BÀI GIẢNG ĐỒ HỌA MÁY TÍNH

ĐƯỜNG VÀ MẶT CONG

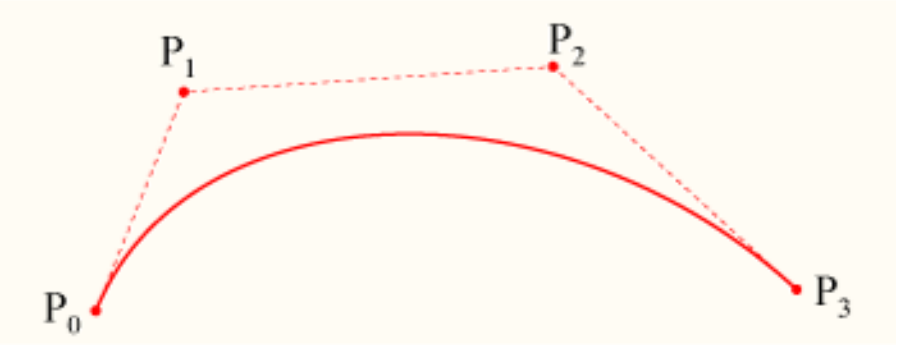
NGÔ QUỐC VIỆT
2010

NỘI DUNG

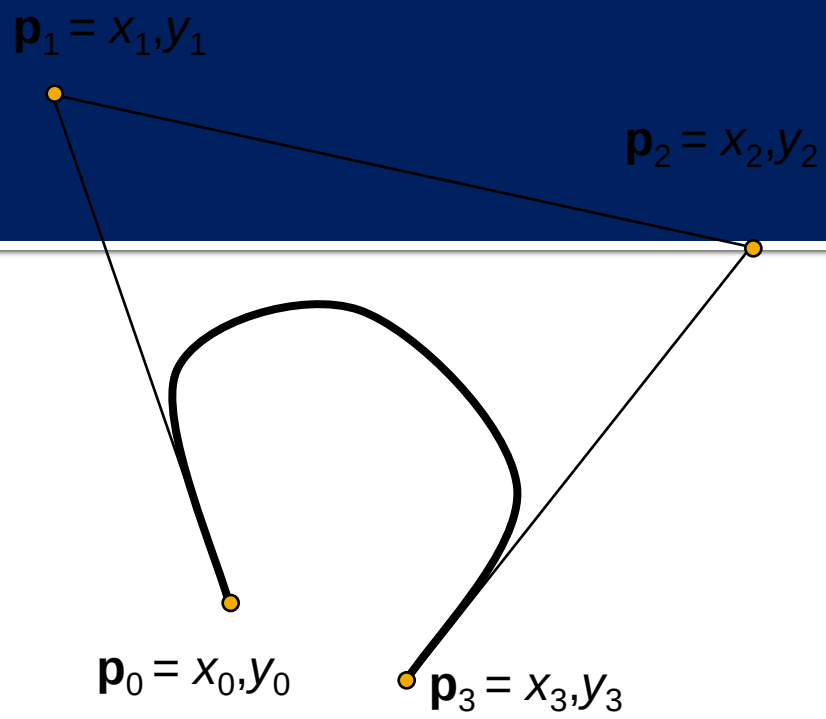
- Đường cong Bezier
  - Thuật giải Casteljau.
  - Đa thức Bernstein.
- Đường bậc 3, B-splines.
- Mặt cong.
- Hỏi đáp
- Bài tập

Đường cong Bezier

- Mục tiêu: xây dựng đường cong thông qua các điểm điều khiển.
- Do Pierre Bezier xây dựng (trong thời gian làm việc ở Renault).
- Tương tự đường Hermit nhưng trực quan hơn



Đường cong Bezier



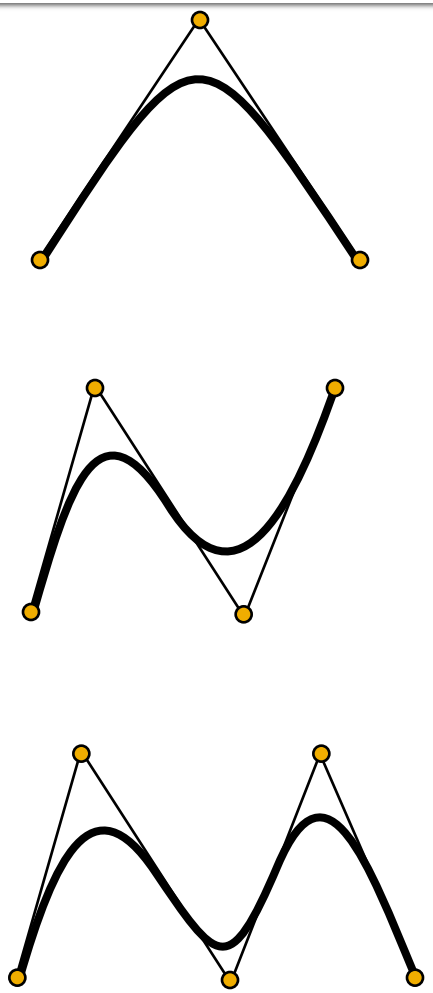
$$\mathbf{p}(t) = \Sigma_{i=0..3}\, B_i(t)\, \mathbf{p}_i$$
$$B_i(t) = \binom{3}{i}\, t^i\, (1-t)^{3-i}$$

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{p}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3$$

$$x(t) = (1-t)^3 x_0 + 3(1-t)^2 t x_1 + 3(1-t)t^2 x_2 + t^3 x_3$$
$$y(t) = (1-t)^3 y_0 + 3(1-t)^2 t y_1 + 3(1-t)t^2 y_2 + t^3 y_3$$

Đường cong Bezier

- Đường Bezier có bậc bất kỳ
- Bậc đường Bezier=số điểm điều khiển – 1
- Ví dụ:
  - Bậc 2 (quadratic): 3 CPs
  - Bậc 3 (cubic): 4 CPs
  - Bậc 4 (quadratic): 5 CPs
- Câu hỏi:
  - Làm các nào thêm điểm điều khiển vào đường Bezier xác định?
  - Làm cách nào chia đường cong Bezier thành hai đoạn cong Bezier?



Thuật giải Casteljau Xây dựng đường Bezier

- Xây dựng điểm trên đường cong.

  $\mathbf{p}_{01} = (1-t)\,\mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{p}_1$

  $\mathbf{p}_{12} = (1-t)\,\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2$

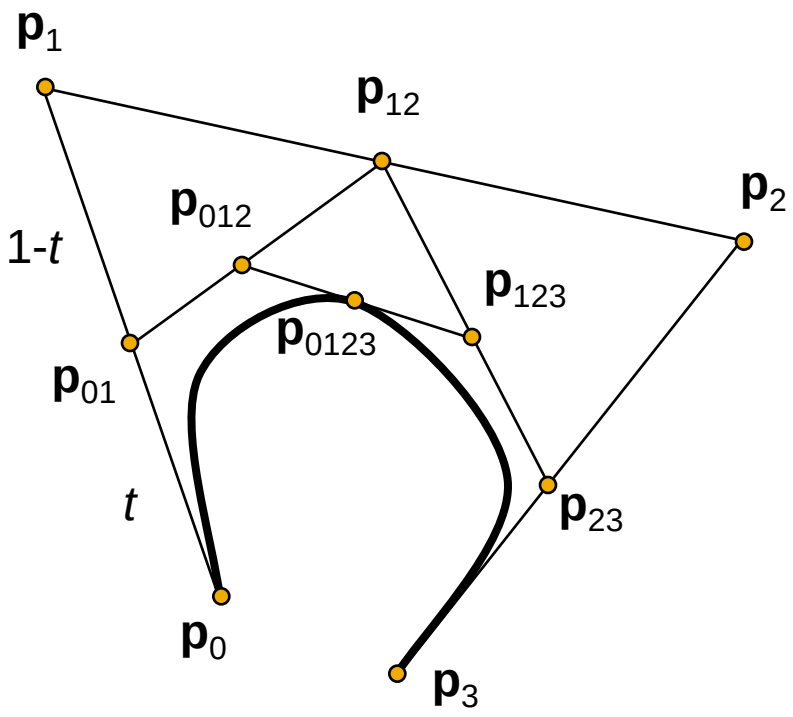
  $\mathbf{p}_{23} = (1-t)\,\mathbf{p}_2 + t\,\mathbf{p}_3$

