Bài giảng môn: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
Chương II: Phương trình vi phân cấp cao

Ngô Mạnh Tưởng
Website: http://www.tuongnm.wordpress.com

Ngày 2 tháng 3 năm 2011

Mục đích

Trong chương này trình bày một số kiến thức tổng quan về phương trình vi phân cấp cao và lý thuyết tổng quát về phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

Sinh viên nắm được các cách giải và vận dụng vào giải bài tập.

NỘI DUNG CHÍNH CỦA CHƯƠNG

2.1 Một số khái niệm về phương trình vi phân cấp cao.

2.2 Các phương trình giải được bằng cầu phương.

2.3 Tích phân trung gian - Phương trình hạ cấp được.

2.4 Lý thuyết tổng quát về phương trình vi phân tuyến tính cấp cao.

2.5 Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hằng.

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp n là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

hay dạng giải ra đối với đạo hàm

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

Trong đó F là hàm số liên tục trong miền $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$ và nhất thiết phải có mặt $y^{(n)}$

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm

Định nghĩa:

Hàm $f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ xác định trong miền $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ được gọi là thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo các biến $u_1, u_2, \cdots, u_n$ nếu tồn tại hằng số $L > 0$ (hằng số Lipschitz) sao cho với hai điểm bất kỳ $(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) \in G, (x, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \cdots, \overline{u}_n) \in G$ ta luôn có

$$|f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n) - f(x, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \cdots, \overline{u}_n)| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |u_i - \overline{u}_i|$$

Định lý

Giả sử trong miền $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hàm $f\left(x, u_1, u_2, \cdots, u_n\right)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Khi đó với bất kỳ điểm trong $\left(x_0, y_0, y_0^{'}, \cdots, y_0^{(n-1)}\right) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y\left(x_0\right) = y_0, y^{'}\left(x_0\right) = y_0^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)}$$

Định lý

Giả sử trong miền $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hàm $f(x, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo $u_1, u_2, \cdots, u_n$. Khi đó với bất kỳ điểm trong $\left(x_0, y_0, y_0^{'}, \cdots, y_0^{(n-1)}\right) \in G$ tồn tại duy nhất nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$y(x_0) = y_0, y^{'}(x_0) = y_0^{'}, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Tích phân tổng quát

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) có dạng $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$, đôi khi ta thu được nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn $\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0$ và được gọi là tích phân tổng quát của phương trình (1) trong miền G.

Dạng $F(x, y^{(n)}) = 0$

a, Từ phương trình đã cho ta có thể giải ra đối với đạo hàm $y^{(n)} = f(x)$, khi đó

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx = g_1(x, C_1)$$

$$y^{(n-2)} = \int g_1(x, C_1)dx = g_2(x, C_1, C_2)$$

$$\vdots$$

$$y = \int g_{n-1}(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})dx = g_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Vậy trường hợp này tích phân tổng quát thu được qua n lần cầu phương.

Dạng $F(x, y^{(n)}) = 0$

b, Từ phương trình ban đầu ta có thể biểu diễn $x, y^{(n)}$ qua tham số $x = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục, $\psi(t)$ liên tục. Tương tự như trên ta có

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt = g_1(t, C_1)$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx, y^{(n-2)} = \int g_1(t, C_1)\varphi'(t)\,dt = g_2(t, C_1, C_2)$$

$$\vdots$$

$$y = g_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$

Dạng $F(x, y^{(n)}) = 0$

b, Từ phương trình ban đầu ta có thể biểu diễn $x, y^{(n)}$ qua tham số $x = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục, $\psi(t)$ liên tục. Tương tự như trên ta có

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt = g_1(t, C_1)$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx, y^{(n-2)} = \int g_1(t, C_1)\varphi'(t)\,dt = g_2(t, C_1, C_2)$$

$$\vdots$$

$$y = g_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Vậy nghiệm tổng quát có dạng $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g_n(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases}$

Ví dụ: Giải phương trình $e^{y''} + y'' = x$

Dạng $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

a,Từ phương trình đã cho ta có thể giải ra $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$. Đặt $z = y^{(n-1)} \Rightarrow z' = f(z)$ là phương trình tách biến.

- Nếu giải ra được $z = g(x, C_1)$, khi đó $y^{(n-1)} = z = g(x, C_1)$ là trường hợp $(1, a)$ ở trên.

Dạng $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

a,Từ phương trình đã cho ta có thể giải ra $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$. Đặt $z = y^{(n-1)} \Rightarrow z' = f(z)$ là phương trình tách biến.

- Nếu giải ra được $z = g(x, C_1)$, khi đó $y^{(n-1)} = z = g(x, C_1)$ là trường hợp $(1, a)$ ở trên.
- Nếu không giải ra được $z = g(x, C_1)$ nhưng có thể biểu diễn được dạng tham số $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ z = \psi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \end{cases}$ là phương trình ở dạng $(1, b)$

Dạng $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

b, Nếu có thể biểu diễn phương trình đã cho theo tham số $\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$. Do

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt = h(t, C_1)$$

Khi đó

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx = \int y^{(n-1)}h'(t, C_1)\,dt = g_1(t, C_1, C_2)$$

$$\vdots$$

$$y = g_{n-1}(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Ví dụ: Giải phương trình $y''' = y'' + 1$

