

# **BÀI GIẢNG ĐỒ HỌA MÁY TÍNH**

## **CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HAI CHIỀU**

NGÔ QUỐC VIỆT  
2011

# Nội dung

- Giới thiệu.
- Các phép biến đổi cơ bản
- Biểu diễn ma trận
- Bài tập
- Giải đáp thắc mắc

# Giới thiệu

- Định nghĩa: biến đổi là ánh xạ các điểm  $(x,y)$  từ một hệ tọa độ thành  $(x', y')$  trong hệ tọa độ khác.

$$\begin{aligned}x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f\end{aligned}$$

# Một số thuật ngữ

## Object space

- local to each object

## World space

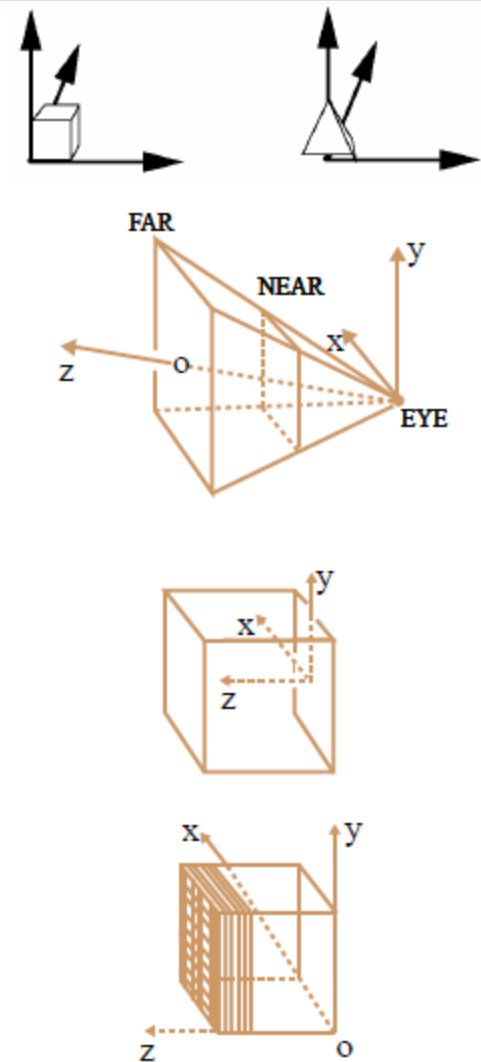
- common to all objects

## Eye space / Camera space

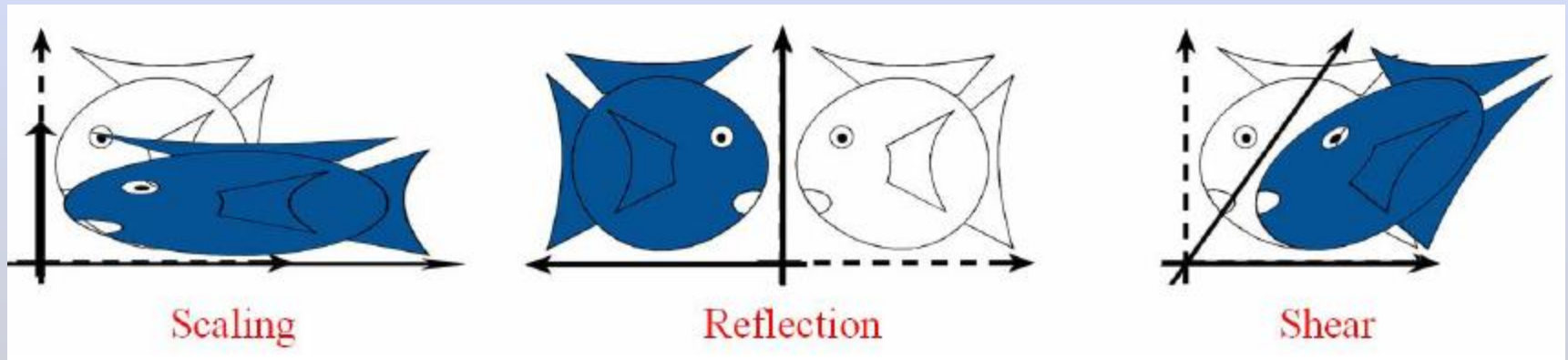
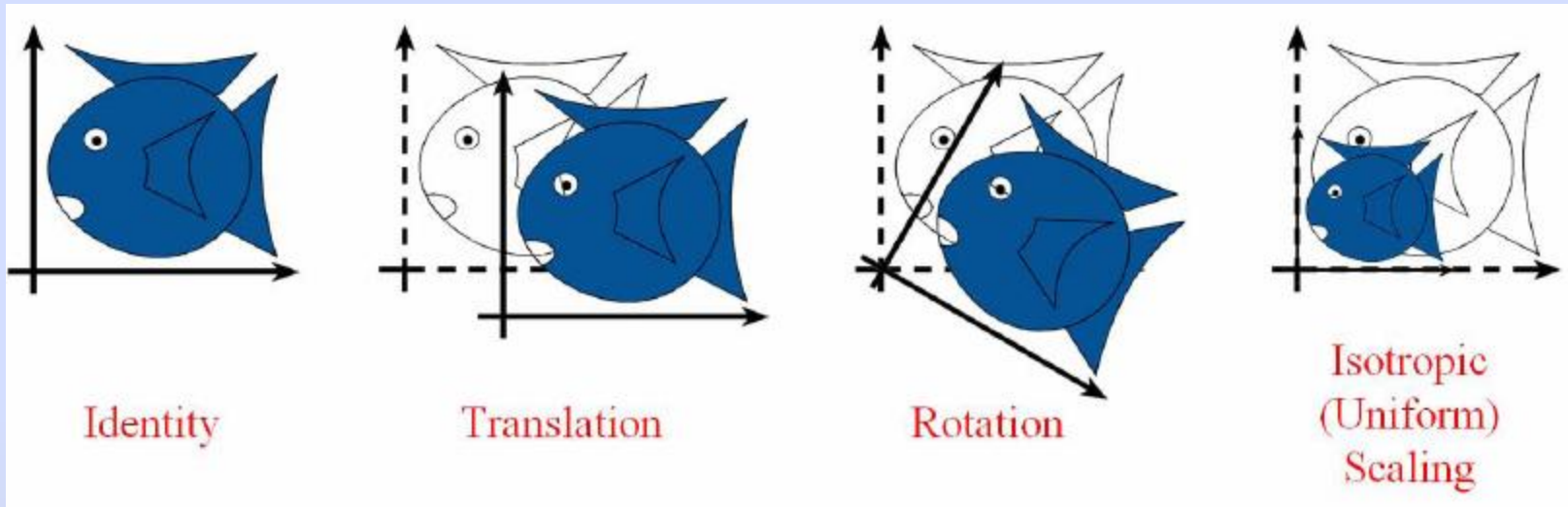
- derived from view frustum

