

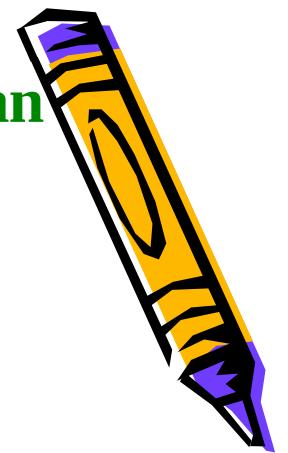
TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan

BÀI 6

MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN KHÁC



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quát



Tích phân hàm hữu tỉ đối với x và

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Tích phân hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{ax^2 + bx + c}$:

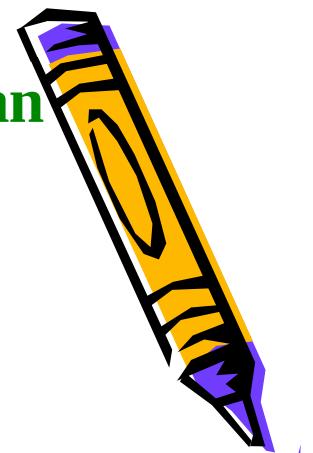
$$, I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

trong đó $R(u,v)$ là hàm hữu tỉ đối với u và v và
 $a^2x + bx + c$ là một tam thức bậc 2 không có nghiệm kép

Phương pháp tổng quát: Tùy theo dấu của hệ số a ta đưa tam thức $a^2x + bx + c$ về dạng tổng hay hiệu hai bình phương



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ

Tính $I_1 = \int \frac{dx}{x^2(x + \sqrt{1+x^2})}$

Đặt $x = \operatorname{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \operatorname{arctg} x$

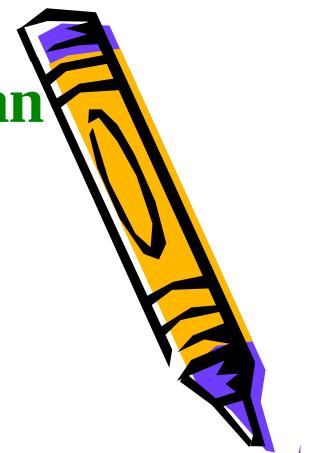
Ta có $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t) dt$

$$I_1 = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 t) dt}{\operatorname{tg}^2 t(\operatorname{tg} t + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t})} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t(\sin t + 1)}$$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$, Khi đó:



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan

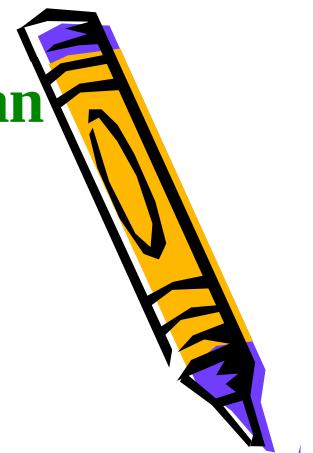


Ví dụ (tt)

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{du}{u^2(u+1)} = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{u-1}{u^2} \right) du \\&= \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} \right) du = \ln|u+1| - \ln|u| - \frac{1}{u} + C \\&= \ln \left| \frac{\sin t + 1}{\sin t} \right| - \frac{1}{\sin t} + C \\&\Rightarrow I_2 = \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} \right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C\end{aligned}$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân

Tích phân dạng

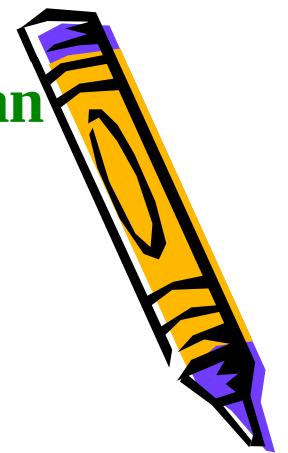
$$\int \frac{Ax + B}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

Để tính tích phân dạng này ta có thể đặt :

$$x - \alpha = \frac{1}{u}$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân (tt)

Tích phân dạng :

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

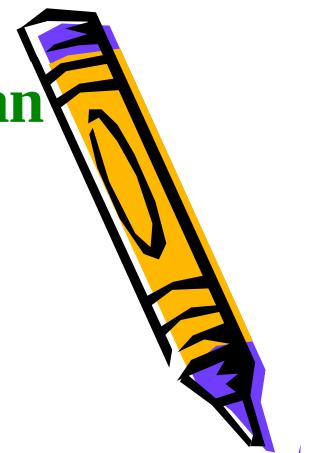
Để tính các tích phân dạng ta biến đổi tam thức $ax^2 + bx + c$ thành tổng hoặc hiệu của hai bình phương rồi đổi biến để đưa về các dạng tích phân đã biết sau đây:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h}}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx , \quad \int \sqrt{x^2 + h} dx$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

