 = 0$.

Khi $x \to -\infty$, $f(x) \sim a_n x^n \to -\infty$ (do n lẻ), nên tồn tại a < 0 khá bé sao cho f(a) < 0.

Khi $x \to +\infty$, $f(x) \sim a_n x^n \to +\infty$, nên tồn tại b > 0 khá lớn sao cho f(b) > 0.

Vì hàm số f(x) liên tục trên [a; b] và f(a)f(b) < 0 nên theo hệ quả trên, phương trình f(x) = 0 có nhiệm trên [a; b] và do đó phương trình (1) có nghiệm thực.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình:

$$(x^2-6x+5)(1-\ln x)(x-\sqrt{x^2-4x+20})<0 \qquad (1)$$

Giải. Điều kiện: x >0. Đặt $f(x)=(x^2-6x+5)(1-\ln x)(x-\sqrt{x^2-4x+20})$. Ta có f(x) liên tục trên (0; +∞). Hơn nữa,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+5)(1-\ln x)(x-\sqrt{x^2-4x+20})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ 1-\ln x=0 \\ x-\sqrt{x^2-4x+20}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \vee x=5 \\ x=e \\ x=5 \end{array}\right.$$

Ta lập bảng xét dấu:

x	0		1		e		5		+∞
f(x)		-	0	+	0	-	0	-	

Lưu ý rằng, do tính liên tục, f(x) không đổi dấu trên mỗi khoảng của bảng xét dấu. Do đó ta chỉ cần thế một giá trị của mỗi khoảng vào f(x) để biết dấu của f(x) trên các khoảng này. Từ bảng xét dấu trên ta suy ra:

$$f(x) \Leftrightarrow 0 < x < 1 \text{ hay } e < x < 5 \text{ hay } x > 5.$$

Do đó, bất phương trình (1) có tập nghiệm là:

$$S = (0;1) \cup (e; 5) \cup (5; +\infty).$$

D- ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1.1. Định nghĩa. 1) Cho hàm f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0. Khi cho x_0 một số gia Δx khá bé thì số gia tương ứng của f(x) là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Lập tỉ số

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Nếu tỉ số này có giới hạn là $A \in R$ khi $\Delta x \to 0$ thì ta nói f(x) có đạo hàm tại x_0 và A là đạo hàm của f(x) tại x_0, ký hiệu $f'(x_0) = A$.

Như vậy,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2) Tương tự, ta định nghĩa:

- f(x) có đạo hàm bên trái tại x_0, ký hiệu $f'(x_0^-)$, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

- f(x) có đạo hàm bên phải tại x_0, ký hiệu $f'(x_0^+)$, nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3) f(x) có đạo hàm trên (a,b) nếu f(x) có đạo hàm tại mọi $x_0 \in (a,b)$.

4) f(x) có đạo hàm trên [a,b] nếu f(x) có đạo hàm trên (a,b) và có đạo hàm bên phải tại a, đạo hàm bên trái tại b.

1.2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm $f'(x_0)$ chính là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong (C): y = f(x) tại điểm $M_0(x_0,y_0) \in (C)$. Do đó phương trình của tiếp tuyến với đường cong (C): y = f(x) tại điểm $M_0(x_0,y_0) \in (C)$ là:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

1.3. Ý nghĩa kinh tế của đạo hàm:

1) Định nghĩa: Biên tế của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0, ký hiệu $M_x y(x_0)$, là độ biến đổi của đại lượng y khi đại lượng x tăng lên 1 đơn vị tại x_0.

2) Biểu thức toán học của biên tế:

Giả sử tại $x = x_0$ ta cho x một số gia là Δx đơn vị. Khi đó độ biến đổi của đại lượng y = f(x) là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Do đó khi x tăng 1 đơn vị thì độ biến đổi trung bình của đại lượng y = f(x) là

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Để biết chính xác độ biến đổi của đại lượng y = f(x) khi x tăng 1 đơn vị tại trạng thái (x_0,y_0) ta phải chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$. Theo định nghĩa trên, độ biến đổi đó chính là biên tế $M_x y(x_0)$ của y = f(x) theo x tại x_0 nên

$$M_x y(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Như vậy, biên tế của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0 chính là đạo hàm $y'(x_0) = f'(x_0)$ của y = f(x) tại x_0:

$$\boxed{M_x y(x_0) = y'(x_0)}$$

Tổng quát, biên tế của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x chính là đạo hàm y' = f'(x) của y = f(x):

$$\boxed{M_x y = y'}$$

Chú ý: Trong thực tế, biên tế $M_x y(x_0)$ của y = f(x) theo x tại x_0 xấp xỉ bằng độ biến đổi của y khi đại lượng x tăng lên 1 đơn vị từ trạng thái $x = x_0$.

Ví dụ: Xét mô hình sản xuất một loại sản phẩm. Khi đó hàm tổng chi phí C = C(Q) là hàm theo tổng sản phẩm Q. Chi phí biên tế là:

$$MC(Q) = C'(Q).$$

Chẳng hạn, với hàm tổng chi phí:

$$C = Q^3 + 2Q^2 + 10$$

ta có chi phí biên tế: $MC(Q) = C'(Q) = 3Q^2 + 4Q$. Tại Q = 100, ta có MC(100) = 30400. Như vậy, khi đang sản xuất với tổng sản lượng $Q_0 = 100$, nếu tăng tổng sản lượng 1 đơn vị thành $Q_1 = 101$, thì tổng chi phí sẽ tăng thêm 30400 (Thực tế là chi phí tăng thêm $C(Q_1) - C(Q_0) = 30703$).

3) Độ biến đổi tuyệt đối và độ biến đổi tương đối:

Xét đại lượng x. Tại $x = x_0$, cho x một số gia Δx thì x nhận giá trị mới là $x_0+\Delta x$. Ta nói Δx là độ biến đổi tuyệt đối của x tại x_0 và tỉ số $\frac{\Delta x}{x_0}$ là độ biến đổi tương đối của x tại x_0. Độ biến đổi tương đối thường được tính bằng %.

4) Hệ số co giãn: Hệ số co giãn của đại lượng y = f(x) theo đại lượng x tại x_0, ký hiệu $\varepsilon_{yx}(x_0)$, là độ biến đổi tương đối của y khi x tăng tương đối lên 1%.

5) Biểu thức toán học của hệ số co giãn:

Giả sử tại x_0 ta cho x một số gia là Δx đơn vị. Khi đó:

- Độ biến đổi tuyệt đối của x tại x_0 là Δx.
- Độ biến đổi tương đối của x tại x_0 là

$$\frac{\Delta x}{x_0}.100\%.$$

- Độ biến đổi tuyệt đối của y tại x_0 là:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

- Độ biến đổi tương đối của y tại x_0 ($y_0 = f(x_0)$) là:

$$\frac{\Delta y}{y_0}.100\% = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{y_0}.100\%$$

Do đó, tại $x = x_0$, khi x tăng tương đối 1% thì độ biến đổi tương đối trung bình của đại lượng $y = f(x)$ là

$$\frac{\frac{\Delta y}{y_0}.100\%}{\frac{\Delta x}{x_0}.100} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{x_0}{y_0}\%.$$

Để biết chính xác độ biến đổi tương đối của đại lượng $y = f(x)$ khi x tăng 1 đơn vị tại trạng thái (x_0,y_0) ta phải chuyển qua giới hạn khi $\Delta x \to 0$, Theo định nghĩa trên, độ biến đổi tương đối đó chính là hệ số co giãn $\varepsilon_{yx}(x_0)$ của đại lượng $y = f(x)$ theo đại lượng x tại x_0 nên

$$\varepsilon_{yx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{x_0}{y_0} = y'(x_0)\frac{x_0}{y_0}.$$

Như vậy, hệ số co giãn $\varepsilon_{yx}(x_0)$ của đại lượng $y = f(x)$ theo đại lượng x tại x_0 định bởi:

$$\boxed{\varepsilon_{yx}(x_0) = y'(x_0)\frac{x_0}{y_0}}$$

Tổng quát, hệ số co giãn $\varepsilon_{yx}(x)$ của đại lượng $y = f(x)$ theo đại lượng x định bởi:

$$\boxed{\varepsilon_{yx}(x) = y'(x)\frac{x}{y}}$$

Ví dụ. Xét mô hình sản xuất một loại sản phẩm. Khi đó hàm cầu $Q_D = Q(P)$ là hàm giảm theo đơn giá P. Hệ số co giãn $\varepsilon_{Q_D P}$ thường được viết tắt là ε_D. Ta có:

$$\varepsilon_D = Q'(P)\frac{P}{Q} < 0.$$

Hệ số co giãn ε_D cho biết lượng cầu sẽ giảm bao nhiêu phần trăm khi ta tăng giá 1%.

Chẳng hạn, với hàm cầu $Q_D = 1000 - 5P$, hệ số co giãn ε_D là:

$$\varepsilon_D = Q'(P)\frac{P}{Q} = -\frac{5P}{1000 - 5P}$$

Tại $P_0 = 120$, $\varepsilon_D(P_0) = -1,5$, nghĩa là khi đang bán với đơn giá $P_0 = 120$, nếu tăng giá lên 1%, thì lượng cầu sẽ giảm đi khoảng 1,5%.

1.4. Định lý. Nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì f(x) liên tục tại x_0.

1.5. Chú ý. Một hàm số liên tục tại x_0 không nhất thiết có đạo hàm tại điểm đó.

2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐẠO HÀM

2.1. Định lý. Giả sử các hàm u = u(x) và v = v(x) có các đạo hàm $u' = u'(x)$; $v' = v'(x)$. Ta có

1	$(u + v)' = u' + v'$
2	$(ku)' = ku'$ (k: Const)
3	$(uv)' = u'v + uv'$
4	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$
5	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$

2.2. Định lý (đạo hàm của hàm số hợp). Xét hàm hợp $y = f[\varphi(x)]$. Nếu hàm y = f(u) có đạo hàm theo biến u là $y'_u = f'(u)$ và $u = \varphi(x)$ có đạo hàm theo biến x là $u'_x = \varphi'(x)$. Khi đó hàm hợp $y = f[\varphi(x)]$ có đạo hàm theo biến x là $y'_x = y'_u.u'_x$.

2.3. Định lý (đạo hàm của hàm số ngược). Giả sử hàm số x = g(y) có hàm ngược là y = f(x). Khi đó nếu x = g(y) có đạo hàm theo y là $x'_y = g'(y) \neq 0$ và hàm ngược y = f(x) liên tục theo biến x thì y = f(x) có đạo hàm theo x định bởi

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}}$$

Ví dụ: 1) Tính đạo hàm của các hàm số y = arcsinx và y = arccosx.

2) Tính đạo hàm của hàm y = arctgx và y = arccotgx.

Giải. 1) y = arcsinx $(-1 \le x \le 1; -\pi/2 \le y \le \pi/2)$ là hàm ngược của hàm x = siny. Với mỗi $-\pi/2 < y < \pi/2$, ta có

$$x'_y = \cos y > 0.$$

Do đó

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vậy $\qquad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

Tương tự, ta có

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$$

2) $y = \text{arctg}x$ ($x \in R$, $-\pi/2 < y < \pi/2$) là hàm ngược của hàm $x = \text{tg}y$. Với mỗi $-\pi/2 < y < \pi/2$, ta có

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Do đó

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Vậy $\qquad (\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Tương tự, ta có

$$(\text{arc}\cot gx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2.4. Bảng đạo hàm:

	ĐẠO HÀM HÀM SỐ f(x)	**ĐẠO HÀM HÀM SỐ f(u) với u = u(x)**
1	$(C)' = 0$ (C: Const)	$(C)'$ (C: Const)
2	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α: Const)	$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$ (α: Const)
	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
3	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'e^u$

4	$(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a\text{: Const})$	$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (0 < a\text{: Const})$
5	$(\ln \mid x \mid)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln \mid u \mid)' = \dfrac{u'}{u}$
6	$(\log_a \mid x \mid)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(0 < a \neq 1\text{: Const})$	$(\log_a \mid u \mid)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(0 < a \neq 1\text{: Const})$
7	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
9	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + tg^2 u)$
10	$(\cot gx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$	$(\cot gu)' - \dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot g^2 u)$
11	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
12	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
13	$(\mathrm{arc\,tg}x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\mathrm{arc\,tg}u)' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
14	$(\mathrm{arc\,cotg}x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\mathrm{arc\,cotg}u)' = -\dfrac{u'}{1 + u^2}$

2.5. Đạo hàm của hàm số dạng $y = u^v$ với $u = u(x); v = v(x)$

Để tính đạo hàm của hàm số trên ta tiến hành như sau:

Lấy logarit cả 2 vế của $y = u^v$, ta được:

$$\ln y = v \ln u \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (1), ta được:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

Do đó

$$y' = (v' \ln u + v\frac{u'}{u})y = (v' \ln u + v\frac{u'}{u})u^v.$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm $y = x^{\sin x}$.

Giải. Lấy logarit cả 2 vế của $y = x^{\sin x}$, ta được

$$\ln y = \sin x \ln x \qquad (1)$$

Lấy đạo hàm 2 vế của (1), ta được

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Do đó

$$y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

2.6. Đạo hàm của hàm ẩn

Xét phương trình

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

Giả sử $y = y(x)$ ($x \in D$) là hàm số thỏa $F(x,y(x)) = 0$ với mọi $x \in D$. Ta nói y là hàm ẩn được xác định bởi phương trình (1).

Ta có thể tìm đạo hàm y' của hàm ẩn y xác định bởi phương trình (1), theo x và y, mà không cần xác định biểu thức tường minh của hàm số $y = y(x)$, bằng cách lấy đạo hàm hai vế của (1) theo biến x, trong đó y là một hàm theo biến x. Chú ý rằng khi lấy đạo hàm như vậy ta phải sử dụng định lý về đạo hàm hàm hợp.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm $y' = y'(x)$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình $\mathrm{tg}y = xy$.

Giải. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $\mathrm{tg}y = xy$ ta được

$$(1 + \mathrm{tg}^2 y)y' = y + xy'$$

Suy ra $(1 + x + \mathrm{tg}^2 y)y' = y$. Từ đó

$$y' = \frac{y}{1 - x + \mathrm{tg}^2 y}.$$

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm $y' = y'(0)$ của hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi phương trình

$$x^3 - xy - xe^y + y - 1 = 0. \qquad (2)$$

Giải. Lấy đạo hàm hai vế của phương trình $x^3 - xy - xe^y + y - 1 = 0$. ta được

$$3x^2 - y - xy' - e^y - xe^y y' + y' = 0. \qquad (3)$$

Thế $x = 0$ vào (2) ta được $y = 1$. Thế $x = 0$, $y = 1$ vào (3) ta được $-1 - e + y' = 0$. Suy ra $y'(0) = 1 + e$.

2.6. Đạo hàm của hàm số cho bởi phương trình tham số

Giả sử hàm số y phụ thuộc biến số x không trực tiếp mà thông qua một biến số trung gian t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

và hàm số $x = \varphi(t)$ có hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x)$, hơn nữa các hàm φ, ψ và φ^{-1} đều có đạo hàm. Khi đó hàm số $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ có đạo hàm theo x. Thật vậy, ta có $y'_t = y'_x . x'_t$. Suy ra

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm y′= y′(x) của hàm số y = y(x) cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2); \\ y = 2t - 2\text{arctg}t. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(2t - 2\text{arctg}t)'}{(\ln(1+t^2))'_t} = \frac{2 - \dfrac{2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = t.$$

Ví dụ 2. Tìm đạo hàm y′= y′(2) của hàm số y = y(x) cho bởi phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 2e^t; \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t+t^2)'}{(2e^t)'_t} = \frac{1+2t}{2e^t}.$$

Tại x = 2 ta có $2e^t = 2$ nên t = 0. Suy ra y'(2) = 1/2.

3. VI PHÂN

Cho hàm số f(x) có đạo hàm tại x_0. Đặt

$$\varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0).$$

Khi đó, $\varphi(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, và

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\varphi(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

trong đó $o(\Delta x) = \Delta x\varphi(\Delta x)$. Chú ý rằng

$$\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = \varphi(\Delta x) \to 0 \text{ khi } \Delta x \to 0$$

nên $o(\Delta x)$ là một VCB cấp cao hơn VCB Δx khi $\Delta x \to 0$. Ta nói f(x) khả vi tại x_0 và vi phân của f(x) tại x_0 là $f'(x_0)\Delta x$ theo định nghĩa sau:

3.1. Định nghĩa. Cho hàm số f(x) xác định trên một khoảng chứa x_0. Ta nói f(x) khả vi tại x_0 nếu tồn tại một hằng số A và một hàm số $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn VCB Δx khi $\Delta x \to 0$ sao cho với mọi Δx khá bé ta có

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x).$$

Khi đó đại lượng $A\Delta x$ được gọi là vi phân của f(x) tại điểm x_0, ký hiệu là $df(x_0)$. Như vậy,

$$df(x_0) = A\Delta x.$$

Lý luận trên cho thấy nếu f(x) có đạo hàm tại x_0 thì f(x) khả vi tại x_0 và $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Tổng quát hơn, ta có kết quả sau:

3.2. Định lý. Hàm số f(x) khả vi tại x_0 khi và chỉ f(x) có đạo hàm tại x_0. Khi đó vi phân của f(x) tại x_0 là $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

3.3. Biểu thức của vi phân:

Từ kết quả trên, ta có vi phân của f(x) định bởi:

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Nhận xét rằng với $g(x) = x$ thì $g'(x) = 1$, do đó $dg(x) = 1.\Delta x = \Delta x$, nghĩa là $dx = \Delta x$. Do đó ta có biểu thức của vi phân của f(x) như sau:

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

Chú ý. Do công thức trên, ta có:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

3.4. Ý nghĩa của vi phân và công thức tính gần đúng:

Cho hàm số f(x) khả vi tại x_0. Khi đó với mọi Δx khá bé ta có

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

Vì $o(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn VCB Δx khi $\Delta x \to 0$ nên khi Δx khá bé ta có

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

Nói cách khác, khi Δx khá bé, số gia $\Delta f(x_0)$ của f(x) tại x_0 gần bằng vi phân $df(x_0)$ của f(x) tại x_0 và ta có công thức tính gần đúng:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0)}$$

Ví dụ. Cho hàm số y = arctgx. Tìm các vi phân dy và dy(1). Áp dụng: Tính gần đúng arctg(1,02).

Giải. 1) Vi phân $dy = y'dx = \dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2) Vi phân $dy(1) = y'(1)dx = \dfrac{1}{1+1^2}dx = \dfrac{1}{2}dx$.

