Toán cao cấp c2 và ứng dụng

Thầy Hùng.
0903913729.
bscao @ email.com.
0905300000.

TOÁN C 2 & ỨNG DUNG

LOGO

- CHƯƠNG 1: KHÔNG GIAN VECTƠ
- CHƯƠNG 2: MA TRẬN
- CHƯƠNG 3: ĐỊNH THỨC
- CHƯƠNG 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH
- ỨNG DỤNG: MÔ HÌNH CÂN BẰNG THỊ TRƯỜNG
  MÔ HÌNH INPUT/ OUTPUT

Không gian vectơ

LOGO

1/ Vectơ n – chiều

2/ Không gian vectơ

3/ Không gian con – không gian sinh bởi 1 tập hợp

4/ Cơ sở không gian hữu hạn chiều

Không gian vectơ

LOGO

- I.Vectơ n – chiều
- Vectơ n- chiều là một bộ n số thực có thứ tự được viết là

$$A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$$: vectơ dòng

hay

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$: vectơ cột. Trong đó: n gọi là số chiều

a_1 thành phần thứ 1

a_2 thành phần thứ 2

a_n thành phần thứ n

Không gian vectơ

LOGO

- Các phép toán về vectơ
- Định nghĩa tổng 2 vectơ:

Tổng 2 vectơ n – chiều là một vectơ n – chiều có các thành phần bằng tổng các thành phần tương ứng của 2 vectơ

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

$$Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$$

$$thi: X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in R^n$$

$$if: X = (3,5,9), \& y = (2,0,4),$$

$$thi: X + Y = (5,5,13)$$

Không gian vectơ

LOGO

❖ Định nghĩa tich 1 số thực với 1 vectơ n – chiều

Tích 1 số thực với 1 vectơ n- chiều là một vectơ n – chiều có các thành phần bằng tích số thực với các thành phần tương ứng của vectơ.

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n), \& \alpha \in R$$

$$then: \alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \in R^n$$

$$if: X = (1,5,9,0,6), \& \alpha = 4$$

$$then: 4X = (4,20,36,0,24)$$

Không gian vectơ

LOGO

❖ Đinh nghĩa phép trừ 2 vectơ

Hiệu 2 vectơ n – chiều X&Y là một vectơ n – chiều ký hiệu là: X – Y. được xác đinh như sau

X – Y = X + (-1)Y = X + (-Y)

Ta có: X – Y = X + (-Y)

(X – Y) +Y = X + (Y-Y) = X + 0 = X

a(X-Y) = aX – aY

(a –b)X = aX – bX.

If:X=(1,0,4,7),&Y=(3,0,2,9)

Then:X-Y=(-2,0,2,-2)

Không gian vectơ

LOGO

- **Định** nghĩa 2 vectơ bằng nhau
  Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng chiều và các thành phần tương ứng bằng nhau.

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \& Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$X = Y \Leftrightarrow x_1 = y_1; x_2 = y_2; \ldots; x_n = y_n.$$

Định nghĩa vectơ không

Vectơ 0 n – chiều là vectơ có các thành phần đều bằng không

0 = (0, 0, 0,..., 0)

Thí dụ: 0 = (0,0); 0= (0,0,0); 0= (0,0,0,0,)

Không gian vectơ

LOGO

- Tính chất: Xét tập hợp tất cả các vectơ cùng chiều trên đó ta đinh nghĩa 2 phép toán cọng và nhân.Ta có các tính chất sau.
- Gọi X,Y,Z là 3 vectơ n – chiều; k,l là 2 số thực.
- 1/ X+Y=Y+X
- 2/ (X+Y)+Z=X+(Y+Z)
- 3/ X+0=0+X=X. 0: phần tử trung hoà của phép +
- 4/ X+((-1)X = 0; -X phần tử đối của X
- 5/ k(l)X = (kl)X
- 6/ k(X+Y) = kX+kY
- 7/ (k + l)X = kX + lX
- 8/ 1.X = X; 1 phần tử trung hoà của phép *

Không gian vectơ

LOGO

❖ II. Không gian vectơ

1.Tập hợp tất cả vectơ n – chiều với 2 phép toán cọng và nhân thoả mãn 8 tính chất vừa nêu là một không gian vectơ ký hiệu:

2/Tính chất trong KGV X

$$1/\exists!: 0/x+0=0+x=x, \forall x \in X$$

$$2/\forall x \in X, \exists! -x/x+(-x)=(-x)+x=0$$

$$3/\forall x \in X: 0x=0; \& \forall x \in X: -x=(-1)x$$

$$4/\forall k \in R: k.0=0$$

$$5/\forall x \in X; \forall k \in R: if: kx=0 \Rightarrow k=0, hay: x=0$$

Không gian vectơ

LOGO

3.Tich vô hướng của 2 vectơ

❖ Định nghĩa:tích vô hướng của 2 vectơ n – chiều là một số thực ký hiệu : XY được xác định như sau

$$X=(x_1, x_2, ..., x_n); \& Y=(y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$XY = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \in R$$

❖ Tính chất:cho X,Y,Z là các vectơ n – chiều và a là số thực

* XY = YX; * X(Y+Z) = XY +XZ

* a(XY) = (aX)Y; * XX>0

* XX = 0 tương đương X = 0

Khong gian vectơ

LOGO

❖ 4.Không gian Euclide

không gian EUCLIDE n – chiều là KGV n – chiều trong đó xáx định phép nhân vô hướng của 2 vectơ như định nghĩa ở trên.

* Trong không gian Euclide, ta có:

Độ dài hình học: $\|X\| = \sqrt{XX}$, $\forall X \in R^n$ là chuẩn vectơ

$\forall X, Y \in R^n$: $|XY| \le \|X\|\|Y\|$

Góc của 2 vectơ : cho X,Y là 2 vectơ n – chiều. Gọi t là góc của 2 vectơ, ta có $\forall X, Y \in R^n, X \ne 0, Y \ne 0$

$$\cos t = \frac{XY}{\|X\|\|Y\|}; t \in [0, \pi]$$

$$X, Y \in R^n : X \perp Y \Leftrightarrow XY = 0$$

Không gian vectơ

LOGO

5/ Hệ vectơ của KGV

Trong không gian R^n, ta xét 1 tập hợp

$$S = \{A_1, A_2, ...A_m\}, A_i, i = 1, \overline{m}, A_i \in R^n$$

thì S là một hệ vectơ của R^n hay là 1 tập hợp các vectơ của R^n

Nếu lấy: $\{A_1, A_2, ...A_k\}, k \le m$ thì ta có 1 hệ con cuả S.

6/ Đặt biệt, trong R^n với hệ vctơ

$e_1 = (1,0,0,...,0)$

$e_2 = (0,1,0,...,0)$

...

$e_n = (0,0,...,1)$

$then: \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ hệ vectơ đơn vị của R^n

Không gin vectơ

LOGO

❖ III.Tổ hợp tuyến tính-độc lập&phụ thuộc tuyến tính

1/ Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa: cho KGV V. gọi S là một hệ gồm các vectơ của V.

$S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$

Biểu thức: $c_1A_1 + c_2A_2 + ... + c_nA_n, c_i \in R,$ là 1 vectơ của V. được gọi là tổ hợp tuyến tính của hệ S.

Nếu gọi $A = c_1A_1 + c_2A_2 + ... + c_nA_n = \sum_i^n c_iA_i$

thì A là tổ hợp của S

Còn nhiều cách nói tương đương như:

* A biểu diễn tuyến tính qua hệ S
* A sinh ra bởi hệ S
* Hệ S sinh ra A

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Nhớ rằng:**

1. Tổng hai tổ hợp tuyến tính bất kỳ của hệ S, là một tổ hợp tuyến tính của hệ S.

2. Tích một tổ hợp tuyến tính bất kỳ của hệ S với một số thực k là 1 tổ hợp tuyến tính của hệ S.

3. Nếu A = kB (A biểu diễn qua B), ta nói A&B là 2 vectơ tỷ lệ nhau.

4. $$A = \sum_i^n A_i \ \& \ A_i = \sum_j^n B_j$$

thì A biểu diễn tuyến tính qua hệ B

5. $0 = 0X_1 + 0X_2 + ... + 0X_n$

gọi là tổ hợp tuyến tính tầm thường của hệ $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

Không gian vectơ

LOGO

❖ Thí dụ:

1. Cho {A,B,C} = {(0,-1), (1,4), (2,3)}, khi đó
   -2A +B + 0C = -2(0,-1) + (1,4) + (0,0) = (1,6)
   3A + 3B - C = 3(0,-1) +3(1,4) – (2,3) = (1,6)
2. Cho A = (1,-1,0,1); B = (2,1,-2,-1); C = (-1,2,0,0)
   thì 2A - B + 3C = (3,3,2,3)
3. (7,-1) có phải là tổ hợp tuyến tính của (2,1) & (1,-1)
4. hãy biểu diễn (7,-3) thành tổ hợp tuyến tính của A = (1,1), & B = (1,-1)

Không gian vectơ

LOGO

❖ Để biểu diễn (7,-3) là tổ hợp củaA=(1,1)& B=(1,-1)

$$Tim: \alpha_1, \alpha_2 / \alpha_1 A + \alpha_2 B = (7,-3)$$

$$\Rightarrow \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (7,-3)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 7 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = 2; \& \alpha_2 = 5$$

$$Then: (7,-3) = 2(1,1) + 5(1,-1)$$

$$if: \forall (x,y) \in R^2, then: (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

$$\& \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$$

Không gian vectơ

LOGO

2.Độc lập tuyến tính- phụ thuộc tuyến tính

Đinh nghĩa:cho X là KGV và $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$

Là tập hợp các phần tử của X (hệ A có n vectơ)

$$if: \exists c_k \neq 0, 1 \leq k \leq n /$$

$$A = c_1 A_1 + c_2 A_2 + ... + c_k A_k + ... c_n A_n = \sum_i^n c_i A_i = 0$$

$$c_i \in R, \forall i$$

Thì hệ A được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

$$if: \sum_1^n c_i A_i = 0 \Rightarrow c_i = 0, \forall i$$

Thì hệ A được gọi là độc lập tuyến tính

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Cần kưu ý rằng:**

Khái niệm phụ thuộc hay độc lập tuyến tính của 1 hệ vectơ, có thể nhìn qua việc biểu diễn tuyến tính vectơ 0.

Cho hệ: $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$

Ta có $0A_1 + 0A_2 + ... + 0A_n = 0$ biểu diễn tầm thương

Câu hỏi : ngoài biểu diễn tầm thường , còn tổ hợp nào khac bỉeu diễn vectơ 0 hay không ?

