BÀI 4

NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Định nghĩa nguyên hàm

Ta gọi một nguyên hàm của hàm số f(x) trên (a,b) là một hàm F(x) mà

$F'(x)=f(x)\ ,\forall x\in(a,b)$

Ví dụ:

1) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$ là một nguyên hàm của $f(x)=x$ trên $\mathbb{R}$

2) $F(x)=tgx$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=1+tg^2x$ trên các khoảng xác định của tgx.

Định nghĩa tích phân bất định

- **Định lý** : Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên khoảng (a,b) thì mọi nguyên hàm của f(x) trên khoảng (a,b) đều có dạng F(x) + C với C là một hằng số.

Định nghĩa: Nếu F(x) là một nguyên hàm f(x) thì biểu thức F(x) + C, trong đó C là hằng số có thể lấy giá trị tùy ý, được gọi là tích phân bất định của hàm số f(x), ký hiệu là . $\int f(x)dx$

Vậy: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Tính tích phân bất định

- Tính tích phân bất định bằng cách phân tích và áp dụng các tính chất đơn giản của tích phân:

Ví dụ 1: Tính: $I = \int (x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\,dx$

$$I = \int (x + x^{1/2} + x^{-1/3})\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{2/3}}{2/3} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

Tính tích phân bất định (tt)

Ví dụ 2: Tính: $I = \int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$

$$I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \sin x + \cos x + C$$

Tính tích phân bằng phương pháp phân tích

Tích phân $\int f(x)\,dx$ có thể được tính bằng cách phân tích hàm số f(x) thành tổng của các hàm đơn giản hơn hay dễ tính tích phân hơn :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

Và áp dụng công thức :

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

Ví dụ

$$\int \frac{x^4}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^4-16+16}{x^2+4}\,dx$$

$$= \int \left(x^2 - 4 + \frac{16}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int 4\,dx + \int \frac{16}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x + 8\,arctg\frac{x}{2} + C$$

Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Phương pháp đổi biến trong tích phân bất định có 2 dạng sau đây :

Dạng 1: Giả sử biểu thức dưới dấu tích phân có dạng: $F(u(x)).u'(x)dx$

Trong đó u(x) là một hàm số khả vi. Khi ấy ta có thể đổi biến bằng cách đặt u=u(x),và có:

$$\int f(u(x)).u'(x).dx = \int f(u).du$$

Dạng 2: Đặt $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là một hàm khả vi, đơn điệu đối với biến t, ta có :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt$$

Ví dụ 1

Tính: $\int \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

Đặt: $u = x^2 + 1,\ du = 2xdx$

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \int \frac{du}{u^{1/3}} = \int u^{-1/3} du$$

$$= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C \quad = \frac{3}{2} u^{2/3} + C$$

$$= \frac{3}{2}(x^2+1)^{2/3} + C$$

Ví dụ 2

Tính $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Đặt: $x = \sin t$

$\Leftrightarrow\ t = \arcsin x, (-1 \le x \le 1)$

Ta có: $dx = \cos t\, dt$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$

$(\cos t \ge 0 \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}) \qquad (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$

Suy ra $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}.\sin 2t + C$

Ví dụ 2(tt)

Mà $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$ và $t = \arcsin x$

Nên:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục $u' = u'(x)$ và $v' = v'(x)$: ta có công thức tích phân từng phần:

$$\int u.v'dx = u.v - \int v.u'dx$$

công thức trên còn được viết dưới dạng :

$$\int udv = u.v - \int v.du$$

Ví dụ

Tính $\int x \ln x \, dx$

Đặt $u = \ln x \qquad u' = \dfrac{1}{x}$

$v = \dfrac{x^2}{2} \qquad v' = x$

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có :

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^3}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$= \frac{x^2}{4}.(2\ln x - 1) + C$$

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý

- nguyên hàm : antiderivative/ initial function (logic)/ primitive
- tích phân : integral
- tích phân bội : multiple integral
- tích phân kép : double integral
- tích phân lặp : iterated integral
- tích phân mặt : surface integral
- tích phân từng phần : particular integral
- tích phân đường cong : curvilinear integral
- tích phân xác định : definite integral

Một số từ khóa (keywords) và thuật ngữ (glossary) cần lưu ý (tt)

- tích phân bất định : antiderivative/ indefinite integral/ primitive integral
- định nghĩa : definition/ determination/ define
- biểu thức : expression
- tính chất : property
- phương pháp : method/ mode/ way
- phân tích : analysis/ decomposition