TOÁN CAO CẤP - ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Nguyễn Ngọc Phụng
-
Trường Đại Học Ngân Hàng TPHCM

ĐT: 0989 969 057
Email: phungngoc.nguyen@gmail.com
Website: http://nguyenngocphung.wordpress.com

10-10-2010

Nội dung môn học Đại số tuyến tính

Chương I: Ma trận

1. Ma trận và các phép toán trên ma trận.
2. Định thức.
3. Hạng của ma trận.
4. Ma trận nghịch đảo.

Chương II: Hệ phương trình tuyến tính

1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.
2. Hệ Cramer.
3. Phương pháp Gauss.
4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Chương III: Không gian vectơ nhiều chiều

1. Vectơ n-chiều, không gian vectơ n-chiều, không gian Euclide.
2. Sự phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính.
3. Hạng của hệ vectơ.
4. Không gian con: cơ sở và số chiều.
5. Tọa độ trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Chương IV: Dạng toàn phương

1. Phép biến đổi tuyến tính.
2. Trị riêng, vectơ riêng. Chéo hóa ma trận.
3. Dạng toàn phương.

Các khái niệm

Định nghĩa

Ma trận cấp $m \times n$ là một bảng số bao gồm m dòng và n cột .

Ma trận A cấp $m \times n$, kí hiệu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ với $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} & \leftarrow \text{dòng thứ i} \\ \uparrow & \\ \text{cột thứ j} & \end{array}$$

Các khái niệm

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

- A là ma trận có 3 dòng và 4 cột
- A là ma trận thực cấp 3×4
- Các phần tử của ma trận A là:
  $a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = 2, a_{14} = 3$
  $a_{21} = 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6, a_{24} = 7$
  $a_{31} = 8, a_{32} = 9, a_{33} = 10, a_{34} = 11$

Các khái niệm

Định nghĩa

Ma trận không *là ma trận có các phần tử đều bằng không,* $(a_{ij} = 0,\ \forall i,j)$*, kí hiệu là* $0_{m\times n}$.

Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

- *Khi m=1 ta được ma trận dòng* $A = (a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n})$
- *Khi n=1 ta được ma trận cột* $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Các khái niệm

Định nghĩa

Ma trận vuông *cấp n là ma trận có n dòng và n cột.*

Các phần tử a_{ii} lập thành đường chéo chính.
Các phần tử a_{ij} với $i+j=n+1$ lập thành đường chéo phụ.
Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Các khái niệm

Định nghĩa

Ma trận vuông $A = (a_{ij})_{nxn}$ được gọi là ***ma trận tam giác trên*** $\Leftrightarrow$ *Các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0* $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i > j$.

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

Định nghĩa

*Ma trận vuông $A = (a_{ij})_{nxn}$ được gọi là **ma trận tam giác dưới** $\Leftrightarrow$ Các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0$\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i < j$.*

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

Định nghĩa

Ma trận vuông A được gọi là ***ma trận chéo*** $\Leftrightarrow$ *Các phần tử không nằm trên đường chéo chính đều bằng 0*$\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Định nghĩa

Ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ***ma trận đơn vị***$\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ *và* $a_{ii} = 1, \forall i$.
Ma trận đơn vị cấp n được kí hiệu là I_n.

Ví dụ: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Các khái niệm

Ma trận bậc thang theo dòng là ma trận thỏa 2 điều kiện
1. Các dòng không (nếu có) phải nằm ở dưới cùng.
2. Phần tử khác không đầu tiên của dòng trên (nếu có) phải nằm ở cột bên trái phần tử khác không đầu tiên của dòng dưới (nếu có).

Ví dụ
Cho biết các ma trận sau có phải là ma trận bậc thang theo dòng hay không?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

Ma trận bậc thang theo dòng là ma trận thỏa 2 điều kiện
1. Các dòng không (nếu có) phải nằm ở dưới cùng.
2. Phần tử khác không đầu tiên của dòng trên (nếu có) phải nằm ở cột bên trái phần tử khác không đầu tiên của dòng dưới (nếu có).