* Nếu có thì hệ phụ thuộc tuyến tính

* Nếu khôngthì hệ độc lập tuyến tính

Không gian vectơ

LOGO

- Thí dụ:
- 1/In R^2 $A = \{(1,0),(0,1)\}, if : \forall c_1, c_2 \in R,$

  $c_1(1,0) + c_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (c_1 + 0, 0 + c_2)$

  $\Leftrightarrow (c_1, c_2) = (0,0) \Rightarrow c_1 = 0, \& c_2 = 0$
- $Vay : \{(1,0),(0,1)\}$ độc lập tuyến tính
- 2/ In R^3 xét hệ $A = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

  $\forall c_1, c_2, c_3 \in R / c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = 0$

  $\Leftrightarrow (c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$
- $Vay : \{e_1, e_2, e_3\}$ độc lập tuyến tính

Không gian vectơ

LOGO

- Thí dụ: trong không gian ta có: A=(1,2),B=(1,1) hệ gồm 2 vectơ nầy độc lập hay phụ thuộc tuyến tính ?

  Gọi c,d là 2 số thực bất kỳ, nếu : cA + dB = 0

  Nghĩa là c(1,2) + d(1,1) = (0,0)

  suy ra c +d = 0 và 2c + d = 0

  Vậy c = d = 0 kết luận { A,B} độc lập tuyến tính

Không gian vectơ

LOGO

- **Ta chấp nhận các kết quả sau đây**
- 1. Một hệ bất kỳ chứa vecto 0 là hệ phụ thuộc
- 2. Một hệ chứa hệ con phụ thuộc ,thì hệ đó phụ thuộc tuyến tính
- 3. Một hệ có chứa 2 vectơ bằng nhau thì hệ đó phụ thuộc tuyến tính
- 4. Hệ có số vectơ lớn hơn số chiều thì phụ thuộc
- 5. Cho hệ A, nếu mọi hệ con B của A đều độc lập tuyến tính, thì hệ A độc lập tuyến tính
- 6. Mọi hệ hữu hạn các vectơ đều chứa một hệ con độc lập tuyến tinh
- 7. Một hệ độc lập tuyến tính ,thì mọi hệ con của nó cũng độc lập tuyến tính

Không gian vectơ

LOGO

- **Thí dụ:**
- 1.Cho A =(2,1,0), B = (0,0,0), C = (0,1,2) thì hệ {A,B,C} phụ thuộc tuyến tính, vì B = 0
- 2. ChoA=(1,0,1,0),B=(0,0,1,1),C=(1,0,1,0),D=(1,1,0,0)
- thì hệ {A,B,C,D} phụ thuộc tuyến tính vì có: A=C
- 3. Cho A=(1,0,0), B=(0,1,1), C=(0,0,1), D=(1,1,1)
- thì hệ {A,B,C,D} phụ thuộc tuyến tính ,vì hệ có 4 vectơ trong khi số chiều của nó n = 3.

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Định nghĩa:**

Cho 2 hệ vectơ L&M. Hệ L được gọi là hệ vectơ sinh của hệ vectơ M, nếu mọi vctơ của hệ M đều biểu diễn được là tổ hợp tuyến tính của những vectơ trong L.

*Định nghĩa: Hệ vectơ con L của hệ vectơ M được gọi là hệ con sinh tối thiểu nếu như:

(1) L sinh ra M

(2) Bỏ đi bất cứ vectơ nào của L, thì L không còn sinh ra M nữa

Không gian vectơ

LOGO

❖ Hạng của một hệ vectơ

❖ Nhận xét:2 điều kiện trong định nghĩa hệ con sinh tối thiểu: (1):Mọi vectơ của hệ là thtt của hệ con.

(2): Bỏ bớt vectơ nào của hệ sinh thì không còn sinh nữa

Phân tích 2 điều kiện nầy ,ta rút ra

Thêm vào hệ con sinh bất cứ vectơ nào của hệ ban đầu ta có hệ phụ thuộc tuyến tính

Không có vectơ nào của hệ con sinh có thể biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của những vectơ còn lại của hệ con sinh.

Không gian vectơ

LOGO

- **Vậy: Hệ con sinh tối thiểu là hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại**
- Cần lưu ý: Một hệ vectơ có thể có nhiều hệ con độc lập tuyến tính cực đại
- Câu hỏi:số vectơ của các hệ con độc lập tuyến tính cực đại nầy có bằng nhau ? Luôn luôn bằng nhau.
- Định lý:Các hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại của cùng một hệ vectơ có số vectơ bằng nhau.
- Định nghĩa: Hạng của một hệ vectơ là số vectơ trong hệ vectơ độc lập tuyến tính cực đại của nó.

  Ký hiệu : r (rank)

Không gian vectơ

LOGO

- **Các** phép biến đổi sơ cấp:Các phép biến đổi sau đây ,được gọi là phép biến đổi sơ cấp

  1. Đổi chỗ 2 vectơ của hệ

  2. Nhân một vectơ của hệ cho một số k khác 0

  3. Lấy một vectơ bất kỳ của hệ nhân cho một số k khác 0. Cọng vào một vectơ khác của hệ.

Định lý: Các phép biến đổi sơ cấp tác động trên một hệ vectơ ,không làm thay đổi hạng của hệ vectơ.

Không gian vectơ

LOGO

- **Không gian con – không gian sinh bởi 1 tập hợp**
- Không gian con

Định nghĩa: Cho X là KGV, L là tập con của X

nếu L cũng là KGV, thì L là KG con của KG X.

Định lý:Cho X làKGV, L là tập con của X

$$X \supset L : KGVcon \Leftrightarrow \begin{cases} (1) : \forall a,b \in L, then : a+b \in L \\ (2) : if : a \in L, \lambda \in R, then : \lambda a \in L \end{cases}$$

Phát biểu tương đương:

L là kgv con của X $\Leftrightarrow \forall a,b \in L, \lambda, \mu \in R : \lambda a + \mu b \in L$

Không gian vectơ

LOGO

- **Không gian sinh – tập hợp sinh**
- Đinh lý: Cho X là kgv ,A là tập hợp hữu hạn các phần tử của X

* Tập hợp tất cả tổ hợp tuyến tính của các phần tử trong A là một kgv con của X.

* KGV con nầy được gọi là KGV sinh bởi tập hợp A

ký hiệ là [A]

* Tập A được gọi là tập sinh của kgv [A]

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Định nghĩa hệ sinh của KGV**

Cho X là KGV, $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$

$$if : [A] = X \Leftrightarrow \forall x \in X : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Khi đó [A] sinh ra X hay A là một hệ sinh ra X

Thí dụ:trong R^2 xét hệ {a,b} với a = (1,0) , b = (0,1); ta có

$\forall x \in R^2, x = k_1 a + k_2 b \Rightarrow \{a, b\}$ sinh ra R^2

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Thí dụ**

❖ **2/** xét hệ $\{a_1, a_2\}, a_1 = (1,2\ ), a_2 = (1,1)$

$$\forall x \in R^2, x = (x_1, x_2) \Rightarrow \exists c_1, c_2 /$$

$$(x_1, x_2) = c_1(1,2) + c_2(1,1) \Leftrightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

❖ Vậy hệ vectơ trên sinh ra R^2

❖ 3/ Cho a = (1,2) ∈ R^2 , hỏi [a] có sinh ra R^2 ?

$$\forall y = (y_1, y_2) \in R^2 \Rightarrow y = ca = c(1,2)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = c \\ y_2 = 2c \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_2 = 2y_1 \Rightarrow [a] \neq R^2$$

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Ta** chấp nhận các kết quả sau:

1.Một hệ chứa một hệ con phụ thuộc,thì hệ đó phụ thuộc

2.A là hệ hữu hạn các vectơ của kgv, là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu có một vectơ nào đó của A là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại của A.

3. Mọi hệ hữu hạn phần tử đều chứa một hệ con độc lập tuyến tính sinh ra cùng một KGV con với hệ đã cho.

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Các hệ độc lập tuyến tính tương đương**

Định nghĩa:Hai hệ độc lập tuyến tính được gọi là tương đương nếu chúng cùng sinh ra một KGV con.

Nhớ rằng: KGV con sinh bởi n phần tử, không thể có quá n phần tử độc lập tuyến tính

Không gian vectơ

LOGO

- **KG hữu hạn chiều – cơ sở KG hữu hạn chiều**
- Định nghĩa: KGV L được gọi là hữu hạn chiều nếu nó được sinh ra bởi một hệ hữu hạn các phần tử.
- Định nghĩa cơ sở: Một hệ hữu hạn các phần tử được gọi là cơ sở của KGV nếu thoả 2 điều kiện

  * Hệ đó độc lập tuyến tính

  * Hệ đó sinh ra KGV

Nhớ: *Trong KGV hữu hạn chiều có nhiều cơ sở

* Các cơ sở là các hệ độc lập tuyến tính tương đương

* Các cơ sở khác nhau của cùng một KGV thì có cùng số phần tử

Không gian vectơ

LOGO

- **Định nghĩa:** Số phần tử trong một cơ sở của KGV L được gọi là số chiều của KGV đó.

  Ký hiệu : dimL

Định lý: Cho E là KGV n- chiều

* Hệ n vectơ ĐLTT bất kỳ là một cơ sở của E

* Mọi hệ m vectơ ĐLTT, m<n đều có thể thêm vào (n – m) vectơ để trở thành cơ sở của E

* Nhớ rằng:

$$R^n : \dim R^n = n$$

Không gian vectơ

LOGO

❖ **Toạ độ vectơ trong KGV n- chiều**

❖ Định nghĩa: gọi $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ là một cơ sở của KGV V n chiều , khi đó $\forall v \in V_n$ có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1 s_1 + c_2 s_2 + ... + c_n s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i s_i, c_i \in R, \forall i$$

❖ Khi đó: $(c_1, c_2, ..., c_n)$ gọi là toạ độ của v theo cơ sở S.

Viết là:

$$(v)_S = (c_1, c_2, ..., c_n); hay: (v)_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ c_n \end{bmatrix}$$

VD: $E_2 = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ → cơ sở ở vì $\dim R^2$

$v = (5,7) \in R^2$ $v = 5e_1 + 7e_2$ → $(5,7)|_E = v$

$S_2 = \{(1,1),(1,2)\}$ Hỏi S_2 có phải là cơ sở E_2 ✓

gọi $c_1 c_2$ là toạ độ của $v|_{S_2}$ Ta có.

