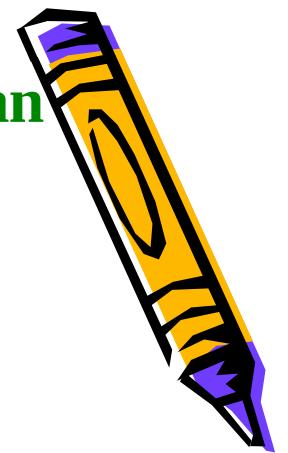


# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan

## BÀI 8

### PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH





## Tính nguyên hàm và áp dụng công thức Newton-Leibnitz

Nếu  $G(x)$  là một nguyên hàm bất kỳ của  $f(x)$  trên  $[a, b]$  thì

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

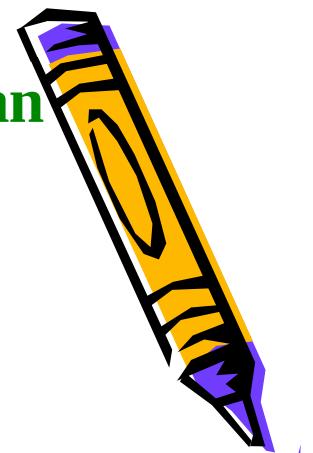
Ví dụ: Tính tích phân  $I_3 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\Rightarrow I_3 = \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



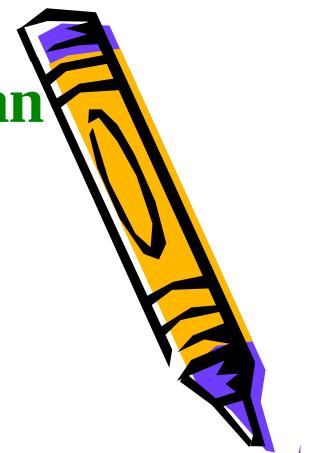
## Phương pháp đổi biến (Dạng 1)

Đặt  $x = \varphi(t)$  thỏa các điều kiện:

- $\varphi(t)$  và  $\varphi'(t)$  liên tục trên  $[\alpha, \beta]$
- $\varphi(\alpha) = a$  và  $\varphi(\beta) = b$
- Khi  $t$  biến thiên trong  $[\alpha, \beta]$  thì  $x$  biến thiên trong  $[a, b]$

$$\text{Khi đó: } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$





## Phương pháp đổi biến (Dạng 2)

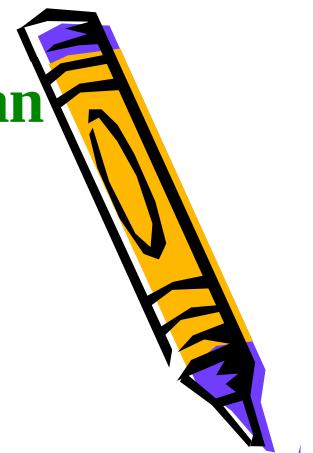
Giả sử hàm  $u = u(x)$  khả vi liên tục trên  $[a, b]$  và hàm số  $g$  liên tục trên miền giá trị của  $u$ .

Khi đó:

$$\int_a^b g(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 1

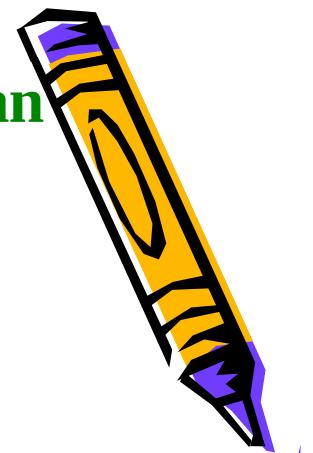
$$\text{Tính } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$$

Đặt  $u = \sin x$  ta có  $du = \cos x \, dx$  và:

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\arctg u]_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 2

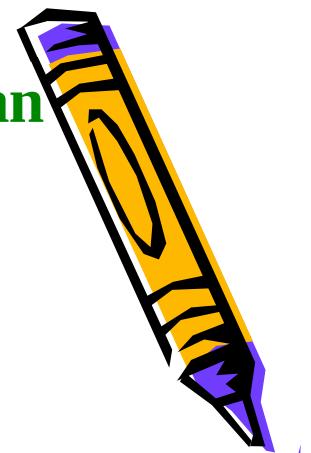
Tính:  $I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

Đặt  $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I &= - \int_1^{1/2} e^u du = \int_{1/2}^1 e^u du \\ &= [e^u]_{1/2}^1 = e - e^{1/2} = e - \sqrt{e}\end{aligned}$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 3

$$\text{Tính: } I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

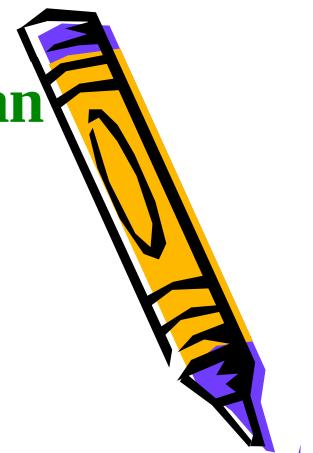
$$\text{Đặt } x = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$\text{Ta có } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ và khi } \sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Thì  $0 \leq x \leq 1$ .