Ví dụ
Cho biết các ma trận sau có phải là ma trận bậc thang theo dòng hay không?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A là ma trận bậc thang theo dòng.}$$

Các khái niệm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A không là ma trận bậc thang theo dòng.}$$

Các khái niệm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{A không là ma trận bậc thang theo dòng.}$$

Các khái niệm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ A không là ma trận bậc thang theo dòng.

Các khái niệm

Định nghĩa

Ma trận đối xứng *là ma trận vuông thỏa* $a_{ij} = a_{ji}, \forall i,j = \overline{1,n}$.

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Các khái niệm

Định nghĩa

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ và } B \text{ cùng cấp.} \\ a_{ij} = b_{ij},\ \forall i,j. \end{cases}$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & x-1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & y+1 & 5 \end{pmatrix}$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 & = 3 \\ y+1 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 4 \\ y & = 0 \end{cases}$$

Phép chuyển vị

Định nghĩa (Ma trận chuyển vị)

Ma trận chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$, kí hiệu là $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$, có được bằng cách đổi dòng của ma trận A thành cột hoặc đổi cột thành dòng.

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

Phép cộng ma trận với ma trận

Định nghĩa (Tổng của hai ma trận)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *và* $B = (b_{ij})_{m\times n}$.
$C = A + B = (c_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i,j.$

Ví dụ : Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Khi đó ma trận $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Tích ma trận với một số

Định nghĩa (Tích của ma trận với một số)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $k \in \mathbb{R}$. $C = k.A = (c_{ij})_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = k.a_{ij}$, $\forall i,j$.

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Phép nhân ma trận với ma trận

Định nghĩa (Tích ma trận với ma trận)

$C = A.B$ tồn tại $\Leftrightarrow A = (a_{ij})_{mxp}$ và $B = (b_{ij})_{pxn}$. Khi đó $C = (c_{ij})_{m\times n}$ với $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \forall i,j$.

$$AB = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & b_{1j} & * \\ * & b_{2j} & * \\ * & \vdots & * \\ * & b_{pj} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Phép nhân ma trận với ma trận

Ví dụ :

$$Cho\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Tồn tại hay không ma trận $C = AB$?

Giải.

Ta có $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2x3}$ với

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.1 + 1.3 + 4.2 = 13$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2.1 + 1.0 + 4.4 = 18$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2.2 + 1.1 + 4.3 = 17$$

Phép nhân ma trận với ma trận

Tương tự ta có $c_{21} = 7, c_{22} = 4, c_{23} = 9$

Vậy $C = A.B = \begin{pmatrix} 13 & 18 & 17 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Ví dụ : Tìm ma trận X thỏa $AX = B$, biết $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ với $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Giải: Đặt $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, ta có

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a - b \\ 2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b &= 1 \\ 2a + b &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$. Vậy $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Các tính chất

Tính chất

- $A + B = B + A$
- $A + 0 = A$
- $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
- $k.(lA) = (kl).A$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + l)A = kA + lA$

Các tính chất

Tính chất

- $ABC = (AB)C = A(BC)$
- $A(B \pm C) = AB \pm AC$
- $(B \pm C)A = BA \pm CA$
- $I_m.A_{m\times n} = A_{m\times n} = A_{m\times n}.I_n$
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A.B)^T = B^T.A^T$
- $(kA)^T = kA^T$

Các tính chất

Chú ý :

- AB tồn tại không thể suy ra BA tồn tại
- AB và BA cùng tồn tại không thể suy ra $AB = BA$
- $A.B = 0$ không thể suy ra $A = 0$ hoặc $B = 0$
- $AB = CB$ không thể suy ra $A = C$

Cho $A = (a_{ij})_{nxn}$. Kí hiệu $A^2 = A.A, \ldots, A^n = \underbrace{A.A \ldots A.A}_{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Quy ước $A^0 = I_n$.

Đa thức của ma trận

Bài toán : Cho ma trận $A = (a_{ij})_{nxn}$. Xác định $f(A)$, biết

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Ta có

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n$$

Ví dụ : Xác định $f(A)$, biết

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Giải. Ta có: $f(A) = A^2 - 2A + 3I_2$

Tính được $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Ta có:

$-2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ và $3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Vậy: $f(A) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$