BÀI 7

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Định nghĩa

Định nghĩa: Cho hàm f(x) trên đoạn [a,b]. Chia đoạn [a,b] một cách tùy ý thành n đoạn nhỏ bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b$. Đặt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và trên $[x_{i-1}, x_i]$ lấy một điểm t_i tùy ý, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lập tổng

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

Định nghĩa (tt)

Nếu S_n có giới hạn hữu hạn I khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ và I không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a,b] và cách chọn các t_i, thì I được gọi là tích phân xác định của f(x) trên đoạn [a,b] và được ký hiệu là:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Các tính chất

* $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

* $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$

* Nếu $f(x) \le g(x) \forall x \in (a,b)$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Hệ quả: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

* Với $c \in [a,b]$ ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Một số lớp hàm khả tích

Định lý 2: Hàm f(x) liên tục trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

Định nghĩa: Nếu hàm số f(x) xác định tại x_o và không liên tục tại x_o nhưng có giới hạn 2 phía tại x_o thì ta nói x_o là điểm gián đoạn loại 1 tại x_o.

Định lý 3: Nếu f chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trên [a,b] thì f khả tích trên [a,b].

Định lý 4: Hàm bị chặn và đơn điệu trên [a,b] thì khả tích trên [a,b].

Tích phân xác định như hàm của cận trên

Cho f là một hàm khả tích trên [a ,b] với $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Xác định và là một hàm số theo biến x. Hàm số này đã được chứng minh là có những tính chất phát biểu trong mệnh đề sau đây:

- **Mệnh đề:**

(i) Nếu f khả tích trên [a,b] thì $F(x)=f(x)=\int_a^x f(t)dt$ là hàm liên tục trên [a,b].

(ii) Nếu f(t) liên tục tại $t = x_o \in (a,b)$, thì F(x) có đạo hàm tại x_o và $F'(x_o)=f(x_o)$

Định lý cơ bản (liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm)

Giả sử f liên tục trên [a,b]. Khi đó :

(i) $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của f(x) trên [a,b].

(ii) Nếu G(x) là một nguyên hàm bất kỳ của f(x) trên [a,b] thì:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

(Công thức này được gọi là công thức Newton-Leibnitz)

Ví dụ 1

Tính tích phân xác định :

$$I_1 = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{4 - (\ln x)^2}} = \arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right) + c$$

$$\Rightarrow I_1 = \left[\arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)\right]_1^e = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Ví dụ 2

Tính tích phân xác định :

$$I_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x-1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

$$\Rightarrow I_2 = \left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$$

Ví dụ 3

Tính tích phân xác định :

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$$