GS.TS. LÊU THỌ TRÌNH

CƠ HỌC KẾT CẤU

TẬP 2: HỆ SIÊU TĨNH

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

CHƯƠNG 5: TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

§1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH - BẬC SIÊU TĨNH

I. Hệ siêu tĩnh:

1. Định nghĩa: Hệ siêu tĩnh là những hệ mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ. Nói cách khác, đó là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

2. Ví dụ: Xét hệ trên hình (H.5.1a)

- Phần hệ BC là tĩnh định vì có thể xác định được ngay nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

- Phần hệ AB chưa thể xác định được phản lực chỉ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học (4 phản lực V_A, H_A, M_A, V_B nhưng chỉ có 3 phương trình) nên cũng chưa thể xác định được nội lực.

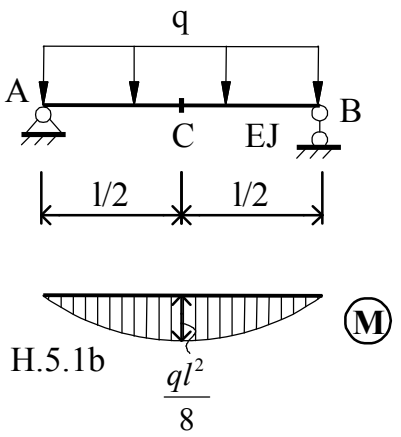
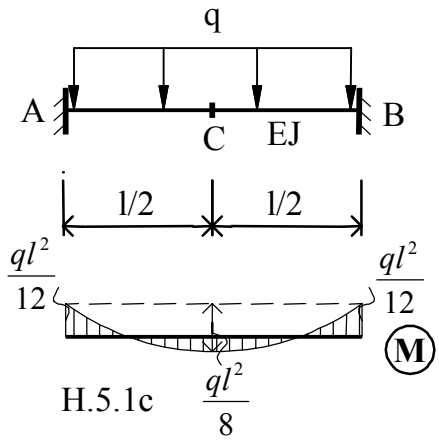
H.5.1a

Vậy theo định nghĩa, hệ đã cho là hệ siêu tĩnh.

II. Tính chất của hệ siêu tĩnh:

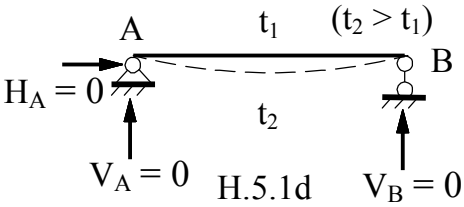
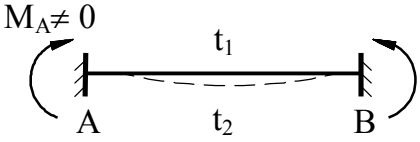
1. Tính chất 1:

Nội lực, biến dạng và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nói chung là nhỏ hơn so với hệ có cùng kích thước và tải trọng tác dụng.

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
 H.5.1b	 H.5.1c
$\lvert M\rvert_{max} = \frac{ql^2}{8}$, $y_{max} = y_C = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}$	$\lvert M\rvert_{max} = \frac{ql^2}{12}$, $y_{max} = y_C = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EJ}$

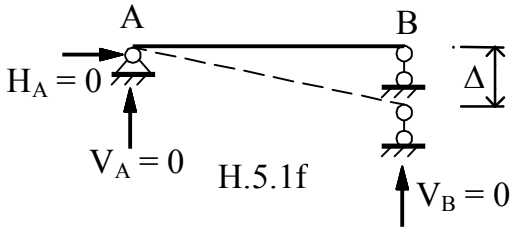
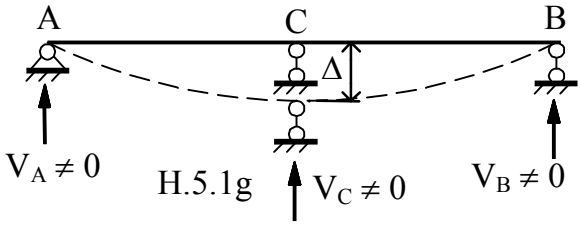
2. Tính chất 2: Trong hệ siêu tĩnh có xuất hiện nội lực do các nguyên nhân: biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và do chế tạo, lắp ráp không chính xác gây ra.

a. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
 H.5.1d	 H.5.1e $(t_2 > t_1)$

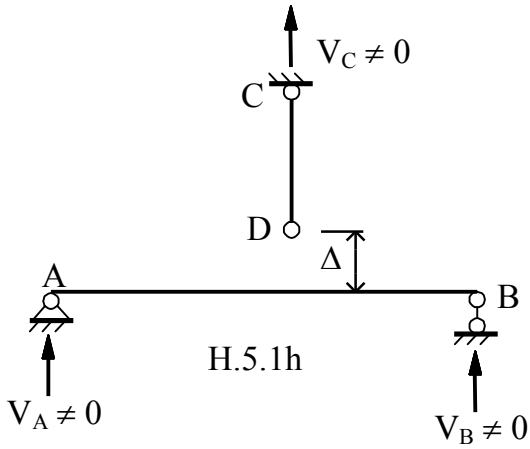
Các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B ngăn cản biến dạng của dầm nên làm xuất hiện phản lực và nội lực.

b. Nguyên nhân chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
	
Các liên kết không ngăn cản chuyển vị tại gối B nên dầm chỉ bị nghiên đi mà không biến dạng nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B có xu hướng ngăn cản chuyển vị tại gối C làm cho dầm bị uốn cong do đó làm xuất hiện phản lực và nội lực

c. Nguyên nhân chế tạo, lắp ráp không chính xác:(H.5.1h)

Dầm tĩnh định AB nếu được ráp thêm thanh CD vào sẽ trở thành hệ siêu tĩnh. Nếu thanh CD do chế tạo hụt 1 đoạn Δ thì khi ráp vào, nó sẽ bị kéo dãn ra đồng thời dầm AB sẽ bị uốn cong nên sẽ làm phát sinh phản lực và nội lực trong hệ.



3. Tính chất 3:

Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào độ cứng của các cấu kiện trong hệ (EJ, FF, GF…)

**Nhận xét:* Hệ siêu tĩnh chịu lực tốt hơn hệ tĩnh định.

III. Bậc siêu tĩnh:

1. Định nghĩa: Bậc siêu tĩnh là số các liên kết thừa tương đương với liên kết loại 1 ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình. Ký hiệu n

2. Cách xác định:

Có thể sử dụng các công thức liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và các liên kết giữa chúng trong phần cấu tạo hình học của hệ để xác định.

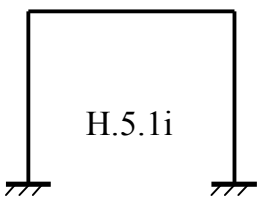
$n = T + 2K + 3H + C - 3D$ (Cho hệ bất kỳ có nối đất)

$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1)$ (Cho hệ bất kỳ không nối đất)

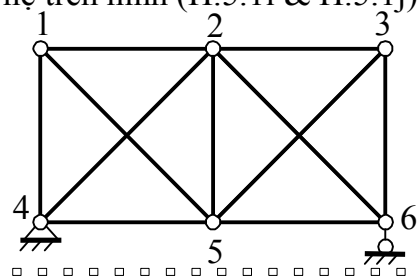
$n = D - 2M + C$ (Cho hệ dàn có nối đất)

$n = D - 2M + 3$ (Cho hệ dàn không nối đất)

Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của hệ trên hình (H.5.1i & H.5.1j)



H.5.1i

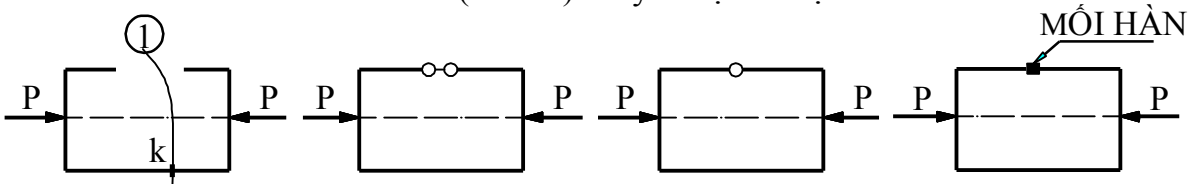


H.5.1j

- Hệ trên hình (H.5.1i) có n = 0 + 2.0 + 3.0 + 6 – 3.1 = 3
- Hệ trên hình (H.5.1j) có n = 11 – 2.6 + 3 = 2.

Cách phân tích các chu vi kín của hệ:

Xét 1 chu vi hở trên hình (H.5.1k). Đây là hệ tĩnh định.



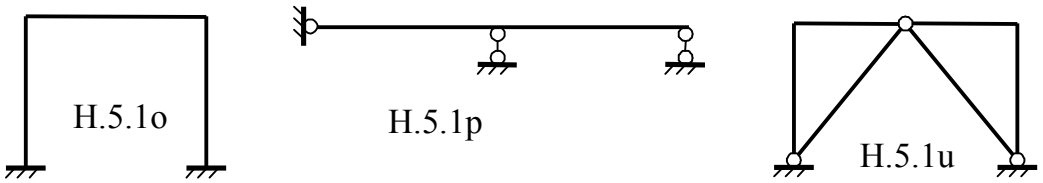
H.5.1k H.5.1l H.5.1m H.5.1n

- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết thanh (H.5.1l) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 1 (n = 1).
- Nếu nối chu đó bằng 1 liên kết khớp (H.5.1m) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 2 (n = 2)
- Nếu nối chu vi đó bằng một liên kết hàn (H.5.1n) thì hệ thu được có bậc siêu tĩnh bằng 3 (n = 3). Hệ lúc này còn được gọi là chu vi kín.

Phân tích ngược lại ta thấy 1chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng 3, nếu thêm vào 1 khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh sẽ giảm đi 1. Vậy nếu gọi V là số chu vi kín, K là số liên kết khớp đơn giản của hệ thì bậc siêu tĩnh của hệ được tính bằng công thức:

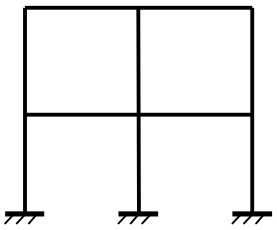
$$n = 3V - K \qquad (5\text{-}1)$$

Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của các hệ cho trên hình vẽ bên dưới.



H.5.1o H.5.1p H.5.1u

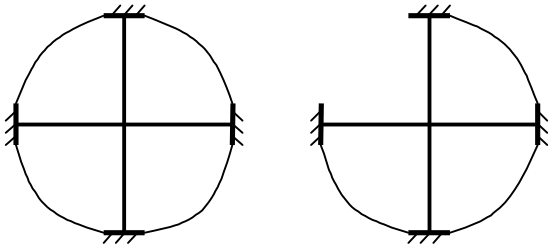
- Hệ trên hình (H.5.1o) có n = 3.1 – 0 = 3
- Hệ trên hình (H.5.1p) có n = 3.2 – 5 = 1
- Hệ trên hình (H.5.1u) có n = 3.3 – 7 = 2
- Hệ trên hình (H.5.1v) có n = 3.4 – 0 = 12



H.5.1v

Chú ý: Cần quan niệm trái đất là 1 chu vi hở (miếng cứng tĩnh định) trong biểu thức (5 - 1)

Nếu quan niệm hệ gồm 4 chu vi kín như trên hình vẽ (H.5.1x) thì bậc siêu tĩnh của hệ n = 12. Đây là quan niệm sai vì trái đất tạo thành 1 chu vi kín. Quan niệm hệ gồm 3 chu vi kín như trên hình (H.5.1y) là quan niệm đúng. Và n = 3.3 – 0 = 9



H.5.1x H.5.1y

§2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

I. Hệ cơ bản của phương pháp lực:

Hệ cơ bản của phương pháp lực là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách loại bỏ một số hay tất cả các liên kết thừa.

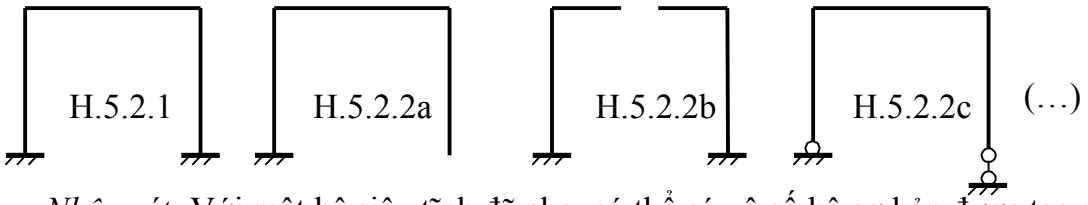
+ Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản sẽ là hệ tĩnh định. (thường sử dụng cách này)

+ Nếu loại bỏ một số các liên kết thừa thì hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản phải là hệ bất biến hình và nên thuận tiện cho việc tính tính toán.

Ví dụ: Lập hệ cơ bản phương pháp lực của hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.1)

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh n = 3. Với hệ cơ bản là tĩnh định có thể được tạo như trên các hình (H.5.2.2abc)

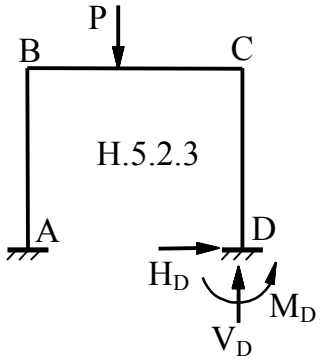
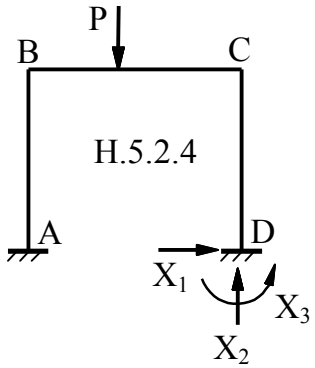


Nhận xét: Với một hệ siêu tĩnh đã cho, có thể có vô số hệ cơ bản được tạo ra.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực:

Khi tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính hệ cơ bản của nó. Tuy nhiên, hệ cơ bản và hệ ban đầu là có sự khác nhau. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu của nó ta cần so sánh và bổ sung thêm các điều kiện.

Ta đi so sánh hệ siêu tĩnh (H5.2.3) và hệ cơ bản của nó (H5.2.4)

Hệ siêu tĩnh	Hệ cơ bản
	
-Tại D tồn tại các phản lực $\{V_D, H_D, M_D\}$. -Tại D không tồn tại chuyển vị	-Tại D không tồn tại phản lực -Tại D nói chung là tồn tại chuyển vị $\{\Delta x_D, \Delta y_D, \Delta\varphi_D\}$

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm vào D các lực (X_1, X_2, X_3) tương đương thay thế (H_D, V_D, M_D).

+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tại D do (X_1, X_2, X_3, P) gây ra bằng không:

$$\begin{cases} \Delta x_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \\ \Delta y_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \\ \Delta\varphi_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \end{cases}$$

Tổng quát: Cho hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng (P), biến thiên nhiệt độ (t), chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa (Z) và chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ n liên kết thừa. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm các lực ($X_1, X_2, ..., X_n$) tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ, có chiều tùy ý. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số.

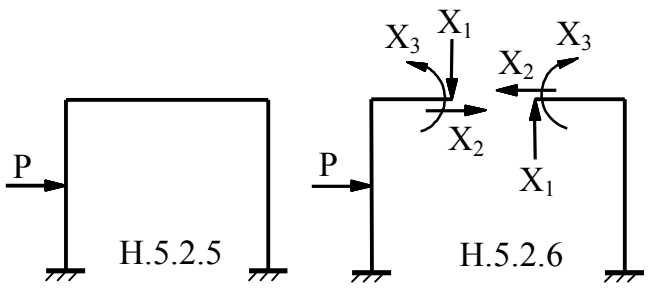
+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ do các nguyên nhân ($X_1, X_2 ..... X_n$, P, t, Z) = 0 (chính xác hơn là bằng như trên hệ siêu tĩnh ban đầu). Điều kiện này có thể viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, ...X_n, P, t, Z) = 0 \\ \Delta X_2(X_1, X_2, ...X_n, P, t, Z) = 0 \\ ..... \\ \Delta X_n(X_1, X_2, ...X_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \qquad (5\text{-}2)$$

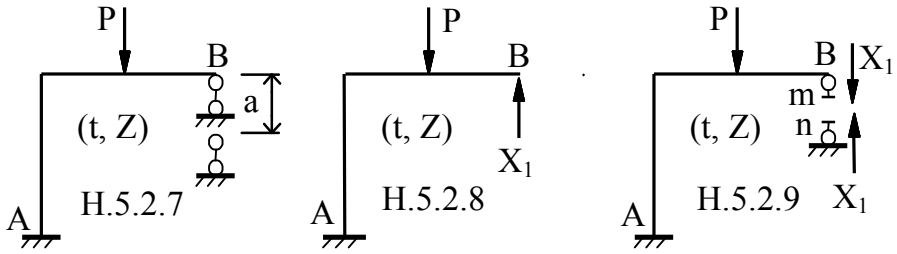
Hệ (5-2) gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực.

**Chú ý:*

- Nếu tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng thì trên hệ cơ bản phải đặt vào những cặp lực lực trực đối nhau tại các liên kết bị loại bỏ và điều kiện chuyển vị chính là chuyển vị tương đối giữa 2 tiết diện 2 bên liên kết bị loại bỏ bằng không. Ví dụ hệ cơ bản (H.5.2.6) của hệ trên hình (H.5.2.5)



- Trường hợp liên kết trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức và khi tạo hệ cơ bản ta loại bỏ liên kết này. Ví dụ xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.7) và hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.2.8).



Lúc này chuyển vị tại B theo phương X_1 sẽ bằng chuyển vị cưỡng bức. Hệ phương trình cơ bản sẽ là:

$$\Delta X_1(X_1, P, t, Z) = -a.$$

Lấy dấu âm trước a khi X_1 ngược chiều chuyển vị cưỡng bức.

- Cũng trong trường hợp chuyển vị cưỡng bức nhưng nếu tạo hệ cơ bản bằng cách bỏ liên kết này, ví dụ hệ cơ bản tạo trên hình (H.5.2.9).

Có thể xem đây là trường hợp loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng nên trên hệ cơ bản ta đặt thêm cặp X_1. Dù rằng tại tiết diện bị cắt m, n có tồn tại chuyển vị do liên kết bị chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối của chúng theo phương X_1 vẫn bằng không nên hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_1(X_1, P\ t, Z) = 0$$

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_k(X_1, X_2.... X_n, P, t, Z) = 0$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, khai triển:

$$\Delta X_k(X_1) + \Delta X_k(X_2) + ... \Delta X_k(X_n) + \Delta X_k(P) + \Delta X_k(t) + \Delta X_k(Z) = 0$$

Gọi δ_{km} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương X_k do riêng $X_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(X_m) = \delta_{km}.X_m$$

Gọi Δ_{kp}, Δ_{kt}, Δ_{kZ} lần lượt là chuyển vị tương ứng vị trí và phương X_k do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$\Delta X_k(P) = \Delta_{kP}$, $\Delta X_k(t) = \Delta_{kt}$, $\Delta X_k(Z) = \Delta_{kZ}$

Cho m = $\overline{1,n}$ và thay tất cả vào, ta được:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + ...+ \delta_{kn}X_n + \Delta_{kP} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0$$

Cho k = $\overline{1,n}$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ...\delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ...\delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2z} = 0 \\ ..... \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ...\delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nz} = 0 \end{cases} \quad (5\text{-}3)$$

Hệ phương trình (5-3) gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực với các ẩn số (X_1,X_2,...X_n).

Trong đó:

δ_{kk} gọi là hệ số chính, $\delta_{kk} > 0$

δ_{km} ($k \neq m$) gọi là hệ số phụ, $\delta_{km} = \delta_{mk}$

Δ_{kp}, Δ_{kt}, Δ_{kZ} là các số hạng tự do.

IV. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Như đã nói trong phần hệ phương trình chính tắc, ý nghĩa của các hệ số và các số hạng tự do là chuyển vị trên hệ cơ bản do các nguyên nhân tương ứng gây ra. Vậy việc xác định chúng là đi thực hiện bài toán tìm chuyển vị.

1. Hệ số chính và phụ:(δ_{km})

+ Trạng thái "m": tính hệ cơ bản chịu nguyên nhân $X_m = 1$. Xác định nội lực $\overline{M}_m, \overline{N}_m, \overline{Q}_m$

+ Tạo trạng thái "k": đặt lực $P_k = 1$ tương ứng phương và vị trí của lực X_k trên hệ cơ bản. Xác định nội lực $\overline{M}_k$, $\overline{N}_k, \overline{Q}_k$. Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\delta_{km} = \sum\int \overline{M}_k.\frac{\overline{M}_m}{EJ}ds + \sum\int \overline{N}_k.\frac{\overline{N}_m}{EF}ds + \sum\int v\overline{Q}_k.\frac{\overline{Q}_m}{GF}ds \quad (5\text{-}4)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\delta_{km} = (\overline{M}_m)(\overline{M}_k) + (\overline{N}_m)(\overline{N}_k) + (\overline{Q}_m)(\overline{Q}_k) \quad (5\text{-}5)$$

2. Số hạng tự do:

a. Do tải trọng: (Δ_{kp})

+ Trạng thái "m": Tính hệ cơ bản chịu tải trọng. Xác định nội lực: M_P^o, N_P^o, Q_P^o

+ Tạo trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kP} = \sum\int \overline{M}_k.\frac{M_P^o}{EJ}ds + \sum\int \overline{N}_k.\frac{N_P^o}{EF}ds + \sum\int v\overline{Q}_k.\frac{Q_P^o}{GF}ds \quad (5\text{-}6)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\Delta_{kP} = (\overline{M}_m)(M_P^o) + (\overline{N}_m)(N_P^o) + (\overline{Q}_m)(Q_P^o) \quad (5\text{-}7)$$

b. Do biến thiên nhiệt độ (Δ_{kt}):

+ Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này sẽ không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

+ Trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kt} = \sum\int \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\overline{M}_k ds + \sum\int \alpha t_{cm}\overline{N}_k ds \quad (5\text{-}8)$$

Trong trường hợp α, h, t_{2m}, t_{1m}, t_{cm} = const trên từng đoạn thanh thì:

$$\Delta_{kt} = \sum\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k) + \sum\alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}_k) \quad (5\text{-}9)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

c. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{kz})

- Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bứccủa các gối tựa. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

- Trạng thái "k": tương tự khi xác định δ_{km}, nhưng chỉ xác định $\overline{R}_{jk}$.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kZ} = -\sum\overline{R}_{jk}.Z_j \quad (5\text{-}10)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

**Chú ý:* Nếu lực X_k lấy bằng 1 thì có thể lấy X_k thay thế cho P_k = 1 khi tạo trạng thái "k" để xác định các hệ số.

V. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh:

a. Cách tính trực tiếp:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc xác định các ẩn số X_k (k = $\overline{1,n}$), ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng lên hệ cơ bản cùng với các nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu. Giải hệ cơ bản chịu các nguyên nhân này sẽ tìm được các nội lực của hệ. Vì hệ cơ bản thường là hệ tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã quen biết để tìm nội lực.

b. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

Xét 1 đại lượng nghiên cứu S nào đó (nội lực, phản lực, chuyển vị, biểu đồ nội lực...). Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta có thể thay thế việc xác định S trên hệ siêu tĩnh bằng cách xác định đại lượng S trên hệ cơ bản chịu nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu và các lực X_k đồng thời tác dụng.

$$S = S(X_1, X_2,... X_n, P, t, Z)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = S(X_1) + S(X_2) + ... S(X_n) + S(P) + S(t) + S(Z)$$

Gọi $\overline{S}_k$ là đại lượng S do riêng X_k = 1gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$S(X_k) = \overline{S}_k.X_k$$

Gọi S_P^o, S_t^o, S_Z^o lần lượt là đại lượng S do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, thế thì:

S(P) = S_P^o, S(t) = S_t^o, S(Z) = S_Z^o

Cho k = $\overline{1,n}$ thay tất cả vào ta được:

$$S = \overline{S}_1.X_1 + \overline{S}_2.X_2 + ...\overline{S}_n.X_n + S_p^o + S_t^o + S_Z^o \qquad (5\text{-}11)$$

Chú ý:

- Đại lượng S có thể được xác định ngay nếu có sẵn $\overline{S}_k, S_P^o, S_t^o, S_Z^o$

- Nếu đại lượng S là phản lực hay nội lực và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng S_P^o, S_t^o, S_Z^o sẽ không tồn tại.

