BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO VIÊN TIỂU HỌC

TRẦN DIÊN HIỂN (Chủ biên) – VŨ VIẾT YÊN

Nhập môn
LÍ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN

TÀI LIỆU ĐÀO TẠO GIÁO VIÊN TIỂU HỌC
TRÌNH ĐỘ CAO ĐẲNG VÀ ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO
Tổng biên tập LÊ A

Biên tập nội dung:
NGÔ HOÀNG LONG

Thiết kế sách và Biên tập mĩ thuật:
PHẠM VIỆT QUANG

Trình bày bìa:
PHẠM VIỆT QUANG

371 (v) 167/110-05 Mã số : PGK06B5
GD - 05

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Để góp phần đổi mới công tác đào tạo và bồi dưỡng giáo viên tiểu học, Dự án Phát triển giáo viên tiểu học đã tổ chức biên soạn các môđun đào tạo theo chương trình Cao đẳng Sư phạm và chương trình liên thông từ Trung học Sư phạm lên Cao đẳng Sư phạm. Biên soạn các môđun nhằm nâng cao năng lực chuyên môn, nghiệp vụ, cập nhật những đổi mới về nội dung, phương pháp dạy học và kiểm tra, đánh giá kết quả giáo dục tiểu học theo chương trình, sách giáo khoa tiểu học mới.

Điểm mới của tài liệu theo môđun là thiết kế các hoạt động, nhằm tích cực hoá hoạt động của người học, kích thích óc sáng tạo và khả năng giải quyết vấn đề, tự giám sát và đánh giá kết quả học tập của người học; chú trọng sử dụng nhiều phương tiện truyền đạt khác nhau (tài liệu in, băng hình,...) giúp cho người học dễ học, dễ hiểu và gây được hứng thú học tập.

Môđun ***Nhập môn lí thuyết xác suất và thống kê toán*** do nhóm tác giả trường Đại học Sư phạm Hà Nội biên soạn.

Môđun ***Nhập môn lí thuyết xác suất và thống kê toán*** có thời lượng bằng 2 đơn vị học trình, bao gồm 3 chủ đề:

Chủ đề 1: Biến cố ngẫu nhiên và xác suất

Chủ đề 2: Biến ngẫu nhiên

Chủ đề 3: Thống kê toán

Lần đầu tiên tài liệu được biên soạn theo chương trỡnh và phương pháp mới, chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Ban Điều phối Dự án rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành của bạn đọc, đặc biệt là đội ngũ giảng viên, sinh viên các trường sư phạm, giáo viên tiểu học trong cả nước.

Xin trân trọng cảm ơn!

DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO VIÊN TIỂU HỌC

Chủ đề 1

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN VÀ XÁC SUẤT

I. MỤC TIÊU

KIẾN THỨC:

Cung cấp cho người học những kiến thức về:

- Những khái niệm cơ bản về xác suất.
- Một số phương pháp định nghĩa xác suất thường sử dụng.
- Một số tính chất cơ bản của xác suất.
- Các công thức tính xác suất độc lập, xác suất điều kiện, dãy phép thử Bécnuli.

KĨ NĂNG:

Hình thành và rèn cho người học các kĩ năng:

- Giải các bài toán về tính xác suất cổ điển, xác suất hình học, xác suất điều kiện...
- Vận dụng để xử lí các bài toán xác suất thường gặp trong thực tế đời sống và nghiên cứu khoa học.

THÁI ĐỘ:

Chủ động tìm tòi, phát hiện và khám phá các ứng dụng của xác suất trong thực tế.

II. GIỚI THIỆU CHỦ ĐỀ

STT	Tiểu chủ đề	Trang
1	Khái niệm cơ bản về xác suất	9
2	Định nghĩa xác suất	15
3	Biến cố ngẫu nhiên độc lập	29
4	Xác suất điều kiện	32
5	Công thức Bécnuli	36

III. ĐIỀU KIỆN CẦN THIẾT ĐỂ THỰC HIỆN CHỦ ĐỀ

KIẾN THỨC:

- Nắm được kiến thức môđun 1: Nhập môn lí thuyết tập hợp và lôgíc toán.
- Nắm được kiến thức của tiểu môđun 2.1 “Số tự nhiên”.