$0 = 0(1,1) + 0(1,2)$.

$0 = c_1(1,1) + c_2(1,2)$.

$\Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$c_1 -$

$c_1(1,1) + c_2(1,2) = (5,7)$

$c_1 + c_2 = 5$

$c_1 + 2c_2 = 7$ $\Rightarrow c_2 = 2$, $c_1 = 3$

$v = (5,7)|_{E_2}$

Không gian vectơ

LOGO

a/ CM S là hệ đlt

Ta có:

$0 = 0(1,2,1) + 0(2,9,0)$

❖ **Thí dụ** trong R^3 cho hệ S={(1,2,1),(2,9,0),(3,3,4)}.

a. Chứng minh S là một cơ sở của R^3 = (cm độc lập tuyến tính)

b. Tìm tọa độ của v = (5,-1,9) đối với cơ sở S

c. Tìm $w \in R^3$ có toạ độ đối với S là : $(w)_S = (-1,3,2)$

a/ Ta có: $0 = 0(1,2,1) + 0(2,9,2) + 0(3,3,4)$

Hỏi còn cách bđuổi nào $\neq 0$?

giả: $c_1, c_2, c_3 / 0 = c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4)$.

$\Rightarrow c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$

$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = 0$

$c_1 + 0 + 4c_3 = 0$

giải ta có: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

KL hệ S đlt $\Rightarrow$ S độc lập tuyến tính R^3

b/ $v = (5,-1,9)|_{E_3} = (\ )|_S$?

gọi $(c_1, c_2, c_3) = v|_S$ ta có.

$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5$

$2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1$

$c_1 + 0 + 4c_3 = 9$ $\Rightarrow$ giải ra ta được:

Chứng $w \in \mathbb{R}^3$ $w|_S = (-1, 3, 2) = w|_{E_3}$.

$w = -1(1,2,1) + 3(2,9,0) + 2(3,3,4)$

$= (11, 31, 7)|_{E_3}$

Ma trận

LOGO

❖ **Chương 2:** Ma trận

1/ Định nghĩa và các dạng ma trận

2/ Các phép toán đối với ma trận.

3/ Ma trận chuyển vị – ma trận bật thang rút gọn

4/ Ma trận nghịch đảo – cách tìm

$= (3, 2)|_{S_2}$.

Ma trận

LOGO

I.Định nghĩa ma trận

Một bảng gồm: m hàng,n cột các số thực được gọi là một ma trận cấp (m .n)

Ký hiệu là: (dg. cột)

$$A_{mxn} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}; i = 1, m \ \& \ j = 1, n$$

* cặp số (mxn) kích thước của ma trận hay cấp của ma trận.

* Vectơ hàng i : $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

*Vectơ cột j : $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$

* a_{ij} phần tử của ma trận i : chỉ hàng ; j : chỉ cột

$$A_{(4\times5)} = \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 7 & 2 & 9 \to d_1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \to d_2 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 1 \to d_3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 8 \to \text{dòng } 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array} = (a_{ij})_{(4\times5)}$$

Ma trận

LOGO

❖ **Định nghĩa ma trận bằng nhau:**

Hai ma trận A&B cùng cấp(m x n) được gọi là bằng nhau nếu các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau.

Ký hiệu: A = B

$$A_{mxn} = B_{mxn} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, m \;\&\; \forall j = 1, n$$

Định nghĩa ma trận 0

Ma trận 0 là ma trận có các phần tử đều bằng 0

$0_{(3\times3)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Định nghĩa ma trận vuông:

Ma trận cấp (n x n) được gọi là ma trận vuông cấp n

Ma trận

LOGO

❖ **Cho ma trận**

❖ **A(nxn)** = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$ đg chéo phụ / đg chéo chính

❖ Các phần tử có chỉ số hàng = chỉ số cột :đường chéo chính

❖ Các phần tử có tổng chỉ số hàng +cột = n+1: chéo phụ

Ma trận

LOGO

Tam giác trên.

❖ Ma trận chéo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ma trận tam giác

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 \\ & a_{ij} & .. & 0 \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

❖ Ma trận đơn vị, cấp n.

❖ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$

$\begin{bmatrix} a_{i1} & .. & .. & a_{in} \end{bmatrix}$ ma trận hàng

❖ $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ .. \\ .. \\ a_{nj} \end{bmatrix}$

ma trận cột

vd: $I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(cùng cấp)

❖

vd: $I_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ma trận

LOGO

❖ II. **Các phép toán đối với ma trận**

1/ Phép cọng ma trận: Cho 2 ma trận cùng cấp A&B

tổng của A &B, ký hiệu :A+B là một ma trận được xác định

$$A_{mxn} = (a_{ij}), B_{mxn} = (b_{ij})$$

$$\Rightarrow (A+B)_{mxn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$$

TÍNH CHẤT: A +B = B + A

A + 0 = 0 + A = A

vd: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A+B = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Ma trận

LOGO

❖ **Thí dụ1**

$$A=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&7&3\\2&4&6\end{bmatrix},\&B=\begin{bmatrix}3&2&7\\4&1&2\\5&0&8\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}4&2&12\\4&8&5\\7&4&14\end{bmatrix}$$

❖ **Thí dụ 2**

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\2&4&4&1\\5&0&3&6\\9&2&4&7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&2&0&0\\1&3&7&5\\4&0&2&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}3&2&1&0\\3&7&11&6\\9&0&5&6\\10&2&4&8\end{bmatrix}$$

❖ **Thí dụ**

$$A=\begin{bmatrix}1&9&0&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}5&4&8&7\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}6&13&8&10\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&1&2\\0&1&4&6\end{bmatrix}$$

2/ Phép nhân ma trận với một số thực

Cho $A_{mxn},\&\alpha\in R$. Ta gọi tích ma trận A_{mxn} với số thực α là ma trận cấp (mxn) có các phần tử là (αa_{ij})

$$A_{mxn}=(a_{ij})_{mxn};\alpha\in R\Rightarrow \alpha A=(\alpha a_{ij})_{mxn}$$

$$B=\begin{matrix}5&9&0&1\\5&2&1&0\\0\end{matrix}$$

Nhớ rằng: 1.A = A

(-1).A = -A : có các phần tử LÀ đối của các phần tử A

(-1).A được ký hiệu là: -A gọi là ma trận đối của A

3/ Phép trừ 2 ma trận: Cho 2 ma trận cùng cấp A &B,A trừ B, ký hiệu là : A – B = A + (-1)B

Dĩ nhiên : A + (-A) = 0

$$5A=\begin{bmatrix}5&10&15&20\\25&30&5&10\\0&5&20&30\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

❖ **Thí dụ 1**

$$A=\begin{bmatrix}2&5&7\\6&0&3\\1&4&9\end{bmatrix},\&\alpha=2\Rightarrow\alpha A=2A=\begin{bmatrix}4&10&14\\12&0&6\\2&8&18\end{bmatrix}$$

❖ Thí dụ 2

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&5&7&3\\6&2&1&8\\4&7&9&0\end{bmatrix},\&\alpha=-2\Rightarrow-2A=\begin{bmatrix}-2&-2&0&-4\\0&-10&-14&-6\\-12&-4&-2&-16\\-8&-14&-18&0\end{bmatrix}$$

❖ Thí dụ 3

$$A=\begin{bmatrix}5&3&6\\2&1&8\\7&1&3\end{bmatrix},\&B=\begin{bmatrix}2&2&8\\3&9&7\\6&4&5\end{bmatrix}\Rightarrow A-B=\begin{bmatrix}3&1&-2\\-1&-8&1\\1&-3&-2\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

4/ phép nhân hai ma trận:

Cho 2 ma trận

$$\left.\begin{array}{l}A_{mxp}=(a_{ij})_{mxp}\\B_{pxn}=(b_{ij})_{pxn}\end{array}\right\}\Rightarrow A.B=C_{mxn}=(c_{ij})_{mxn};c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

(*) **Lưu ý:A và B** muốn nhân được : **Số cột của A = số dòng của B**

*** ma trận tích C có:** số hàng của C = số hàng của A.

số cột của C = số cột của B

(*) Phần tử C_{ij} của C = A.B có được bằng cách lấy các phần tử trên hàng i của ma trận A, nhân tương ứng các phần tử trên cột j của ma trận B, xong cọng lại.

$A_{(m\times p)}=(a_{ij})$ | $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,p}$

$B_{(p\times n)}=(b_{ij})$ | $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,n}$

$AB=C_{(m\times n)}=(c_{ij})$ | $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

Ma trận

LOGO

❖ **Thí dụ 1**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\3 & 1 & 6\\2 & 4 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow A.B=C=\begin{bmatrix}25 & 21 & 64\end{bmatrix}$$

❖ **Thí dụ 2**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\4 & 1 & 3\\2 & 5 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 9 & 6\\0 & 1 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow A.B=\begin{bmatrix}2 & 2 & 8\\11 & 16 & 30\\19 & 47 & 30\end{bmatrix} \& B.A=\begin{bmatrix}6 & 1 & 5\\51 & 39 & 30\\20 & 41 & 3\end{bmatrix}$$

❖ **Thí dụ 3**

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \Rightarrow A.B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=32; B.A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

❖ **Chúng ta có các kết luận sau:**

1. Không có tích của hai ma trận bất kỳ
2. Tích hai ma trận không có tính giao hoán
3. Hai ma trận vuông cùng cấp thì luôn nhân được với nhau và tích của chúng là ma trận vuông cùng cấp
4. A vuông cấp n, I ma trận đơn vị cùng cấp , thì ta luôn có : I.A = A.I = A
5. A là ma trận vuông cấp n thì : $A.A = A^2$

Ma trận

LOGO

❖ **Tính chất cơ bản của các phép toán**

1/ Phép cọng và phép nhân với một số thực

Cho A,B,C là các ma trận cùng cấp, k,l các số thực

a. $A + B = B + A$

b. $(A + B) + C = A + (B + C)$

c. $0 + A = A + 0 = A$; 0: phần tử trung hoà

d. $k(A + B) = kA + kB$

e. $(k + l)A = kA + lA$

f. $k(lA) = l(kA) = (kl)A$

g. Ma trận 0 : $0A = A0 = 0$

h. $1.A = A$

Ma trận

LOGO

2/ phép nhân ma trận với ma trận

a. AB khác BA

b. $(AB)C = A(BC)$

c. $A(B + C) = AB + AC$

d. $(aA)B = A(aB) = a(AB)$

Ma trận

LOGO

❖ **III. Ma trận chuyển vị- ma trận bậc thang**

❖ **1. Ma trận chuyển vị:**

a.Định nghĩa: Cho ma trận A(mxn), trong A ta chuyển dòng thành cột, cột thành dòng, ta được một ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của A. ký hiệu là: A^t

$$A_{mxn} = (a_{ij}) \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{nxm}$$