Sau đây ta sẽ vận dụng biểu thức (5-11) để vẽ các biểu đồ nội lực.

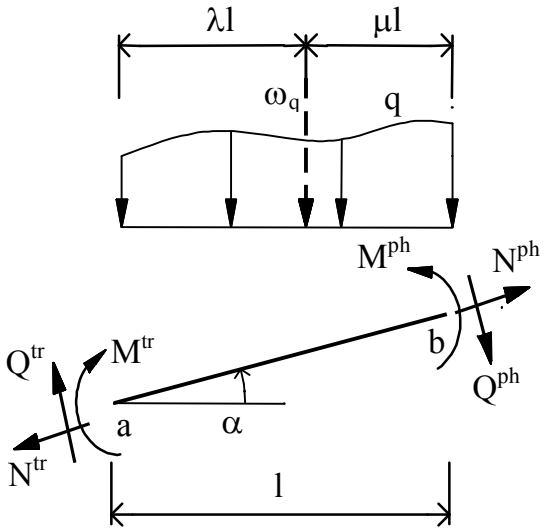
a. Biểu đồ mômen uốn (M):

Đối với những hệ dầm và khung gồm những thanh thẳng, trong các bước tính toán trung gian, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị. Do đó, khi xác định các hệ số người ta không vẽ các biểu đồ (Q), (N) mà chỉ vẽ biểu đồ mômen (M). Trong những trường hợp này, biểu đồ mômen của hệ được vẽ theo biểu thức (5-11) là tiện lợi nhất. Thay đại lượng S bằng biểu đồ (M) ta được:

$$(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + ...(\overline{M}_n).X_n + (M_p^o) + (M_t^o) + (M_Z^o) \qquad (5\text{-}12)$$

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

Như phân tích trên, sẽ không thuận lợi nếu vẽ biểu đồ (Q) theo biểu thức (5-11). Sau đây sẽ trình bày cách vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ (M) đã vẽ. Để tiện lợi cho việc áp dụng, ta đi thiết lập công thức tổng quát xác định lực cắt ở 2 đầu 1 đoạn thanh thẳng ab tách ra từ hệ chịu tải trọng phân bố liên tục hướng theo 1 phương bất kỳ và có qui luật bất kỳ như trên hình vẽ (H.5.2.10)



H.5.2.10

Tải trọng tác dụng được mô tả trên (H.5.2.10). Trong đó q, M^{tr}, M^{ph} đã biết, Q^{tr}, N^{tr}, Q^{ph}, N^{ph} chưa biết, giả thiết có chiều dương theo vị trí người quan sát nhìn sao cho tải trọng phân bố q hướng xuống.

Từ các điều kiện cân bằng mômen với điểm b và a, ta suy ra:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \mu.\omega_q \cos\alpha$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \lambda.\omega_q \cos\alpha \qquad (5\text{-}13)$$

Trong đó:

ω_q: là hợp lực của tải phân bố q trên đoạn thanh ab.

λl, μl: lần lượt là khoảng cách từ hợp lực ω_q đến đầu trái và phải của thanh ab theo phương nằm ngang.

Nếu tải trọng tác dụng lên thanh ab là phân bố đều:

q = const thì $\omega_q = ql$, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$

Thay vào biểu thức (5-13)

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \frac{1}{2}ql.\cos\alpha$$
$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \frac{1}{2}ql\cos\alpha \qquad (5\text{-}14)$$

Nếu trên đoạn thanh ab không chịu tải trọng: q = 0 thì $\omega_q = 0$. Thay vào biểu thức (5-13):

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha \qquad (5\text{-}15)$$

Sau khi xác định được lực cắt từ hai đầu mỗi đoạn thanh cũng chính là tại các tiết diện đặc trưng, tiến hành vẽ biểu đồ lực cắt dựa vào dạng đường của nó như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

c. Biểu đồ lực dọc:

Cũng tương tự cho biểu đồ (Q), biểu đồ lực dọc (N) được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ lực cắt. Cách thực hiện như sau:

Tách và xét cân bằng hình chiếu cho mỗi nút của hệ sao cho tại mỗi nút có không quá 2 lực dọc chưa biết. Khi khảo sát cân bằng, ngoài tải trọng tác dụng lên nút còn có nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút bao gồm: mômen uốn (đã biết nhưng không cần quan tâm), lực cắt (đã biết, lấy trên biểu đồ lực cắt), lực dọc (chưa biết, giả thiết có chiều dương)

Ngoài ra, khi xác định lực dọc cũng có thể vận dụng mối quan hệ giữa lực dọc tại hai đầu thanh từ điều kiện của thanh được vẽ trên hình (H.5.2.10).

$$N^{ph} = N^{tr} + \omega_q.\sin\alpha \qquad (5\text{-}16)$$

Từ phương trình (5-16) cho thấy nếu trên đoạn thanh không chịu tải trọng hoặc tải trọng tác dụng vuông góc với trục thanh thì lực dọc tại 2 đầu sẽ bằng nhau và cùng gây kéo hoặc gây nén.

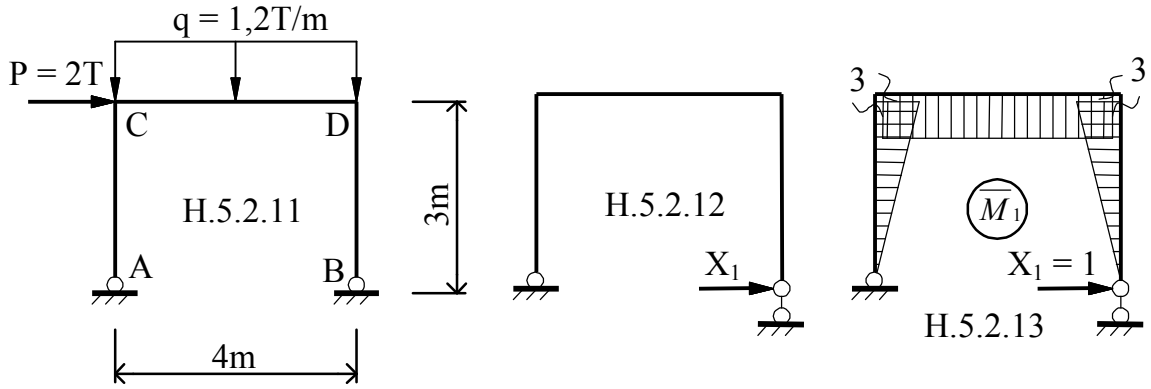
Sau khi xác định được lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn thanh, tiến hành vẽ biểu đồ lực dọc như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP LỰC

Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình (H.5.2.11). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là EJ, trong thanh ngang là 2EJ. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh:

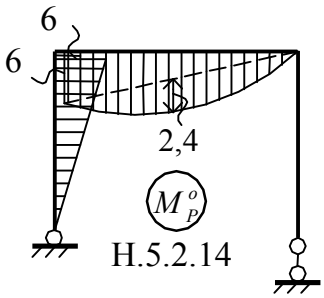
n = 3V - K = 3.1 - 2 = 1



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.12)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$



H.5.2.14

3. Xác địnhcác hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1),(M_p^o)$: (H.5.2.13 & 14)

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1).(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{2EJ}.3.4.3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1).(M_p^o) = \frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.6 + \frac{1}{2EJ}\left[\frac{6.4}{2} + \frac{2}{3}.4.2,4\right].3 = \frac{45,6}{EJ}$$

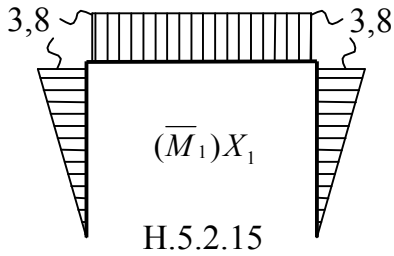
Thay vào phương trình chính tắc:

$$\frac{36}{EJ}.X_1 + \frac{45,6}{EJ} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{-45,6}{36} = -1,266 < 0$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (M_p^o)$

$(\overline{M}_1).X_1$: lấy tung độ trên biểu đồ $(\overline{M}_1)$ nhân với giá trị X_1 = -1,266. Dấu "-" có nghĩa là ta phải đổi dấu của tung độ sau khi nhân vào. Kết quả trên hình vẽ (H5.2.15). Sau đó lấy tổng đại số các tung độ trên 2 biểu đồ $(\overline{M}_1)X_1$ và (M_p^o) sẽ được biểu đồ (M). Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.16)



H.5.2.15

b. Lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ (M)

- Trên đoạn AC: q = 0

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha = \frac{2,2-0}{3}.1 = 0,733$$

- Trên đoạn BD: q = 0

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha = \frac{3,8-0}{3}.1 = 1,266$$

- Trên đoạn CD: q = const

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \frac{1}{2}ql\cos\alpha = \frac{-3,8-(2,2)}{4}.1 + \frac{1}{2}.1,2.4 = 0,9$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \frac{1}{2}ql\cos\alpha = \frac{-3,8-(2,2)}{4}.1 - \frac{1}{2}.1,2.4 = -3,9$$

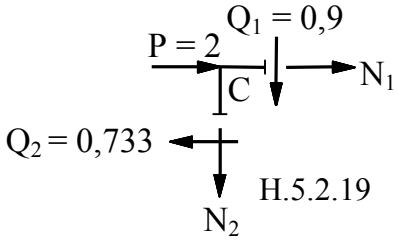
Dựng các tung độ vừa tính và vẽ biểu đồ (Q) như trên hình vẽ (H5.2.17)

c. Lực dọc: Suy ra từ các biểu đồ lực cắt: (Q)

- Tách nút C:

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \rightarrow N_1 = Q_2 - P = -1,266 \\ \Sigma Y = 0 \rightarrow N_2 = -Q_1 = -0,9 \end{cases}$$

- Tách D:

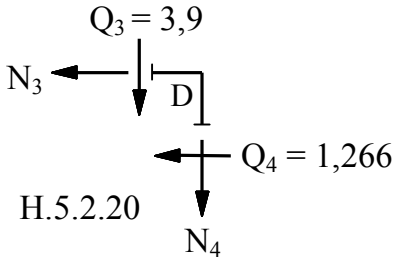


H.5.2.19

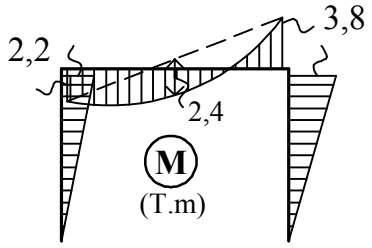
$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \rightarrow N_3 = -Q_4 = -1{,}266 \\ \Sigma Y = 0 \rightarrow N_4 = -Q_3 = -3{,}9 \end{cases}$$

N_1 giống N_3 theo quan hệ lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn. Suy ra lực dọc tại A và C theo N_2 và N_4.

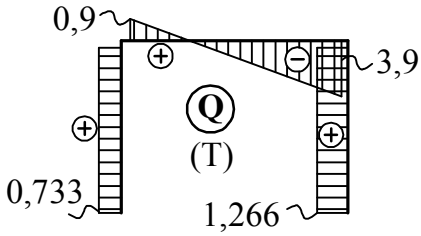
Kết quả biểu đồ (N) được vẽ trên hình vẽ (H5.2.18)



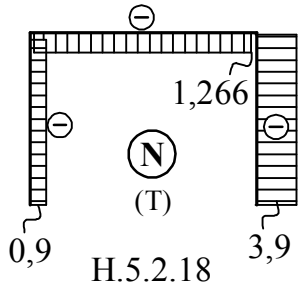
H.5.2.20



H.5.2.16

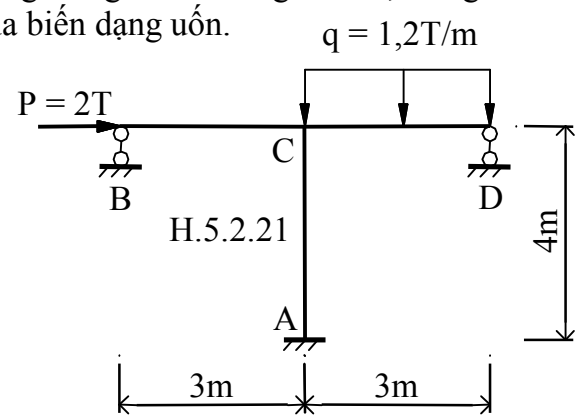


H.5.2.17

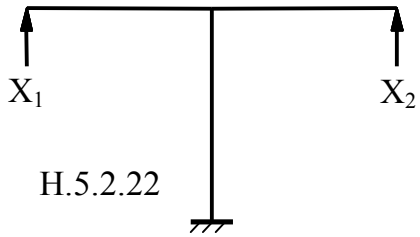


H.5.2.18

Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.5.2.21). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là 2EJ, trong các thanh ngang là EJ. Chỉ xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn.



H.5.2.21



H.5.2.22

1. Bậc siêu tĩnh:

n = 3V - K = 3.2 - 4 = 2

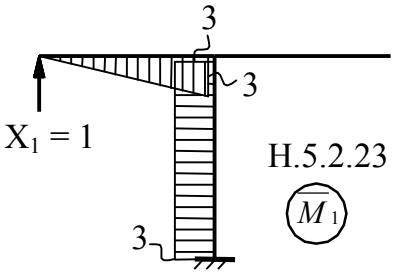
2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.2.22)
- Hệ phương trình chính tắc:

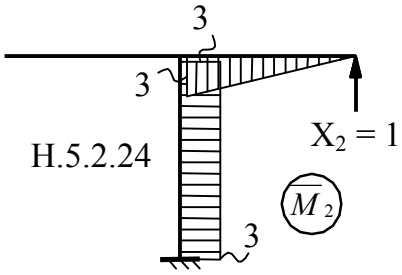
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

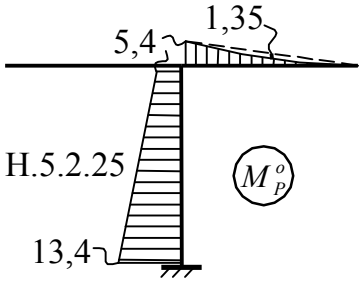
-Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{M}_2),(M_p^o)$



H.5.2.23



H.5.2.24



H.5.2.25

-Xác định các hệ số:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3 + \frac{1}{2EJ}.3.4.3 = \frac{27}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = -\frac{1}{2EJ}.3.4.3 = -\frac{18}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)(\overline{M}_2) = \delta_{11} = \frac{27}{EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{2EJ}.\frac{13,4+5,4}{2}.4.3 = \frac{56,4}{EJ}$$

$$\Delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M_P^o) = -\Delta_{1P} - \frac{1}{EJ}.\frac{5,4.3}{2}.\frac{2}{3}.3 + \frac{1}{EJ}.\frac{2}{3}.3.1,35.\frac{3}{2} = -\frac{68,55}{EJ}$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc sau khi đã bỏ đi EJ dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 27.X_1 - 18.X_2 + 56,4 = 0 \\ -18.X_1 + 27.X_2 - 68,55 = 0 \end{cases} \text{ Giải ra được } \begin{cases} X_1 = -0,713 < 0 \\ X_2 = 2,063 > 0 \end{cases}$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + (M_P^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.28)

b. Lực cắt: Suy ra từ biểu đồ (M)

- Trên đoạn BC: q = 0

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{Ph} = \frac{-2,139-0}{3}.1 = -0,713$$

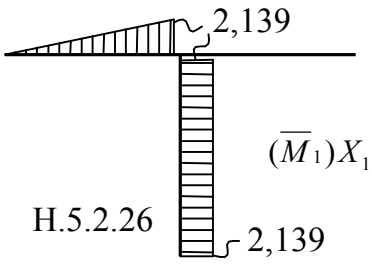
- Trên đoạn AC: q = 0

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{Ph} = \frac{2,928-(-5,072)}{4}.1 = 2$$

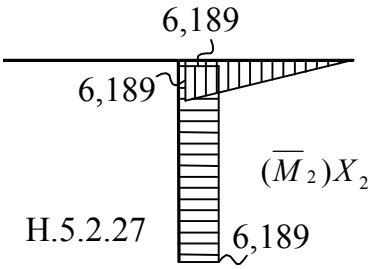
- Trên đoạn CD: q = const.

$$Q^{tr} = \frac{0-0,789}{3}.1 + \frac{1}{2}.1,2.3.1 = 1,537$$

$$Q^{ph} = \frac{0-0,789}{3}.1 - \frac{1}{2}.1,2.3.1 = -2,063$$



H.5.2.26



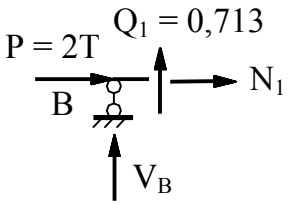
H.5.2.27

Kết quả vẽ biểu đồ lực cắt thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.29)

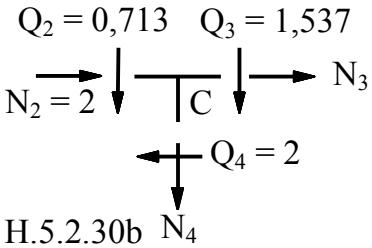
c. Lực dọc (N):Suy ra từ biểu đồ (Q)

* Tách và xét cân bằng B.

* Tách và xét cân bằng C.

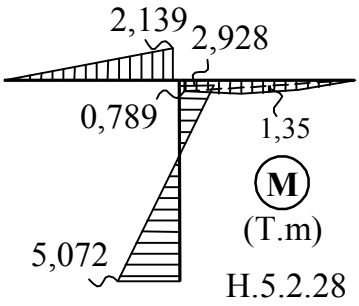


H.5.2.30a

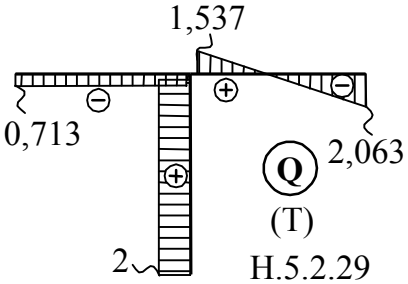


H.5.2.30b

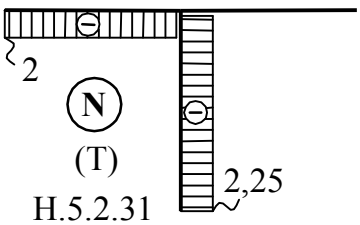
Sau đó suy ra lực dọc tại các đầu thanh còn lại và vẽ được biểu đồ (N) như trên hình vẽ (H.5.2.31).



H.5.2.28



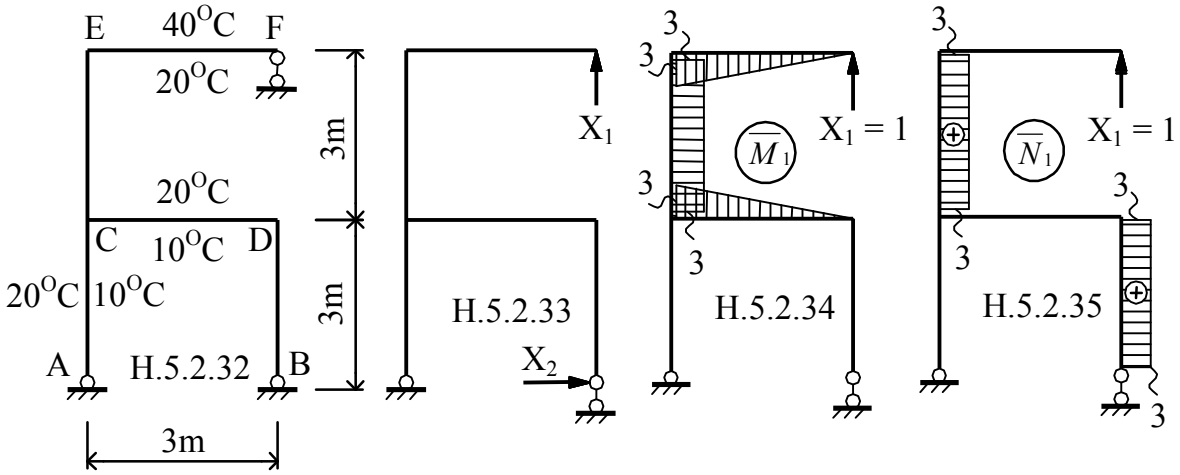
H.5.2.29



H.5.2.31

Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình vẽ (H.5.2.32).

Số liệu: $\alpha = 1{,}2.10^{-5}.C^{-1}$; thanh ngang có độ cứng 2EJ, h = 0,4m; thanh đứng là EJ, h = 0,3m; EJ = 1080T.m^2



H.5.2.32 H.5.2.33 H.5.2.34 H.5.2.35

1. Bậc siêu tĩnh:

n = 3K - V = 3.2 - 4 = 2

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.33).
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

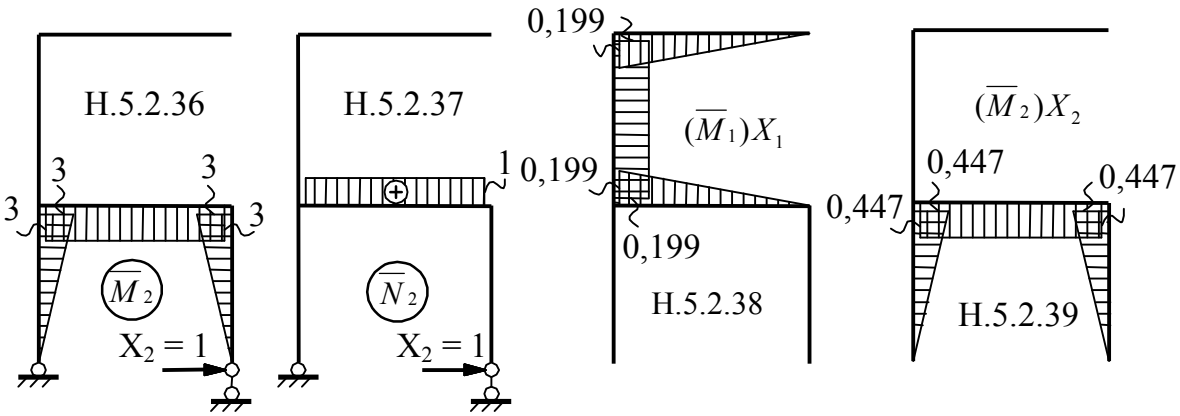
-Vẽ các biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{N}_1),(\overline{M}_2),(\overline{N}_2)$

Kết quả thể hiện trên các hình vẽ (H.5.2.34 → H.2.2.37)

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{EJ}.3.4.3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = -\frac{1}{2EJ}.\frac{3.3}{2}.3 = -\frac{27}{4EJ} = \frac{-6{,}25}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2)(\overline{M}_2) = \left[\frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{2EJ}.3.3.3 = \frac{31{,}5}{EJ}$$



H.5.2.36 H.5.2.37 H.5.2.38 H.5.2.39

$$\Delta_{1t} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_1) + \Sigma\alpha.t_c.\Omega(\overline{N}_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)(-\frac{3.3}{2}) + \frac{\alpha}{0,4}(20-40)(+\frac{3.3}{2}) = -112,5\alpha = -0,00135$$

$$\Delta_{2t} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_2) + \Sigma\alpha.t_c.\Omega(\overline{N}_2)$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)(3.3) + \frac{\alpha}{0,3}(10-20)(\frac{3.3}{2}) + \alpha.\frac{10+20}{2}.(1.3) = -330\alpha = -0,00396$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \frac{36}{EJ}.X_1 - \frac{6,25}{EJ}X_2 - 0,00135 = 0 \\ \frac{-6,25}{EJ}.X_1 - \frac{31,5}{EJ}X_2 - 0,00396 = 0 \end{cases}$$ Thay EJ = 1080 vào, giải ra $\begin{cases} X_1 = 0,0663 \\ X_2 = 0,148 \end{cases}$

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2$

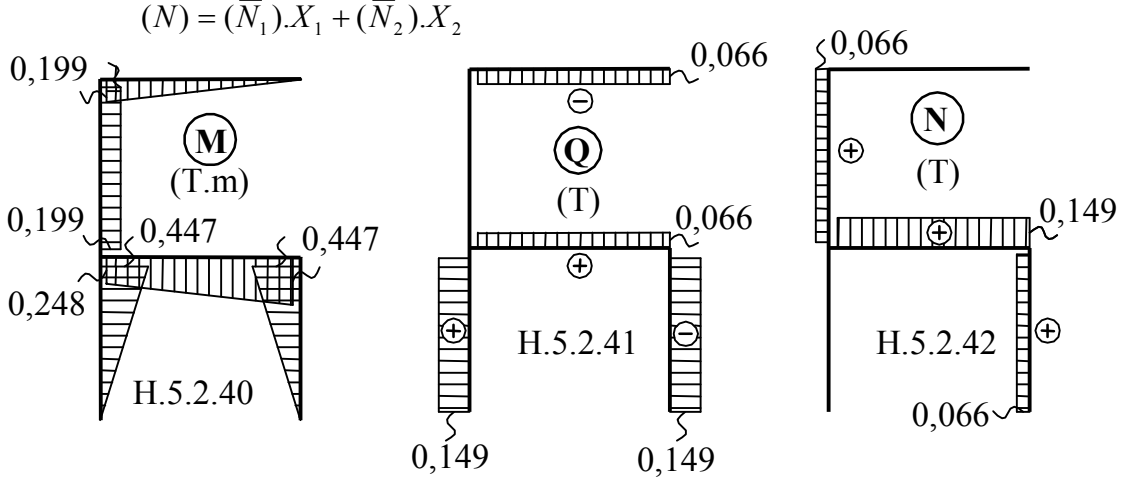
Ở đây $(M_P^o),(M_t^o),(M_Z^o)$ không tồn tại

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.40)

b. Biểu đồ lực cắt và lực dọc: tương tự ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.41 & H.5.2.42).