Biến đổi: $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

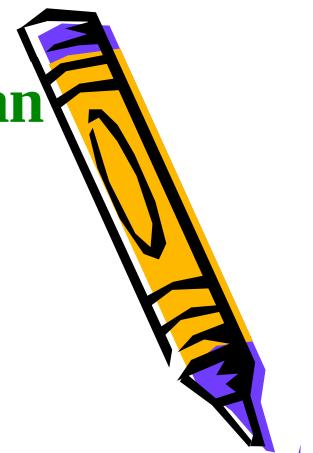
Đặt $u = x + 2 \Rightarrow du = dx$

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C \\ &= \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}) + C \end{aligned}$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân

Tích phân dạng :

$$I = \int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$$

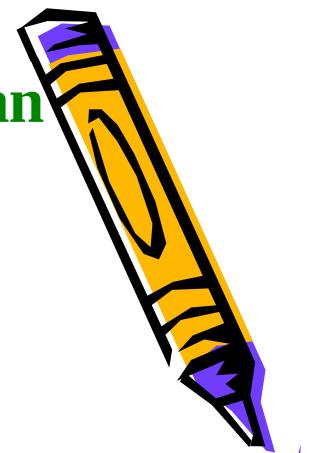
Trong đó R là một hàm hữu tỉ và m, \dots, k là các số nguyên dương; a, b, c, d là các hằng số

Để tính tích phân này ta gọi x là một bội số chung nhỏ nhất của m, \dots, k và đặt:

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = u^n$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân (tt)

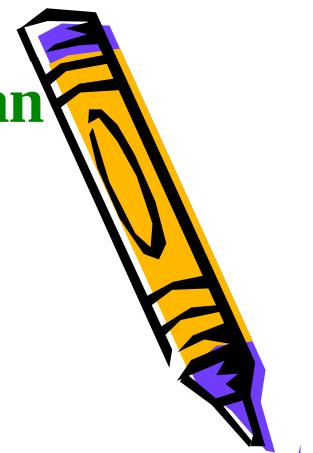
Từ đó, tích phân sẽ được chuyển về dạng:

$$I = \int R_1(u) du$$

Trong đó R_1 là một hàm hữu tỉ đối với u .



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân

Tích phân dạng :

$$I = \int R(e^{ax}) dx$$

Trong đó R là một hàm hữu tỉ đổi và $a \neq 0$

Để tính phân tích này ta đặt: $u = e^{ax}$

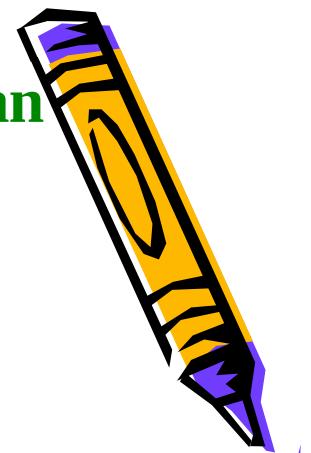
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{a} \ln u$$

$$\text{Khi đó } dx = \frac{1}{a \cdot u} du \quad \text{và: } I = \int R(u) \cdot \frac{1}{au} du$$

có dạng tích phân hàm hữu tỉ.



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ

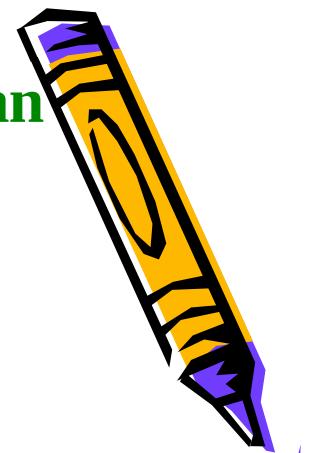
$$I = \int \frac{e^x(1-e^x)}{e^{2x}+1} dx$$

Đặt: $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-u}{u^2+1} du = \int \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\right) du \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du + \int \frac{du}{u^2+1} \\ &= -\frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctg u + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + \arctg(e^x) + C \end{aligned}$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Tích phân

Các tích phân có dạng:

$$\int P(x) \cdot \sin ax dx, \quad \int P(x) \cdot \cos ax dx, \quad \int P(x) e^{ax} dx$$

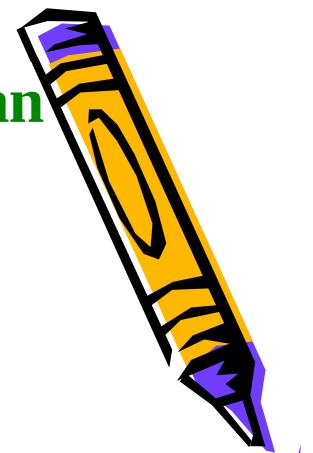
Trong đó $p(x)$ là một đa thức theo biến x .

Để tính các tích phân này ta dùng phương pháp
tích phân toàn phần bằng cách đặt :

$$u = p(x)$$



TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 3 – Giới thiệu tổng quan



Ví dụ

Tính $I = \int x \cdot \sin x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra: $I = -x \cos x + \int \cos x dx$
 $= -x \cos x + \sin x + C$