## Screen space

- indexed according to hardware attributes

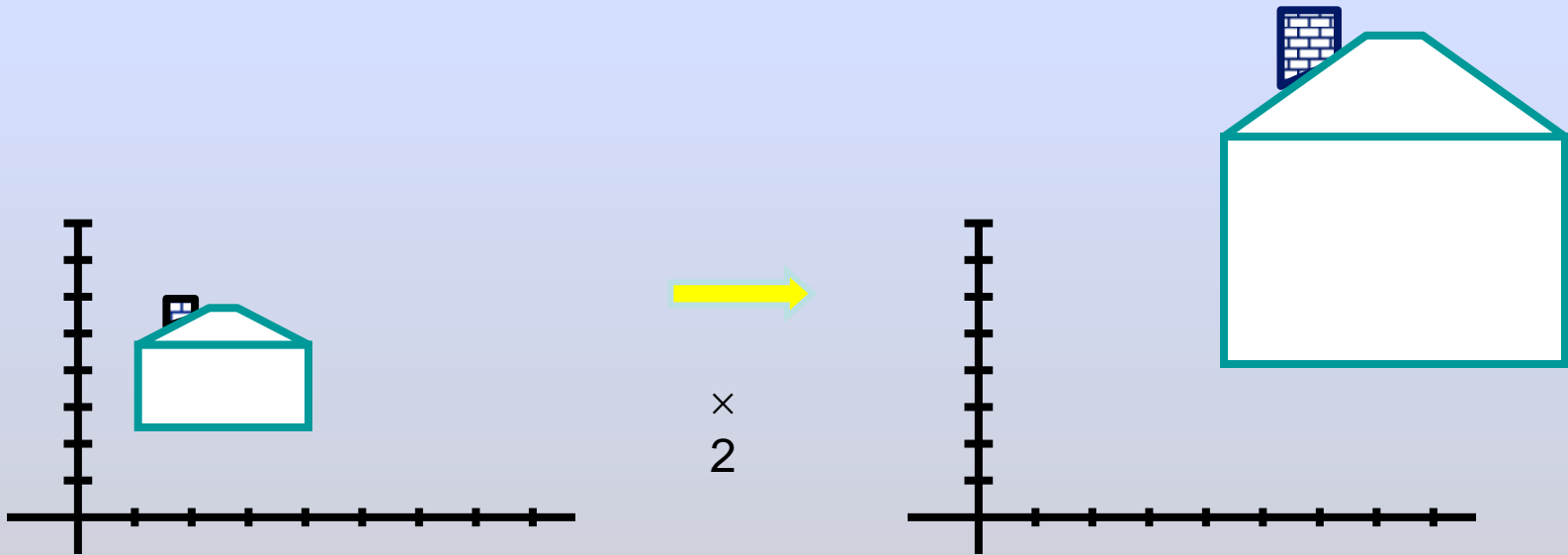


# Các biến đổi cơ bản



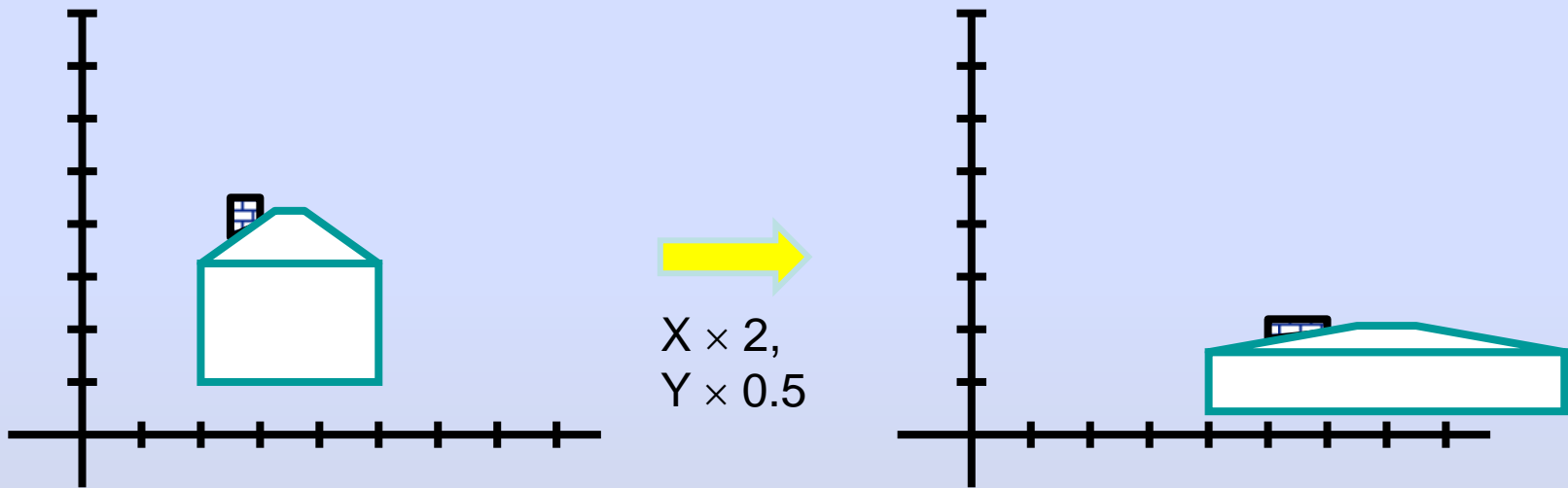
# Biến đổi tỉ lệ

- **Scaling:** mỗi giá trị tọa độ được nhân với tỉ lệ khác nhau.
- **Uniform scaling:** các giá trị tọa độ được nhân với cùng tỉ lệ.



# Biến đổi tỉ lệ

- **Non-uniform scaling**: different scalars per component:



- Có thể biểu diễn phép biến đổi bằng ma trận?

