IV. CHUỖI LŨY THỪA

1.Định nghĩa

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Bằng phép biến đổi $X = (x - x_0)$

ta đưa chuỗi trên về dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$

Do đó các kết quả về chuỗi lũy thừa chỉ cần xét cho trường hợp chuỗi có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Rõ ràng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = 0$

2. Định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

* Số $R > 0$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

hội tụ với mọi $x : |x| < R$ và phân kỳ với mọi

$x : |x| > R$ được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi.

* Khoảng (-R, R) được gọi là **khoảng hội tụ** của

chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

2. Định nghĩa bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa *(tt)*.

*Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

hội tụ $\forall x \in \boldsymbol{R}$ ta cho $\boldsymbol{R} = +\infty$.

*Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

phân kỳ $\forall x \neq 0$ ta cho $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$.

3. Cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa.

a) Định lý Abel: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$

Khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

là: $$R=\begin{cases} 0 & , \quad \rho=+\infty \\ \dfrac{1}{\rho} & , \quad 0<\rho<+\infty \\ +\infty, & \rho=0 \end{cases}$$

3. Cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa *(tt)*.

b. Định lý Cauchy:

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

khi đó bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

là: $$R = \begin{cases} 0 & , \ \rho = +\infty \\ \dfrac{1}{\rho} & , \ 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \ \rho = 0 \end{cases}$$

Chú ý: Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

3. Cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa *(tt)*.

*Bước 1: Ta dựa vào hai định lý trên để tìm bán kính hội tụ R.

*Bước 2: Khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa này là: $-R < x < R$

*Bước 3: Xét sự hội tụ của chuỗi **tại các đầu mút** của khoảng hội tụ.

Từ đó ta sẽ có được miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

4. Một số ví dụ:

VD1 Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \to 1$

Vậy $R = 1$

* Khoảng hội tụ của chuỗi là $-1 < x < 1$

*Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = \pm 1$

✓Tại $x = 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

4. Một số ví dụ - VD 1*(tt)*:

✓ Tại $x = -1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $\mathbf{-1 \le x < 1}$

VD2: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n.3^n}$

Đặt $X = (x+2)$ chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n.3^n}$

4. Một số ví dụ - VD2*(tt)*:

Ta có: $a_n = \dfrac{1}{n.3^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{3\sqrt[n]{n}} \to \dfrac{1}{3}$

Vậy $R = 3$

*Khoảng hội tụ của chuỗi là

$$-3 < X < 3 \Leftrightarrow -3 < (x+2) < 3$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 1$$

4. Một số ví dụ - VD2*(tt)*:

* Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = -5$ và $x = 1$:

✓ Tại $x = -5$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ.

✓ Tại $x = 1$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $\mathbf{-5 \le x < 1}$

4. Một số ví dụ *(tt)*:

VD3: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n.9^n}$

Đặt $X = x^2$, chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$

Ta có: $a_n = \frac{1}{n.9^n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{9\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{1}{9}$$

Vậy $R = 9$

4. Một số ví dụ - VD3*(tt)*:

* Khoảng hội tụ của chuỗi là

$$x^2 < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

* Xét sự hội tụ của chuỗi tại 2 đầu mút $x = \pm 3$:

✓ Tại $x = \pm 3$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $\mathbf{-3 < x < 3}$

4. Một số ví dụ *(tt)*:

VD4: Tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$

Đặt $X = \frac{1-x}{1+x}$

Chuỗi ban đầu trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} X^n$

Ta có: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+1}{2n+3} \to 1 \Rightarrow R = 1$$

4. Một số ví dụ - VD4 *(tt)*:

* Khoảng hội tụ của chuỗi là

$$-1 < X < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

* Xét sự hội tụ của chuỗi tại đầu mút $x = 0$:

Tại $x = 0$ ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là: $\mathbf{0 \le x < +\infty}$

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa:

a) Tổng của chuỗi lũy thừa là một hàm số liên tục trên miền hội tụ của nó.

b) Trên khoảng hội tụ ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng của từng chuỗi lũy thừa, nghĩa là

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ cũng có bán kính hội tụ là R.

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa *(tt)*:

c) Trên khoảng hội tụ ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa, nghĩa là:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ cũng có bán kính hội tụ là: R

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa *(tt)*:

VD1: Hãy tính tổng của chuỗi

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

trong miền hội tụ của chúng.