ĐỒ DÙNG DẠY HỌC:

- Một số thiết bị sử dụng trong khi tổ chức các hoạt động dạy học: máy chiếu projector, máy chiếu đa năng, tranh ảnh...

IV. NỘI DUNG

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.1.

KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

1.1. Đối tượng nghiên cứu của xác suất

- Khi tung một đồng tiền, có thể xuất hiện mặt ngửa nhưng cũng có thể không xuất hiện mặt ngửa.
- Khi gieo một con xúc xắc, có thể xuất hiện mặt 6 chấm nhưng cũng có thể không xuất hiện mặt 6 chấm.
- Khi gieo một hạt ngô lấy từ trong kho giống, hạt ngô có thể nảy mầm những cũng có thể không nảy mầm.
- Kiểm tra ngẫu nhiên một học sinh thì em đó có thể thuộc bài nhưng cũng có thể không thuộc bài.

Những hiện tượng như trên gọi là *hiện tượng ngẫu nhiên.*

Vậy *hiện tượng ngẫu nhiên* là những hiện tượng có thể xuất hiện nhưng cũng có thể không xuất hiện khi một số điều kiện cơ bản gây nên hiện tượng đó được thực hiện.

Các hiện tượng ngẫu nhiên là đối tượng nghiên cứu của xác suất. Lí thuyết xác suất nghiên cứu tính quy luật của các hiện tượng đó để có thể dự báo kết quả của chúng.

1.2. Biến cố ngẫu nhiên

- Gieo một con xúc xắc, xem như đã thực hiện một phép thử.
- Tung một đồng tiền, xem như đã thực hiện một phép thử.
- Gieo một hạt ngô xuống đất màu và theo dõi sự nảy mầm của nó, xem như đã thực hiện một phép thử.
- Kiểm tra một học sinh, ta cũng có một phép thử.

Vậy khi một nhóm các điều kiện nào đó (có thể lặp đi lặp lại vô số lần) được thực hiện thì ta nói có một *phép thử ngẫu nhiên* được thực hiện. Để cho gọn, ta gọi là *phép thử* thay cho phép thử ngẫu nhiên.

Mỗi sự kiện có tính chất xảy ra hay không xảy ra khi một phép thử được thực hiện được gọi là một *biến cố ngẫu nhiên* hay còn gọi là *biến cố*. Ta dùng các chữ cái A, B, C,... để kí hiệu các biến cố.

Biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử được thực hiện gọi là biến cố rỗng, kí hiệu là ứ. Biến cố chắc chắn sẽ xảy ra khi một phép thử được thực hiện gọi là *biến cố chắc chắn*, kí hiệu là Ω.

Ví dụ 1.1

Trong phép thử tung đồng tiền, ta kí hiệu

+ S là biến cố xuất hiện mặt sấp, ta viết:

S = "Xuất hiện mặt sấp".

+ N là biến cố xuất hiện mặt ngửa, ta viết:

N = "Xuất hiện mặt ngửa".

Ví dụ 1.2

Trong phép thử gieo một con một con xúc xắc, ta kí hiệu:

+ Q_k = "Xuất hiện mặt k chấm"; với k = 1; 2; 3; 4; 5; 6.

+ Q_c = "Xuất hiện mặt có số chấm chẵn".

+ Q_l = "Xuất hiện mặt có số chấm lẻ".

+ Q_{nt} = "Xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố".

Ví dụ 1.3

Trong phép thử kiểm tra một học sinh, ta kí hiệu:

+ T = "Học sinh đó thuộc bài".

+ K = "Học sinh đó không thuộc bài".

1.3. Quan hệ giữa các biến cố

Định nghĩa 1.1: Cho A và B là hai biến cố của cùng một phép thử.