# Biến đổi tỉ lệ

- Biến đổi tỉ lệ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$$

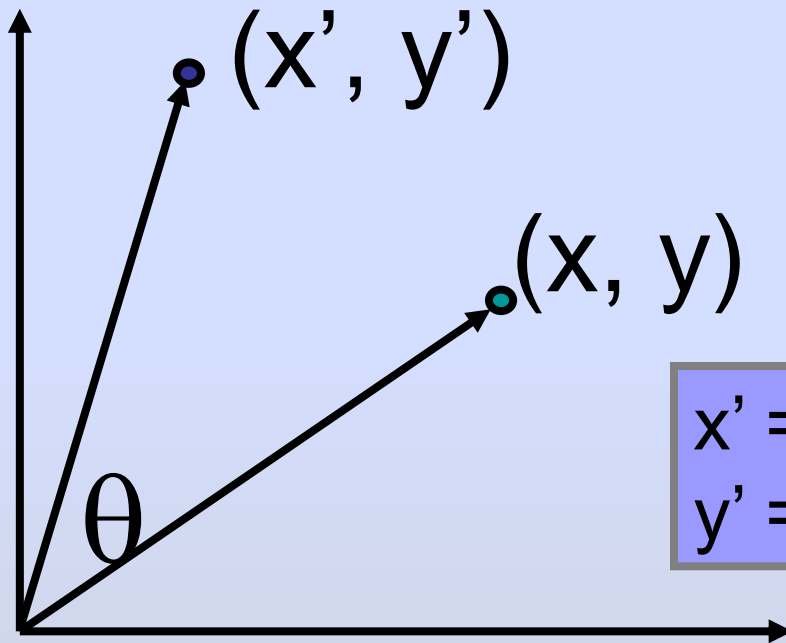
- Dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
*Ma trận tỉ lệ*

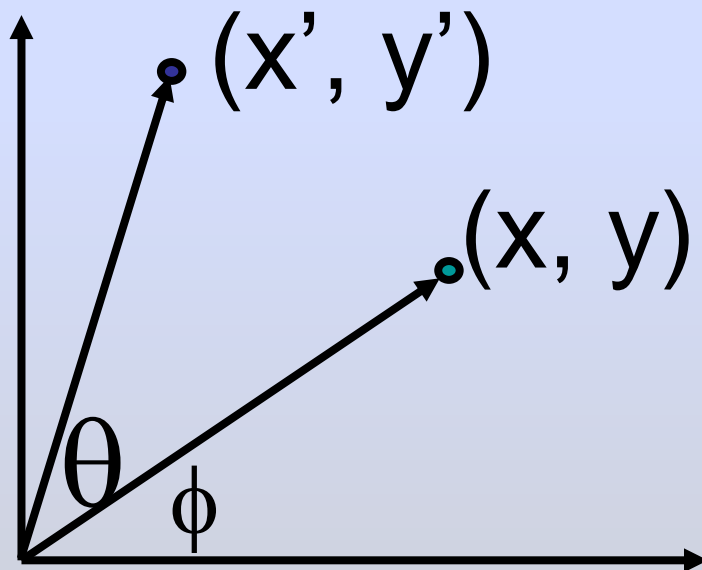


# Phép quay



$$\begin{aligned}x' &= x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' &= x \sin(\theta) + y \cos(\theta)\end{aligned}$$

# Phép quay



$$x = r \cos(\phi)$$

$$y = r \sin(\phi)$$

$$x' = r \cos(\phi + \theta)$$

$$y' = r \sin(\phi + \theta)$$

Trig Identity...

$$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$$

$$y' = r \sin(\phi) \sin(\theta) + r \cos(\phi) \cos(\theta)$$

Substitute...