  $\mathbf{p}_{012} = (1-t)\,\mathbf{p}_{01} + t\,\mathbf{p}_{12}$

  $\mathbf{p}_{123} = (1-t)\,\mathbf{p}_{12} + t\,\mathbf{p}_{23}$

  $\mathbf{p}_{0123} = (1-t)\,\mathbf{p}_{012} + t\,\mathbf{p}_{123}$

- Chia đường cong tại $\mathbf{p}_{0123}$
  - $\mathbf{p}_0\ \mathbf{p}_{01}\ \mathbf{p}_{012}\ \mathbf{p}_{0123}$
  - $\mathbf{p}_{0123}\ \mathbf{p}_{123}\ \mathbf{p}_{23}\ \mathbf{p}_3$
- Lặp lại với các giá trị t để có đường Bezier.



Bậc của đường cong

- Dùng để tăng điều khiển
- Bắt đầu với

$$\Sigma\, \mathbf{p}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \Sigma\, \mathbf{q}_i \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i}$$

- Xác định $\mathbf{q}_i$

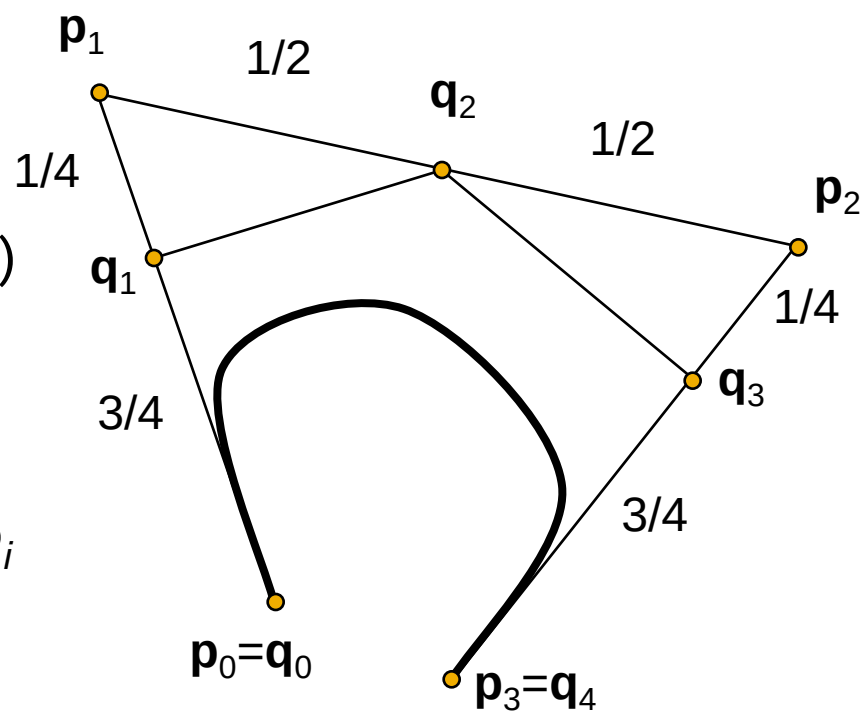
$$(t+(1-t))\, \Sigma\, \mathbf{p}_i \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$= \Sigma\, \mathbf{p}_i \binom{n}{i} \left(t^i (1-t)^{n+1-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-i}\right)$$

- So sánh các hệ số

$$\mathbf{q}_i \binom{n+1}{i} = \mathbf{p}_i \binom{n}{i} + \mathbf{p}_{i-1} \binom{n}{i-1}$$

$$\mathbf{q}_i = (i/(n+1))\mathbf{p}_{i-1} + (n+1-i/(n+1))\mathbf{p}_i$$



Tìm Q(u)

- Dạng tổng quát

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} V_i$$

với

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

- Công thức trên xác định lớp các đường cong **Bezier.**

Đa thức Bernstein

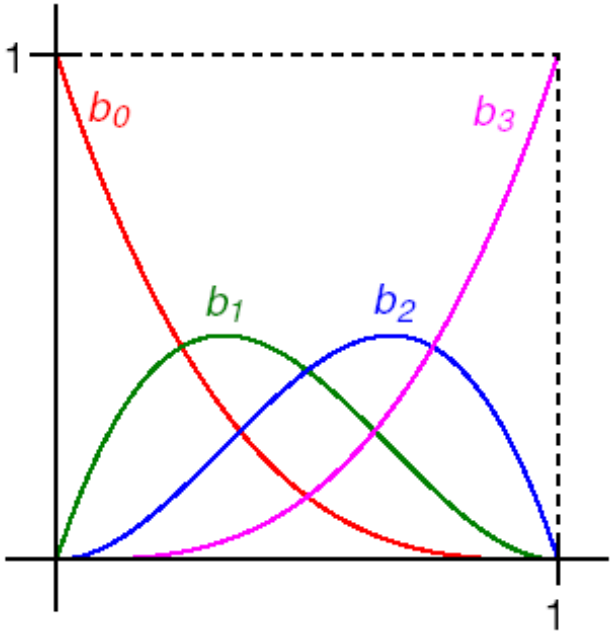
- Hệ số của các điểm điều khiển là tập các hàm được gọi là **Bernstein polynomials**.
- Ở bậc 3 (4 điểm điều khiển), ta có:

$$b_0(u) = (1-u)^3$$

$$b_1(u) = 3u(1-u)^2$$

$$b_2(u) = 3u^2(1-u)$$

$$b_3(u) = u^3$$



Đa thức Bernstein

- Bậc bất kỳ

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\binom{n}{i} = n!/(i!(n-i)!) = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$$

- Phân hoạch đơn vị
  - Tổng bằng 1 với mọi *t* trong [0,1]

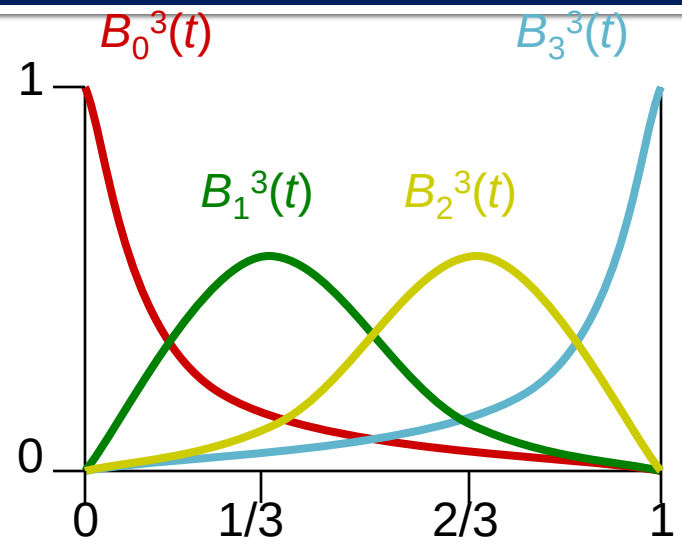
$$S_{i=0..n}\, B_i^n(t) = 1$$

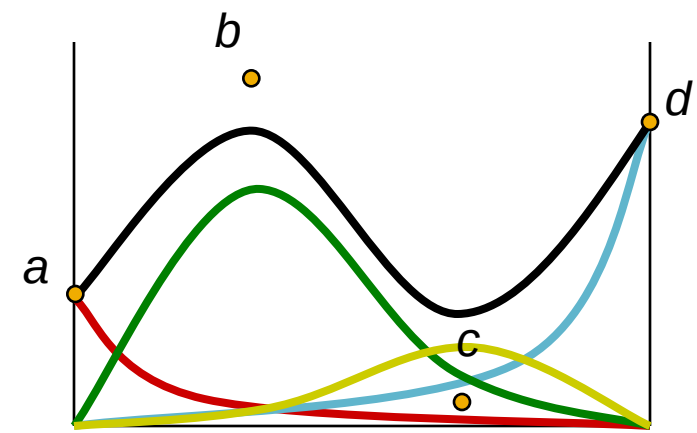
- Đa thức bậc cao được xây dựng từ các đa thức bậc thấp hơn