Ta nói rằng

a) Biến cố A *thuận lợi* (hay *kéo theo*) đối với biến cố B, kí hiệu là $A \subset B$, nếu trong phép thử đó biến cố A xuất hiện thì biến cố B cũng xuất hiện

b) Biến cố A *đồng nhất* (hay bằng) biến cố B, kí hiệu là A = B, nếu đồng thời A thuận lợi đối với B và B cũng thuận lợi đối với A.

c) A và B là hai biến cố *xung khắc* nếu chúng không thể đồng thời xuất hiện trong một phép thử.

d) A là biến cố *đối lập* với biến cố B, kí hiệu là $A = \overline{B}$, nếu A xuất hiện khi và chỉ khi B không xuất hiện.

e) A và B là hai biến cố *đồng khả năng* nếu trong phép thử đó không có biến cố nào được ưu tiên xuất hiện hơn biến cố kia.

Ví dụ 1.4

Trong phép thử gieo xúc xắc

- Biến cố $Q_1, Q_3, Q_5 \subset Q_l$.

- Biến cố Q_2, Q_4, $Q_6 \subset Q_c$.
- Biến cố Q_2, Q_3, $Q_5 \subset Q_{nt}$.
- Q_1 và Q_5, Q_2 và Q_4, ... là những cặp biến cố xung khắc.

Nếu ta kí hiệu

K_c = "Xuất hiện mặt có số chấm không chẵn",

K_l = "Xuất hiện mặt số chấm không lẻ"

thì $K_c = Q_l$, $K_l = Q_c$, $Q_c = \overline{Q_l}$ và $Q_l = \overline{Q_c}$

Q_1 và Q_6 ; Q_c và Q_{nt} ; Q_c và Q_l là những cặp biến cố đồng khả năng.

Ví dụ 1.5

Trong phép thử tung đồng tiền $S = \overline{N}$ và $N = \overline{S}$.

Ví dụ 1.6

Rõ ràng là:

- Biến cố rỗng thuận lợi đối với mọi biến cố.
- Mọi biến cố đều thuận lợi đối với biến cố chắc chắn.

1.4. Các phép tính trên các biến cố

Định nghĩa 1.2: Cho A và B là hai biến cố của một phép thử. Ta gọi:

a) *Hợp* của hai biến cố A và B là một biến cố H, kí hiệu $H = A \cup B$, xuất hiện khi và chỉ khi ít nhất một trong hai biến cố A hoặc B xuất hiện.

Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì ta viết $H = A + B$ thay cho $A \cup B$ và gọi là *tổng trực tiếp* (hay *tổng*) của hai biến cố đó.

b) *Giao* (hay *tích*) của hai biến cố A và B là biến cố G, kí hiệu là $G = A \cap B$, xuất hiện khi và chỉ khi đồng thời cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

Ví dụ 1.7

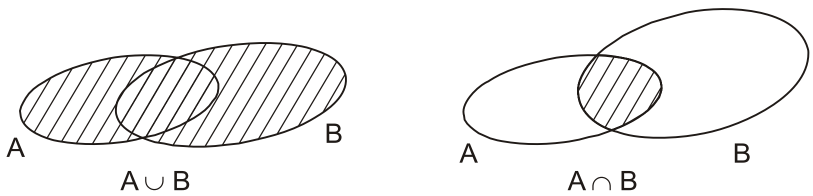
Trong phép thử gieo xúc xắc

- Biến cố $Q_l = Q_1 + Q_3 + Q_5$, biến cố $Q_{nt} = Q_2 + Q_3 + Q_5$.
- $Q_c \cap Q_{nt} = Q_2$; $Q_l \cap Q_{nt} = Q_3 + Q_5$.

Trong mọi phép thử bất kì ta luôn có:

- $A \cap \overline{A}$ = ứ, $A + \overline{A} = \Omega$.
- A và $\overline{A}$ xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B$ = ứ.

Các khái niệm vừa trình bày trên đây có thể minh hoạ bằng các hình ảnh sau:



Định nghĩa 1.3: Biến cố A gọi là *biến cố sơ cấp* (hay *cơ bản*), nếu A = B $\cup$ C thì A = B hoặc A = C.

Định nghĩa 1.4: Cho $B_1, B_2,..., B_n$ là các biến cố của một phép thử. Ta nói rằng họ n biến cố trên lập thành *hệ đầy đủ* các biến cố của phép thử đó, nếu:

- Chúng đôi một xung khắc với nhau, tức là $B_i \cap B_j$ = ứ với mọi $i \neq j$.