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

# Phép quay

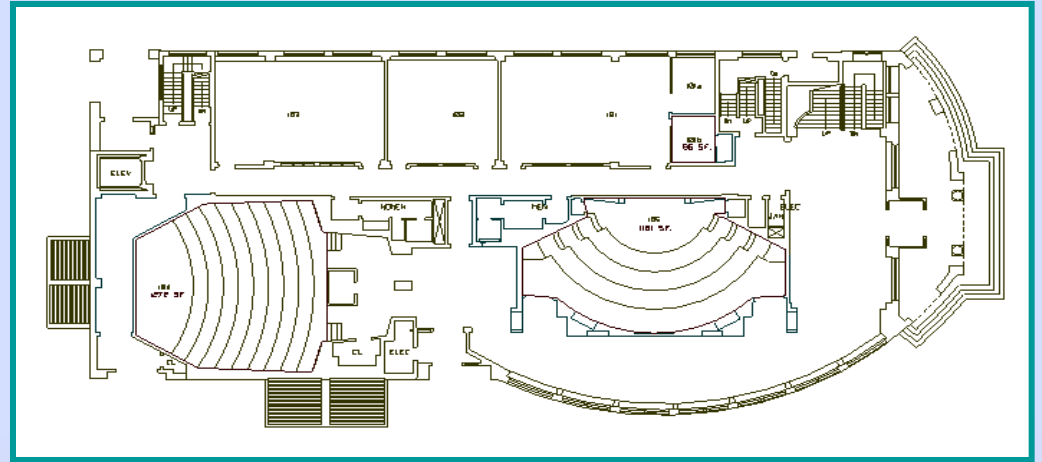
- Biểu diễn bằng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Mặc dù  $\sin(\theta)$  và  $\cos(\theta)$  không là hàm tuyến tính theo  $\theta$ ,
  - ***$x'$  là kết hợp tuyến tính của  $x$  và  $y$ .***
  - ***$y'$  là kết hợp tuyến tính của  $x$  và  $y$ .***

# Các biến đổi cơ bản

- Tịnh tiến:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Tỷ lệ:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Biến dạng:
  - $x' = x + h_x * y$
  - $y' = y + h_y * x$
- Quay:
  - $x' = x * \cos\Theta - y * \sin\Theta$
  - $y' = x * \sin\Theta + y * \cos\Theta$



Có thể kết hợp các biến đổi

# Các biến đổi cơ bản

- Translation:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Scale:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Shear:
  - $x' = x + h_x * y$
  - $y' = y + h_y * x$
- Rotation:
  - $x' = x * \cos\Theta - y * \sin\Theta$
  - $y' = x * \sin\Theta + y * \cos\Theta$



# Các biến đổi cơ bản

- Translation:

- $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$

- Scale:

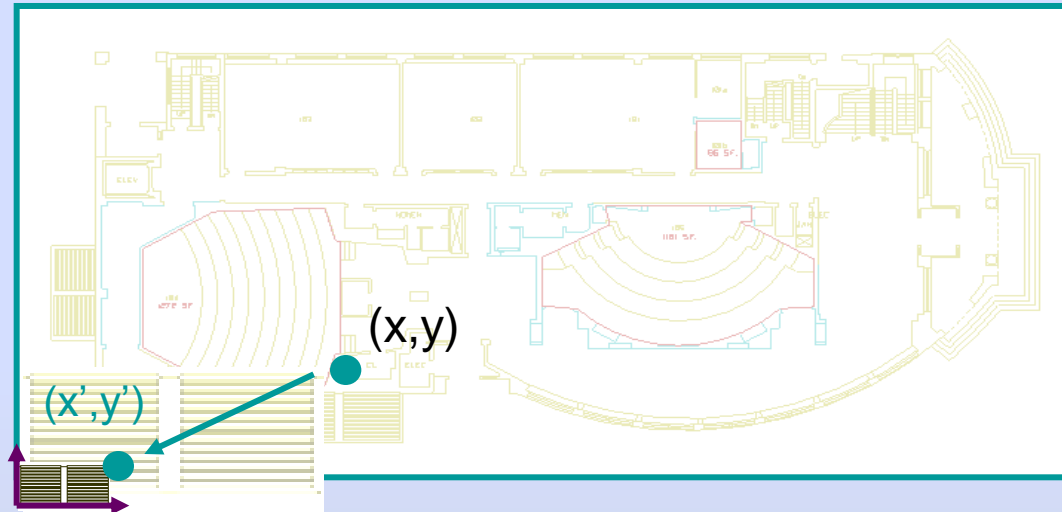
- $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$

- Shear:

- $x' = x + h_x * y$
  - $y' = y + h_y * x$

- Rotation:

