Chương I

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. MA TRẬN

1.1. Định nghĩa

• Ma trận cấp $m \times n$ (đôi khi còn gọi là cỡ $m \times n$) là một bảng hình chữ nhật gồm $m-$hàng, $n-$cột và các phần tử của ma trận được biểu diễn dưới dạng sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Để đơn giản ta kí hiệu ma trận A cấp $m \times n$ như sau: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, trong đó a_{ij} là phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A.

• Nếu các phần tử của ma trận A đều nhận giá trị thực, có nghĩa là $a_{ij} \in \mathbf{R}$, thì ma trận A được gọi là ma trận thực.

***. Ví dụ:**

$A = (\,15\,)$ là ma trận cấp 1×1.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 3×2.

$A = \begin{pmatrix} \cos x & \ln x & \sin x \\ \sin x + \cos x & 2 & -3 \end{pmatrix}$ là ma trận cấp 2×3.

• **Ma trận hàng:** Ma trận cỡ $1 \times n$ (chỉ có 1 hàng) gọi là ma trận hàng.

***. Ví dụ:** Ma trận $(\,1 \quad 2 \quad 3 \quad 4\,)$ là ma trận hàng (cỡ 1×4).

• **Ma trận cột:** Ma trận cỡ $m \times 1$ (chỉ có 1 cột) gọi là ma trận cột.

***. Ví dụ:** Ma trận $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ là ma trận cột (cỡ 3×1).

• Ma trận thực gồm tất cả các phần tử bằng 0 được gọi là **ma trận không**.

• Ma trận cấp $n \times n$ được gọi là ma trận vuông cấp n.

• **Ma trận đơn vị:** Là ma trận vuông cấp n có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 và các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0, tức là có dạng: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Ký hiệu là: $\mathbf{I_n}$ (đôi khi ta còn ký hiệu: $\mathbf{I}$).

• **Ma trận con:** Cho A là ma trận cấp $m \times n$, ta gọi M_{ij} là ma trận lập được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i và cột j, khi đó M_{ij} gọi là ma trận con của ma trận A ứng với phần tử a_{ij}.

***. Ví dụ:** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

Ta có: $M_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$; $M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$; $M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; $M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.2. Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng (cột) của ma trận

• Các phép biến đổi sau đây đối với hàng (cột) của ma trận được gọi là các phép **biến đổi sơ cấp** theo hàng (cột) của ma trận:

(1). Đổi chổ hai hàng (cột) của ma trận cho nhau.

(2). Nhân tất cả các phần tử của một hàng (cột) của ma trận với một số $\lambda \neq 0$.

(3). Cộng vào một hàng (cột) nào đó của ma trận một hàng (cột) khác sau khi đã nhân với một số $\lambda \neq 0$.

***. Ví dụ:** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Khi đó :

(1) Đổi chỗ hàng 1 cho hàng 2 (cột 1 cho cột 2)ta được:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(2) Nhân tất cả các phần tử của hàng 2 của A cho $\lambda = 2$ ta được:

$$C = 2.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(3) Cộng hàng 1 vào hàng 2 sau khi đã nhân với $\lambda = 2$ của A ta được:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 7 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• **Định nghĩa:** Phần tử khác 0 đầu tiên của một hàng của ma trận (được tính từ trái sang phải) được gọi là **phần tử cơ sở** của hàng đó.

• **Định nghĩa:** Một ma trận được gọi là **ma trận bậc thang trên** nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

(1). Các hàng bằng không ở dưới các hàng khác không.

(2). Phần tử cơ sở của hàng phía dưới nằm bên phải so với phần tử cơ sở của hàng phía trên.

***. Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Định lý:** Mọi ma trận đều có thể đưa về dạng ma trận bậc thang trên nhờ các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận.

***. Ví dụ1:** Tìm ma trận bậc thang của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & 10 \\ 2 & 9 & 3 & 17 \end{pmatrix}$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp ta có

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

***. Ví dụ2:** Đưa ma trận sau về dạng ma trận bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -31 & 30 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{55}{7} \end{pmatrix}$$

1.3. Các phép toán ma trận

• Hai ma trận bằng nhau:

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n},\ B = (b_{ij})_{p\times q}$. Khi ấy:

$$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} m = p \ \ \text{(số hàng)} \\ n = q \ \ \text{(số cột)} \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

(Tức là nó cùng cấp và từng phần tử tương ứng bằng nhau.)

***. Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

• **Phép cộng ma trận:**

Tổng của hai ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ cũng là ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu là: $A + B$, được xác định bởi:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

***. Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 8 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Khi ấy

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 4+7 & 0+6 & 1+9 \\ 0+0 & 2+8 & 7+7 & -5+2 \\ 0+1 & 1+0 & 4+2 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 6 & 10 \\ 0 & 10 & 14 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

• **Phép nhân một số với một ma trận:**

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và số $\lambda \neq 0$. Khi ấy tích của số λ với ma trận A cũng là ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu là: $\lambda.A$, được xác định bởi:

$$\lambda.A = (\lambda.a_{ij})_{m\times n}$$

***. Ví dụ:**

Cho số $\lambda = 5$ và ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Khi ấy ta có:

$$\lambda.A = \begin{pmatrix} 5.1 & 5.4 & 5.0 & 5.1 \\ 5.0 & 5.2 & 5.7 & 5.(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 35 & -25 \end{pmatrix}$$

• **Phép nhân ma trận:**

Tích của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ với ma trận $B = (b_{ij})_{n\times p}$ là một ma

trận cấp $m \times p$, ký hiệu là: $A.B$, được xác định bởi:

$$A.B = \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}\right)_{m\times p}$$

***. Ví dụ:**

Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 10 & 14 \\ 11 & 15 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$. Khi ấy ta có:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1.9 + 2.10 + 3.11 + 4.12 & 1.13 + 2.14 + 3.15 + 4.16 \\ 5.9 + 6.10 + 7.11 + 8.12 & 5.13 + 6.14 + 7.15 + 8.16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 136 \\ 278 & 339 \end{pmatrix}$$

***.Chú ý:** Để hai ma trận nhân được với nhau thì số cột của ma trận trước phải bằng số hàng của ma trận sau.

• **Phép chuyển vị ma trận:**

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Khi ấy ma trận chuyển vị của ma trận A là một ma trận có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột, chuyển cột thành hàng theo đúng thứ tự.

Ký hiệu là: A^T. Như vậy ta có:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad ; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

***. Ví dụ:**

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. Khi ấy ta có: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

1.4. Một số tính chất của phép toán ma trận

• **Định lý 1:** Cho các ma trận A, B, C và các số α, β sao cho các phép toán sau đây được tạo thành. Khi ấy ta sẽ có:

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A.(B.C) = (A.B).C$
4. $(A + B).C = A.C + B.C$
5. $A.(B + C) = A.B + A.C$
6. $(\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$
7. $\alpha.(A.B) = (\alpha.A).B = A.(\alpha.B)$
8. $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$
9. $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$
10. Nói chung, $A.B \neq B.A$

- **Định lý 2:** Cho các ma trận A, B. Khi ấy ta có:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A.B)^T = B^T.A^T$
4. $(\lambda.A)^T = \lambda.A^T$

§2. ĐỊNH THỨC

• Cho ma trận vuông cấp n có dạng: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Ta ký hiệu M_{ij} là ma trận vuông lập từ ma trận A sau khi đã bỏ đi hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A và M_{ij} được gọi là ma trận con của ma trận A ứng với phần tử a_{ij}.

***. Ví dụ :** Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Khi đó ta có:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} ...$$

2.1. Định nghĩa

• Định thức của ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một số, ký hiệu là

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

và được xác định như sau:

(1). A là ma trận cấp $1 (n = 1)$:

$$A = (\, a_{11} \,) \text{ thì } \quad \det(A) = a_{11}$$

(2). A là ma trận cấp 2 $(n = 2)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$
$$= a_{11}.\det(M_{11}) - a_{21}.\det(M_{21})$$

(Chú ý rằng a_{11} và a_{12} là các phần tử nằm cùng ở hàng 1 của ma trận A), vân vân, và một cách tổng quát,

(3). A là ma trận cấp n $(n \geq 3)$ thì:

$$\det(A) = a_{11}.\det(M_{11}) - a_{21}.\det(M_{21}) + a_{31}.\det(M_{31}) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{i+j}.a_{ij}.\det(M_{ij}) + \ldots + (-1)^{n+1}.a_{n1}.\det(M_{n1})$$

(Người ta gọi là phép khai triển theo hàng 1).

***. Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 1.(45-48) - 4.(18-24) + 7.(12-15) = 0.$$

• Tương tự ta có công thức khai triển của định thức theo hàng k nào đó:

$$\det(A) = (-1)^{k+1}[a_{k1}\det(M_{k1}) - a_{k2}\det(M_{k2}) + \ldots + (-1)^{n+1}a_{kn}\det(M_{kn})]$$

***. Ví dụ 1:** Tính định thức sau bằng cách khai triển theo hàng 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\left(2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right)$$
$$= 2.(2-0) - 3.(-1-0) + 7.(4-4) = -1.$$

***. Ví dụ 2:** Tính định thức sau bằng cách khai triển theo hàng 4

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\left(a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - d.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -a - b - c + 4d$$

• **Chú ý:** Trong trường hợp $n = 3$ ta có thể dùng quy tắc Sarrus sau đây:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} \end{array}$$

2.2. Một số tính chất của định thức

• **Tính chất 1:** $|A| = |A^T|$

***. Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

• **Tính chất 2:** Khi đổi vị trí của hai hàng (hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

***. ví dụ:** Ta có:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 2.3 = -1$$

Đổi chổ hàng 1 cho hàng 2 ta cũng được:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 1.5 = 1 = -(-1)$$

• **Tính chất 3:** Định thức có một hàng (một cột) nào đó gồm toàn số 0 thì bằng 0.

***. Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad \begin{vmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

• **Tính chất 4:** Định thức có hai hàng (hai cột) tỷ lệ nhau thì bằng 0.

***. Ví dụ 1:**

$$\begin{vmatrix} m.a & m.b & m.c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad \begin{vmatrix} n.a & b & a \\ n.x & y & x \\ n.t & u & t \end{vmatrix} = 0$$

***. Ví dụ 2:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2.1 & 1 \\ 2 & 2.2 & 3 \\ 3 & 2.3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

• **Tính chất 5:** Nếu nhân một hàng (một cột) nào đó của định thức với một số $\lambda \neq 0$ thì định thức được nhân lên với số λ đó.

***. Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} m.a & m.b \\ x & y \end{vmatrix} = m. \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{vmatrix} n.a & t \\ n.x & m \end{vmatrix} = n. \begin{vmatrix} a & t \\ x & m \end{vmatrix}$$

***. Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4.1 & 4.2 \end{vmatrix} = 4. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

• **Tính chất 6:** Định thức không thay đổi nếu ta cộng vào một hàng (một cột) nào đó một tổ hợp tuyến tính của một số **hàng (cột) khác**.

