Đại học Quốc gia TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
Khoa: Khoa Học Ứng Dụng
Bộ môn: Toán Ứng Dụng

TOÁN 2

CHƯƠNG 2 :

MA TRẬN

NỘI DUNG :

I/ LÝ THUYẾT :

1. Một số định nghĩa.
2. Các phép toán trên ma trận.

II/ BÀI TẬP :

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN :

I/ LÝ THUYẾT

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

1. Một số định nghĩa :

a/ Một ma trận A cỡ $m \times n$ trên trường K (K là thực hay phức) là một bảng chữ nhật gồm m hàng, n cột có dạng sau:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Người ta thường ký hiệu $A_{m \times n} = \left(a_{ij} \right)$

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Ở đây :

Các số $a_{ij}\left(i=1,\ 2,\ \ \ \ \ \ ,\ m\ ;\ j=1,\ 2\ ,\ \ \ \ \ \ ,\ n\right)$

là các phần tử nằm ở hàng thứ i, cột thứ j của ma trận A.

b/ Tập hợp các ma trận A cỡ $m \times n$ trên trường K được ký hiệu là $M_{m \times n}(K)$

c/ Ma trận không là ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

d/ $A_{n\,x\,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận cột.

e/ $A_{1\,x\,n} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & & x_n \end{pmatrix}$ được gọi là ma trận hàng.

f/ Nếu $m = n$ thì A được gọi là ma trận vuông.

<u>Ký hiệu</u> : $M_n(K)$ là tập hợp các ma trận vuông cỡ $n\,x\,n$, gọi chung là tập hợp các ma trận vuông cấp n.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

g/ Ma trận

$$A_{n\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n\,n} \end{pmatrix}$$

$$\left(a_{i\,j} = 0 \quad \forall i \quad j \qquad i\,,j \quad = 1, 2, \qquad , n \right)$$

được gọi là ma trận chéo.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

h/ Ma trận

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = 1 \quad \forall i = j \quad , \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i \quad j \\ i, j = 1, 2, \quad , n \end{cases}$$

được gọi là ma trận đơn vị cấp n.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

i/ Ma trận

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận tam giác trên.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

Ma trận $A_{n\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n\,n} \end{pmatrix}$

được gọi là ma trận tam giác dưới.

1. MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

j/ Ma trận $-A = \left(-a_{ij}\right)$ được gọi là ma trận đối của A.

k/ Ma trận $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)$ được gọi là ma trận liên hợp của A.

Nếu A $M_{m\,x\,n}(\mathbf{R})$ thì $A = \overline{A}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

2. Các phép toán trên ma trận :

a/ Ma trận bằng nhau :

Cho hai ma trận cùng cỡ $m \times n$

là $A_{m \times n} = \left(a_{ij}\right)$ và $B_{m \times n} = \left(b_{ij}\right)$

Ta nói :

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

b/ Ma trận chuyển vị :

Cho ma trận $A_{m \times n} = \left(a_{ij}\right)$

Ta gọi ma trận A^T là ma trận chuyển vị

của ma trận A nếu như $A^T = \left(a_{ji}\right)$

Như vậy ma trận A^T có cấp $n \times m$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Nếu $A_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$

thì $A^T_{n\,x\,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$

Ta dễ dàng nhận thấy $\left(A^T\right)^T = A$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Cho ma trận $A \quad M_n(K)$. Khi đó :

* Nếu $A^T = A$, tức là $a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ thì A được gọi là ma trận đối xứng.

* Nếu $A^T = -A$, tức là $a_{ij} = -a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ thì A được gọi là ma trận phản đối xứng.

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

c/ Nhân ma trận với một số :

Cho ma trận $A_{m\,x\,n} = \left(a_{i\,j}\right)$

Ta có : $\alpha . A_{m\,x\,n} = B_{m\,x\,n}$

với $b_{i\,j} = \alpha . a_{i\,j} \quad \forall i = 1,\ 2,\ \ \ \ ,\ m$

i $\qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,\ 2,\ \ \ \ ,\ n$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Dễ dàng nhận thấy :

* $1.A = A$
* $(-1).A = -A$
* $0.A = 0$, $\forall$ ma trận A
* $\alpha . 0 = 0$, $\forall \alpha \quad K$
* $\alpha(\beta.A) = (\alpha\beta)A$, $\forall \alpha, \beta \quad K$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

d/ Cộng hai ma trận :