Nhận xét: Nếu A có m hàng, n cột thì A^t có n hàng , m cột

Thí dụ

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

❖ **Chuyển một ma trận thành ma trận chuyển vị của nó, được gọi là phép chuyển vị**

❖ **b. Tính chất:** Cho A,B là các ma trận cùng cấp

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \forall A, B$$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t, \forall A, \forall \lambda \in R$$

$$(A^t)^t = A, \forall A$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

❖ Bài tập:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

2. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng (hàng)

Ta có các phép biến đổi sơ cấp tác động trên dòng

* Đổi chỗ các phần tử tương ứng của 2 dòng cho nhau

* Nhân các phần tử của một dòng cho cùng một số thực khác không

*Thay các phần tử của một dòng bằng chính các phần tử của dòng đó, sau khi cọng các phần tử tương ứng của một dòng khác đã được nhân cho một số khác không

Ma trận

LOGO

❖ **Định** nghĩa:ma trận B được gọi là tương đương hàng với ma trận A, nếu B có được từ A qua một số kế tiếp phép biến đổi sơ cấp dòng. **Ký hiệu: B $\approx$ A**

❖ Nhớ rằng

$$A \approx A, \forall A$$

$$A \approx B \Rightarrow B \approx A$$

$$A \approx B, \& B \approx C \Rightarrow A \approx C$$

❖ $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{mxn}$: có m dòng, mỗi dòng xem như 1 vectơ n chiều

ta xem A là một hệ gồm m vectơ n chiều

KGV sinh bởi m vectơ= KGV hàng của A

Định lý: Hai ma trận tương đương sinh ra cùng một KGV

Ma trận

LOGO

❖ **Ma trận bậc thang rút gọn hàng**

❖ **Định nghĩa: Cho ma trận A**

a. Mọi phần tử khác không đầu tiên của một hàng bằng 1, gọi là phần tử dẫn đầu

b. Mọi phần tử khác trên cột chứa phần tử dẫn đầu đều bằng 0

c. Các hàng chứa toàn phần tử bằng 0, nằm dưới các hàng khác 0

d. Các phần tử dẫn đầu (bằng 1) được sắp xếp theo thứ tự chỉ số cột tăng dần

Ma trận

LOGO

❖ **Nhớ: Mọi ma trận A cho trước, tác động liên tiếp các phép biến đổi sơ cấp dòng .Ta luôn đưa A tương đương với một ma trậ bậc thang rút gọn hàng.**

❖ **Thí dụ:Đưa ma trận A sau đây về ma trận bậc thang rút gọn hàng**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&5&7&2\\1&2&3&1\end{bmatrix};: h_1(-2)+h_2 \;\&\; h_1(-1)+h_3$$

$$\approx\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&3&3&-4\\0&0&1&-2\end{bmatrix};h_2(\frac{1}{3})$$

$$\approx\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&1&1&-\frac{4}{3}\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

- **Hạng ma trận**
- **1.Định lý:** các hàng khác không của ma trận bậc thang rút gọn hàng lập nên một hệ độc lập tuyến tính
- Xét KGV sinh bởi ma trận bậc thang rút gọn hàng

Định nghĩa:Hạng của ma trân A là số chiều của không gian sinh bởi ma trận A, ký hiệu :R(A)

* Một ma trận A tương đương hàng với một ma trận bậc thang rút gọn hang duy nhất. Vì vậy ma trận bậc thang rút gọn hàng còn được gọi là ma trận chính tắc.

Ma trận

LOGO

- **Cho ma trận A(mxn), hạng của A có các tính chất**
- $R(A) \leq \min(m,n)$
- R(A) là số vectơ hàng độc lập tuyến tính cực đại có trong A
- Hai ma trận tương hàng có cùng R(A)
- A(nxn) tương đương với I(nxn) thì n vectơ hàng của A độc lập tuyến tính (I(nxn): vectơ đơn vị cấp n)
- R(A) = số hàng khác không của ma trận bậc thang rút gọn hàng tương đương với A.
- Như vậy :Để tìm số vectơ hàng độc lập tuyến tính cực đại trong ma trận A ,cũng là tìm R(A), ta đưa ma trận A về ma trận bậc thag rút gọn hàng, xong đếm số dòng khac không.
- Các ma trận tương đương hàng có chung ma trận chính tắc

Ma trận

LOGO

tđ $A=\begin{bmatrix}4&1&-1&3&2\\-2&2&3&0&1\\2&3&2&3&3\\4&1&3&1&1\end{bmatrix};if:c_1\longleftrightarrow c_2,then:A\approx\begin{bmatrix}1&4&-1&3&2\\2&-2&3&0&1\\3&2&2&3&3\\1&4&3&1&1\end{bmatrix}$

$$if:c_2(\frac{1}{2}),then:A\approx\begin{bmatrix}1&2&-1&3&2\\2&-1&3&0&1\\3&1&2&3&3\\1&2&3&1&1\end{bmatrix};if:\begin{Bmatrix}h_1(-2)+h_2\\h_1(-3)+h_3\\h_1(-1)+h_4\end{Bmatrix},then\approx\begin{bmatrix}1&2&-1&3&2\\0&-5&5&-6&-3\\0&-5&5&-6&-3\\0&0&4&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$if:h_2(-1)+h_3,then:A\approx\begin{bmatrix}1&2&-1&3&2\\0&-5&5&-6&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&4&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$if:h_3\leftrightarrow h_4,then:A\approx\begin{bmatrix}1&2&-1&3&2\\0&-5&5&6&-3\\0&0&4&-2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow R(A)=3,\{h_1,h_2,h_3\}dltt$$

Ma trận

LOGO

❖ **Nhớ rằng:**

❖ **Trong quá trình biến đổi**

* Nếu có 2 hàng(hay cột) tỷ lệ có thể bỏ 1 hàng

* Nếu có 1 hàng các phần tử đều = 0, bỏ đi

Bài tập:đưa các ma trận sau về ma trận bậc thang rút gọn hàng:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\1&-2&1\\2&-1&2\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&1&4&-3\\3&5&6&-4\\4&5&-2&3\\3&8&24&-19\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

- **IV. Ma trận nghịch đảo – cách tìm**
- 1. Định nghĩa: A(nxn) được gọi là không suy biến nếu tương đương hàng với I(nxn); (ma trận đơn vị)
- Nhận xét: *A(nxn) không suy biến thì n vectơ hàng của A độc lập tuyến tính và ngược lại.

  * A(nxn) không suy biến thì: R(A) = n

*Định nghĩa: A(nxn) được gọi là khả nghịch nếu tồn tại B(nxn) sao cho: AB = BA = I(nxn)

lúc đó B được gọi là ma trận nghịch dảo của A

Ký hiệu là: A^{-1}

Ma trận

LOGO

- **Nhớ rằng**
- Chỉ có các ma trận vuông không suy biến mới khả nghịch

$$I(nxn) \Rightarrow I^{-1} = I$$

$$A(nxn), if : \exists A^{-1}(nxn), then : A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

- Ma trận nghịch đảo nếu tồn tại thì duy nhất
- Vấn đề: Tìm ma trận nghịch đảo

  Có hai cách tìm:1/ dùng phép biến đổi sơ cấp dòng

  2/ dùng ma trận phụ hợp (chương 3)

Ma trận

LOGO

❖ **Tìm ma trận nghịch đảo:**

❖ **Phương pháp dùng phép biến dổi**

A(nxn), ta viết I(nxn) nằm một bên A ,dùng phép biến đổi đưa về I(nxn).A(nxn) $\left[AI\right] \rightarrow \left[IA^{-1}\right]$

Thí dụ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix};\{h_1(-3)+h_2\} \approx \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\{h_2(-2)+h_1\} \Rightarrow \approx \begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -2\\ 0 & 1 & -3 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

Ma trận

LOGO

❖ **Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A sau**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 3 & 1 & 6 & -4\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2 & -4/3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ \frac{1}{3} & 2 & -\frac{4}{3}\end{bmatrix};\&A.A^{-1}=I(3x3)$$

Định thức - determinant

LOGO

- **Chương IV: Định thức**
- **I.** Định nghĩa và các tính chất
- II. Tính định thức
- III. Ma trận nghịch đảo và cách tìm

Định thức - determinant

LOGO

- Trước khi bắt đầu, chúng ta cần nhớ

  * định thức được ký hiệu : Det

  * định thức bao giờ cũng là định thức của một ma trận vuông

  * định thức bao giờ cũng là một con số.

  * định thức còn được ký hiệu

$$\det = |.....|$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **I. Định nghĩa và các tính chất**

❖ **1/ Định nghĩa:** Định thức của ma trận A(nxn) được ký hiệu là detA, và được định nghĩa như sau:

* n = 1: $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$

* n = 2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}\det M_{11} - a_{12}\det M_{12}$

* n = 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \det A = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **Thí dụ**

$$1/A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = 4 - 6 = -2$$

$$2/A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= 1(45+48) - 2(-36-42) + 3(32-35) = 240$$

Định thức - determinant

LOGO

2/ tính chất:

TC1: $\det A = \det A^t$

TC2: trong 1 định thức nếu ta đổi chỗ 2 dòng cho nhau thì det đổi dấu

HQ: định thức có 2 dòng bằng nhau thì = 0

TC3: trong det nếu có dòng k được viết: $a_{kj} = \lambda b_{kj} + \mu c_{kj}$ thì

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{nn} \\ a_{k1} & a_{k2} & .. & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ b_{k1} & b_{k2} & .. & b_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ c_{k1} & c_{k2} & .. & c_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **TC4:** Hệ vectơ dòng của A phụ thuộc tuyến tính thì

detA = 0.

HQ: A(nxn) có $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ A không suy biến

TC5:Nếu thêm vào một hàng tổ hợp tuyến tính của các hàng còn lại thì định thức không thay đổi

TC6: Nếu A và B là 2 ma trận vuông cùng cấp thì

det(A.B) = detA.detB

* TC7: Các det có dạng tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo.