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

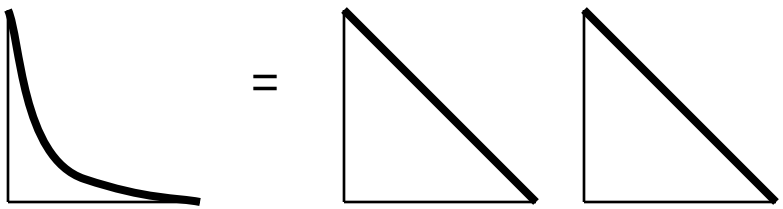




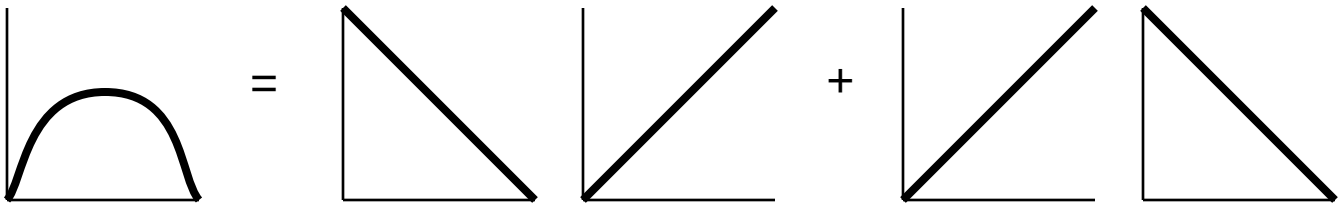
$$p(t)=aB_0^3(t)+bB_1^3(t)+cB_2^3(t)+dB_3^3(t)$$

Xây dựng đa thức Bernsteins

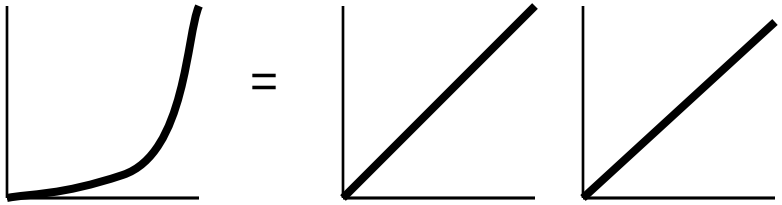
$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$



$B_0^2(t)$ = (1-t) $B_0^1(t)$

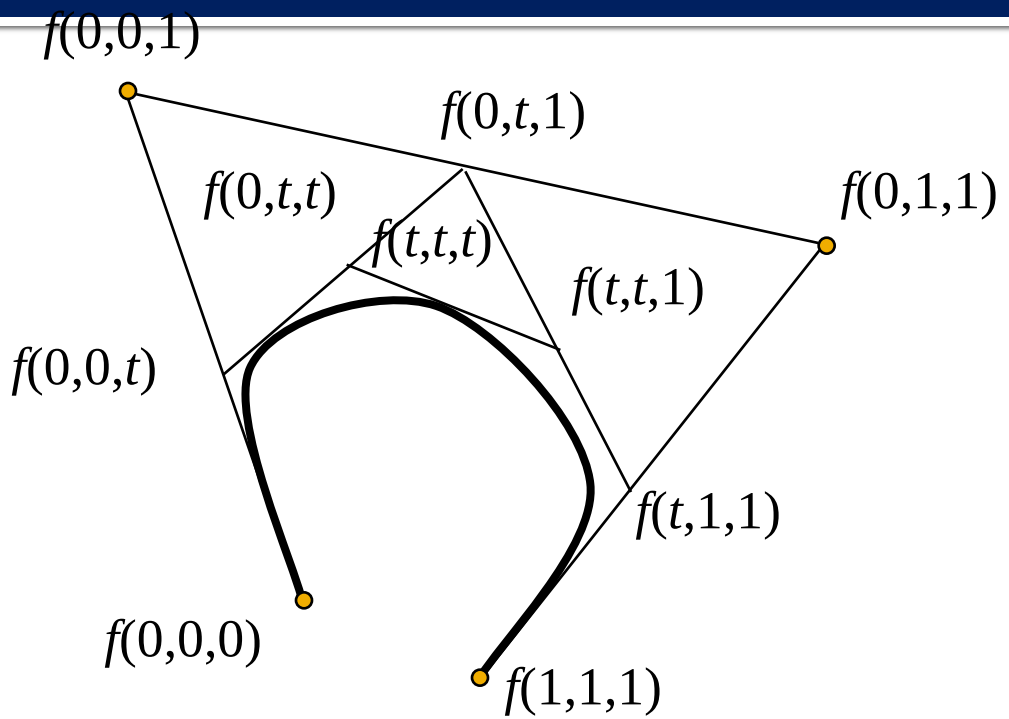


$B_1^2(t)$ = (1-t) $B_1^1(t)$ + t $B_0^1(t)$



$B_2^2(t)$ = t $B_1^1(t)$

Triển khai Bezier



$\mathbf{p}(t) = f(t,t,t)$

$$\mathbf{p}(t) = f(t,t,t) = (1-t)\, f(t,t,0) + t\, f(t,t,1)$$
$$= (1-t)[(1-t)\, f(t,0,0) + t\, f(t,0,1)] + t\, [(1-t)\, f(t,0,1) + t\, f(t,1,1)]$$
$$= (1-t)^2\, f(t,0,0) + 2\,(1-t)\, t\, f(t,0,1) + t^2\, f(t,1,1)$$
$$= (1-t)^3\, f(0,0,0) + 3\,(1-t)^2\, t\, f(0,0,1) + 3\,(1-t)\, t^2\, f(0,1,1) + t^3\, f(1,1,1)$$

Dạng ma trận của đường Bezier

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, p_i$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^n(t) \\ \vdots \\ B_n^n(t) \end{pmatrix}$$

Dạng ma trận của đường Bezier

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, p_i$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$$

Dạng ma trận của đường Bezier

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\, p_i$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_0 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^{n-1} \end{pmatrix}$$

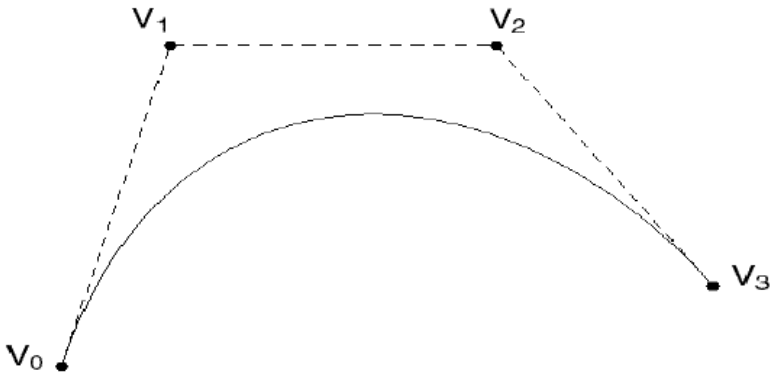
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hiển thị đường Bezier