Cho 2 ma trận cùng cỡ $m \times n$ là

$$A_{m \times n} = \left(a_{ij}\right) \quad \text{và} \quad B_{m \times n} = \left(b_{ij}\right)$$

Ta có : $A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$

với $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$

$j = 1, 2, \ldots, n$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Dễ thấy rằng với các ma trận cùng cỡ thì

* $A + B = B + A$
* $A + (B + C) = (A + B) + C$
* $\alpha(A + B) = \alpha.A + \alpha.B\ , \quad \forall \alpha \in K$
* $(\alpha + \beta)A = \alpha.A + \beta.A\ , \quad \forall \alpha, \beta \in K$
* $A + 0 = 0 + A = A$
* $(\alpha.A + \beta.B)^T = \alpha.A^T + \beta.B^T$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Ví dụ 1 :

Cho $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Tính $3A + 2B$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

Ta có :

$$3A+2B = 3.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 12 & 18 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 11 & 15 \\ 12 & 20 & 15 \end{pmatrix}$$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

d/ Nhân hai ma trận :

Cho 2 ma trận $A_{m\,x\,n} = \left(a_{i\,j}\right)$, $B_{n\,x\,p} = \left(b_{i\,j}\right)$

$$A_{m\,x\,n} \,.\, B_{n\,x\,p} = C_{m\,x\,p}$$

Ở đây : $C_{m\,x\,p} = \left(C_{i\,j}\right)$

với $C_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} . b_{k\,j}$, $i = 1, 2, \quad , m$

$j = 1, 2, \quad , p$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 2 :** Cho $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Tính $A.B$ và $B.A$

Ta có : $A.B = C_{2x2} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$

$B.A = D_{2x2} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 3 :** Cho $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Tính $A.B$ và $B.A$

Ta có : $A.B = C_{2x3} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 15 \\ 7 & 22 & 33 \end{pmatrix}$

$B.A$ không tồn tại

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **Nhận xét :**

* Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

* Nếu $A.B = B.A$ ta nói tích hai ma trận có tính giao hoán.

* Nếu A và I là hai ma trận vuông cấp n

  thì $A.I = I.A = A$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* Phép nhân ma trận có tính chất sau :

  * $(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$

  * $A.(B + C) = A.B + A.C$

  * $(B + C).A = B.A + C.A$

  * $(A.B)^T = B^T.A^T$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* Từ phép nhân ma trận ta có thể định nghĩa lũy thừa của một ma trận vuông như sau:

Cho $A \quad M_n(K)$. Ta định nghĩa :

* $A^0_{n\,x\,n} = I_{n\,x\,n}$
* $A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k\ lan}$
* $A^p.A^q = A^{p+q} \quad , \quad p,\ q \quad N$
* $\left(A^p\right)^q = A^{p.q}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 4 :** Cho ma trận $A_{2x2} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Tính A^n với $n = 2, 3,$

Ta có :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng quy nạp được $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n.a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

* **VD 5 :**

Cho $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Tính $f(A)$

với $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$

2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

<u>Ta có</u> : $f(A) = A^3 - 3A^2 + 4A + 2I$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^3 - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 + 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 18 & -13 \end{pmatrix}$$

II/ BÀI TẬP

II/ BÀI TẬP MA TRẬN

BÀI 1 : Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$

Tính AB và BA.

BÀI 2 : Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n

BÀI 3 : Cho $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Tính A^2, A^3, A^{2n}, A^{2n+1}

II/ BÀI TẬP MA TRẬN

BÀI 4 : Cho A và B là hai ma trận đối xứng.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a/ $A.B$ và $B.A$ có phải là ma trận đối xứng.

b/ Có nhận xét gì về $A.B$ và $B.A$

II/ BÀI TẬP MA TRẬN

BÀI 5 : Giải các phương trình ma trận.

a/ $X.\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

b/ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X. \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 1 : $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ -2 & -2i \end{pmatrix}$

BÀI 2 : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

BÀI 3 : $A^n = A \quad , \quad \forall n = 1, 2, 3,$

III/ ĐÁP SỐ & HƯỚNG DẪN

BÀI 4 :

a/ $A.B$ và $B.A$ không phải là ma trận đối xứng

b/ $AB = (BA)^T$

BÀI 5 :

a/ $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

b/ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$