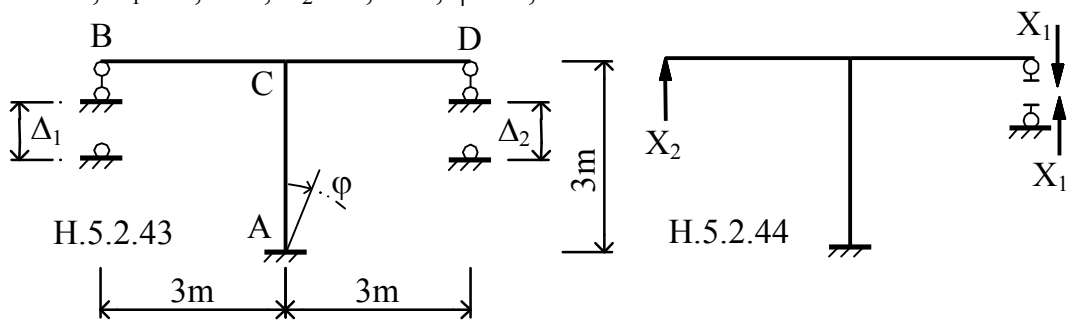
* *Chú ý:* Ở đây có thể vẽ ngay biểu đồ (N) bằng cách:

$(N) = (\overline{N}_1).X_1 + (\overline{N}_2).X_2$



Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.5.2.43).

Cho biết độ cứng trong các thanh ngang là EJ, thanh đứng là 2EJ và EJ = 1080T.m^2, Δ_1 = 0,03m, Δ_2 = 0,02m, φ = 0,005radian



1. Bậc siêu tĩnh: n = 3V - K = 3.2 - 4 = 2

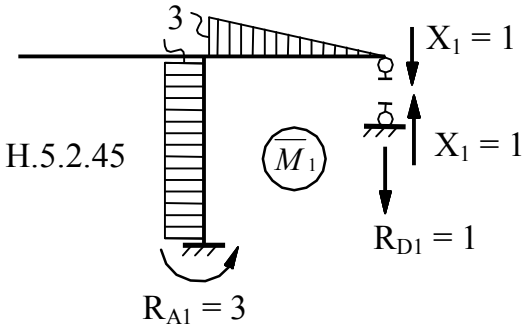
2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H5.2.44)
- Hệ phương trình chính tắc:

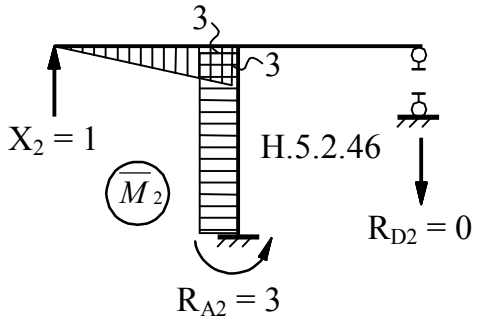
$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1Z}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2Z}=-\Delta_1=-0{,}03\end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ $(\overline{M}_1)(\overline{M}_2)$, xác định các $\overline{R}_{jk}$. Xem hình (H.5.2.45 & H.5.2.46).



H.5.2.45



H.5.2.46

$$\delta_{11}=(\overline{M}_1)(\overline{M}_1)=\frac{1}{EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3+\frac{1}{2EJ}.3.3.3=\frac{22{,}5}{EJ}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=(\overline{M}_1)(\overline{M}_2)=\frac{1}{2EJ}.3.3.3=\frac{13{,}5}{EJ}$$

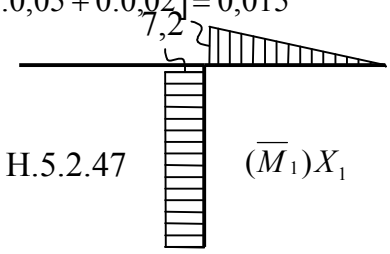
$$\delta_{22}=(\overline{M}_2)(\overline{M}_2)=\frac{22{,}5}{EJ}$$

$$\Delta_{1Z}=-\Sigma\overline{R}_{j1}.Z_j=-\left[\overline{R}_{A1}.\varphi+\overline{R}_{D1}.\Delta_2\right]=-\left[-3.0{,}005+1.0{,}02\right]=-0{,}005$$

$$\Delta_{2Z}=-\Sigma\overline{R}_{jZ}.Z_j=-\left[\overline{R}_{A2}.\varphi+\overline{R}_{D2}.\Delta_2\right]=-\left[-3.0{,}05+0.0{,}02\right]=0{,}015$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases}\frac{22{,}5}{EJ}.X_1+\frac{13{,}5}{EJ}.X_2-0{,}005=0\\ \frac{13{,}5}{EJ}.X_1+\frac{22{,}5}{EJ}.X_2+0{,}015=-0{,}03\end{cases}$$

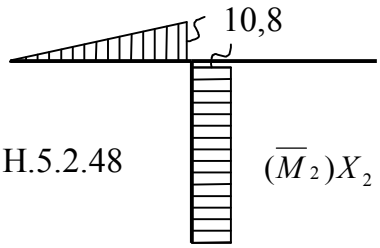


H.5.2.47 $(\overline{M}_1)X_1$

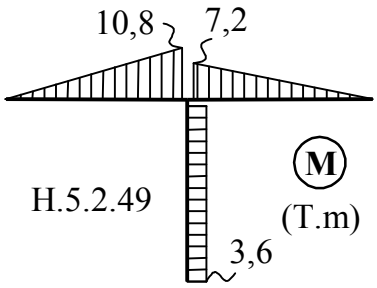
4. Vẽ biểu đồ nội lực:

- Biểu đồ momen: $(M)=(\overline{M}_1).X_1+(\overline{M}_2).X_2$

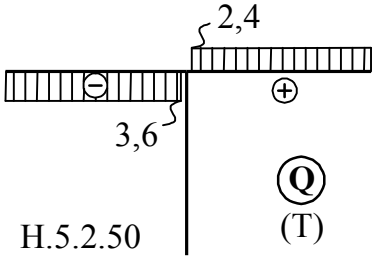
- Biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc (N): vẽ giống các ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.50 & H.5.2.51).



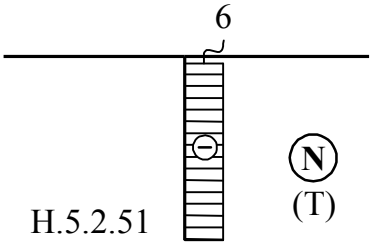
H.5.2.48 $(\overline{M}_2)X_2$



H.5.2.49



H.5.2.50



H.5.2.51

§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

I. Nguyên tắc chung:

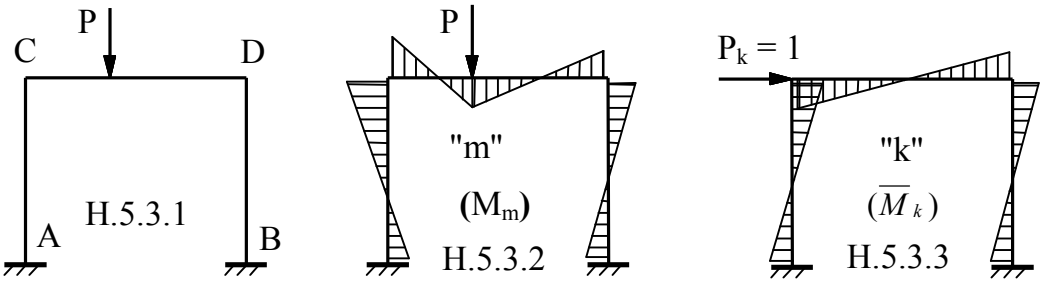
Công thức tính chuyển vị Maxwell-Morh là công thức tổng quát áp dụng cho cả hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh. Trong công thức này, ta phải tính hệ với 2 trạng thái:

-Trạng thái "m": là trạng thái ban đầu của hệ.

-Trạng thái "k": được tạo ra bằng cách đặt lực $P_k = 1$ tương ứng với vị trí và phương chuyển vị ở trên sơ đồ tính ban đầu của hệ.

Chẳng hạn, để xác định chuyển vị ngang tại C của hệ trên hình H.5.3.1

- Ở trạng thái "m" ta tính hệ siêu tĩnh ban đầu (H.5.3.2)
- Ở trạng thái "k" ta tính hệ siêu tĩnh đó 1 lần nữa do $P_k = 1$gây ra (H.5.3.3)

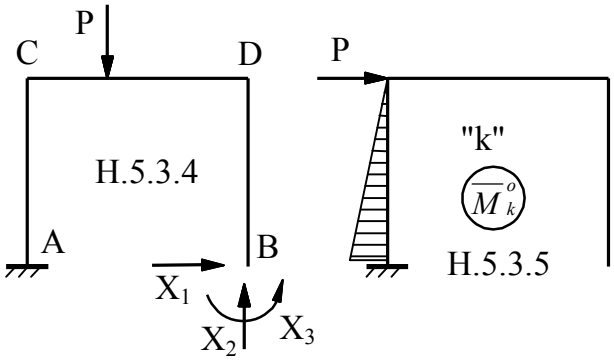


Sau khi tính giải nội lực, thực hiện công thức Morh hoặc nhân biểu đồ Vêrêxaghin sẽ được kết quả.

*Nhận xét:*Ta phải tính hệ siêu tĩnh 2 lần, khối lượng tính toán nặng nề.

II. Cách sử dụng hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta phân tích cho bài toán xác định chuyển vị của hệ trên hình (H.5.3.1). Giả sử chọn hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.3.4). (X_1, X_2, X_3) là nghiệm của hệ phương trình chính tắc.



Khi giải hệ trên hình (H.5.3.1) bằng hệ cơ bản trên hình (H.5.3.4) thì 2 hệ này là tương đương nhau. Nghĩa là nội lực, biến dạng và chuyển vị của 2 hệ là như nhau. Ta thử đi tìm chuyển vị trên hệ cơ bản. Để tìm chuyển vị trên hình (H.5.3.4), ở trạng thái "m" ta cũng cần phải giải tìm X_1, X_2, X_3, nghĩa là tương đương với trạng thái "m" trên hình (H.5.3.2). Tuy nhiên ở trạng thái "k" được tạo ra trên (H.5.3.5) thì tính khá dễ dàng vì là hệ tĩnh định. Lúc này, nội lực ở trạng thái "k" được ký hiệu: $\overline{M}_k^o, \overline{N}_k^o, \overline{Q}_k^o$

Vậy, khi tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh, ta tạo trạng thái k trên hệ cơ bản thay vì trên hệ siêu tĩnh ban đầu. Biểu thức Maxwell-Morh trong trường hợp hệ chịu các nguyên nhân (P, t, Z):

$$\Delta_{km} = \Sigma\int \frac{\overline{M}_k^o M_m}{EJ} ds + \Sigma\int \frac{\overline{N}_k^o N_m}{EF} ds + \Sigma\int \upsilon \frac{\overline{Q}_k^o Q_m}{EJ} ds - \\ - \Sigma \overline{R}_{jk}^o Z_{jm} + \Sigma\int \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\overline{M}_k^o ds + \Sigma\int \alpha t_{cm} \overline{N}_k^o ds \qquad (5\text{-}17)$$

Nếu cho phép áp dụng "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin và các đại lượng α , h, t_{2m}, t_{1m}, t_{cm} = const trên từng đoạn:

$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k^o)(\overline{M}_m) + (\overline{N}_k^o)(\overline{N}_m) + (\overline{Q}_k^o)(\overline{Q}_m)$$

$$+\Sigma\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k^o) + \Sigma\alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}_k^o) \qquad (5\text{-}18)$$

Ý nghĩa của các đại lượng, xem ở chương chuyển vị của hệ thanh.

** Chú ý:*

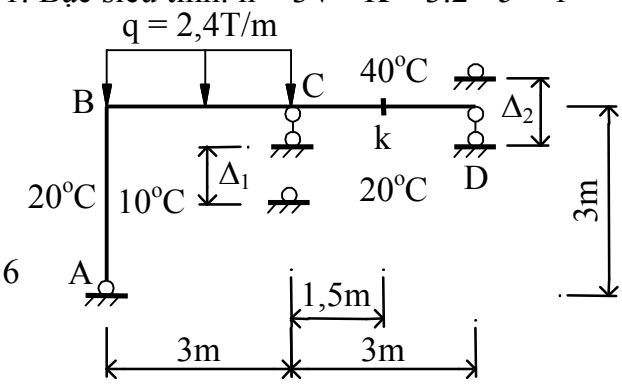
- Các đại lượng xác định ở trạng thái "k" có ký hiệu chỉ số không kèm theo là biểu thị cho việc tạo trên hệ cơ bản.

- Vì có nhiều cách tạo hệ cơ bản nên trạng thái "k" sẽ có nhiều sơ đồ tính, ta nên chọn hệ cơ bản để tạo sao cho việc tính toán và nhân biểu đồ được dễ dàng.

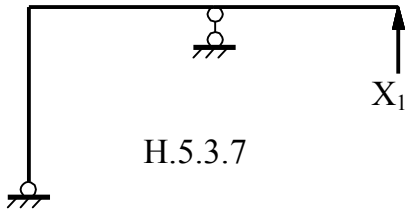
Ví dụ: -Vẽ các biểu đồ nội lực và xác định chuyển vị đứng tại k (H.5.3.6).

Cho $\alpha = 1{,}2.10^{-5}(^oC^{-1})$, độ cứng chống uốn trong thanh ngang là 2EJ, trong thanh đứng là EJ; chiều cao thanh ngang là h = 0,4m; thanh đứng là h = 0,3m; EJ = 1080T.m^2; Δ_1 = 0,02m; Δ_2 = 0,03m. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh: n = 3V - K = 3.2 - 5 = 1



H.5.3.6



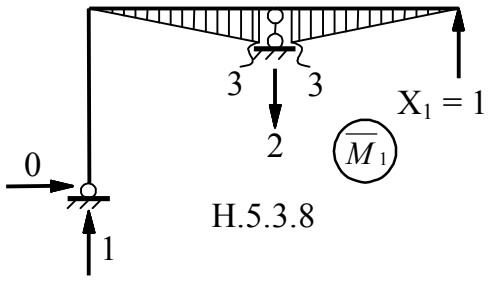
H.5.3.7

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.3.7)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0{,}03$$



H.5.3.8

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ $(\overline{M}_1),(\overline{N}_1),(M_p^o)$, xác định các $\overline{R}_{j1}$.

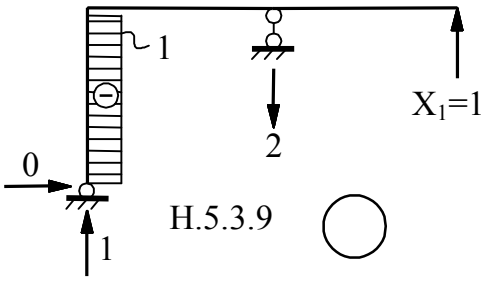
$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 = \frac{9}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = \frac{1}{2EJ}.\frac{2}{3}.3.2{,}7.\frac{1}{2}.3 = \frac{4{,}05}{EJ}$$

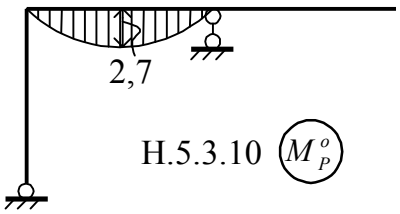
$$\Delta_{1t} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_1) + \Sigma\alpha.t_c.\Omega(\overline{N}_1)$$

$$= \frac{\alpha}{0{,}4}(10-20)(-\frac{3.3}{2}) + \frac{\alpha}{0{,}4}(20-40)(-\frac{3.3}{2})$$

$$= -112{,}5\alpha = -0{,}00135$$



H.5.3.9



H.5.3.10 M_P^o

$$\Delta_{1t} = -\Sigma\overline{R}_{j1}.Z_{jm} = -\left[\overline{R}_{c1}.\Delta_1\right] = -\left[2.0{,}02\right] = -0{,}04$$

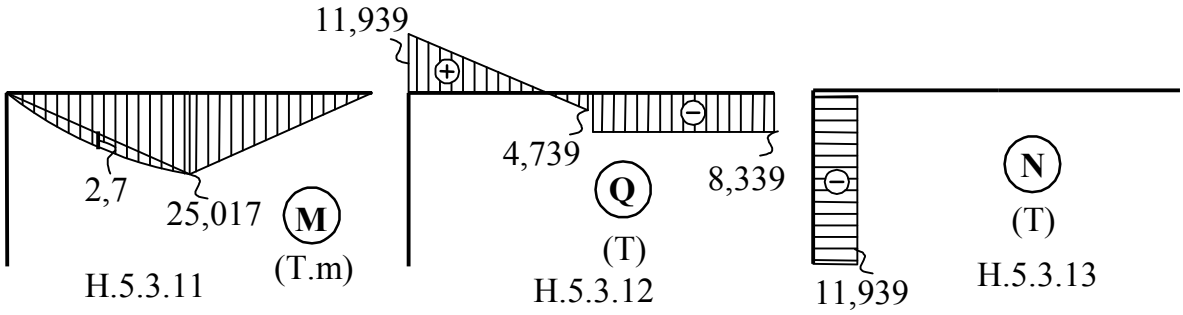
Thay vào: $\dfrac{9X_1}{EJ} + \dfrac{4{,}05}{EJ} = -0{,}00324 - 0{,}04 = 0{,}03$

Thay EJ và giải $X_1 = 8{,}339 > 0$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (M_p^o)$

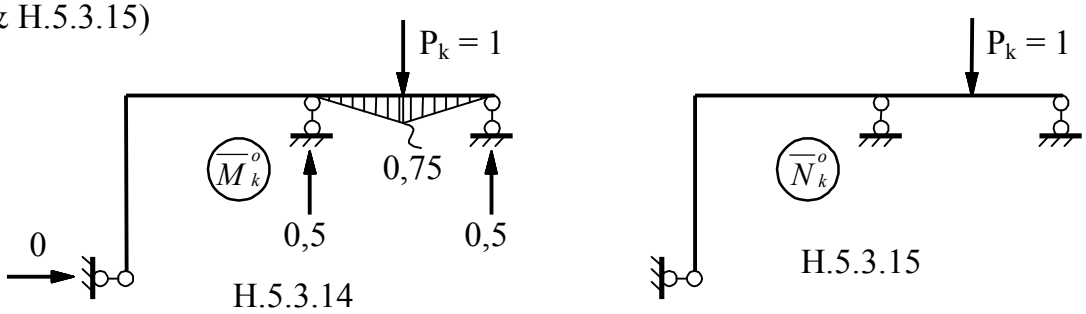
Lực cắt và lực dọc: Tương tự các ví dụ trên. Kết quả thể hiên trên hình vẽ (H.5.3.12 & H.5.3.13).



H.5.3.11 H.5.3.12 H.5.3.13

5. Xác định chuyển vị đứng tại k:

- Trạng thái "m": Biểu đồ mômen (M_m) đã vẽ ở trên.
- Trạng thái "k": vẽ $(\overline{M}_k^o),(\overline{N}_k^o)$ trên 1 hệ cơ bản chọn như trên hình (H.5.3.14 & H.5.3.15)



H.5.3.14 H.5.3.15

- Xác định chuyển vị đứng tại k:

$$y_k = (\overline{M}_k^o)(M_m) - \Sigma\overline{R}_{jk}^o Z_{jm} + \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}_k^o) + \Sigma\alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}_k^o)$$

$$= \frac{1}{2EJ}.\frac{0.75.3}{2}.\frac{25{,}017}{2} - \left[-0{,}5.0{,}02 + 0{,}05.0{,}03\right] + \frac{\alpha}{0{,}4}(20-40)(\frac{0{,}75.3}{2})$$

$$= \frac{7{,}036}{EJ} - 0{,}005 - \frac{22{,}5\alpha}{0{,}4} = 0{,}839(mm) > 0$$

§4. KIỂM TRA KẾT QUẢ TÍNH TOÁN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Do phải thực hiện nhiều phép tính trung gian khi giải hệ siêu tĩnh nên dễ mắc phải những sai số lớn hoặc sai lầm trong kết quả cuối cùng. Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Để tránh những sai lầm ta cần kiểm tra kết quả.

I. Kiểm tra quá trình tính toán:

1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị $(\overline{M}_k)$ **và biểu đồ** (M_p^o)**:**

- Sử dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng phần hệ tách ra để kiểm tra.

- Vẽ biểu đồ $(\overline{M}_s)$ do các lực $X_1 = X_2 = ... X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Kiểm tra mối quan hệ:

$$(\overline{M}_s) \equiv (\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + ... + (\overline{M}_n) \qquad (5\text{-}19)$$

2. Kiểm tra các hệ số: (δ_{km})

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_k) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + ...\delta_{kn} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}$$

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \delta_{km} \qquad (5\text{-}20)$$

Chứng minh các điều kiện kiểm tra:

- Theo ý nghĩa của biểu đồ $(\overline{M}_s)$ và các biểu đồ $(\overline{M}_k)$ nên theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện (5-19) phải thỏa mãn.

- Thay (5-19) vào 2 điều kiện bên dưới và khai triển sẽ có 2 điều kiện (5-20).