3) Ta tính gần đúng arctg(1,02) như sau: Đặt $x_0 = 1$; $\Delta x = 0{,}02$. Ap dụng công thức tính gần đúng cho hàm số y = arctgx, ta được

$$y(1{,}02) \approx y(1) + dy(1).$$

Do đó arctg(1,02) ≈ arctg1 + (1/2).0,02= π/4 + 0,01.

3.5. Định lý. Cho các hàm số u = u(x) và v = v(x) có các vi phân là du và dv. Ta có

1	$d(u + v) = du + dv$
2	$d(ku) = kdu$; (k: Const)
3	$d(uv) = udv + vdu$
4	$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$

4. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

4.1. Đạo hàm cấp cao

1) Định nghĩa. Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm $f'(x)$. Ta còn gọi $f'(x)$ là đạo hàm cấp một của f(x).

Nếu hàm số $f'(x)$ lại có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp hai của f(x), ký hiệu là $f''(x)$ hay $f^{(2)}(x)$. Như vậy,

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp (n−1) của f(x) được gọi là đạo hàm cấp n của f(x),ký hiệu là $f^{(n)}(x)$. Như vậy,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'}$$

2) Định lý. Giả sử các hàm u = u(x) và v = v(x) có các đạo hàm cấp n là $u^{(n)} = u^{(n)}(x)$; $v^{(n)} = v^{(n)}(x)$. Ta có

$$\text{a) } (u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)};$$

$$\text{b) } (ku)^{(n)} = ku^{(n)}; \qquad (\text{k: Const})$$

$$\text{c) } (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

trong đó $u^{(0)} = u$ và $v^{(0)} = v$.

Ví dụ. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = x^n$;   b) $y = \sin x$;   c) y cosx;   d) $y = \dfrac{1}{x + a}$ (a: const)   e) $y = x^2\sin x$.

Giải. a) Với $y = x^n$, ta có

$y' = nx^{n-1}$, $y'' = n(n - 1)x^{n-2}$, $y''' = n(n - 1)(n - 2)x^{n-3}$, ...,

$y^{(n)} = n(n - 1)(n - 2)...3.2.1 = n!$,

$y^{(k)} = 0; \forall k > n.$

b) Với $y = \sin x$, ta có

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$

$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}).$

Tổng quát, $y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$

c) Tương tự, với $y = \cos x$, ta có: $y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$

d) Với $y = \frac{1}{x+a}$, ta có

$$y' = -\frac{1}{(x+a)^2}; y'' = (-1)^2\frac{2}{(x+a)^3}$$

Ta chứng minh

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}. \qquad (1)$$

Với $n = 1$, (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k$, nghĩa là

$$y^{(k)} = (-1)^k\frac{k!}{(x+a)^{k+1}}.$$

Với $n = k + 1$, ta có

$$y^{(k+1)} = \left((-1)^k\frac{k!}{(x+a)^{k+1}}\right)' = -(-1)^k\frac{k!(k+1)(x+a)^k}{(x+a)^{2(k+1)}} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(x+a)^{k+2}}.$$

Vậy (1) cũng đúng với $n = k + 1$. Ta kết luận

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

e) Đặt $u = x^2$, $v = \sin x \Rightarrow y = uv$. Theo các kết quả trên ta có

$u' = 2x, u'' = 2, u(k) = 0, \forall k \geq 3;$

$v^{(m)} = \sin(x + m\frac{\pi}{2}).$

Suy ra

$$y' = 2x\sin x + x^2\sin(x + \frac{\pi}{2}) = x^2\sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2x\cos(x + \frac{\pi}{2}).$$

Với $n \geq 2$ ta có

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)}$$

$$= x^2\sin(x + n\frac{\pi}{2}) + 2nx\sin(x + (n-1)\frac{\pi}{2}) + n(n-1)\sin(x + (n-2)\frac{\pi}{2}).$$

$$= (x^2 - n^2 + n)\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - 2nx\cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Kết luận

$$y^{(n)} = (x^2 - n^2 + n)\sin(x + n\frac{\pi}{2}) - 2nx\cos(x + n\frac{\pi}{2}), \forall n \geq 1.$$

4.2. Vi phân cấp cao

Giả sử hàm số f(x) có vi phân df(x)= f'(x)dx. Ta còn gọi df(x) là vi phân cấp một của f(x).

Nếu hàm số $f'(x)$ khả vi thì $df(x) = f'(x)dx$ có vi phân và vi phân đó được gọi là vi phân cấp hai của f(x), ký hiệu $d^2f(x)$. Ta có

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d[f'(x)dx] = f''(x)dx.dx= f''(x)dx^2.$$

Vậy $d^2f(x) = f^{(2)}(x)dx^2$.Tổng quát, vi phân của vi phân cấp (n − 1) của f(x) được gọi là vi phân cấp n của f(x), ký hiệu $d^nf(x)$. Ta có

$$\boxed{d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n}$$

Ví dụ. Với y = sinx, ta có $d^ny = y^{(n)}\,dx^n = \sin(x + n\frac{\pi}{2})dx^n$.

5. QUI TẮC L'HOSPITAL

5.1. Định lý (Qui tắc L'Hospital). Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ (nghĩa là: $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ hoặc $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$). Giả sử tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Khi đó $\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

5.2. Chú ý. 1) Nếu sau khi sử dụng Qui tắc L'Hospital mà giới hạn vẫn còn dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ thì ta có thể sử dụng tiếp qui tắc này. Lưu ý: Nên kết hợp với qui tắc thay thế hàm tương đương để việc tính đạo hàm được dễ dàng hơn.

2) Qui tắc L'Hospital chỉ được áp dụng trực tiếp cho giới hạn thuộc hai dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$. Đối với các dạng vô định khác, muốn áp dụng ta cần đưa về một trong hai dạng vô định trên mà ta có thể tóm tắt trong bảng sau:

BẢNG ÁP QUI TẮC L'HOSPITAL TÌM GIỚI HẠN			
DẠNG VÔ ĐỊNH	**GIỚI HẠN**	**BIẾN ĐỔI**	**QUI TẮC L'HOSPITAL**
0/0	$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$		$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
∞/∞	$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{g(x)}$		$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
0.∞	$L=\lim\limits_{x\to A}f(x)g(x)$	$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ hay $L=\lim\limits_{x\to A}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$ hay $L=\lim\limits_{x\to A}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$
$\infty-\infty$	$L=\lim\limits_{x\to A}[f(x)-g(x)]$	$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$	$L=\lim\limits_{x\to A}\frac{\left(\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(x)g(x)}\right)'}$
1^{∞}	$L=\lim\limits_{x\to A}f(x)^{g(x)}$	$L=e^{\overbrace{\lim\limits_{x\to A}[f(x)-1]g(x)}^{K}}$	$K=\lim\limits_{x\to A}\frac{[f(x)-1]'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$ hay $K=\lim\limits_{x\to A}\frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)-1}\right)'}$
1^{∞} 0^{0} ∞^{0}	$L=\lim\limits_{x\to A}f(x)^{g(x)}$	$L=e^{\overbrace{\lim\limits_{x\to A}g(x)\ln f(x)}^{K}}$	$K=\lim\limits_{x\to A}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}$

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}. \qquad L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln|\cos(\frac{\pi x}{2})|}{tg(\frac{\pi x}{2})}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x). \qquad L_4 = \lim_{x\to -\infty} x^{10}e^x.$$

$$L_5 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x + 4^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad L_6 = \lim_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}}$$

$$L_7 = \lim_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\ln(1+2x)}$$

Giải. 1) $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. Ta thấy L_1 có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \overset{L'Hosp}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{L'Hosp}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

$$\overset{L'Hosp}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

2) $L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|\cos(\frac{\pi x}{2})|}{tg(\frac{\pi x}{2})}$. Ta thấy L_2 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có:

$$L_2 = \lim_{x\to 1}\frac{\ln|\cos(\frac{\pi x}{2})|}{tg(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}}{\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2(\frac{\pi x}{2})}} = -\lim_{x\to 1}\sin(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}) = 0.$$

3) $L_3 = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x)$. Ta thấy L_3 có dạng vô định $\infty - \infty$. Ta biến đổi

$$\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{tg^2 x} = \frac{tg^2 x - x^2}{x^2 tg^2 x} = \frac{(tgx + x)(tgx - x)}{x^2 tg^2 x}.$$

Khi $x \to 0$, ta có $tgx + x \sim 2x$ và $x^2 tg^2 x \sim x^4$. Do đó

$$\frac{1}{x^2} - \cot g^2 x = \frac{(tgx + x)(tgx - x)}{x^2 tg^2 x} \sim \frac{2x(tgx - x)}{x^4} = \frac{2(tgx - x)}{x^3}$$

Suy ra $L_3 = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x^3}$. Ta thấy bây giờ giới hạn L_3 có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$L_3 = 2\lim_{x\to 0} \frac{tgx - x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0} \frac{(1 + tg^2 x) - 1}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

4) $L_4 = \lim\limits_{x\to -\infty} x^{10} e^x$. Ta thấy L_4 có dạng vô định $0.\infty$. Ta biến đổi

$$L_4 = \lim_{x\to -\infty} x^{10} e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{10}}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{e^{-\frac{x}{10}}} \right)^{10} = (K_4)^{10}.$$

trong đó $K_4 = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x}{10}}}$. Ta thấy K_4 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$K_4 = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x}{10}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-\frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}} = 0.$$

Suy ra $L_4 = (K_4)^{10} = 0$.

5) $L_5 = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$. Ta thấy L_5 có dạng vô định 1^∞. Ta có

$$L_5 = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right)}$$

Xét giới hạn

$$K_5 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3^x + 4^x}{2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(3^x + 4^x\right) - \ln 2}{x}.$$

Ta thấy K_5 có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có:

$$K_5 = \lim_{x\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(3^x + 4^x\right) - \ln 2}{x}. = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3^x \ln 3 + 4^x \ln 4}{3^x + 4^x}}{1} = \frac{\ln 3 + \ln 4}{2} = \frac{1}{2}\ln 12 = \ln\sqrt{12}.$$

Suy ra

$$L_5 = e^{K_5} = e^{\ln\sqrt{12}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

6) $L_6 = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)^{\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}}$. Ta thấy L_5 có dạng vô định 0^0. Ta có

$$L_6 = \lim_{x\to 2^+}\left(x-2\right)^{\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}} = e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}\ln(x-2)}$$

Xét giới hạn

$$K_6 = \lim_{x\to 2^+}\frac{3}{\ln|\sin(2-x)|}\ln\left(x-2\right) = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(x-2\right)}{\ln|\sin(2-x)|}.$$

Ta thấy K_6 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$K_6 = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln\left(x-2\right)}{\ln|\sin(2-x)|} = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\cos(2-x)}{\sin(2-x)}} = 3\lim_{x\to 2^+}\frac{\sin(2-x)}{2-x}\frac{1}{\cos(2-x)} = 3.$$

Suy ra $L_6 = e^{K_6} = e^3$.

7) $L_7 = \lim\limits_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\ln(1+2x)}$. Ta thấy L_7 có dạng vô định ∞^0. Ta có

$$L_7 = \lim_{x\to 0^+}(\cot gx)^{\ln(1+2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(1+2x)\ln(\cot gx)}$$

Xét giới hạn

$$K_7 = \lim_{x\to 0^+}\ln(1+2x)\ln(\cot gx).$$

Ta thấy K_7 có dạng vô định $0.\infty$. Khi $x \to 0^+$, ta có $\ln(1+2x) \sim 2x$, do đó

$$\ln(1+2x)\ln(\cot gx) \sim 2x\ln(\cot gx).$$

Suy ra

$$K_7 = \lim_{x\to 0^+}2x\ln(\cot gx) = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot gx)}{\frac{1}{x}}.$$

Ta thấy bây giờ giới hạn K_7 có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Ap dụng Qui tắc L'Hospital, ta có

$$K_7 = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot gx)}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{(\frac{1}{\sin^2 x})}{\cot gx}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin x\cos x} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x\cos x} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x} = 0.$$

Suy ra $L_7 = e^{K_7} = e^0 = 1$.

6. KHAI TRIỂN TAYLOR

6.1. Định lý (Taylor). Cho hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n + 1 liên tục trên đoạn [a,b]. Khi đó với mỗi $x_0 \in [a,b]$, ta có

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}} \quad (1)$$

với mọi $x \in [a,b]$, trong đó c nằm giữa x_0 và x. Ta gọi (1) là khai triển Taylor đến cấp n của f(x) tại x_0 với phần dư dưới dạng Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad .$$

Chú ý rằng $R_n(x)$ là một VCB cấp cao hơn VCB $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$ nên ta có thể viết $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$. Như vậy, (1) còn được viết dưới dạng:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)} \quad (1')$$

Ta gọi (1′) là khai triển Taylor đến cấp n của f(x) tại x_0 với phần dư dưới dạng Peano.

6.2. Khai triển MacLaurin. Khai triển Taylor của f(x) tại $x_0 = 0$ được gọi là khai triển MacLaurin của f(x). Như vậy, khai triển MacLaurin đến cấp n của f(x) định bởi:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}} \quad (2)$$

hay

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)} \quad (2')$$

trong đó c nằm giữa 0 và x; $o(x^n)$ là một VCB cấp cao hơn VCB x^n khi $x \to 0$.

6.3. Khai triển MacLaurin của một số hàm sơ cấp:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\sin[c + (2k+3)\frac{\pi}{2}]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \qquad (x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+2}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (x > -1)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-c)^{n+1}}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (x < 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad (x > -1) \end{array}}$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2})}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})}$$

6.4. Ứng dụng

1) Tính xấp xỉ. Ta thường dùng khai triển MacLaurin để tính xấp xỉ giá trị của hàm f(x) sau khi chọn n đủ lớn để phần dư $R_n(x)$ có trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

Ví dụ. Tính $\cos 25^o$ chính xác đến 0,00001.

Giải. Xét khai triển MacLaurin của cosx:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]$$

Phần dư của khai triển là:

$$R_n(x) = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]$$

Với $x = 25^o = \frac{5\pi}{36}$, ta có:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos[c + (k+1)\pi]\right| \le \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{1}{(2k+2)!}\left(\frac{5\pi}{36}\right)^{2k+2}$$

Chọn k = 2, ta có:

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{6!}\left(\frac{5\pi}{36}\right)^{2k+2} < 0,00001.$$

Vậy ta có thể tính $\cos 25^o$ chính xác đến 0,00001 nhờ công thức:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

nghĩa là

$$\cos 25^{\circ} = \cos\frac{5\pi}{36} \approx 1 - \frac{\left(\frac{5\pi}{36}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{5\pi}{36}\right)^4}{4!} \approx 0,90632.$$

2) Tính giới hạn dạng vô định:

Ví dụ. Tính các giới hạn sau:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4}{x(x - \operatorname{tg}x)}.$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\frac{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x - \sin x}.$$

$$L_3 = \lim_{x\to 0}\frac{3x - 3\operatorname{arctg}x - x^3 + x^4}{6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3}.$$

Giải. 1) $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4}{x(x - \operatorname{tg}x)}$. Khi $x \to 0$, ta có

$$2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4 = 2 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) - x^2 + 2x^4 = \frac{23}{12}x^4 + o(x^5) \sim \frac{23}{12}x^4,$$

$$x - \operatorname{tg}x = x - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^5)\right) = -\frac{x^3}{3} + o(x^4) \sim -\frac{x^3}{3} \Rightarrow x(x - \operatorname{tg}x) \sim -\frac{x^4}{3}.$$

nên

$$\frac{2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4}{x(x - \operatorname{tg}x)} \sim \frac{\frac{23}{12}x^4}{-\frac{x^4}{3}} \to -\frac{23}{4}.$$

Vậy $L_1 = -\frac{23}{4}$.

2) $L_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x - \sin x}$. Khi $x \to 0$, ta có

$$6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6 = 6\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) + x^3 - 3x^2 - 6x - 6 = 2x^3 + o(x^3) \sim 2x^3,$$

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^3}{6}.$$

nên

$$\frac{6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x - 6}{x - \sin x} \sim \frac{2x^3}{\frac{x^3}{6}} \to 12.$$

Vậy $L_2 = 12$.

3) $L_3 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4}{6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3}$. Khi $x \to 0$, ta có

$$3x - x^3 + x^4 - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4 = 3x - x^3 + x^4 - 3\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) = x^4 + o(x^4) \sim x^4,$$

$$6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3 = 6\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) + 6x + 3x^2 + 2x^3 = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{3}{2}x^4.$$

Suy ra

$$\frac{3x - x^3 + x^4 - 3\text{arctg}x - x^3 + x^4}{6\ln(1-x) + 6x + 3x^2 + 2x^3} \sim \frac{x^4}{-\frac{3}{2}x^4} \to -\frac{2}{3}.$$

Vậy $L_3 = -\dfrac{2}{3}$.

7. ỨNG DỤNG

7.1. Tính đơn điệu - Cực trị - Tính lồi lõm - Điểm uốn - GTLN - GTNN

Sinh viên tự ôn

7.2. Bài toán lập kế hoạch sản xuat để đạt lợi nhuận tối đa

Bài toán: Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D=D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C=C(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Phương pháp giải: Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó

$$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q).$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = D^{-1}(Q).Q$$

- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) = Q.D^{-1}(Q) - C(Q)$$

Ta cần xác định giá trị $Q > 0$ để $\pi(Q)$ đạt cực đại. Thông thường ta chỉ cần tìm $Q = Q_0 > 0$ sao cho $\pi'(Q_0) = 0$ và $\pi''(Q_0) < 0$, hơn nữa, để phù hợp với thực tế, tại $Q = Q_0$ ta phải có lợi nhuận, đơn giá và tổng chi phí đều dương.

Ví dụ: Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu $Q_D = 656 - \frac{1}{2}P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^3 - 77.Q^2 + 1000Q + 40000$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

Giải. Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho:

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 656 - \frac{1}{2}P = Q \Leftrightarrow P = 1312 - 2Q.$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = (1312 - 2Q)Q.$$

- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= R(Q) - C(Q)\\ &= (1312 - 2Q)Q - (Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 40000)\\ &= -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 40000.\end{aligned}$$

Cần xác định giá trị $Q > 0$ để $\pi(Q)$ đạt cực đại. Ta có:

$$\pi'(Q) = -3Q^2 + 150Q + 312.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\pi'(Q) = 0 &\Leftrightarrow -3Q^2 + 150Q + 312 = 0\\ &\Leftrightarrow Q = -2 \text{ (loại) hay } Q = 52.\end{aligned}$$

Ta cũng có: $\pi''(Q) = -6Q + 150$ nên $\pi''(52) < 0$. Suy ra $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = 52$. Khi đó ta có các số liệu sau đều phù hợp:

- Lợi nhuận là $\pi = 38416 > 0$.
- Đơn giá là $P = 1208 > 0$.
- Tổng chi phí là $C = 24400 > 0$.

