BÀI 6

MỘT SỐ DẠNG TÍCH PHÂN KHÁC

Tích phân hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Tích phân hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

- $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$

trong đó R(u,v) là hàm hữu tỉ đối với u và v và $a^2x + bx + c$ là một tam thức bậc 2 không có nghiệm kép

Phương pháp tổng quát: Tùy theo dấu của hệ số a ta đưa tam thức $a^2x + bx + c$ về dạng tổng hay hiệu hai bình phương

Ví dụ

Tính $I_2 = \int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$

Đặt $x = \operatorname{tg} t \quad , -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \operatorname{arctg} x$

Ta có $dx = (1 + \operatorname{tg}^2 t)\, dt$

$$I_2 = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 t)\, dt}{\operatorname{tg}^2 t(\operatorname{tg} t + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \int \frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t(\sin t + 1)}$$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos t\, dt$, Khi đó:

Ví dụ (tt)

$$I_2 = \int \frac{du}{u^2(u+1)} = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{u-1}{u^2}\right) du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du = \ln|u+1| - \ln|u| - \frac{1}{u} + C$$

$$= \ln\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t}\right| - \frac{1}{\sin t} + C$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \ln\left|\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}\right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

Tích phân

Tích phân dạng

$$\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Để tính tích phân dạng này ta có thể đặt :

$$x-\alpha=\frac{1}{u}$$

Tích phân (tt)

Tích phân dạng :

$$\int \sqrt{ax^2+bx+x}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Để tính các tích phân dạng ta biến đổi tam thức $ax^2 + bx + c$ thành tổng hoặc hiệu của hai bình phương rồi đổi biến để đưa về các dạng tích phân đã biết sau đây:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad , \quad \int \sqrt{x^2+h}\,dx$$

Ví dụ

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

Biến đổi: $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$

Đặt $u = x - 2 \Rightarrow du = dx$

Ta có :

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) + C$$

$$= \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 5}) + C$$

Tích phân

Tích phân dạng :

$$I = \int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

Trong đó R là một hàm hữu tỉ và m,...,k là các số nguyên dương; a, b, c, d là các hằng số

Để tính tích phân này ta gọi x là một bội số chung nhỏ nhất của m,...,k và đặt:

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ax+b}{cx+d} = u^n$$

Tích phân (tt)

Từ đó, tích phân sẽ được chuyển về dạng:

$$I = \int R_1(u)\,du$$

Trong đó R_1 là một hàm hữu tỉ đối với u.

Tích phân

Tích phân dạng :

$$I = \int R(e^{ax})dx$$

Trong đó R là một hàm hữu tỉ đối và $a \neq 0$

Để tính phân tích này ta đặt : $u = e^{ax}$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}\ln u$$

Khi đó $dx = \dfrac{1}{a\,.\,u}$ và: $I = \int R(u).\dfrac{1}{au}du$

có dạng tích phân hàm hữu tỉ.

Ví dụ

$$I = \int \frac{e^x(1-e^x)}{e^{2x}+1}dx$$

Đặt: $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$

$$I = \int \frac{1-u}{u^2+1}du = \int\left(-\frac{1}{2}.\frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du + \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \text{arctg}u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \text{arctg}(e^x) + C$$

Tích phân

Các tích phân có dạng:

$$\int P(x).\sin ax dx, \quad \int P(x).\cos ax dx, \quad \int P(x)e^{ax}dx$$

Trong đó p(x) là một đa thức theo biến x.

Để tính các tích phân này ta dùng phương pháp tích phân toàn phần bằng cách đặt :

$$u = p(x)$$

Ví dụ

Tính $I = \int x.\sin x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra : $I = -x\cos x + \int \cos x\, dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$