***. Ví dụ 1:**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1 + \alpha.a_2 - \beta.a_3) & a_2 & a_3 \\ (b_1 + \alpha.b_2 - \beta.b_3) & b_2 & b_3 \\ (c_1 + \alpha.c_2 - \beta.c_3) & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

***. Ví dụ 2:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 + (-2).2 & 5 + (-2).1 & 7 + (-2).3 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -20$$

***. Ví dụ 3:**

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3).(a-1)^3$$

• **Tính chất 7:** Định thức của ma trận tam giác có dạng dưới đây được xác định là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}\dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}\dots a_{nn}$$

***. Ví dụ 1:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1.5.3.(-2) = -30$$

***. Ví dụ 2:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.3.(-2).4.5 = -120$$

• **Tính chất 8:** Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức. Có nghĩa là:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 + b'_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 + c'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b'_3 \\ c_1 & c_2 & c'_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & a_2 + a'_2 & a_3 + a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

***. Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x + y \\ 0 & 5 & x' + y' \\ 3 & 2 & x'' + y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 0 & 5 & x' \\ 3 & 2 & x'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & y \\ 0 & 5 & y' \\ 3 & 2 & y'' \end{vmatrix}$$
$$= 15(x + y) + 7(x' + y') + 10(x'' + y'')$$

§3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

3.1. Định nghĩa

• Cho A là một ma trận vuông cấp n. Ma trận B được gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A (ký hiệu là: A^{-1}) nếu thoả mãn:

$$A.B = I_n \quad \text{và} \quad B.A = I_n$$

***. Ví dụ:** Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Xét một ma trận $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Ta có:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B.A = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Vậy B chính là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

• Nếu A tồn tại ma trận nghịch đảo thì ta nói A là ma trận khả nghịch.

• **Định lý** (điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo)

Điều kiện cần và đủ để một ma trận A vuông cấp n tồn tại ma trận nghịch đảo là: $\det(A) \neq 0$.

3.2. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Giả sử ta cần tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

• **Phương pháp 1**

Ta ký hiệu $C_{ij} = (-1)^{i+j}.\det(M_{ij})$ và được gọi là phần phụ đại số của phần tử a_{ij}. Khi ấy ta có công thức xác định ma trận nghịch đảo của ma trận A như sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$$

***. Ví dụ 1:** Giả sử cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Ta có: $\det(A) = -1 \neq 0$. Ngoài ra ta có:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 40 & C_{12} = -13 & C_{13} = -5 \\ C_{21} = -16 & C_{22} = 5 & C_{23} = 2 \\ C_{31} = -9 & C_{32} = 3 & C_{33} = 1 \end{array}$$

Do đó ta có ma trận nghịch đảo của ma trận A như sau:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

***. Ví dụ 2:** Giả sử cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có: $\det(A) = 0$, nên ma trận A không có ma trận nghịch đảo.

• Phương pháp 2

Đây là phương pháp dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận để tìm ma trận nghịch đảo. Nội dung của phương pháp này là chúng ta viết vào bên phải của ma trận A một ma trận đơn vị cùng cấp. Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng **(chỉ theo hàng)** của ma trận để biến ma trận sau khi đã ghép (có cấp là: $n \times 2n$) về một ma trận sao cho ma trận đơn vị nằm về phía bên trái và khi ấy phía bên phải của ma trận này

chính là ma trận nghịch đảo cần tìm. Cụ thể chúng ta mô tả như sau:

$$A/I = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \dots\dots\dots \text{ biến đổi } \dots\dots\dots$$

$$\longrightarrow \dots\dots\dots \text{ biến đổi } \dots\dots\dots$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}\right)$$

Khi ấy ta có:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

***. Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$A/I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -9 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 16 & 24 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & 15 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & 15 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 & -1 \end{array}\right)$$

Vậy:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -2 \\ 6 & 9 & -1 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3. Hạng của ma trận

• **Định nghĩa:** Hạng của một ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác 0 lập từ ma trận A. Ký hiệu là: $rank(A)$ hay $r(A)$

***. Ví dụ:** Xét ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Các định thức con cấp ba của A là

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Ta có định thức con cấp hai của A là

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Vậy $r(A) = 2$

• **Phương pháp tìm hạng của ma trận**

Chúng ta có thể dùng định nghĩa để tìm hạng của ma trận, tuy nhiên phương pháp này rất hạn chế, nhất là khi cấp của ma trận rất lớn. Vì thế chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp của ma trận để tìm hạng của ma trận, nội dung của phương pháp này là chúng ta dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng (hoặc cột, hoặc cả hai) của ma trận để đưa ma trận đó về dạng **ma trận bậc thang thu gọn nhất**. Khi ấy hạng của ma trận chính là số các hàng khác không (hoặc số các cột khác không, *nếu nhỏ hơn*) của ma trận cuối cùng.

***. Ví du 1:**

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Dùng phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận ta có:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có: $rank(A) = 3$.

***. Ví dụ 2:** Tìm λ để $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ có hạng là 2

Ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -4 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & \lambda + 6 \end{pmatrix}$$

Để $r(A) = 2$ thì $\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -6$

Vậy với $\lambda = -6$ thì $r(A) = 2$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1. Định nghĩa

• Hệ gồm $n-$ẩn số $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ và $m-$phương trình có dạng:

$$(4.1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính.

• Nếu chúng ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

thì khi ấy hệ phương trình (4.1) sẽ được viết lại theo dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

hay có thể viết gọn là:

$$A.X = B$$

• Ma trận A được gọi là ma trận hệ số, ma trận B được gọi là ma trận hệ số tự do và X được gọi là ma trận nghiệm số ở dạng cột.

• Bộ $n-$số có dạng $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là nghiệm của hệ

phương trình (4.1) nếu khi thay $\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \dots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$ vào hệ (4.1) thì chúng ta được các đồng nhất thức.

• Hệ (4.1) được gọi là **tương thích** nếu nó có nghiệm, được gọi là **không tương thích** nếu như nó vô nghiệm, và được gọi là **vô định** nếu như nó có hơn một nghiệm.

• Ma trận $\overline{A}$ có dạng: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ được gọi là ma trận hệ số bổ sung của ma trận A.

4.2. Định lý về sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình

• **Định lý:** Hệ (4.1) là tương thích khi và chỉ khi $rank(A) = rank(\overline{A})$.

• **Nhận xét:**

(1). Nếu $rank(A) \neq rank(\overline{A})$ thì hệ (4.1) vô nghiệm.

(2). Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = n$ thì hệ (4.1) có nghiệm duy nhất.

(3). Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) < n$ thì hệ (4.1) có vô số nghiệm.

***. Ví dụ 1:** Tìm m để hệ sau có nghiệm.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & m-2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right)$$

Để hệ có nghiệm thì: $r(A) = r(\overline{A})$

Mà theo trên thì $r(A) = 2 \Rightarrow r(\overline{A}) = 2$

$\Longleftrightarrow m - 5 = 0 \Rightarrow m = 5$

Vậy với $m = 5$ thì hệ phương trình trên có nghiệm.

***. Ví dụ 2:** Biện luận số nghiệm của phương trình theo tham số a:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

• Nếu: $2 - a - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 1, a = -2$

Khi a =1 thì:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 1 < 3$$

Nên hệ vô định (có vô số nghiệm).

Khi a = -2 thì:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow r(A) = 2, r(\overline{A}) = 3$$

$\Longrightarrow r(A) \neq r(\overline{A})$ nên hệ vô nghiệm.

• Nếu: $2 - a - a^2 \neq 0 \Longrightarrow a \neq 1$ và $a \neq -2$

$\Longrightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3$. Nên hệ có 1 nghiệm duy nhất.

Vậy: - Với a = 1 thì hệ vô định.

- Với a = -2 thì hệ vô nghiệm.
- Với $a \neq 1$ và $a \neq -2$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

4.3. Phương pháp giải hệ phương trình tổng quát

• **Phương pháp Gauss:** Nội dung của phương pháp này là chúng ta dùng các phép biến đổi sơ cấp của hệ phương trình để biến đổi và loại dần ẩn số sao cho hệ phương trình cuối cùng dể dàng thu được nghiệm hơn. Các phép biến đổi sơ cấp của hệ phương trình gồm:

(1). Đổi vị trí hai phương trình cho nhau.

(2). Nhân một số $\lambda \neq 0$ vào một phương trình.

(3). Cộng vào một phương trình của hệ một phương trình khác sau khi đã nhân với một số khác 0.

• **Nhận xét:** Vì các phép biến đổi sơ cấp của hệ phương trình giống như các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận. Do vậy chúng ta có thể dùng các phép biến đổi theo hàng (**chỉ theo hàng**) của ma trận để tìm nghiệm của hệ phương trình. Cụ thể: Dùng các phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận để đưa ma trận hệ số bổ sung về dạng ma trận bậc thang thu gọn nhất, khi ấy ma trận cuối cùng sẽ cho ta hệ phương trình tương đương với hệ phương trình ban đầu và do đó ta dể dàng có được nghiệm của hệ ban đầu.

***. Ví dụ 1:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 29 & 29 & 29 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 13 & 16 \\ 0 & 29 & 29 & 29 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 13 & 16 \\ 0 & 0 & 87 & 174 \end{array}\right)$$

Như vậy ta có:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 10x_2 + 13x_3 = 16 \\ 87x_3 = 174 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

***. Ví dụ 2:** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & -7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & -1 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & -46 & 22 & 38 & 12 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & -46 & 22 & 38 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Có: $r(A) = 2$ và $r(\overline{A}) = 3$

$\Longrightarrow r(A) \neq r(\overline{A})$

Vậy hệ phương trình đã cho trên là vô nghiệm.

***. Ví dụ 3:** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 6 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 & \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 6 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 4 & \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Tất cả các định thức con cấp 4 của $\overline{A} = 0$

Ta có: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3$

Vậy $r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 5 = n$ (số ẩn). Nên hệ có vô số nghiệm.

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 & (1) \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 & (2) \\ -2x_4 = -2 & (3) \end{cases}$

$(3) \Longrightarrow x_4 = 1$

$(2) \Longrightarrow x_3 = \dfrac{3 - 3x_5}{2}$

$(1) \Longrightarrow x_1 = \dfrac{-2x_2 + 3x_5 - 3}{2}$

Đặt : $x_2 = s, \;\; x_5 = t; \quad s, t \in R$

Ta có: $x_1 = -s + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{3}{2}; \quad x_3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}t; \quad x_4 = 1$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ phương trình là:

$$(-s+\frac{3}{2}t-\frac{3}{2},\ s,\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2}t,\ 1,\ t); \quad \forall s,t \in R$$

4.4. Hệ Cramer

• **Định nghĩa:** Hệ phương trình tuyến tính có dạng:

$$(4.4) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

và thoả mãn điều kiện:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

được gọi là hệ Cramer.

• **Định lý:** Hệ Cramer có nghiệm duy nhất và được xác định như sau:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Trong đó A là ma trận các hệ số của hệ, A_j là ma trận suy từ A bằng cách thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do.

• **Hệ quả:**

+ Nếu $\det(A) = \det(A_j) = 0, \quad \forall j = \overline{1,n}$ thì hệ vô định

+ Nếu $\begin{cases} \det(A) = 0 \\ \exists j,\ \det(A_j) \neq 0 \end{cases}$ thì hệ vô nghiệm.