3. Kiểm tra các số hạng tự do:

a. Kiểm tra: (Δ_{kp})

Biểu thức kiểm tra:

$$(\overline{M}_s)(M_P^o) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kP} \qquad (5\text{-}21)$$

Thay (M_s) từ điều kiện (5-19) vào và triển khai ta được điều kiện (5-21).

b. Kiểm tra: (Δ_{kt})

Biểu thức kiểm tra:

$$\Sigma\alpha t_c.\Omega(\overline{N}_s) + \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_s) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kt} \qquad (5\text{-}22)$$

Trong đó $\Omega(\overline{M}_s)$, $\Omega(\overline{N}_s)$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen và lực dọc do $X_1 = X_2 = ... X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\Omega(\overline{M}_s) = \Omega(\overline{M}_1) + \Omega(\overline{M}_2) + ...\Omega(\overline{M}_n)$$

$$\Omega(\overline{N}_s) = \Omega(\overline{N}_1) + \Omega(\overline{N}_2) + ...\Omega(\overline{N}_n)$$

Thay vào ta sẽ chứng minh được điều kiện (5-23)

c. Kiểm tra: (Δ_{kZ})

Biểu thức kiểm tra: $-\Sigma\overline{R}_{js}.Z_{jm} = \Sigma\Delta_{kZ}$ (5-24)

Trong đó $\overline{R}_{js}$ là phản lực tại liên kết j do $X_1 = X_2 = ... X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Chứng minh tương tự các biểu thức trên.

4. Kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc:

Do việc làm tròn số khi tính toán giải hệ phương trình chính tắc nên khi thay thế ngược các lực X_k đã tìm được vào thì các phương trình thường khác không.

Người ta đánh giá sai số của mỗi phương trình dưới dạng sai số tương đối ε.

$$\varepsilon = \frac{A-B}{A}.100\% \le [\varepsilon] \qquad (5\text{-}25)$$

Trong đó: A, B là tập hợp các số liệu của mỗi phương trình cần kiểm tra dưới dạng A – B, [ε] sai số tương đối cho phép.

II. Kiểm tra kết quả cuối cùng:

Biểu thức kiểm tra: $\begin{matrix}(M)(\overline{M}_k) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ} \\ (M)(\overline{M}_s) = -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kZ}\end{matrix}$ (5-26)

Chứng minh điều kiện kiểm tra:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + ...\delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_k)(\overline{M}_2)X_2 + ...(\overline{M}_k)(\overline{M}_n)X_n + (\overline{M}_k)(M_p^o) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(\overline{M}_1X_1 + \overline{M}_2X_2 + ...\overline{M}_nX_n(M_p^o)) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(M) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$(M)(\overline{M}_s) = -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kZ}$: chứng minh tương tự.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen và kiểm tra lại kết quả tính của hệ trên H.5.4.1. Cho độ cứng trong tất cả các thanh là EJ = const.

1. Vẽ biểu đồ mômen (M):

Bậc siêu tĩnh n = 2

Hệ cơ bản được tạo trên hình H.5.4.2.

Các hệ số được xác định:

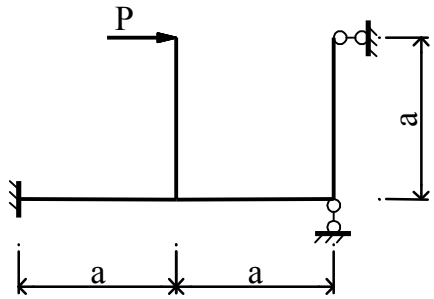
$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}.\frac{2a.2a}{2}.\frac{2}{3}.2a = \frac{8a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = \frac{1}{EJ}.\frac{2a.2a}{2}.a = \frac{2a^3}{EJ}$$

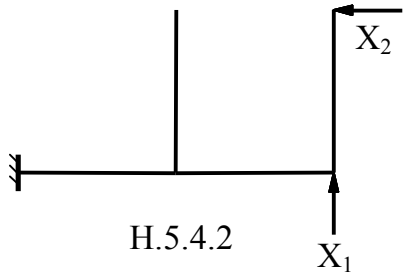
$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a + \frac{1}{EJ}.a.2a.a = \frac{7a^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ}(\frac{a+2a}{2}.a.Pa) = -\frac{1{,}5.Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ}a.a.Pa = -\frac{Pa^3}{EJ}$$



H.5.4.1



H.5.4.2

Hệ phương trình chính tắc sau khi đã quy đồng và bỏ 3EJ dưới mẫu số:

$$\begin{cases}8a^3X_1 + 6a^3X_2 - 4{,}5Pa^3 = 0 \\ 6a^3X_1 + 7a^3X_2 - 3Pa^3 = 0\end{cases} \text{ Giải ra } \begin{cases}X_1 = 0{,}675P \\ X_2 = -0{,}15P\end{cases}$$

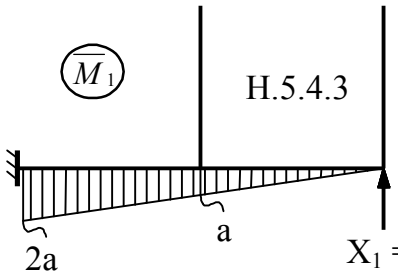
Vẽ biểu đồ mômen (M): $(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + (M_P^o)$ Xem hình (H.5.4.6)

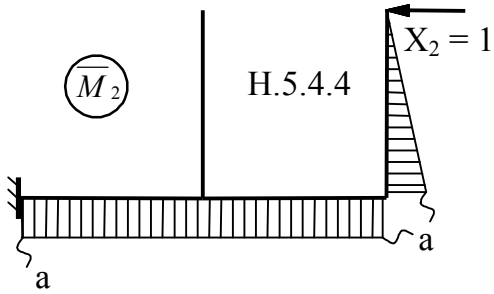
2. Kiểm tra kết quả:

- Kiểm tra biểu đồ: $(\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) \equiv (\overline{M}_s)$:

thấy đúng

$(\overline{M}_s)$ vẽ trên hình (H.5.4.7)





-Kiểm tra các hệ số:

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EJ}.\frac{2a.2a}{2}.\left[a + \frac{2}{3}.2a\right] = \frac{14a^3}{3EJ}$$

Mặc khác: $\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{8a^3}{3EJ} + \frac{2a^3}{EJ} = \frac{14a^3}{3EJ}$ (đúng)

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_2) = \frac{1}{EJ}.\frac{(3a+a)}{2}.2a.a + \frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a$$

$$= \frac{13a^3}{3EJ}$$

Mặc khác: $\delta_{21} + \delta_{22} = \frac{2a^3}{EJ} + \frac{7a^3}{3EJ} = \frac{13a^3}{3EJ}$ (đúng)

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_s) = \frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a + \frac{2a}{6EJ}\left[2.9a^2 + 2a^2 + 2.3a^2\right] = \frac{a^3}{3EJ} + \frac{26a^3}{3EJ} = \frac{27a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ}$$

Mặc khác: $\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{14a^3}{3EJ} + \frac{13a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ}$ (đúng)

-Kiểm tra số hạng tự do:

Nhân 2 biểu đồ:

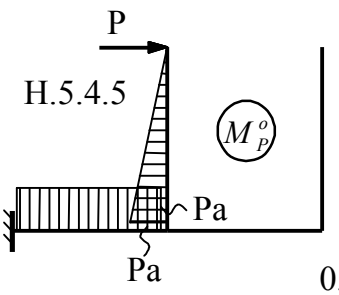
$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_P^o) = -\frac{1}{EJ}.\frac{(3a+2a)}{2}.a.Pa = -\frac{2,5.Pa^3}{EJ}$$

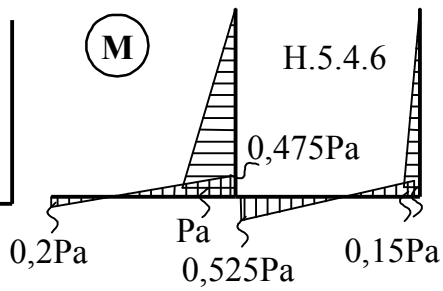
Mặc khác:

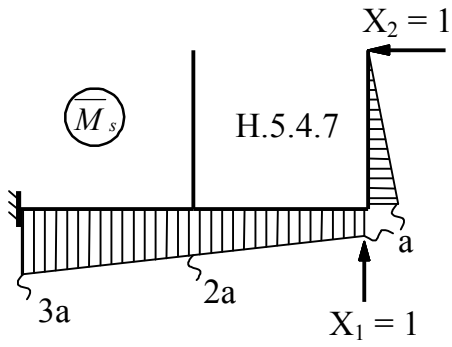
$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{1,5Pa^3}{EJ} - \frac{Pa^3}{EJ} = -\frac{2,5Pa^3}{EJ}$$ (đúng)

- Kiểm tra kết quả cuối cùng:

Nhân 2 biểu đồ:







$$(\overline{M}_s)(M) = -\frac{1}{EJ}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.0{,}15Pa + \frac{a}{6EJ}\left[2.3a.0{,}2Pa - 2.2a.0{,}475Pa - 3a.0{,}475Pa + 2a.0{,}2Pa\right]$$

$$+\frac{a}{6EJ}\left[2.2a.0{,}525Pa - 2.a.0{,}15Pa - 2a.0{,}15Pa + a.0{,}525Pa\right] = 0$$

**Chú ý:*

- Các biểu thức điều kiện kiểm tra vẫn đúng trong trường hợp có kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.
- Khối lượng tính toán kiểm tra còn nhiều.
- Khi điều kiện kiểm tra thỏa mãn thì cũng chưa thể loại trừ được khả năng xảy ra sai lầm.

§5. MỘT SỐ ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẬC CAO

I.Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán:

- Chọn phương pháp tính cho số lượng ẩn số là ít nhất (phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp và liên hợp...)

- Khi sử dụng phương pháp lực nên chọn hệ cơ bản để sao cho các ẩn X_k ít ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng.

- Dùng các biện pháp nhằm giảm bậc của hệ phương trình chính tắc. (sẽ trình bày ở dưới)

II. Các biện pháp làm giảm nhẹ khối lượng tính toán:

1. Các biện pháp giảm bậc của hệ phương trình chính tắc:

- Chọn phương pháp tính cho số ẩn số là ít nhất (đã nói ở trên)

- Khi chọn hệ cơ bản của phương trình lực, ta chọn hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp thay vì chọn hệ cơ bản tĩnh định.

- Nên sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ là hệ đối xứng

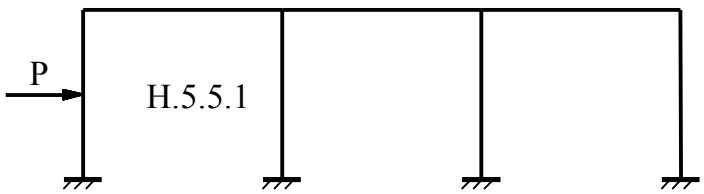
2. Các biện pháp đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc:

Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản khi chúng có nhiều hệ số phụ bằng không. Để đạt được mục đích này, ta có thể thực hiện các cách sau:

- Sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ đối xứng.

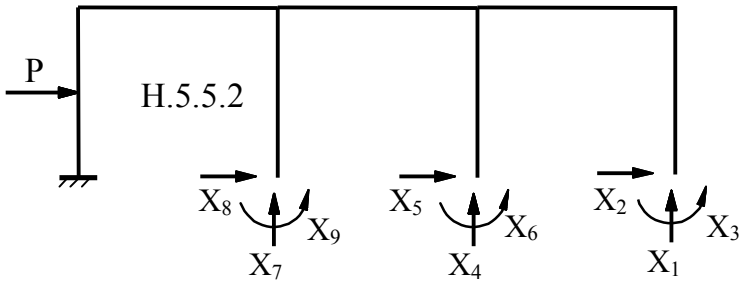
- Chọn hệ cơ bản hợp lý bằng cách chia hệ thành nhiều bộ phân độc lập. Vì lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ. Việc xác định các hệ số của phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không. Mặc khác, việc làm này còn làm giảm nhẹ khối lượng tính toán ở các khâu: xác định nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do, giải hệ phương trình chính tắc.

Xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.5.1), ta nêu ra 2 cách để chọn hệ cơ bản so sánh:



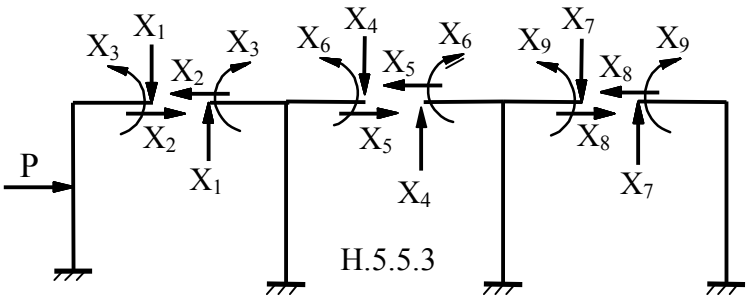
H.5.5.1

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.2.2), nội lực trên hệ này nói chung sẽ phân khối trên toàn hệ. Do đó, việc xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức. Các hệ số phụ đều khác không.



H.5.5.2

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.5.3), các biểu đồ đơn vị chỉ phân bố trên 1 hoặc 2 bộ phận lân cận của hệ. Do đó, việc vẽ biểu đồ nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do sẽ đơn giản, có nhiều hệ số phụ bằng không.



H.5.5.3

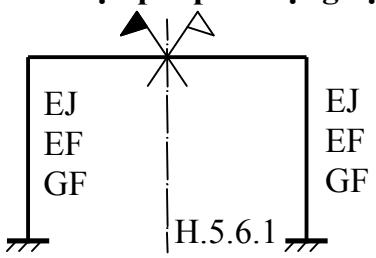
$$\delta_{17} = \delta_{71} = \delta_{18} = \delta_{81} = \delta_{19} = \delta_{91} = \delta_{27} = \delta_{72} = \delta_{29} = \delta_{92} = \delta_{37} = \delta_{73} =$$
$$= \delta_{38} = \delta_{83} = \delta_{39} = \delta_{93} = 0$$

- Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số (nghiên cứu ở phần sau).

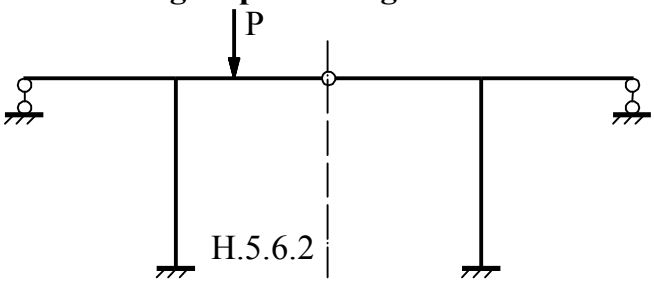
§6. CÁCH VẬN DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ ĐỐI XỨNG

Hệ đối xứng là hệ có kích thước, hình dạng hình học, độ cứng và kiên kết đối xứng qua 1 trục (H.5.6.1)

I. Biện pháp sử dụng cặp ẩn số đối xứng và phản xứng:



H.5.6.1

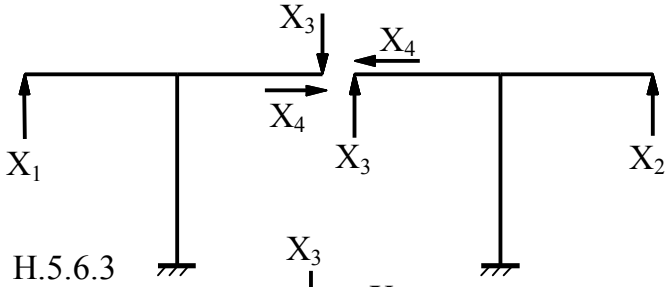


H.5.6.2

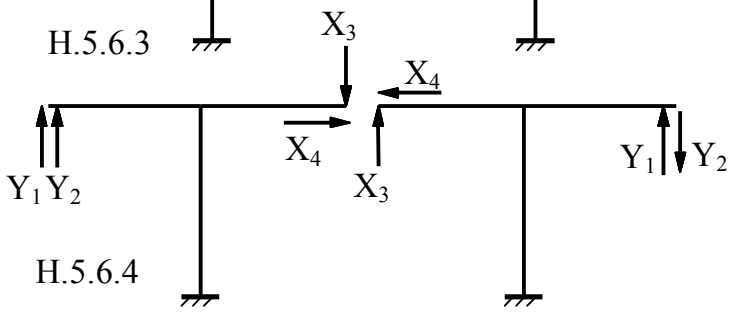
Xét hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng tác dụng như trên hình (H.5.6.2). Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình (H.5.6.3). Có 2 loại ẩn số:

- Cặp ẩn số đối xứng X_4 và phản xứng X_3.
- Cặp ẩn số chỉ có vị trrí đối xứng X_1 và X_2.

Để triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ, ta phân tích X_1, X_2 thành hai cặp: cặp đối xứng Y_1 và cặp phản ứng Y_2 như trên hình vẽ (H.5.6.4).Tức là:



H.5.6.3



H.5.6.4

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = X_1 \\ Y_1 + Y_2 = X_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2}{2} \\ Y_2 = \dfrac{X_1 - X_2}{2} \end{cases}$$

Các ẩn số lúc này là (Y_1, Y_2 , X_3, X_4)

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}Y_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}Y_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$

Mặc khác, đối với hệ đối xứng có tính chất sau:

- Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng (phản ứng) thì biểu đồ mômen sẽ đối xứng (phản ứng). Suy ra: $(\overline{M}_1),(\overline{M}_4)$ sẽ đối xứng; $(\overline{M}_2),(\overline{M}_3)$ sẽ phản ứng.
- Kết quả nhân biểu đồ phản ứng với biểu đồ đối xứng sẽ bằng không. Suy ra:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{34} = 0$$

Thay vào, ta được:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases} \quad \text{(a) (chứa cặp ẩn đối xứng)}$$

$$\begin{cases} \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \quad \text{(b) (chứa cặp ẩn phản xứng)}$$

**** Kết luận**:* Với hệ đối xứng có bậc siêu tĩnh bằng n, nếu áp dụng các cặp ẩn số đố xứng và phản xứng ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: 1 hệ gồm n_1 phương trình chứa ẩn đối xứng, 1 hệ gồm n_2 phương trình chứa ẩn phản xứng với $n_1 + n_2 = n$.

*** Các trường hợp đặc biệt:**

1. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng đối xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì lúc này (M_P^o) sẽ đối xứng. Suy ra $\Delta_{2P} = \Delta_{3P} = 0$. Thay vào hệ (b) thì được $Y_2 = X_3 = 0$

Vậy 1 hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các ẩn phản xứng = 0

2. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng phản xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì tương tự ta sẽ có được $Y_1 = X_4 = 0$

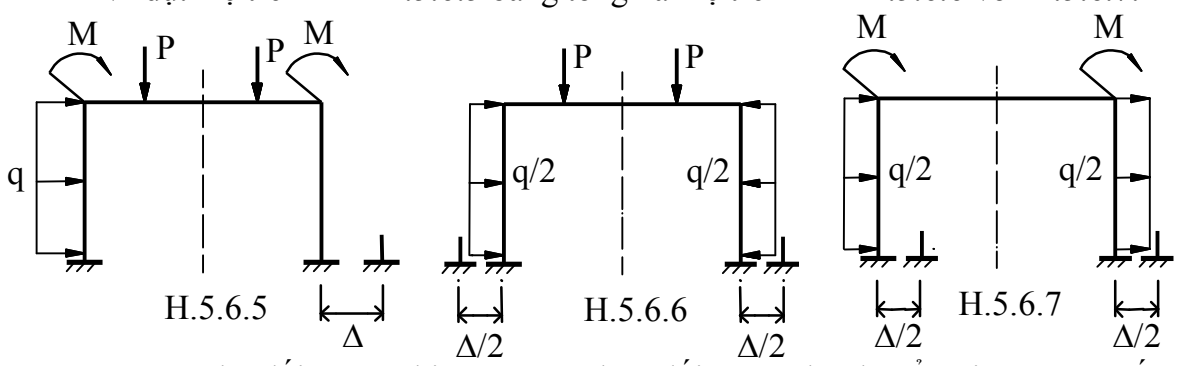
Vậy khi hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các ẩn đối xứng = 0

II. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính:

*** Các đặc điểm của hệ đối xứng:**

- Một hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bao giờ cũng có thể phân tích thành tổng của 2 hệ: hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng với hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng.

Ví dụ: Hệ trên hình H.5.6.5 bằng tổng hai hệ trên hình H.5.6.6 với H.5.6.7.



- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng thì chuyển vị, mômen uốn, lực dọc sẽ đối xứng, còn lực cắt có tính phản ứng.

- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản ứng thì chuyển vị, mômen, lực dọc sẽ phản xứng, còn lực cắt có tính đối ứng.

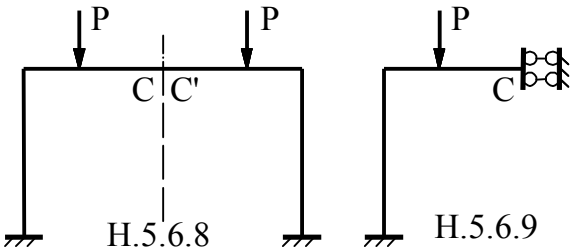
Như vậy với các đặc điểm này, nếu biết được kết quả của một nửa hệ đối xứng thì có thể suy ra kết quả trên toàn hệ. Ta đi tìm 1 nửa hệ tương đương.

1. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng:

a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ :

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải của trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.8). Do chuyển vị của hệ là đối xứng nên tại C không thể có chuyển vị

xoay và thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng. Tuy nhiên, chuyển vị thẳng theo phương trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 ngàm trượt.



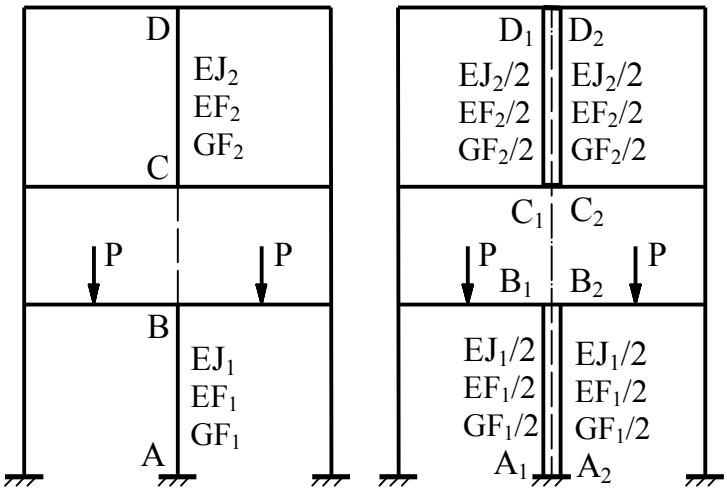
H.5.6.8 H.5.6.9

Vậy trên sơ đồ tính 1 nửa hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng như trên hình vẽ (H.5.6.9)

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ, ta đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh song song và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên một nửa hệ và suy ra kết quả trên toàn hệ.

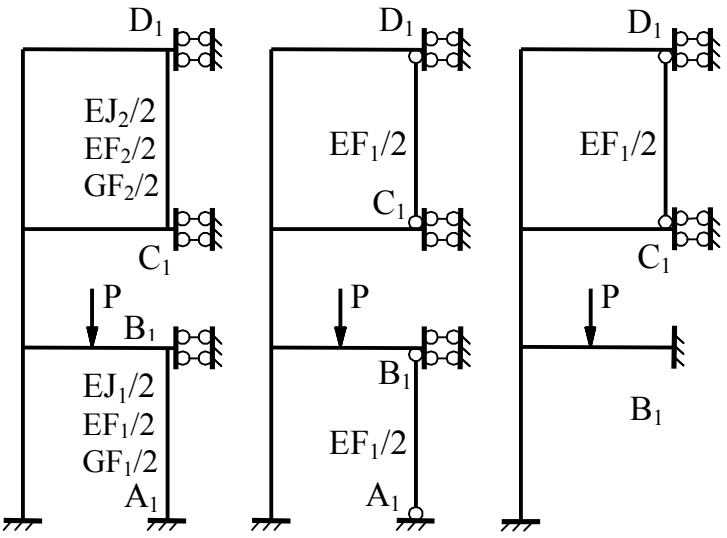
b. Trường hợp trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh của hệ.

Xét hệ trên hình (H.5.6.10). Đưa về hệ tương đương đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ bằng cách thay thế mỗi thanh AB, CD bằng 2 thanh có độ cứng giảm đi một nửa, hai đầu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 là vuông góc với trục đối xứng và có độ cứng bằng vô cùng (H.5.6.11). Đến đây ta trở lai trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh.