- $B_1 + B_2 + ... + B_n = \Omega$.

Nếu các biến cố B_k, k = 1, 2,..., n, đều là các biến cố sơ cấp thì ta nói họ n biến cố đó là *không gian các biến cố sơ cấp.*

Ví dụ 1.8

Trong phép thử gieo xúc xắc

- Họ $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6\}$ tạo thành không gian các biến cố sơ cấp.

- Họ $\{Q_c, Q_l\}$ hoặc $\{Q_{nt}, Q_1, Q_4, Q_6\}$ tạo thành hệ đầy đủ các biến cố.

Ví dụ 1.9

Trong phép thử tung đồng tiền họ {S, N} tạo thành không gian các biến cố sơ cấp.

Trong một phép thử bất kỳ, họ $\{A, \overline{A}\}$ tạo thành hệ đầy đủ các biến cố.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1.1: TÌM HIỂU CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÁC SUẤT

NHIỆM VỤ

Hướng dẫn tổ chức hoạt động: Sinh viên chọn một trong các hình thức tổ chức sau:

- Tự đọc thông tin cơ bản và các tài liệu tham khảo hoặc

- Thảo luận theo nhóm 3, 4 người hoặc

- Theo sự hướng dẫn của giáo viên để thực hiện các nhiệm vụ sau:

NHIỆM VỤ 1:

Xác định đối tượng nghiên cứu của xác suất.

NHIỆM VỤ 2:

Phát biểu định nghĩa các mối quan hệ giữa các biến cố. Minh họa bằng hình ảnh và xây dựng hai ví dụ minh hoạ cho mỗi quan hệ.

NHIỆM VỤ 3:

Phát biểu định nghĩa các phép toán trên các biến cố. Minh họa bằng hình ảnh và xây dựng hai ví dụ minh họa cho mỗi phép toán.

NHIỆM VỤ 4:

Phát biểu định nghĩa hệ đầy đủ, không gian các biến cố sơ cấp. Minh hoạ qua các ví dụ.

ĐÁNH GIÁ HOẠT ĐỘNG 1.1

1.1. Trong phép thử tung hai đồng tiền, ta kí hiệu, chẳng hạn:

(S, N) = "Đồng thứ nhất xuất hiện mặt sấp, đồng thứ hai xuất hiện mặt ngửa".

Điền vào chỗ chấm nội dung thích hợp:

a) (S, S) là biến cố...

b) Cả hai đồng xuất hiện mặt ngửa là biến cố...

c) (N, S) là biến cố..

d) Ít nhất một đồng xuất hiện mặt sấp là biến cố...

e) Không gian các biến cố sơ cấp của phép thử này là..

f) Hệ đầy đủ các biến cố của phép thử này là...

1.2. Trong phép thử kiểm tra ngẫu nhiên hai học sinh. Dùng kí hiệu tương tự ví dụ 1.3, hãy ghi Đ (đúng) hoặc S (sai) vào ô trống:

a) Không gian vào biến cố sơ cấp của phép thử này có hai biến cố. c

b) Các biến cố (T, T), (T, K), (K, T) + (K, K) lập thành hệ đầy đủ. c

c) Các biến cố (T, T), (T, K) và ít nhất một học sinh không thuộc bài lập thành không gian biến cố sơ cấp. c

d) Không gian các biến cố sơ cấp là {(T, T), (T, K), (K, T), (K, K)} c

1.3. Hãy mô tả các biến cố trong câu a, b, c, d của bài 1.1 bằng hình ảnh.

1.4. Trong phép thử gieo hai con xúc xắc ta kí hiệu

(Q_i, Q_j) = "Con thứ nhất xuất hiện mặt i chấm, con thứ hai xuất hiện mặt j chấm".

a) Xác định không gian các biến cố sơ cấp của phép thử.

b) Biểu diễn biến cố cả hai con xúc xắc đều xuất hiện mặt có số chấm chẵn qua các biến cố sơ cấp.

c) Biểu diễn biến cố "tổng số chấm xuất hiện ở hai con bằng 8" qua các biến cố sơ cấp.

d) Gọi tên biến cố sau: $(Q_1, Q_6) + (Q_2, Q_5) + (Q_3, Q_4) + (Q_4, Q_3) + (Q_5, Q_2) + (Q_6, Q_1)$.