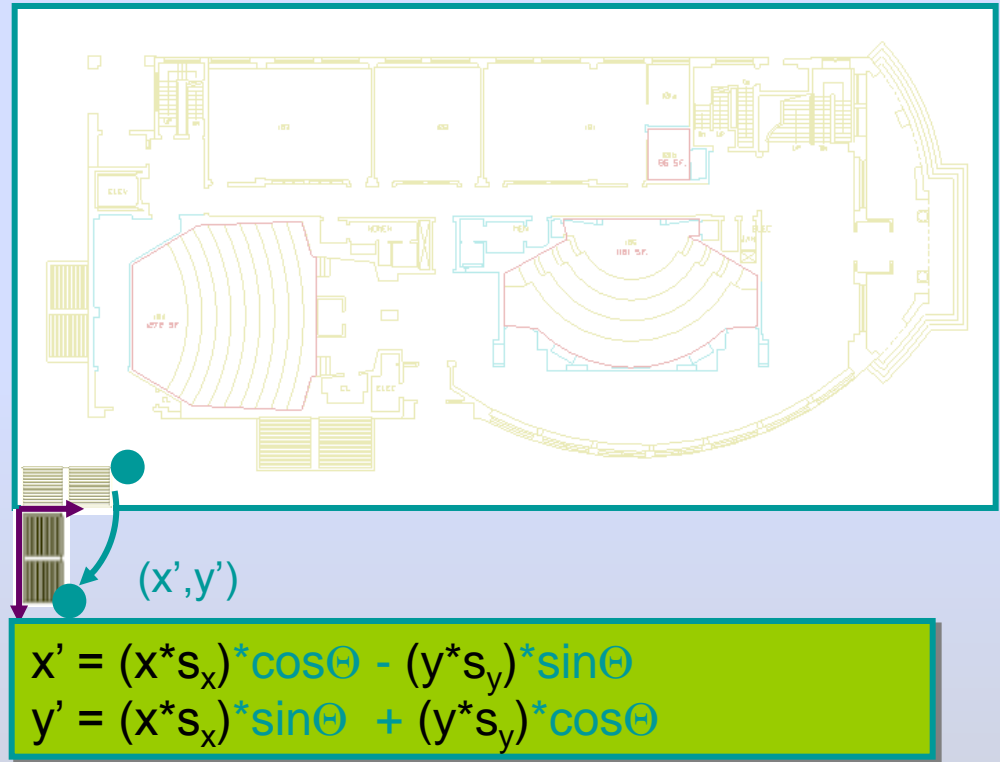
- $x' = x * \cos\Theta - y * \sin\Theta$
  - $y' = x * \sin\Theta + y * \cos\Theta$



$$\begin{aligned} x' &= x * s_x \\ y' &= y * s_y \end{aligned}$$

# Các biến đổi cơ bản

- Translation:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Scale:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Shear:
  - $x' = x + h_x * y$
  - $y' = y + h_y * x$
- Rotation:
  - $x' = x * \cos\Theta - y * \sin\Theta$
  - $y' = x * \sin\Theta + y * \cos\Theta$



# Các biến đổi cơ bản

- Translation:

- $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$

- Scale:

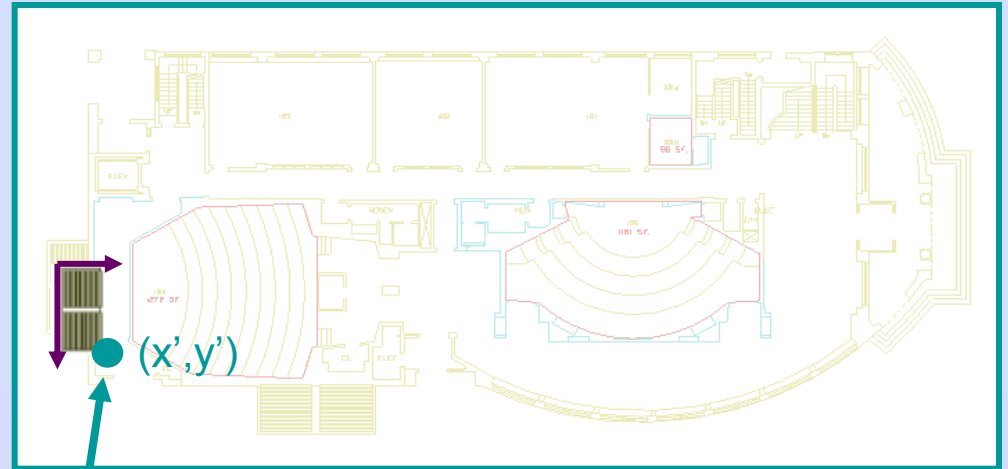
- $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$

