BÀI 8

PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Tính nguyên hàm và áp dụng công thức Newton-Leibnitz

Nếu G(x) là một nguyên hàm bất kỳ của f(x) trên [a,b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Ví dụ: Tính tích phân $I_3 = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Phương pháp đổi biến (Dạng 1)

Đặt $x = \varphi(t)$ thỏa các điều kiện:

a) $\varphi(t)$ và $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$

b) $\varphi(\alpha) = a$ và $\varphi(\beta) = b$

c) Khi t biến thiên trong $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trong $[a., b]$

Khi đó: $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\ \varphi'(t)\,dt$$

Phương pháp đổi biến (Dạng 2)

Giả sử hàm $u = u(x)$ khả vi liên tục trên $[a,b]$ và hàm số g liên tục trên miền giá trị của u.

Khi đó:

$$\int_a^b g(u(x)).\ u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du$$

Ví dụ 1

Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$

Đặt $u = \sin x$ ta có $du = \cos x \, dx$ và:

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = [\operatorname{arctg} u]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 2

Tính: $I = \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

Đặt $u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx$

$$\Rightarrow I = -\int_1^{1/2} e^u du = \int_{1/2}^{1} e^u du$$

$$= [e^u]_{1/2}^{1} = e - e^{1/2} = e - \sqrt{e}$$

Ví dụ 3

Tính: $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

Đặt $x = \sin t \quad ,0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \cos t\,dt$

Ta có $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ và khi $\sin 0 = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Thì $0 \le x \le 1$.

Ví dụ 3 (tt)

Vậy:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t.\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t) dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}$$

Ví dụ 4

Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \forall n \in N$

Đặt $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u$

Ta có $du = -du$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = -\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} \cos^n(\frac{\pi}{2} - u)du$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n u du = \int_0^{\pi/2} \sin^n u du = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử các hàm số u = u(x) và v = v(x) có các đạo h theo biến x: u' = u'(x) và v' = v'(x) có các đạo hàm theo biến x: u' = u'(x) và v' = v'(x) liên tục trên [a,b]. Khi đó ta có công thức tích phân từng phần sau đây:

$$\int_a^b u.v'dx = [u.v]_a^b - \int_a^b v.u'dx$$

Trong đó :

$$[uv]_a^b = u(b).v(b) - u(a).v(a)$$

Ví dụ 1

Tính tích phân xác định: $I_1 = \int_0^{\pi} x.\sin x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra: $I_1 = [-x.\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$

$= \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$

Ví dụ 2

Tính tích phân xác định: $I_2 = \int_0^{\pi/2} e^x.\cos x dx$

Đặt: $\begin{cases} u = e^x \\ v' = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\sin x \end{cases}$

Suy ra: $I_2 = [e^x.\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$

$$= e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^2.\sin x dx$$

Để tính: $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx$, lại đặt:

Ví dụ 2 (tt)

$$\begin{cases} u = e^x \\ v' = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = e^x \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Suy ra: $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx = [-e^x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$

$$= 1 + I_2$$

Vậy: $I_2 = e^{\pi/2} - (1 + I_2)$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

Ví dụ 3

Tính tích phân xác định: $I_3 = \int_1^e 32x^3(\ln x)^2 dx$

Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = 16x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{x} \\ v = 4x^4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \left[8x^4(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 8x^4 . \frac{2\ln x}{x} dx$$

$$= 8e^4 - \int_1^e 16x^3 . \ln x dx$$

Ví dụ 3 (tt)

Tính $\int_1^e 16x^3 . \ln x dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần thì được:

$$\int_1^e 16x^3 \ln x dx = [4x^4 . \ln x]_1^e - \int_1^e 4x^4 . \frac{1}{x} dx$$

$$= 4e^4 - \int_1^e 4x^3 dx = 4e^4 - [x^4]_1^e$$

$$= 4e^4 - (e^4 - 1) = 3e^4 + 1$$

Vậy: $I_3 = 8e^4 - (3e^4 + 1) = 5e^4 - 1$