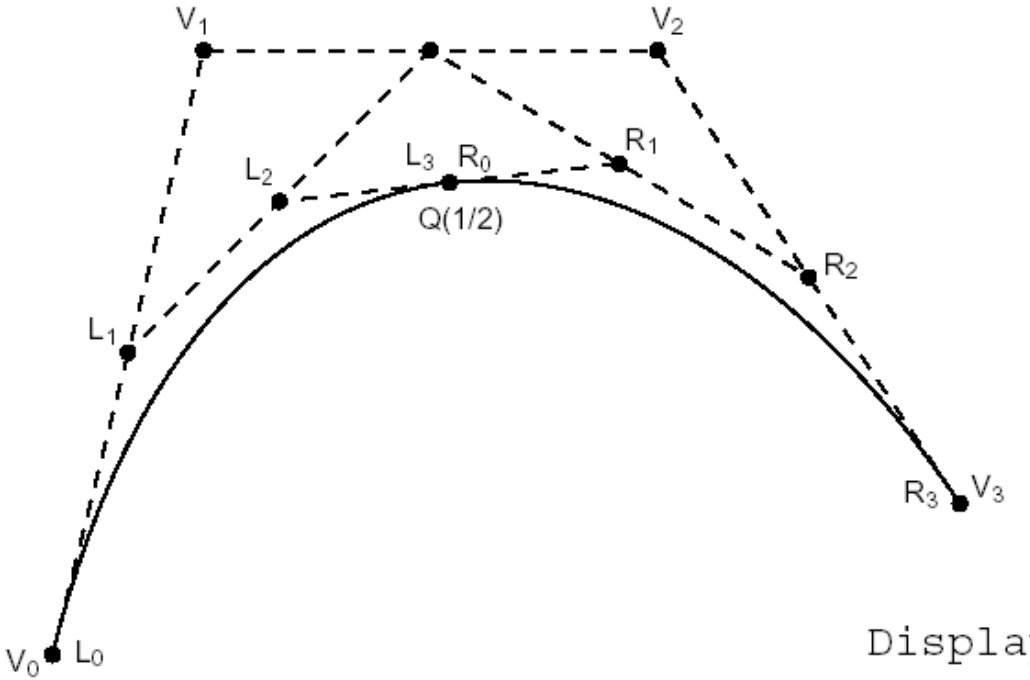
- Hầu hết phần cứng đồ họa chỉ hiển thị đường thẳng hay đa giác.
- Vậy hiển thị đường Bezier ra sao?

- Cần thuật giải thích nghi, trong đó xét tính phẳng ➔ vẽ đoạn thẳng nối giữa hai điểm đầu cuối thay vì vẽ đa giác.

```
DisplayBezier (vo,v1,v2,v3)
 if (FlatEnough(v0,v1,v2,v3))
    Line(v0,v3)
 else
    do something smart
```

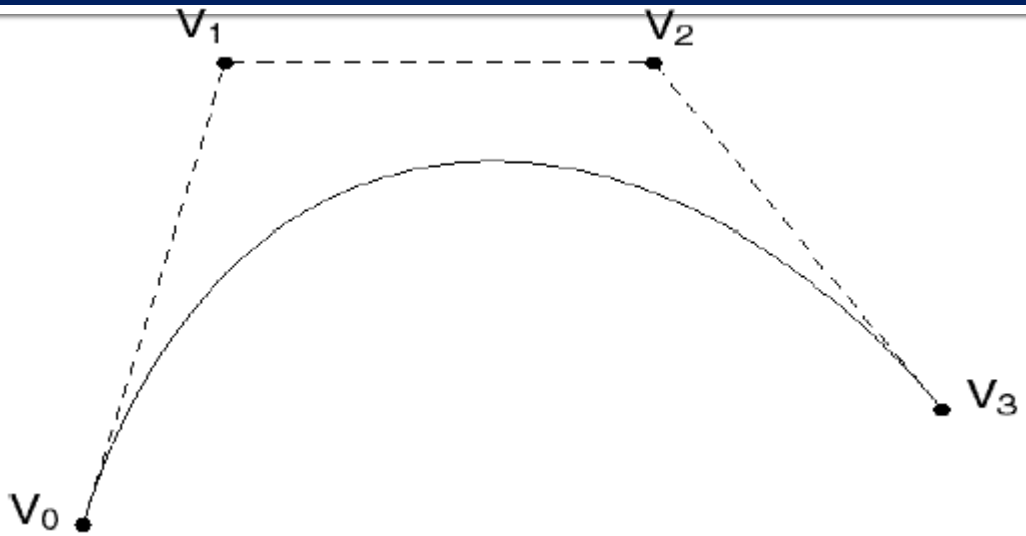


Hiển thị đường Bezier




```
DisplayBezier(V0,V1,V2,V3 )
begin
    if ( FlatEnough(V0,V1,V2,V3))
        Line(V0,V3);
    else
        Subdivide(V[]) ⇒ L[], R[]
        DisplayBezier(L0,L1,L2,L3);
        DisplayBezier(R0,R1,R2,R3);
end
```

Hiển thị đường Bezier



- So sánh tổng độ dài của đa giác điều khiển với độ dài của hai điểm điều khiển đầu và cuối:

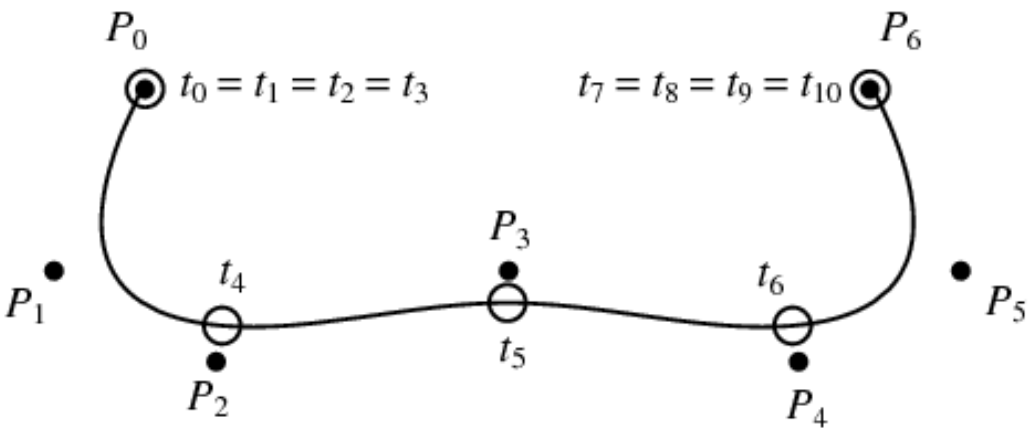
$$\frac{|V_0 - V_1| + |V_1 - V_2| + |V_2 - V_3|}{|V_0 - V_3|} < 1 + \varepsilon$$

Đường B-Spline

- B-splines điểu khiển từng vertex (tính cục bộ) cho từng đoạn cong. Tính liên tục của đường B-spline luôn được duy trì.
- Nhiều kiểu B-splines: bậc có thể khác nhau (linear, quadratic, cubic,…), theo dạng đồng nhất hay không đồng nhất.
- Với uniform B-splines, tính liên tục luôn có bậc thấp hơn một so với bậc của đoạn cong.
  - Linear B-splines liên tục trong C^0, cubic liên tục trong C^2, v.v.

Đường B-Spline

- Định nghĩa tương tự như đường Bezier nhưng hoàn toàn dựa trên tập hàm cơ sở (blendding) khác.
- Không đi qua các điểm điều khiển (ngoại trừ hai điểm đầu cuối).