Dạng $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

a,Từ phương trình đã cho ta có thể giải ra $y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right)$. Đặt $z = y^{(n-2)} \Rightarrow z^{''} = f(z)$. Nhân 2 vế của phương trình với $2z^{'}(z^{'} \neq 0)$ ta được

$$2z^{'}z^{''} = 2z^{'}f(z) \Leftrightarrow d\left(z^{'2}\right) = 2f(z)\,dz \Rightarrow z^{'2} = \int 2f(z)\,dz + C_1$$

$$\Rightarrow z^{'} = \pm\sqrt{\int 2f(z)\,dz + C_1} \Rightarrow dz = \pm\sqrt{\int 2f(z)\,dz + C_1}dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dz}{\pm\sqrt{\int 2f(z)\,dz + C_1}} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{\int 2f(z)\,dz + C_1}}$$

Hay $\Phi\left(x, y^{(n-2)}, C_1, C_2\right) = 0$ là phương trình dạng (1)

Dạng $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

b, Nếu có thể biểu diễn phương trình đã cho theo tham số $\begin{cases} y^{(n-2)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$. Khi đó

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\,dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \varphi'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} \Rightarrow y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)} = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

Hay

$$d\left(\frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2\right) = \psi(t)\varphi'(t)\,dt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C_1} = \psi_1(t, C_1)$$

Kết hợp với $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ ta đưa về trường hợp $(2, b)$

Tích phân trung gian

Khi tính tích phân của phương trình vi phân cấp n ta đi đến những hệ thức chứa các hằng số tùy ý và các đào hàm cấp thấp hơn n có dạng

$$\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \cdots, C_k\right) = 0 \quad (1 \leqslant k < n)$$

Hệ thức này được gọi là tích phân trung gian của phương trình (1). Nếu $k = 1$ ta có thệ thức dạng

$$\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}, C_1\right) = 0$$

và được gọi là tích phân đầu.

Phương trình không chứa hàm phải tìm

Phương trình không chứa hàm phải tìm

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (k \geqslant 1)$$

Phương trình không chứa hàm phải tìm

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (k \geqslant 1)$$

Cách giải. Đặt $z = y^{(k)}$ và coi z như một hàm số mới phải tìm. Khi đó ta có phương trình $F\left(x, z, z', \cdots, z^{(n-k)}\right) = 0$ là phương trình cấp $n-k$.

- Nếu giải phương trình ta được $z = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k})$ hay $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k})$ là phương trình ở dạng bài 2, mục 1.
- Nếu giải phương trình đưa về dạng tích phân tổng quát $\Phi(x, z, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}) = 0$ hay $\Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}\right) = 0$ là phương trình dạng bài 2, mục 1.

Phương trình không chứa hàm phải tìm

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (k \geqslant 1)$$

Cách giải. Đặt $z = y^{(k)}$ và coi z như một hàm số mới phải tìm. Khi đó ta có phương trình $F\left(x, z, z^{'}, \cdots, z^{(n-k)}\right) = 0$ là phương trình cấp $n - k$.

- Nếu giải phương trình ta được $z = \varphi\left(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}\right)$ hay $y^{(k)} = \varphi\left(x, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}\right)$ là phương trình ở dạng bài 2, mục 1.
- Nếu giải phương trình đưa về dạng tích phân tổng quát $\Phi\left(x, z, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}\right) = 0$ hay $\Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}\right) = 0$ là phương trình dạng bài 2, mục 1.

Ví dụ: Giải phương trình $4y^{'} + y^{''2} = 4xy^{''}$

Phương trình không chứa biến số độc lập

Phương trình không chứa biến số độc lập

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

Phương trình không chứa biến số độc lập

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

Cách giải. Đặt $y^{'} = p$ và coi p như hàm mới biến y. Ta có

$$y^{'} = p = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y^{''} = \frac{dy^{'}}{dx} = \frac{d}{dx}(p) = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} = p.\frac{dp}{dy}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \omega\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)$$

Phương trình không chứa biến số độc lập

Thay $y^{'}, y^{''}, \cdots, y^{(n)}$ vào phương trình đã cho ta được phương trình dạng

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

là phương trình vi phân cấp $n-1$, giả sử ta tìm được tích phân tổng quát $\Phi\left(y, p, C_1, \cdots, C_{n-1}\right) = 0$, khi đó ta được phương trình cấp 1: $\Phi\left(y, y^{'}, C_1, \cdots, C_{n-1}\right) = 0$

Phương trình không chứa biến số độc lập

Thay $y^{'}, y^{''}, \cdots, y^{(n)}$ vào phương trình đã cho ta được phương trình dạng

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

là phương trình vi phân cấp $n-1$, giả sử ta tìm được tích phân tổng quát $\Phi\left(y, p, C_1, \cdots, C_{n-1}\right) = 0$, khi đó ta được phương trình cấp 1: $\Phi\left(y, y^{'}, C_1, \cdots, C_{n-1}\right) = 0$

Ví dụ: Giải phương trình $\left(1+y^2\right) yy^{''} = \left(3y^2-1\right) y^{'2}$

Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Nếu F là hàm thuần nhất đối với $y, y', \cdots, y^{(n)}$, tức là

$$F\left(x, ty, ty', \cdots, ty^{(n)}\right) = t^k F\left(y, y', \cdots, y^{(n)}\right)$$

thì phương trình $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ được gọi là phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó.

Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Nếu F là hàm thuần nhất đối với $y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}$, tức là

$$F\left(x, ty, ty^{'}, \cdots, ty^{(n)}\right) = t^k F\left(y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right)$$

thì phương trình $F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ được gọi là phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó.