***. Ví dụ 1:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Ta có:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 29 \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 4 & 7 & 7 \end{vmatrix} = -29$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 7 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 29 \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 58$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là:

$$x_1 = \tfrac{29}{29} = 1; x_2 = \tfrac{-29}{29} = -1; x_3 = \tfrac{58}{29} = 2$$

***. Ví dụ 2:**

Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases} (1+m)x + y + z = 1 \\ x + (1+m)y + z = m \\ x + y + (1+m)z = m^2 \end{cases}$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+m & 1 & 1 \\ 3+m & 1+m & 1 \\ m+3 & 1 & 1+m \end{vmatrix}$$

$$= (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{vmatrix} = (m+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m^2(m+3)$$

+ Nếu $D = 0 \longrightarrow m = 0 \vee m = -3$

Khi $m = 0$ ta được hệ $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$1 = r(A) \neq r(\overline{A}) = 2$ nên hệ vô nghiệm

Khi $m = -3$ ta được hệ $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = 9 \end{cases}$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 19 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$2 = r(A) \neq r(\overline{A}) = 3$ nên hệ vô nghiệm.

+ Nếu $D \neq 0 \Rightarrow m \neq 0 \wedge m \neq -3 \Rightarrow$ hệ là hệ Cramer có nghiệm duy nhất.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1+m & 1 \\ m^2 & 1 & 1+m \end{vmatrix} = m(2 - m^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & 1+m \end{vmatrix} = m(2m - 1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = m(m^3 + 2m^2 - m - 1)$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2 - m^2}{m(m+3)}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m - 1}{m(m+3)}; z = \frac{D_z}{D} = \frac{m^3 + 2m^2 - m - 1}{m(m+3)}$$

Kết luận:

+ Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ hệ có nghiệm duy nhất.

$$x = \frac{2 - m^2}{m(m+3)}; y = \frac{2m - 1}{m(m+3)}; z = \frac{m^3 + 2m^2 - m - 1}{m(m+3)}$$

+ Nếu $m = 0 \vee m = -3$ hệ vô nghiệm.

4.5. Hệ phương trình thuần nhất

• **Định nghĩa:** Hệ phương trình có dạng:

$$(4.5)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

• **Nhận xét:**

(1). Ta luôn có: $rank(A) = rank(\overline{A})$, do vậy hệ thuần nhất (4.5) luôn có nghiệm. Ta cũng thấy ngay rằng: $X = (0, 0, \ldots, 0)$ là một nghiệm của hệ (4.5). Nghiệm này được gọi là **nghiệm tầm thường** của hệ.

(2). Hệ (4.5) muốn có nghiệm không tầm thường thì phải có: $rank(A) < n$ (có nhĩa là: hạng của ma trận nhỏ hơn số ẩn của hệ). Đặc biệt, khi số phương trình bằng số ẩn thì hệ có nghiệm không tầm thường nếu như $\det(A) = 0$.

(3). Trong trường hợp $rank(A) < n$ thì $rank(A)$ ẩn của hệ được gọi là ẩn cơ bản và $[n - rank(A)]$ ẩn còn lại được gọi là ẩn không cơ bản. Các ẩn không cơ bản có thể nhận những giá trị tuỳ ý.

(4). Khi chọn các giá trị cụ thể cho các ẩn không cơ bản ta sẽ thu được các giá trị cụ thể cho các ẩn cơ bản và khi ấy ta có được các nghiệm của hệ (4.5). Tập gồm $rank(A)$ nghiệm độc lập tuyến tính được gọi là **tập nghiệm cơ bản** của hệ (4.5).

***. Ví dụ 1:** Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 & \\ 2 & 4 & 2 & -1 & & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 1 & 0 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 6 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ đã cho sẽ tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (*)$

Ta chọn x_1, x_4 làm ẩn cơ bản

x_2, x_3 làm ẩn không cơ bản

Khi đó ta có: $(*) \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases}$

Cho $x_2 = 1, x_3 = 0$ ta có nghiệm của hệ đã cho là: $(-2, 1, 0, 0)$

Cho $x_2 = 0, x_3 = 1$ ta có nghiệm của hệ đã cho là: $(0, 0, 1, 2)$

Vậy hệ nghiệm cơ bản của hệ đã cho là: $\{(-2, 1, 0, 0)\ ;\ (0, 0, 1, 2)\}$

***. Ví dụ 2:** Với giá trị nào của k thì phương trình sau :

$$\begin{cases} 3x + y + 10z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

a. Chỉ có nghiệm tầm thường.

b. Chỉ có nghiệm không tầm thường.

Giải:

Ta có định thức của hệ là: $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 \\ 2 & k & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 11k + 11$

a. Để hệ chỉ có nghiệm tầm thường thì $D \neq 0 \iff 11k + 11 \neq 0 \Rightarrow k \neq$

-1

b. Khi $D = 0 \Longleftrightarrow 11k + 11 = 0 \Rightarrow k = -1$ thì ta có: $r(A) < 3$

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm nên hệ có nghiệm không tầm thường.

***. Ví dụ 3:** Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & & 0 \\ 3 & 3 & 5 & -1 & 3 & & 0 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 0 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0(1) \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0(2) \\ -2x_4 = 0(3) \end{cases}$

$(3) \Rightarrow x_4 = 0$

$(2) \Rightarrow x_3 = \frac{-3}{2}x_5$

$(1) \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_5 - x_1$

Đặt: $\quad x_1 = s, \;\; x_5 = t \quad ; \quad s, t \in R$

Nghiệm tổng quát của hệ là: $X = (s, \frac{3}{2}t - s, \frac{-3}{2}t, 0, t)$

Ta có: $(r(A) = 3, n = 5 \Rightarrow k = 5 - 3 = 2)$

Chọn $s = 1, t = 0 \Rightarrow x_1 = (1, -1, 0, 0, 0)$

$\qquad s = 0, t = 1 \Rightarrow x_2 = (0, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0, 1)$

Vậy hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình là:

$$\{x_1 = (1, -1, 0, 0, 0) \quad ; \quad x_2 = (0, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, 0, 1)\}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Bài 2: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

1. Tính $2A - B$.
2. Tìm ma trận chuyển vị của A, B.
3. Tìm ma trận X thoả $A + X = B$.

Bài 3: Hãy tìm ma trận f(A) với:

b/ $f(x) = x^3 + x - 1$ và $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a/$f(x) = x^2 - 3x + 3$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Bài 4:

a) Hãy tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận A dưới đây.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Hãy tìm tất cả các ma trận cấp hai có bình phương bằng ma trận đơn vị.

Bài 5: Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; d)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Bài 6: Chứng minh

a) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Bài 7: Biết các số $204, 527, 255$ chia cho 17. Chứng minh:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{chia hết cho 17.}$$

Bài 8: Tìm ma trận X thoả mãn phương trình sau:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bài 9: Tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$;

Bài 10: Dùng phương pháp Gauss - Jordan tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Bài 11: Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông thoả mãn:

$A^2 - 3A + I = 0$ thì $A^{-1} = 3I - A$.

Bài 12: Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

Bài 13: Xác định hạng của ma trận sau theo m

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bài 14: Định m để hạng của ma trận

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ bằng 2.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ m & -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ bằng 4.

Bài 15: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer.

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - y - 2z = 5 \\ 4x + y + 2z = 1 \\ 8x - y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2_1x + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$

Bài 16: Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

Bài 17: Giải và biện luận hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$

Bài 18: Xác định m để hệ

a) $\begin{cases} 3x + y - 2z = m \\ 2x + 4y - z = -2 \\ 4x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ có vô số nghiệm.

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 5x - y + mz = 0 \end{cases}$ có nghiệm không tầm thường.

Bài 19: Chứng tỏ hệ $\begin{cases} 2x - y - z = a \\ -x + 2y - z = b \\ -x - y + 2z = c \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi $a + b + c = 0$.

Xác định tập nghiệm trong trường hợp tương thích.

Bài 20: Tìm hệ nghiệm cơ bản của các hệ phương trình sau.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

Chương II

KHÔNG GIAN VECTƠ - KHÔNG GIAN UECLID

§1. KHÔNG GIAN VECTƠ

1.1. Một số định nghĩa

Cho V là một tập hợp và $\mathbf{K}$ là một trường. Trên V ta xác định hai phép toán như sau:

• **Phép cộng:**

$$\begin{aligned} + \ : \ & V \times V \longrightarrow V \\ & (x, y) \longmapsto x+y \end{aligned}$$

• **Phép nhân ngoài:**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{.} \ : \ & \mathbf{K} \times V \longrightarrow V \\ & (\lambda, y) \longmapsto \lambda.y \end{aligned}$$

Khi ấy V cùng với hai phép toán trên được gọi là một không gian vectơ trên trường $\mathbf{K}$ (hay gọi tắt là không gian vectơ) nếu thoả mãn các tính chất sau đây:

(1). $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V$

(2). $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in V$

(3). Tồn tại 0_V sao cho: $x + 0_V = 0_V + x = x, \quad \forall x \in V$

(4). $\forall x \in V,$ tồn tại phần tử $(-x) \in V$ sao cho: $x + (-x) = 0_V$

(5). $1_K.x = x, \quad \forall x \in V$

(6). $\alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x, \quad \forall x \in V;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$

(7). $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y, \quad \forall x, y \in V;\ \forall \alpha \in \mathbf{K}$

(8). $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x, \quad \forall x \in V;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}$

• Mỗi phần tử của V được gọi là một vectơ.

• Phần tử 0_V được gọi là **phần tử không** của không gian vectơ V.

• Với mỗi $x \in V$, phần tử $(-x) \in V$ được gọi là **phần tử đối** của x.

• Khi $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ thì V được gọi là không gian vectơ thực, và khi $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ thì V được gọi là không gian vectơ phức.

1.2. Một số ví dụ

***. Ví dụ 1:** Tập các số thực **R** với hai phép toán cộng và nhân thông thường giữa các số thực là một không gian vectơ thực.

***. Ví dụ 2:** Xét R^n là tập mà mỗi phần tử là một bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, còn gọi là một vectơ n thành phần. Xét:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ và } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Phép cộng và phép nhân với tích vô hướng được định nghĩa như sau:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), k \in R$$

Ta thấy tập R^n với phép cộng và phép nhân được định nghĩa như trên là một không gian vectơ. Thật vậy:

1. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \ldots, y_n + x_n)$
$= y + x$

2. Với $x, y, z \in R^n, z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ thì ta có:
$(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)$
$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_n + z_n)$
$= x + (y + z)$

3.Với $O = (0, 0, \ldots, 0) \in R^n; \forall x \in R^n$, ta có:
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

4. Tiên đề (4) thoả mãn với phần tử đối của $x \in R^n$ là:

$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

5. Ta có:

$$1.x = 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1.x_1, 1.x_2, \ldots, 1.x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$$

6. Với $\alpha, \beta \in R, \forall x \in R^n$ ta có:

$\alpha.(\beta.x) = \alpha.(\beta.x_1, \beta.x_2, \ldots, \beta.x_n) = \alpha.\beta.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha.\beta.x$

7. Với $k \in R$ ta có:

$$\begin{aligned} k(x+y) &= (k(x_1+y_1), k(x_2+y_2), \ldots, k(x_n+y_n)) \\ &= (kx_1+ky_1, kx_2+ky_2, \ldots, kx_n+ky_n) \\ &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) + (ky_1, ky_2, \ldots, ky_n) \\ &= kx + ky \end{aligned}$$

8. Với $\alpha; \beta \in R, \forall x \in R^n$ ta có:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta).x &= (\alpha+\beta).(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (\alpha.x_1, \alpha.x_2, \ldots, \alpha.x_n) + (\beta.x_1, \beta.x_2, \ldots, \beta.x_n) \\ &= \alpha.(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta.(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= \alpha.x + \beta.x \end{aligned}$$

***. Ví dụ 3:** Tập hợp các ma trận vuông cùng với hai phép toán cộng các ma trận và phép nhân một số thực với ma trận được định nghĩa như sau:

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$ là các ma trận vuông cấp n, $k \in R$ Khi đó:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$$

$$k.A = (k.a_{ij})_{n\times n}$$

là một không gian vectơ thực.