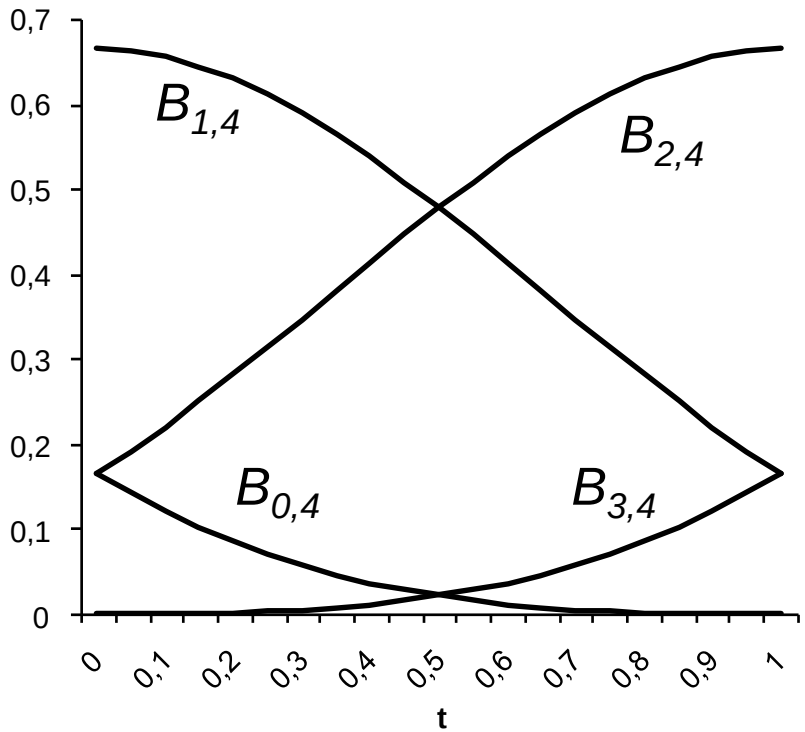
Đường B-Spline

- Tập hàm cơ sở của đường B-Splines với 4 điểm điều khiển (còn gọi là cubic bspline).

$$x(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,4}(t)$$

$$= P_0 \frac{1}{6}\left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right) + P_1 \frac{1}{6}\left(4 - 6t^2 + 3t^3\right) + P_2 \frac{1}{6}\left(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3\right) + P_3 \frac{1}{6}\left(t^3\right)$$

Các hàm cơ sở trên [0,1)



- Đường cong có nội suy (interpolate) các điểm đầu mút không?
- Đường B-splines có nằm trong bao đóng?

$$x(t) = P_0 \frac{1}{6}\left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right)$$
$$+ P \frac{1}{6_1}\left(4 - 6t^2 + 3t^3\right)$$
$$+ P_2 \frac{1}{6}\left(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3\right)$$
$$+ P_3 \frac{1}{6}\left(t^3\right)$$

Uniform Cubic B-Spline trên [0,1)

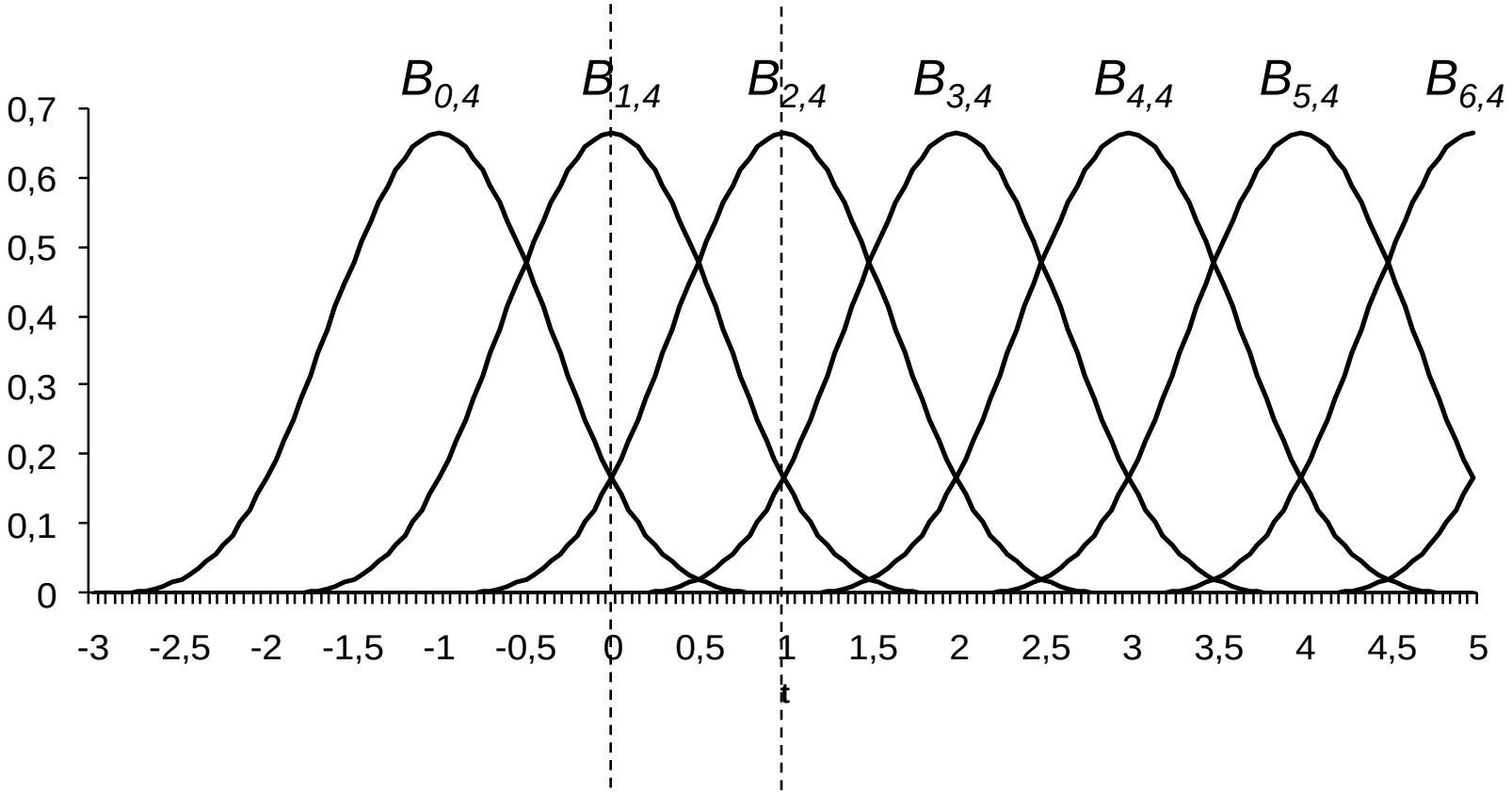
- Tổng các giá trị hàm trông (tại mọi *t*) luôn bằng 1.
  - Đường B-Spline nằm trong bao đóng
- Đường B-Splines không nội suy các điểm đầu cuối
  - Vì vậy cần đường non-uniform B-splines
- Dạng ma trận của cubic B-spline.

$$x(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uniform Cubic B-Splines trên [o,m)