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, xí nghiệp cần sản xuất với mức sản lượng $Q = 52$. Khi đó lợi nhuận tương ứng là $\pi = 38416$.

7.3. Bài toán thuế doanh thu

Bài toán: Giả sử một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D=D(P)$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C=C(Q)$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên môt đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Phương pháp giải: Với mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm, xí nghiệp sẽ định mức sản lượng Q phụ thuộc vào t sao cho đạt lợi nhuận tối đa. Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho $Q_D = Q$. Do đó

$$D(P) = Q \Leftrightarrow P = D^{-1}(Q).$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = D^{-1}(Q).Q$$

- Tiền thuế xí nghiệp phải nộp là: $T(t) = Qt$.

- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\pi(Q) = R(Q) - C(Q) - Qt = D^{-1}(Q).Q - C(Q) - Qt.$$

Như đã nói ở trên, ta cần xác định Q sao cho $\pi(Q)$ đạt cực đại. Khi đó $Q = Q(t)$ (Q phụ thuộc vào t) và tiền thuế mà xí nghiệp phải nộp là $T = Q(t)t$. Để thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T = Q(t)t$ đạt cực đại. Chú ý rằng để phù hợp với thực tế, tại giá trị t tìm được ta phải có sản lượng, đơn giá, lợi nhuận và tổng chi phí đều dương.

Ví dụ. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2000 - P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^2 + 1000\,Q + 50$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

Giải. Với mức sản lượng Q, để bán hết sản phẩm, xí nghiệp cần bán theo đơn giá P sao cho:

$$Q_D = Q \Leftrightarrow 2000 - P = Q \Leftrightarrow P = 2000 - Q.$$

Khi đó:

- Doanh thu của xí nghiệp là:

$$R(Q) = P.Q = (2000 - Q)Q.$$

- Tiền thuế xí nghiệp phải nộp là: $T(t) = Qt$.

- Lợi nhuận của xí nghiệp là:

$$\begin{aligned}\pi(Q) &= R(Q) - C(Q) - Qt\\ &= (2000 - Q)Q - (Q^2 + 1000\,Q + 50) - Qt\\ &= -2Q^2 + (1000 - t)\,Q - 50.\end{aligned}$$

Mức sản lượng được định ra sao cho $\pi(Q)$ đạt cực đại. Ta có:

$$\pi'(Q) = -4Q + 1000 - t.$$

Suy ra:

$$\pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow -4Q + 1000 - t = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1000 - t}{4}.$$

Vì $\pi''(Q) = -4 < 0$ nên $\pi(Q)$ đạt cực đại tại $Q = \dfrac{1000 - t}{4}$. Khi đó tiền thuế mà xí nghiệp phải nộp là:

$$T(t) = Qt = \frac{1000t - t^2}{4}.$$

Ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T(t)$ đạt cực đại.

Ta có

$$T'(t) = \frac{1000 - 2t}{4}.$$

Suy ra

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1000 - 2t}{4} = 0 \Leftrightarrow t = 500.$$

Vì $T''(t) = -1/2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 500$. Khi đó ta có các số liệu sau đều phù hợp:

- Sản lượng là $Q = 125 > 0$. Tiền thuế thu được là $T = 62500$.
- Đơn giá là $P = 1875 > 0$.
- Lợi nhuận là $\pi = 31200 > 0$.
- Tổng chi phí là $C = 140675 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 62500$.

7.4. Bài toán thuế nhập khẩu

Bài toán: Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế nhập khẩu) là $P_1 < P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng nhập khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Phương pháp giải: Gọi t là mức thuế nhập khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thỏa điều kiện $t > 0$ và $t + P_1 < P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ nhập sản phẩm trên để bán với đơn giá P thỏa $t + P_1 < P < P_0$ với số lượng là $Q_D - Q_S = D(P) - S(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\pi(P) = (P - P_1 - t)[D(P) - S(P)].$$

Tất nhiên công ty sẽ chọn đơn giá để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Khi đó $P = P(t)$ (P phụ thuộc vào t) và tiền thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t[D(P(t)) - S(P(t))].$$

Để thu được nhiều thuế nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ để $T(t)$ đạt cực đại. Mức thuế t phải thỏa $t + P_1 < P_0$ và để phù hợp với thực tế, ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế) là $P_1 = 1600$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

Giải. Trước hết ta tìm đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có:

$$Q_S = Q_D \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200.$$

Vậy đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa là $P_0 = 2200$.

Gọi t là mức thuế nhập khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Điều kiện: $t > 0$; $1600 + t < 2200$ (*).

Khi đó: Đơn giá P thỏa $1600 + t < P < 2200$ (**) và ta có

- Lượng hàng mà công ty nhập về là:

$$Q_D - Q_S = (4200 - P) - (P - 200) = 4400 - 2P.$$

- Lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\begin{aligned}\pi(P) &= (P - P_1 - t)[\, Q_D \;\; Q_S] = (P - 1600 - t)(\,4400 - 2P)\\ &= -2P^2 + 2(3800 + t)P - 4400(1600 + t).\end{aligned}$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có:

$$\pi'(P) = -4P + 2(3800 + t).$$

Suy ra:

$$\pi'(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(3800 + t) = 0 \Leftrightarrow P = 1900 + \frac{t}{2}.$$

Vì $\pi''(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 1900 + \frac{t}{2}$. Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t[\, Q_D - Q_S] = t\,(4400 - 2P) = t(600 - t).$$

Ta cần xác định t để T(t) đạt cực đại. Ta có:

$$T'(t) = 600 - 2t.$$

Suy ra

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 600 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 300.$$

Vì $T''(t) = -2 < 0$ nên T(t) đạt cực đại tại $t = 300$ với $T(t) = 90000$. Kiểm tra ta thấy điều kiện (*); (**) được thỏa và các số liệu sau đều phù hợp:

- Đơn giá là $P = 2050 > 0$.
- Lượng cung $Q_S = 1850 > 0$.
- Lượng cầu là $Q_D = 2150 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế nhập khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 300$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 90000$.

7.5. Bài toán thuế xuất khẩu

Bài toán. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = S(P)$ và $Q_D = D(P)$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ đi chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế xuất khẩu) là $P_1 > P_0$, trong đó P_0 là đơn giá tại điểm cân bằng của thị trường nội địa. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất (Giả sử khối lượng xuất khẩu của công ty không ảnh hưởng đến giá bán trên thị trường quốc tế).

Phương pháp giải: Gọi t là mức thuế xuất khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Mức thuế t phải thỏa điều kiện $t > 0$ và $P_1 - t > P_0$. Do được độc quyền, công ty sẽ thu mua sản phẩm trên với đơn giá P thỏa $P_0 < P < P_1 - t$ với số lượng là $Q_S - Q_D = S(P) - D(P)$. Khi đó lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\pi(P) = (P_1 - P - t)[S(P) - D(P)].$$

Tất nhiên công ty sẽ chọn đơn giá mua để lợi nhuận đạt cao nhất. Do đó ta cần xác định P sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Khi đó $P = P(t)$ (P phụ thuộc vào t) và tiền thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t[S(P(t)) - D(P(t))].$$

Để thu được nhiều thuế nhất từ công ty ta cần xác định giá trị $t > 0$ để T(t) đạt cực đại. Mức thuế t phải thỏa $P_1 - t > P_0$ và để phù hợp với thực tế, ta phải có các đại lượng tương ứng như đơn giá mua, lượng cung, lượng cầu đều dương.

Ví dụ. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 4200 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế) là $P_1 = 3200$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

Giải. Trước hết ta tìm đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa. Ta có

$$Q_S = Q_D \Leftrightarrow P - 200 = 4200 - P \Leftrightarrow P = 2200.$$

Vậy đơn giá tại điểm cân bằng trong thị trường nội địa là $P_0 = 2200$.

Gọi t là mức thuế xuất khẩu trên một đơn vị sản phẩm. Điều kiện: $t > 0$; $3200 - t > 2200$ (*).

Khi đó: Công ty sẽ thu mua với đơn giá P thoả:

$$2200 < P < 3200 - t \ (**)$$

- Lượng hàng mà công ty xuất khẩu là:

$$Q_S - Q_D = (P - 200) - (4200 - P) = 2P - 4400.$$

- Lợi nhuận mà công ty thu được là:

$$\begin{aligned}\pi(P) &= (P_1 - P - t)(Q_S - Q_D) = (3200 - P - t)(2P - 4400)\\ &= -2P^2 + 2(5400 - t)P - 4400(3200 - t).\end{aligned}$$

Đơn giá P được định ra sao cho $\pi(P)$ đạt cực đại. Ta có

$$\pi'(P) = -4P + 2(5400 - t).$$

Suy ra:

$$\pi'(P) = 0 \Leftrightarrow -4P + 2(5400 - t) = 0 \Leftrightarrow P = 2700 - \frac{t}{2}.$$

Vì $\pi''(P) = -4 < 0$ nên $\pi(P)$ đạt cực đại tại $P = 2700 - \frac{t}{2}$. Khi đó tiền thuế mà công ty phải nộp là

$$T(t) = t(Q_S - Q_D) = t(2P - 4400) = t(1000 - t).$$

Ta cần xác định t để T(t) đạt cực đại. Ta có

$$T'(t) = 1000 - 2t.$$

Suy ra

$$T'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 500.$$

Vì $T''(t) = -2 < 0$ nên $T(t)$ đạt cực đại tại $t = 500$ với $T(t) = 250000$. Kiểm tra ta thấy điều kiện (*) được thỏa và các số liệu sau đều phù hợp:

- Đơn giá là $P = 2450 > 0$ và thoả (**).
- Lượng cung $Q_S = 2250 > 0$.
- Lượng cầu là $Q_D = 1750 > 0$.

Kết luận: Để thu được nhiều nhất thuế xuất khẩu từ công ty, cần định mức thuế trên một đơn vị sản phẩm là $t = 500$. Khi đó tiền thuế thu được là $T = 250000$.

BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\ln(\cos 4x)}.$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3\sin x}+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-2}{\sin 2x}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)+2\arcsin^3 x}{1-\cos 4x+\sin^2 x}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x^3+\operatorname{tg}^2 3x)+2\arcsin^2 x}{1-\cos^3 2x+\sin^2 x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x+4)(1-\cos 2x)+(e^{2x}-1)^2+x^4}{\ln(\cos 4x)+x^3}.$$

$$f)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+3x+4)\ln(\cos x)+\cos 2x-1}{(x^2+2x+2)(\sin 2x+x^2)^2}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-e^x)(x^2+1-\cos x)}{x(\cos 3x-\cos x)\ln(1+e^2-\cos x)}$$

$$h)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)(x^2-2x+\sin\frac{\pi x}{2})+\sin\frac{\pi x}{2}-e^{(x-1)^2}}{(e^{2x}-e^2)(x^4-1)+\ln^2 x}$$

$$i)\ \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\ln(x+2)+x^3+4x^2+5x+1+e^{(x+1)^2}}{(1+\cos\pi x)(x^3+1)-\sqrt{x^2+2x+2}+1}$$

$$j)\ \lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{tg}(x^3-3x-2)+\sqrt{7+x}-3e^{x-2}+x^3-3x^2+4}{x(e^{2x}-e^4)+\sin\pi x+\cos\pi x-1}$$

2. Tính các giới hạn sau:

$$a)\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2+x}}-\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-x}}).$$

$$b)\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2+x}}-\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-x}})$$

$$c)\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{3x^3+3x^2+x+1}-\sqrt[3]{3x^3-x^2+1})$$

$$d)\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{2x^3+x^2+2x+1}+\sqrt[3]{1-x^2-2x^3})$$

$$e)\lim_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x\sqrt{x^4+1}+2x+1}+\sqrt[3]{1-x^2-x^3})$$

3. Tính các giới hạn sau:

$$a)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+1}\right).\qquad b)\lim_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\cot gx}$$

$$c)\lim_{x\to0^+}(\cos 2x+x^2)^{\cot g^3x}\qquad d)\lim_{x\to0^-}(\cos 2x+x^2)^{\cot g^3x}$$

$$e)\lim_{x\to0}(\cos 2x+x^2)^{\cot g^3x}$$

4. Định các tham số a, b để các hàm số sau liên tục tại các điểm được chỉ ra:

$$a)\ y=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-\cos 2x}{x^3+4x} & \text{nếu } x\neq 0;\\ a & \text{nếu } x=0.\end{cases}\qquad \text{tại } x=0.$$

$$b)\ y=\begin{cases}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} & \text{nếu } x<0;\\ ax+b & \text{nếu } 0\le x\le 1;\\ \operatorname{arctg}(\dfrac{1}{x^2+2x-3}) & \text{nếu } x>1.\end{cases}\qquad \text{tại } x=0 \text{ và } x=1.$$

5. Định các tham số a, b để các hàm số sau liên tục trên **R**:

$$a)\ y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x-2)^3} & \text{nếu } x\neq 2;\\ a & \text{nếu } x=2.\end{cases}$$

b) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x^2 - 3x + 2} & \text{nếu } x < 1; \\ ax^2 + bx + 1 & \text{nếu } 1 \le x \le 2; \\ \dfrac{\ln(x^2 - 4x + 5)}{2 - \sqrt{2 + x}} & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$

6. Tìm đạo hàm $y' = y'(x)$ của các hàm số sau:

a) $y=(x\cos 2x)^{x\sin 3x}$ b) $y = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln 2x}$

7. Tìm đạo hàm $y' = y'(x)$ của các hàm ẩn $y = y(x)$ định bởi:

a) $y= x+\operatorname{arctg} y$.

b) $y = 1 + ye^x$.

c) $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$. Từ đó xác định $y'(0)$.

d) $y\cos x + \sin x + \ln y = 0$. Từ đó xác định $y'(\frac{\pi}{2})$.

8. Tìm các đạo hàm $y' = y'(x_0)$ và $y'' = y''(x_0)$ của các hàm số $y = y(x)$ được cho dưới dạng tham số sau:

a) $\begin{cases} x = \ln(1 + t) \\ y = 2t - 2\operatorname{arctg} t \end{cases}$ tại $x_0 = \ln 2$

b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

c) $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = t + t^2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$

9. Chứng minh rằng hàm số

$$y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm bên trái lẫn đạo hàm bên phải tại điểm này.

10. Chứng minh rằng hàm số

$$y = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$$

có đạo hàm trên R.

11. Cho $y = \sqrt[5]{x}$. Tìm dy và dy(32). Tính gần đúng $\sqrt[5]{31}$.

12. Cho y = $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{x}$. Tìm dy và dy(1). Tính gần đúng $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{1,05}$.

13.Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{acsin} x}{x-\operatorname{tg}x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{x(1-\cos 3x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg}x-\sin x)-x^3}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|\sin 2x|}{\ln|\sin 3x|}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^x$

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln(x-1))^{\operatorname{tg}(1-x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin 3x)^{2/\ln\sin x}$

j) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\ln(x-2)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{x^3}}$

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{2e^x-x^2-2x-2}$

14. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = x\sin x$ b) $y = x^2\cos x$

c) $y = x^3e^x$ d) $y = \dfrac{x}{e^x}$

e) $y = x^4\ln x$ f) $y = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

15. Tìm khai triển MacLaurin của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{1-\sin x}$ đến số hạng x^5.

b) $y = \cos(\sin 2x)$ đến số hạng x^6.

c) $y = \operatorname{arctg}(\sin 3x)$ đến số hạng x^5.

d) $y = \ln(\cos 2x)$ đến số hạng x^6.

e) $y = \operatorname{arctg}(1-\cos x)$ đến số hạng x^6.

16. Tìm khai triển Taylor tại x_0 của các hàm số sau đến số hạng $(x-x_0)^5$:

a) $y = x\sin x;\ x_0 = \frac{\pi}{6}$ b) $y = x^2\cos x;\ x_0 = \frac{\pi}{3}$

c) $y = x^3e^x\ ;\ x_0 = 1$ d) $y = \frac{x}{e^x};x_0 = 1$

e) $y = x^4\ln x; x_0 = 1.$ f) $y = \frac{x+1}{x^2+2x-3}; x_0 = 2.$

17. Tính gần đúng chính xác đến 10^{-6}:

a) $\cos 41^o$ b) $\ln 1,5$.

18. Xác định cấp của các vô cùng bé sau đây khi chọn x làm vô cùng bé chính:

a) $2 - 2\cos x - x^2 + 2x^4.$ b) $2x - 2\ln(1+x) - x^2.$

c) $x - 3\text{tg}x + x^3.$ d) $30x - 15\text{arctg}2x + 40x^3 - 96x^5.$

19. Tìm các khoảng tăng giảm và cực trị của các hàm số y sau đây, đồng thời tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của y trên tập D tương ứng:

a) $y = x(1-2\sqrt{x})$;

D = [1/4 , 1]; [1/4 , 1); (1/4 , 1); (1/4 , 1]; [1/4 , + ∞) .

b) $y = e^{x^2/2 - x - 6\ln|x|}$

D = [1 , 4]; (1 , 4]; [1 , 4); (1 , 4); [1 , + ∞); (– ∞, –1).

c) $y = x^3e^{x^2-5x}$

D = [4/3 , 2]; (4/3 , 2); [4/3 , 2); (4/3 , 2); (– ∞ , 4/3); [2 , + ∞); **R**.

d) $y = \sqrt{1+x} - x/4$

D = [1 , 4]; [1, 4); (1 , 4]; (1 , 4); (1, + ∞); [4 , + ∞).

e) $y = \frac{5x-1}{x^2-3x+2}$

D = [–2, 0]; (–2, 0); [–2, 0); (–2 , 0]; (2, + ∞); (– ∞, 0]

f) $y = \frac{x^4+1}{x^2+1}$

D = [–1, 1]; [–2, 0); (–2, 0]; (–2, 0); **R**.

g) $y = \frac{x^2+1}{x^4+1}$

D = [–1, 1]; [0, 2); (0, 2]; (0, 2); **R**.

20. Tìm các khoảng lồi lõm và điểm uốn của đồ thị của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{x^2}{2} + \ln|x|$; b) $y = xe^{-1/x}$; c) $y = (x+2)e^{1/x}$.

21. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu $Q_D = 300 - P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức sản lượng Q để xí nghiệp đạt lợi nhuận tối đa.

22. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết hàm cầu là $Q_D = 2640 - P$ (P là đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = Q^2 + 1000\,Q + 100$ (Q là sản lượng). Hãy xác định mức thuế t trên một đơn vị sản phẩm để có thể thu được nhiều thuế nhất từ xí nghiệp.

23. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 200$ và $Q_D = 1800 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế cộng với chi phí nhập khẩu (nhưng chưa tính thuế) là $P_1 = 500$. Một công ty được độc quyền nhập loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế nhập khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

24. Cho biết hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm trong thị trường nội địa lần lượt là $Q_S = P - 20$ và $Q_D = 400 - P$ (P là đơn giá). Biết rằng giá bán của loại sản phẩm đó trên thị trường quốc tế trừ chi phí xuất khẩu (nhưng chưa trừ thuế) là $P_1 = 310$. Một công ty được độc quyền xuất khẩu loại sản phẩm trên. Hãy xác định mức thuế xuất khẩu t trên một đơn vị sản phẩm để thu được từ công ty nhiều thuế nhất.

CHƯƠNG 2

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

A-TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1. Định nghĩa nguyên hàm. Hàm số F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên (a,b) nếu

$$F'(x)= f(x), \quad \forall x\in(a,b).$$

Ví dụ. 1) $\frac{x^4}{4}$ là một nguyên hàm của x^3 trên **R**.

2) cosx là một nguyên hàm của $-$ sinx trên **R**.

Khi nói đến nguyên hàm của f(x) mà không chỉ rõ khoảng (a,b) thì ta hiểu đó là nguyên hàm của f(x) trên các khoảng xác định của f(x).

1.2. Định lý. Cho F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên (a,b). Khi đó

1) Với mọi hằng số C, F(x) + C cũng là nguyên hàm của f(x) trên (a, b).
2) Ngược lại, mọi nguyên hàm của f(x) trên (a,b) đều có dạng F(x) + C.

1.3. Định nghĩa tích phân bất định

Tập hợp tất cả các nguyên hàm của f(x) được gọi là tích phân bất định của hàm f(x), ký hiệu là $\int f(x)dx$. Nếu biết F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ví dụ. $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C;\ \int \sin x dx = -\cos x + C.$

1.4. Tính chất

1) Nếu f(x) có nguyên hàm thì

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2) $2)\int f'(x)dx = f(x) + C.$

3) Với k là hằng số, ta có

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx + C.$$

4) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

1.5. Bảng các tính phân cơ bản

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (-1 \neq \alpha : \text{Const})$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \mid x \mid + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1: \text{Const})$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + tg^2 x)dx = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + cotg^2 x)dx = -\cot gx + C$
$\int tgxdx = -\ln \mid \cos x \mid + C$	$\int \cot gxdx = \ln \mid \sin x \mid + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ (0< a: Const)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}} = \ell n \left\| x + \sqrt{x^2 + h} \right\| + C$ (h: Const)
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ $(0 \neq a: \text{Const})$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x + a}{x - a} \right\| + C$ $(0 \neq a: \text{Const})$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{x - a}{x + a} \right\| + C$ $(0 \neq a:\text{Const})$	
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (0 < a: \text{Const})$	
$\int \sqrt{x^2 + h}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + h} + \frac{1}{2} h.\ln \mid x + \sqrt{x^2 + h} \mid + C \quad (h: \text{Const})$	

Chú ý. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì với $a \neq 0$ và b là các hằng số, ta có

$$\int f\left(ax + b\right)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Ví dụ. $\int e^{3x-4}dx = \frac{1}{3}e^{3x-4} + C.$

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

2.1. Phương pháp phân tích

Muốn tính tích phân bất định của một hàm số f(x) ta dùng các tính chất của tích phân và phân tích f(x) để đưa tích phân cần tính về các dạng tích phân cơ bản.

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{1/2}dx + \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

2) $\int \frac{x^4}{x^2+4}dx = \int \frac{x^4-16+16}{x^2+4}dx = \int (x^2 - 4 + \frac{16}{x^2+4})dx = \int x^2dx - 4\int dx + 16\int \frac{dx}{x^2+4}$

$= \frac{x^3}{3} - 4x + 8\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C.$

3) $\int \sin 5x.\sin 3xdx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2xdx - \frac{1}{2}\int \cos 8xdx$

$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

4) $\int \sin^2 2x\,dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

5) $\int (1+2x^2)^2dx = \int (1+4x^2+4x^4)dx = x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^5 + C$

6) $\int (1+2x)^{10}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{11}(1+2x)^{11} + C = \frac{1}{22}(1+2x)^{11} + C.$

2.2. Phương pháp đổi biến số

1. **Đổi biến số dạng 1**: Giả sử tích phân có dạng: $I = \int f\left[u(x)\right]u'(x)dx$, trong đó u(x) và u'(x) liên tục. Đặt t = u(x) ⇒ dt = u'(x)dx. Ta có

$$I = \int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (1)$$

Tính tích phân sau cùng trong (1) theo t, sau đó thay t = u(x) để suy ra I.

2. **Đổi biến số dạng 2**: Xét tích phân $I = \int f(x)dx$. Đặt x = φ(t), trong đó φ(t) có đạo hàm φ'(t) liên tục và x = φ(t) có hàm ngược $t = \varphi^{-1}(x)$. Khi đó dx = φ'(t)dt và

$$I = \int f(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

Tính tích phân sau cùng trong (2) theo t, sau đó thay $t = \varphi^{-1}(x)$ để suy ra I.

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

1) $I = \int x^2(3+2x^3)^4dx.$

Đặt $t = 3 + 2x^3 \Rightarrow dt = 6x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{6}$.

Suy ra $I = \int t^4 \frac{1}{6}dt = \frac{t^5}{30} + C = \frac{(3+2x^3)^5}{30} + C$.

2) $I = \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx.$

Đặt $t = x^2 + x - 3 \Rightarrow dt = (2x+1)dx.$ Suy ra

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + x - 3| + C.$$

3) $I = \int \frac{xdx}{x^2+x-3}.$ Ta có

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x-3}}_{J} = \frac{1}{2}\ln|x^2+x-3| - \frac{1}{2}J.$$

Xét $J = \int \frac{dx}{x^2+x-3}$. Ta có

$$x^2 + x - 3 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4}.$$

Suy ra

$$J = \int \frac{dx}{x^2+x-3} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2.\frac{\sqrt{13}}{2}}\ell n\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{13}}{2x+1+\sqrt{13}}\right| + C.$$

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2+x-3| - \frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{13}}{2x+1+\sqrt{13}}\right| + C.$$

4) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}.$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$. Suy ra

I= $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+x^4}\right| + C.$

5) $I = \int \frac{\ln^2 x + 1}{x\ln x}dx.$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Suy ra

I = $I = \int \frac{t^2+1}{t}dt = \int (t+\frac{1}{t})dt = \frac{t^2}{2} + \ln|t| + C = \frac{\ln^2 x}{2} + \ln|\ln x| + C.$

6) $I = \int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}}dx.$

Đặt $t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{4} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}tdt$. Suy ra

$$I = \int \frac{3\frac{t^2-1}{4}+5}{t}\frac{1}{2}tdt = \int (\frac{3}{8}t^2 + \frac{17}{8})dt = \frac{t^3}{8} + \frac{17t}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{(4x+1)^3} + \frac{17}{8}\sqrt{4x+1} + C.$$

7) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ (0 < a: Const).

Đặt x = asint, $\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$. Khi đó

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\,|\cos t| = a\cos t; dx = a\cos tdt.$$

Suy ra

$$I = \int a^2\cos^2 tdt = \frac{1}{2}a^2\int\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{1}{2}a^2(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \frac{1}{2}a^2 t + \frac{1}{4}a^2\sin 2t + C.$$

Mặt khác,

$$\frac{1}{4}a^2\sin 2t = \frac{1}{2}a^2\sin t\cos t = \frac{1}{2}a^2\sin t a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Vậy $I = \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$

2.3. Phương pháp tích phân từng phần

Cho các hàm số u = u(x) và v= v(x) co1ca1c đạo hàm $u' = u'(x)$ và $v' = v'(x)$ liên tục. Khi đó $(uv)' = u'v + uv'$ nên $uv' = (uv)' - vu'$. Suy ra

$$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int u'vdx = uv - \int u'vdx.$$

Ta đã chứng minh công thức tích phân từng phần:

$$\boxed{\int uv'dx = uv - \int vu'dx}$$

Ta còn viết công thức trên dưới dạng:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Chú ý. 1) Để tính $\int g(x)h(x)dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần có 2 cách đặt:

$$\begin{cases} u = g(x) \\ dv = h(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = g'(x)dx \\ v = \int h(x)dx \quad (\text{thường chọn } C = 0) \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} u = h(x) \\ dv = g(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = h'(x)dx \\ v = \int g(x)dx \quad (\text{thường chọn } C = 0) \end{cases}$$

Ta thường chọn cách đặt nào để tính được $\int vdu$.

2) Đối với một số bài toán, sau khi áp dụng tích phân từng phần, ta được mộ hệ thức có dạng

$$\int f(x)dx = F(x) + \alpha\int f(x)dx, \ (1 \neq \alpha : \text{Const}).$$

Khi đó

$$\int f\left(x\right)dx = \frac{1}{1-\alpha}F(x) + C.$$

3) Các tích phân sau đây được tính bằng phương pháp tích phân từng phần với cách đặt tương ứng (ở đây p(x) là đa thức theo x có a là hằng số):

LOẠI	**CÁCH ĐẶT**
$\int p(x)\sin axdx, \int p(x)\cos axdx, \int p(x)e^{ax}dx, ...$	$u = p(x)$; $dv = \sin axdx$ ($\cos axdx$, $e^{ax}dx,\ldots$)
$\int p(x)\ln axdx, \int p(x)\text{arctg}axdx, \int p(x)\arcsin axdx, ...$	$u = \ln ax$ ($\text{arctg}ax, \arcsin ax, \ldots$); $dv = p(x)dx$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

1) $I = \int x\cos x\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Suy ra $I = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$

2) $I = \int \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot gx \end{cases}$

Suy ra

$$I = -x\cot gx + \int \cot gx\,dx = -x\cot gx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = -x\cot g\,x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\cot g\,x + \ln\left|\sin x\right| + C.$$

3) $I = \int e^x \sin x\,dx$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x\,dx \\ v = e^x \end{cases}$

Suy ra $\quad I = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{I_1}.$

Tính I_1 : Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x\,dx \\ v = e^x \end{cases}$

Suy ra $\quad I_1 = e^x \cos x + \int e^x \sin\ x\,dx = e^x \cos x + I.$ Vậy

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I.$$

Từ đó $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$

4) $I = \int x^\alpha \ln x dx \quad (-1 \neq \alpha : \text{Const})$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^\alpha dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{cases}$. Ta có

$$I = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{dx}{x} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C$$

5) $I = \int x^2 e^{3x} dx.$ Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$. Suy ra

$$I = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\underbrace{\int xe^{3x}dx}_{I_1}.$$

Tính I_1: Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$.Ta có

$$I_1 = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

Vậy

$$I = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + C = \frac{1}{27}e^{3x}(9x^2 - 6x + 2) + C$$

6) $I = \int x \text{ arctg } x \text{ dx}$. Đặt $\begin{cases} u = \text{arctg}x \\ dv = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \dfrac{1+x^2}{2} \end{cases}$ .Ta có

$$I = \frac{1+x^2}{2}\text{arctg}x - \int \frac{1+x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2}x + C.$$

7) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ (0 < a: Const)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{a^2 - x^2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ v = x \end{cases}$ .Ta có

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int\left(-\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I.$$

Suy ra

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

8) $I = \int \sqrt{x^2 + h}\,dx =$ (h: Const)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + h} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + h}} \\ v = x \end{cases}$ .Ta có

$$I = x\sqrt{x^2 + h} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + h}}dx = x\sqrt{x^2 + h} - \int \frac{(x^2 + h) - h}{\sqrt{x^2 + h}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + h} - \int \sqrt{x^2 + h}dx + h\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}} = x\sqrt{x^2 + h} + h.\ln\left| x + \sqrt{x^2 + h}\right| - I.$$

Suy ra

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + h} + \frac{1}{2}h.\ln\left| x + \sqrt{x^2 + h}\right| + C.$$

3. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

3.1. Tích phân của các phân thức đơn giản

Xét các tích phân có dạng sau:

$$I_k = \int \frac{A}{(x-a)^k}dx\,,\ J_m = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx\,,$$

trong đó A, M, N, a, p, q $\in \mathbb{R}$; k , m nguyên dương và $p^2 - 4q < 0$.

1) $I_k = \int \frac{A}{(x-a)^k}dx$ được tính như sau:

$$I_1 = \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$I_2 = \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \qquad (k > 1).$$

2) Tính tích phân $J_1 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$:

Ta có $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$.

Vì $p^2 - 4p < 0$ nên $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Đặt $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Thực hiện đổi biến

$$t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow dt = dx.$$

Ta có $x^2 + px + q = t^2 + a^2$ và $Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)$. Do đó

$$J_1 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+p}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt \quad = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\text{arctg}\frac{t}{a} + C \ = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\text{arctg}\frac{t}{a} + C$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{4q-p^2}}\text{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-q^2}} + C$$

3) Tính tích phân $J_m = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$ $(m > 1)$:

Biến đổi giống như J_1 ta được

$$J_m = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}dt = \frac{M}{2}\underbrace{\int \frac{2tdt}{\left(t^2+a^2\right)^m}}_{K_m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}}_{L_m}.$$

Ta tính K_m bằng cách đổi biến $u = t^2 + a^2 \Rightarrow du = 2tdt$.

$$K_m = \int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -1\frac{1}{(m-1)u^{m-1}} + C = -\frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + C.$$

Ta tính $L_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ bằng công thức truy hồi như sau:

4) Tính tích phân $L_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ (m nguyên dương)

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{(t^2+a^2)^m} \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{2mt}{(t^2+a^2)^{m+1}}dt \\ v = t \end{cases}$. Ta có

$$L_m = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m} + 2m\underbrace{\int \frac{t^2}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}dt}_{L},$$

$$L = \int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{m+1}}dt = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} = L_m - a^2L_{m+1}.$$

Do đó

$$L_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mL_m - 2ma^2L_{m+1}.$$

Suy ra

$$\boxed{L_{m+1} = \frac{1}{2ma^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\frac{1}{a^2}L_m}$$

Đây là công thức truy hồi để tính L_m, trong đó

$$L_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

3.2. Tích phân các hàm hữu tỉ

Hàm hữu tỉ là một hàm số có dạng:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m}{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n} \qquad (1)$$

với $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ và $a_n, b_m \neq 0$ và P(x), Q(x) không có nghiệm chung.

Ta thấy nếu bậc của P(x) lớn hơn hoặc bằng bậc của Q(x) ($m \geq n$) thì bằng cách chia tử cho mẫu ta có thể biểu diễn (1) dưới dạng:

$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

trong đó $P_1(x)$, $P_2(x)$ là các đa thức theo x với bậc của $P_2(x)$ bé hơn bậc của Q(x). Vì $P_1(x)$ là đa thức nên tích phân $P_1(x)$ tính được dễ dàng. Vì vậy ta giả thiết rằng f(x) có dạng (1) với bậc của tử bé hơn bậc của mẫu ($m < n$). Khi đó $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ được phân tích thành tổng các phân thức đơn giản như sau:

Để minh họa, ta giả sử Q(x) có bậc 10 và được phân tích dưới dạng:

$$Q(x) = (x-a)(x-b)^3(x^2+px+q)(x^2+rx+s)^2$$

($p^2 - 4q < 0$; $r^2 - 4s < 0$). Khi đó

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{E_1x+F_1}{x^2+rx+s} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+rx+s)^2},$$

trong đó $A, B_1, .., E_2, F_2 \in \mathbf{R}$. Để các định các hệ số trên ta có 2 cách như sau:

Cách 1 (Phương pháp hệ số bất định): Nhân hai vế cho Q(x) rồi đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc ở hai vế, đưa đến hệ phương trình tuyến tính đối với $A, B_1, .., E_2, F_2$. Giải hệ phương trình này ta tìm được $A, B_1, .., E_2, F_2$.

Cách 2 (Phương pháp giá trị riêng): Cho x nhận 10 giá trị tùy ý (số 10 ứng với số lượng các hệ số cần xác định) rồi thế vào đẳng thức trên để được một hệ phương trình tuyến tính đối với $A, B_1, .., E_2, F_2$. Giải hệ phương trình này ta tìm được $A, B_1, .., E_2, F_2$.

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

a) $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}dx$, b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Giải. a) $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}dx$. Ta phân tích

$$\frac{x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow x+2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2 \qquad (1)$$

Từ (1) ta có

- chọn $x = -1 \Rightarrow B = 1/2$.
- chọn $x = 0 \Rightarrow A + B + D = 2$.
- chọn $x = 1 \Rightarrow 4A + 2B + 4C + 4D = 3$.
- chọn $x = -2 \Rightarrow -5A + 5B - 2C + D = 0$.

Ta có hệ

$$\begin{cases} A + D = \dfrac{3}{2} \\ 4A + 4C + 4D = 2 \\ -5A - 2C + D = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = -1 \\ D = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$\frac{x+2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C. \end{aligned}$$

b) $I = \int \dfrac{dx}{x^4+1}$. Ta có

$$\begin{aligned} x^4+1 &= (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 \\ &= (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Ta phân tích

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \Leftrightarrow 1 = (Ax+B)(x^2 - x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

$$\Leftrightarrow (A+C)x^3 + (-A\sqrt{2} + B + C\sqrt{2} + D)x^2 + (A - B\sqrt{2} + C + D\sqrt{2})x + B + D = 1$$

Đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế ta được:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A\sqrt{2} + B + C\sqrt{2} + D = 0 \\ A - B\sqrt{2} + C + D\sqrt{2} = 0 \\ B + D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ B = \dfrac{1}{2} \\ C = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ D = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}}_{I_1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}}_{I_2}$$

Ta có

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{d(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)+\text{arctg}(x\sqrt{2}+1)+C.$$

Tương tự,

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)-\text{arctg}(x\sqrt{2}-1)+C.$$

Do đó

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arctg}(x\sqrt{2}-1)+C$$

4. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Xét tích phân dạng $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó R là một hàm hữu tỉ đối với sinx, cosx.

4.1. Phương pháp tổng quát

Thực hiện phép đổi biến

$$t = \text{tg}\frac{x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi)$$

Khi đó $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ và ta có công thức

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Do đó I có dạng tích phân hàm hữu tỉ đã xét ở phần trước.

Ví dụ: $I = \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\frac{3\text{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$

4.2. Một số phương pháp khác

Sau đây ta xét một số dạng có thể đổi biến để đưa về các tích phân hàm hữu tỉ đơn giản hơn:

1) Tích phân dạng $I = \int R(\sin x).\cos x dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$. Khi đó $I = \int R(t)dt$.

2) Tích phân dạng $I = \int R(\cos x).\sin x dx$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$. Khi đó $I = \int R(t)dt$.

3) Tích phân dạng $I = \int R(tgx)dx$.

Đặt $t = tgx \Rightarrow dt = (1 + tg^2x)dx$ hay $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Khi đó $I = \int \frac{R(t)}{1+t^2}dt$.