Cách giải: Đặt $y^{'} = zy$ trong đó z là hàm số mới phải tìm. Ta có

$$y^{''} = \left(y^{'}\right)^{'} = (zy)^{'} = z^{'}y + zy^{'} = z^{'}y + zzy = y\left(z^2 + z^{'}\right)$$

$$y^{'''} = y\left(z^3 + 3zz^{'} + z^{''}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = y\,\omega\left(z, z^{'}, \cdots, z^{(n-1)}\right)$$

Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Thay $y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}$ vào phương trình đã cho ta được

$$y^k F\left(x, 1, z, z^2 + z^{'} \cdots, \omega\left(z, z^{'}, \cdots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

Nếu $y \neq 0$ ta có

$$F\left(x, 1, z, z^2 + z^{'} \cdots, \omega\left(z, z^{'}, \cdots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

Giải phương trình ta được nghiệm tổng quát dạng

$$z = \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-1}\right) \Rightarrow \frac{y^{'}}{y} = \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \cdots, C_{n-1}) dx}$$

Phương trình thuần nhất đối với hàm phải tìm và các đạo hàm của nó

Thay $y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}$ vào phương trình đã cho ta được

$$y^k F\left(x, 1, z, z^2 + z^{'} \cdots, \omega\left(z, z^{'}, \cdots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

Nếu $y \neq 0$ ta có

$$F\left(x, 1, z, z^2 + z^{'} \cdots, \omega\left(z, z^{'}, \cdots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0$$

Giải phương trình ta được nghiệm tổng quát dạng

$$z = \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-1}\right) \Rightarrow \frac{y^{'}}{y} = \varphi\left(x, C_1, \cdots, C_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, \cdots, C_{n-1}) dx}$$

Ví dụ: Giải phương trình $xyy^{''} + xy^{'2} - yy^{'} = 0$

Phương trình mà vế trái là đạo hàm toàn phần

Phương trình mà vế trái là đạo hàm toàn phần

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

trong đó F là đạo hàm toàn phần theo biến x của một hàm $\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)$, tức là

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)\right)$$

Phương trình mà vế trái là đạo hàm toàn phần

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

trong đó F là đạo hàm toàn phần theo biến x của một hàm $\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)$, tức là

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)\right)$$

Cách giải. Ta có $\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)\right) = 0$ do đó tích phân đầu là $\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right) = C_1$ tức là ta được phương trình vi phân cấp $n-1$

Phương trình mà vế trái là đạo hàm toàn phần

Là phương trình vi phân có dạng

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = 0$$

trong đó F là đạo hàm toàn phần theo biến x của một hàm $\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)$, tức là

$$F\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)\right)$$

Cách giải. Ta có $\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right)\right) = 0$ do đó tích phân đầu là $\Phi\left(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)}\right) = C_1$ tức là ta được phương trình vi phân cấp $n-1$

Ví dụ: Giải phương trình $\frac{y^{'''}}{y^{''}} - \frac{y^{'}y^{''}}{1+y^{'2}} = 0$

Định nghĩa

Định nghĩa

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình có dạng

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x), (a_0(x) \neq 0)$$

Nếu $g(x) \equiv 0$ thì phương trình được gọi là phương trình thuần nhất.

Định nghĩa

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình có dạng

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x), (a_0(x) \neq 0)$$

Nếu $g(x) \equiv 0$ thì phương trình được gọi là phương trình thuần nhất.

Ta thường xét phương trình có dạng

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{3}$$

và

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{4}$$

Định nghĩa

Định nghĩa

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n là phương trình có dạng

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x), (a_0(x) \neq 0)$$

Nếu $g(x) \equiv 0$ thì phương trình được gọi là phương trình thuần nhất.

Ta thường xét phương trình có dạng

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \tag{3}$$

và

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{4}$$

Gọi $L_n[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(n)y$ là toán tử vi phân tuyến tính. Khi đó

- Phương trình có dạng (3) có dạng $L_n[y] = f(x)$
- Phương trình có dạng (4) có dạng $L_n[y] = 0$

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý

Nếu các hàm số $p_i(x)\,(i = 1, \cdots, n)\,, f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) thì bài toán Cauchy của phương trình (3) luôn có nghiệm duy nhất với mọi điều kiện ban đầu tại $x_0 \in (a, b)$

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định lý

Nếu các hàm số $p_i(x)\,(i = 1, \cdots, n), f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) thì bài toán Cauchy của phương trình (3) luôn có nghiệm duy nhất với mọi điều kiện ban đầu tại $x_0 \in (a, b)$

Chứng minh.

Từ phương trình (3) suy ra

$$y^{(n)} = -\left(p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_n(n)\,y - f(x)\right)$$

Vế phải là hàm số liên tục theo (x, Y) và khả vi theo biến $Y := \left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ nên nó thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến này. □

Một số tính chất của nghiệm phương trình

Một số tính chất của nghiệm phương trình

Xét phương trình thuần nhất $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$ hay $L_n[y] = 0$ ta có

- $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]$ với $y_1(x), y_2(x)$ khả vi n lần liên tục.
- $L_n[Cy] = CL_n[y]$ với $y(x)$ khả vi n lần liên tục và C là hằng số

Theo tính chất của toán tử L_n ta suy ra các tính chất của tập nghiệm phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n

1. Nếu $y(x)$ là nghiệm của phương trình (4) thì $Cy(x)$ với C là hằng số cũng là nghiệm của phương trình (4)
2. Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là 2 nghiệm bất kỳ của phương trình (4) thì $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (4)
3. Nếu $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_k(x)$ là các nghiệm của phương trình (4) thì $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ky_k(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (4)

Sự phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính của hệ hàm

Sự phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính của hệ hàm

Định nghĩa

Giả sử có hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)\}$ xác định trên khoảng (a, b). Hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_k\varphi_k(x) = 0 \tag{5}$$

Nếu đồng nhất thứ (5) chỉ có thể xẩy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ thì hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ được gọi là độc lập tuyến tính trên (a, b).