***. Ví dụ 4:** Gọi P^n là tập các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n, (n là số nguyên dương), xác định như sau:

$$P_n = \{p \mid p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n\}$$

Với phép cộng và phép nhân được định nghĩa:

Giả sử $k \in R$ và $p, q \in P_n$, tức là:

$$p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$$

$$q = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n$$

Thì:

$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \cdots + (a_n + b_n)t^n$$

$$kp = ka_0 + (ka_1)t + (ka_2)t^2 + \cdots + (ka_n)t^n$$

Ta dể dàng kiểm tra được tập các đa thức có bậc nhỏ hỏn hoặc bằng n, cùng với phép cộng đa thức và phép nhân đa thức với một số thực được định nghĩa như trên là một không gian vectơ.

1.3. Một số tính chất

Cho V là một không gian vectơ trên trường $\mathbf{K}$. Khi ấy ta có:

(1). Phần tử không là duy nhất.

(2). Với mỗi $x \in V$, phần tử đối của x là duy nhất.

(3). $\forall x \in V$ ta có: $0_K.x = 0_V$.

(4). $\forall \lambda \in \mathbf{K}$ ta có: $\lambda.0_V = 0_V$.

(5). $\forall x \in V$ ta có: $(-x) = (-1).x$

1.4. Không gian vectơ con

• Định nghĩa

Cho V là một không gian vectơ trên trường $\mathbf{K}$, $W \neq \phi$ là một tập hợp con của V. Khi ấy W được gọi là một không gian vectơ con của V nếu thoả mãn hai điều kiện sau đây:

(1). $\forall x, y \in W$ ta có: $x + y \in W$

(2). $\forall x \in W$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$ ta có: $\lambda.x \in W$

***. Ví dụ 1:** Tập $M_{2\times 2}$ các ma trận vuông cấp 2 là một không gian vectơ, bây giờ ta xét W là tập các ma trận cấp 2 có dạng: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in R$. Ta có:

1. $W \neq \phi$ (hiển nhiên).
2. Với $\forall A, B \in W$, tức là : $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$ thì ta có:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+c \\ b+d & 0 \end{pmatrix} \in W$$

3. Với $\forall A \in W$, tức là : $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ và $\lambda \in K$ ta có:

$$\lambda.A = \lambda.\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda.a \\ \lambda.b & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Vậy W là một không gian con của $M_{2\times 2}$

***. Ví dụ 2:** Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m phương trình n ẩn số ở dạng ma trận $Ax = 0$. Gọi W là tập nghiệm của hệ. Mỗi nghiệm là một bộ n số thực: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$. Nên $W \subset R^n$.

1. $W \neq \phi$.
2. Giả sử $x, y \in W$, thì:

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0$$

3. Giả sử $x \in W$, $\lambda \in R$ thi:

$$A(\lambda x) = 0$$

Vậy W đóng kín đối với phép toán cộng và nhân với số thực.

Do đó W là một không gian con của R^n

• **Định lý**

Cho V là một không gian vectơ trên trường **K**, W là một tập hợp con của V. Khi ấy nếu W là một không gian vectơ con của không gian vectơ V thì W cũng là một không gian vectơ trên trường **K**.

§2. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

Trong bài này chúng ta xét V là một không gian vectơ trên trường **K**.

2.1. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Cho $H = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ là hệ (hay còn gọi là: **Tập**) gồm các vectơ của V. Khi ấy ta có các định nghĩa sau:

• **Tổ hợp tuyến tính:**

Vectơ $y \in V$ được biểu diễn dưới dạng:

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.x_k = \alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \ldots + \alpha_n.x_n, \quad \alpha_i \in \mathbf{K} \ (i = \overline{1, \ldots, n})$$

được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x_i \in V$. Hay còn gọi vectơ y được biểu diễn tuyến tính qua hệ H.

***. Ví dụ 1:** Trong không gian vectơ R^3, xét các vectơ:

$e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)$ và $x = (2, 1, 1)$

Ta có: $x = 2(1, 1, 1) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$

$= 2.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$

Do đó x là một tổ hợp tuyến tính của e_1, e_2, e_3

***. Ví dụ 2:** Xác định k sao cho $x = (7, -2, k)$ là tổ hợp tuyến tính của:

$$B = \{u = (2, 3, 5), v = (3, 7, 8), w = (1, -6, 1)\}$$

Ta phải tìm k để cho x có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính:

$$x = au + bv + cw$$

$$(7, -2, k) = a(2, 3, 5) + b(3, 7, 8) + c(1, -6, 1)$$

$$(7, -2, k) = (2a + 3b + c, 3a + 7b - 6c, 5a + 8b + c)$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ 3a + 7b - 6c = -2 \quad (*) \\ 5a + 8b + c = k \end{cases}$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{-25}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & k - \frac{35}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{-25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & k - 15 \end{array}\right)$$

Hệ $(*)$ sẽ tương đương với: $\begin{cases} 2a+3b+c=7 \\ 5b-15c=-25 \\ 0c=k-15 \end{cases}$

+ Nếu $k \neq 15$ thì hệ vô nghiệm.

+ Nếu $k = 15$ thì hệ có vô số nghiệm.

Vậy Với $k = 15$ thì x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w

• **Độc lập tuyến tính:**

Hệ các vectơ $H = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu:

$$\alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \ldots + \alpha_n.x_n = 0 \Longleftrightarrow \alpha_k = 0, \forall k = \overline{1, \ldots, n}$$

***. Ví dụ 1:**

Hệ $(B) = \big\{b_1 = (1,3,4); b_2 = (1,3,3); b_3 = (1,4,3)\big\}$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử ta có: $\alpha_1.b_1 + \alpha_2.b_2 + \alpha_3.b_3 = 0$. Khi ấy:

$$\begin{aligned} &\alpha_1(1,3,4) + \alpha_2(1,3,3) + \alpha_3(1,4,3) = (0,0,0) \\ \Longleftrightarrow &(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 3\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3, 4\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3) = (0,0,0) \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

***. Ví dụ 2:** Trong không gian R^n hệ vectơ $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ với:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\ldots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0,0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

B là độc lập tuyến tính.

Thật vậy:

Xét $\qquad k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = 0$

$\Rightarrow k_1(1,0,0,\ldots,0)+k_2(0,1,0,\ldots,0)+\cdots+k_n(0,0,0,\ldots,0)=(0,0,\ldots,0)$

$\Rightarrow (k_1,k_2,\ldots,k_n)=(0,0\ldots,0)$

$\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

Vậy $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ là độc lập tuyến tính.

• **Phụ thuộc tuyến tính:**

Hệ $H=\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\}$ không độc lập tuyến tính được gọi là phụ thuộc tuyến tính, có nghĩa là tồn tại ít nhất một $\alpha_i\neq 0, i=overline1,n$ sao cho:

$$\alpha_1.x_1+\alpha_2.x_2+\ldots+\alpha_n.x_n=0$$

***. Ví dụ 1:** Trong R^2 hệ vectơ:

$B=\{x_1=(3,-6);x_2=(-2,4)\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy:

$$\begin{aligned}&\alpha_1.x_1+\alpha_2.x_2=0\\ \Longleftrightarrow&\alpha_1(3,-6)+\alpha_2(-2,4)=(0,0)\\ \Longleftrightarrow&(3\alpha_1-2\alpha_2,-6\alpha x_1+4\alpha x_2)=(0,0)\end{aligned}$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}3x_1-2x_2=0\\ -6x_1+4x_2=0\end{cases}\quad(*)$

Có:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=0$$

$(*)$ là hệ phương trình thuần nhất có $\det(A)=0$ nên hệ có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $x_1=2,x_2=3$.

Dó đó B đã cho là phụ thuộc tuyến tính.

***. Ví dụ 2:** Trong P_2 hệ vectơ $B=\{p_1,p_2,p_3\}$ với

$p_1=1+3x+3x^2$ $\qquad p_2=x+4x^2$

$p_3=5+6x+3x^2$ $\qquad p_4=7+2x-x^2$

B là phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy: Xét

$$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3p_3+\lambda_4p_4=0$$

Từ đó ta có hệ sau

$$\begin{cases} \lambda_1 + 5\lambda_3 + 7\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -9 & -19 \\ 0 & 0 & 24 & 55 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A) = r(\overline{A}) = 3 < 4$ (số ẩn)

$\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm, nên B phụ thuọc tuyến tính.

• **Một số nhận xét**

(1). Mọi hệ con của hệ độc lập tuyến tính cũng là hệ độc lập tuyến tính.

(2). Hệ gồm duy nhất một vectơ $M = \{x\}$ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $x = 0$ vì $\alpha x = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0$ hay $x = 0$.

2.2. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

Cho M là một tập hợp gồm các vectơ của V. Khi ấy ta có các định nghĩa sau:

• **Hệ sinh (tập sinh):** Tập M được gọi là **tập sinh** của V (hay tập M sinh ra V) nếu mọi vectơ của V đều được biểu thị tuyến tính qua các vectơ của M, và khi tập M gồm một số hữu hạn các phần tử thì M được gọi là tập sinh hữu hạn.

***. Ví dụ 1:**

Hệ $(B) = \{b_1 = (1,3,4); b_2 = (1,3,3); b_3 = (1,4,3)\}$ là hệ sinh (hữu hạn) của không gian $\mathbf{R^3}$. Thật vậy, với mọi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3}$, ta có:

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$
$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1,3,4) + \lambda_2(1,3,3) + \lambda_3(1,4,3)$$

Khi đó $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = x_2 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_3 + 3\lambda_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x_3 - 3x_1 \\ \lambda_2 = 7x_1 - x_2 - x_3 \\ \lambda_3 = x_2 - 3x_1 \end{cases}$$

Ta có: $x = (x_3 - 3x_1).b_1 + (7x_1 - x_2 - x_3).b_2 + (x_2 - 3x_1).b_3$
Do đó B là hệ sinh của không gian R^3

***. Ví dụ 2:** Trong P^3 xét hệ $\{B = p_1, p_2, p_3, p_4\}$, với:

$p_1 = 1 + 2x - x^2$; $\quad p_2 = 3 + x^2$

$p_3 = 5 + 4x - x^2$; $\quad p_4 = -2 + 2x - 2x^2$

Ta có: $\forall p \in P_3$; $\quad p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, xét:

$$p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \lambda_4 p_4$$

Tứ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 - 2\lambda_4 = a_0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = a_1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 = a_2 \end{cases}$$

Hệ này có ma trận hệ số là

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

và ma trận bổ sung là

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & a_0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & a_1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & a_2 \end{array}\right)$$

Ta có:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & a_0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & a_1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & a_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & a_0 \\ 0 & -6 & -6 & 6 & a_1 - 2a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 + \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 \end{array}\right)$$

Ta suy ra $r(A) = 2$

$r(\overline{A} = 3)$ nếu $a_2 + \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 \neq 0$

$r(\overline{A} = 2)$ nếu $a_2 + \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 = 0$

Vậy hệ B đã cho không sinh ra P_3

• **Cơ sở:** Tập M gồm hữu hạn các phần tử được gọi là **cơ sở** của V nếu M vừa độc lập tuyến tính vừa là tập sinh của V.