Nhớ:* trong det có 2 hàng tỷ lệ thì det = 0

* A(nxn) đưa về A tam giác suy ra det

Định thức - determinant

LOGO

❖ **Thí dụ:**

$$1/A=\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}=a^2b^2-(ab)^2=0$$

(chéo chính - chéo phụ)

$$2/B=\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}=(n+1)(n-1)-n^2=-1$$

$$3/C=\begin{vmatrix} tgx & -1 \\ 1 & tgx \end{vmatrix}=tg^2x+1$$

$$4/D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=3abc-(a^3+b^3+c^3)$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **Bài tập**

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)=0$$

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}=0,(c_2+c_3=c_4)$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **Bài tập**

$$C=\begin{vmatrix}1+a & u & t & 2a\\ 1+b & v & t & 2b\\ 1+c & x & t & 2c\\ 1+d & y & t & 2d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & u & t & 2a\\ 1 & v & t & 2b\\ 1 & x & t & 2c\\ 1 & y & t & 2d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & u & t & 2a\\ b & v & t & 2b\\ c & x & t & 2c\\ d & y & t & 2d\end{vmatrix}$$

$$=2t\begin{vmatrix}1 & u & 1 & a\\ 1 & v & 1 & b\\ 1 & x & 1 & c\\ 1 & y & 1 & d\end{vmatrix}+2t\begin{vmatrix}a & u & 1 & a\\ b & v & 1 & b\\ c & x & 1 & c\\ d & y & 1 & d\end{vmatrix}=0+0=0$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **II. Tính định thức**

❖ 1. Định thức con của một phần tử

Cho $D=\left|a_{ij}\right|_{nxn}$ cấp n. Xét phần tử a_{11} ta bỏ hàng 1 & cột 1 (hàng và cột chứa phần tử a_{11}) trong det, ta nhận được det con cấp n-1 . Được gọi là định thức con trong D tương ứng phần tử a_{11}. Ký hiệu: M_{11}

Tổng quát: a_{ij} ,ta bỏ dòng i, cột j trong D ta nhận được gọi là định thức con trong D của a_{ij}

Ký hiệu: M_{ij}

Định thức - determinant

LOGO

2. Khai triển định thức theo dòng (hay cột)

*** Định lý Laplace:Mọi det đều có thể khai triển thành tổng các det con cấp thấp hơn.**

$$D=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\ldots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

$$\boxed{if: A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, then:}$$

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

A_{ij} **gọi là phần bù đại số của phần tử** a_{ij}

Định thức - determinant

LOGO

❖ **Bài tập: tính các det**

$$A=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&7&4\\1&0&4\end{vmatrix};B=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix};C=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&-2\\1&2&3\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}-1&2&0\\3&1&1\\-2&-1&0\end{vmatrix};E=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&-2&1\\2&-1&2\end{vmatrix};F=\begin{vmatrix}4&4&2\\1&7&-1\\3&4&1\end{vmatrix}$$

Định thức - determinant

LOGO

3/ Tính định thức bằng phép biến đổi sơ cấp

phép biến đổi	tác động lên det
1.nhân 1 dòng cho $k \neq 0$	det được nhân k
2. đổi chỗ 2 dòng	det đổi dấu
3. cọng k lần d_r vào d_s	det không đổi

Định thức - determinant

LOGO

- **III. Hạng của ma trận**
- **1/ Ma trận con:Cho ma trận A(mxn) . Một ma trận được lập bằng cách bỏ đi một số hàng ,một số cột được gọi là ma trận con của ma trận A.**

thí dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}; if: bo: d_3 \,\&\, c_2, thì: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ **: ma trận**

Định thức - determinant

LOGO

2/Định thức con: Nếu ma trận con là ma trận vuông ,thì định thức của ma trận con được gọi là định thức con của ma trận

❖ **Thí dụ:**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 7 & 7 & 1 & 3\\ 2 & 8 & 0 & 1 & 4\\ 9 & 6 & 5 & 7 & 3\end{bmatrix};if: B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix};\&C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 7 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det B;\& \det C:$

❖ **là định thức con của ma trậ A**

Định thức- determinant

LOGO

3/ Hạng ma trận: Ma trận A có hạng ằng r ,ký hiệu là R(A) = r , nếu trong A có chứa định thức con cấp r khác không và mọi định thức con cấp lớn hơn r đều bằng không.

Nhớ: nếu A = 0 thì R(A) =0

Nếu $A \neq 0$ thì R(A) = cấp của định thức con lớn nhất khác 0

$0 \le R(A) \le \min(m,n), A(mxn)$

A là ma trận bậc thang rút gọn hàng thì :R(A) = số hàng khác 0

R(A) : không thay đổi qua phép chuyể vị

R(A) : khôg thay đổi qua phép biến đổi sơ cấp

Định thức - determinant

LOGO

❖ **Thí dụ: Tìm hạng của các ma trận**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & -3 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow R(A)=3$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 7 & -7 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow R(B)=2$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ **IV. Ma trận nghịch đảo**

❖ **1/ Phần bù của một phần tử:**

Cho A(nxn) = $(a_{ij})_{nxn}$ **, với mỗi phần tử** a_{ij} **ta lập**

$$\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},\forall i,j}$$

phần bù của A_{ij} **đó:**

Trong đó: M_{ij} **là định thức con có được bằng cách bỏ dòng i, cột j trong ma trận A**

*** 2/ Ma trận phụ hợp của A: A là ma trận gồm các phần bù đại số**

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n}\\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn}\end{bmatrix}$$

Định thức - determinant

LOGO

3/Định lý: A(nxn) khả nghịch nếu và chỉ nếu detA $\neq$ 0

Khi đó:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[\overline{A}\right]^t$$

trong đó : $\left[\overline{A}\right]^t$ là ma trận chuyển vị của ma trậ phụ hợp

Đinh thức - determinant

LOGO

4/ phương pháp tìm ma trận nghịch đảo: Cho A(nxn)

Bước 1: tính detA

*Nếu detA = 0 thì A không tồn tại ma trận nghịch đảo

*Nếu detA $\neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo

Bước 2: Tính các phần bù đại số $A_{ij} = \left[A_{ij}\right], \forall i, j \Rightarrow \left[\overline{A}\right]$

lập ma trận

bước 3: Tính ma trận ngịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(\left[\overline{A}\right]^t\right)$$

Định thức - determinant

LOGO

❖ $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&2\\-1&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=-6\neq 0\Rightarrow \exists! A^{-1}$

$a_{11}\Rightarrow A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&2\\3&1\end{vmatrix}=-6; a_{12}\Rightarrow A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}=-2; a_{13}\Rightarrow A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&0\\-1&3\end{vmatrix}=0$

$a_{21}\Rightarrow A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\3&1\end{vmatrix}=3; a_{22}\Rightarrow A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2; a_{23}\Rightarrow A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&0\\-1&3\end{vmatrix}=-3$

$a_{31}\Rightarrow A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}=0; a_{32}\Rightarrow A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=-2; a_{33}\Rightarrow A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \overline{A}=\begin{bmatrix}-6&-2&0\\3&2&-3\\0&-2&0\end{bmatrix}\Rightarrow ([\overline{A}])'=\begin{bmatrix}-6&3&0\\-2&2&-2\\0&-3&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

Định thức - determinant

LOGO

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&2\\-1&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow[AI]\rightarrow[IA^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\\-1&3&1&0&0&1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\\0&3&2&1&0&1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&3&2&1&0&1\\0&0&2&0&1&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&3&0&1&-1&1\\0&0&2&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\approx\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\Rightarrow R(A)=3,\&A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

Định thức - determinant

LOGO

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & -6 & 0\\ 7 & -2 & 7\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=1\begin{vmatrix}-6 & 0\\ -2 & 7\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}5 & 0\\ 7 & 7\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}5 & -6\\ 7 & -2\end{vmatrix}=-16\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\Rightarrow A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-6 & 0\\ -2 & 7\end{vmatrix}=-42; A_{12}=-35; A_{13}=32; A_{21}=-20; A_{22}=-14$$

$$A_{23}=16; A_{31}=18; A_{32}=15; A_{33}=-16$$

$$\Rightarrow \overline{A}=\begin{bmatrix}-42 & -35 & 32\\ -20 & -14 & 16\\ 18 & 15 & -16\end{bmatrix}\Rightarrow (\overline{A})'=\begin{bmatrix}-42 & -20 & 18\\ -35 & -14 & 15\\ 32 & 16 & -16\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{42}{16} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{8}\\ \frac{35}{16} & \frac{7}{8} & -\frac{15}{16}\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- ❖I. Tổng quát
- ❖II. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính
- ❖III. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- I. Tổng quát
- 1/ Định nghĩa: Hệ phương trình tuyến tính là hệ m phương trình đại số bậc 1, đối với n ẩn số.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\};(1)$$

- Trong đó: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n ẩn cần tìm
- a_{ij} hệ số ở phương trình thứ i, đi với ẩn x_j
- b_i vế phải của phương trình thứ i

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Khi m = n :hệ có số phương trình = số ẩn số
- Khi : $b_i = 0, \forall i = 1, \overline{n}$ hệ phương trình thuần nhất.
- Thí dụ:
- $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 6 \end{array}\right\}(1)$ hệ 2 phương trình,3 ẩn
- $\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{array}\right\}(2)$ hệ 2 phương trình, 2 ẩn
- $\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}\right\}(3)$ hệ phương trình thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

2/Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Trong hệ (1), gọi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ ma trận hệ số

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$: ma trận vế phải;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .. & x_n \end{bmatrix}^t$$ ma trận ẩn cần tìm

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ Với phép nhân các ma trận, ta có thể viết

$$(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

❖ AX=B được gọi là dạng ma trận của hệ phương trình (1)

❖ Nếu B = 0 thì AX = 0 hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Giải hệ (1) tức là tìm nghiệm của (1)
- Vậy nghiệm của hệ (1) là một bộ n số thực khi ta thay vào (1) thoả tất cả các phương trình của (1).