Sự phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính của hệ hàm

Định nghĩa

Giả sử có hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)\}$ xác định trên khoảng (a, b). Hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a, b) nếu tồn tại các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_k\varphi_k(x) = 0 \tag{5}$$

Nếu đồng nhất thứ (5) chỉ có thể xẩy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ thì hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ được gọi là độc lập tuyến tính trên (a, b).

Ví dụ: Hệ hàm $1, x, x^2, \cdots, x^k$ độc lập tuyến tính trên mọi khoảng (a, b), hệ hàm $-1, -\sin^2 x, -\cos^2 x$ phụ thuộc tuyến tính trên mọi khoảng (a, b).

Định thức Wronski

Định thức Wronski

Định nghĩa

Giả sử hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ khả vi cấp $k-1$ lần trên (a,b). Khi đó định thức

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronski và ký hiệu là $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)]$ hay $W(x)$

Định thức Wronski

Định nghĩa

Giả sử hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ khả vi cấp $k-1$ lần trên (a,b). Khi đó định thức

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \cdots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

được gọi là định thức Wronski và ký hiệu là $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)]$ hay $W(x)$

Định lý

Nếu hệ hàm $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ phụ thuộc tuyến tính trên khoảng (a,b) thì định thức Wronski đồng nhất bằng 0.

Chứng minh : Xem tài liệu

Định lý 2

Định lý 2

Hệ quả

Nếu $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)] \neq 0$ tại x nào đó thuộc khoảng (a, b) thì hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ độc lập tuyến tính trên (a, b).

Định lý 2

Hệ quả

Nếu $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)] \neq 0$ tại x nào đó thuộc khoảng (a, b) thì hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ độc lập tuyến tính trên (a, b).

Định lý 2

Định lý 2

Hệ quả

Nếu $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)] \neq 0$ tại x nào đó thuộc khoảng (a, b) thì hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ độc lập tuyến tính trên (a, b).

Định lý 2

Giả sử các hàm số $p_i(x), i = 1, \ldots, n$ liên tục trên (a, b). Khi đó n nghiệm $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ của phương trình thuần nhất (4) độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu định thức Wronski
$W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(n)] \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Định lý 2

Hệ quả

Nếu $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)] \neq 0$ tại x nào đó thuộc khoảng (a, b) thì hệ hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ độc lập tuyến tính trên (a, b).

Định lý 2

Giả sử các hàm số $p_i(x), i = 1, \ldots, n$ liên tục trên (a, b). Khi đó n nghiệm $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ của phương trình thuần nhất (4) độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu định thức Wronski $W[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(n)] \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Chứng minh.

Xem tài liệu □

Hệ nghiệm cơ bản

Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa hệ nghiệm cơ bản

Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa hệ nghiệm cơ bản

Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

Định lý sự tồn tại hệ nghiệm cơ bản

Phương trình (4) với các hệ số $p_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ liên tục trên khoảng (a, b) có vô số hệ nghiệm cơ bản.

Hệ nghiệm cơ bản

Định nghĩa hệ nghiệm cơ bản

Hệ n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n được gọi là hệ nghiệm cơ bản của nó.

Định lý sự tồn tại hệ nghiệm cơ bản

Phương trình (4) với các hệ số $p_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ liên tục trên khoảng (a, b) có vô số hệ nghiệm cơ bản.

Chứng minh.

Xem tài liệu □

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý nghiệm tổng quát

Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình (4) . Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (4) là

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

trong đó $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các hằng số.

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý nghiệm tổng quát

Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình (4) . Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (4) là

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

trong đó $C_1, C_2, \cdots, C_n$ là các hằng số.

Chứng minh.

Xem tài liệu □

Ví dụ: Phương trình $y'' + y = 0$ có hai nghiệm là cơ bản $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Định lý

Định lý

Định lý

Nếu ta có $n+1$ nghiệm riêng $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$ của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n thì các nghiệm đó phụ thuộc tuyến tính.

Định lý

Định lý

Nếu ta có $n+1$ nghiệm riêng $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$ của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp n thì các nghiệm đó phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh.

Xem tài liệu □

Công thức Ostrogradski - Liouville

Công thức Ostrogradski - Liouville

Do việc giải phương trình (4) trong trường hợp tổng quát không thực hiện được nên tìm biểu thức của định thức Wronski của n nghiệm của phương trình (4) là điều không thể làm được. Tuy vậy Ostrogradski - Liouville đã tìm ra biểu thức của định thức Wronski của n nghiệm của phương trình (4) mà không cần giải nó. Công thức như sau

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \quad C = const$$

hay

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)dx}$$

trong đó $p_1(x)$ là hệ số của $y^{(n-1)}$, $W(x_0)$ là giá trị của định thức Wronski tại $x_0 \in (a, b)$ nào đó.

Áp dụng công thức Ostrogradski - Liouville

Áp dụng công thức Ostrogradski - Liouville

Áp dụng công thức Ostrogradski - Liouville để tìm nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

khi biết một nghiệm riêng của nó là $y_1(x)$.