***. Ví dụ:** Trong kgông gian vectơ R^3 trên trường số R hệ:

$(B) = \{b_1 = (1,3,4); b_2 = (1,3,3); b_3 = (1,4,3)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{R^3}$.

Ta đã biết nó là một hệ sinh theo ví dụ trên. Bây giờ ta cần chứng minh nó là một hệ độc lập tuyến tính.

Xét: $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,3,4) + \alpha_2(1,3,3) + \alpha_3(1,4,3) = (0,0,0)$

Khi đó $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Nên B là độc lập tuyến tính.

Vậy B là một cơ sở của không gian vectơ R^3

Nhận xét: Một không gian vectơ có thể có nhiều cơ sở, tuy nhiên số các vectơ trong các cơ sở là bằng nhau.

• Số các vectơ trong một cơ sở nào đó của V được gọi là **số chiều** của V. Ký hiệu là: $\dim(V)$. Lúc này ta nói: V là một KGVT có số chiều hữu hạn.

***. Ví dụ 1:** Trong R^n xét họ vectơ $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ trong đó:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

Họ B sinh ra R^n vì mọi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ ta có thể viết:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

Họ B là độc lập tuyến tính, vì ta có:

$$\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \cdots + \alpha_ne_n = (0, 0 \ldots, 0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Vậy $\dim R^n = n$ và B là một cơ sở.
B được gọi là **cơ sở chính tắc** của không gian vectơ $\mathbf{R^n}$
***. Ví dụ 2:**
Trong không gian P_n các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng n, xét họ:

$$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

Họ S sinh ra P_n vì mọi đa thức p có bậc không lớn hơn n đều được viết dưới dạng:

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n; a_i \in R$$

Họ S là độc lập tuyến tính vì:

$$\alpha_1.1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \cdots + \alpha_nx^n = 0; \forall x$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Vậy $\dim(P_n) = n + 1$ và S là một cơ sở của P_n.

Cơ sở S này được gọi là **cơ sở chính tắc** của $\mathbf{P_n}$.

2.3. Toạ độ của một vectơ

• Giả sử $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V và $x \in V$. Khi ấy vì B là cơ sở của V nên B là một hệ sinh của V, do đó mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính qua B. Ta giả sử rằng:

$$x = x_1.e_1 + x_2.e_2 + \ldots + x_n.e_n, \text{ với } x_i \in \mathbf{K} \ (i = \overline{1, \ldots, n})$$

Khi ấy bộ $n-$số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là toạ độ của vectơ x đối với cơ sở B, ký hiệu là: $(x)_B$ hay x_B. Ta ký hiệu: $[x]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ và gọi là toạ độ cột của vectơ x đối với cơ sở B.

***. Ví dụ:**

Trong không gian vectơ $\mathbf{R^3}$, cho vectơ $x = (1, 3, 7)$ và một cơ sở của $\mathbf{R^3}$ là

$$(B) = \big\{b_1 = (1, 3, 4); b_2 = (1, 3, 3); b_3 = (1, 4, 3)\big\}.$$

Ta có biểu diễn của vectơ x qua cơ sở B là:

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$

$$\leftrightarrow (1, 3, 7) = \lambda_1(1, 3, 4) + \lambda_2(1, 3, 3) + \lambda_3(1, 4, 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy tọa độ của x đối với cơ sở (B) là: $(x)_B = (4, -3, 0)$.

2.3. Hạng của một hệ vectơ

• **Định nghĩa**

Cho $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ là một hệ vectơ trong không gian vectơ V. Khi ấy ta nói H có hạng là k, ký hệu là: $rank(H)$, nếu như trong H tồn tại k vectơ độc lập tuyến tính và mọi $(k+1)$ vectơ nào của H cũng đều phụ thuộc tuyến tính.

• **Nhận xét**

(1). $Rank(H) = k$ khi và chỉ khi tồn tại k vectơ của H độc lập tuyến tính và mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính qua các vectơ đó.

(2). Hạng của H đúng bằng hạng của ma trận với các hàng của ma trận này chính là các vectơ của H. Do vậy ta có thể dùng phương pháp biến đổi sơ cấp theo hàng (cột) của ma trận để tìm hạng của một hệ vectơ.

***. Ví dụ:**

Trong không gian $\mathbf{R^4}$ cho hệ vectơ

$$(H) = \left\{ h_1 = (1,0,1,-2); h_2 = (1,1,3,-2); h_3 = (2,1,5,-1); h_4 = (1,-1,1,4) \right\}$$

Khi ấy ta có ma trận lập từ các vectơ của (H) như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dùng phép biến đổi sơ cấp theo hàng của ma trận ta có:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có: $rank(H) = 3$.

§3. CHUYỂN CƠ SỞ - MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

Một vấn đề được đặt ra là với hai cơ sở cho trước của một không gian vectơ thì mối liên hệ giữa chúng như thế nào?. Từ cơ sở này ta có thể tìm

được cơ sở kia thông qua một mối quan hệ nào đó hay không?

Giả sử trong không gian vectơ n chiều V chúng ta có hai cơ sở (B) và (C) như sau:

$$(B) = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$$
$$(C) = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n\}$$

Vì (B) là một cơ sở của V nên mọi vectơ của V sẽ được biểu thị tuyến tính qua các vectơ của (B), mà $(C) \subset V$ nên mọi vectơ của (C) cũng sẽ được biểu thị tuyến tính qua (B). Chúng ta giả sử rằng:

$$\begin{aligned}
c_1 &= p_{11}.b_1 + p_{21}.b_2 + p_{31}.b_3 + \ldots + p_{n1}.b_n \\
c_2 &= p_{12}.b_1 + p_{22}.b_2 + p_{32}.b_3 + \ldots + p_{n2}.b_n \\
c_3 &= p_{13}.b_1 + p_{23}.b_2 + p_{33}.b_3 + \ldots + p_{n3}.b_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_n &= p_{1n}.b_1 + p_{2n}.b_2 + p_{3n}.b_3 + \ldots + p_{nn}.b_n
\end{aligned}$$

Một cách tổng quát ta có:

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} P_{kj} b_k \quad ; \forall j = \overline{1, n}$$

• Phép biến đổi thể hiện ở trên gọi là phép biến đổi cơ sở từ cơ sở (B) sang cơ sở (C) của không gian vectơ V

Khi đó ta đặt ma trận hệ số:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

• **Định nghĩa**

Ma trận P được xác định ở trên gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ cơ sở (B) sang cơ sở (C).

***. Ví dụ:**

Trong $\mathbf{R^3}$ cho các cơ sở sau đây:

$$(B) = \{b_1 = (1,3,4) \quad ; \quad b_2 = (1,3,3) \quad ; \quad b_3 = (1,4,3)\}$$
$$(C) = \{c_1 = (1,1,1) \quad ; \quad c_2 = (2,2,0) \quad ; \quad c_3 = (3,0,0)\}$$

Ta biểu diễn các vectơ trong cơ sở C qua cở sở B:

$+ \qquad c_1 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$

$(1,1,1) = \lambda_1(1,3,4) + \lambda_2(1,3,3) + \lambda_3(1,4,3)$

Khi đó $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 1 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow [c_1]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$+ \qquad c_2 = \lambda_1 b'_1 + \lambda'_2 b_2 + \lambda'_3 b_3$

$(2,2,0) = \lambda'_1(1,3,4) + \lambda'_2(1,3,3) + \lambda'_3(1,4,3)$

Khi đó $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3 = 2 \\ 3\lambda'_1 + 3\lambda'_2 + 4\lambda'_3 = 2 \\ 4\lambda'_1 + 3\lambda'_2 + 3\lambda'_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda'_1 = -2 \\ \lambda'_2 = 5 \\ \lambda'_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow [c_2]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$+ \qquad c_3 = \lambda''_1 b_1 + \lambda''_2 b_2 + \lambda''_3 b_3$

$(3,0,0) = \lambda''_1(1,3,4) + \lambda''_2(1,3,3) + \lambda''_3(1,4,3)$

Khi đó $\lambda''_1, \lambda''_2, \lambda''_3$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda''_1 + \lambda''_2 + \lambda''_3 = 1 \\ 3\lambda''_1 + 3\lambda''_2 + 4\lambda''_3 = 1 \\ 4\lambda''_1 + 3\lambda''_2 + 3\lambda''_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda''_1 = -2 \\ \lambda''_2 = 5 \\ \lambda''_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow [c_3]_B = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Khi ấy ta có ma trận chuyển cơ sở từ (B) sang (C) như sau:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 \\ 5 & 12 & 21 \\ -2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

và ma trận chuyển cơ sở từ (C) sang (B) là:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

• **Nhận xét**

(1). Nếu $x \in V$ thì chúng ta có: $[x]_B = P.[x]_C$

(2). Ma trận P khả nghịch, nghĩa là tồn tại ma trận P^{-1}.

(3). Từ (1) và (2) ta có: $[x]_C = P^{-1}.[x]_B$, với P^{-1} chính là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (C) sang cơ sở (B).

***. Ví dụ:** Trong R^2 xét hai cơ cở $B = \{u_1, u_2\}$ và $B' = \{v_1, v_2\}$ với:

$$u_1 = (2,2) \quad ; \quad u_2 = (4,-1)$$
$$v_1 = (1,3) \quad ; \quad v_2 = (-1,-1)$$

a) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B'

b) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B

c) Cho $w = (3,-5)$, hãy tính ma trận toạ độ $[w]_B$ và tính $[w]_{B'}$

d) Tính $[w]_{B'}$ trực tiếp và kiểm tra lai kết quả trên.