H.5.6.10 H.5.6.11

Một nửa hệ tương đương như trên hình (H.5.6.12). Nhưng tại A_1, B_1, C_1, D_1 không tồn tại chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng mà chỉ có thể chuyển vị theo phươngdọc trục thanh. Nghĩa là, các thanh A_1B_1, C_1D_1 làm việc như 1 liên kết thanh (liên kết loại 1) (H.5.6.13).



H.5.6.12 H.5.6.13 H.5.6.14

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ, ta cần đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song với

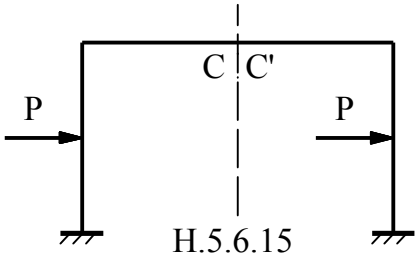
nhau và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng đồng thời thay thế các thanh trùng với trục đối xứng bằng các liên kết thanh (liên kết loại 1) có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ. Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với thanh trùng với trục đối xứng lực dọc lấy gấp 2 lần so với khi giải 1 nửa hệ còn lực cắt và mômen lấy bằng không.

Trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh trùng với trục đối xứng và các thanh này bị ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục thanh (một đầu nối đất), ta có thể thay thế các ngàm trượt bằng ngàm (H.5.6.14)

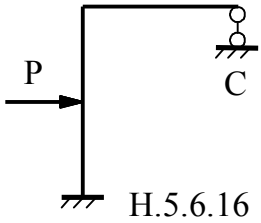
2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng:

a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ:

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.15). Do chuyển vị của hệ là phản xứng nên tại C không thể có chuyển vị theo phương trục đối xứng. Tuy nhiên, chuyển vị góc xoay và chuyển vị theo phương vuông góc với trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 gối di động. Vậy trên sơ đồ tính một phần 2 hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 gối di động có phương của trục đối xứng (H.5.6.16).



H.5.6.15



H.5.6.16

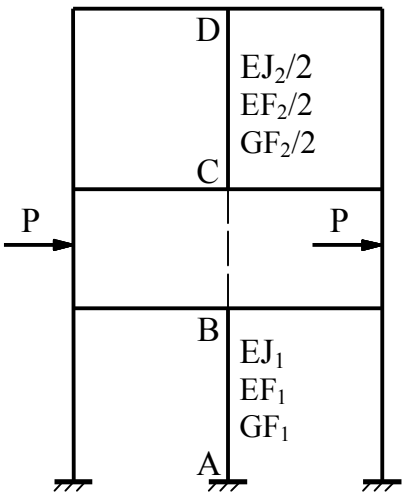
***Kết luận**:* Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản ứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ ta đưa về 1 nửa hệ tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương của trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ.

b. Trường hợp trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ:

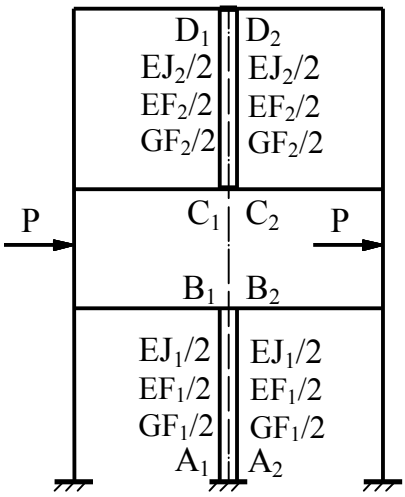
Cũng lý luận tương tự như trường hợp hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ở trên, ta đưa bài toán trở về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ.

Với hệ cho trên hình (H.5.6.17), hệ tương đương của nó ở trên hình (H.5.6.18) và hệ trên hình (H.5.6.19) là 1 nửa hệ tương đương.

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản ứng và có trục đối xứng trùng với trục thanh nào đó của hệ, ta đưa về 1 nửa hệ



H.5.6.17

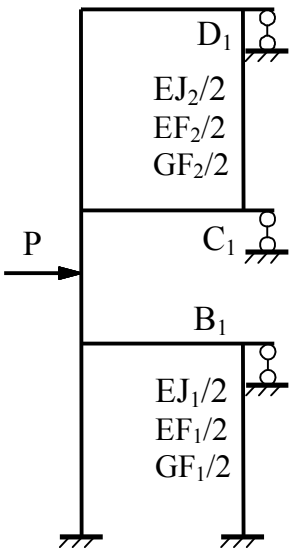


H.5.6.18

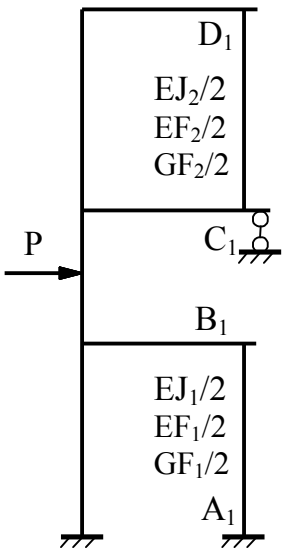
tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương trục đối xứng tại những tiết diện trục đối xứng bằng các thanh có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi tính toán trên 1 phần 2 và suy ra kết quả trên toàn hệ.

Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với các thanh trùng với trục đối xứng, lực dọc lấy bằng không còn mômen và lực cắt lấy gấp 2 lần so với khi tính trên nửa hệ.

Trong trường hợp bỏ qua ảnh hưởng biến dạng dọc trục thì ta có thể bỏ bớt 1 gối di động trong 2 gối ở hai đầu thanh (H.5.6.20).



H.5.6.19



H.5.6.20

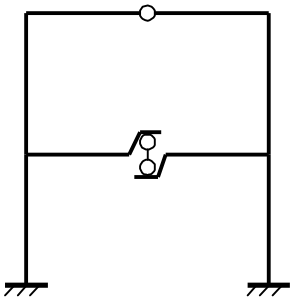
**** Chú thích:***

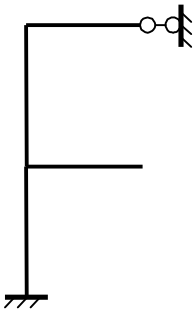
Trường hợp tiết diện trùng với trục đối xứng không phải là liên kết hàn, bằng cách phân tích sự làm việc tại các tiết diện này tương tự như ở trên ta có thể thay thế bằng các liên kết tương ứng khi tính trên 1 nửa hệ.

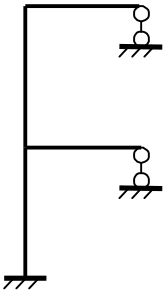
Chẳng hạn, hệ trên hình (H.5.6.21)

+ Nếu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.22).

+ Nếu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.23).

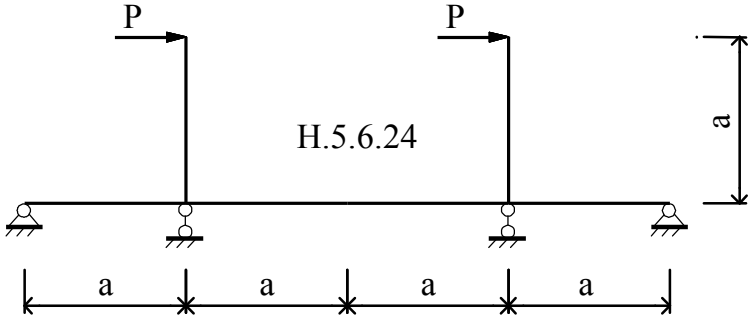

H.5.6.21


H.5.6.22

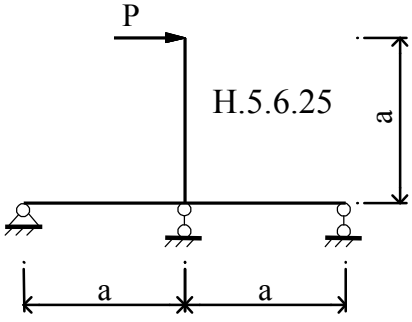

H.5.6.23

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.6.24). Cho độ cứng trong tất cả các thanh là EJ = const. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

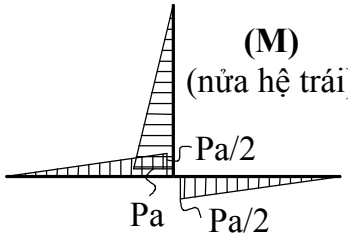
Hệ đã cho thuộc loại hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng. Một nửa hệ trái tương đương của hệ đã cho được tạo ra trên hình (H.5.6.25). Đây là hệ siêu tĩnh bậc 1. Tiến hành các bước giải sẽ vẽ được biểu đồ (M), (Q), (N). Sau đó suy ra kết quả của nửa hệ phải theo các đặc điểm của hệ đối xứng. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.6.26 → H.5.6.31)



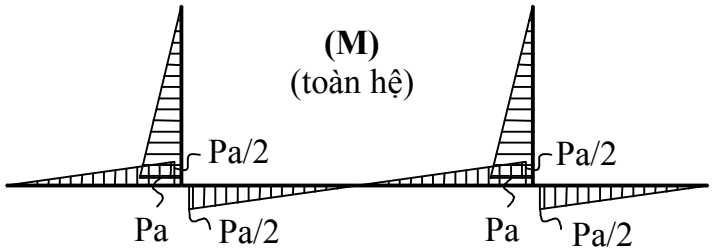
H.5.6.24



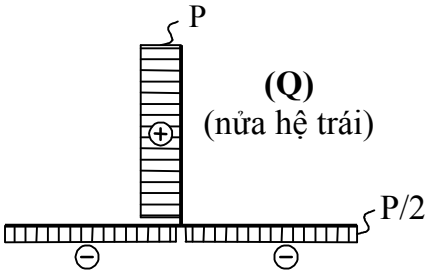
H.5.6.25



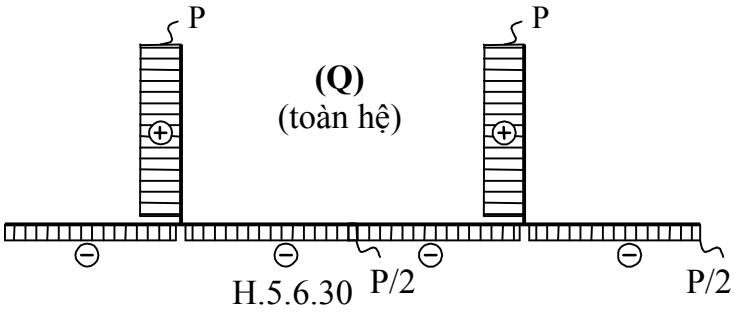
H.5.6.26



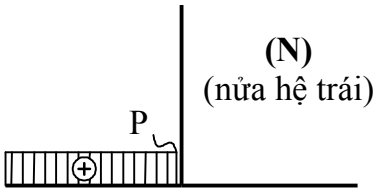
H.5.6.29



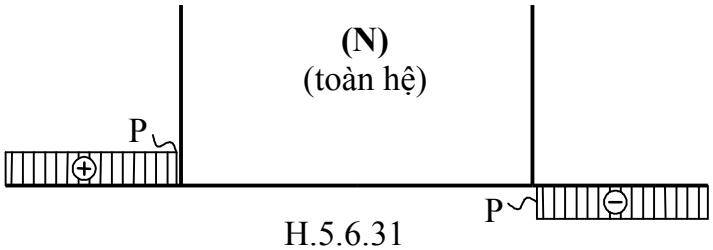
H.5.6.27



H.5.6.30



H.5.6.28

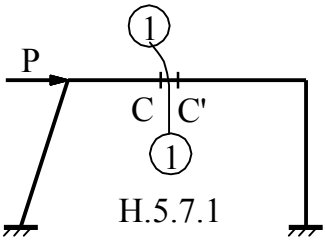


H.5.6.31

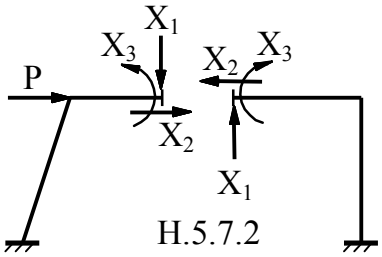
§7. SỬ DỤNG CÁC THANH TUYỆT ĐỐI CỨNG ĐỂ THAY ĐỔI VỊ TRÍ VÀ PHƯƠNG CÁC ẨN SỐ NHẰM ĐƠN GIẢN HOÁ CẤU TRÚC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Mục đích của biện pháp là sử dụng các thanh tuyệt đối cứng nhằm thay đổi vị trí và phương của các ẩn số để sao cho hệ phương trình chính tắc có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ trên hình (H.5.7.1). Để giải hệ ta có thể chọn hệ cơ bản như trên hình (H.5.7.2)

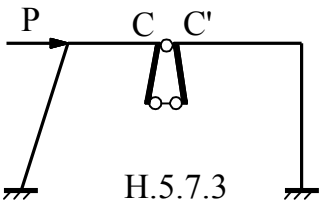


H.5.7.1

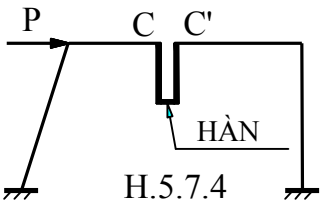


H.5.7.2

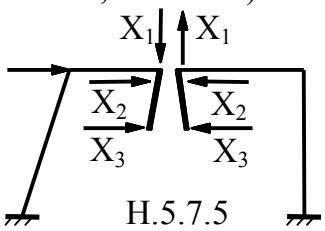
Ta biến đổi hệ trên hình (H.5.7.1) bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1, hàn 2 thanh tuyệt đối cứng vào 2 tiết diện C và C'. Nếu nối 2 thanh tuyệt đối cứng bằng ba liên kết loại 1 theo điều kiện nối 2 miếng cứng tạo thành hệ bất biến hình thì hệ mới sẽ tương đương với hệ ban đầu (H.5.7.3, H.5.7.4...)



H.5.7.3

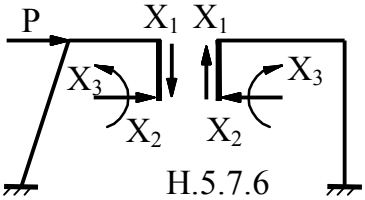


H.5.7.4



H.5.7.5

Nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa các thanh tuyệt đối cứng (H.5.7.5, H.5.7.6…) thì so với các hệ cơ bản trên hình (H.5.7.2), vị trí và phương của các ẩn số đã thay đổi. Điều đó có nghĩa là các hệ số cũng thay đổi. Rõ ràng là có nhiều cách lập hệ tương đương nên cũng nhiều cách thay đổi vị trí và phương của các ẩn số. Và ta thực hiện sao cho hệ phương trình chính tắc càng có nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.



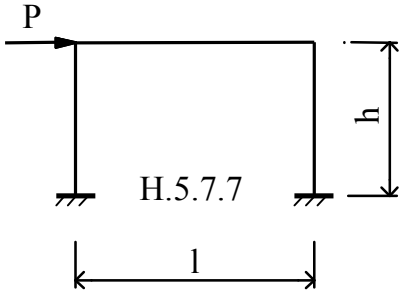
(...)
H.5.7.6

Ví dụ: Chọn hệ số cơ bản sao cho tất cả các hệ số phụ bằng không của khung trên hình (H.5.7.7). Cho độ cứng EJ là không đổi trên toàn hệ.

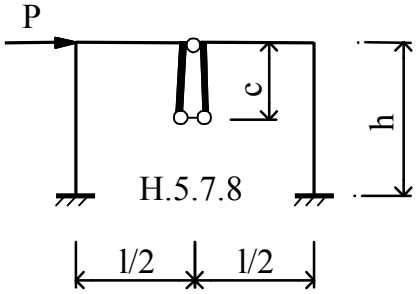
Hệ tương đương trên hình (H.5.7.8), hệ cơ bản tạo nên hình (H.5.7.9)

Các biểu đồ $(\overline{M}_1),(\overline{M}_2),(\overline{M}_3)$ vẽ trên hình (H.5.7.10 → H.5.7.12). $(\overline{M}_1),(\overline{M}_3)$ là đối xứng; $(\overline{M}_2)$ phản xứng nên $\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{32}=0$.

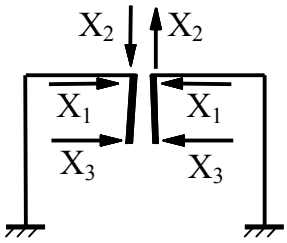
Để $\delta_{13}=\delta_{31}=(\overline{M}_3)(M_1)=0$ thì $c=\dfrac{2}{3}h$ vì khi đó trọng tâm lấy trên $(\overline{M}_1)$ ứng với tung độ = 0 trên $(\overline{M}_2)$.



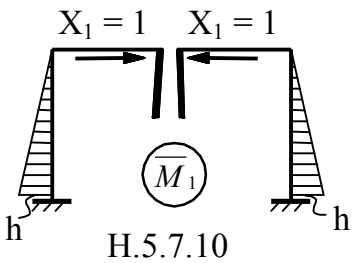
H.5.7.7



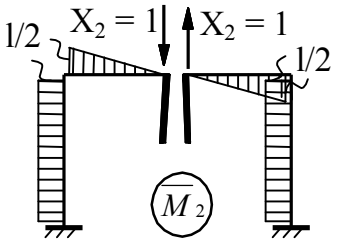
H.5.7.8



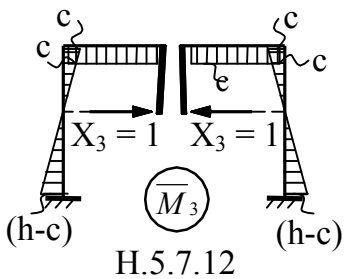
H.5.7.9



H.5.7.10



H.5.7.11



H.5.7.12

§8. HỆ DÀN SIÊU TĨNH

I. Bậc siêu tĩnh:

n = D - 2M + 3 (Đối với hệ dàn không nối đất)

n = D - 2M + C (Đối với hệ dàn nối đất)

II. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

Như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

III. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Do trong hệ dàn chỉ tồn tại lực dọc nên các hệ số chỉ kể đến thành phần biến dạng dọc trục.

1. Các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{km} = \Sigma\int \frac{\overline{N}_k \overline{N}_m}{E\mathrm{F}}.ds = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{E\mathrm{F}_i}.l_i$$

2. Các số hạng tự do:

a. Do tải trọng:

$$\Delta_{kP} = \Sigma\int \frac{\overline{N}_k N_p^o}{E\mathrm{F}} ds = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik} N_{ip}^o}{E\mathrm{F}_i} l_i$$

b. Do biến thiên nhiệt độ:

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha t_{ci} \Omega(\overline{N}_{ik}) = \sum_i \alpha t_{ci} \overline{N}_{ik}.l_i$$

c. Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N}_{ik}.\Delta_i$$

Δ_i : độ dôi của thanh dàn thứ i. Nếu là chế tạo ngắn hơn chiều dài (còn gọi là độ hụt) thì Δ_i lấy dấu âm.

d. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

$$\Delta_{kZ} = -\sum_{(j)} \overline{R}_{jk} Z_j$$

Trong các công thức trên:

$\overline{N}_{ik}, \overline{N}_{im}, N_{iP}^o$: lực dọc trong thanh dàn thứ i do $X_k = 1$ và $X_m = 1$, P gây ra trên hệ cơ bản.

EF_i , l_i : độ cứng và chiều dài thanh thứ i

α : hệ số dãn nở vì nhiệt độ.

$\overline{R}_{jk}$: phản lực tại liên kết j do $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Z_j : chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j.

IV. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

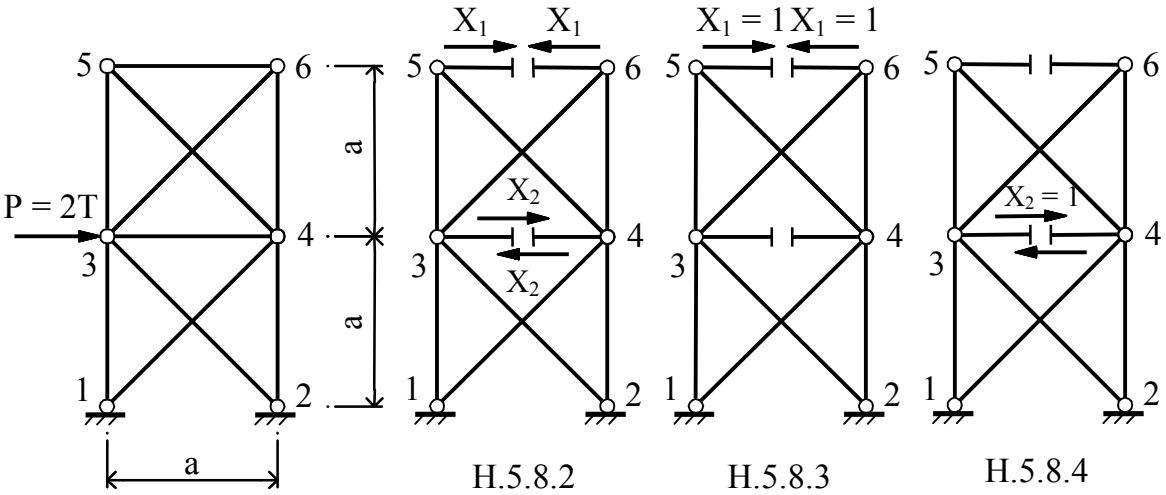
Lực dọc trong thanh dàn thứ i:

$$N_i = \overline{N}_{i1}.X_1 + \overline{N}_{i2}.X_2 + ...\overline{N}_{in}.X_n + N_{ip}^o + N_{it}^o + N_{i\Delta}^o + N_{iZ}^o$$

Trong đó: $N_{ip}^o, N_{it}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o$ lần lượt là lực dọc trong thanh dàn thứ i do các nguyên nhân P, t, Δ, Z gây ra trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì $N_{pt}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o = 0$.

Ví dụ: Xác định lực dọc trong các thanh dàn trên hình (H.5.8.1) cho biết độ cứng trong các thanh dàn là EF = const.

1. Bậc siêu tĩnh: n = D – 2M + C = 10 - 6.2 + 4 = 2



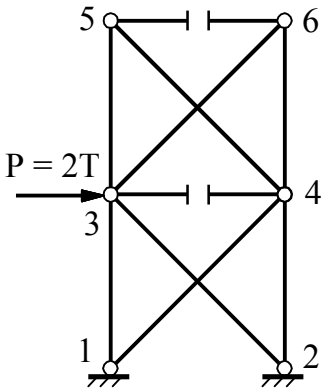
H.5.8.1 H.5.8.2 H.5.8.3 H.5.8.4

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.5.8.2). Ở đây ta xem các thanh 56, 34 là các liên kết thanh và cắt nó.

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$



H.5.8.5

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{EF_i} l_i \qquad k, m = \overline{1,2}$$

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N_{ip}^o}{EF_i} l_i \qquad i : \text{thanh thứ i.}$$

Sơ đồ để xác định $\overline{N}_{i1}, \overline{N}_{i2}, N_{ip}^o$ được tạo trên các hình vẽ (H.5.8.3, H.5.8.4 & H.5.8.5)

Lực dọc được xác định theo các cách trong bài hệ dàn.

Kết quả tính toán được thể hiện trong bảng tính (B.5.8.1)

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} (5+8\sqrt{2})a.X_1 + (2-4\sqrt{2})a.X_2 + (1-2\sqrt{2})Pa = 0 \\ (2-4\sqrt{2})a.X_1 + (3+4\sqrt{2})a.X_2 + (1+2\sqrt{2})Pa = 0 \end{cases}$$

Ở đây do các thanh có độ cứng bằng EF nên ta không đưa vào trong tính toán cho gọn.