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$x_1 = \alpha_1; x_2 = \alpha_2; \ldots, x_n = \alpha_n$$

- Hệ pttt có nghiệm gọi là hệ pttt tương thích
- Hệ pttt không có nghiệm gọi là hệ pttt không tương thích.
- AX = 0, luôn có nghiệm X = 0 gọi là nghiệm tầm thường
- Hệ pttt có chung ẩn: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là hệ tương đương nếu chúng có chung nghiệm hoặc chúng cùng vô nghiệm

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

3/ Những vấn đề cần tập trung giải quyết

a. Điều kiện để AX = B có nghiệm

b. Điều kiện để AX = 0, có nghiệm khác không.

c. Các phương pháp giải AX = B, A(nxn)

- phương pháp Crame
- phương pháp dùng phép biến đổi sơ cấp
- phương pháp dùng ma trận nghịch đảo

d. phương pháp GAUSS, giải hệ AX = B, A(mxn)

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Lưu ý:
- 1. hệ pttt có thể có 1 nghiệm duy nhất, hoặc có nhiều hơn 1 nghiệm. Trong trường hợp hệ không có nghiệm ta gọi hệ đó vô nghiệm.
- 2/ với AX = B (1), gọi:
- $$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$ ma trận bổ sung

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

4/ điều kiện tồn tại nghiệm: Cho AX = B (1)

Định lý CRONECKER-CAPELI

AX = B có nghiệm $\Leftrightarrow R(A) = R(\widetilde{A})$

Thí dụ:

$$1/\left.\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{matrix}\right\}(1) \Rightarrow R(A) = 1 \neq R(\widetilde{A}) = 2 \Rightarrow (1): VN$$

$$2/\left.\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \end{matrix}\right\}(1) \Rightarrow R(A) = R(\widetilde{A}) = 3 \Rightarrow (1): \exists nghiem$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ **Thí dụ: xác định tham số a ,để hpttt sau có nghiệm**

$$\left.\begin{array}{l} ax_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+ax_3=1 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}; \widetilde{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1)\exists nghiem \Leftrightarrow R(A)=R(\widetilde{A}) \Leftrightarrow |A|=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)$$

$$if:\begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{cases} \Rightarrow R(A)=3=R(\widetilde{A}) \Rightarrow (1)\exists nghiem$$

$$if: a=1 \Rightarrow R(A)=R(\widetilde{A})=1 \Rightarrow (1)\exists nghiem$$

$$if: a=-2 \Rightarrow R(A)=2\neq R(\widetilde{A})=3 \Rightarrow (1): vn$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ **Các hpttt sau có nghiệm hay không ?**

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1+3x_2=5 \\ 1/3x_1+x_2=4 \\ x_1+x_2=2 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \widetilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R(A)=R(\widetilde{A})=2 \Rightarrow (1)\exists nghiem$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1-x_2+x_3-2x_4=1 \\ 2/x_1-x_2+2x_3-x_4=2 \\ 5x_1-5x_2+8x_3-7x_4=3 \end{array}\right\}(1)$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- II. Phương pháp giải hệ pttt
- 1. Hệ phương trình Crame

Định nghĩa: AX = B , A(nxn) là hệ Crame nếu detA khác không.

Nhận xét: Ta có những kết quả sau

- A ma trận không suy biến
- A(nxn) tương đương I(nxn)
- Hệ n vectơ dòng của A độc lập tuyến tính
- R(A) = n
- A khả nghịch (có ma trận nghịch đảo)

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Giải hệ phương trình Crame
- 1/ Phương pháp Crame:

Định lý: hệ Crame có duy nhất nghiệm cho bởi:

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \forall j = 1, n; D = \det A = |A|; D_j = |A^j|$$

A^j có được bằng cách thay cột j trong A bằng cột B

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ Phương pháp Crame: Cho AX = B (1)

❖ Bước 1: tính detA = D

* Nếu detA = 0 thì (1) vô nghiệm, stop việc giải.

* Nếu detA $\neq$ 0, thì (1) có duy nhất 1 nghiệm

Bước 2:Lập $A^j \Rightarrow \det A^j = \left|A^j\right|$

Bước 3: Tính $x_j = \dfrac{D_j}{D}, D_j = \det A^j = \left|A^j\right|, \& D = \det A$

Khi đó nghiệm của (1) là:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ TD $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow D = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow (1)\exists! nghiem$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 18; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -14; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = -9; x_2 = \frac{D_2}{D} = 7; x_3 = \frac{D_3}{D} = -4$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -4 \end{bmatrix}^t$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ **TD**

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 8 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D = |A| = 96; D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 13 & 4 & -1 \\ 8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 288; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 13 & -1 \\ -1 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 192; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 96$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = 3; x_2 = \frac{D_2}{D} = 2; x_3 = \frac{D_3}{D} = 1$$

$$\Rightarrow X = [3 \quad 2 \quad 1]^t$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

2/ Giải hệ Crame bằng phương pháp ma trận nghịch đảo

$$AX = B; if: \det A = |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1 \\ 5x_1+8x_2+2x_3=3 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$D=\det A=|A|=-2 \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} =9 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2-x_3=3 \\ -x_1+x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=1 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A=|A|=3\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Giải hệ Crame bằng phương pháp biến đổi sơ cấp:
- Phương pháp: AX = B
- Viết A bổ sung, dùng phép biến đổi sơ cấp đưa A bổ sung về A bổ sung bậc thang rút gọn hàng từ đây suy ra nghiệm của hệ.'

$$AX = B \Rightarrow \widetilde{A} \Rightarrow \widetilde{A}$$

- đưa $\widetilde{A}$ về bậc thang rút gọn hàng
- Từ đây suy ra nghiệm của hệ phương trình

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}\right\} (1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 7 & -7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(1) \approx \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 0x_x + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 = -4; x_2 = 7; x_1 = -9$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Phương pháp GAUSS giải hệ AX = B (1)
- Ta chấp nhận các kết quả sau đây

1/ Trong (1) nếu đổi chỗ 2 phương trình cho nhau ta được một hệ tương đương với (1)

2/ Trong (1) nếu thay một phương trình bằng chính phương trình đó sau khi cọng tương ứng một phương trình khác đã được nhận cho một số k khác không thì thu được một hệ tương đương với (1).

3/ Trong (1) nếu thay 1 phương trình bằng chính phương trình đó sau khi nhân 2 vế cho một số k khác không.Thì thu được hệ tương đương với (1).

4/ Từ 3 kết quả trên ta có: Trong (1) nếu thêm vào hay bớt đi một phương trình là tổ hợp tuyến tính của những phương trình còn lại của (1) ta nhận được hệ tương đương với (1).

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Sự tồn tại nghiệm của AX = B
- 1/ Nếu: $R(A) = R(\widetilde{A})$ thì (1) có nghiệm
- 2/ Nếu: $R(A) < R(\widetilde{A})$ thì (1) không có nghiệm
- 3/ Nếu: r = m =n thì AX = B hệ Crame.

* Chúng ta thường gặp các trường hợp sau

Trường hợp 1: $r = R(A) = R(\widetilde{A}) = m = n$ hệ Crame đã biết cách giải.

Trường hợp 2: r = R(A) = $R(\widetilde{A})$ = n < m

số phương trình nhiều hơn số ẩn số. Giải như sau

Tìm ma trận con cấp n của A: A_n, $with\ : |A_n| \neq 0$

Giả sử: là n hàng đầu của A (không mất tổng quát)

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ Ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn} \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix}; A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}; vi: R(A) = R(\widetilde{A}) = n < m$$

❖ Nên: n phương trình đầu lập nen hệ độc lập tuyến tính cực đại

❖ Khi đó: các pt: (n+1);...,m là tổ hợp tuyến tính của n pt đầu. Ta bỏ các phương trình nầy đi.

❖ Chúng ta còn lại hệ có n phương trình, n ẩn số ,với ma trận hệ số: A_n, $\det A_n = |A_n| \neq 0$.Đây là hệ crame đã biết cách giải.

❖ nghiệm của hệ nầy cũng là của (1)

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ Thí dụ: Cho hệ gồm 3 phương trình, 2 ẩn số

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 18 \end{aligned}\right\}(1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow R(A) = R(\widetilde{A}) = 2$$

$$(1) \Rightarrow (pt1)2 + pt2 = pt3 \Rightarrow (1) \approx \left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 2, \& x_2 = 3$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Phương pháp GAUSS giải hệ AX = B (1)
- Ta chấp nhận các kết quả sau đây

1/ Trong (1) nếu đổi chỗ 2 phương trình cho nhau ta được một hệ tương đương vơi (1)

2/ Trong (1) nếu thay một phương trình bằng chính phương trình đó sau khi cọng tương ứng một phương trình khác đã được nhận cho một số k khác không thì thu được một hệ tương đương với (1).

3/ Trong (1) nếu thay 1 phương trình bằng chính phương trình đó sau khi nhân 2 vế cho một số k khác không.Thì thu được hệ tương đương với (1).

4/ Từ 3 kết quả trên ta có: Trong (1) nếu thêm vào hay bớt đi một phương trình là tổ hợp tuyến tính của những phương trình còn lại của (1) ta nhận đươc hệ tương đương với (1).

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Sự tồn tại nghiệm của AX = B
- 1/ Nếu: $R(A) = R(\widetilde{A})$ thì (1) có nghiệm
- 2/ Nếu: $R(A) < R(\widetilde{A})$ thì (1) không có nghiệm
- 3/ Nếu: r = m =n thì AX = B hệ Crame.

* Chúng ta thường gặp các trường hợp sau

Trường hợp 1: $r = R(A) = R(\widetilde{A}) = m = n$ hệ Crame đã biết cách giải.

Trường hợp 2: r = R(A) = $R(\widetilde{A})$ = n < m

số phương trình nhiều hơn số ẩn số. Giải như sau

Tìm ma trận con cấp n của A: A_n, $with\ : |A_n| \neq 0$

Giả sử: là n hàng đầu của A (không mất tổng quát)

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ Ta có:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & .. & a_{nn} \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix}; A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}; vi: R(A) = R(\widetilde{A}) = n < m$$

❖ Nên: n phương trình đầu lập nen hệ độc lập tuyến tính cực đại

❖ Khi đó: các pt: (n+1);...,m là tổ hợp tuyến tính của n pt đầu. Ta bỏ các phương trình nầy đi.

❖ Chúng ta còn lại hệ gồm n phương trình, n ẩn số ,với ma trận hệ số: A_n, $\det A_n = |A_n| \neq 0$.Đây là hệ crame đã biết cách giải.