4) Tích phân dạng $I = \int (\sin x)^{2n}(\cos x)^{2m}\,dx$. Dùng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

5) Tích phân dạng $I = \int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$.

Đặt $t = tgx \Rightarrow dt = (1 + tg^2x)dx$ hay $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Ta có công thức

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ tg^2x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

6) Tích phân dạng $\int \sin ax \cos bx dx$; $\int \sin ax \sin bx dx$; $\int \cos ax \cos bx\, dx$.

Ta dùng công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(ax - bx) + \sin(ax + bx)\right]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)\right]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(ax - bx) + \cos(ax + bx)\right]$$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

a) $\int \sin^2 x\ \cos^3 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$;

c) $\int \sin 7x.\sin 5x\,dx$ d) $\int \sin^4 x.\cos^2 x dx$;

Giải. a) $I = \int \sin^2 x\ \cos^3 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x).\cos x\,dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\,dx$. Ta có

$$I = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$. Đặt

$$t = tgx \Rightarrow dt = (1 + tg^2x)dx \quad \text{hay} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ta có

$$I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^4} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right) dt$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = tgx - \frac{2}{tgx} - \frac{1}{3tg^3x} + C.$$

$$c) I = \int \sin 7x.\sin 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 2x - \cos 12x\right) dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$$

$d) I = \int \sin^4 x.\cos^2 x dx$. Ta có

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1-\cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\frac{1-\cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x - \cos 2x + \cos 2x \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{32}\int (\cos 2x + \cos 6x) dx$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 2x + \frac{1}{192}\sin 6x + C.$$

5. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

5.1. Phép thế lượng giác

Xét các tích phân dạng:

1) $I = \int R\,(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ (0 < a: Const)

Đặt $x = a\sin t \quad (-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}.$

Ta có $dx = a\cos t dt; \ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$

2) $I = \int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$ (0 < a: Const).

Đặt $x = a\,tgt\ (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow t = arctg\frac{x}{a}$.

Ta có $dx = a(1 + tg^2t)dt$; $\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}$.

3) $I = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ (0 < a: Const).

Đặt $x = \frac{a}{\cos t} (0 \le t \ne \frac{\pi}{2} \le \pi) \Leftrightarrow t = \arccos\frac{a}{x}$.

Ta có $dx = a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$; $\sqrt{a^2 - x^2} = a\,|\,tgt\,|$.

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

a) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx$; b) $\int \frac{dx}{x^2(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

Giải. a) $I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}dx$. Đặt $x = a\sin t\ \ (-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$.

Ta có $dx = a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$. Suy ra

$$I = \int a\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt = a\int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t}dt = a\int \frac{dt}{\sin t} - a\int \sin dt = a\underbrace{\int \frac{dt}{\sin t}}_{I_1} + a\cos t + C$$

Xét $_1$. Đặt $u = tg\frac{t}{2} \Rightarrow dt = \frac{2du}{1 + u^2}$. Ta có

$$I_1 = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|tg\frac{t}{2}| + C.$$

Vậy

$$I = a\ln|tg\frac{t}{2}| + a\cos t + C = a\ln\left|\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}\right| + a\cos t + C = a\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right| + a\cos t + C$$

$$= a\ln\left|\frac{1 - \cos t}{\sin t}\right| + a\cos t + C$$

Vì $\sin t = \frac{x}{a}, \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ nên

$$I = a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

b) $I = \int \frac{dx}{x^2(x + \sqrt{1 + x^2})}$. Đặt

$$x = tgt\ \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow t = arctgx.$$

Ta có $dx = (1 + tg^2t)dt$; $\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\cos t}$. Suy ra

$$I = \int \frac{(1 + tg^2t)dt}{tg^2t(tgt + \frac{1}{\cos t})} = \int \frac{\cos tdt}{\sin^2 t(\sin t + 1)}$$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos tdt$. Ta có

$$I = \int \frac{du}{u^2(1 + u)} = \int \left(\frac{1}{u + 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right)du = \ln|u + 1| - \ln|u| - \frac{1}{u} + C = \ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t}\right| - \frac{1}{\sin t} + C$$

Vì $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1 + tg^2t}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ nên $I = \ln\left|\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + C$.

5.2. Tích phân một số hàm vô tỉ

1) Tích phân dạng

$$I = \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}, \ldots, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right)dx,$$

trong đó R(x, y, z, …) là hàm hữu tỉ; m, n, … là các số nguyên dương; a, b, c, d, là các hằng số.

Để tính tích phân này ta dùng phép đổi biến:

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax + b}{cx + d}}$$

với k là bội số chung nhỏ nhất của các chỉ số căn m, n, …

Ví dụ. Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt[4]{2x - 1}}$

Giải. Đặt $t = \sqrt[4]{2x - 1} \Rightarrow t^4 = 2x - 1 \Rightarrow dx = 2t^3dt$. Ta có

$$I=\int\frac{2t^3dt}{t^2-t}=2\int\frac{t^2dt}{t-1}=2\int(t+1+\frac{1}{t-1})dt=t^2+2t+2\ln\left|t-1\right|+C$$
$$=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ell n\left|\sqrt{2x-1}-1\right|+C$$

2) Tích phân dạng: I = $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$

Biến đổi

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Đặt $t=x+\frac{b}{2a}$, ta đưa được tích phân về dạng phép thế lượng giác.

Ví dụ. Tính $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

Giải.Ta có

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left[(x+2)^2+3\right]^3}}.$$

Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$. Ta có

$$I=\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2+3)^3}}.$$

Đặt $t=\sqrt{3}tgu\ (-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2})\Rightarrow dt=\frac{\sqrt{3}du}{\cos^2u}$. Suy ra

$$\sqrt{(t^2+3)^3}=\frac{3\sqrt{3}}{\cos^3u},$$

$$I=\frac{1}{3}\int\cos u du=\frac{1}{3}\sin u+C=\frac{1}{3}\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+C\ =\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}+C$$

3) Tích phân dạng $I=\int\frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Dùng phương pháp đổi biến đặt $mx+n=\frac{1}{t}$.

Ví dụ. Tính tích phân $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$ $(x>0)$.

Giải. Đặt

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Ta có

$$I = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2 - (1+t)^2}} = -\arcsin\frac{1+t}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}} + C$$

B -TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH - TÍCH PHÂN SUY RỘNG

1. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1.1. Định nghĩa. Xét hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b]. Chia đoạn [a,b] thành các đoạn nhỏ bởi các điểm $x_0, x_1,..., x_n$ như sau:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm ε_i tùy ý $x_{i-1} \le \varepsilon_i \le x_i$ $(i = \overline{1,n})$ và đặt

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Lập tổng

$$I_n = f(\varepsilon_1)(x_1 - x_0) + f(\varepsilon_1)(x_2 - x_1) + ... + f(\varepsilon_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Xét giới hạn:

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} I_n = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Nếu giới hạn trên tồn tại, hữu hạn và bằng I ∈ **R** thì ta nói f(x) khả tích trên [a,b] và I được gọi là *tích phân xác định* của $f(x)$ trên đoạn [a,b], ký hiệu là $I = \int_a^b f(x)dx$.

Ta gọi:

- A là cận dưới;
- b là cận trên;
- f(x) là hàm số lấy tích phân;
- f(x)dx là biểu thức dưới dấu tích phân.

Chú ý. 1) Tích phân xác định không phụ thuộc vào ký hiệu biến số dưới dấu tích phân, nghĩa là

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$$

2) Ta cũng đặt

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,;$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

1.2. Các tính chất của tích phân xác định

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ $\qquad$ $(k = \text{const})$

2) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

3) Với a, b, c bất kỳ ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(Giả sử các tích phân trên đều tồn tại).

4) Nếu $f(x) \ge g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Đặc biệt, nếu f(x) ≥ 0, ∀x∈ [a,b], thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

4) Nếu $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a, b]$ thì

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M.$$

Ta gọi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ là *giá trị trung bình* của f(x) trên [a,b].

1.3. Định lý (Tích phân xác định với cận trên biến thiên).

Giả sử hàm số f(x) liên tục trên [a,b]. Khi đó

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

là một nguyên hàm của f(x) trên [a,b], nghĩa là F′(x) = f(x), ∀x∈ [a,b].

Chú ý. Từ kết quả trên ta suy ra với φ(x) là hàm khả vi, ta có

$$\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Ví dụ. Tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} (t^2 - 2t)(\ln\cos t)(e^{3t} - 1)dt}{x^{10}}$$

Giải. Ta thấy L có dạng vô định 0/0. Áp dụng Qui tắc l'Hospital ta có

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} (t^2 - 2t)(\ln\cos t)(e^{3t} - 1)dt}{x^{10}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^2} (t^2 - 2t)(\ln\cos t)(e^{3t} - 1)dt\right)'}{\left(x^{10}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^4 - 2x^2)(\ln\cos(x^2))(e^{3x^2} - 1)(x^2)'}{10x^9} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2\left(-\frac{1}{2}x^2\right)3x^2 2x}{10x^9} = \frac{3}{5}.$$

1.4. Định lý (Công thức Newton – Leibniz).

Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a,b] và F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a,b] thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Ví dụ.

1) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arctg}x\Big|_{-1}^{1} = \text{arctg}1 - \text{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$

2) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_1^e \ln^2 x\, d(\ell n x) = \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e = \frac{1}{3}..$

3) $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{\pi - 2}{8}.$

4) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int_3^4 (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1})dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x-1|\right]_3^4 = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|_3^4 = \ln\frac{4}{3}.$

1.5. Phương pháp đổi biến số

Dạng 1: Xét tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ với f(x) liên tục trên [a,b]. Đặt t = φ(x) thỏa

1) φ(x) có đạo hàm liên tục trên [a,b].

2) f(x)dx trở thành g(t)dt trong đó g(t) là một hàm liên tục trên đoạn có hai đầu mút là φ(a) và φ(b).

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} g(t)dt.$$

Dạng 2: Xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với f(x) liên tục trên [a,b]. Đặt $x = \varphi(t)$ thỏa

1) $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha,\beta]$.

2) $a = \varphi(\alpha)$ và $b = \varphi(\beta)$.

3) Khi t biến thiên trên $[\alpha,\beta]$ thì x biến thiên trên [a,b].

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$;   b) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$;   c) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$;   d) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

Giải.

a) $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$. Đặt $x = 2\sin t$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$. Ta có $dx = 2\cos t dt$; $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$.

Đổi cận

x	0	2
t	0	$\pi/2$

Suy ra

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi.$$

b) $I = \int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$. Đặt

$$t = \sqrt{1+x} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2tdt.$$

Đổi cận

x	0	3
t	1	2

Suy ra

$$I = \int_1^2 2(t^2-1)t^2 dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{116}{15}.$$

c) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận

x	0	$\pi/2$
t	0	1

Suy ra $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

d) $I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$. Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx$.

Đổi cận

x	1	2
t	1	1/2

Suy ra

$$I = \int_1^{1/2} (-e^t)dt = -e^t\Big|_1^{1/2} = e - \sqrt{e}.$$

1.6. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u = u(x) và v = v(x) là những hàm số có đạo hàm liên tục trong [a,b]. Khi đó từ công thức tích phân từng phần trong tích phân bất định ta suy ra công thức tích phân từng phần trong tích phân xác định như sau:

$$\boxed{\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

Ví dụ. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^e \ln x\, dx$;   b) $\int_o^{2\pi} x\cos x\, dx$;   c) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$;   d) $\int_0^1 \text{arc tg}\, x\, dx$.

Giải. a) $I = \int_1^e \ln x\, dx$. Đặt

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{cases}$$

Suy ra

$$I = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1..$$

b) $I = \int\limits_o^{2\pi} x\cos x dx.$ Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Suy ra

$$I = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

c) $I = \int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx.$ Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

Suy ra

$$I = e^x \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = e^{\pi/2} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx}_{I_1}.$$

Xét I_1. Đặt

$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Suy ra

$$I_1 = -e^x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx = 1 + I..$$

Vậy $I = e^{\pi/2} - (1 + I).$ Do đó $I = \dfrac{e^{\pi/2} - 1}{2}.$

d) $I = \int_0^1 \text{arc}\,\text{tg}\,x\,dx$. Đặt

$$\begin{cases} u = \text{arctg}x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$$

Suy ra

$$I = x\,\text{arc}\,\text{tg}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ví dụ. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) liên tục trên [–a,a] thì

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu f(x) là hàm số lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu f(x) là hàm số chẵn} \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)dx}_{I} + \int_0^a f(x)dx$$

Xét I. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$. Ta có

$$I = \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt.$$

Suy ra

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{nếu f(x) là hàm số lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu f(x) là hàm số chẵn} \end{cases}$$

2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

2.1. Tích phân suy rộng với cận ở vô hạn (loại I)

2.1.1. Định nghĩa. Giả sử hàm số f(x) xác định trên $[a; +\infty)$ và khả tích trên mỗi đoạn hữu hạn [a,b]. Ta định nghĩa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

và gọi *là tích phân suy rộng* của hàm số f(x) trên [a; +∞). Tích phân suy rộng đó được gọi là *hội tụ* (tương ứng, *phân kỳ*) khi giới hạn trong vế phải của (1) tồn tại và hữu hạn (tương ứng, không có giới hạn hoặc có giới hạn vô cùng).

Tương tự định nghĩa tích phân suy rộng của hàm số f(x) trên [– ∞; a):

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)dx$$

và trên (– ∞; +∞):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (*)$$

(a được chọn tùy ý, tích phân suy rộng sẽ không phụ thuộc vào cách chọn a).

Trong (*), nếu cả hai giới hạn đều tồn tại hữu hạn thì tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ mới hội tụ.

Ngược lại, nếu có ít nhất một trong hai giới hạn không tồn tại (hoặc bằng vô cùng) thì $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Ta thấy rằng tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định khi cho cận tích phân dần tới vô cực. Vì vậy để tính tích phân suy rộng ta có thể dùng công thức Newton-Leibniz như sau:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

trong đó F(x) là một nguyên hàm của f(x) và $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Tương tự, ta có

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^a = F(a) - F(-\infty) \qquad \text{và} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

với $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$; $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$.

Ví dụ 1.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}x - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}.$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^0 = \operatorname{arctg}0 - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2}.$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ hội tụ với $\alpha > 1$ và phân kỳ với $\alpha \le 1$.

Giải. 1) Với $\alpha \neq 1$ ta có

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1}.$$

– Nếu $\alpha < 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = -\infty \Rightarrow I_\alpha = +\infty$ nên I_α phân kỳ.

– Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = 0 \Rightarrow I_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$ nên I_α hội tụ.

2) Với $\alpha = 1$ ta có

$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty$ nên I_α phân kỳ.

2.2. Tích phân của hàm không bị chặn (loại II)

2.2.1. Định nghĩa. 1) Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a, b) và không bị chặn tại b, nghĩa là $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$ (khi đó x = b còn được gọi là *điểm bất thường* của f(x)), thì ta đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

2) Nếu hàm số f(x) liên tục trên (a, b] và không bị chặn tại a, nghĩa là $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (nghĩa là x = a là điểm bất thường của f(x)), thì ta đặt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a^+} \int_u^b f(x)dx.$$

3) Nếu hàm số f(x) không bị chặn tại điểm $c \in (a,b)$ và liên tục tại mọi $x \in [a,b]\setminus\{c\}$ thì ta đặt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{u\to c^+} \int_u^b f(x)dx \qquad (*)$$

4) Nếu các giới hạn trên tồn tại và hữu hạn thì ta nói các tính phân suy rộng tương ứng hội tu, ngược lại ta nói chúng phân kỳ. Chú ý rằng trong (*), tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ chỉ hội tụ khi cả hai giới hạn tương ứng đều tồn tại hữu hạn.

Chú ý. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì ta cũng có công thức tương tự như công thức Newton-Leibniz như sau: Với F(x) là một nguyên hàm của f(x), ta có

a) Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a,b) và có điểm bất thường là x = b thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a),$$

trong đó $F(b^-) = \lim\limits_{x\to b^-} F(x)$.

b) Nếu hàm số f(x) liên tục trên (a, b] và có điểm bất thường là x = a thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+),$$

trong đó $F(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$.

Ví dụ 1. Xét $J = \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ có điểm bất thường x = 1. Ta có

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{(x-1)+1}{\sqrt{(x-1)}}dx = \int \sqrt{x-1}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C.$$

Do đó

$$J = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1}\right)\Bigg|_{1^+}^{2} = \frac{2}{3} + 2 - \lim_{t\to 1^+}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(t-1)^3} + 2\sqrt{t-1}\right) = \frac{8}{3}.$$

Vậy J hội tụ và J = 8/3.

Ví dụ 2. Tích phân suy rộng $I = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ có điểm bất thường là x = 1. Ta có

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Bigg|_0^{1^-} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-1}{x-1}\right) - 1 = +\infty.$$

Vậy I_1 phân kỳ nên I cũng phân kỳ (ta không cần khảo sát I_2).

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ (a < b) hội tụ khi $\alpha < 1$ và phân kỳ khi $\alpha \ge 1$.

Giải. 1) Với $\alpha \ne 1$ ta có

$$J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \left[-\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}\right]_{a^+}^b = -\frac{1}{(\alpha-1)(b-a)^{\alpha-1}} + \lim_{x\to a^+}\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}.$$

– Nếu $\alpha < 1$ thì $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} = 0 \Rightarrow J_\alpha = -\frac{1}{(\alpha-1)(b-a)^{\alpha-1}}$ nên J_α hội tụ.

– Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} = +\infty \Rightarrow J_\alpha = +\infty$ nên J_α phân kỳ.

2) Với $\alpha = 1$ ta có

$$J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_{a^+}^b = \ln(b-a) - \lim_{x\to a^+}\ln|x-a| = +\infty$$ nên J_α phân kỳ.

3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

3.1. Tính diện tích hình phẳng

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, với $f_1(x)$, $f_2(x)$ là các hàm số liên tục trong [a,b] được tính theo công thức:

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx} \qquad (1)$$

Để tính tích phân trong (1) ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f_1(x) = f_2(x)$ để tìm tất cả các nghiệm $x_1 < x_2 < ... < x_n$ thuộc [a,b]. Khi đó

$$S = \left|\int_a^{x_1}[f_1(x) - f_2(x)]dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2}[f_1(x) - f_2(x)]\,dx\right| + ... + \left|\int_{x_n}^{b}[f_1(x) - f_2(x)]\,dx\right|$$

Ví dụ 1. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$ và $x + y = 3$.

Giải. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 + 1 = 3 - x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Suy ra diện tích cần tìm là

$$S = \left|\int_{-2}^{1}[(x^2+1) - (3-x)]dx\right| = \left|\int_{-2}^{1}(x^2 + x - 2)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ và $y = x^2$.