Ta có: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ có bán kính hội tụ là $R=1$

$\Rightarrow S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ cũng có bán

kính hội tụ là $R=1$. Vậy $S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa – VD1 *(tt)*:

$$\Rightarrow S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} 0$$

Mà $S(0)=0$ nên $S(x)=\operatorname{arctg} x$

VD2: Hãy tính tổng của chuỗi

$$S(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

trong miền hội tụ của chúng.

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa – VD2 *(tt)*:

Ta có: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ có bán kính hội tụ là $R=1$

Vậy $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ cũng có

bán kính hội tụ là $R = 1.$

Cho nên $S'(x)=\frac{1}{1+x}$

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa – VD2 *(tt)*:

$$\Rightarrow S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$$

Mà $S(0) = 0$ nên $S(x) = \ln(1+x)$

VD3: Hãy tính tổng của chuỗi

$$S(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+...$$

trong miền hội tụ của chúng.

5. Các tính chất của chuỗi lũy thừa – VD3 *(tt)*:

Ta có: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ có bán kính hội tụ là $R=1$

$\Rightarrow \int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ cũng có bán kính hội tụ là $R=1$

Vậy $\int_0^x S(t)=\frac{1}{1-x}-1$

$$\Rightarrow S(x)=\left(\int_0^x S(t)dt\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'$$

$$\Rightarrow S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

6. Chuỗi Taylor

Định nghĩa chuỗi Taylor

Hàm $y = f(x)$ có đạo hàm vô hạn lần trong lân cận của điểm x_0. Chuỗi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ (1) gọi là chuỗi Taylor của hàm $y = f(x)$ tại lân cận của x_0.

Chuỗi Taylor trong lân cận của $x_0 = 0$ gọi là chuỗi Maclaurint.

6. Chuỗi Taylor (tt)

Định lý

Nếu hàm $y = f(x)$ cùng các đạo hàm mọi cấp của nó bị chặn trong lân cận của điểm x_0, tức là tồn tại số thực M, trong lân cận của x_0 ta có $(\forall n \in N), \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$

thì $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$ Miền hội tụ: R

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$ Miền hội tụ: $(-1,1]$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ Miền hội tụ: R

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ Miền hội tụ: R

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1))x^n}{n!}$$ Miền hội tụ: $(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$ Miền hội tụ: $(-1,1)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$ Miền hội tụ: $(-1,1)$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ Miền hội tụ: $(-1,1]$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ Miền hội tụ: R

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ Miền hội tụ: R

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

Ví dụ Tìm chuỗi luỹ thừa của hàm $y = \ln(2+3x)$

trong lân cận của $x_0 = 1$.

Đặt $X = x - 1$ $\Leftrightarrow x = X + 1$

Tìm khai triển Maclaurint của hàm $f = \ln(2+3(X+1))$

$$f = \ln(5+3X) = \ln 5\left(1+\frac{3X}{5}\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{3X}{5}\right)$$

$$f = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3X/5)^n}{n} = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n\cdot(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$$

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

Ví dụ Tìm chuỗi luỹ thừa của hàm $y = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

trong lân cận của $x_0 = 2$.

Đặt $X = x - 2 \Leftrightarrow x = X + 2$

Tìm khai triển Maclaurint của hàm $f = \dfrac{2X+5}{(X+2)(X+3)}$

$$f = \frac{1}{X+2} + \frac{1}{X+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+X/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+X/3}$$

$$f = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^n}{2^n} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^n}{3^n}$$

$$f = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)(x-2)^n$$

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

Ví dụ Tìm chuỗi Maclaurint của hàm $y = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$

Ta có $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Đạo hàm hai vế (trong miền hội tụ, đạo hàm của tổng bằng tổng các đạo hàm)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

Ví dụ Tính tích phân $I = \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx$

Ta có $I = \int_0^1 -\ln(1-x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-x)^n dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx$

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim S_n = 1$$

Vì $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

Ví dụ Tính tổng của $I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$$

Đặt $N = n - 1$: $J = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Đặt $N = n + 2$: $K = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = \sum_{N=4}^{\infty} \frac{(-1)^{N+2}}{N} = -\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$= \ln 2 - \frac{1}{2}$ Vậy $I = \frac{2}{3}\ln - \frac{3}{18}$

7. Chuỗi Maclaurint của một số hàm thông dụng (tt)

Ví dụ Tính tổng $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

Ta có $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!}$

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e$$