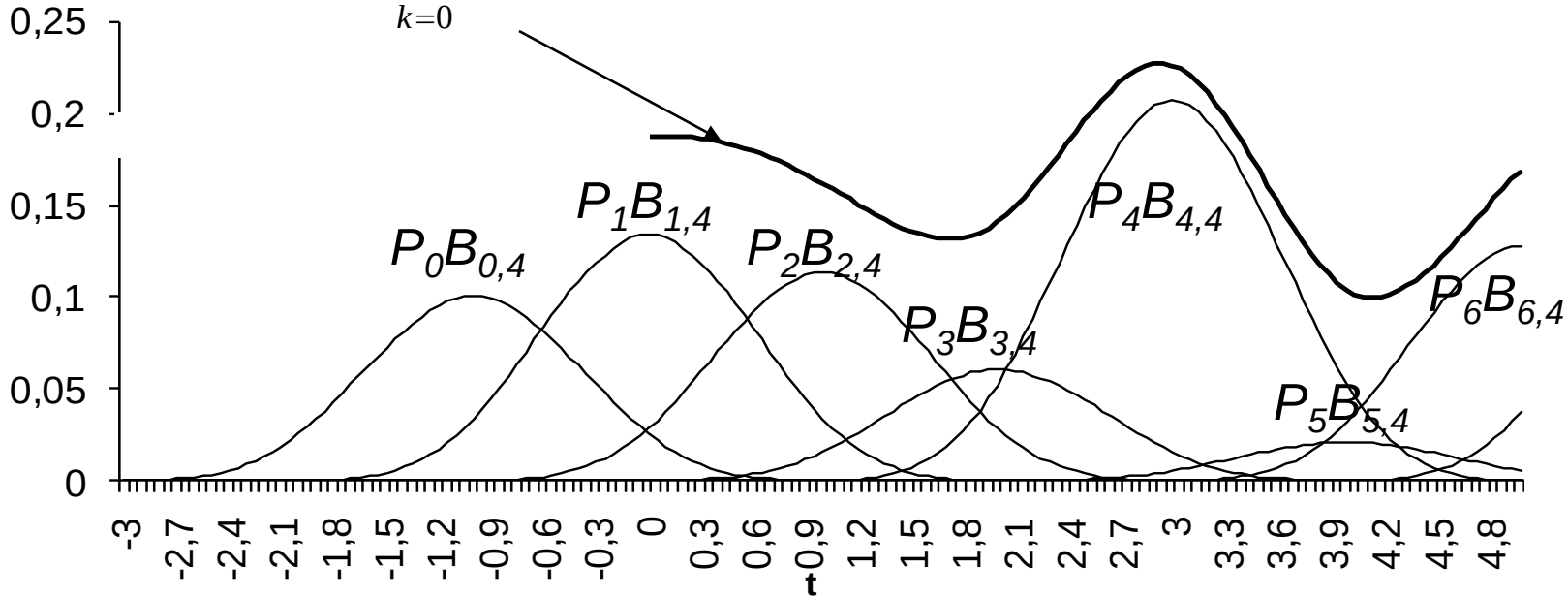
- Dạng tổng quát: $$X(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,d}(t)$$
  - *n* là số điểm điều khiển.
  - *d* là bậc của đường cong, $2 \le d \le n+1$, *d* thường bằng 3 hay 4
  - $B_{k,d}$ là hàm cơ sở B-spline uniform B-spline có bậc *d-1.*
  - P_k là các điểm điều khiển
  - Mỗi $B_{k,d}$ khác zero trong một miền nhỏ các giá trị *t*, vì vậy có tính cục bộ.

Các hàm cơ sở của Cubic B-spline



Xác định đường cong

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,4}(t)$$



Sử dụng Uniform B-splines

- Tại giá trị *t* trên đường uniform cubic B-spline, có 4 hàm cơ sở khác zero.
- Mỗi hàm cơ sở là tịnh tiến của of $B_{0,4}$
- Xét khoảng $0 \leq t < 1$
  - Chúng ta chọn phần thứ tư của $B_{0,4}$
  - Chúng ta chọn phần thứ ba của $B_{1,4}$
  - Chúng ta chọn phần thứ hai của $B_{2,4}$
  - Chúng ta chọn phần thứ nhất của $B_{3,4}$

Uniform B-spline tại *t* bất kỳ

- Khoảng giá trị tham số nguyên từ *i* đến *i+1* cũng tương tự như khoảng từ 0 đến1.
  - Giá trị tham số được dời đi một khoảng *i*
  - Tập các điểm điều khiển khác cần được xác định.
- Để xác định cubic B-spline tại giá trị *t* bất kỳ:
  - Tìm số nguyên lớn nhất mả nhỏ hơn hay bằng *t: i* = floor(*t*)
  - Xác định: $$X(t) = \sum_{k=0}^{3} P_{i+k} B_{k,4}(t-i)$$
- Miền xác định hợp lệ của t: $o \leq t < n-3$, với *n* là số điểm điều khiển.

Lặp lại đường B-Spline

- Để lặp lại đường B-Spline, sử dụng các điểm điều khiển ở phần đầu đường cong để tính toán các giá trị tại tại cuối đường cong:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{3} P_{(i+k) \bmod n} B_{k,4}(t-i)$$

- Các giá trị tham số là hợp lệ

B-splines và tính nội suy, liên tục

- Uniform B-splines không nội suy các điểm điều khiển, ngoại trừ:
  - Lặp lại một điểm điều khiểm 3 lần
  - Tất cả đạo hàm triệt tiêu tại điểm điều khiển đó.
  - Để nội suy những điểm có đạo hàm khác zero, chúng ta cần sử dụng non-uniform B-splines với các điểm nút lặp lại.
- Uniform B-splines thuộc C^2
  - Tất cả các hàm blending là C^2, tổng các hàm blending là C^2

Vẽ đường B-splines

- Cách thực hiện tương tự như đường Bezier
  - Ước lượng tập các giá trị tham số *t* và nối các đoạn thẳng
    - Tuy nhiên, khó xác định các ước lượng (về số lượng, giá trị).
  - Dùng nguyên tắc chia để tách đường cong thành các đoạn ngắn, sau đó nối các điểm điều khiển.
    - Nguyên tắc subdivision cho B-splines như thế nào?
- Thay vì subdivision, hãy xem quá trình tách là quá trình tinh chỉnh:
  - Thêm các điểm điều khiển, và knots, giữa các điểm sẵn có.
  - Sử dụng thuật giải Oslo để vẽ đường B-Spline.

Tinh chỉnh Uniform Cubic B-splines

- Ý tưởng chính: phát sinh 2*n*-3 điểm điều khiển mới:
  - Thêm điểm điều khiển mới vào giữa từng đoạn cong: $P'_{0,1}$, $P'_{1,2}$, $P'_{2,3}$, …, $P'_{n-2,n-1}$
  - Thay đổi các điểm điều khiển hiện hành: P'_1, P'_2, …, P'_{n-2}
    - Bỏ điểm điều khiển đầu và cuối.
- Rules: $$P'_{i,j} = \frac{1}{2}\left(P_i + P_j\right), \qquad P'_i = \frac{1}{8}\left(P_{i-1} + 6P_i + P_{i+1}\right)$$
- Nếu đường cong có chu trình, thì phát sinh 2*n* điểm điều khiển mới bằng cách tính các tọa độ trung bình .

Từ B-spline thành Bezier

- Cả đường B-spline và Bezier là dạng đường cubic, vì vậy có thể biến đổi qua lại.
- Nhắc lại, một điểm trên đường cong có thể biểu diễn bởi ma trận:

$$x(t) = P^T MT$$

  - *P* là vector các điểm điều khiển.
  - *M* là ma trận hoặc $M_{B\text{-}spline}$ hay M_{Bezier}
  - *T* là vector cột chứa : t^3, t^2, t, 1
- Dễ dàng xác định được ma trận $M_{B\text{-}spline\text{->}Bezier}$ nhằm biến đổi các điểm điều khiển B-spline thành các điểm điều khiển Bezier

B-spline sang Bezier Matrix

$$M_{B-spline \to Bezier} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{0,Bezier} \\ P_{1,Bezier} \\ P_{2,Bezier} \\ P_{3,Bezier} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{0,B-spline} \\ P_{1,B-spline} \\ P_{2,B-spline} \\ P_{3,B-spline} \end{bmatrix}$$

Non-Uniform B-Splines

- Uniform B-splines là trường hợp đặc biệt của B-splines
- Mỗi hàm blending giống nhau
- Các hàm blending starts với $t=-3$, $t=-2$, $t=-1$,…
- Mỗi hàm blending khác zero for 4 units of the parameter
- Non-uniform B-splines có các hàm blending starting và stopping ở các giá trị khác nhau, và hàm blending cũng không giống nhau.

B-Spline Knot Vectors

- *Knots*: xác định dãy các giá trị tham số mà tại đó các hàm blending sẽ được bật hay tắt.
- Giá trị Knot luôn tăng, và có $n+d+1$ trong tập đó tạo nên một *knot vector*: $(t_o, t_1, \ldots, t_{n+d})$ với $t_o \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n+d}$
- Một đường cong chỉ được xác định cho những giá trị tham số giữa t_{d-1} và t_{n+1}
- Các giá trị tham số này ứng với vị trí các đoạn của đường cong giao nhau.
- Có một điểm điều khiển cho từng giá trị trong knot vector
- Các hàm blending được định nghĩa đệ quy theo dạng the knots và bậc của đường cong.