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 3 (tt)

Vậy:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt$$

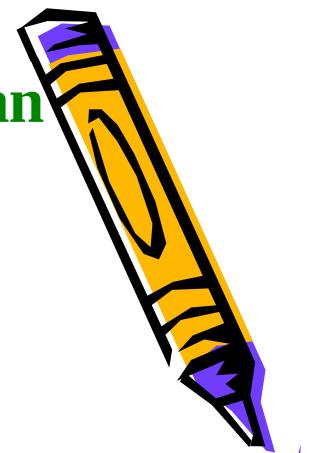
$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt$$

$$= \frac{1}{8} \left[ t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 4

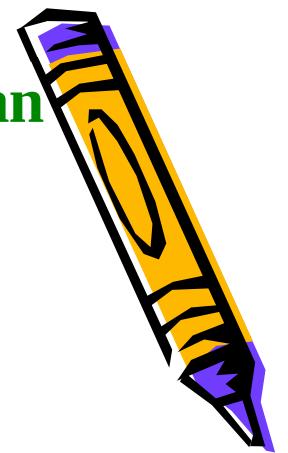
Chứng minh rằng:  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{Đặt } u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$$

Ta có  $du = -dx$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx &= - \int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} \cos^n(\frac{\pi}{2} - u) du \\ &= - \int_{\pi/2}^0 \sin^n u du = \int_0^{\pi/2} \sin^n u du = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx\end{aligned}$$





## Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử các hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có các đạo số  
theo biến  $x$ :  $u' = u'(x)$  và  $v' = v'(x)$  có các đạo hàm theo  
biến  $x$ :  $u' = u'(x)$  và  $v' = v'(x)$  liên tục trên  $[a,b]$ . Khi đó  
ta có công thức tích phân từng phần sau đây:

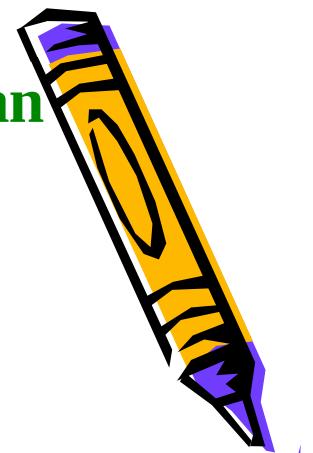
$$\int_a^b u \cdot v' dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot u' dx$$

Trong đó :

$$[uv]_a^b = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 1

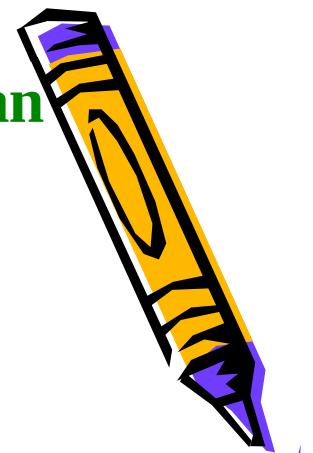
Tính tích phân xác định:  $I_1 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

Đặt:  $\begin{cases} u=x \\ v=\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v'=-\cos x \end{cases}$

Suy ra:  $I_1 = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$   
 $= \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 2

Tính tích phân xác định:  $I_2 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$

Đặt:  $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = e^x \\ v = -\sin x \end{cases}$

Suy ra:  $I_2 = [e^x \cdot \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$   
 $= e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

Để tính  $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$ , lại đặt:



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan

## Ví dụ 2 (tt)

$$\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx &= [-e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \\ &= 1 + I_2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } I_2 = e^{\pi/2} - (1 + I_2)$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan

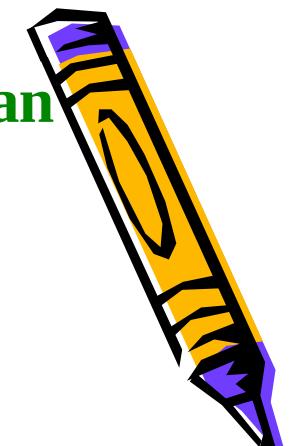
## Ví dụ 3

Tính tích phân xác định:  $I_3 = \int_1^e 32x^3 (\ln x)^2 dx$

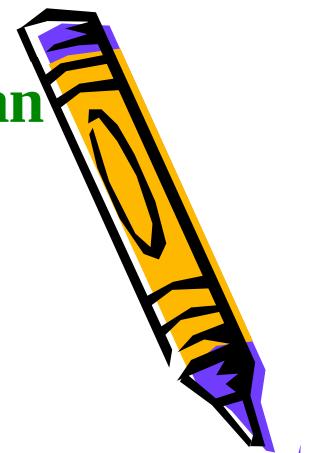
Đặt:  $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 16x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = 4x^4 \end{cases}$

$$\Rightarrow I_3 = [8x^4 (\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 8x^4 \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$= 8e^4 - \int_1^e 16x^3 \ln x dx$$



# TOÁN CAO CẤP A1 – Chương 4 – Giới thiệu tổng quan



## Ví dụ 3 (tt)

Tính  $\int_1^e 16x^3 \ln x dx$  bằng phương pháp tích phân từng

phản thì được:

$$\begin{aligned}\int_1^e 16x^3 \ln x dx &= [4x^4 \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e 4x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 4e^4 - \int_1^e 4x^3 dx = 4e^4 - [x^4]_1^e \\ &= 4e^4 - (e^4 - 1) = 3e^4 + 1\end{aligned}$$

Vậy:  $I_3 = 8e^4 - (3e^4 + 1) = 5e^4 - 1$