Gọi $y(x)$ là nghiệm bất kỳ của phương trình khác $y_1(x)$. Khi đó theo công thức Ostrogradski - Liouville ta có

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow y_1 y' - y_1' y = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Chia hai vế của phương trình cho $y_1^2(x)$ ta được

$$\frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} C_1 e^{-\int p(x)dx} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

Áp dụng công thức Ostrogradski - Liouville

Áp dụng công thức Ostrogradski - Liouville

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = y_1\left(\int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2\right)$$

Từ công thức nghiệm tổng quát ta suy ra nghiệm riêng thứ 2 của phương trình độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ là $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$

Áp dụng công thức Ostrogradski - Liouville

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = y_1\left(\int \frac{C_1 e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2\right)$$

Từ công thức nghiệm tổng quát ta suy ra nghiệm riêng thứ 2 của phương trình độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ là $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, biết nó có một nghiệm riêng là $y_1 = x$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình (3)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \text{ hay } L_n[y] = f(x)$$

Phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng (4) là

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \text{ hay } L_n[y] = 0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình (3)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \text{ hay } L_n[y] = f(x)$$

Phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng (4) là

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \text{ hay } L_n[y] = 0$$

Dựa vào tính chất của toán tử ta có tính chất nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Xét phương trình (3)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x) \text{ hay } L_n[y] = f(x)$$

Phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng (4) là

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \text{ hay } L_n[y] = 0$$

Dựa vào tính chất của toán tử ta có tính chất nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Định lý

Giải sử y^* là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (3) và $\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (4). Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (3) là $y = \overline{y} + y^*$

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Chứng minh.

Ta có

$$L_n[y] = L_n[\overline{y} + y^*] = L_n[\overline{y}] + L_n[y^*] = 0 + f(x) = f(x), \forall C_k$$

□

Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất

Chứng minh.

Ta có

$$L_n[y] = L_n[\overline{y} + y^*] = L_n[\overline{y}] + L_n[y^*] = 0 + f(x) = f(x), \forall C_k$$

□

Từ hệ thức $y = \overline{y} + y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + y^* \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_k y_k = y - y^*$ ta có

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots C_n y_n = y - y^* \\ C_1 y_1' + C_2 y_2' + \cdots C_n y_n' = y' - y^{*\prime} \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \cdots C_n y_n^{(n-1)} = y^{(n-1)} - y^{*(n-1)} \end{cases}$$

giải ra ta luôn tìm được $C_k\,(k = 1, \ldots, n)$ (vì W $\neq 0$)

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Ví dụ: Cho phương trình $y'' + 4y = e^x$ Dễ thấy phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 4y = 0$ có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x$. Một nghiệm riêng của phương trình ban đầu là $y^* = \frac{1}{5}e^x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x$$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Ví dụ: Cho phương trình $y'' + 4y = e^x$ Dễ thấy phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 4y = 0$ có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x$. Một nghiệm riêng của phương trình ban đầu là $y^* = \frac{1}{5}e^x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x$$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Ví dụ: Cho phương trình $y'' + 4y = e^x$ Dễ thấy phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 4y = 0$ có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x$. Một nghiệm riêng của phương trình ban đầu là $y^* = \frac{1}{5}e^x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x$$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ lần lượt là các nghiệm riêng của các phương trình không thuần nhất $L_n[y] = f_1(x), L_n[y] = f_2(x)$ thì $y = y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Ví dụ: Cho phương trình $y'' + 4y = e^x$ Dễ thấy phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 4y = 0$ có hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính là $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x$. Một nghiệm riêng của phương trình ban đầu là $y^* = \frac{1}{5}e^x$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5}e^x$$

Nguyên lý chồng chất nghiệm

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ lần lượt là các nghiệm riêng của các phương trình không thuần nhất $L_n[y] = f_1(x), L_n[y] = f_2(x)$ thì $y = y_1(x) + y_2(x)$ là nghiệm riêng của phương trình $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$

Chứng minh.

Thật vậy, ta có $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$ □

Ví dụ

Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = x + \cos 3x$ biết nghiệm riêng của các phương trình $y'' + y = x$ và $y'' + y = \cos 3x$ lần lượt là $y_1 = x, y_2 = -\frac{1}{8}\cos 3x$.

Ví dụ

Tìm nghiệm riêng của phương trình $y'' + y = x + \cos 3x$ biết nghiệm riêng của các phương trình $y'' + y = x$ và $y'' + y = \cos 3x$ lần lượt là $y_1 = x, y_2 = -\frac{1}{8}\cos 3x$.

Áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm ta có nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y = x - \frac{1}{8}\cos 3x$

Phương pháp biến thiên hằng số (Phương pháp Lagrange)

Phương pháp biến thiên hằng số (Phương pháp Lagrange)

Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (4) . Ta tìm nghiệm riêng y^* của phương trình (3) có dạng

$$y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n(x)\, y_n(x) \tag{6}$$

và tìm cách chọn các hàm $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ sao cho y^* là nghiệm

Phương pháp biến thiên hằng số (Phương pháp Lagrange)

Giả sử $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (4) . Ta tìm nghiệm riêng y^* của phương trình (3) có dạng

$$y^* = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \cdots + C_n(x) y_n(x) \tag{6}$$

và tìm cách chọn các hàm $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ sao cho y^* là nghiệm

Ở đây có n hàm phải tìm và liên hệ với nhau bởi biểu thức (6). Do đó ta có thể chọn $n-1$ hệ thức còn lại bất kỳ để xác định được $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$. *Bài toàn đặt ra là chọn các biểu thức đó như thế nào?* Lấy đạo hàm hai vế của (6) ta được

$$y^{*'} = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + \cdots + C_n(x) y_n'(x) +$$
$$+ C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \cdots + C_n'(x) y_n(x)$$