Giải:

a) Ta có biểu diễn của B' qua cơ sở B là

$+ \qquad v_1 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

$\leftrightarrow (1,3) = \alpha_1(2,2) + \alpha_2(4,-1)$

Do đó: $\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{13}{10} \\ \alpha_2 = \frac{-2}{5} \end{cases} \longrightarrow [v_1]_B = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$

$+ \qquad v_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$

$\leftrightarrow (-1,-1) = \beta_1(2,2) + \beta_2(4,-1)$

Do đó: $\begin{cases} 2\beta_1 + 4\beta_2 = -1 \\ 2\beta_1 - \beta_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \frac{-1}{2} \\ \beta_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow [v_2]_B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Vậy ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B' là

$$P = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

b) Ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B là

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{2} \\ \frac{-10}{5} & \frac{-65}{10} \end{pmatrix}$$

c) Bây giờ ta tính $[w]_B$ và $[w]_{B'}$, ta có

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

$$\rightarrow (3, -5) = \lambda_1(2, 2) + \lambda_2(4, -1)$$

Do đó: $\begin{cases} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-17}{10} \\ \lambda_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \longrightarrow [w]_B = \begin{pmatrix} \frac{-17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$

Mặt khác ta có:

$$[w]_{B'} = P^{-1}.[w]_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-5}{2} \\ \frac{-10}{5} & \frac{-65}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

d) Tính $[w]_{B'}$ trực tiếp

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ta suy ra:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 3 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -7 \end{cases}$$

Vậy

$$[w]_{B'} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

§4. KHÔNG GIAN EUCLID

4.1. Định nghĩa

• Cho V là một không gian vectơ, u và v là hai vectơ của V. Tích vô hướng của u, v là một số thực, kí hiệu là $< u, v >$, thoả mãn các tiên đề sau:

(1). $< u, u > \geq 0$ và $< u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0$

(2). $< u, v > = < v, u >$

(3). $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$

(4). $< ku, v > = k < u, v >$

• Khi đó không gian vectơ V cùng với tích vô hướng gọi là không gian có tích vô hướng. Nếu V hữu hạn chiều thì V được gọi là không gian Euclid.

***. Ví du 1:** Trong không gian R^n, xét hai vectơ

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Ta định nghĩa tích vô hướng như sau:

$$< u, v > = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \qquad (*)$$

Khi đó không gian R^n cùng với tích vô hướng được định nghĩa như trên là một không gian Euclid

• Tích vô hướng $(*)$ gọi là tích vô hướng Euclid của R^n.

***. Ví dụ 2:** Trong không gian vectơ các hàm số liên tục trên $[a, b]$, thì tích vô hướng của hai hàm f và g có thể định nghĩa bởi:

$$< f, g > = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

• V là một không gian có tích vô hướng và $u \in V$ thì số $||u||$ được xác định bởi :

$$||u|| = \sqrt{< u, u >}$$

gọi là **độ dài của vectơ** u (hay chuẩn của u)

***. Ví dụ:** Trong R^n, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ta có

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots u_n^2}$$

gọi là độ dài Euclid của $u \in R^n$

• **Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz (C - S):**

Nếu u và v là hai vectơ trong một không gian có tích vô hướng thì ta có bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$< u, v > \leq \ ||u||.||v||$$

• Đại lượng $||u - v||$ được gọi là khoảng cách giữa hai vectơ u , v. Kí hiệu là

$$d(u, v) = ||u - v||$$

4.2. Tính trực giao - Quá trình trực giao hoá Gram-Smidt

4.2.1. Định nghĩa

• Trong một không gian có tích vô hướng, hai vectơ u và v gọi là trực giao nếu: $< u, v > = 0$

***. Ví dụ:** Trong P_2 xét tích vô hướng

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Với: $p = x$, $q = x^2$

Ta có:

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} x.x^2dx = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$$

Vậy hai vectơ p, q trong P_2 là hai vectơ trực giao.

• Một họ vectơ trong không gian có tích vô hướng gọi là một họ trực giao nếu bất kỳ hai vectơ khác nhau nào của họ cũng trực giao.

• Một họ vectơ trực giao trong đó mọi vectơ đều có chuẩn là 1 gọi là một họ trực chuẩn.

4.2.2. Quá trình trực giao hoá Gram - Smidt

• Cho $u_1, u_2, \ldots, u_n$ các vectơ độc lập tuyến tính của không gian có tích vô hướng V. Khi đó ta có thể xây dựng một hệ các vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ trực giao theo công thức sau đây:

Bước 1: Đặt

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$$

Bước 2: Tìm v_2 sao cho họ $\{v_1, v_2\}$ trực chuẩn. Ta đặt

$$v_2 = u_2 + \alpha v_1$$

và tìm α sao cho

$$< v_2, v_1 >= 0, \quad \text{tức là } < u_2 + \alpha v_1, v_1 >= 0$$

$$\Rightarrow \ < u_2, v_1 > + \alpha < v_1, v_1 >= 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{< u_2, v_1 >}{< v_1, v_1 >} = - < u_2, v_1 >$$

Do đó:

$$v_2 = u_2 - < u_2, v_1 > v_1$$

Đặt:

$$v_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{u_2 - < u_2, v_1 > v_1}{||u_2 - < u_2, v_1 > v_1||}$$

Bước 3: Giả sử đã xây dựng được họ trực chuẩn

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$$

Ta xây dựng tiếp v_k để cho họ

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

là họ trực chuẩn

Ta đặt:

$$v_k = u_k + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1}$$

và tìm các β_j, $j = 1, \ldots, k-1$, sao cho

$$< v_k, v_j >= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1$$
$$\Rightarrow < u_k, v_j > + \beta_j < v_j, v_j > = 0$$
$$\Rightarrow \beta_j = -\frac{< u_k, v_j >}{< v_j, v_j >} = - < u_k, v_j >, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1$$

Do đó v_k được xác định:

$$v_k = u_k - < u_k, v_1 > v_1 - < u_k, v_2 > v_2 - \cdots - < u_k, v_{k-1} > v_{k-1}$$

Sau đó ta đặt:

$$v_k = \frac{v_k}{||v_k||} = \frac{u_k - < u_k, v_1 > v_1 - < u_k, v_2 > v_2 - \cdots - < u_k, v_{k-1} > v_{k-1}}{||u_k - < u_k, v_1 > v_1 - < u_k, v_2 > v_2 - \cdots - < u_k, v_{k-1} > v_{k-1}||}$$

Tiếp tục quá trình đó cho tới khi $k = n$ ta được họ trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

***. Ví dụ:** Cho trong không gian Euclid R^3 họ vectơ $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, với

$$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1)$$

Hãy trực chuẩn hoá Gram - Smidt họ vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$

Bước 1: Đặt

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Bước 2:

$$v_2 = \frac{u_2 - < u_2, v_1 > .v_1}{||u_2 - < u_2, v_1 > .v_1||}$$

$$u_2 - < u_2, v_1 > .v_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Vậy:

$$v_2 = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Bước 3:

$$v_3 = \frac{u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2}{||u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2||}$$

$$
\begin{aligned}
& u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2 \\
&= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) - \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) \\
&= \Big(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

Vậy:

$$v_3 = \sqrt{2}\Big(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \Big(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

Vậy ta được họ vectơ trực chuẩn là $\{v_1, v_2, v_3\}$ với:

$$v_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

$$v_2 = \Big(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)$$

$$v_3 = \Big(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

Bài 1: Không gian vectơ

a) Đặt $C_R[a,b]$ là tập hợp các hàm số liên tục từ $[a,b] \to R$

Ta định nghĩa : $\forall f, g \in C_R[a,b], \forall \alpha \in R$

$\bullet (f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [a,b]$

$\bullet (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in [a,b]$

Chứng minh $C_R[a,b]$ là không gian vectơ.

b) Tập tất cả các bộ ba số thực (x,y,z) với các phép tính

$(x,y,z) + (x',y',z') := (x+x', y+y', z+z')$

$k(x,y,z) := (kx, y, z)$

hỏi tập cho trên có là không gian vectơ của R^3 không ?

Bài 2: Các tập dưới đây có phải là không gian con của P_3 không:

a) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó $a_0 = 0$?

b) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$?

Bài 3:

1. Hãy biểu diễn vectơ x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w

a) $x = (7,-2,15); u = (2,3,5); v = (3,7,8); w = (1,-6,1)$

b) $x = (0,0,0,0); u = (4,1,3,-2); v = (1,2,-3,2); w = (16,9,1,-3)$

2. Hãy biểu diễn các đa thức sau thành tổ hợp tuyến tính của

$p_1 = 2 + x + 4x^2; p_2 = 1 - x - 3x^2; p_3 = 3 + 2x + 5x^2$

a) $5 + 9x + 5x^2$

b) $2 + 6x^2$

Bài 4: Xác định m sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w:

a) $u = (2,3,5); v = (3,7,8); w = (1,-6,1); x = (7,-2,m)$

b) $u = (3,2,5); v = (2,4,7); w = (5,6,m); x = (1,3,5)$

c) $u = (3,4,2); v = (6,8,7); w = (4,1,m); x = (9,12,1)$

Bài 5: 1. Mỗi họ vectơ dưới đây có sinh ra R^3 không

a) $v_1 = (1,1,1)$; $v_2 = (2,2,0)$; $v_3 = (3,0,0)$

b) $v_1 = (1,3,3)$; $v_2 = (1,3,4)$; $v_3 = (1,4,3)$; $v_4 = (6,2,1)$

2. Hỏi các đa thức sau có sinh ra P_3 không

$$p_1 = 1 + 2x - x^2 \quad ; \quad p_2 = 3 + x^2$$
$$p_3 = 5 + 4x - x^2 \quad ; \quad p_4 = -2 + +2x - 2x^2$$

Bài 6: Những hệ vectơ sau, hệ nào độc lập tuyến tính, hệ nào phụ thuộc tuyến tính

a) $\{u_1 = (1, 0, 0, 2); \quad u_2 = (-1, 0, 2, 1); \quad u_3 = (0, 0, 2, 3)\}$

b) $\{v_1 = (2, 1, 0, 1); \quad v_2 = (4, 2, 0, 2); \quad v_3 = (1, 2, 5, 0)\}$

c) $\{w_1 = (1, 2, -1); \quad w_2 = (1, 0, -1); \quad v_3 = (-1, -2, 2)\}$

Bài 7: Tập nào trong P_2 dưới đây là phụ thuộc tuyến tính

a) $2 - x + 4x^2; \quad 3 + 6x + 2x^2; \quad 1 + 10x - 4x^2$

b) $3 + x + x^2; \quad 2 - x + 5x^2; \quad 4 - 3x^2$

c) $1 + 3x + 3x^2; \quad x + 4x^2; \quad 5 + 6x + 3x^2; \quad 7 + 2x - x^2$

Bài 8: Cho $X, Y, Z \in R^n$

Đặt $A = X + Y, B = Y + Z, C = Z + X$

Nếu X, Y, Z độc lập tuyến tính

Chứng minh A, B, C cũng độc lập tuyến tính.