Các hàm B-Spline Blending

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_k \le t \le t_{k+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

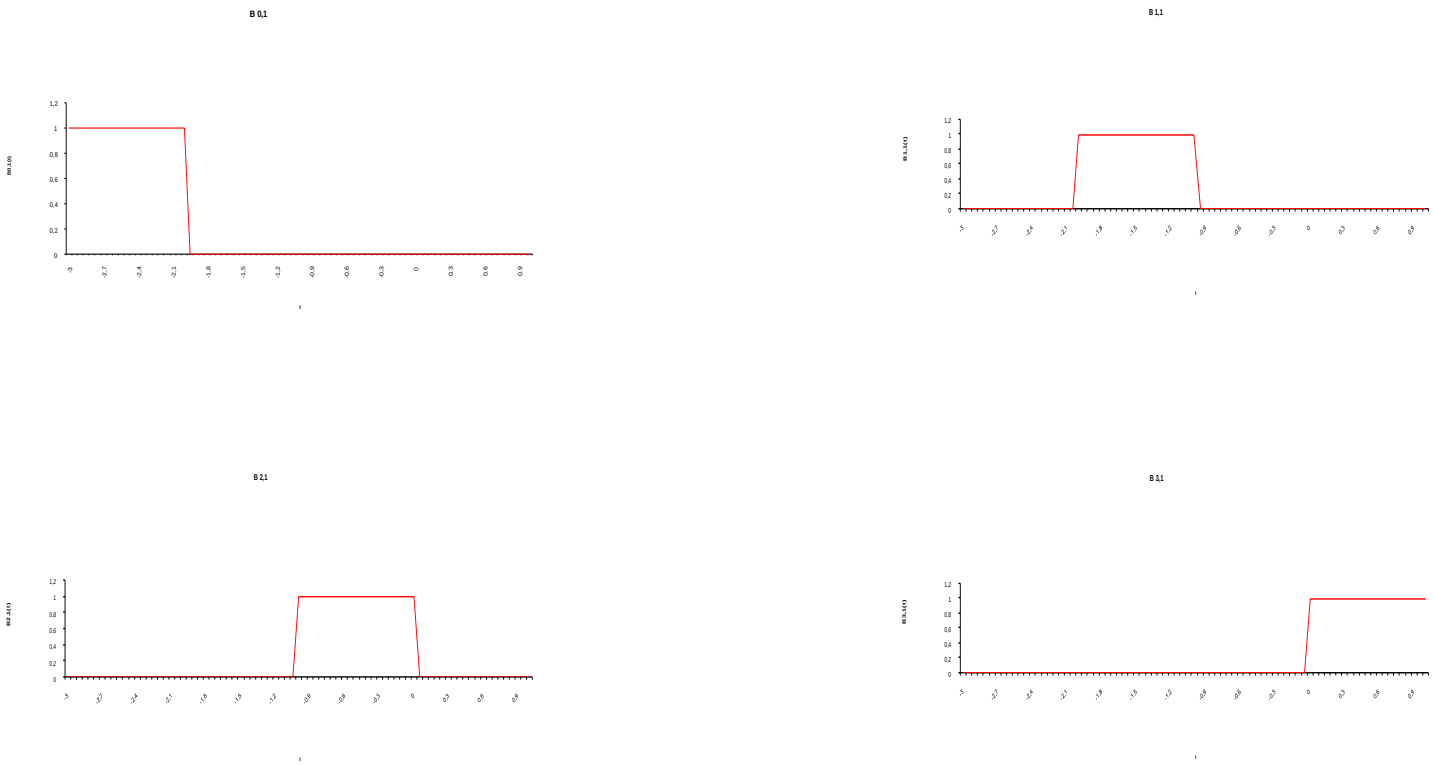
$$B_{k,d}(t) = \left(\frac{t - t_k}{t_{k+d-1} - t_k} \right) B_{k,d-1}(t) + \left(\frac{t_{k+d} - t}{t_{k+d} - t_{k+1}} \right) B_{k+1,d-1}(t)$$

- Quan hệ đệ quy bắt đầu với B-splines bậc 1, và xây dựng dần cho các bậc cao hơn.
- SỬ dụng thuật giải Cox - de Boor.

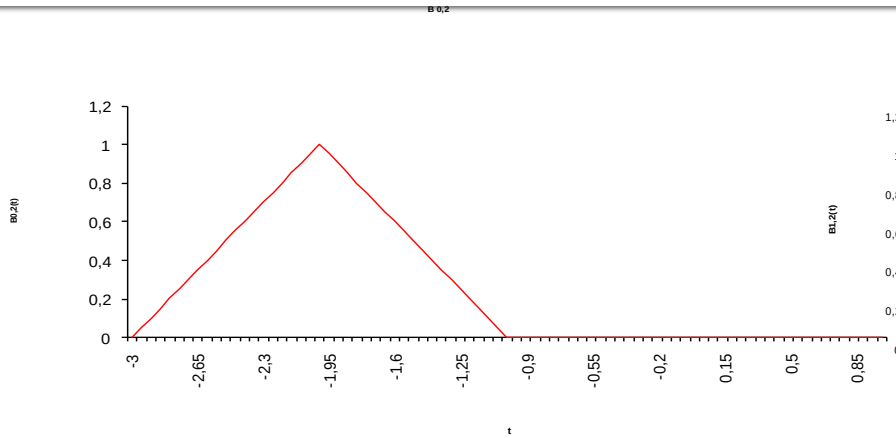
Uniform Cubic B-splines

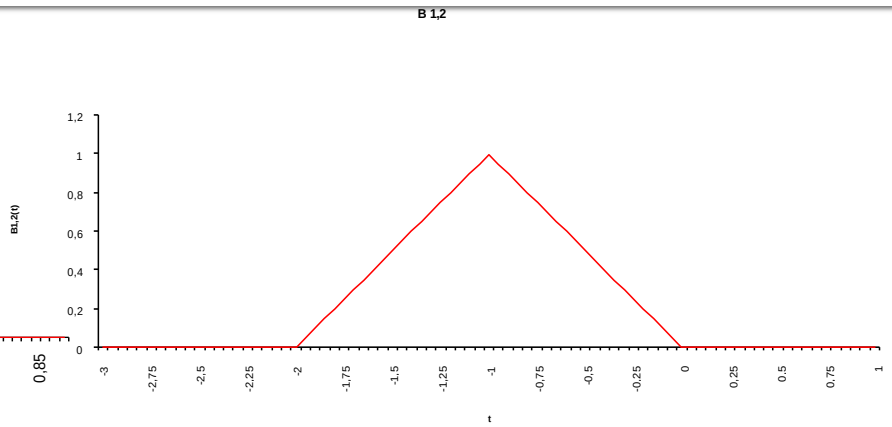
- Uniform cubic B-splines được tạo với knot vector có dạng (-3,-2,-1,0,1,…,n+1)
- Mỗi hàm blending là khác zero trên khoảng tham số có độ dài 4.
- Tất cả hàm là sự dịch chuyển lẫn nhau.
  - Mỗi hàm là được tạo ra do dời một đơn vị từ hàm trước đó.
  - $B_{k,d}(t)=B_{k+1,d}(t+1)$
- Các hàm blending là kết quả của phép toán convolving với chính nó d lần.