Giải phương trình:

$$\begin{cases} X_1 = 0{,}014P \\ X_2 = -0{,}436P \end{cases}$$

4. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

$$N_i = \overline{N}_{i1}X_1 + \overline{N}_{i2}X_2 + N_{ip}^o$$

Xem kết quả trong bảng tính (B.5.8.1)

Thanh	l_i	$\overline{N}_{i1}$	$\overline{N}_{i2}$	N_{ip}^{o}	$\overline{N}_{i1}\overline{N}_{i1}l_i$	$\overline{N}_{i1}\overline{N}_{i2}l_i$	$\overline{N}_{i2}\overline{N}_{i2}l_i$	$\overline{N}_{i1}N_{ip}^{o}l$	$\overline{N}_{i2}N_{ip}^{o}l_i$	N_i
5-6	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-4	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-3	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-4	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-3	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
3-4	a	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,436P
4-2	a	1	1	0	a	a	0	0	0	-0,422P
4-1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	0	0	0,636P
3-2	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2aP\sqrt{2}$	$2aP\sqrt{2}$	-0,777P
3-1	a	1	1	P	a	a	a	Pa	Pa	0,578P
Tổng					$(5+8\sqrt{2})a$	$(2-4\sqrt{2})a$	$(3+4\sqrt{2})a$	$(1-2\sqrt{2})Pa$	$(1+2\sqrt{2})Pa$	

B.8.1 Bảng tính lực dọc trong các thanh dàn

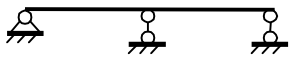
§9. DẦM LIÊN TỤC

I. phân tích hệ:

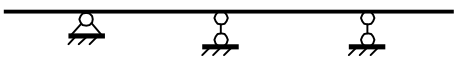
1. Khái niệm: Dầm liên tục là hệ gồm 1 thanh thẳng nối với trái đất bằng số gối tựa lớn hơn hai để tạo thành hệ bất biến hình.

2. Phân loại dầm liên tục:

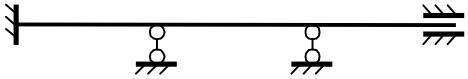
- Dầm liên tục hai đầu khớp (H.5.9.1)
- Dầm liên tục có đầu thừa (H.5.9.2)
- Dầm liên tục có đầu ngàm (H.5.9.3)



H.5.9.1



H.5.9.2

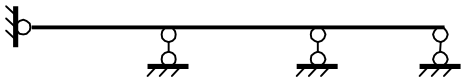


H.5.9.3

3. Bậc siêu tĩnh:

Cách 1: n = 3V – K

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.4) có n = 3.3 – 7 = 2.

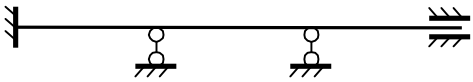


H.5.9.4

Cách 2: n = C – 3

C là số liên kết nối đất tương đương quy về liên kết loại 1.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.5) có n = 7 – 3 = 4.



H.5.9.5

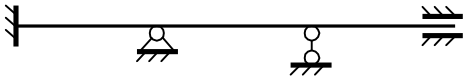
Trường hợp cho phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và tải trọng chỉ tác dụng vuông góc với trục dầm thì gối cố định chỉ có hiệu quả như gối di động. Khi đó bậc siêu tĩnh được tính bằng biểu thức:

$$n = C_{tg} + N$$

C_{tg}: số gối tựa trung gian (không kể hai gối ngoài cùng), không cần phân biệt là gối cố định hay di động.

N: số liên kết ngàm, không cần phân biệt là ngàm trượt hay ngàm.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.6) có n = 2 + 2 = 4.



H.5.9.6

II. Cách tính dầm liên tục bằng phương pháp phương trình ba mômen:

Bài toán dầm liên tục là một trường hợp của hệ siêu tĩnh nên ta có thể vận dụng phương pháp lực để tính toán. Tuy nhiên, để phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản ta đi cụ thể hoá hệ phương trình chính tắc của nó.

Xét một dầm liên tục hai đầu khớp gồm (n + 1) nhịp, có độ cứng EJ không đổi trên từng nhịp, chịu tác dụng của các nguyên nhân tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (H.5.9.7).

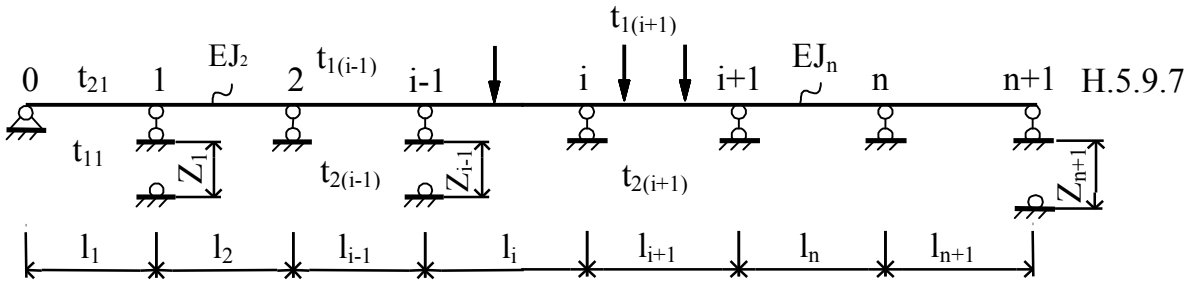
1. Hệ cơ bản:

Chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay thế liên kết hàn bằng liên kết khớp (H.5.9.8)).

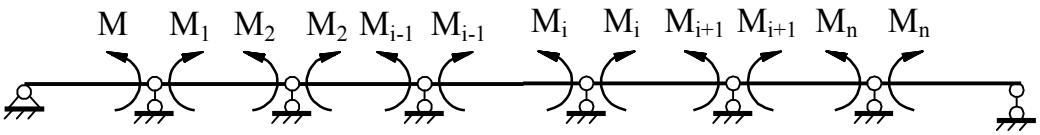
2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình i của hệ phương trình cơ bản

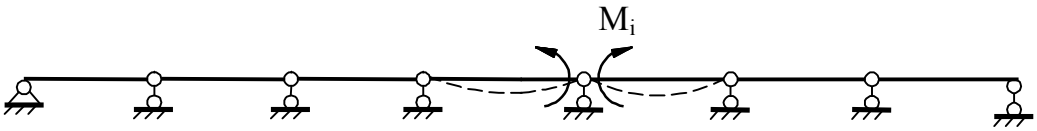
$$\delta_{i1}M_1 + \delta_{i2}M_2 + ...\delta_{ii-1}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{ii+1}M_{i+1} + ..\delta_{in}M_n + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0$$



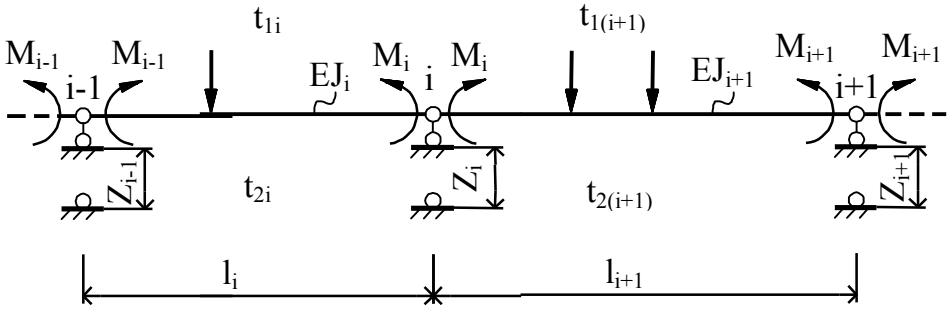
H.5.9.7



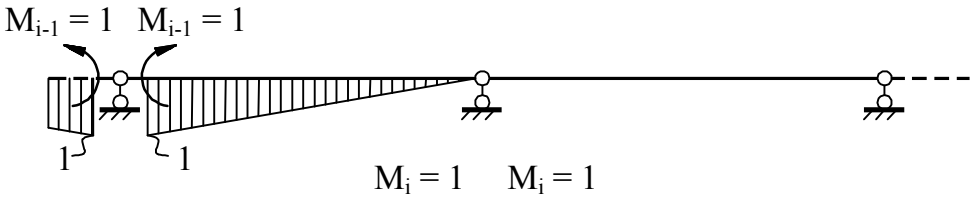
H.5.9.8



H.5.9.9

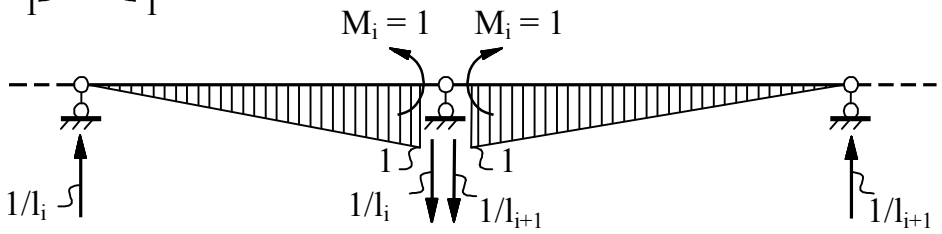


H.5.9.10



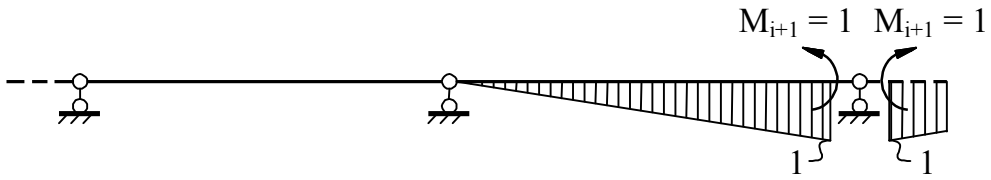
$(\overline{M}_{i-1})$

H.5.9.11



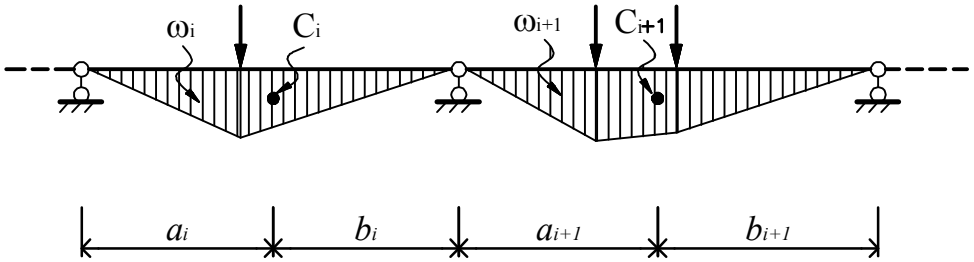
$(\overline{M}_{i})$

H.5.9.12



$(\overline{M}_{i+1})$

H.5.9.13



(M_P^o)

H.5.9.14

Phương trình này biểu thị điều kiện góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i bằng không.

Ta biết $\delta_{ik} = \delta_{ki}, \delta_{ki}$ ở đây là chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện hai bên gối tựa thứ k do riêng $M_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản. Mặt khác, M_i chỉ gây ra biến dạng trên nhịp i và (i + 1) (H.5.9.9). Điều đó có nghĩa là:

$\delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i} \neq 0$, còn δ_{ki} (k $\neq$ (i - 1), i, (i + 1)) = 0

Thay vào phương trình trên:

$$\delta_{ii-1} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{ii+1} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0.$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Xác định các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i-1}) = \frac{1}{EJ_i}.\frac{1.l_i}{2}.\frac{2}{3}.1 = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) = \frac{1}{EJ_i}.\frac{1.l_i}{2}.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{1.l_{i+1}}{2}.\frac{2}{3}.1 = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i+1}) = \frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{1.l_{i+1}}{2}.\frac{1}{3}.1 = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

b. Xác định các số hạng tự do:

- Do tải trọng: (Δ_{iP})

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(M_p^o) = \frac{1}{EJ_i}\omega_i.\frac{a_i}{l_i}.1 + \frac{1}{EJ_{i+1}}.\omega_{i+1}.\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}.1 = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}EJ_{i+1}}$$

ω_i: diện tích của (M_P^o) trên nhịp thứ i, dấu của ω_i được lấy theo dấu của (M_P^o).

a_i, b_i :khoảng cách từ trọng tâm diện tích của biểu đồ (M_P^o) đến gối tựa trái và phải của nhịp i.

-Do biến thiên nhiệt độ: (Δ_{it})

Trên hệ cơ bản không tồn tại lực dọc nên:

$$\Delta_{it} = \Sigma\frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_i) = \frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i})\frac{1.l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{1.l_{i+1}}{2}$$

α: Hệ số dãn nở vì nhiệt.

h_i: chiều cao thứ dầm ở nhịp thứ i.

- Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{iZ})

$$\Delta_{iZ} = -\Sigma R_{ji} Z_j = -\left[-\frac{1}{l_i}.Z_{i-1} + \frac{1}{l_i}.Z_i + \frac{1}{l_{i+1}}.Z_i - \frac{1}{l_{i+1}}.Z_{i+1}\right] = \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}$$

Trong đó: Z_i là độ lún của gối tựa thứ i, theo biểu thức thì Z_i lấy dấu dương khi chuyển vị đi xuống.

Thay tất cả các hệ số vào phương trình trên:

$$\frac{l_i}{6EJ_i}.M_{i-1} + (\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}).M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}.M_{i+1} + \frac{1}{EJ_i}.\frac{\omega_i a_i}{l_i} +$$

$$+\frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_i}{2} + \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} = 0$$

Chọn 1 J_0 làm chuẩn (thường chọn J của nhiều nhịp có J giống nhau của dầm). Và đặt:

$\lambda_i = l_i.\dfrac{J_0}{J_i}$: *gọi là chiều dài quy ước của nhịp i.*

Thay vào phương trình:

$$\lambda_i.M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6J_0\left[\frac{\omega_i a_i}{l_i.J_i} + \frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}.J_{i+1}}\right] +$$

$$+6EJ_o\left[\frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_{i+1}}{2}\right] + 6EJ_0\left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}\right] = 0$$

Trường hợp dầm có tiết không đổi trên toàn nhịp:$J_1 = J_2 =... J_n = J = const$. Lấy $J_0 = J$ và thay vào ta được:

$$l_i.M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6\left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1}.b_{i+1}}{l_{i+1}}\right] +$$

$$+6EJ\left[\frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_{i+1}}{2}\right] + 6EJ\left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}\right] = 0$$

Cho $i = 1,\overline{n}$ ta được hệ phương trình chính tắc

Giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (M_1, M_2, ..., M_n).

4. Vẽ cácbiểu đồ nội lực:

- Với biểu đồ mô men (M): mỗi nhịp của dầm ta đã biết được mômen uốn tại 2 gối tựa. Nối 2 tung độ này bằng 1 đoạn thẳng và treo biểu đồ (M_p^o) của nhịp tương ứng vào.

-Với biểu đồ lực cắt (Q), lực dọc (N): Vẽ như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.9.15)

1. Bậc siêu tĩnh:

$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2$

2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản: (H.5.9.16 & H.5.9.17)

3. Viết các phương trình ba mômencho các gối tựa trung gian.

i = 1: $\lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0\left[\dfrac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \dfrac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2}\right] = 0$

i = 2: $\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0\left[\dfrac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \dfrac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3}\right] = 0$

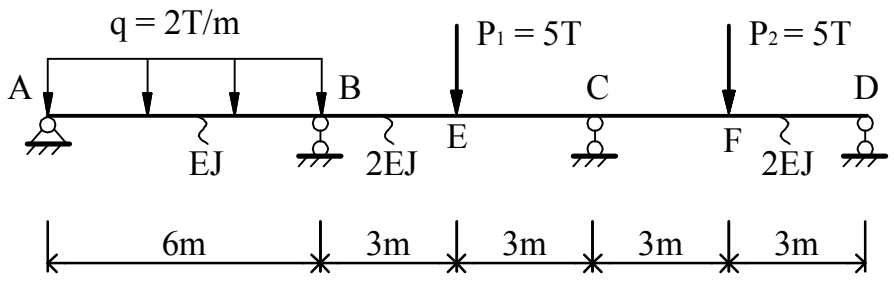
4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen: $M_0 = M_3 = 0$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i\dfrac{J_0}{J_i} \rightarrow \lambda_1 = 6m; \lambda_2 = 3m; \lambda_3 = 3m$

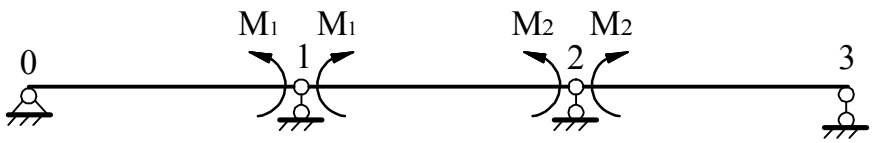
$\omega_1 = \dfrac{2}{3}l_1.f = \dfrac{2}{3}.9.6 = 36$; $a_1 = b_1 = 3$; $\omega_2 = \dfrac{7,5.6}{2} = 22,5$; $a_2 = b_2 = 3$

$\omega_3 = \dfrac{7,5.6}{2} = 22,5$; $a_3 = b_3 = 3$

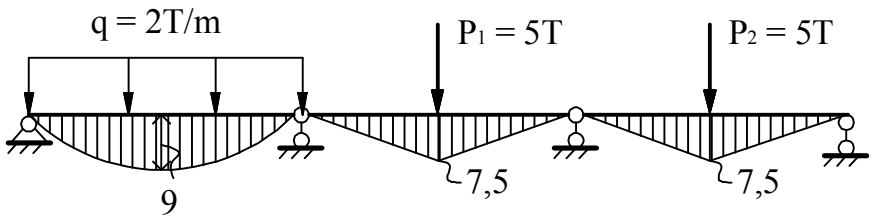
Thay vào phương trình ba mômen:



H.5.9.15

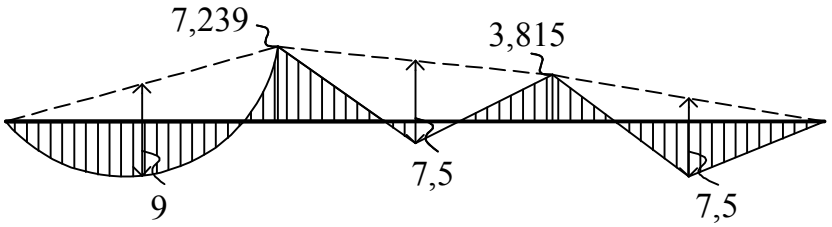


H.5.9.16



H.5.9.17

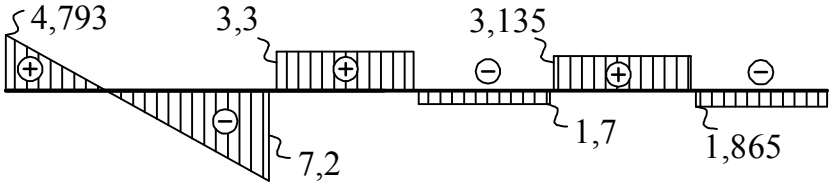
M_P^o



H.5.9.18

M

(T.m)



H.5.9.19

Q

(T)

H.5.9.20

N

---

i = 1 $\quad 6.0 + 18M_1 + 3M_2 + 6J\left[\dfrac{36.3}{6.J} + \dfrac{22,5.3}{6.2J}\right] = 0$

i =2 $\quad 3.M_1 + 12M_2 + 3.0 + 6J\left[\dfrac{22,5.3}{6.2J} + \dfrac{22,5.3}{6.2J}\right] = 0$

$$\begin{cases} 6M_1 + M_2 = -47,25 \\ M_1 + 4M_2 = -22,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -7,239 < 0 \\ M_2 = -3,815 < 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: treo biểu đồ (H.5.9.18)

b. Biểu đồ lực cắt: suy ra từ biểu đồ mômen.

Trên đoạn AB: $\quad Q^{tr} = \dfrac{-7,239 - 0}{6} + \dfrac{1}{2}.2.6 = 4,793$

$$Q^{Ph} = \frac{-7,239 - 0}{6} - \frac{1}{2}.2.6 = -7,2$$

Trên đoạn BE: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{1,972-(-7,939)}{3} = 3,3$

Trên đoạn EC: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{-3,815-1,972}{3} = -1,7$

Trên đoạn CF: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{5,592-(-3,815)}{3} = 3,135$

Trên đoạn FD: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{0-5,592}{3} = -1,864$

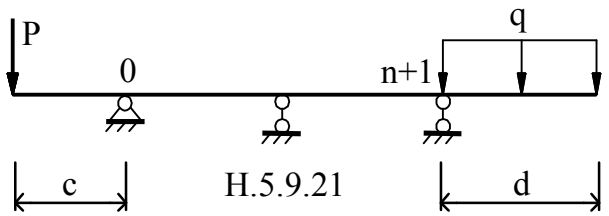
Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.9.19)

c. Biểu đồ lực dọc (N): trùng với đường chuẩn.

**** Các trường hợp khác của dầm liên tục:***

a. Dầm liên tục có thừa: (H5.9.21)

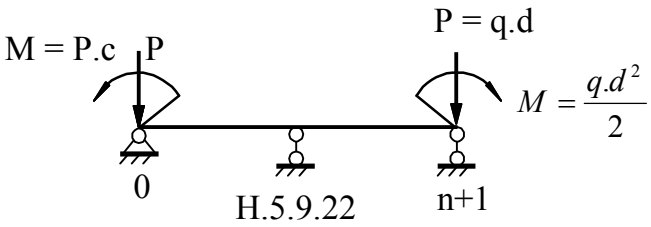
- Phần đầu thừa là tĩnh định nên có thể xác định và vẽ biểu đồ nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.



H.5.9.21

- Thực hiện cắt bỏ đầu thừa, đưa tải trọng về thành các lực tập trung tại gối tựa biên (H.5.9.22). Có hai quan niệm về mômen gối tựa này:

+ Xem là ngoại lực thì cần kể nó khi vẽ biểu đồ (M_P^o)



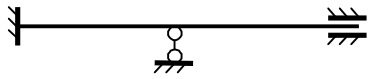
H.5.9.22

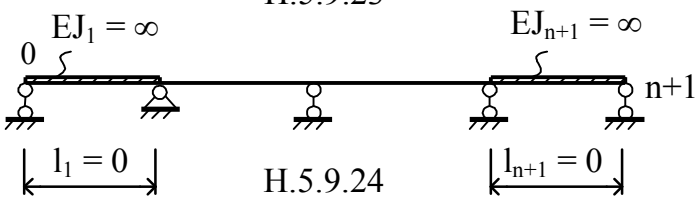
+ Xem là mômen tại các gối tựa trong phương trình 3 mômen, thì chúng là M_0 và M_{n+1}. Trong hệ trên hình (H.5.9.22) thì M_0 = -P.c và $M_{n+1} = -\dfrac{qd^2}{2}$.

Đến đây ta trở lại bài toán dầm liên tục 2 đầu khớp.

b. Dầm liên tục có đầu ngàm:(H.5.9.23)

Thay thế ngàm hoặc ngàm trượt bằng một nhịp có độ cứng EJ = ∞ có chiều dài tuỳ ý hoặc chiều dài bằng không và được liên kết với trái đất bằng số liên kết tương đương với ngàm hoặc ngàm trượt. (H.5.9.24)


H.5.9.23



H.5.9.24

Sau khi thực hiện như trên, ta đưa dầm về thành hai đầu khớp và trở lại bài toán đã biết.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen cuốn của hệ trên hình vẽ (H.5.9.25). Cho biết EJ = 1080T.m^2; φ = 0,005radian; Δ_1 = 0,03m; Δ_2 = 0,02m; h_{2EJ} = 0,4m; h_{EJ} = 0,3m.