- Shear:

- $x' = x + h_x * y$
  - $y' = y + h_y * x$

- Rotation:

- $x' = x * \cos\Theta - y * \sin\Theta$
  - $y' = x * \sin\Theta + y * \cos\Theta$



$$\begin{aligned} x' &= ((x * s_x) * \cos\Theta - (y * s_y) * \sin\Theta) + t_x \\ y' &= ((x * s_x) * \sin\Theta + (y * s_y) * \cos\Theta) + t_y \end{aligned}$$



# Các biến đổi cơ bản

- Translation:

- $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$

- Scale:

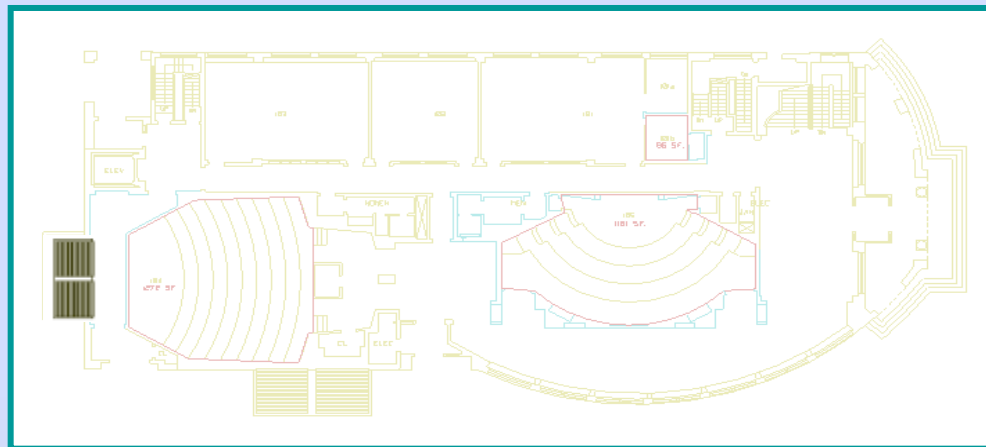
- $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$

- Shear:

- $x' = x + h_x * y$
  - $y' = y + h_y * x$

- Rotation:

- $x' = x * \cos\Theta - y * \sin\Theta$
  - $y' = x * \sin\Theta + y * \cos\Theta$



$$\begin{aligned}x' &= ((x * s_x) * \cos\Theta - (y * s_y) * \sin\Theta) + t_x \\y' &= ((x * s_x) * \sin\Theta + (y * s_y) * \cos\Theta) + t_y\end{aligned}$$

# Biểu diễn bằng ma trận

- Biểu diễn biến đổi hai chiều bằng ma trận

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Thực hiện biến đổi bằng cách nhân ma trận cho từng tọa độ điểm.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

# Biểu diễn bằng ma trận

- Các biến đổi có thể kết hợp bằng phép nhân ma trận

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrices are a convenient and efficient way to represent a sequence of transformations!

# Biểu diễn bằng ma trận

- Các phép biến đổi cơ bản như tỉ lệ, quay, đối xứng, biến dạng đều biểu diễn được bằng ma trận 2x2, ngoại trừ phép tịnh tiến.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ sh_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Sử dụng hệ tọa độ đồng nhất

- Tọa độ đồng nhất: biểu diễn tọa độ 2 chiều vector 3 thành phần.
- Có vẻ không trực quan, nhưng hiệu quả cho tính toán.