Bài 9: Cho $A_1, A_2, A - 3$ độc lập tuyến tính trong R^n. Chứng minh hệ $\{A_1 + A_2, A_1 - A_2, A_1 + 2A_3\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 10: Cho hệ $\{u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (0, 1, 1)\}$ trong R^3

a) Chứng minh hệ $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính

b) Tìm vectơ u_3 để $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính

Bài 11: Tìm m để các vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính trong R^3

$$v_1 = (m, \tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}), v_2 = (\tfrac{-1}{2}, m, \tfrac{-1}{2}), v_3 = (\tfrac{-1}{2}, \tfrac{-1}{2}, m)$$

Bài 12: Họ nào dưới đây là cơ sở của R^3:

a) $(1, 0, 0) \quad ; \quad (2, 2, 0) \quad ; \quad (3, 3, 3)$

b) $(1, 6, 4) \quad ; \quad (2, 4, -1) \quad ; \quad (-1, 2, 5)$

c) $(1, 0, 2) \quad ; \quad (2, 1, 0)$

Bài 13: Họ nào dưới đây là cơ sở trong P_2

a) $1-3x+2x^2$; $1+x+4x^2$; $1-7x$

b) $1+x+x^2$; $x+x^2$; x^2

c) $-4+x+3x^2$; $6+5x+2x^2$; $8+4x+x^2$

Bài 14: Chứng minh hệ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với:

$u_1 = (1,1,0,1); u_2 = (2,1,3,1); u_3 = (1,1,0,0); u_4 = (0,1,-1,-1)$

Là cơ sở của R^4

Tìm toạ độ của vectơ $X = (0,0,0,1)$ trong cơ sở đó

Bài 15: Cho $\{u_1 = (1,1,0); u_2 = (0,1,3)\}$ trong R^3 . Hệ $\{u_1, u_2\}$ có phải là cơ sở của R^3 ? Tìm vectơ $u_3 \in R^3$ để $\{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở của R^3

Bài 16: Tìm hạng của hệ vectơ

a) $\{u_1 = (1,2,-1,0,0); u_2 = (0,2,3,3,2); u_3 = (1,2,-1,0,5); u_4 = (2,6,1,3,7)\}$

b) $\{u_1 = (4,2,0,2); u_2 = (2,-1,-4,7); u_3 = (1,-2,-5,8); u_4 = (-1,3,7,-11)\}$

c) $\{u_1 = (1,2,0); u_2 = (0,1,0); u_3 = (-1,-1,0)\}$

Bài 17: Xác định số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của các hệ sau:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Bài 18: Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của R^3 sinh bởi các vectơ sau:

a) $(1,-1,2); (2,1,3); (-1,5,0)$

b) $(2,4,1); (3,6,-2); (-1,2,\frac{-1}{2})$

Bài 19: Cho $W = \{X = (\alpha, \alpha - 2\beta, \alpha, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in R\}$

1. Chứng minh W là không gian vectơ con của R^4
2. Tìm một cơ sở và số chiều của W

Bài 20: Xét trong R^3 hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó

$$u_1 = (-3, 0, -3), u_2 = (-3, 2, 1), u_3 = (1, 6, -1)$$
$$v_1 = (-6, -6, 0), v_2 = (-2, -6, 4), v_3 = (-2, -3, 7)$$

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B sang B'

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở B' sang cơ sở B

c) Cho $w = (-5, 8, -5)$, tính ma trận toạ độ $[w]_B$ và tính $[w]_{B'}$

d) Tính trực tiếp $[w]_{B'}$, và kiểm tra lại kết quả trên.

Bài 21: Làm lại bài 20 với

$$u_1 = (2, 1, 1) \quad ; \quad u_2 = (2, -1, 1) \quad ; \quad u_3 = (1, 2, 1)$$
$$v_1 = (3, 1, -5) \quad ; \quad u_2 = (1, 1, -3) \quad ; \quad v_3 = (-1, 0, 2)$$

Bài 22: Trong P_1 xét các cơ sở $B = \{p_1, p_2\}$, $B' = \{q_1, q_2\}$ với

$$p_1 = 6 + 3x \quad , \quad p_2 = 10 + 2x$$
$$q_1 = 2 \quad , \quad q_2 = 3 + 2x$$

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B

b) Tính ma trận toạ độ $[p]_B$ với $p = -4 + x$ rồi suy ra $[p]_{B'}$

c) Tính trực tiếp $[p]_{B'}$ và kiểm tra lại kết quả trên

d) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'

Bài 23:

1. Với hai ma trận trong M_2

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

Hãy chứng minh rằng biểu thức

$$< u, v >= u_1.v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

là một tích vô hướng.

2. Áp dụng để tính tích vô hướng của

$$u = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài 24: Trong P_2 xét tích vô hướng

$$< p, q >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

Chứng minh rằng $p = 1 - x + 2x^2$ và $q = 2x + x^2$ trực giao

Bài 25: Chứng minh rằng

$$u_1 = (1, 0, 0, 1), \qquad u_2 = (-1, 0, 2, 1)$$

$$u_3 = (2, 3, 2, -2), \qquad u_4 = (-1, 2, -1, 1)$$

là một họ trực giao trong R^4 đối với tích vô hướng Euclid

Bài 26: Trong R^3 xét tích vô hướng Euclid. Hãy trực chuẩn hoá Gram - smidt các vectơ sau

a) $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (1, 2, 1)$

b) $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (3, 7, -2), u_3 = (0, 4, 1)$

Bài 27: Trong P_2 xét tích vô hướng

$$< p, q > = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Hãy trực chuẩn hóa Gram - smidt họ vectơ $\{1, x, x^2\}$

Bài 28: Trong R^3 xét tích vô hướng $< u, v >= u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$
Hãy trực chuẩn hoá Gram - Smidt họ vectơ sau

$$\{u_1 = (1, 1, 1,), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$$

Chương III

LÝ THUYẾT CHUỖI

§1. CHUỖI SỐ

1.1. Các định nghĩa

• Cho một dãy vô hạn các số $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ Khi ấy biểu thức (tổng vô hạn):

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

được gọi là một chuỗi số. Ký hiệu là: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.1)$

• u_n được gọi là số hạng thứ n (đôi khi ta gọi là **số hạng tổng quát**) của chuỗi (1.1)

• Ta đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ và được gọi là **tổng riêng thứ** n của chuỗi (1.1)

• Nếu dãy tổng riêng $\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$, có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì ta nói rằng chuỗi (1.1) là **hội tụ**, S được gọi là tổng của chuỗi và viết $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

• Một chuỗi không hội tụ được gọi là **chuỗi phân kỳ**.

***. Ví dụ:**

Xét chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ ta có:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Vậy chuỗi đã cho là hội tụ và ta có: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

***. Ví dụ:**

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} n$ ta có:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = +\infty$$

Vậy chuỗi đã cho là phân kỳ.

1.2. Điều kiện cần để chuỗi số hội tụ

• Định lý

Nếu chuỗi (1.1) hội tụ thì số hạng tổng quát u_n phải dần về 0 khi $n \to \infty$, có nghĩa là: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

• Nhận xét

(1). Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi (1.1) phân kỳ.

(2). Điều kiện được nêu trong định lý chỉ là điều kiện cần mà không phải là điều kiện đủ có nghĩa là nếu $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ thì chuỗi (1.1) chưa chắc đã hội tụ.

***. Ví dụ 1:**

Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2}$ ta có:

$$u_n = \frac{n-1}{3n+2}$$

Do đó:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n+2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Theo điều kiện cần của chuỗi hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2}$ phân kỳ.

***. Ví dụ 2:** Xét chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ta có:

$$u_n = \frac{1}{n}$$

Do đó:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Nhưng $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ. Thật vậy

Ta có:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Nếu chuỗi số hội tụ thì S_n, S_{2n} cùng dần tới một giới hạn khi $n \to \infty$, tức là $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$, điều này mâu thuẫn với $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$

1.3. Một số tính chất của chuỗi hội tụ

• Tính chất 1

Nếu chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và λ là một hằng số thì chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ cũng hội tụ, ngoài ra ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda.\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)$$

***. Ví dụ:** Tìm tổng của chuỗi số sau $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

Ta có : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ và có tổng $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (Cấp số nhân lùi vô hạn)

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3.2 = 6$$

• **Tính chất 2**

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ cũng hội tụ, ngoài ra ta có:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

***. Ví dụ:** Tìm tổng của chuỗi số sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right)$$

Ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \text{hội tụ và có } S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \quad \text{hội tụ và có } S = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

• **Tính chất 3**

Tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi không thay đổi nếu như ta bớt đi một số hữu hạn các hạng tử đầu tiên của chuỗi.

§2. CHUỖI SỐ DƯƠNG

2.1. Định nghĩa

• Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi dương nếu như: $u_n > 0,\ \forall n$.

• **Nhận xét**

Tương tự như chuỗi số dương chúng ta cũng có định nghĩa chuỗi số âm $(u_n < 0, \forall n)$. Tuy nhiên, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một chuỗi âm thì bằng cách

xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ ta sẽ có được một chuỗi số dương. Do vậy, không mất tính tổng quát chúng ta chỉ cần xét đến chuỗi số dương.

2.2. Hai định lý so sánh của chuỗi số dương

• Định lý 1:

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Giả sử ta có $u_n \leq v_n$, $\forall n \geq N_0 (N_0 \in \mathbf{N})$. Khi ấy:

(1). Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

(2). Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng phân kỳ.

***. Ví dụ:** Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$$

Ta có:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n} \leq \frac{1}{3^n} = v_n; \forall n \geq 1$$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ hội tụ

Theo tiêu chuẩn so sánh $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}.3^n}$ hội tụ.

• Định lý 2:

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$ Khi ấy:

(1). Nếu $K = 0$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

(2). Nếu $0 < K < +\infty$ thì hai chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

(3). Nếu $K = +\infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

***. Ví dụ:** Xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ta có:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{khi } n \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Mà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{phân kỳ } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{phân kỳ}$$

2.3. Các tiêu chuẩn để xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số dương

Giả sử ta cần xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

• Tiêu chuẩn D'Alembert

Giả sử rằng $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$. Khi ấy ta có:

(1). Nếu $D > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

(2). Nếu $D < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

***. Ví dụ:**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Dùng tiêu chuẩn D'Alembert ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}.n!}{n^n.(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e > 1$$

Vậy chuỗi đã cho là phân kỳ.

***. Ví dụ 2:**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Dùng tiêu chuẩn D'Alembert ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}.\frac{e}{e} = \frac{1}{3} < 1$$

Vậy chuỗi đã cho là hội tụ.

Nhận xét: Trong trường hợp $D = 1$ thì chúng ta chưa thể khẳng định chuỗi đã cho là hội tụ hay phân kỳ.

• Tiêu chuẩn Cauchy

Giả sử rằng $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$. Khi ấy ta có:

(1). Nếu $C > 1$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

(2). Nếu $C < 1$ thì chuỗi đã cho hội tụ.

***. Ví dụ 1:**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$. Dùng tiêu chuẩn Cauchy ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Vậy chuỗi đã cho là hội tụ.

***. Ví dụ 2:**

Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}$ Dùng tiêu chuẩn Cauchy ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\frac{1}{2} = \frac{e}{2} > 1$$

Vậy chuỗi đã cho là phân kỳ.

Nhận xét: Trong trường hợp $C = 1$ thì chúng ta chưa thể khẳng định chuỗi đã cho là hội tụ hay phân kỳ.

• Tiêu chuẩn Tích phân

Giả sử $f(x)$ là một hàm số không âm, không tăng trên khoảng $[1, +\infty)$ và $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[1, A]$, $(A > 1)$. Khi đó:

(1). Nếu tích phân $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ.

(2). Nếu tích phân $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ.

***. Ví dụ:**

Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ta xét hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Hàm số này thoả mãn các giả thiết của tiêu chuẩn tích phân. Ngoài ra ta có:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty$$

Như vậy tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ phân kỳ. Do đó chuỗi số đã cho cũng phân kỳ.

Nhận xét: Trong thực hành chúng ta thường đặt $f(x) = u_x$, có nghĩa là chúng ta thay biến n trong số hạng tổng quát của chuỗi bằng biến x ta sẽ có được hàm $f(x)$.