Phương pháp biến thiên hằng số

Chọn $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ sao cho

$$C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) + \cdots + C_n'(x)\,y_n(x) = 0 \qquad (7)$$

Khi đó

$$y^{*''} = C_1(x)\,y_1''(x) + C_2(x)\,y_2''(x) + \cdots + C_n(x)\,y_n''(x) +$$
$$+C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)\,y_n'(x)$$

Chọn $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ sao cho

$$C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)\,y_n'(x) = 0 \qquad (8)$$

Phương pháp biến thiên hằng số

Tiếp tục quá trình này sau $n-1$ bước ta được

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) + \cdots + C_n'(x)\,y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)\,y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

và các đạo hàm của y^* trở thành

$$y^{*'} = C_1(x)\,y_1'(x) + C_2(x)\,y_2'(x) + \cdots + C_n(x)\,y_n'(x)$$
$$y^{*''} = C_1(x)\,y_1''(x) + C_2(x)\,y_2''(x) + \cdots + C_n(x)\,y_n''(x)$$
$$\vdots$$
$$y^{*(n-1)} = C_1(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x)\,y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)\,y_n^{(n-1)}(x)$$

Phương pháp biến thiên hằng số

do đó

$$y^{*(n)} = C_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + C_2(x)\, y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)\, y_n^{(n)}(x) + \\ + C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x)$$

Thay $y^*, y^{*'}, y^{*''}, \cdots, y^{*n}$ vào phương trình (3) ta được

$$C_1(x)\left[y_1^{(n)}(x) + p_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\, y_1(x)\right] + \\ + C_2(x)\left[y_1^{(n)}(x) + p_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\, y_1(x)\right] + \cdots + \\ + C_n(x)\left[y_1^{(n)}(x) + p_1(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x)\, y_1(x)\right] + \\ + C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$$

Phương pháp biến thiên hằng số

Vì $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất (4) nên ta có

$$C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \quad (10)$$

Kết hợp ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \quad (11)$$

Phương pháp biến thiên hằng số

Do $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính nên định thức Wronski của hệ (10) khác 0, vì vậy từ hệ (10) ta xác định được duy nhất $C_1'(x), C_2'(x), \cdots, C_n'(x)$ từ đó xác định được $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ suy ra y^* và nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất.

Phương pháp biến thiên hằng số

Do $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính nên định thức Wronski của hệ (10) khác 0, vì vậy từ hệ (10) ta xác định được duy nhất $C_1'(x), C_2'(x), \cdots, C_n'(x)$ từ đó xác định được $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)$ suy ra y^* và nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất.

Chú ý: Nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp n là $y = \overline{y}(x) + y^*(x)$ gồm hai thành phần;

- $\overline{y}(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng.
- $y^*(x)$ là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất .

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số với $n = 2$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{12}$$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số với $n = 2$

Áp dụng phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{12}$$

Giả sử $y_1(x), y_2(x)$ là các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ trên khoảng I. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (12) có dạng

$$y^* = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) \tag{13}$$

trong đó $C_1(x), C_2(x)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta tìm được $C_1'(x), C_2'(x)$ từ đó suy ra $C_1(x), C_2(x)$, thay vào (13) ta được nghiệm riêng y^* của phương trình (12)

Ví dụ:

Ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $xy'' - y' = x^2$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_1 = 1$

Ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $xy'' - y' = x^2$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_1 = 1$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ biết một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng là $y_1 = \cos x$

Phương trình thuần nhất

Phương trình thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n với hệ số hằng là phương trình vi phân có dạng

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{14}$$

trong đó a_i $(i = 1, \ldots, n)$ là các hằng số thực và $f(x)$ liên tục trên (a, b). Nếu $f(x) = 0$ khi đó phương trình (14) có dạng

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \text{ hay } L_n^*[y] = 0 \tag{15}$$

và được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng.

Phương trình thuần nhất

Phương trình vi phân tuyến tính cấp n với hệ số hằng là phương trình vi phân có dạng

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{14}$$

trong đó a_i $(i = 1, \ldots, n)$ là các hằng số thực và $f(x)$ liên tục trên (a, b). Nếu $f(x) = 0$ khi đó phương trình (14) có dạng

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \text{ hay } L_n^*[y] = 0 \tag{15}$$

và được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng.

Phương trình thuần nhất

Phương trình thuần nhất

Ta tìm nghiệm của phương trình thuần nhất (15) có dạng $y = e^{kx}$ với k là hằng số phải tìm.
Thực vậy, ta có $y^{'} = ke^{kx}, y^{''} = k^2e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^ne^{kx}$, thay $y, y^{'}, \ldots, y^n$ vào (15) ta được

$$L_n^* \left[e^{kx}\right] = e^{kx}\left(k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_n\right)$$

Ký hiệu

$$F(k) = k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_n \tag{16}$$

được gọi là **đa thức đặc trưng** của phương trình (15).
Do $e^{kx} \neq 0$ nên $y = e^{kx}$ là nghiệm của phương trình (15) khi và chỉ khi $F(k) = 0$ hay

$$k^n + a_1k^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{17}$$

và được gọi là **phương trình đặc trưng** của phương trình (15).

Phương trình thuần nhất

Khi đó có thể xẩy ra các trường hợp sau

- Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm thực khác nhau.
- Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm khác nhau trong đó có nghiệm phức.
- Phương trình đặc trưng (17) có nghiệm bội.