Giải. Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Suy ra diện tích cần tìm là

$$S = \left|\int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}.$$

3.2. Tính thể tích

1) Trong không gian Oxyz với hệ tọa độ trực chuẩn cho vật thể có thể tích V. Giả sử S(x) là diện tích của thiết diện được tạo bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có tọa độ x (trên Ox). Khi đó nếu vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng x = a và x = b (a < b) và S(x) liên tục trên [a, b] thì

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

2) Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), trục hoành, x = a, x = b (a < b) quay xung quanh Ox được tính theo công thức

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$$

.

Ví dụ. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $y = 2\sqrt{x}$, y = 0, x = 0, x = 4 quay quanh Ox.

b) $y^2 = 4 - x$, x = 0 quay quanh Oy.

Giải.

a) $V = \pi\int_0^4 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^4 = 32\pi$.

b) Ta có: $y^2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - y^2$

Đường cong $x = 4 - y^2$ giao với trục tung Oy tại các điểm có tung độ là nghiệm của phương trình

$$4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Suy ra thể tích cần tìm là

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(4 - y^2\right)^2 dy = \pi\int_{-2}^{2}\left(16 - 8y^2 + y^4\right)dy = \pi(16y - \frac{1}{8}y^3 + \frac{y^5}{5})\Big|_{-2}^{2} = \frac{374\pi}{5}.$$

4. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1. Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình giữa biến x, hàm chưa biết $y = y(x)$ và đạo hàm $y' = y'(x)$:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Nếu từ (1) ta tính được y' thì (1) còn được viết dưới dạng:

$$y' = f(x, y) \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

Ta còn biến đổi (2) về dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

Trong (3) ta có thể xem y là hàm, x là biến hoặc y là biến, x là hàm đều được.

4.2. Nghiệm tổng quát và nghiệm riêng

Xét phương trình vi phân cấp 1:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

1) *Nghiệm tổng quát* của (1) trên miền $D \subset \mathbf{R}^2$ là họ hàm $y = \varphi(x,C)$ phụ thuộc họ hằng số $C \in C$ thoả hai tính chất:

Tính chất 1: Với mọi $C \in C$, $y = \varphi(x,C)$ là nghiệm của (1), nghĩa là $y = \varphi(x,C)$ thỏa (1).

Tính chất 2: Với mọi $(x_0,y_0) \in D$, tồn tại duy nhất $C_0 \in C$ sao cho nghiệm $y = \varphi(x,C)$ thỏa $y(x_0) = y_0$.

Thông thường, nghiệm tổng quát được viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x,y,C) = 0.$$

2) *Nghiệm riêng* của (1) thoả điều kiện ban đầu $y_{|x=x_0} = y_0$ (hay $y(x_0) = y_0$) là nghiệm $y = \varphi(x,C_0)$ được suy từ nghiệm tổng quát $y = \varphi(x,C)$ bằng cách xác định hằng số C dựa vào điều kiện đó.

Thông thường, nghiệm riêng được viết dưới dạng hàm ẩn:

$$\Phi(x,y,C_0) = 0.$$

Giải một PTVP là tìm nghiệm tổng quát của nó. Nếu có kèm theo điều kiện ban đầu, thì ta phải tìm nghiệm riêng thoả mãn điều kiện đó.

4.3. Phương trình vi phân tách biến (hay có biến phân ly). Đó là phương trình có dạng:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

Cách giải. Với $M_2(x)N_1(y) \neq 0$, chia hai vế của (1) cho đại lượng này, ta được:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Suy ra nghiệm tổng quát là:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

Nếu $M_2(x) = 0$ tại $x = a$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy $x = a$, y tuỳ ý thuộc miền xác định, cũng là một nghiệm của (1).

Nếu $N_1(y) = 0$ tại $y = b$ thì bằng cách thử trực tiếp ta thấy $y = b$, x tuỳ ý thuộc miền xác định, cũng là một nghiệm của (1).

Ví dụ. Giải phương trình vi phân:

$$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0 \qquad (1)$$

Giải. Ta viết lại phương trình (2) như sau:

$$(x+1)y^2\,dx + x^2(1-y)dy = 0 \qquad (2')$$

Giả sử $xy \neq 0$. Chia hai vế của (2′) cho x^2y^2 ta được:

$$\frac{x+1}{x^2}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0.$$

Nghiệm tổng quát là

$$\int \frac{x+1}{x^2}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = C,$$

nghĩa là $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C$ hay $\ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C$.

Ngoài ra, bằng cách thử trực tiếp ta thấy $x = 0$ (y tuỳ ý); $y = 0$ (x tuỳ ý) cũng là hai nghiệm của (2).

4.4. Tìm hàm số $y = y(x)$ từ hệ số co giãn ε_{yx}

Như đã xét ở chương 2, nếu hai đại lượng x và y liên hệ nhau theo một hàm khả vi $y = y(x)$ thì ta tìm được hệ số co giãn ε_{yx} như là một hàm theo x định bởi:

$$\varepsilon_{yx} = y'(x)\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}.$$

Do đó, nếu biết hệ số co giãn $\varepsilon_{yx} = \varepsilon(x)$ là một hàm theo x, ta có một phương trình vi phân tách biến:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\varepsilon(x)}{x}dx$$

có nghiệm tổng quát là

$$\ln|y| = \int \frac{\varepsilon(x)}{x}dx + C$$

Ví dụ. Biết hệ số co giãn của hàm cầu $Q = Q_D$ là

$$\varepsilon_D = -\frac{P}{1000 - P}$$

Hãy xác định hàm cầu Q_D biết $Q_D(0) = 2000$.

Giải. Ta có

$$\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = -\frac{P}{1000 - P}$$

Suy ra

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dP}{1000 - P}$$

Lấy tích phân hai vế ta được $\ln|Q| = \ln|1000 - P| + C$. Từ đó suy ra $Q = A(1000 - P)$. Từ điều kiện $Q(0) = 2000$, ta có $A = 2$. Vậy $Q_D = 2(1000 - P)$.

4.5. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Nếu $q(x) \equiv 0$ thì ta có phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 1:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

Cách giải. 1) Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 1:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

có nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

2) Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

có nghiệm tổng quát của (1) là

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)}$$

Chú ý. a) Dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange ta tìm nghiệm tổng quát của (1) dưới dạng:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

trong đó $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$.

b) Ta có thể ghi nhớ công thức nghiệm tổng quát cuả phương trình (1) dưới dạng:

$$y = u(x)v(x,C)$$

trong đó

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx}; v(x, C) = \int \frac{q(x)}{u(x)}dx + C$$

Chứng minh. 1) Xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 1:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (2)$$

Trước hết, xét trường hợp $y \neq 0$. Ta viết lại (2) như sau:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \text{hay} \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

Nghiệm tổng quát là:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\text{hay} \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| = \ln|Ce^{-\int p(x)dx}| \quad (C \neq 0)$$

Từ đó $y = Ce^{-\int p(x)dx}$ với $C \neq 0$. Chú ý rằng $y = 0$ cũng thoả (2) nên đây cũng là một nghiệm của (2). Suy ra nghiệm tổng quát của (2) là:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \text{ với C là hằng số tuỳ ý.}$$

2) Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (1)$$

Dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange ta tìm nghiệm tổng quát của (1) dưới dạng:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

Khi đó:

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\left(-\int p(x)dx\right)'$$

$$= C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))$$

Thế vào (1) ta được:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

Suy ra

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \qquad \text{hay} \qquad C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Do đó: $$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1$$

Suy ra nghiệm tổng quát của (1) là

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân:

$$xy' + y = 3x^2 \qquad (3)$$

Giải. Biến đổi (3):

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 dạng $y' + p(x)y = q(x)$ nên có nghiệm tổng quát là: $y = u(x)v(x,C)$, trong đó:

$$u(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = |x|^{-1} = \frac{\alpha}{x}\ (\alpha = \pm 1)$$

$$v(x,C) = \int \frac{q(x)}{u(x)}dx + C = \int \frac{3x}{\frac{\alpha}{x}}dx + C = \frac{1}{\alpha}\int 3x^2dx + C = \frac{1}{\alpha}x^3 + C$$

nghĩa là

$$y = \frac{\alpha}{x}\left(\frac{1}{\alpha}x^3 + C\right) \qquad \text{hay} \qquad y = x^2 + \frac{C}{x}$$

Chú ý: Khi giải các phương trình trên ta thường dùng các đồng nhất sau:

$$e^{k\ln|A(x)|} = |A(x)|^k = \alpha(A(x))^k;$$

$$e^{-k\ln|A(x)|} = \frac{1}{|A(x)|^k} = \frac{\alpha}{(A(x))^k}\ (\alpha = \pm 1)$$

BÀI TẬP

1. Tính các tính phân sau:

a) $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; c) $\int \frac{\sqrt{2x+5}}{x}dx$;

d) $\int x^2\sqrt[5]{x^3-8}dx$; e) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; f) $\int \frac{3^{1/x}}{x^2}dx$;

g) $\int \frac{(\mathrm{arctg}x)^{100}}{1+x^2}dx$; h) $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}$; i) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-x^2}}$;

j) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2-2x}}$; k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; l) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

2. Tính các tính phân sau:

a) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$; b) $\int \frac{\cos x}{5-\cos x}dx$; c) $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}dx$;

d) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}dx$; e) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 9\cos^2 x}$; f) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x+\cos 2x}dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; h) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; i) $\int \sin x.\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$;

j) $\int \cos^2 3x.\sin^2 5xdx$. k) $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}dx$; l) $\int \frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$.

3.Dùng phương pháp tích phân từng phần để tính các tích phân sau:

a) $\int x^2\mathrm{arctg}xdx$; b) $\int \sin(\ln x)dx$; c) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

d) $\int \frac{x\mathrm{arctg}x}{(1+x^2)^2}dx$; e) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$; g) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$.

4. Tính tích phân các hàm phân thức hữu tỉ sau:

a) $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx$; b) $\int \frac{5x+3}{x^2-2x+5}dx$; c) $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}dx$;

d) $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$; e) $\int \frac{xdx}{x^3+1}$; f) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

g) $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx$; h) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

5. Tính tích phân các hàm vô tỉ sau:

a) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; b) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$; c) $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$;

d) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$; e) $\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$; f) $\int (x+1)^3\sqrt{(x^2+2x-1)^3}dx$.

6. Dùng phương pháp đổi biến, tính:

a) $\int_{-7}^{28} x\sqrt[3]{1-x}\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos 2x dx$; c) $\int_3^{63} \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$;

d) $\int_{2\sqrt{2}}^{4} 3x\sqrt{x^2-7}\,dx$; e) $\int_0^3 2x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$; f) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

;

g) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; h) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$; i) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.

7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} (t^2+3t+2)(\cos t-1)\sin 2t dt}{x^{12}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{x^2}^{0} (e^t-1)^2\ln(\cos t)dt}{x^{10}}$

8. Áp dụng công thức tích phân từng phần, tính:

a) $\int_o^1 xe^{2x}dx$; b) $\int_1^2 x\log_2 x dx$; c) $\int_0^1 \arccos x dx$;

d) $\int_{-1}^{1} x\arcsin x dx$; e) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$; f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$

9. Khảo sát sự hội tụ và tính các tích phân suy rộng sau (nếu có):

a) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$;   b) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$;   c) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\text{arc tg}x dx}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}$;

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$;   e) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x}{e^x} dx$;   f) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x + 1}}$.

10. Khảo sát sự hội tụ và tính các tích phân suy rộng sau (nếu có):

a) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$ b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$;   c) $\int\limits_{-1}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

d) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$;   e) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^3 + x^2}$ f) $\int\limits_{0}^{1} \ln(1 - x) dx$.

11. Tính diện tích các hình phẳng được giới hạn bởi các đường:

a) $y = 4x - x^2$ và trục Ox;   b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1,\ y = 0, x = -2, x = 3$;

c) $y = \frac{2}{x}$, $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$;   d) $y = x^3 + 2x^2 + x$ và $y = 2x + 2$;

e) $y = \frac{4x}{1 + x^2}$, $y = 2x^3$;   f) $y = \frac{4x^3}{1 + x^2}$, $y = 2x$.

12. Tính thể tích của các vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ quay quanh trục Ox;

b) $x = ye^y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ quay quanh trục Oy.

13. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $\sqrt{1 + y^2}dx + xy\ln x dy = 0$.   b) $\sqrt{1 - y^2}dx + y\sqrt{1 - x^2}dy = 0$.

c) $x\sqrt{1 + y^4}dx + y\sqrt{1 - x^4}dy = 0$.   d) $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y)$.

14. Xác định hàm cầu $Q = Q_D$ biết hệ số co giãn là

a) $\varepsilon_D = \frac{-P}{500 - P}$ với $Q_D(0) = 1000$;

b) $\varepsilon_D = \frac{-4P^2}{500 - P^2}$ với $Q_D(0) = 2500000$.

15. Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'\sqrt{x^2+4x-1}-3y=0.$

b) $y'tg2x+4y=0.$

c) $y'-\dfrac{y}{\sin x}=\cos^2 x tg\dfrac{x}{2}\cdot$

d) $(1+x^2)y'+y=arctgx.$

e) $xy'+2y=\cos^2 x.$

f) $(x\ln x)y'-2y=x\ln^5 x.$

CHƯƠNG 3

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1. KHÁI NIỆM VỀ HÀM NHIỀU BIẾN

1.1. Định nghĩa hàm nhiều biến

Cho tập hợp khác rỗng $D \subset \mathbf{R}^2$. Nếu ứng với mỗi cặp số thực (x,y) của D có một và chỉ một số thực f(x,y) thì ta nói hàm f = f(x,y) là hàm theo hai biến x, y có miền xác định là D.

Ví dụ: Hàm $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ là hàm theo hai biến x,y có miền xác định là

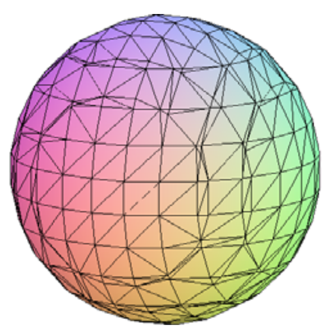
$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 4 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \ x^2 + y^2 < 4\}.$$

Định nghĩa tương tự cho hàm 3 biến.

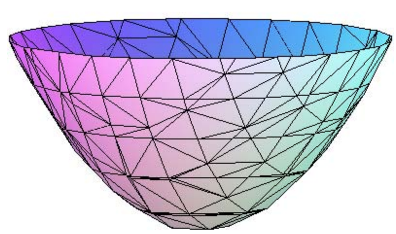
1.2. Đồ thị hàm của hàm hai biến

Cho hàm hai biến z = f(x,y) có miền xác định là D. Đồ thị của z = f(x,y) là tập $G = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \ (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$. Sau đây là đồ thị của một số hàm hai biến.

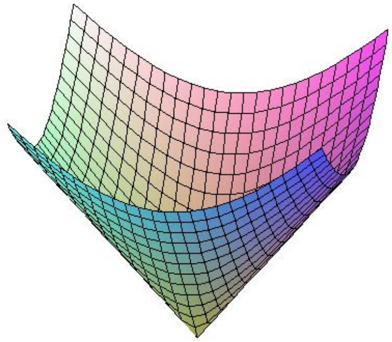
1) Elipsoid $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$:



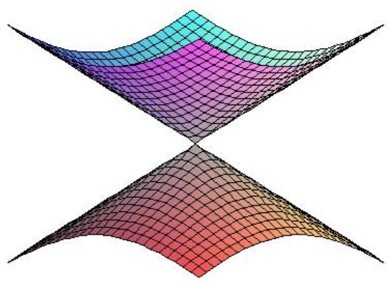
2) Paraboloid $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$:



3) Mặt nón bậc hai: $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$:

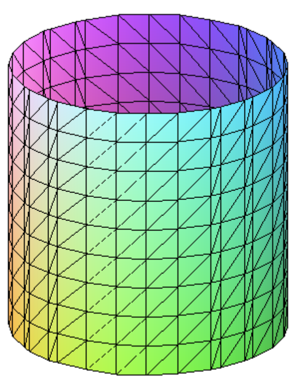


Tổng quát hơn, mặt nón bậc hai $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ có đồ thị như sau:

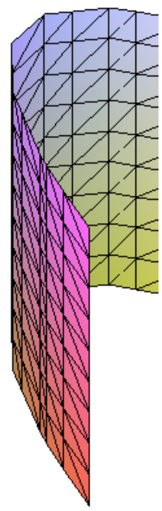


4) Mặt trụ bậc hai:

- Mặt trụ elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



- Mặt trụ parabol: $y^2 = 2px$



1.3. Giới hạn của hàm hai biến

Số L được gọi là giới hạn của hàm z = f(x, y) khi (x,y) → (a,b) nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước nhỏ bao nhiêu tùy ý, có thể tìm $\delta > 0$, sao cho nếu $0 < \rho < \delta$ với $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ là khoảng cách giữa các điểm (x,y) và (a,b), thì bất đẳng thức:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

được thỏa mãn. Ký hiệu $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ hay $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{xy^2} \qquad b) \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$$

Giải.

$$a) \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{xy^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \left(x\frac{1-\cos xy}{(xy)^2} \right) = \left(\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} x \right)\left(\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{1-\cos xy}{(xy)^2} \right) = 0.\frac{1}{2} = 0.$$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}$. Ta có

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}\right| \le x^2+y^2 \to 0 \text{ khi } (x,y)\to(0,0).$$

Theo giới hạn kẹp ta suy ra

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} = 0.$$

1.4. Sự liên tục của hàm hai biến.

Hàm f(x,y) được gọi là liên tục tại điểm $M_0(a,b)$ nếu f(x,y) xác định trên một mặt tròn chứa $M_0(a,b)$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Nếu f(x,y) liên tục tại mọi điểm $M_0(a,b)\in D$ thì ta nói f(x,y) liên tục trên D.

2. ĐẠO HÀM RIÊNG

2.1. Đạo hàm riêng cấp 1

Xét hàm hai biến f = f(x, y), nếu cố định y, xem y như là một hằng số, hàm f trở thành hàm theo biến x. Đạo hàm của hàm một biến đó được gọi là đạo hàm riêng (cấp 1) của f theo biến x, ký hiệu là f'_x hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Vậy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Tương tự, ta định nghĩa được đạo hàm riêng (cấp 1) của f theo biến y, ký hiệu là f'_y hay $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Nhận xét: Các quy luật tính đạo hàm riêng hoàn toàn giống với các quy luật tính đạo hàm của hàm một biến số, chỉ có điều cần lưu ý là đạo hàm riêng tính theo biến số nào.

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng của hàm số:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Giải.

$$z'_x = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)'_x}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$z'_y = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)'_y}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

2.2. Đạo hàm riêng cấp 2.

