II. CHUỖI SỐ DƯƠNG

1.Định nghĩa: Chuỗi số dương là chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ với $u_n > 0, \forall n$

2. Các tiêu chuẩn xét sự hội tụ của chuỗi số dương

a) Tiêu chuẩn tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm và đơn điệu giảm trên $[k, +\infty), k \in N^*$

<u>Khi đó</u> Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ $\Leftrightarrow \int_{k}^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

a) Tiêu chuẩn tích phân: *(tt)*

VD1: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

* Nếu $\alpha < 0$ thì $u_n \to \infty$ nên chuỗi phân kỳ.

* Nếu $\alpha = 0$ thì $u_n = 1$ nên chuỗi phân kỳ.

* Nếu $\alpha > 0$ khi đó xét hàm $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$

VD 1*(tt)*

Hàm này liên tục, không âm và đơn điệu giảm trên $[1,+\infty)$

Mà $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ nếu } \alpha \le 1 \end{cases}$

Vậy chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\begin{cases} \text{hội tụ nếu } \alpha > 1 \\ \text{phân kỳ nếu } \alpha \le 1 \end{cases}$

VD2: Xét chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$

Hàm này liên tục, không âm và đơn điệu giảm trên $[2, +\infty)$

Mà $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x) \Big|_2^{+\infty} = +\infty$

Vậy tích phân $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ phân kỳ.

Theo tiêu chuẩn tích phân $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ phân kỳ.

b) Tiêu chuẩn so sánh 1:

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

thoả điều kiện $\exists N: 0 < u_n \leq v_n, \forall n \geq N$

<u>Khi đó</u>:

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Hoặc nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

b) Tiêu chuẩn so sánh 1: *(tt)*

VD1: Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n}$

Ta có: $0 < \frac{2^n}{5^n + n} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ hội tụ $(q = \frac{2}{5} < 1)$

Nên theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + n}$ hội tụ

b) Tiêu chuẩn so sánh 1: *(tt)*

VD2: Cho chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

Ta có: $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} > 0; \forall n \geq 3$

Mà chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ phân kỳ (VD1 trong phần tiêu chuẩn tích phân)

Nên theo tiêu chuẩn so sánh 1 chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ phân kỳ.

c) Tiêu chuẩn so sánh 2:

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$

- $k = 0$ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.
- $k = +\infty$ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ.
- $0 < k < +\infty$ hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

c) Tiêu chuẩn so sánh 2: *(tt)*

VD1: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$

Ta có: $\frac{n^2+n+1}{n^4+1} \sim \frac{1}{n^2}$ khi $n \to \infty$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^4+1}$ có cùng tính chất là hội tụ.

c) Tiêu chuẩn so sánh 2: *(tt)*

VD2: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$

Ta có $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}} = \frac{2}{n^{3/4}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} \sim \frac{2}{n^{5/4}}$

khi $n \to \infty$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ hội tụ.

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$ có cùng tính chất hội tụ

c) Tiêu chuẩn so sánh 2: *(tt)*

VD3: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Ta có $u_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. Xét $v_n = \frac{1}{n}$

Lúc này $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ cũng phân kỳ

c) Tiêu chuẩn so sánh 2: *(tt)*

VD4: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln(\frac{n+1}{n-1})$

Ta có $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln(1 + \frac{2}{n-1}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{n-1}$ khi $n \to \infty$

Xét $v_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Lúc này $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 2$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln(\frac{n+1}{n-1})$ cũng hội tụ.

c) Tiêu chuẩn so sánh 2: *(tt)*

VD5: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2}.\text{arctg}\frac{1}{n^2}$

Ta có $u_n = \sqrt[3]{n^2}.\text{arctg}\frac{1}{n^2} \sim \sqrt[3]{n^2}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ khi $n \to \infty$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ hội tụ.

Nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2}.\text{arctg}\frac{1}{n^2}$ cũng hội tụ.

d) Tiêu chuẩn D'Alembert:

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Giả sử tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$

* Nếu $D<1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

* Nếu $D>1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

* Nếu $D=1$ thì chưa có kết luận.

d) Tiêu chuẩn D'Alembert: *(tt)*

Tuy nhiên nếu ta chứng minh được $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \forall n \geq N$

thì lúc này ta kết luận $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

VD1: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \rightarrow \frac{3}{e} > 1$

Vậy theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.n!}{n^n}$ phân kỳ.

d) Tiêu chuẩn D'Alembert: *(tt)*

VD2: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5n^2}{n! + \ln n}$

Ta có $u_n = \frac{2^n + 5n^2}{n! + \ln n} \sim v_n = \frac{2^n}{n!}$ khi $n \to \infty$

Mà $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2}{n} \to 0$

Vậy theo tiêu chuẩn D'Alembert chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ nên

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

d) Tiêu chuẩn D'Alembert: *(tt)*

VD3: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n.n!}{n^n}$

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to 1$

Tuy nhiên ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ nên $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n.n!}{n^n}$ phân kỳ.

e) Tiêu chuẩn Cauchy:

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

giả sử tồn tại $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = c$

*Nếu $c < 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

*Nếu $c > 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

*Nếu $c = 1$ thì chưa có kết luận.

e) Tiêu chuẩn Cauchy: *(tt)*

Tuy nhiên nếu ta chứng minh được $\sqrt[n]{u_n} > 1,\ \forall n \geq N$

thì ta kết luận chuỗi phân kỳ.

VD1: Xét chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}$

Ta có: $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{3}{\ln n} \to 0$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(\ln n)^n}$ hội tụ.

e) Tiêu chuẩn Cauchy: *(tt)*

VD2: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}.2^n}{(n+1)^{n^2}}$

Ta có: $\sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

e) Tiêu chuẩn Cauchy: *(tt)*

VD3: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$

Ta có: $\sqrt[n]{u_n}=\frac{2n+3}{2n+1}\to 1$

Tuy nhiên $\frac{2n+3}{2n+1}>1$

Vậy theo tiêu chuẩn Cauchy $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.