❖ (1) nghiệm của hệ nầy cũng là của

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ Thí dụ: Cho hệ gồm 3 phương trình, 2 ẩn số

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 18 \end{aligned}\right\}(1) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow R(A) = R(\widetilde{A}) = 2$$

$$(1) \Rightarrow (pt1)2 + pt2 = pt3 \Rightarrow (1) \approx \left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 2, \& x_2 = 3$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Trường hợp 3: r = R(A) = $R(\tilde{A})$ = m<n (số pt < số ẩn số)
- Từ A(mxn), ta tìm được định thức con cấp m khác 0 gọi A(mxm) có detA(mxm) $\neq$ 0 là ma trận thu được từ A sau khi bỏ đi (n-m) cột cuối.
- Phương pháp giải:
  - * Lấy A(mxm) làm nhân, $x_1, x_2, \ldots, x_m$
  - * Giữ m ẩn: bên vế trái, làm ẩn chính.
  - * Chuyển (n-m) ẩn còn lại qua vế phải, làm ẩn tự do.
  - * Giải hệ Crame tương đương với (1).
  - * Nghiệm gồm các ẩn chính phụ thuộc vào các ẩn tự do

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Thí dụ:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+5x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \exists \det.con \neq 0$$

$$\Rightarrow A_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow chon: x_3:$$

$$(1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x_1+5x_2=4-x_3 \\ x_1+x_2=2-x_3 \end{array}\right\}(2): Crame \Leftrightarrow (1)$$

$$Goi: x_3=t \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=3-2t \\ x_2=1-t \\ x_3=t \end{array}\right\}$$

Hệ phương trình tuyeán tính

LOGO

- Trường hợp 4: R(A) $=R(\widetilde{A})$ = r < min(m,n)
- Trong A ta tìm được ma trận con cấp r có:
- Giả sử A(rxr) mằn ở cực trên bê trái A. r phương trình đầu, r cột đầu tạo nên A(rxr) $\left|A(r\times r)\right| \neq 0$
- Phương pháp giải:
  - * Bỏ (m-r) phương trình cuối
  - * Giữ r ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_r$ bên vế trái làm ẩn chính
  - * Chuyển (n-r) ẩn còn lại qua vế phải, làm ẩn tự do
  - * Ta có hệ r phương trình, r ẩn số . Đây là hệ Crame tương đương với (1)
  - * Nghiệm của chúng phụ thuộc (n-r) tham số.

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Thí dụ: Giải hệ 3 phương trình, 4 ẩn số sau

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2+3x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+3x_4=8 \\ 5x_1+x_2+7x_3+x_4=6 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}; \widetilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 8 \\ 5 & 1 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R(A)=R(\widetilde{A})=2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2=-1-x_3+x_4 \\ x_1-x_2=8-x_3-3x_4 \end{array}\right\}(2) \Leftrightarrow (1)$$

$$Goi: x_3=t; x_4=u \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2=-1-3t+u \\ x_1-x_2=8-t-3u \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{3}(7-4t-2u) \\ x_2=\frac{1}{3}(-17-t+7u) \\ x_3=t \\ x_4=u \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Phương pháp GAUSS giải hệ AX = B, A(mxn)
- Dùng phép biến đổi sơ cấp tác động trên những dòng (hàng) của ma trận bổ sung. Đưa ma trận bổ sung về ma trận bậc thang rút gọn hàng. Ta nhận hệ tương đương hệ ban đầu, mà việc giải khá đơn giản
- $\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{A}$ bậc thang rút gọn hàng
- Từ đó , chúng ta có thể tìm nghiệm của chúng

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Thí dụ:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 3 \end{array}\right\}(1) \Rightarrow \widetilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -8 & 3 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -8 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -11 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -14 & 1 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -11 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow R(A) = R(\widetilde{A}) = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 = -x_4 \\ 0x_1 + x_2 - \frac{11}{4}x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_4 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = \frac{4}{5} - 6x_4 \end{array}\right\}(2) \approx (1)$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ **Thí dụ:**

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=2 \\ 3x_1+3x_2-5x_3+x_4=-3 \\ -2x_1+x_2+2x_3-3x_4=5 \\ 3x_1+0x_2+3x_3-10x_4=8 \end{array}\right\}(1)\Rightarrow \widetilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 20 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow pt(4): 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2\Rightarrow (1)VN$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ **Td:**

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+0x_3+2x_4=5 \\ 2x_1+4x_2-x_3+5x_4=-1 \\ x_1+3x_2+0x_3+5x_4=-3 \\ 3x_1+7x_2-3x_3+9x_4=-14 \\ 2x_1+8x_2-4x_3+2x_4=-22 \end{array}\right\}(1): \widetilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & 7 & -3 & 9 & -14 \\ 2 & 8 & -4 & 2 & -22 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & -29 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & -32 \end{bmatrix}$$

$$\approx\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+0x_3+2x_4=5 \\ 0x_1+2x_2-x_3+x_4=-11 \\ 0x_1+0x_2+x_3+2x_4=3 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+3x_4=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow x_1=-\frac{4}{3}; x_2=\frac{17}{3}; x_3=-2; x_4=-\frac{4}{3}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

TD.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2-2x_3+x_4+3x_5=5 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4+2x_5=4 \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=6 \\ 4x_1+3x_2-x_3+3x_4+2x_5=11 \end{array}\right\}, \tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & -5 & 7 & -1 & -10 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & -5 & 7 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 6 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2-2x_3=5-x_4-3x_3 \\ 0x_1-5x_2+6x_3=-6+3x_4+4x_5 \\ 0x_1+0x_2+x_3=-3-2x_4+6x_5 \end{array}\right\}(2): Crame \Leftrightarrow (1)$$

$$if: x_4=t; x_5=u \Rightarrow X=[x_1=\frac{19}{5}+t-\frac{19}{5}u; x_2=-\frac{12}{5}-3t+\frac{32}{5}u; x_3=-3-2t+6u; x_4=t; x_5=u]^t$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

❖ **III. Hệ phương trình thuần nhất: AX = 0**

❖ **Nhớ: AX = 0, luôn có nghiệm X = 0, nghiệm tầm thường**

Nếu: m = n, và detA $\neq 0$ thì AX = 0 : hệ Crame có nghiệm duy nhất X = 0.

Ta có các kết quả:

*** AX = 0, có nghiệm $\neq 0 \Leftrightarrow R(A) < n$**

*** AX = 0, m = n, có nghiệm $\neq 0 \Leftrightarrow$ detA = 0**

*** AX = 0, Nếu: m <n thì có nghiệm $\neq 0$**

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Nhớ:
- Tất cả các nghiệm của hệ, lập nên KGV gọi là KGV nghiệm , có số chiều là: n - R(A).
- Một hệ cơ sở của KGVN được gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ AX = 0. Mọi nghiệm của hệ AX = 0, đều là tổ hợp tuyến tính của hệ nghiệm co bản.
- Với AX = B (1), thì AX = 0 (2) tương ứng. Mọi nghiệm của (1) đều biểu diễn bằng: $X = \overline{X} + X_0$

  Trong đó: X_0 là nghiệm của hệ AX = 0

  $\overline{X}$ là một nghiệm của AX = B

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Thí dụ: Giải hệ phương trình và tìm hệ nghiệm cơ bản.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{array}\right\}, A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\approx\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 0x_1+x_2+6x_3-5x_4=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-4x_3+3x_4 \\ 0x_1+x_2=-6x_3+5x_4 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\{x_1=8x_3-7x_4; x_2=-6x_3+5x_4$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Nghiệm của hệ AX = 0 là: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{array}\right\}$
- Hệ có vô số nghiệm phu thuộc 2 tham số
- Cho $x_3 = c; x_4 = d$ là những số tuỳ ý, thì nghiệm tổng quát của hệ là $8c - 7d, -6c + 5d, c, d\}$
- Ta lập hệ nghiệm cơ bản như sau:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 8c - 7d & -6c + 5d & c & d \\ 8 & 6 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính

LOGO

- Giải hệ;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 14 \end{array}\right\}(1) \Leftrightarrow AX = B; AX = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right\}(2)$$

$(1) \Rightarrow X = [1,1,1,1]'$

$$(2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a + 7b \\ x_2 = -a - 3b \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases} \Rightarrow NTQ(1): X = \begin{cases} a + 7b + 1 \\ -a - 3b + 1 \\ a + 1 \\ b + 1 \end{cases}$$

Ứng dụng vào QTKD

LOGO

- Ứng dụng vào quản trị kinh doanh
- I. Mô hình cân bằng thị trường
- II. Mô hình cân đối liên nghành (input/output)

Ứng dụng hệ AX=B

LOGO

- I. Mô hình cân bằng thị trường
- 1/ thị trường 1 sản phẩm: Một sản phẩm lưu thông trên thị trường , cung & cầu thị trường phụ thuộc vào giá, có thông tin như sau

$$Q_s = -a_0 + a_1 p; Q_d = b_0 - b_1 p$$

$$\Rightarrow Q_s = Q_d \Leftrightarrow -a_0 + a_1 p = b_0 - b_1 p$$

- Giá cân bằng: $$p_0 = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1}$$
- Lượng cung – cầu cân bằng: $Q_{s_0} = Q_{d_0} = \dfrac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1 + b_1}$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Thí dụ:Một sản phẩm lưu thông trên thị trường có các thông tin như sau $Q_d = 5 - p$

$$Q_s = -1 + p$$

- P là giá bán. Giả định các yếu tố khác không đổi, thị trường cân bằng khi:

$$Q_s = Q_d \Leftrightarrow 5 - p = -1 + p \Rightarrow 2p = 6$$

$$p = 3$$

$$Q_s = Q_d = 2$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- 2/ Thị trường 2 sản phẩm: 2 sản phẩm trên thị trường, có các thông tin như sau
- Sản phẩm 1 $Q_{S_1} = -2 + 3p_1, \& Q_{D_1} = 10 - 2p_1 + p_2$
- Sản phẩm 2: $Q_{S_2} = -1 + 2p_2, \& Q_{D_2} = 15 + p_1 - p_2$
- Cân bằng thị trường khi

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 3p_1 = 10 - 2p_1 + p_2 \\ -1 + 2p_2 = 15 + p_1 - p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5p_1 - p_2 = 12 \\ -p_1 + 3p_2 = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ p_1 = \frac{26}{7}; Q_{S_1} = Q_{D_1} = \frac{64}{7}; \& p_2 = \frac{46}{7}; Q_{S_2} = Q_{D_2} = \frac{85}{7} \right.$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

❖ **Trên thị trường có 3 sản phẩm, có các hông tin**

$$SP1: Q_{d_1} = -2p_1 + p_2 + p_3 + 8; \& Q_{s_1} = 4p_1 - p_2 - p_3 - 5$$

$$SP2: Q_{d_2} = p_1 - 2p_2 + p_3 + 10; \& Q_{s_2} = -p_1 + 4p_2 - p_3 - 2$$

$$SP3: Q_{d_3} = p_1 + p_2 - 2p_3 + 14; \& Q_{s_3} = -p_1 - p_2 + 4p_3 - 1$$

❖ **Tìm điểm cân bằng thị trường?**

❖ **Thị trường cân bằng khi:**

$$-2p_1 + p_2 + p_3 + 8 = 4p_1 - p_2 - p_3 - 5$$

$$p_1 - 2p_2 + p_3 + 10 = -p_1 + 4p_2 - p_3 - 2$$

$$p_1 + p_2 - 2p_3 + 14 = -p_1 - p_2 + 4p_3 - 1$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