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm f = f(x, y) là đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 của nó. Cụ thể:

1) Đạo hàm riêng cấp 2 của f theo biến x, ký hiệu là f''_{x^2} hay $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, định bởi:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

2) Đạo hàm riêng cấp 2 của f theo biến y, ký hiệu là f''_{y^2} hay $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, định bởi:

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

3) Các đạo hàm riêng cấp 2 của f theo hai biến x, y định bởi:

- $f''_{xy} = (f'_x)'_y \quad \text{hay} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right).$
- $f''_{yx} = (f'_y)'_x \quad \text{hay} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right).$

Chú ý: Với giả thiết f''_{xy} và f''_{yx} liên tục, có thể chứng minh được rằng:

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

(Định lý Schwarz). Điều này chứng tỏ đạo hàm riêng cấp 2 theo hai biến x, y không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm, nếu chúng liên tục. Từ đó, kết quả trên cũng đúng cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn nếu chúng liên tục. Khi đó đạo hàm riêng cấp k của f(x,y) định bởi:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^p \partial y^{k-p}} = \frac{\partial^{k-p}}{\partial y^{k-p}}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x^p}\right)\left(= \frac{\partial^k f}{\partial y^{k-p} \partial x^p} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial^{k-p} f}{\partial y^{k-p}}\right)\right)$$

Ví dụ: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số:

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Giải. Trong ví dụ trước ta đã biết:

$$z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{và} \quad z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Do đó:

$$z''_{x^2} = (z'_x)'_x = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

$$z''_{y^2} = (z'_y)'_y = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)'_y = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{x^2+y^2-2yy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x^2+y^2-2xx}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

3. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM HỢP

3.1. Trường hợp f = f(x, y) với x = x(t), y = y(t):

Trong trường hợp này, hàm hợp f(x(t),y(t)) có đạo hàm theo biến t định bởi:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$

Đặc biệt, khi y = y(x), hàm hợp f(x,y(x)) có đạo hàm theo x định bởi:

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}}$$

3.2. Trường hợp f = f(x, y) với x = x(u,v), y = y(u,v):

Trong trường hợp này, hàm hợp f(x(u,v),y(u,v)) có các đạo hàm riêng theo u, v định bởi:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Ví dụ 1. Cho $z = x^{2\sin y}$ với $y = e^x$. Tìm $\frac{dz}{dx}$.

Giải. Ta có:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}\\
&\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{2\sin y}) = 2(\sin y)x^{2\sin y-1}\\
&\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^{2\sin y}) = 2(\cos y)x^{2\sin y}\ln x\\
&\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2\sin(e^x)x^{2\sin(e^x)-1} + 2e^x\cos(e^x)x^{2\sin(e^x)}\ln x$$

Ví dụ 2: Cho $z = x^{2\sin y}$ với x = lnt, y = arctgt. Tìm $\frac{dz}{dt}$.

Giải. Ta có

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{2\sin y}) = 2(\sin y)x^{2\sin y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^{2\sin y}) = 2(\cos y)x^{2\sin y}\ln x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln t) = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{arctgt}) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2}{t}\sin(\text{arctgt})(\ln t)^{2\sin(\text{arctgt})-1} + \frac{2}{1+t^2}\cos(\text{arctgt})(\ln t)^{2\sin(\text{arctgt})}\ln(\ln t)$$

Ví dụ 3. Cho $z = x^{2\sin y}$ với $x = u + v$, $y = uv$. Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

Giải. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^{2\sin y}) = 2(\sin y)x^{2\sin y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^{2\sin y}) = 2(\cos y)x^{2\sin y}\ln x$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(u+v) = 1; \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(uv) = v$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(u+v) = 1; \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(uv) = u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = 2\sin(uv)(u+v)^{2\sin(uv)-1} + 2v\cos(uv)(u+v)^{2\sin(uv)}\ln(u+v) \\ \frac{\partial z}{\partial v} = 2\sin(uv)(u+v)^{2\sin(uv)-1} + 2u\cos(uv)(u+v)^{2\sin(uv)}\ln(u+v) \end{cases}$$

4. ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA HÀM ẨN

4.1. Định nghĩa. Cho phương trình f(x,y) = 0, trong đó f(x,y) là một hàm hai biến xác định trên $D \subset \mathbf{R}^2$. Nếu y = y(x) là một hàm số xác định trên (a,b) sao cho $(x,y(x)) \in D$ và f(x,y(x)) = 0 với mọi $x \in (a,b)$ thì ta nói y = y(x) là một hàm ẩn xác định bởi phương trình f(x,y) = 0.

Ví dụ: $y = \sqrt{1-x^2}; y = -\sqrt{1-x^2}$ là hai hàm ẩn xác định bởi phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

4.2. Định lý. Cho phương trình f(x,y) = 0, trong đó f(x,y) là một hàm hai biến có các đạo hàm riêng liên tục trên $D \subset \mathbf{R}^2$ và $(x_0,y_0) \in D$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó, nếu $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ thì với một số ε > 0 bất kỳ đủ nhỏ, tồn tại δ > 0 sao cho:

1) Với mỗi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, phương trình f(x,y) = 0 có duy nhất một nghiệm y = y(x) $\in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$.

2) Hàm số y = y(x) là hàm ẩn xác định bởi phương trình f(x,y) = 0 có đạo hàm trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ định bởi:

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$$

với y = y(x).

Ví dụ. Cho phương trình 2y – siny – 2x = 0. Tính đạo hàm hàm ẩn y = y(x) xác định bởi phương trình trên tại $x_0 = 0$. (ĐS: 2)

Giải. Đặt f(x,y) = 2y – siny – 2x . Ta có $f'_x = -2; f'_y = 2 - \cos y$. Suy ra

$$y'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{2}{2 - \cos y}$$

Tại $x = x_0 = 0$ ta có 2y – siny = 0 nên $y = y_0 = 0$. Do đó

$$y'(0) = \frac{2}{2 - \cos y} = \frac{2}{2 - \cos 0} = 2.$$

4.3. Định lý. Cho phương trình f(x,y,z) = 0, trong đó f(x,y,z) là một hàm ba biến có các đạo hàm riêng liên tục trên $D \subset \mathbf{R}^3$ và $(x_0,y_0,z_0) \in D$ là một nghiệm của phương trình. Khi đó, nếu $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ thì với một số ε > 0 bất kỳ đủ nhỏ, tồn tại δ > 0 sao cho:

1) Với mỗi $(x,y) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, phương trình f(x,y,z) = 0 có duy nhất một nghiệm $z = z(x,y) \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$.

2) Hàm số z = z(x,y) là hàm ẩn xác định bởi phương trình f(x,y,z) = 0 có đạo hàm riêng trên $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ định bởi:

$$z'_x(x, y) = -\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z))}, \qquad z'_y(x, y) = -\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)},$$

với z = z(x,y).

Ví dụ. Tìm các đạo hàm riêng cấp 1, 2 của các hàm ẩn hàm ẩn z = z(x,y) xác định bởi các phương trình:

a) xyz = x + y + z;

b) $x + y + z = e^z$;

c) x/z = ln(z/y) + 1.

Giải. Sử dụng công thức trên ta tính được:

$$a)z'_x = -\frac{yz-1}{xy-1}; z'_y = -\frac{xz-1}{xy-1}; z''_{x^2} = \frac{2y(yz-1)}{(xy-1)^2};$$

$$z''_{y^2} = \frac{2x(xz-1)}{(xy-1)^2}; z''_{xy} = \frac{xyz-x-y+z}{(xy-1)^2}$$

$$b)z'_x = z'_y = \frac{1}{e^z-1}; z''_{x^2} = z''_{y^2} = z''_{xy} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3}$$

$$c)z'_x = \frac{z}{x+z}; z'_y = \frac{z^2}{y(x+z)};$$

$$z''_{x^2} = -\frac{z^2}{(x+z)^3}; z''_{y^2} = -\frac{x^2z^2}{y^2(x+z)^3}; z''_{xy} = \frac{xz^2}{y(x+z)^3}$$

5. VI PHÂN

Cho hàm f = f(x, y) có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $M_0(x_0,y_0)$. Khi đó với mọi Δx, Δy khá bé, ta có:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho)$$

trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ và $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{0(\rho)}{\rho} = 0$, nghĩa là $o(\rho)$ là VCB cấp cao hơn ρ khi $\rho \to 0$.

5.1. Vi phân toàn phần

Đặt $df(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y$. Ta gọi $df(x_0,y_0)$ là vi phân toàn phần của f(x,y) tại (x_0,y_0).

Tổng quát, vi phân toàn phần của của f(x,y) định bởi:

$$df = f_x'\Delta x + f_y'\Delta y.$$

Chú ý rằng với g(x,y) = x, ta có:

$$dg = g_x'\Delta x + g_y'\Delta y = \Delta x.$$

Do đó $dx = \Delta x$. Tương tự, $dy = \Delta y$. Do đó vi phân toàn phần của f(x,y) có biểu thức như sau:

$$\boxed{df = f'_x\,dx + f'_y\,dy}$$

Khi Δx và Δy khá bé, ta có:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \approx f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y$$

Suy ra công thức tính gần đúng:

$$\boxed{f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)}$$

Ví dụ. Cho $z = x^y$. Tìm dz; dz(2,3). Tính gần đúng $A = 2{,}02^{2,97}$.

Giải:

- $dz = z_x'dx + z_y'dy = yx^{y-1}dx + x^y\ln x dy$.
- $dz(2,3)= 3.2^{3-1}dx + 2^3\ln 2dy = 12dx + 8\ln 2dy$.
- Đặt $(x_0,y_0) = (2,3)$; $(\Delta x;\Delta y) = (0{,}02;-0{,}03)$. Theo công thức tính gần đúng, ta có:

$A = z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) \approx z(x_0,y_0) + dz(x_0,y_0) \approx z(2,3) + dz(2,3)$

$$\approx 8 + 12.0{,}02 + 8.\ln 2.(-0{,}03) \approx 8{,}24 - 0{,}24\ln 2$$

5.2. Vi phân cấp 2.

Vi phân cấp 2 của hàm f(x, y), ký hiệu d^2f, là vi phân của vi phân toàn phần của nó, nghĩa là

$$d^2f = d(df)$$

Ta có:

$d^2f = d(f_x'dx + f_y'dy) = (f_x'dx + f_y'dy)_x'dx + (f_x'dx + f_y'dy)_y'dy$

$= (f_x')_x'dx^2 + (f_y')_x'dydx + (f_x')_y'dxdy + (f_y')_y'dy^2 = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2$

Vậy:

$$\boxed{d^2f = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2}$$

hay

$$\boxed{d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2}$$

5.3. Vi phân cấp n.

Vi phân cấp n của hàm f(x, y), ký hiệu d^nf, là vi phân của vi phân cấp n-1 của nó, nghĩa là

$$d^nf = d(d^{n-1}f)$$

Tổng quát, ta có công thức tính vi phân cấp n trong trường hợp các đạo hàm riêng đều liên tục như sau:

$$\boxed{d^nf = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k}$$

Ví dụ. Cho $z = 2x^3\cos^2y - 3x^2 + y^2$. Tìm vi phân cấp 2 của z.

Giải. Với $z = 2x^3\cos^2y - 3x^2 + y^2$, ta có:

- $z'_x = 6x^2\cos^2y - 6x$.

- $z'_y = -\ 2x^3\sin 2y + 2y.$
- $z''_{x^2} = 12x\cos^2 y - 6.$
- $z''_{xy} = -\ 6x^2\sin 2y.$
- $z''_{y^2} = -\ 4x^3\cos 2y + 2.$

Suy ra:

$$d^2z = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2 = (12x\cos^2y-6)dx^2-12x^2\sin 2y dxdy+(-4x^3\cos 2y+2)dy^2$$

6. CỰC TRỊ

6.1. Định nghĩa. Xét hàm $f(x,y)$. Ta nói $f(x,y)$ đạt **cực đại** (**cực tiểu**) tại $M_0(x_0,y_0)$ nếu với mọi điểm $M(x,y)$ khá gần $M_0(x_0,y_0)$, $M \neq M_0$, ta có:

$$f(x, y) < f(x_0,y_0)$$

$$[f(x, y) > f(x_0,y_0)].$$

Cực đại hay cực tiểu được gọi chung là **cực trị**.

6.2. Cách tìm cực trị:

Qui tắc tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm các điểm dừng:

Giải hệ $\begin{cases} f'_x = 0; \\ f'_y = 0. \end{cases}$

Mỗi nghiệm (x_0,y_0) của hệ trên được gọi là một **điểm dừng** của $f(x,y)$.

Bước 2: Tìm các đạo hàm riêng:

$$A := f''_{x^2}; \quad B := f''_{xy}; \quad C := f''_{y^2}$$

Đặt $\Delta = B^2 - AC$.

Bước 3: Xác định cực trị:

Với mỗi điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$ tìm được ở Bước 1, xét:

$$\Delta = \Delta(x_0,y_0);\ A = A(x_0,y_0).$$

Ta có:

$\Delta > 0$		**f không đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$**
$\Delta < 0$	**$A > 0$**	**f đạt cực tiểu tại $M_0(x_0,y_0)$**
	$A < 0$	**f đạt cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$**
$\Delta = 0$		**Chưa thể khẳng định f có đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ hay không**

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

Giải. Bước 1: Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2; \\ 3(\dfrac{1}{2}x^2)^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ 3x(x^3 - 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy z có 2 điểm dừng: $M_1(0,0)$ và $M_2(2, 2)$.

Bước 2: Với $x^3 + y^3 - 6xy$, ta có:

- $z_x' = 3x^2 - 6y$.
- $z_y' = 3y^2 - 6x$.
- $A = z''_{x^2} = 6x$.
- $B = z''_{xy} = -6$.
- $C = z''_{y^2} = 6y$.
- $\Delta = B^2 - AC = 36(1 - xy)$

Bước 3: Xác định cực trị:

- $M_1(0,0)$: $\Delta = 36(1 - xy) = 36 > 0$ nên z không đạt cực trị tại $M_1(0,0)$.
- $M_2(2,2)$: $\Delta = 36(1 - xy) = -108 < 0$; $A = 6x = 12 > 0$ nên z đạt cực tiểu tại $M_2(2,2)$ với $z(2,2) = -8$.

7. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

7.1. Định nghĩa. Xét hàm $f(x,y)$. Ta nói $f(x,y)$ đạt **cực đại** (**cực tiểu**) tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (*)$$

nếu hai tính chất sau được thỏa:

1) Điểm $M_0(x_0,y_0)$ có tọa độ thỏa (*), nghĩa là $\varphi(x_0,y_0) = 0$.
2) Với mọi điểm $M(x,y)$ có tọa độ thỏa (*), khá gần $M_0(x_0,y_0)$, $M \neq M_0$, ta có:

$$f(x, y) < f(x_0,y_0)$$

$$[f(x, y) > f(x_0,y_0)].$$

Cực đại có điều kiện hay cực tiểu có điều kiện được gọi chung là **cực trị có điều kiện**.

7.2. Cách tìm cực trị có điều kiện:

Để tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với điều kiện:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (*)$$

ta có 2 phương pháp:

1) Phương pháp thế:

Từ (*) ta tính y theo x (hoặc x theo y) rồi thế vào f(x,y) ta được hàm một biến. Cực trị của hàm một biến đó cho ta cực trị có điều kiện của f(x,y).

Ví dụ : Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2$ thỏa điều kiện ràng buộc x + y = 10 (*).

Giải. Từ điều kiện (*) ta suy ra: y = 10 – x. Thế vào z ta được hàm một biến:

$$z_1 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

Hàm z_1 đạt cực tiểu tại x = 5 với z(5) = 50. Do đó, với điều kiện (*), z đạt cực tiểu tại (x,y)=(5,5) với z(5,5) = 50.

2) Phương pháp nhân tử Lagrange:

Phương pháp nhân tử Lagrange gồm các bước sau:

Bước 1: Lập hàm Lagrange:

$$L_\lambda(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

Trong đó λ là tham số thực, gọi là nhân tử Lagrange.

Bước 2: Xác định các điểm dừng và nhân tử:

Giải hệ
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x} = f'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0; \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial y} = f'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

tìm tất cả các điểm dừng cùng với các giá trị tương ứng của nhân tử λ.

Bước 3: Tìm vi phân cấp 2:

$$d^2L_\lambda = \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}dy^2$$

Bước 4: Xác định cực trị có điều kiện:

Với mỗi điểm dừng $M_0(x_0,y_0)$ cùng với nhân tử λ_0 tìm được ở Bước 2, xét:

$$D = d^2L_{\lambda_0}(x_0, y_0)$$

trong đó dx, dy thỏa ràng buộc biểu thị bằng phương trình:

$$d\varphi(x_0, y_0) = 0$$

hay $$\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi''_y(x_0, y_0)dy = 0 \quad (**)$$

Ta có: Cho dx, dy thay đổi, không đồng thời bằng 0 thoả (**). Khi đó

D không đổi dấu khi dx, dy thay đổi	**D > 0**	**f đạt cực tiểu tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện (*)**
	D < 0	**f đạt cực đại tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện (*)**
D đổi dấu khi dx, dy thay đổi		**f không đạt cực trị tại $M_0(x_0,y_0)$ với điều kiện (*)**

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm $z = x + 2y$ thỏa điều kiện ràng buộc $x^2 + y^2 = 5$.

Giải. Điều kiện đã cho được viết lại như sau:

$$x^2 + y^2 - 5 = 0 \qquad (*)$$

Bước 1: Lập hàm Lagrange:

$$L_\lambda(x,y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Bước 2: Xác định các điểm dừng và nhân tử:

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L_\lambda}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 2 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}; \\ y = -\dfrac{1}{\lambda}; \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,y) = (-1,-2); \lambda = \dfrac{1}{2}; \\ (x,y) = (1,2); \lambda = -\dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Vậy L_λ có hai điểm dừng: $M_1(-1,-2)$ ứng với $\lambda_1 = 1/2$ và $M_2(1,2)$ ứng với $\lambda_2 = -1/2$.

Bước 3: Tìm vi phân cấp 2:

$$d^2L_\lambda = \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2.$$

Bước 4: Xác định cực trị có điều kiện:

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5 \Rightarrow \varphi'_x = 2x; \varphi'_y = 2y; d\varphi(x,y) = 2xdx + 2ydy$$

- Tại $M_1(-1,-2)$ ứng với $\lambda_1 = 1/2$:

$$D_1 = d^2L_{\lambda_1}(-1,-2) = 2\lambda_1 dx^2 + 2\lambda_1 dy^2 = dx^2 + dy^2,$$

trong đó dx, dy thỏa: $d\varphi(-1,-2) = 0$, nghĩa là

$$(2xdx + 2ydy)\big|_{(x,y)=(-1,-2)} = 0$$

hay $\qquad -2dx - 4dy = 0$ (**)

Ta thấy $D_1 > 0$ với mọi dx, dy không đồng thời bằng 0 thỏa (**). Do đó, z đạt cực tiểu tại $M_1(-1,-2)$ với điều kiện (*), trong đó $z(-1,-2) = -5$.

