BÀI 2

ĐẠO HÀM & VI PHÂN

Định nghĩa đạo hàm

Cho hàm số f(x) xác định trong một khoảng chứa x_o. Nếu tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ có giới hạn $\in$ R khi x ->x_o thì ta nói f có đạo hàm tại x_o và giá trị của giới hạn trên được gọi là đạo hàm của hàm số f tại x_o . Đạo hàm của f tại x_o thường được ký hiệu là: $f'(x_o)$

Một số ký hiệu khác của đạo hàm:

y' $\qquad \dfrac{dy}{dx}$

Một số qui tắc tính đạo hàm

- Đạo hàm của tổng hiệu tích thương của 2 hàm số.
- Đạo hàm của hàm số hợp.
- Đạo hàm của hàm số ngược.
- Đạo hàm của hàm số có dạng:

$$y = u(x)^{v(x)}$$

Lưu ý: Trong các qui tắc trên thì qui tắc đạo hàm của hàm số hợp là cần được chú ý nhất. Trong nhiều bài tập ta phải áp dụng nhiều lần qui tắc nầy.

Ta còn phải ghi nhớ bảng đạo hàm cơ bản khi áp dụng các qui tắc trên để tính đạo hàm.

Một số qui tắc tính đạo hàm

- Đạo hàm của hàm hằng.
- Đạo hàm của hàm số lũy thừa.
- Đạo hàm của hàm số mũ.
- Đạo hàm của hàm số logarith.
- Đạo hàm của các hàm số lượng giác.
- Đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược.

Ví dụ: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

$$(tgx)' = 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot gx)' = -(1 + \cot g^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Ví dụ

- **Ví dụ 1:**

a) $(e^{-x})' = e^{-x}.(-x)' = -e^{-x}$

b) $(\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2}.(1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2}$

Ví dụ 2:

$y = x^x \quad (x>0)$

$\Rightarrow \quad y' = x^x.(\ln x + x.\frac{1}{x})$

$= x^x.(\ln x + 1)$

Đạo hàm cấp cao

Giả sử f(x) có đạo hàm tại mọi x thuộc một khoảng nào đó. Khi ấy f'(x) là một hàm số xác định trên khoảng đó. Nếu hàm số f'(x) có đạo hàm thì đạo hàm này gọi là đạo hàm cấp 2 của f(x), ký hiệu là f''(x). Vậy :

$$f''(x)=(f'(x))'$$

Ví dụ:

y=sinx

$$y' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad y'' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right)$$

Vi phân cấp 1

Định nghĩa : Xét hàm số f(x) xác định trên 1 khoảng quanh x_o . Ta nói f khả vi tại x_o . Khi ta có một hằng số A sao cho ứng với mọi số gia Δx đủ nhỏ của biến x, số gia của hàm là có thể viết dưới dạng :

$\Delta f = A.\Delta x + O(\Delta x)$

trong đó $O(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn Δx khi $x \to 0$.

- Tương tự như đạo hàm cấp cao, ta cũng có định nghĩa của vi phân cấp cao.

Ví dụ: $d^2y = d(dy)$

Các định lý cơ bản của đạo hàm và vi phân

Định lý (Fermat):
Nếu hàm số f(x) đạt cực trị địa phương tại x_o và có đạo hàm tại x_o thì $f'(x_o)=0$.

Định lý Rolle:
Nếu f(x) liên tục trên [a,b], có đạo hàm trong khoảng (a,b) và f(a)=f(b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c)=0$.

Các định lý cơ bản của đạo hàm và vi phân (tt)

Định lý Lagrange

Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a,b] và có đạo hàm trên (a,b) thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho:

$$f(b)-f(a)=f'(c).(b-a).$$

Định lý Cauchy:

Nếu f(x) và g(x) là 2 hàm số liên tục trên [a,b], có đạo hàm trên (a,b) và $g'(x) \neq 0$ tại mọi $x \in (a,b)$, thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Công thức Taylor

Định lý Taylor.

Nếu hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n+1 trong một khoảng chứa x_o và x thì ta có công thức Taylor sau đây

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots\dots\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Trong đó c là một số nằm giữa x_o và x. Trong công thức trên ta gọi

$$R_n^{(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Công thức Taylor (tt)

là phần dư Lagrange trong công thức Taylor.

Chú ý:

Khi viết số dư Lagrange ở một dạng thích hợp khác thì ta có công thức Maclaurin.

Ví dụ

Ví dụ 1: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}.x^{n+1}$

với $0 < \theta < 1$

hay $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$

Ví dụ 2: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}.\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + 0(x^{2m})$

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý

- đạo hàm : derivative
- đạo hàm bậc hai : flection
- đạo hàm cấp cao : derivative of higher order
- đạo hàm hiệp biến : covariant derivative
- đạo hàm loga : logarithmic derivative
- đạo hàm riêng : partial derivative
- đạo hàm theo hướng: derivative in a given direction/ directional derivative
- đạo hàm toàn phần : total derivative

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý (tt)

- vi phân : differential/ infinitesimal
- vi phân hiệp biến : covariant differential
- vi phân riêng : partial differential
- vi phân toàn phần : total differential
- vi phân đa hội : multidifferential
- vi-tích phân : integro-differential