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.2.

ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

2.1. Định nghĩa xác suất cổ điển

Trong cuộc sống hàng ngày ta thường gặp các câu:

- Khả năng xuất hiện mặt sấp hoặc mặt ngửa khi tung một đồng tiền là như nhau.

- Khi gieo con xúc xắc, khả năng xuất hiện mặt lẻ nhiều hơn khả năng xuất hiện mặt "lục".

- Khả năng lấy được sản phẩm của phân xưởng thứ nhất nhiều hơn, v.v...

Trong mỗi câu nói trên chứa đựng một nội dung của xác suất thống kê. Để hiểu một cách khoa học những ý nghĩa đó, người ta cần xây dựng một mô hình toán học cho khái niệm xác suất.

Định nghĩa 2.1: (định nghĩa xác suất cổ điển)

Cho $\{B_1, B_2,.., B_n\}$ là hệ đầy đủ các biến cố đồng khả năng của một phép thử và A là biến cố trong phép thử đó. Giả sử trong hệ trên có k biến cố thuận lợi đối với A, tức là:

$$A = B_{n_1} + B_{n_2} + ... + B_{n_k} \text{ với } 1 \le n_i \le n;\ i = 1, 2,.., k.$$

Ta gọi tỉ số $P(A) = \frac{k}{n}$ là *xác suất của biến cố A.*

Ví dụ 2.1

Trong phép thử tung đồng tiền, tìm xác suất để xuất hiện mặt sấp, xuất hiện mặt ngửa.

Giải:

Ta đã biết, hệ đầy đủ các biến cố đồng khả năng trong phép thử này là {S, N}. Vậy $P(S) = \frac{1}{2} = 0,5$ và $P(N) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ví dụ 2.2

Trong phép thử tung hai đồng tiền, tìm xác suất để:

a) Cả hai đồng đều xuất hiện mặt sấp.

b) Có ít nhất một đồng xuất hiện mặt sấp.

Giải:

Ta đã biết {(S,N); (S,S); (N,S); (N, N)} lập thành hệ đầy đủ các biến cố của phép thử. Biến cố cả hai đồng xuất hiện mặt sấp là (S, S) và ít nhất một đồng xuất hiện mặt sấp là (S,N) + (S,S) + (N,S). Vậy

a) Xác suất để cả hai đồng xuất hiện mặt sấp là P ((S,S)) = $\frac{1}{4}$ = 0,25.

b) Xác suất để ít nhất một đồng xuất hiện mặt sấp là

$$P((S, N) + (S, S) + (N, S)) = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Ví dụ 2.3

Trong phép thử gieo xúc xắc, tìm xác suất để xuất hiện mặt sáu chấm, xuất hiện mặt có số chấm lẻ.

Giải:

Ta đã biết {Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6} lập thành không gian các biến cố sơ cấp và $Q_l = Q_1 + Q_3 + Q_5$. Vậy

$$P(Q_6) = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 \text{ và } P(Q_l) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Tương tự ta cũng có

$$P(Q_k) \approx 0{,}17 \text{ với } k = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ và } P(Q_e) = P(Q_{nt}) = 0{,}5.$$

Ví dụ 2.4

Trên bàn có hai túi đựng bài thi cuối học kì, một túi đựng 25 bài của lớp 5A và một túi đựng 20 bài của lớp 5B. Kết quả chấm theo điểm 10 được cho trong bảng dưới đây:

Lớp \ Điểm	7	8	9	10
5A	3	10	9	3
5B	2	12	4	2

Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi một bài thi. Tìm xác suất để trong hai bài rút ra:

a) Đều đạt điểm 10.

b) Có đúng một bài đạt điểm 10.

c) Có ít nhất một bài đạt điểm 10.