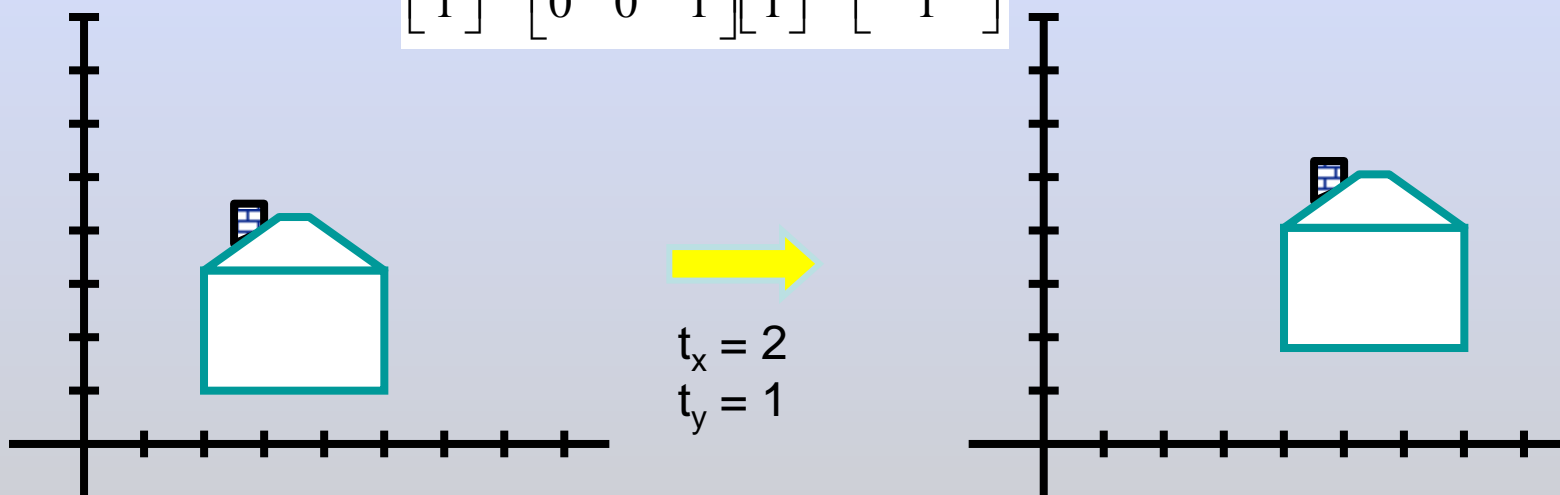
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{homogeneous coords}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Biểu diễn các biến đổi bằng ma trận 3x3

- Tịnh tiến:

$$\mathbf{Translation} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Biểu diễn các biến đổi bằng ma trận 3x3

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Shear

# Biến đổi Affine

- Là các biến đổi tuyến tính & tịnh tiến.
- Các tính chất của biến đổi Affine
  - Bảo toàn tính song song
  - Bảo toàn tỉ lệ.
- Có thể kết hợp nhiều biến đổi thông qua nhân ma trận

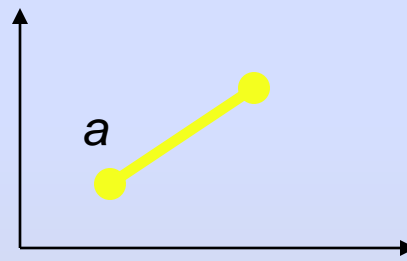
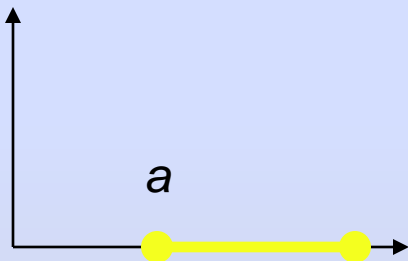
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}(t_x, t_y) \mathbf{R}(\Theta) \mathbf{S}(s_x, s_y) \mathbf{p}$$

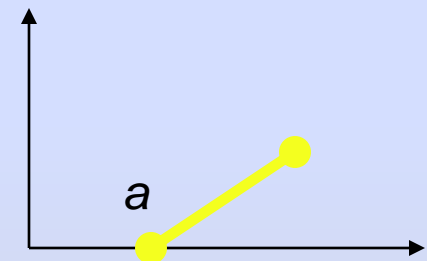


# Biến đổi Affine

- Chú ý: nhân ma trận không có tính giao hoán.
- Ví dụ:



Sai  
R(45)



Đúng  
T(-3) R(45) T(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Bài tập

- Bài 7, 8, 9, 10 trang 98 trong giáo trình Đồ họa máy tính-Dương Anh Đức.
- Thực hành: cài đặt các phép biến đổi, thừa kế chương trình vẽ trong các bài giảng trước để biến đổi các hình vẽ.

# Hỏi đáp