❖ **Ta đưa điều kiện cân bằng thị trường về dạng**

$$\left.\begin{array}{l} 6p_1 - 2p_2 - 2p_3 = 13 \\ -2p_1 + 6p_2 - 2p_3 = 12 \\ -2p_2 - 2p_2 + 6p_3 = 15 \end{array}\right\} \Leftrightarrow AP = B; A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} P_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 6{,}6 \\ p_2 = 6{,}5 \\ p_3 = 6{,}9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{d_1} = Q_{s_1} = 8{,}2 \\ Q_{d_2} = Q_{s_2} = 10{,}5 \\ Q_{d_3} = Q_{s_3} = 14{,}1 \end{cases}$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Tổng quát cho thị trường có nhiều sản phẩm
- Giả sử có n sản phẩm đang lưu thông trên thị trường
- Sản phẩm thứ i có lượng cung, cầu & giá: $Q_{s_i}; Q_{d_i}; p_i$
- Giả định rằng các yếu tố khác không đổi
- Hàm cung, cầu sản phẩm thứ i là:

$$Q_{s_i} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n; \forall i = 1, n$$

$$Q_{d_i} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \ldots + b_{in}p_n; \forall i = 1, n$$

- Thị trường cân bằng khi:

$$Q_{s_i} = Q_{d_i}, \forall i = 1, n$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Ta đưa điều kiện cân bằng thị trường về AX = B

$$a_{10} + a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \ldots + a_{1n}p_n = b_{10} + b_{11}p_1 + b_{12}p_2 + \ldots + b_{1n}p_n$$
$$a_{20} + a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{2n}p_n = b_{20} + b_{21}p_1 + b_{22}p_2 + \ldots + b_{2n}p_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n0} + a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \ldots + a_{nn}p_n = b_{n0} + b_{n1}p_1 + b_{n2}p_2 + \ldots + b_{nn}p_n$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \ldots + c_{1n}p_n = -c_{10} \\ c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \ldots + c_{2n}p_n = -c_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \ldots + c_{nn}p_n = -c_{n0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow AP = B, A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & .. & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & .. & c_{nn} \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ .. \\ p_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -c_{10} \\ -c_{20} \\ .. \\ -c_{n0} \end{bmatrix}$$

$$with\ c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}, \forall i = 1, n; \forall k = 0, n$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Bài tập: thị trường có 3 sản phẩm, cung, cầu, giá được cho như sau

$$Q_{s_1} = 10p_1 - p_2 - 30; Q_{d_1} = 143 - 9p_1 + p_2 + p_3$$

$$Q_{s_2} = 12p_2 - p_3 - 13; Q_{d_2} = 80 + p_1 - 10p_2$$

$$Q_{s_3} = -p_1 + 9p_3 - 20; Q_{d_3} = 79 + 2p_2 - 8p_3$$

- a. Tìm điểm câ bằng thị trường
- B. trong 1 đơn vị thời gian:
  - xuất:37 đơn vị sản phẩm 1, và 15 đơn vị sản phẩm 3.
  - nhập về: 3 đơn vị sản phẩm 2

Tìm điểm cân bằng mới trên thị trường

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

❖ **Thị trường cân bằng khi**

$$a/\ Q_s = Q_d \Leftrightarrow Q_s - Q_d = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 19p_1 - 2p_2 - p_3 = 173 \\ -p_1 + 22p_2 - p_3 = 93 \\ -p_1 - 2p_2 + 17p_3 = 99 \end{cases}; p_i > 0, \forall i = 1,3$$

$$\Rightarrow p_1 = 10; p_2 = 5; p_3 = 7$$

$$b/\ Q_{s_1} - 37 = 10p_1 - p_2 - 30 - 37 = 10p_1 - p_2 - 67$$

$$Q_{s_2} = Q_{s_2} + 3 = 12p_2 - p_3 - 13 + 3 = 12p_2 - p_3 - 10$$

$$Q_{s_3} = Q_{s_3} - 15 = -p_1 + 9p_2 - 20 - 15 = -p_1 + 9p_3 - 35$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 19p_1 - 2p_2 - p_3 = 210 \\ -p_1 + 22p_2 - p_3 = 90 \\ -p_1 - 2p_2 + 17p_3 = 114 \end{cases} \Rightarrow p_1 = 12; p_2 = 5; p_3 = 8$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- II. Mô hình cân đối liên ngành (I/O = input/ output)
- Giả định chung: nền kinh tế quốc gia có n ngành

$$N_1, N_2, \ldots N_n$$

- Ngành sản xuất: thoả 2 điều

1.Sản xuất 1 loại sản phẩm thuần nhất hay một số sphh theo 1 tỷ lệ nhất định, gọi là một mặt hàng

2. Các nhập lượng sử dụng theo một tỷ lệ cố định

Tổng cầu ngành: gồm 2 yếu tố

* Cầu trung gian: SX sử dụng sphh,dv cho SX

* Cầu tiêu dùng & xuất khẩu

* Qui ước: Giá trị SPHH,DV được tính bằng đơn vị tiền tệ.

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Tổng cầu một ngành: Gọi
- x_i Tổng cầu SPHH,DV ngành I
- x_{ik} : Giá trị SPHH,DV ngành I, mà ngành k sử dụng làm đầu vào cho SX = cầu trung gian
- b_i : Giá trị SPHH,DV ngành I dùng cho tiêu dùng và xuất khẩu = cầu cuối cùng

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ik} + b_i; \forall i = 1, n$$

- Ta viết lại:

$$x_i = \frac{x_{i1}}{x_1} x_1 + \frac{x_{i2}}{x_2} x_2 + \ldots + \frac{x_{in}}{x_n} x_n + b_i, \forall i = 1, n$$

$$goi: a_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_k}, \forall i = 1, n, \forall k = 1, n$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2$$
$$----------$$
$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = b_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = b_2 \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = b_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow [I-A]X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- [I- A]X = B
- I : ma trận đơn vị cùng cấp
- A: ma trận hệ số kỹ thuật = ma trận chi phí trực tiếp
- X: ma trận tổng cầu của nền kinh tế
- B: ma trận cầu cuối cùng gồm cầu tiêu dùng và xuất khẩu
- $\dfrac{x_{ik}}{x_k} = a_{ik}$ tỷ phần chi phí ngành k trả cho việc mua sản phẩm hàng hoá dịch vụ của ngành I, dùng làm yếu tố đầu vào của ngành k. Tính bình quân cho 1 đơn vị giá trị sản phẩm hàng hoá dịch vụ ngành k sản xuất được.

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Thí dụ:
- a_{ik} = 0,2 :có nghĩa là : để sản xuất ra 1 $ giá trị sphh-dv (tính bình quân) ngành k phải mua 0,2 $ sphh-dv của ngành i

Theo giả định thì a_{ik} không đổi

$0 < a_{ik} < 1$

a_{ik} : Hệ số chi phí nhập lượng hay hệ số kỹ thuật

Trong ma trận A:

dòng I : hệ số giá trị sphh-dv ngành I bán cho mỗi ngành và cho chính ngành I để làm yếu tố đầu vào .

Cột k: hệ số giá trị sphh-dv mà ngành k mua của mỗi ngành để dùng trong việc sản xuất, ngay cả mua của chính ngành k

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Tổng tất cả các phần tử trên cột k là mức chi phí ngành k phải trả cho việc mua các yếu tố sx tính trên $1 giá trị sphh-dv nghành k làm được.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = a_{1k} + a_{2k} + \ldots + a_{nk} \le 1, \forall k = 1, n$$

- Tổng tất cả các phần tử của dòng I chính là tổng cầu của ngành I
- [I- A]X = B (1) cho chúng ta xác định mức tổng cầuđối với sphh-dv của tất cả các ngành trong nền kinh tế từ đó lập kế hoạch điều hành sao cho:
- tránh lạm phát và nền kinh tế hoạt động tốt

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- [I - A] : ma trận LEONTIEF nhà toán học và kinh tế học, giáo sư đạt giải Nobel
- Giải hệ phương trình nầy:

$$[I - A]X = B(1)$$

$$p^2 1 :\Rightarrow X = [I - A]^{-1} B$$

$$p^2 2 :\Rightarrow pbdscd$$

$$p^2 3 :\Rightarrow Crame$$

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- Thí dụ:Giả định nền kinh tế có 3 ngành sản xuất, ma trận hệ số kỹ thuật là:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}$$

- 1/ Giải thích ý nghĩa con số 0,4 trong ma trậ A
- 2/ Cho biết tỷ phần giá trị gia tăng của các ngành đóng góp cho nền kinh tế.
- 3/ Biết mức cầu cuối cùng (tiêu dùng & xuất khẩu)
- $N_1 = 10, N_2 = 5, N_3 = 6$ đơn vị tỷ USD. Hảy xác định mức tổng cầu của mỗi ngành

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- 1/ có nghĩa là:để sản xuất $1 sphh-dv của mình ngành 1 trả cho ngành 2: $0,4 để mua yếu tố đầu vào
- 2/Tỷ phần gía trị gia tăng của mỗi ngành là:
- Ngành 1: 0,2 + 0,4 +0,1 = 0,7

  1 - 0,7 = 0,3 tương đương 30%

  Ngành 2: 0,3 + 0,1 + 0,3 = 0,7

  1 - 0,7 = o,3 tương đương 30%

  Ngành 3: 0,2 +0,2 + 0,2 = 0,6

  1 - 0,6 = 0,4 tương đương 40%

Ứng dụng hệ AX = B

LOGO

- 3/ Ta có:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [I - A]^{-1} = \frac{1}{0,384} \begin{bmatrix} 0,66 & 0,3 & 0,24 \\ 0,34 & 0,62 & 0,24 \\ 0,21 & 0,27 & 0,60 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = [I - A]^{-1} B = \frac{1}{0,384} \begin{bmatrix} 0,66 & 0,3 & 0,24 \\ 0,34 & 0,62 & 0,24 \\ 0,21 & 0,27 & 0,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,84 \\ 20,68 \\ 18,36 \end{bmatrix}$$

Enter
Thank You
Click to edit company slogan
www.themegallery.com

LOGO