§3. CHUỖI CÓ DẤU BẤT KÌ

3.1. Chuỗi đan dấu

• Định nghĩa

Chuỗi đan dấu là chuỗi số có một trong hai dạng sau:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots \quad (3.1)$$

hay

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots + (-1)^{n}u_n + \ldots \quad (3.2)$$

trong đó $u_k > 0,\ \forall k$.

• Nhận xét

Từ chuỗi (3.2) chúng ta có thể chuyển về chuỗi (3.1) và ngược lại. Do vậy ta chỉ cần xét đến chuỗi (3.1)

• Định lý Leibnitz

Cho chuỗi đan dấu (3.1) và giả sử rằng hai điều kiện sau đây thoả mãn:

(1). $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Khi ấy chuỗi đã cho (3.1) là hội tụ và tổng của nó không vượt quá số hạng đầu tiên u_1.

***. Ví dụ:**

Cho chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Chuỗi này thoả mãn các điều kiện của định lý Leibnitz nên nó hội tụ.

• Định nghĩa

Một chuỗi đan dấu dạng (3.1) thoả mãn định lý Leibnitz được gọi là chuỗi Leibnitz.

3.2. Chuỗi có dấu bất kỳ - Hội tụ tuyệt đối

• Định lý

Nếu chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

• **Nhận xét**

(1). Định lý trên chỉ là điều kiện đủ mà không phải là điều kiện cần, có nghĩa là chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ không nhất thiết phải cần điều kiện chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ.

(2). Nếu dùng tiêu chuẩn D'Alembert hay tiêu chuẩn Cauchy mà ta biết được chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì ta cũng có chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

***. Ví dụ:** Xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$

Dùng tiêu chuẩn Cauchy xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$$

Suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ là hội tụ.

Vậy chuỗi đã cho là hội tụ

• **Định nghĩa**

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là **hội tụ tuyệt đối** nếu chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ mà chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là **bán hội tụ**.

§4. CHUỖI HÀM

4.1. Các định nghĩa

• Cho một dãy vô hạn các hàm số $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ Khi ấy biểu thức:

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

được gọi là một chuỗi hàm. Ký hiệu là: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (4.1)

• $u_n(x)$ được gọi là số hạng thứ n (đôi khi ta gọi là **số hạng tổng quát**) của chuỗi (4.1)

• Ta đặt $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ và được gọi là **tổng riêng thứ** n của chuỗi (4.1)

• Khi $x = x_0 \in \mathbf{R}$ thì chuỗi hàm (4.1) sẽ trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, nếu chuỗi số này hội tụ thì x_0 được gọi là **điểm hội tụ** của chuỗi hàm (4.1).

• Tập hợp tất cả các điểm hội tụ của chuỗi hàm (4.1) được gọi là **miền hội tụ** của chuỗi hàm (4.1).

• Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ thì $S(x)$ được gọi là tổng của chuỗi (4.1).

***. Ví du:** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$$

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right| = \frac{1}{|x|}$$

+ Nếu $|x| < 1$, ta có $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 1 \neq 0$

Theo điều kiện cần để chuỗi hội tụ, suy ra chuỗi đã cho là phân kỳ.

+ Nếu $|x| > 1$, ta có $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{1}{|x|} < 1$

Nên chuỗi đã cho là hội tụ

+ Nếu $x = 1$, ta có $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \frac{1}{2} \neq 0$

Nên chuỗi đã cho là phân kỳ.

+ Nếu $x = -1$, thì $u_n(x)$ không xác định khi n lẻ

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $D = (1, +\infty)$

§5. CHUỖI LUỸ THỪA

5.1. Định nghĩa

• Chuỗi luỹ thừa là chuỗi hàm có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + \ldots + a_n(x-b)^n + \ldots \quad (5.1)$$

trong đó: $b \in \mathbf{R},\ a_k \in \mathbf{R}\ (\forall k \geq 0)$.

• Nếu ta đặt y=x-b thì chuỗi (5.1) sẽ trở thành chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n \quad (5.2)$

• Ta thấy rằng mọi chuỗi luỹ thừa có dạng (5.1) đều đưa về được dạng chuỗi (5.2). Do vậy chúng ta chỉ cần xét đến chuỗi (5.2), và khi ấy các tính chất có được của chuỗi (5.1) sẽ được suy dẫn từ các tính chất của chuỗi (5.2).

• Dễ thấy rằng chuỗi (5.2) có một điểm hội tụ là $y = 0$ (suy ra, một điểm hội tụ của (5.1) là x=b). Do vậy miền hội tụ của cả hai chuỗi trên luôn khác rỗng.

5.2. Bán kính hội tụ - Khoảng hội tụ

• Định lý Abel

Nếu chuỗi luỹ thừa (5.2) hội tụ tại $y = y_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi y thoả mãn $|y| < |y_0|$.

• Hệ quả

Nếu chuỗi luỹ thừa (5.2) phân kỳ tại $y = y_1 \neq 0$ thì nó phân kỳ tại mọi y thoả mãn $|y| > |y_1|$.

• Nhận xét

Theo định lý Abel và hệ quả trên thì tồn tại một số $r \geq 0$ sao cho:

(1). Chuỗi (5.2) hội tụ tại mọi y thoả $|y| < r$.

(2). Chuỗi (5.2) phân kỳ tại mọi y thoả $|y| > r$.

Số r này được gọi là **bán kính hội tụ** của chuỗi (5.2). Khi ấy khoảng $(-r, r)$ được gọi là **khoảng hội tụ** của chuỗi (5.2). Miền hội tụ của chuỗi (5.2) là hợp của khoảng hội tụ với các điểm hội tụ của (5.2) xét tại hai điểm mút của khoảng hội tụ.

5.2. Quy tắc tìm bán kính hội tụ

• Định lý D'Alembert

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D$ thì bán kính hội tụ của (5.2) được xác định như sau:

(1). Nếu $D = 0$ thì $r = +\infty$ (quy ước)

(2). Nếu $0 < D < +\infty$ thì $r = \frac{1}{D}$

(3). Nếu $D = +\infty$ thì $r = 0$ (quy ước).

• Định lý Cauchy

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = C$ thì bán kính hội tụ của (5.2) được xác định như sau:

(1). Nếu $C = 0$ thì $r = +\infty$ (quy ước)

(2). Nếu $0 < C < +\infty$ thì $r = \frac{1}{C}$

(3). Nếu $C = +\infty$ thì $r = 0$ (quy ước).

5.3. Một số tính chất của chuỗi luỹ thừa

• Tính chất 1

Tổng $S(y)$ của chuỗi luỹ thừa (5.2) là một hàm số liên tục trong khoảng hội tụ $(-r, r)$.

• Tính chất 2

Ta có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi (5.2) trên đoạn $[a, b]$ nào đó nằm trong khoảng hội tụ của chuỗi. Có nghĩa là:

$$\int_a^b S(y)dy = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right) dy$$

$$= \int_a^b (a_0)\,dy + \int_a^b (a_1 y)\,dy + \int_a^b \left(a_2 y^2\right) dy + \ldots + \int_a^b (a_n y^n)\,dy + \ldots$$

Đặc biệt ta có:

$$\int_0^y S(t)dt = \int_0^y (a_0)\,dt + \int_0^y (a_1 t)\,dt + \int_0^y \left(a_2 t^2\right) dt + \ldots + \int_0^y (a_n t^n)\,dt + \ldots$$
$$= a_0 y + \frac{a_1}{2} y^2 + \frac{a_2}{3} y^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} y^{n+1} + \ldots \quad (5.3)$$

Chuỗi (5.3) cũng là chuỗi luỹ thừa có khoảng hội tụ là $(-r, r)$.

• **Tính chất 3**

Ta có thể lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi (5.2) trong khoảng hội tụ của chuỗi. Có nghĩa là:

$$\Big[S(y)\Big]' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right)' = a_1 + 2.a_2.y + 3.a_3.y^2 \ldots + n.a_n.y^{n-1} + \ldots \quad (5.4)$$

Chuỗi (5.4) cũng là chuỗi luỹ thừa có khoảng hội tụ là $(-r, r)$.

***. Ví dụ:** Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n.3^n}$$

Ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$

Vậy chuỗi có khoảng hội tụ là

$$-3 < x + 2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1$$

Với $x = -5$ ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{hội tụ}$$

Với $x = 1$ ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{phân kỳ}$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $D = [-5, 1)$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

Bài 1: Tìm số hạng tổng quát của chuỗi

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\dots$
2. $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{7}{8}+\frac{10}{16}+\dots$
3. $\frac{2}{3}+\frac{3^2}{7^2}+\frac{4^2}{11^2}+\dots$
4. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1.2}+\frac{2^3}{1.2.3}+\frac{2^4}{1.2.3.4}+\dots$
5. $\frac{3!}{2.4}+\frac{5!}{2.4.6}+\frac{7!}{2.4.6.8}+\dots$
6. $\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\dots$
7. $1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+\dots$

Bài 2: Tìm tổng riêng và tổng (nếu có)của các chuỗi số sau

1. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\dots$
2. $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\dots$
3. $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{4.6.8}+\frac{1}{6.8.10}+\dots$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} arctg\frac{1}{n^2+n+1}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$
8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{2^n}$
9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$
11. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{n^3-6n^2+11n-6}$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n-5}{n(n^2-1)}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-3^n}{5^n}$

15. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

Bài 3: Dùng điều kiện cần để chuỗi số hội tụ, hãy chứng minh các chuỗi số sau phân kỳ:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} sinn$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+1}{n})^n . \frac{1}{e}$

5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{ln^2 n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$

Bài 4: Dùng các tiêu chuẩn so sánh xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n^2+2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{4}}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4.2^n-3}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+2n}$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

9. $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\dots$

10. $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\frac{2^3+1}{5^3+1}+\dots$

Bài 5: Dùng tiêu chuẩn tích phân để xét sự hội tụ của các chuỗi sau

1. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\frac{1}{29\ln 29}+\dots+$

2. $\frac{1}{2\ln 2\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\ln\ln 4}+\dots$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{n}}{n^2}$

Bài 5: Dùng tiêu chuẩn D'alembert hay Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi sau

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n.lnn}{n^2-1}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^n \frac{1}{2}^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3n+1}{5n-2})^2 n$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} tg \frac{1}{5^n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^n.n!}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{8^n.n^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n.(n!)^2}{(2n)!}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n.(n!)^2}{n^{2n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$

14. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\frac{2^4}{4^{10}}+\ldots$

15. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots$

Bài 6: Xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(-1)^n\sqrt{n}-n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n^2-5}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{n}{3n-1})^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{2n-1}{3n+2})^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{1.3.5....(2n-1)}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n ln\frac{n+1}{n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x.lnn}{x^2+n}$

Bài 7: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n.3^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{x.n^x}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n+\frac{1}{2^n.x^n})$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{2^{nx}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln^n x}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1+n^{2x}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n.n}{x^n+n^2}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}sin^n(\frac{x.lnn}{x^2+n})$

Bài 8: Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2})$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{2^n+3^n})$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n^2}x^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.2^n}x^n$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{2n+1})^n(x-2)^{2n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2.4^n}$ 10. $\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+2)^2}{3!}+\frac{(x+1)^3}{5!}+..1.$