BÀI 3

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

Phương trình tiếp tuyến

Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại $M(x_o, f(x_o))$ là $f'(x_o)$. Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_o, f(x_o))$ là:

$$y - y_o = f'(x_o) \cdot (x - x_o)$$

trong đó $y_o = f(x_o)$

Ví dụ: Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = x^2$ tại $M(1, 1)$ là

$y - 1 = 2(x-1)$ vì $y'(1) = 2$
hay $y = 2x - 1$

Tính gần đúng và tính giới hạn

- Ta thường dùng khai triển Taylor và khai triển Maclaurin để tính xấp xỉ giá trị của hàm f(x) sau khi chọn n đủ lớn để phần dư $R_n(x)$ có giá trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

Ví dụ: Tính số e chính xác đến 0,00001.
Trong công thức khai triển Maclaurin của hàm số e^x với $x = 1$, $n = 8$ thì phần dư thỏa:

$$R_8 < \frac{3}{9!} < 10^{-5}$$

Tính gần đúng và tính giới hạn (tt)

- Vậy ta có thể tính e chính xác đến 0,00001 bằng công thức xấp xỉ sau

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{8!} \approx 2,71828$$

Dùng khai triển Maclaurin để tính giới hạn có dạng vô định

Ví dụ : Tìm $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

Ta có $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 . \sin^2 x}$

Sử dụng khai triển Maclaurin của sin x đến cấp 4, ta có thể viết sin x dưới dạng: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x)$

với , $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Dùng khai triển Maclaurin để tính giới hạn có dạng vô định (tt)

Suy ra $$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + x^4.\varepsilon(x))^2}{x^2.\sin^2 x}$$

$$\approx \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3} \quad \text{khi } x \to 0.$$

Vậy $$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Dùng qui tắc L'Hospitale để khử dạng vô định 0 / 0 hay ∞ / ∞

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Đặt $f(x) = e^{x} - e^{-x} - 2x$ và $g(x) = x - \sin x$,

xét quá trình x -> 0 ta có:

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có dạng vô định, $\dfrac{0}{0}$

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^{x} + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$ có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Dùng qui tắc L'Hospitale để khử dạng vô định 0 / 0 hay ∞ / ∞ (tt)

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x}$$ cũng có dạng vô định , $\frac{0}{0}$

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{\sin x} \longrightarrow 2$$

Vậy $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$$

Chiều biến thiên và cực trị địa phương của hàm số

Ta tính đạo hàm cấp 1 và xét dấu. Đôi khi ta cũng dùng đạo hàm cấp 2 hay cấp cao hơn để tính cực trị.

Ví dụ: Tìm các khoảng tăng giảm của hàm số và tìm cực trị địa phương của hàm số

$$y = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

$$y' = \frac{4}{3}x^{1/3} - 4x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1)$$

$$= \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

$y' = 0$ tại $x=1$ và y' không xác định tại $x = 0$.

Chiều biến thiên và cực trị địa phương của hàm số (tt)

Ta $y' \leq 0$ trong khoảng $(-\infty,1)$ và $y' > 0$ trong khoảng $(1,+\infty)$.

Suy ra: hàm số giảm trong khoảng $(-\infty,1)$ và tăng trong $(1,+\infty)$.

Hàm số y đạt cực tiểu tại $x = 1$ với $y(1) = -3$.

Tìm gía trị nhỏ nhất và gía trị lớn nhất

- **Tìm gía trị nhỏ nhất và gía trị lớn nhất của một hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a,b].**

Để tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của f(x) trên đoạn [a,b] ta chỉ cần so sánh các gía trị của f tại 3 loại điểm :

(1) Các điểm dừng (tức là f' tại đó bằng 0)
(2) Các điểm kỳ dị (tức là f' không tồn tại ở đó)
(3) Hai đầu nút a và b.

Xét tính lồi, lõm và điểm uốn

Định lý:

1/ Giả sử f(x) có đạo hàm cấp 2 f''(x) trong khoảng (a,b). Khi đó hàm số f là lồi (tương ứng lõm) trên khoảng (a,b) nếu và chỉ nếu $f''(x) \geq 0$ (tương ứng ; $f''(x) \leq 0$) trên (a,b).

2/ Nếu f''(x) đổi dấu khi x vượt qua x_o thì điểm $(x_o, f(x_o))$ trên đồ thị của hàm số f(x) là một điểm uốn.

Ví dụ

Ví dụ: Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn cho hàm số

$$y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Miền xác định của hàm số là D=IR \ {-1, +1}.

Tính đạo hàm :

$$y' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Ví dụ (tt)

Bảng xét dấu y'':

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y''	-		-	0	+		+	
y	lõm		lõm		lồi		lồi	

Vậy hàm số y lõm trên các khoảng $(-\infty, -1)$ và $(-1,0)$; lồi trên các khoảng $(0,1)$ và $(1,+\infty)$.

Từ đó , đồ thị hàm số có 1 điểm uốn là M (0,0).

Sơ đồ khảo sát hàm số

1/ Tìm miền xác định của hàm số $y = f(x)$ đồng thời nhận xét về tính chẵn lẻ, tính tuần hoàn cuả hàm số để rút gọn miền khảo sát.

2/ Khảo sát sự biến thiên của hàm số và tìm các cực trị địa phương . Tính một số giới hạn quan trọng và lập bảng biến thiên của hàm số.

3/ Khảo sát tính lồi lõm và điểm uốn

4/ Tìm các đường tiệm cận.

Sơ đồ khảo sát hàm số (tt)

5 /Vẽ đồ thị . Để vẽ được đồ thị chính xác ta cần xác định các điểm cực trị , điểm uốn, giao điểm với các trục toạ độ và có thể xác định cả tiếp tuyến tại các điểm đó.

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý

- khai triển : decomposition/ expansion
- khả vi : differentiable
- khả tích : integrable/ summable
- sai số : error
- xấp xỉ : approximate/ approximation
- quy tắc : principle/ rule
- định lý : law/ theorem
- giới hạn : bound(ary)/ limit/ margin
- biến thiên : fluctuation/ variation / vary

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý (tt)

- cực trị : extreme/ extremum
- cực trị địa phương : local extreme
- cực đại : maximum/ maximal
- cực tiểu : minimum/ minimal
- điều kiện : condition/ requirement/ conditional
- điều kiện cần : necessary condition
- điều kiện đủ : sufficient condition
- điểm kỳ dị : singular point
- điểm uốn : point of inflection

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý (tt)

- lồi : convex/ gibbous
- lõm : concave/ hollow
- tiệm cận : asymptote
- đồ thị : graph/ plot
- đồ thị có hướng : diagraph/ oriented [directed] graph
- đồ thị vô hướng : non-oriented [unoriented, nondirected] graph
- đồ thị hàm số : graph of a function
- đường cong : curve
- tham số : parameter

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý (tt)

- tọa độ : coordinate
- tọa độ cầu : spherical coordinate
- tọa độ cực : polar coordinates
- tọa độ Descartes : Cartesian coordinates
- tọa độ xiên : oblique coordinates