Phương trình đặc trưng có n nghiệm thực khác nhau

Phương trình đặc trưng có n nghiệm thực khác nhau

Giả sử phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm thực khác nhau $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Khi đó các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (15) là $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (15) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$$

Phương trình đặc trưng có n nghiệm thực khác nhau

Giả sử phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm thực khác nhau $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Khi đó các nghiệm riêng độc lập tuyến tính của phương trình (15) là $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_n = e^{k_n x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (15) là

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}$$

Ví dụ: Giải phương trình $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm khác nhau trong đó có nghiệm phức

Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm khác nhau trong đó có nghiệm phức

Bổ đề

Nếu phương trình (15) có nghiệm phức $y(x) = u(x) + iv(x)$ thì các phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ là nghiệm thực của phương trình (15)

Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm khác nhau trong đó có nghiệm phức

Bổ đề

Nếu phương trình (15) có nghiệm phức $y(x) = u(x) + iv(x)$ thì các phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ là nghiệm thực của phương trình (15)

Chứng minh.

Thật vậy, theo tính chất của toán tử ta có

$$L[y(x)] = L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L[u(x)] = 0 \\ L[v(x)] = 0 \end{cases}$$

□

Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm khác nhau trong đó có nghiệm phức

Giả sử phương trình đặc trưng (17) có 2 nghiệm phức liên hợp $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$. Khi đó ta có hai nghiệm phức của (15) là $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$. Theo công thức Euler ta có

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x\right), e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x\right)$$

Áp dụng bổ đề trên ta có phần thực $e^{\alpha x}\cos\beta x$, phần ảo là $e^{\alpha x}\sin\beta x$ là hai nghiệm thực độc lập tuyến tính.

Vậy với mỗi cặp nghiệm phức liên hợp $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ ta xây dựng được hai nghiệm riêng thực độc lập tuyến tính của phương trình (15) là $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Kết hợp chúng với các nghiệm thực khác ta xây dựng được hệ nghiệm cơ bản, từ đó suy ra nghiệm tổng quát.

Phương trình đặc trưng (17) có n nghiệm khác nhau trong đó có nghiệm phức

Giả sử phương trình đặc trưng (17) có 2 nghiệm phức liên hợp $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$. Khi đó ta có hai nghiệm phức của (15) là $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}$. Theo công thức Euler ta có

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x\right), e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x\right)$$

Áp dụng bổ đề trên ta có phần thực $e^{\alpha x}\cos\beta x$, phần ảo là $e^{\alpha x}\sin\beta x$ là hai nghiệm thực độc lập tuyến tính.

Vậy với mỗi cặp nghiệm phức liên hợp $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ ta xây dựng được hai nghiệm riêng thực độc lập tuyến tính của phương trình (15) là $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Kết hợp chúng với các nghiệm thực khác ta xây dựng được hệ nghiệm cơ bản, từ đó suy ra nghiệm tổng quát.

Ví dụ: Giải phương trình $-y''' + 3y'' - 9y' - 13y = 0$

Phương trình đặc trưng (17) có nghiệm bội

Nếu phương trình đặc trưng (17) có nghiệm thực $k = k_i$ bội m thì phương trình thuần nhất (15) có m nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = xe^{k_1 x}, y_3 = x^2 e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$$

Nếu phương trình đặc trưng (17) có nghiệm phức $k_1 = \alpha + i\beta$ bội m thì $k_j = \alpha - i\beta$ cũng là nghiệm phức bội m của phương trình (17). Khi đó ta có $2m$ nghiệm riêng của trình thuần nhất (15) độc lập tuyến tính là

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Phương trình đặc trưng (17) có nghiệm bội

Nếu phương trình đặc trưng (17) có nghiệm thực $k = k_i$ bội m thì phương trình thuần nhất (15) có m nghiệm riêng độc lập tuyến tính là

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = xe^{k_1 x}, y_3 = x^2 e^{k_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{k_1 x}$$

Nếu phương trình đặc trưng (17) có nghiệm phức $k_1 = \alpha + i\beta$ bội m thì $k_j = \alpha - i\beta$ cũng là nghiệm phức bội m của phương trình (17). Khi đó ta có $2m$ nghiệm riêng của trình thuần nhất (15) độc lập tuyến tính là

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình sau

- $y^{'''} - 7y^{''} + 16y^{'} - 12y = 0$
- $y^{(4)} - 4y^{'''} + 5y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0$
- $y^{(4)} - 4y^{'''} + 8y^{''} - 8y^{'} + 4y = 0$

Phương trình tuyến tinh không thuần nhất với hệ số hằng

Phương trình tuyến tinh không thuần nhất với hệ số hằng

Xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp n với hệ số hằng

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{18}$$

trong đó $a_i\,(i = 1, \ldots, n)$ là các hằng số thực và $f(x)$ liên tục trên (a, b).

Phương trình tuyến tinh không thuần nhất với hệ số hằng

Xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất cấp n với hệ số hằng

$$L_n^*[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{18}$$

trong đó a_i $(i = 1, \ldots, n)$ là các hằng số thực và $f(x)$ liên tục trên (a, b).