Đưa hệ về hệ tương đương 2 đầu khớp như trên hình vẽ (H.5.9.26)

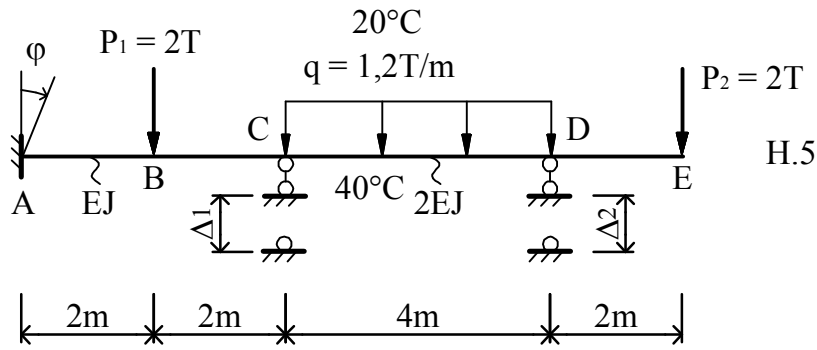
1. Bậc siêu tĩnh:

$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2$ (tính trên hệ tương đương)

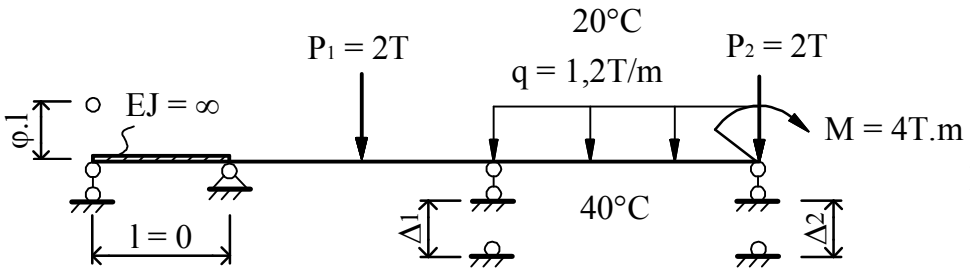
2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_P^o). Kết quả trên hình (H5.9.27& H5.9.28)

Ở đây ta xem M = -P.2 = -4 là mômen M_3 trong phương trình 3 mômen.

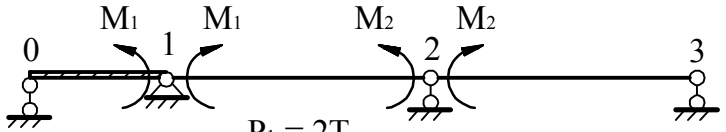
3.Viết phương trình 3 mômen cho các gối tựa trung gian:



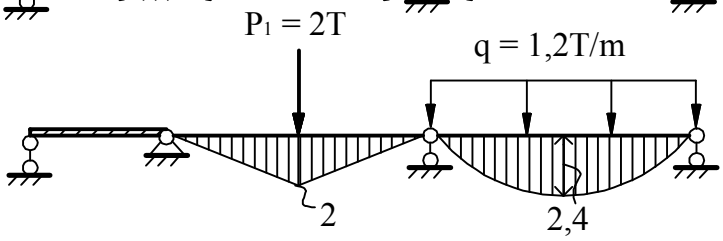
H.5.9.25



H.5.9.26

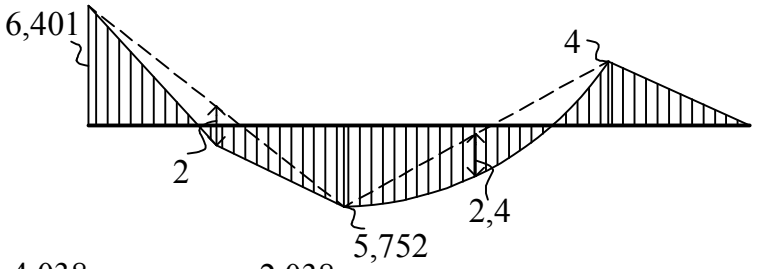


H.5.9.27



H.5.9.28

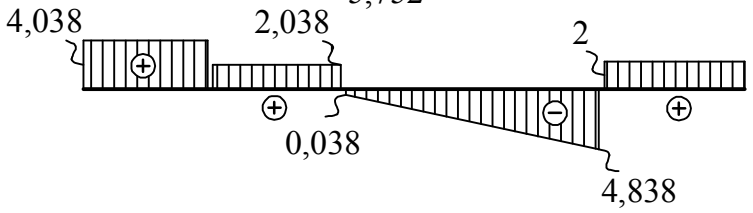
(M_P^o)



H.5.9.29

(M)

(T.m)



H.5.9.30

(Q)

(T)

H.5.9.31

(N)

i = 1
$$\lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1+\lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0\left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2}\right] +$$
$$+6EJ_0\left[\frac{\alpha}{h_1}(t_{21}-t_{11}).\frac{l_1}{2} + \frac{\alpha}{h_2}(t_{22}-t_{12}).\frac{l_2}{2}\right] + 6EJ_0\left[\frac{Z_0-Z_1}{l_1} + \frac{Z_2-Z_1}{l_2}\right] = 0$$

i = 2
$$\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2+\lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0\left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3}\right] +$$
$$+6EJ_0\left[\frac{\alpha}{h_2}(t_{22}-t_{12}).\frac{l_2}{2} + \frac{\alpha}{h_3}(t_{23}-t_{13)}).\frac{l_3}{2}\right] + 6EJ_0\left[\frac{Z_1-Z_2}{l_2} + \frac{Z_3-Z_2}{l_3}\right] = 0$$

Ở đầu bài cho biết $\alpha = 1{,}2.10^{-5}\,({}^0C^{-1}); h_{EJ} = 0{,}3m$; h_{2EJ} = 0,4m; EJ = 1080T.m^2

4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen:

$M_0 = 0$; $M_3 = -4$; $t_{23} = 40^0C$; $t_{13} = 20^0C$

$Z_0 = -0{,}005l_1$; $Z_2 = 0{,}03$; $Z_0 = 0{,}02$; $Z_1 = 0$

$\omega_1 = 0$; $\omega_2 = \frac{1}{2}.2.4 = 4; a_2 = b_2 = 2m$; $\omega_3 = \frac{2}{3}.4.2{,}4 = 6{,}4; a_3 = b_3 = 2m$

Chọn J_0 = J, tính $\lambda_i = l_i.\frac{J_0}{J_i}$

$\rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 2$

Thay vào:

i = 1: $$0.0 + 2(0+4)M_1 + 4M_2 + 6J\left[0 + \frac{4.2}{4.J}\right] +$$
$$+6EJ[0+0] + 6EJ\left[\frac{-0{,}005.l_1 - 0}{l_1} + \frac{0{,}03-0}{4}\right] = 0$$

$\rightarrow 8M_1 + 4M_2 = -12 - 0{,}015EJ = -28{,}2$

i = 2: $$4M_1 + 2(4+2)M_2 + 2.(-4) + 6J\left[\frac{4.2}{4.J} + \frac{6{,}4.2}{4.2J}\right] +$$
$$+6EJ\left[0 + \frac{\alpha}{0{,}4}(40-20)\frac{4}{2}\right] + 6EJ\left[\frac{0-0{,}03}{4} + \frac{0{,}02-0{,}03}{4}\right] = 0$$

$\rightarrow 4M_1 + 12M_2 = 8 - 21{,}6 - 600EJ + 0{,}06EJ = 43{,}424$

$$\rightarrow \begin{cases} 8M_1 + 4M_2 = -28{,}2 \\ 4M_1 + 12M_2 = 43{,}424 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -6{,}401 < 0 \\ M_2 = 5{,}752 > 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen (M): treo biểu đồ (H5.9.29)

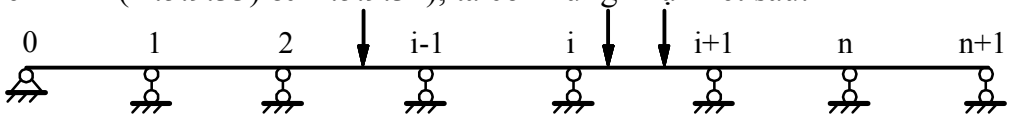
b. Biểu đồ lực cắt, lực dọc (H5.9.30 & H5.9.31)

III. Tính dầm liên tục bằng phương pháp tiêu cự mômen:

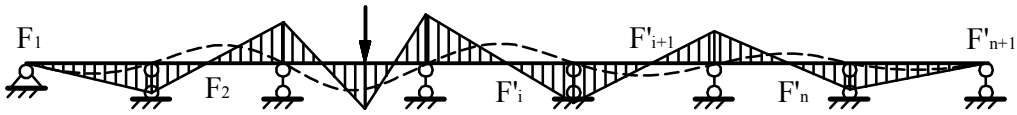
**** Mục đích:*** Là đi vận dụng khéo léo phương pháp phương trình 3 mômen để tính dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp mà không phải giải hệ phương trình chính tắc. Nếu trường hợp tải trọng tác dụng lên nhiều nhịp thì có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa về thành tổng của nhiều bài toán, mỗi bài toán tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp.

Ví dụ: Hệ trên hình (H.5.9.32) có thể phân tích thành hai trường hợp như trên hình (H.5.9.33 & H.5.9.34)

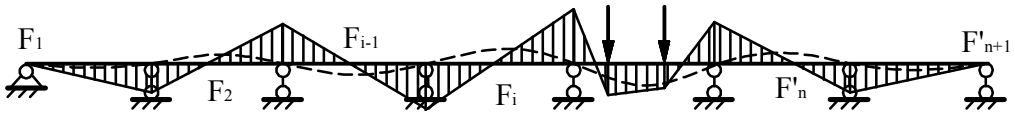
Với dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng lên một nhịp (Ví dụ dầm trên hình (H.5.9.33) & H.5.9.34), ta có những nhận xét sau:



H.5.9.32



H.5.9.33



H.5.9.34

a. Đường đàn hồi (đường đứt nét) lượn theo hình sóng trên những nhịp kế tiếp nhau.

b. Trên những nhịp không chịu tải trọng tác dụng thì mômen uốn tại hai gối tựa liên tiếp luôn trái dấu nhau, mômen uốn tại gốc tựa gần nhịp chịu tải trọng hơn sẽ có giá trị tuyệt đối lớn hơn. Trên những nhịp này biểu đồ mômen uốn là đoạn thẳng cắt đường chuẩn tại 1 điểm gọi là *tiêu điểm mônmen*.

+ Những tiêu điểm nằm bên trái nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm trái. Ký hiệu F_i.

+ Những tiêu điểm nằm bên phải nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm phải. Ký hiệu F'_i

Ở đây i là chỉ số nhịp thứ i.

c. Ta định nghĩa: tỷ số dương và lớn hơn đơn vị của 2 mômen uốn tại 2 gối tựa liên tiếp của nhịp không chịu tải trọng tác dụng là tỷ số tiêu cự mômen.

+ Đối với nhịp nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng:

$k_i = -\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$: gọi là tỷ số tiêu cự trái.

+ Đối với nhịp nằm bên phải của nhịp chịu tải trọng:

$k'_i = -\dfrac{M_{i-1}}{M_i}$: gọi là tỷ số tiêu cự phải

Dễ thấy nếu biết được tỷ số tiêu cự mômen thì sẽ biết được vị trí của tiêu điểm mômen và ngược lại.

d. Ta sẽ vẽ được biểu đồ mômen nếu biết được 2 yếu tố:

+ Mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng.

+ Các tỷ số tiêu cự mômen.

1. Xác định tỷ số tiêu cự :

a. Tỷ số tiêu cự trái: (k_i)

Xét 2 nhịp thứ i và (i-1) nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng tác dụng. Viết phương trình 3 mômen cho gối (i-1):

$$\lambda_{i-1}.M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_i.M_i = 0$$

($\Delta_{i-1P} = 0$ do trên các nhịp này không chịu tải trọng tác dụng)

Chia 2 vế của phương trình cho M_{i-1} ta được:

$$\lambda_{i-1}.\frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0$$

Mặt khác: $k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}, k_{i-1} = -\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}}$

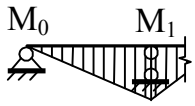
Thay vào, rút gọn ta được:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left[2 + \frac{1}{k_{i-1}}\right] \qquad (5\text{-}27)$$

Công thức (5-12) có tính truy hồi nghĩa là có thể xác định được k_i nếu biết được k_{i-1}.

+ Nếu gối tựa đầu tiên là khớp: (H.5.9.35)

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$



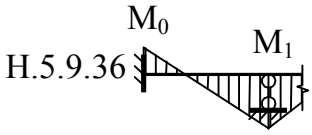
H.5.9.35

+ Nếu gối tựa đầu tiên là ngàm: (H.5.9.36)

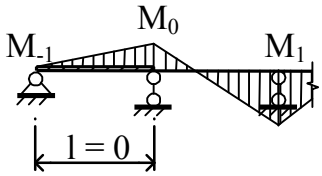
Đưa về hệ tương đương có gối tựa đầu tiên là khớp (H.5.9.37), ta có $k_0 = \infty$. Từ công thức (5-12) ta tính được:

$$k_1 = 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[2 - \frac{1}{k_0}\right]$$

$$= 2 + \frac{0}{\lambda_1}\left[2 - \frac{1}{\infty}\right] = 2$$



H.5.9.36



H.5.9.37

b. Tỷ số tiêu cự phải: (k'_i)

Tương tự, ta thiết lập được:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right] \qquad (5\text{-}28)$$

Công thức truy hồi (5-13) được xác định theo chỉ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng:

+ Nếu gối tựa cuối cùng là khớp: $k'_{n+1} = \infty$

+ Nếu gối tựa cuối cùng là ngàm: $k'_{n+1} = 2$

2. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng tác dụng:

Giả sử tải trọng tác dụng lên nhịp thứ i, mômen cần xác định là M_{i-1}, M_i. Bằng cách phân tích phương trình 3 mômen cho 2 gối tựa thứ i và (i - 1) ta được kết quả:

$$M_{i-1} = -\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_i J_i}.\frac{b_i k'_i - a_i}{k_i k'_i - 1} = -\frac{6\omega_i}{l_i^2}.\frac{b_i k'_i - a_i}{k_i k'_i - 1} \qquad (5\text{-}29)$$

$$M_i = -\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_i J_i}.\frac{a_i k_i - b_i}{k_i k'_i - 1} = -\frac{6\omega_i}{l_i^2}.\frac{a_i k_i - b_i}{k_i k'_i - 1} \qquad (5\text{-}30)$$

Chú ý:

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp đầu tiên và gối tựa đầu tiên là khớp:

$$M_0 = 0;\ M_1 = -\frac{6\omega_1}{l_i^2}.\frac{a_1 k_1 - b_1}{k_1 k'_1 - 1} = -\frac{6\omega_1}{l_1^2}.\frac{a_1\infty - b_1}{\infty k'_1 - 1} = -\frac{6\omega_1}{l_1^2}.\frac{a_1}{k'_1}$$

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp cuối cùng và gối tựa cuối cùng là khớp: ($k'_{n+1} = \infty$)

$$M_{n+1} = 0;\ M_n = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2}.\frac{b_{n+1}k'_{n+1} - a_{n+1}}{k_{n+1}k'_{n+1} - 1} = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2}.\frac{b_{n+1}}{k_{n+1}}$$

3. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên nhịp chịu tải trọng tác dụng: dựng tung độ của 2 gối tựa của nhịp và treo biểu đồ (M_P^o) vào.

- Bên trái của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_{i-1} = -\frac{M_i}{k_i}$$

- Những nhịp bên phải của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_i = -\frac{M_{i-1}}{k'_i}$$

b. Biểu đồ lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ mômen.

c. Biểu đồ lực dọc: Thường trùng với đường chuẩn.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.5.9.38)

1. Tạo hệ cơ bản đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_P^o), xác định các đại lượng:

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3}lf = \frac{2}{3}.4.4 = \frac{32}{3}$$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i.\frac{J_0}{J_i}$

$\rightarrow \lambda_1 = 3m;\ \lambda_2 = 2m;\ \lambda_3 = \lambda_4 = 3m.$

2. Xác định các tỷ số tiêu cự mômen:

a. Tỷ số tiêu cự trái:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\left[2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right]$$

Thay $k_1 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k_2 = 2 + \frac{3}{2}\left[2 - \frac{1}{\infty}\right] = 5;\ k_3 = 2 + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{5}\right] = 3{,}2;\ k_4 = 2 + \frac{3}{3}\left[2 - \frac{1}{3{,}2}\right] = 3{,}68$$

b. Tỷ số tiêu cự phải:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right]$$

Thay $k'_4 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k'_3 = 2 + \frac{3}{3}\left[2 - \frac{1}{\infty}\right] = 4;\ k'_2 = 2 + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{4}\right] = 4{,}625;\ k'_1 = 2 + \frac{2}{3}\left[2 - \frac{1}{4{,}625}\right] = 3{,}498$$

3. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng:

$$M_2 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2}.\frac{b_2k'_2 - a_2}{k_2k'_2 - 1} = -\frac{6.32}{4^2.3}.\frac{2.4,625 - 2}{5.4,625 - 1} = -1,311$$

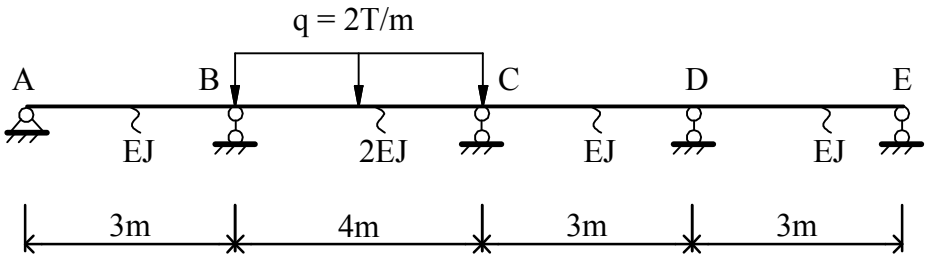
$$M_3 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2}.\frac{a_2k_2 - b_2}{k_2k'_2 - 1} = -\frac{6.32}{4^2.3}.\frac{2.5 - 2}{5.4,625 - 1} = -1,446$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

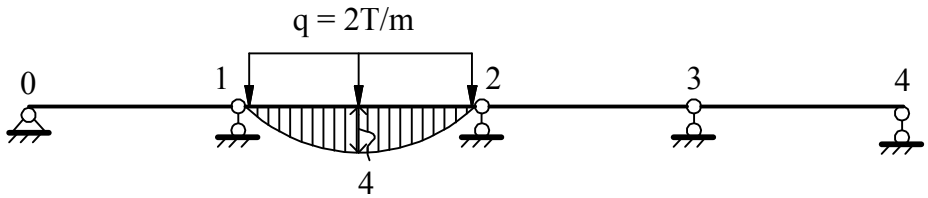
a. Biểu đồ mômen: Kết quả trên hình (H.5.9.40)

b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M). (H.5.9.41).

c. Biểu đồ lực dọc: Trùng với đường chuẩn.

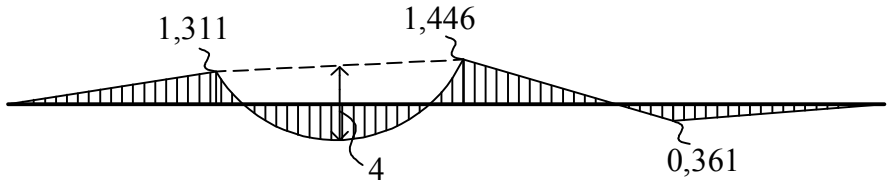


H.5.9.38



H.5.9.39

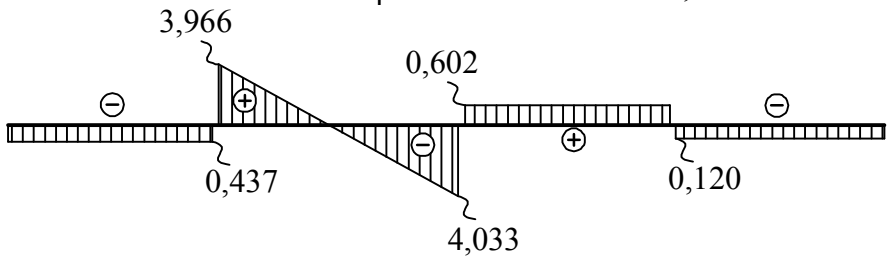
M_P^o



H.5.9.40

M

(T.m)



H.5.9.41

Q

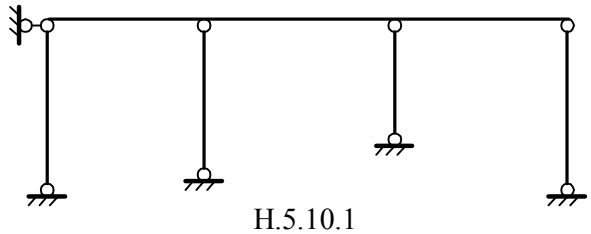
(T)

H.5.9.42

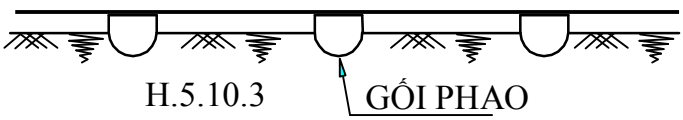
N

§10. TÍNH DẦM LIÊN TỤC TẠI ĐẶT TRÊN CÁC GỐI TỰA ĐÀN HỒI

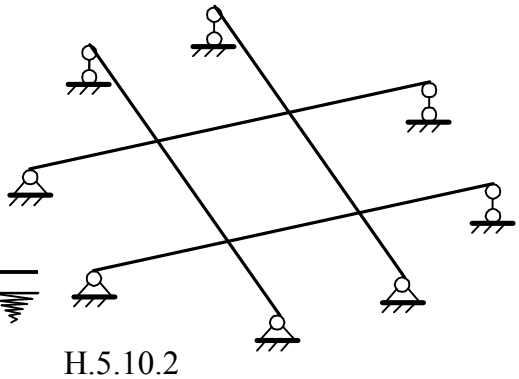
I. Khái niệm: là những dầm liên tục đặt trên các gối tựa có khả năng chuyển vị theo phương vuông góc với trục dầm như cột có chiều dài hữu hạn hệ dầm đỡ dầm đang xét (H.5.10.2), dầm trên các gối phao (H.5.10.3)...



H.5.10.1



H.5.10.3



H.5.10.2

Gọi k_i là hệ số đàn hồi của gối tựa thứ i. Về ý nghĩa, k_i là chuyển vị của gối tựa thứ i khi gối chịu lực dọc bằng đơn vị. Ví dụ, hệ số đàn hồi của cột thứ i có tiết diện F_i, chiều cao d_i sẽ là $k_i = \frac{1.d_i}{EF_i}$. Vậy nếu phản lực tại gối tựa thứ i là R_i thì chuyển vị tại gối tựa này là k_iR_i. Ta biểu thị các gối tựa bằng các lò xo với hệ số k_i.

III. Phương trình năm mômen:

1. Hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta xét các nhịp thứ (i - 2), (i - 1), i, (i + 1), (i + 2) của một dầm liên tục đặt trên các gốc tựa đàn hồi như trên hình (H.5.10.4). Tương tự bài toán dầm liên tục, tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay hàn bằng khớp) (H.5.10.6)

2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình thứ i của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{i1}M_1 + \delta_{i2}M_2 + ...\delta_{in}M_n + \Delta_{iP} = 0$$

Nhận xét rằng: $\delta_{ik} = \delta_{ki}; \delta_{ki}$ là chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở 2 bên gối tựa thứ k do $M_i = 1$ gây ra. Với cách chọn hệ cơ bản như trên thì M_i chỉ gây ra biến dạng tại nhịp thứ (i - 1), i, (i + 1), (i + 2) (H.5.10.9) và chỉ gây ra chuyển vị góc xoay tại các gối tựa (i - 2), (i - 1), i, (i + 1), (i + 2). Điều này có ý nghĩa $\delta_{(i-2)i}, \delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i}, \delta_{(i+2)i} \neq 0$ còn các hệ số δ_{ki} (k ≠ i - 2, i - 1, i, i + 1) = 0.