- Tại $M_2(1,2)$ ứng với $\lambda_2 = -1/2$:

$$D_2 = d^2L_{\lambda_2}(1,2) = 2\lambda_2 dx^2 + 2\lambda_2 dy^2 = -(dx^2 + dy^2),$$

trong đó dx, dy thỏa: $d\varphi(1,2) = 0$, nghĩa là

$$\left.(2xdx + 2ydy)\right|_{(x,y)=(1,2)} = 0$$

hay $\quad 2dx + 4dy = 0$ (***)

Ta thấy $D_2 < 0$ với mọi dx, dy không đồng thời bằng 0 thỏa (***). Do đó, z đạt cực đại tại $M_2(1,2)$ với điều kiện (*), trong đó $z(1,2) = 5$.

8. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT- GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

8.1. Định nghĩa. Cho hàm số f(x,y) xác định trên D. Ta định nghĩa:

1) $M \in \mathbf{R}$ là giá trị lớn nhất (GTLN) của f(x,y) trên D nếu

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in D, f(x,y) \le M; \\ \exists (x_1, y_1) \in D, f(x_1, y_1) = M. \end{cases}$$

2) $m \in \mathbf{R}$ là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của f(x,y) trên D nếu

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in D, f(x,y) \ge m; \\ \exists (x_2, y_2) \in D, f(x_2, y_2) = m. \end{cases}$$

8.2. Định lý. Cho hàm số f(x,y) liên tục trên miền đóng, bị chặn D (D đóng nếu D chứa luôn phần biên; D bị chặn nếu D nằm trong một đường tròn nào đó). Khi đó f(x,y) đạt GTLN và GTNN trên D.

8.3. Cách tìm GTLN và GTNN

Cho hàm số f(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng, bị chặn D. Khi đó f(x,y) liên tục trên D, do đó đạt GTLN và GTNN trên D. Cách tìm các giá trị đó như sau**:**

Bước 1: Tìm các điểm dừng

Giải hệ $\begin{cases} f'_x = 0; \\ f'_y = 0. \end{cases}$ tìm tất cả các điểm dừng thuộc phần trong của D (tức là thuộc D nhưng không thuộc biên D).

Bước 2: Tìm các điểm nghi ngờ trên biên D

Giả sử biên D có phương trình định bởi:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (*)$$

Khi đó các điểm thuộc biên D mà ta nghi ngờ tại đó hàm số f(x,y) đạt GTLN, GTNN được xác định như sau:

- Nếu dùng phương pháp thế thì đó là các điểm ứng với các giá trị đầu mút và các giá trị tại đó đạo hàm của hàm một biến triệt tiêu.
- Nếu dùng phương pháp Nhân tử Lagrange thì đó là các điểm dừng của hàm Lagrange.

Bước 3: Xác định GTLN và GTNN

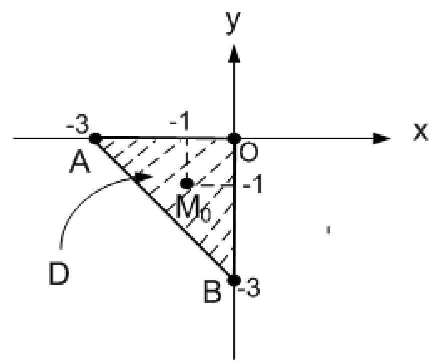
So sánh giá trị của f(x,y) tại các điểm dừng tìm được trong Bước 1 và tại các điểm nghi ngờ tìm được trong Bước 2, khi đó giá trị lớn nhất trong chúng chính là GTLN và giá trị nhỏ nhất trong chúng chính là GTNN.

Ví dụ: Tìm GTLN và GTNN của hàm số :

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

trên miền D định bởi: $x \le 0$; $y \le 0$; $x + y \ge -3$.

Giải. Bước 1: Miền D được biểu diễn như sau:



$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -1.$$

Vậy z chỉ có một điểm dừng $M_0(-1, -1)$ thuộc phần trong của D, trong đó

$$z(-1,-1) = -1 \qquad (1)$$

Bước 2: Xét biên D ta có:

- Trên OA: $y = 0$, $-3 \le x \le 0$. Hàm z trở thành:

$$z_1 = x^2 + x \Rightarrow z_1' = 2x + 1 \ (z_1' = 0 \Leftrightarrow x = -1/2)$$

Các điểm nghi ngờ trên OA là:

$$\begin{cases} x = -3 & \to (-3,0) \text{ với } z(-3,0) = 6 \\ x = 0 & \to (0,0) \text{ với } z(0,0) = 0 \\ x = -1/2 & \to (-1/2,0) \text{ với } z(-1/2,0) = -1/4 \end{cases} \qquad (2)$$

- Trên OB: $x = 0$, $-3 \le y \le 0$. Hàm z trở thành:

$$z_2 = y^2 + y \Rightarrow z_2' = 2y + 1 \ (z_2' = 0 \Leftrightarrow y = -1/2)$$

Các điểm nghi ngờ trên OB là:

$$\begin{cases} y = -3 & \to (0,-3) \text{ với } z(0,-3) = 6 \\ y = 0 & \to (0,0) \text{ đã xét trên OA} \\ y = -1/2 & \to (0,-1/2) \text{ với } z(0,-1/2) = -1/4 \end{cases} \qquad (3)$$

- Trên AB: $y = -x - 3$, $-3 \le x \le 0$. Hàm z trở thành:

$$z_3 = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow z_3' = 6x + 9$$

$$z_3' = 0 \Leftrightarrow x = -3/2 \ (y = -3/2)$$

Các điểm nghi ngờ trên AB là:

$$\begin{cases} x = -3 & \to (-3,0) \text{ đã xét trên OA} \\ x = 0 & \to (0,-3) \text{ đã xét trên OB} \\ x = -3/2 & \to (-3/2,-3/2) \text{ với } z(-3/2,-3/2) = -3/4 \end{cases} \qquad (4)$$

So sánh (1)-(4) ta suy ra GTLN và GTNN của z trên D như sau:

GTLN $= 6 = z(-3,0) = z(0,-3)$;

GTNN $= -1 = z(-1,-1)$.

9. MỘT SỐ BÀI TOÁN KINH TẾ

9.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo

1. Bài toán: Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm. Đơn giá của hai loại sản phẩm trên thị trường lần lượt là P_1; P_2 và hàm tổng chi phí là $C = C(Q_1,Q_2)$ (Q_1, Q_2 là các sản lượng). Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

2. Phương pháp giải: Điều kiện về các mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1 \geq 0$; $Q_2 \geq 0$. Khi đó

- Doanh thu là $R = P_1Q_1 + P_2Q_2$.
- Lợi nhuận là:

$$\pi = R - C = P_1Q_1 + P_2Q_2 - C(Q_1,Q_2).$$

Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 dương sao cho tại đó π đạt cực đại. Lưu ý cần kiểm tra lại các đại lượng khác như chi phí, lợi nhuận phải dương để phù hợp với thực tế.

3. Ví dụ: Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm với các đơn giá trên thị trường lần lượt là $P_1 = 56$ và $P_2 = 40$. Hàm tổng chi phí là $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1, Q_2 để xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

Giải. Điều kiện về các mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1 \geq 0$; $Q_2 \geq 0$. Ta có

- Doanh thu là $R=P_1Q_1+P_2Q_2 = 56Q_1 + 40Q_2$.
- Lợi nhuận là

$$\begin{aligned} \pi = R - C &= (56Q_1 + 40Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2) \\ &= 56Q_1 + 40Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2 \end{aligned}$$

Ta cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 dương sao cho tại đó π đạt cực đại.

- Xét hệ:

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 56 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \\ 40 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2Q_1 + Q_2 = 28 \\ Q_1 + Q_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 8 > 0 \\ Q_2 = 12 > 0 \end{cases}$$

Vậy π chỉ có một điểm dừng là $(Q_1;Q_2) = (8;12)$.

- Ta có

$$A = \pi''_{Q_1^2} = -4;\ B = \pi''_{Q_1Q_2} = -2;\ C = \pi''_{Q_2^2} = -2\,;$$

$\Delta = B^2 - AC = -4 < 0$.

Suy ra π đạt cực đại tại $(Q_1;Q_2) = (8;12)$. Khi đó:

- Chi phí là $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 > 0$.
- Lợi nhuận là $\pi = 464 > 0$.

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần định mức sản lượng của hai loại sản phẩm lần lượt là $Q_1 = 8$ và $Q_2 = 12$.

9.2. Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện sản xuất độc quyền

1. Bài toán: Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm. Biết hàm cầu của hai loại sản phẩm trên lần lượt là $Q_{D1} = D_1(P_1,P_2)$; $Q_{D2} = D_2(P_1,P_2)$ (P_1, P_2 là các đơn giá) và hàm tổng chi phí là $C = C(Q_1,Q_2)$ (Q_1, Q_2 là các sản lượng). Hãy định các mức sản lượng Q_1 và Q_2 để xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

2. Phương pháp giải. Điều kiện về các mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1 \ge 0$; $Q_2 \ge 0$. Do sản xuất độc quyền, với các mức sản lượng trên, để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho:

$$\begin{cases} Q_{D_1} = Q_1 \\ Q_{D_2} = Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1(P_1,P_2) = Q_1 \\ D_2(P_1,P_2) = Q_2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được

$$\begin{cases} P_1 = P_1(Q_1,Q_2) \\ P_2 = P_2(Q_1,Q_2) \end{cases}$$

Khi đó;

- Doanh thu là $R = P_1(Q_1,Q_2)\,Q_1 + P_2(Q_1,Q_2)Q_2$.
- Lợi nhuận là:

$$\pi = R - C = P_1(Q_1,Q_2)\,Q_1 + P_2(Q_1,Q_2)Q_2 - C(Q_1,Q_2).$$

Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 dương sao cho tại đó π đạt cực đại. Lưu ý cần kiểm tra lại các đại lượng khác như: đơn giá, chi phí, lợi nhuận phải dương để phù hợp với thực tế.

3. Ví dụ: Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm với các hàm cầu lần lượt là:

$$\begin{cases} Q_{D_1} = \dfrac{1230 - 5P_1 + P_2}{14} \\ Q_{D_2} = \dfrac{1350 + P_1 - 3P_2}{14} \end{cases}$$

và hàm tổng chi phí là $C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1, Q_2 để xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

Giải. Điều kiện về các mức sản lượng Q_1, Q_2 là $Q_1 \geq 0$; $Q_2 \geq 0$. Do sản xuất độc quyền, với các mức sản lượng trên, để tiêu thụ hết sản phẩm, xí nghiệp sẽ bán với các đơn giá P_1, P_2 sao cho:

$$\begin{cases} Q_{D_1} = Q_1 \\ Q_{D_2} = Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1230 - 5P_1 + P_2}{14} = Q_1 \\ \dfrac{1350 + P_1 - 3P_2}{14} = Q_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5P_1 + P_2 = 14Q_1 - 1230 \\ \ \ P_1 - 3P_2 = 14Q_2 - 1350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 360 - 3Q_1 - Q_2 \\ P_2 = 570 - Q_1 - 5Q_2 \end{cases}$$

Khi đó:

- Doanh thu là

$R = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (360 - 3Q_1 - Q_2)Q_1 + (570 - Q_1 - 5Q_2)Q_2$

$= -3Q_1^2 - 5Q_2^2 - 2Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2$

- Lợi nhuận là

$$\pi = R - C = -4Q_1^2 - 6Q_2^2 - 3Q_1Q_2 + 360Q_1 + 570Q_2.$$

Ta cần xác định các mức sản lượng Q_1, Q_2 dương sao cho tại đó π đạt cực đại.

- Xét hệ:

$$\begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8Q_1 - 3Q_2 + 360 = 0 \\ -12Q_2 - 3Q_1 + 570 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 30 \\ Q_2 = 40 \end{cases}$$

Vậy π chỉ có một điểm dừng là $(Q_1;Q_2) = (30;40)$.

- Ta có:

$$A = \pi''_{Q_1^2} = -8;\ B = \pi''_{Q_1Q_2} = -3;\ C = \pi''_{Q_2^2} = -12;\ \Delta = B^2 - AC = -87 < 0.$$

Suy ra π đạt cực đại tại $(Q_1;Q_2) = (30;40)$. Khi đó

- Chi phí là $C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 > 0$.
- Lợi nhuận là $\pi = 16800 > 0$.

Kết luận: Để đạt lợi nhuận cao nhất, cần định mức sản lượng của hai loại sản phẩm lần lượt là $Q_1 = 30$ và $Q_2 = 40$.

9.3. Bài toán người tiêu dùng.

1. Bài toán: Một người dành một số tiền B để mua hai loại sản phẩm có đơn giá lần lượt là P_1 và P_2. hàm hữu dụng ứng với hai loại sản phẩm trên là $U = U(x_1,x_2)$ (x_1,x_2 lần lượt là số lượng của các sản phẩm). Hãy xác định số lượng của hai loại sản phẩm trên sao cho hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

2. Phương pháp giải: Gọi x_1, x_2 lần lượt là số lượng của các sản phẩm. Điều kiện: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

Khi đó $x_1P_1 + x_2P_2 = B$. Do đó để hàm hữu dụng đạt giá trị lớn nhất ta cần tìm cực đại của hàm hữu dụng $U = U(x_1,x_2)$ với điều kiện $x_1P_1 + x_2P_2 = B$.

3. Ví dụ: Một người muốn dùng số tiền 4.000.000đ để mua hai mặt hàng có đơn giá 400.000đ và 500.000đ. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là $U = (x + 5)(y + 4)$ (x, y lần lượt là số lượng hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.

Giải. Với x, y lần lượt là số lượng hai mặt hàng, ta có điều kiện: $x \geq 0$; $y \geq 0$. Khi đó

$$400000x + 500000y = 4000000 \Leftrightarrow 4x+5y =40(*)$$

Ta cần tìm $x, y \geq 0$ để hàm hữu dụng $U = (x + 5)(y + 4)$ đạt cực đại với điều kiện (*).

Từ (*) ta suy ra: $y = 8 - \frac{4}{5}x$. Thế vào U, ta được

$$U_1 = (x + 5)(12 - \frac{4}{5}x).$$

Ta có $U_1' = (12 - \frac{4}{5}x) - \frac{4}{5}(x + 5) = 8 - \frac{8}{5}x$.

$$U_1' = 0 \Leftrightarrow x = 5 > 0 \ (y = 4 > 0).$$

$U_1'' = -\frac{8}{5} < 0$.

Do đó U_1 đạt cực đại tại $x = 5$. Suy ra hàm hữu dụng U đạt cực đại tại $(x,y) = (5,4)$ với $U(5,4) = 80$.

Kết luận: Để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất, người đó cần mua hai mặt hàng trên với số lượng lần lượt là 5 và 4. Khi đó giá trị hàm hữu dụng là $U(5,4) = 80$.

BÀI TẬP

1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \left(1+xy\right)^{\frac{1}{x^2+2xy}}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x\sin y + y\sin x}{x^2+y^2}$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

2.Tìm vi phân toàn phần cấp 1 và cấp 2 của các hàm số sau:

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $z = \text{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$.

c) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. d) $z = x^y$.

3. Tính gần đúng các giá trị sau nhờ vi phân cấp 1:

a) $(2{,}01)^{3{,}03}$ b) $(2{,}02)^{2{,}97}$ c) $\sin 29^{o}\cos 62^{o}$.

4. Tìm đạo hàm được chỉ ra của các hàm số sau:

a) $z = \ln(e^x + e^y)$ với $y = x^3$, tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{dz}{dx}$.

b) $z = e^{x-2y}$ với $x = \sin t$, $y = t^3$, tính $\dfrac{dz}{dt}$.

c) $z = x^2y - xy^2$ với $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, tính $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

5. a) Tìm $df(t)$ với $f = \dfrac{y}{x}$, $x = e^t, y = \ln t$.

b) Tìm $df(x,y)$ với $f = u^2\ln v$, $u = \dfrac{y}{x}, v = x^2 + y^2$.

6. Tìm đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, tính $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

b) $z = x\ln(xy)$, tính $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

c) $z = x^3\sin y + y^3\sin x$, tính $\dfrac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3}$.

7. Cho hàm số $z = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$. Chứng minh rằng:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial x}.$$

8. a) Tính $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ với y là hàm ẩn xác định bơi $x + y = e^{x-y}$.

b) Tính $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ với y là hàm ẩn xác định bơi $x - y + \text{arctg}\,y = 0$.

c) Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ với z là hàm ẩn xác định bơi $z\ln(x + z) - \dfrac{xy}{z} = 0$.

d) Tính d^2z với z là hàm ẩn xác định bơi $x + y + z = e^z$.

9. Tìm cực trị của các các hàm số sau:

a) $z = 8/x + x/y + y$ $(x > 0, y > 0)$.

b) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

c) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

d) $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 2$.

e) $z = 2x^3 + 6xy - 6x - 3y^2 - 30y + 2$.

f) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

h) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

10. Tìm cực trị có điều kiện của các các hàm số sau:

a) $z = 6 - 4x - 3y$, với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

b) $z = xy$ khi $x^2 + y^2 = 1$.

c) d) $z = x^2 + y^2$ khi $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

11. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã cho:

a) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ trên miền $0 \le x \le 2; -1 \le y \le 2$.

b) $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ trên miền $x \ge 0; y \ge 0; x + y \le 3$.

c) $z = xy^2$ trên miền $x^2 + y^2 \le 1$.

d) $z = x^2 + 2y^2 - x$ trên miền $x^2 + y^2 \le 25$.

12. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm với các đơn giá trên thị trường lần lượt là $P_1 = 60$ và $P_2 = 75$. Hàm tổng chi phí là $C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1, Q_2 để xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

13. Một xí nghiệp sản xuất độc quyền hai loại sản phẩm với các hàm cầu lần lượt là:

$$\begin{cases} Q_{D_1} = 40 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{D_2} = 15 + P_1 - P_2 \end{cases}$$

và hàm tổng chi phí là $C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$. Hãy định các mức sản lượng Q_1, Q_2 để xí nghiệp đạt lợi nhuận cao nhất.

14. Một người muốn dùng số tiền 178.000.000đ để mua hai mặt hàng có đơn giá 400.000đ và 600.000đ. Hàm hữu dụng của hai mặt hàng trên là $U = (x + 20)(y + 10)$ (x, y lần lượt là số lượng hai mặt hàng). Hãy xác định số lượng cần mua của hai mặt hàng trên để hàm hữu dụng đạt giá trị cao nhất.