Để giải phương trình vi phân này ta có thể dùng phương pháp tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, sau đó áp dụng phương pháp biến thiên hằng số (như ở bài trước) tìm nghiệm riêng $y^*(x)$ của phương trình không thuần nhất (18), từ đó suy ra nghiệm tổng quát của nó . Tuy nhiên trong khi áp dụng phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng của phương trình (18) nhiều lúc ta đi đến những tính toán phức tạp. Trong trường hợp hàm $f(x)$ có những dạng đặc biệt ta có thể sử dụng phương pháp hệ số bất định sau đây để tìm nghiệm riêng của phương trình (18) một cách đơn giản hơn

Trường hợp 1: Hàm $f(x)$ có dạng đa thức bậc m nhân với hàm mũ

Trường hợp hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, trong đó $P_m(x)$ là đa thức bậc m. Khi đó phương trình không thuần nhất (18) có dạng $L_n^*[y] = e^{\alpha x} P_m(x)$. Xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm $f(x)$ có dạng đa thức bậc m nhân với hàm mũ

Trường hợp hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, trong đó $P_m(x)$ là đa thức bậc m. Khi đó phương trình không thuần nhất (18) có dạng $L_n^*[y] = e^{\alpha x} P_m(x)$. Xét các trường hợp sau

- α **không** là nghiệm của phương trình đặc trưng (17). Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (18) có dạng $y^*(x) = e^{\alpha x} Q_m(x)$, trong đó $Q_m(x)$ là đa thức cùng bậc với $P_m(x)$ (bậc m) có hệ số tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.

Trường hợp 1: Hàm $f(x)$ có dạng đa thức bậc m nhân với hàm mũ

Trường hợp hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, trong đó $P_m(x)$ là đa thức bậc m. Khi đó phương trình không thuần nhất (18) có dạng $L_n^*[y] = e^{\alpha x} P_m(x)$. Xét các trường hợp sau

- α **không** là nghiệm của phương trình đặc trưng (17). Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (18) có dạng $y^*(x) = e^{\alpha x} Q_m(x)$, trong đó $Q_m(x)$ là đa thức cùng bậc với $P_m(x)$ (bậc m) có hệ số tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.
- α là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng (17). Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (18) có dạng $y^*(x) = x^s e^{\alpha x} Q_m(x)$, trong đó $Q_m(x)$ là đa thức cùng bậc với $P_m(x)$ (bậc m) có hệ số tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình

1. $y'' - y = (2x+1)e^{2x}$
2. $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x$
3. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

Trường hợp 2: Hàm $f(x)$ có chứa hàm số lượng giác

Trường hợp hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = e^{\alpha x}[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x]$, trong đó $P_r(x), Q_s(x)$ lần lượt là các đa thức bậc r, s. Khi đó phương trình không thuần nhất (18) có dạng $L_n^*[y] = e^{\alpha x}[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x]$.

Trường hợp 2: Hàm $f(x)$ có chứa hàm số lượng giác

Trường hợp hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = e^{\alpha x}[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x]$, trong đó $P_r(x), Q_s(x)$ lần lượt là các đa thức bậc r, s. Khi đó phương trình không thuần nhất (18) có dạng $L_n^*[y] = e^{\alpha x}[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x]$.

- $\alpha + i\beta$ **không** là nghiệm của phương trình đặc trưng (17). Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (18) có dạng $y^* = e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + H_m(x)\sin\beta x]$, trong đó $R_m(x), H_m(x)$ là đa thức có bậc bằng $m = \max\{r, s\}$ có hệ số tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.

Trường hợp 2: Hàm $f(x)$ có chứa hàm số lượng giác

Trường hợp hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = e^{\alpha x}[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x]$, trong đó $P_r(x), Q_s(x)$ lần lượt là các đa thức bậc r, s. Khi đó phương trình không thuần nhất (18) có dạng $L_n^*[y] = e^{\alpha x}[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x]$.

- $\alpha + i\beta$ **không** là nghiệm của phương trình đặc trưng (17). Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (18) có dạng $y^* = e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + H_m(x)\sin\beta x]$, trong đó $R_m(x), H_m(x)$ là đa thức có bậc bằng $m = \max\{r, s\}$ có hệ số tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.
- $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội t của phương trình đặc trưng (17). Khi đó ta tìm nghiệm riêng của phương trình (18) có dạng $y^* = x^t e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x + H_m(x)\sin\beta x]$, trong đó $R_m(x), H_m(x)$ là đa thức có bậc bằng $m = \max\{r, s\}$ có hệ số tìm được bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của các phương trình

1. $y'' + y' + y = e^x(\cos x - 7\sin x)$
2. $y'' + y = 2\sin x$

Chú ý

Trong trường hợp hàm $f(x)$ không có các dạng đặc biệt trên, nhưng có thể viết $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ trong đó $f_1(x), f_2(x)$ là các dạng đặc biệt trên thì ta áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm để tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, tức là ta tìm các nghiêng $y_1^*(x)$ của phương trình $L_n^*[y] = f_1(x)$ và tìm nghiệm riêng $y_2^*(x)$ của phương trình $L_n^*[y] = f_2(x)$. Khi đó nghiệm riêng của phương trình $L_n^*[y] = f_1(x) + f_2(x)$ là $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$

Chú ý

Trong trường hợp hàm $f(x)$ không có các dạng đặc biệt trên, nhưng có thể viết $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ trong đó $f_1(x), f_2(x)$ là các dạng đặc biệt trên thì ta áp dụng nguyên lý chồng chất nghiệm để tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, tức là ta tìm các nghiêng $y_1^*(x)$ của phương trình $L_n^*[y] = f_1(x)$ và tìm nghiệm riêng $y_2^*(x)$ của phương trình $L_n^*[y] = f_2(x)$. Khi đó nghiệm riêng của phương trình $L_n^*[y] = f_1(x) + f_2(x)$ là $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$

Ví dụ: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - y' = 5e^x - \sin 2x$