Vậy ta viết phương trình thứ i:

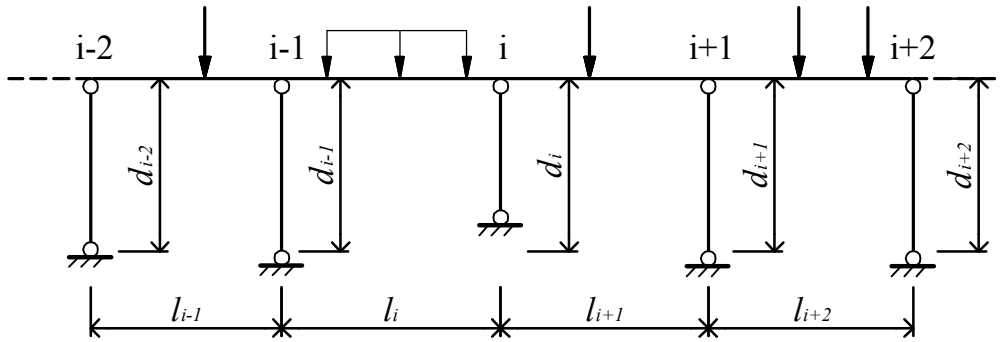
$$\delta_{i(i-2)}M_{i-2} + \delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{i+1} + \delta_{i(i+2)}M_i + \Delta_{iP} = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình năm mômen.

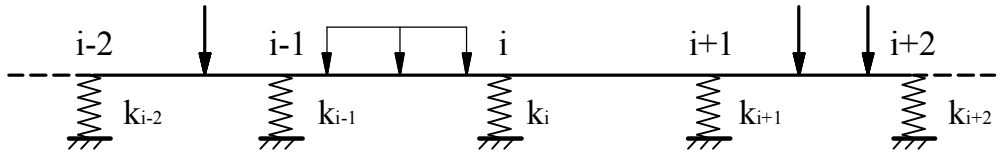
3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Các hệ số này ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn còn phải kể đến biến dạng dọc trục trong các gối tựa đàn hồi.

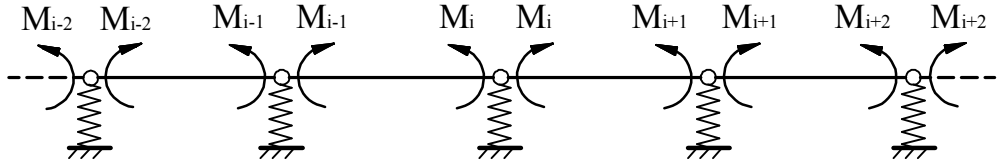
$$\delta_{ik} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_k) + \sum_m \overline{N}_{mi}.\overline{N}_{mk}.\frac{d_m}{EF_m}$$



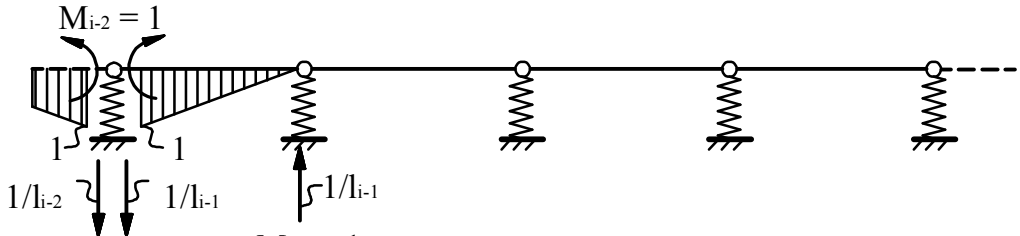
H.5.10.4



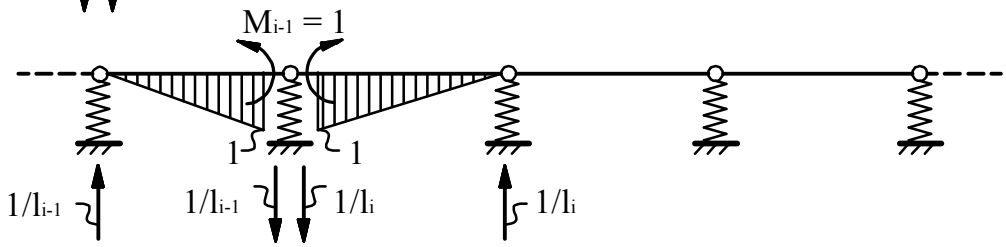
H.5.10.5



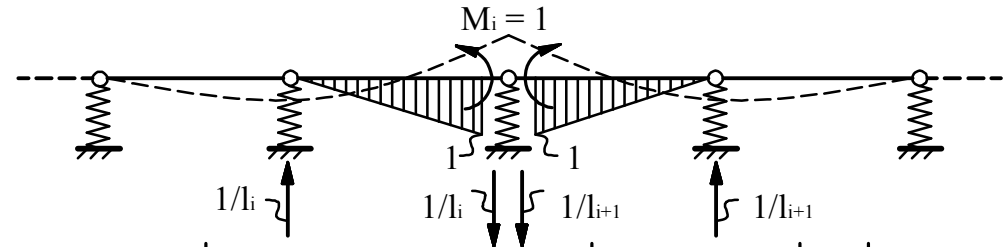
H.5.10.6



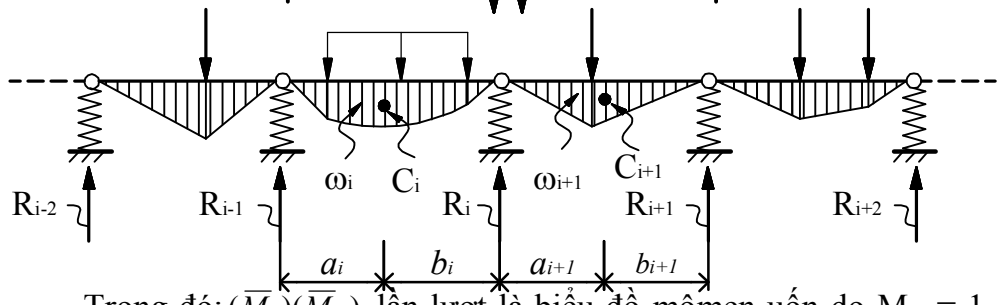
H.5.10.7 ($\overline{M}_{i-2}$)



H.5.10.8 ($\overline{M}_{i-1}$)



H.5.10.9 ($\overline{M}_i$)



H.5.10.10 ($\overline{M}_P^o$)

Trong đó: $(\overline{M}_i)(\overline{M}_k)$ lần lượt là biểu đồ mômen uốn do $M_i = 1$, $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$\overline{N}_{mi}, \overline{N}_{mk}$ lần lượt là lực dọc (phản lực) trong gối tựa thứ m do $M_i = 1$ và $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$$\delta_{i(i-2)} = 0 + (-\frac{1}{l_{i-1}})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} = \frac{k_{i-1}}{l_{i-1}.l_i}$$

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EJ_i} + (\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_i}{EF_i}$$

$$= \frac{l_i}{6EJ_i} - \frac{k_{i-1}}{l_i}(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}) - \frac{k_i}{l_i}(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})\delta_{ii}$$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + (-\frac{1}{l_i})(-\frac{1}{l_i}).\frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})^2.\frac{d_i}{EF_i} + (-\frac{1}{l_{i+1}})(-\frac{1}{l_{i+1}}).\frac{d_{i+1}}{EF_{i+1}}$$

$$= \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})^2.k_i + (\frac{1}{l_{i+1}})^2.k_{i+1}$$

Thay chỉ số i trong hệ số $\delta_{i(i-1)}$ bằng (i-1) ta sẽ được $\delta_{i(i-1)}$.

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} + \frac{k_i}{l_{i+1}}(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}) - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}})$$

Thay chỉ số i = (i + 2) trong hệ số $\delta_{i(i-2)}$ ta sẽ được $\delta_{i(i+2)}$

$$\delta_{i(i+2)} = \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}.l_{i+2}}$$

Số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc:

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_P^o) + \sum_m \overline{N}_{mi}.\overline{N}_{mP}^o.\frac{d_m}{EF_m}$$

(M_P^o) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản.

(N_m^P): lực dọc (phản lực) trong gối tựa m do P gây ra trên hệ cơ bản.

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + (-\frac{1}{l_i})(-R_{i-1}).\frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} +$$

$$+ (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}})(-R_i)\frac{d_i}{EF_i} + (-\frac{1}{l_{i+1}})(-R_{i+1}).\frac{d_{i+1}}{EF_{i+1}}$$

$$\rightarrow \Delta_{iP} = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i}.R_{i-1} - (\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}).k_i R_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}.R_{i+1}$$

Các đại lượng ω_i, a_i, b_i có ý nghĩa như trong phần phương trình 3 mômen.

Thay các hệ số ta được phương trình 5 mômen dưới dạng khai triển.

Trong trường hợp dầm có độ cứng EJ = const, chiều dài các nhịp bằng nhau (bằng l), các gối tựa có hệ số đàn hồi là như nhau thì phương trình 5 mômen có dạng:

$$\alpha M_{i-2} + (1-4\alpha)M_{i-1} + (4+6\alpha)M_i + (1-4\alpha)M_{i+1} +$$

$$+ \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2}(\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l(R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0$$

Trong đó: $\alpha = \frac{6EJ}{l^2}.k$

Sau khi thiết lập và giải hệ thống phương trình 5 mômen, ta sẽ xác định và vẽ biểu đồ nội lực như đã trình bày trong phần dầm liên tục.

§11. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

I. Đường ảnh hưởng cơ bản: là đường ảnh hưởng của các ẩn X_k, là các ẩn số thay thế cho các liên kết bị loại bỏ khi tạo hệ cơ bản.

1. Hệ cơ bản:

Tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết thừa và thay thế bằng các ẩn số X_k như trong phần hệ cơ bản của phương pháp lực.

2. Hệ phương trình chính tắc:

Để vẽ đường ảnh hưởng ta giả thiết trên công trình chỉ có 1 lực P = 1 di động theo 1 tọa độ z. Lực này bằng đơn vị và duy nhất tác dụng nên số hạng tự do chỉ còn Δ_{kP} và được thay bằng δ_{kP}. Do đó, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ...\delta_{1n}X_n + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ...\delta_{2n}X_n + \delta_{2P} = 0 \\ \qquad\qquad ..... \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ..\delta_{nn}X_n + \delta_{nP} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ: (δ_{km}).

δ_{km} không phụ thuộc vào lực P = 1 di động và được xác định như hệ chịu tải trọng bất động: $\delta_{km} = (\overline{M}_k)(\overline{M}_m)$.

b. Số hạng tự do: (δ_{kP})

δ_{kP} do P = 1 động gây ra nên sẽ thay đổi theo tọa độ chạy z của lực P di động. Khi xác định δ_{kP} ta nên chia nhiều trường hợp của lực P = 1 di động với mỗi trường hợp P di động trên một phần tử thuộc hệ. Với mỗi trường hợp ta vẽ được một "dạng "của (M_P^o).

$$\delta_{kP} = (\overline{M}_k)(M_P^o)$$

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

Sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng. Trong phương trình này các ẩn X_k được biểu diễn qua các số hạng tự do (δ_{kP}) và hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} + ...\beta_{1n}\delta_{nP} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} + ...\beta_{2n}\delta_{nP} \\ \qquad\qquad ... \\ X_n = \beta_{n1}\delta_{1P} + \beta_{n2}\delta_{2P} + ...\beta_{nn}\delta_{nP} \end{cases}$$

Trong đó β_{ik}: là hệ số ảnh hưởng, được xác định theo công thức sau:

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm1}.\frac{D_{ik}}{D}$$

D là định thức của hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11}\delta_{12}...\delta_{1n} \\ \delta_{21}\delta_{22}...\delta_{2n} \\ \qquad ... \\ \delta_{n1}\delta_{n2}...\delta_{nn} \end{vmatrix}$$

D_{ik} là định thức được suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng thứ i cột thứ k (hoặc hàng k cột i)

Sau khi xác định được X_k (là hàm theo tọa độ chạy z của P = 1 di động), cho z biến thiên sẽ vẽ được đ.a.h.X_k.

II. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực, chuyển vị:

Sau khi tìm được các đường ảnh hưởng cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, chuyển vị…) theo biểu thức sau:

đ.a.h.S = $\overline{S}_1$.(đ.a.h.X_1) + $\overline{S}_2$.(đ.a.h.X_2) +... $\overline{S}_n$.(đ.a.h.X_n) + đ.a.h.S^o (5-31)

Trong đó: $\overline{S}_k$ là giá trị của S do riêng X_k = 1 gây ra trên hệ cơ bản.

đ.a.h.X_k: là các ảnh hưởng cơ bản.

đ.a.h.S^o: đường ảnh hưởng của S trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản chọn là tĩnh định thì đ.a.h.S^o được vẽ như trong phần cơ học kết cấu I.

* *Chú ý:* Do phương trình đường ảnh hưởng S(z) là hàm bậc cao theo z nên trong cách vẽ thực hành người ta sử dụng phương pháp điểm chia và lập thành bảng tính. Có thể tham khảo nội dung của bảng (B.5.11.1) bên dưới.

B.5.11.1 Bảng tính đ.a.h.S trong hệ siêu tĩnh

Điểm	z	đ.a.h.X_1	đ.a.h.X_2	...	đ.a.h.X_n	đ.a.h.S^o	đ.a.h.S
…	…	…	…	…	…	……	

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.5.11.1). Cho EJ trong các thanh bằng hằng số trên toàn hệ.

1. Vẽ đường ảnh hưởng cơ bản:

a. Bậc siêu tĩnh:

n = 3V - K = 3.3 - 7 = 2

b. hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: (H.5.11.2)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Hệ số chính và phụ δ_{km}:

$$\delta_{11} = (\frac{1}{EJ}.\frac{1.3}{2}.\frac{2}{3}.1).2 = \frac{2}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}.\frac{1.3}{2}.\frac{1}{3}.1 = \frac{1}{2EJ}$$

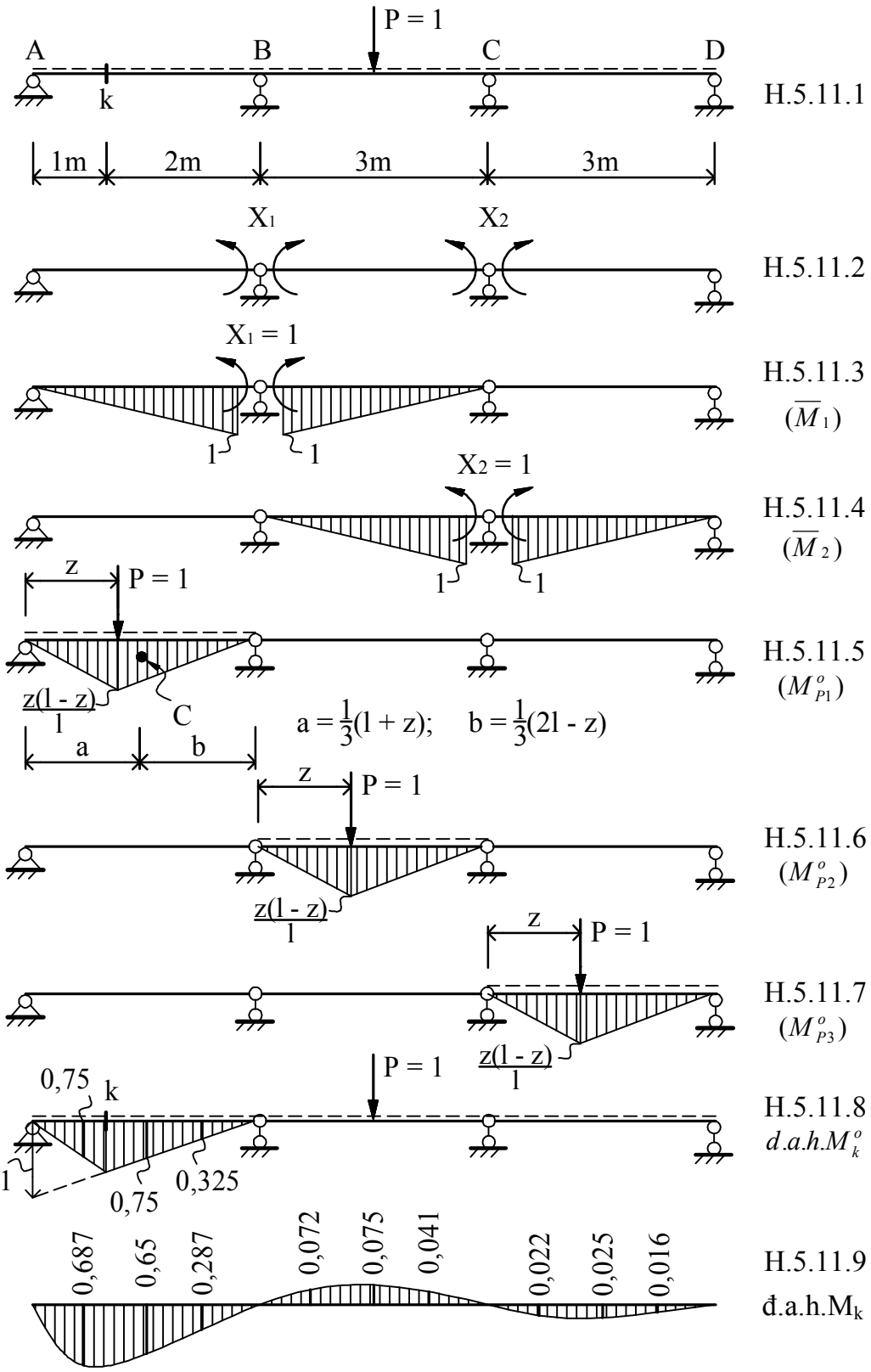
$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ}(= \delta_{11})$$

- Xác định số hạng tự do δ_{kP}:

Chia đường xe chạy ra làm ba đoạn (phần tử) AB, BC, CD. Ứng với mỗi phần tử ta chọn gốc tọa độ tại đầu trái. Ứng với mỗi phần tử, ta vẽ được (M_P^o) tương ứng (H.5.11.5→ H.5.11.7)

+ Khi P = 1di động trên AB ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M_{P1}^o) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)}{3}.3.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\frac{(3+z)}{3} = \frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$



H.5.11.1

H.5.11.2

H.5.11.3 $(\overline{M}_1)$

H.5.11.4 $(\overline{M}_2)$

H.5.11.5 (M^o_{P1})

H.5.11.6 (M^o_{P2})

H.5.11.7 (M^o_{P3})

H.5.11.8 $d.a.h.M^o_k$

H.5.11.9 đ.a.h.M_k

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M^o_{P1}) = 0$$

+ Khi P = 1di động trên BC ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M^o_{P2}) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)}{3}.3.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\frac{(2.3-z)}{3} = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M^o_{P2}) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$

+ Khi P = 1di động trên CD (z∈[0;3])

$$\delta_{1P} = (\overline{M}_1)(M^o_{P3}) = 0$$

$$\delta_{2P} = (\overline{M}_2)(M^o_{P3}) = \frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

d. Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} \end{cases}$$

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm1}.\frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{EJ} & \frac{1}{2EJ} \\ \frac{1}{2EJ} & \frac{2}{EJ} \end{vmatrix} = \frac{15}{4(EJ)^2}$$

$$\beta_{11} = (-1)^3.\frac{2}{EJ}/\frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

$$\beta_{12} = (-1)^4.\frac{1}{2EJ}/\frac{15}{4(EJ)^2} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{22} = (-1)^5.\frac{2}{EJ}/\frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

Thay vào phương trình:

+ Khi P = 1di động trên AB (z∈[0;3])

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18} + \frac{2EJ}{15}.0 = -\frac{1}{33,75}.z(9-z^2)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18} - \frac{8EJ}{15}.0 = \frac{1}{135}.z(9-z^2)$$

+ Khi P = 1 di động trên BC (z∈[0;3])

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18} + \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$

$$= -\frac{1}{33,75}.z(3-z)(6-z) + \frac{1}{135}.z(9-z^2)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18} - \frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(9-z^2)}{18}$$

$$= \frac{1}{135}.z(3-z)(6-z) - \frac{1}{33,75}.z(9-z^2)$$

+ Khi P = 1 di động trên CD (z∈[0;3])

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15}.0 + \frac{2EJ}{15}.\frac{1}{EJ}\frac{z(3-z)(6-z)}{18} = \frac{1}{135}.z(3-z)(6-z)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15}.0 - \frac{8EJ}{15}.\frac{1}{EJ}.\frac{z(3-z)(6-z)}{18} = -\frac{1}{33,75}.z(3-z)(6-z)$$

Cho z biến thiên trên từng đoạn ta có thể vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản.

2. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại k:

đ.a.h. M_k^o = $\overline{M}_{k1}$ (đ.a.h.X_1) + $\overline{M}_{k2}$ (đ.a.h.X_2) + đ.a.h. M_k^o

đ.a.h. M_k^o được vẽ trên hình (H.5.11.8)

$\overline{M}_{k1} = \frac{1}{3}; \overline{M}_{k2} = 0$

Ta lập bảng tính toán: Chia đường xe chạy ra làm 12 đoạn, mỗi đoạn dài 0,75m.

Phầntử	z(m)	đ.a.h.X_1	đ.a.h.X_2	$\overline{M}_{k1}$ đ.a.h.X_1	$\overline{M}_{k2}$ đ.a.h.X_2	đ.a.h. M_k^o	đ.a.h.M_k
AB	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,187	0,047	-0,063	0	0,75	0,687
	1,5	-0,3	0,075	-0,1	0	0,75	0,65
	2,25	-0,263	0,066	-0,088	0	0,375	0,287
	3	0	0	0	0	0	0
BC	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,216	-0,122	-0,072	0	0	0,072
	1,5	-0,225	-0,225	-0,075	0	0	-0,075
	2,25	-0,122	-0,216	-0,041	0	0	-0,041
	3	0	0	0	0	0	0
CD	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	0,066	-0,187	0,022	0	0	0,022
	1,5	0,075	-0,3	0,025	0	0	0,025
	2,25	0,047	-0,263	0,016	0	0	0,016
	3	0	0	0	0	0	0

Bảng 5.12. Bảng tính đ.a.h cơ bản và đ.a.h.M_k

§12. BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC

Theo thời gian tác dụng lên công trình, tải trọng được chia thành 2 loại:

+ Tải trọng lâu dài: Nội lực do nó gây ra không đổi.

+ Tải trọng tạm thời: Nội lực do nó gây ra sẽ thay đổi.

Tải trọng tác dụng lên công trình gồm 2 loại trên nên nội lực sẽ thay đổi trong suốt quá trình tồn tại của công trình. Do đó, khi thiết kế cần phải xác định các giá trị đại số lớn nhất và nhỏ nhất của nội lực tại tất cả các tiết diện của hệ. Nếu biểu diễn nó lên trên một đồ thị sẽ được biểu đồ gọi là biểu đồ bao nội lực.

I. Định nghĩa biểu đồ bao nội lực:

Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất do tải trọng lâu dài và tải trọng tạm thời có thể có gây ra tại tiết diện tương ứng.

II. Cách thực hiện:

Để đơn giản, ta xem tải trọng tạm thời tác dụng đồng thời lên từng nhịp của hệ và tiến hành các bước sau:

Bước 1: Vẽ biểu đồ nội lực do tải trọng lâu dài tác dụng lên toàn hệ gây ra (S_{ld})

Bước 2: Lần lượt vẽ các biểu đồ nội lực do tải trọng tạm thời gây ra sao cho mỗi trường hợp tải trọng tạm thời chỉ tác dụng lên một nhịp của hệ (S_{tt})

Bước 3: Vẽ biểu đồ bao nội lực bằng cách xác định tung độ lớn nhất (nhỏ nhất) tại các tiết diện của hệ. Biểu thức xác định có thể được viết:

$$S_{\max}^{k} = S_{ld}^{k} + \Sigma S_{tt}^{k}(+)$$

$$S_{\min}^{k} = S_{ld}^{k} + \Sigma S_{tt}^{k}(-)$$

k: chỉ tiết diện xác định tung độ biểu đồ bao.

$\Sigma S_{tt}^{k}(+)$, $\Sigma S_{tt}^{k}(-)$: lấy tổng các trường hợp nội lực tại k do tải trọng tạm thời gây ra mang dấu dương hay âm.