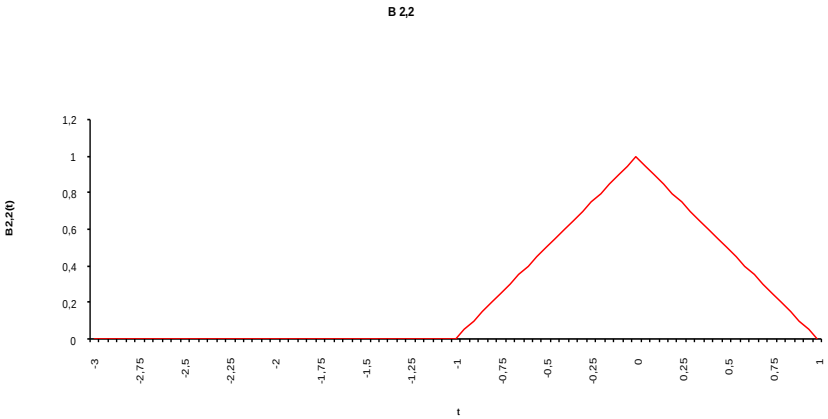
$B_{k,1}$



$B_{k,2}$

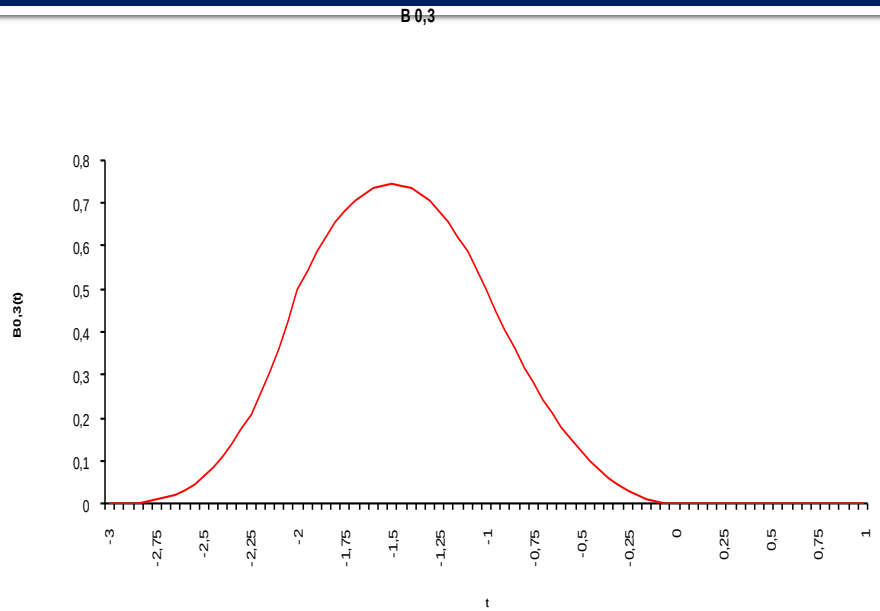


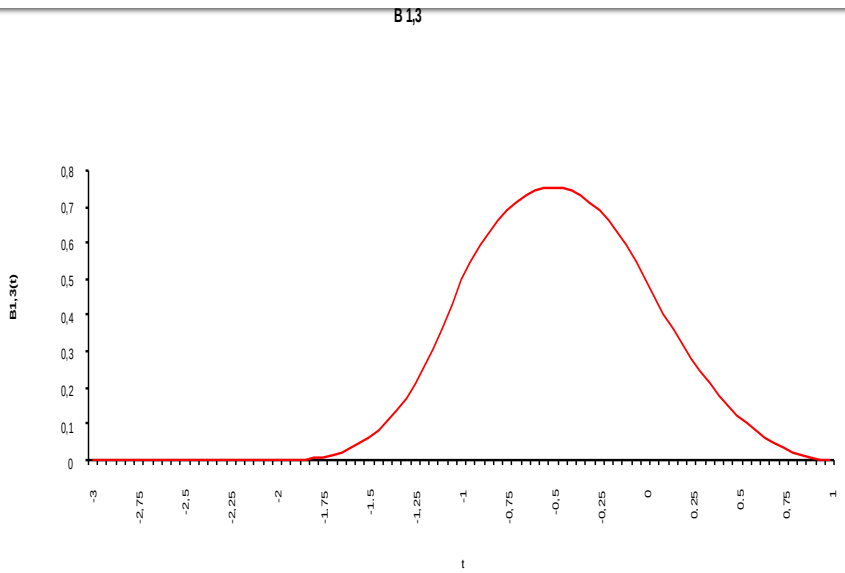




$$B_{0,2}(t) = \begin{cases} t+3 & -3 \le t < -2 \\ -1-t & -2 \le t < -1 \end{cases}$$

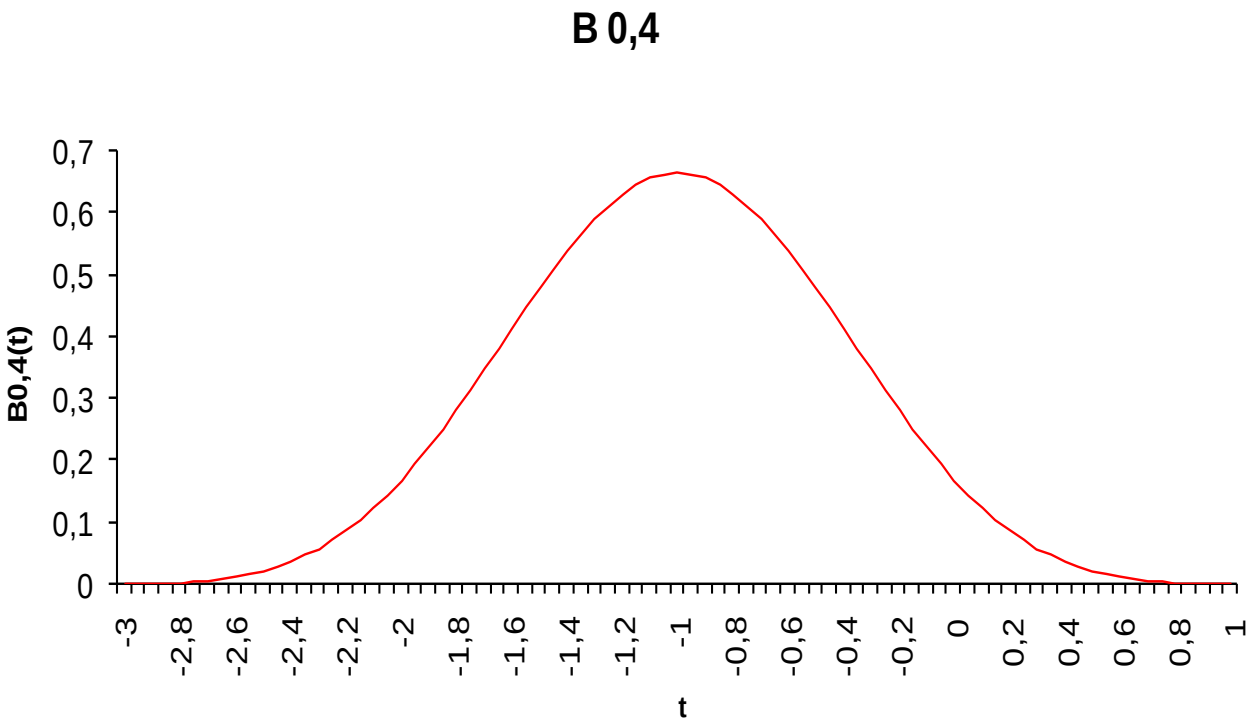
$B_{k,3}$





$$B_{0,3}(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} (t+3)^2 & -3 \le t < -2 \\ -2t^2 - 6t - 3 & -2 \le t < -1 \\ t^2 & -1 \le t < 0 \end{cases}$$

$B_{0,4}$


B 0,4
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
B0,4(t)
-3
-2,8
-2,6
-2,4
-2,2
-2
-1,8
-1,6
-1,4
-1,2
-1
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
t

$B_{0,4}$

$$B_{0,4}(t) = \frac{1}{6}\begin{cases} (t+3)^3 & -3 \le t < -2 \\ -3t^3 - 15t^2 - 21t - 5 & -2 \le t < -1 \\ 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & -1 \le t < 0 \\ (1-t)^3 & 0 \le t < 1 \end{cases}$$