

TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan

BÀI 5

TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ VÀ HÀM LƯỢNG GIÁC





Tích phân hàm hữu tỉ

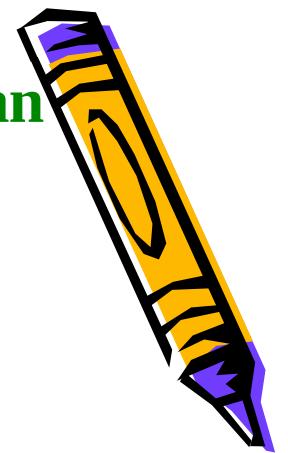
Tích phân hàm hữu tỉ có dạng

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

trong đó $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỉ tối giản theo x.

Phương pháp tổng quát: dùng **phương pháp phân tích**.





Phương pháp phân tích để tính tích phân hàm hữu tỉ

Trước hết, nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta viết $P(x)$ dưới dạng:

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x), \text{ với bậc } R(x) < \text{bậc } Q(x)$$

$$\text{Do đó: } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Tích phân $\int S(x) dx$ có thể tính được một cách dễ dàng.

Như vậy ta chỉ cần tìm cách tính $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ với bậc của $R(x) <$ bậc của $Q(x)$.





Phương pháp phân tích để tính tích phân hàm hữu tỉ (tt)

Tiếp theo, Tích phân $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ có thể được tính bằng cách

phân tích phân thức hữu tỉ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng của các phân thức hữu tỉ đơn giản hơn thuộc các dạng sau:

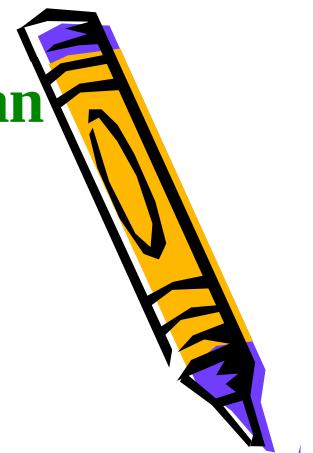
$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

$$I_2 = \int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n}$$

với $p^2 - 4q < 0$ (Tức là $x^2 + px + q$ không có nghiệm thực).



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ 1

$$\text{Tính } I = \int \frac{2x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

Trước hết ta đổi biến để đơn giản hóa tính phân trên bằng cách đặt

$$\begin{aligned} u &= x^2, \quad du = 2x dx \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int \frac{2u+1}{u^2+1} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u \cdot du}{u^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \frac{1}{2} \arctg u + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^4+1) + \frac{1}{2} \arctg(x^2) + C \end{aligned}$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan

Ví dụ 2

Tính $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$

$$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

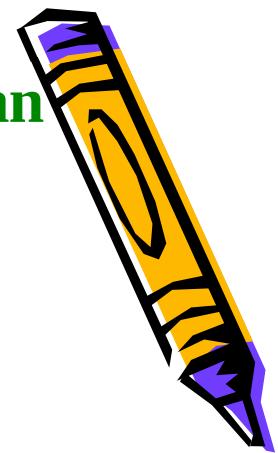
$$\text{Do đó: } \frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

$$\text{Nên: } 1 = Ax(x^3 - 1) + B(x^3 - 1) + Cx^2(x^2 + x + 1) + (Dx + E)x^2(x - 1)$$

Từ đây có thể tính được các hệ số A, B, C, D, E và suy

$$\text{ra: } \frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x^2 + x + 1)}$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{dx}{x^5 - x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân hàm lượng giác

Tích phân hàm lượng giác dạng:

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx$$

trong đó $R(u, v)$ là hàm hữu tỷ đổi với u và v .

Phương pháp chung:

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx$$

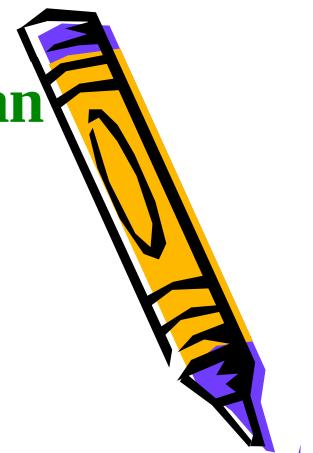
$$\text{hay } dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\text{Suy ra: } I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2t}{1+t^2} dt$$

Tích phân này có dạng tích phân của phần thức hữu tỷ.



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ

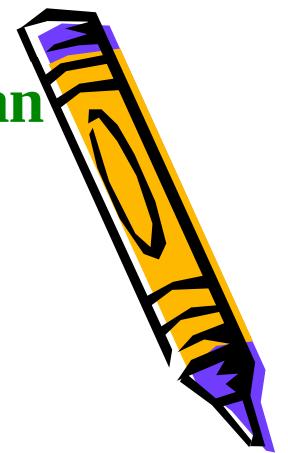
$$\text{Tính } I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\text{Đặt: } t = \tg \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln |t| + C = \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$





Một số trường hợp đặc biệt

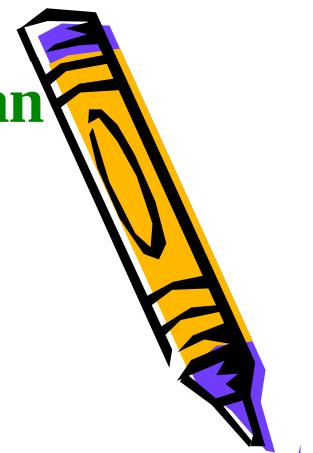
- * Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $u = \tan x$
hoặc $u = \cot x$
- * Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $u = \sin x$.
- * Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $u = \cos x$
- * Tích phân dạng $\int \sin^m x \cos^n x dx$ với m và n là các số chẵn dương. Ta có thể đổi biến bằng cách dùng công thức : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ

Tính $I = \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$. Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} \cdot \sin x dx \\ &= \int \frac{-(1 - u^2)}{2 + u} du \\ &= \int \left(u - 2 + \frac{3}{2 + u}\right) du \\ &= \frac{u^2}{2} - 2u + 3\ln(2 + u) + C \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2\cos x + 3\ln(2 + \cos x) + C \end{aligned}$$