Giải:

Kí hiệu A, B, C theo thứ tự là các biến cố ứng với các sự kiện xảy ra trong câu a, b và c của đề bài. Ta nhận xét: mỗi bài thi của lớp 5A, ghép với một bài thi của lớp 5B được một biến cố của phép thử. Vậy

- Số biến cố của phép thử này là $25 \times 20 = 500$ (biến cố).
- Số biến cố thuận lợi đối với A là: $3 \times 2 = 6$ (biến cố).
- Số biến cố thuận lợi đối với B là: $3 \times 18 + 2 \times 22 = 98$ (biến cố).
- Số biến cố thuận lợi đối với C là: $98 + 6 = 104$ (biến cố).

Từ đó suy ra

$$P(A) = \frac{6}{500} = 0{,}012, \qquad P(B) = \frac{98}{500} = 0{,}196, \qquad P(C) = \frac{104}{500} = 0{,}208.$$

Ví dụ 2.5

Đội đồng ca của khối 5 trường tiểu học Hoà Bình có 12 em là học sinh lớp 5A và 8 em là học sinh lớp 5B. Gặp ngẫu nhiên hai em trong đội. Tìm xác suất để:

a) Hai em là học sinh hai lớp khác nhau.

b) Cả hai em là học sinh lớp 5A.

Giải:

Ta kí hiệu A và B theo thứ tự là các biến cố ứng với các sự kiện xảy ra trong câu a và b trong đề bài. Ta nhận xét:

Mỗi cách gặp nhau trong số 20 em của đội cho ta một biến cố của phép thử. Vậy số biến cố của phép thử này là

$$N = C_{20}^{2} = 190 \text{ (biến cố)}.$$

Mỗi cách ghép một trong số 12 em lớp 5A với một trong số 8 em lớp 5B cho ta một biến cố thuận lợi đối với A. Vậy số biến cố thuận lợi đối với A là:

$$12 \times 8 = 96 \text{ (biến cố)}$$

Mỗi cách gặp hai trong số 12 em lớp 5A cho ta một biến cố thuận lợi đối với B. Vậy số biến cố thuận lợi đối với B là:

$$C_{12}^{2} = 66.$$

Từ đó suy ra

$$P(A) = \frac{96}{190} = 0{,}5 \quad \text{và} \quad P(B) = \frac{66}{190} \approx 0{,}35.$$

Ví dụ 2.6

Cuốn sách giáo khoa Toán 3 dày 184 trang. Hai bạn An và Cường lần lượt mở mỗi người một trang (sau đó gấp lại đưa cho người sau mở tiếp).

Tìm xác suất để:

a) Cả hai bạn đều mở được trang có số thứ tự là số có ba chữ số.

b) Cả hai bạn đều mở được trang có số thứ tự là số chia hết cho 5.

c) Cả hai bạn đều mở được trang có số thứ tự là số có hai chữ số khi chia cho 4 dư 1.

Giải:

Ta kí hiệu B, N, M theo thứ tự là các biến cố ứng với các sự kiện xảy ra trong câu a, câu b và câu c của đề bài. Ta nhận xét:

- Mỗi biến cố của phép thử ứng với một chỉnh hợp lặp chập 2 của 184 phần tử vì vậy số biến cố của phép thử này là: $F_{184}^2 = 184^2 = 33\ 856$.

- Số trang sách có số thứ tự là số có ba chữ số là:

  184 - 100 + 1 = 85 (trang).

Số biến cố thuận lợi đối với B là: $F_{85}^2 = 85^2 = 7225$.

- Các số chia hết cho 5 nhỏ hơn 184 lập thành dãy số cách đều 5, 10, 15, ..., 180. Vậy số trang sách có số thứ tự là số chia hết cho 5 là:

  (180 - 5) : 5 + 1 = 36 (trang).

Số biến cố thuận lợi đối với N là: $F_{36}^2 = 36^2 = 1296$.

- Số trang sách có số thứ tự là số chia cho 4 dư 1 là

  (181 - 1) : 4 + 1 = 46 (trang)

Số biến cố thuận lợi đối với M là: $F_{46}^2 = 46^2 = 2116$.

Từ đó suy ra:

$$P(B) = \frac{7225}{33856} \approx 0{,}21. \qquad P(N) = \frac{1296}{33856} \approx 0{,}04, \qquad P(M) = \frac{2116}{33856} \approx 0{,}06.$$

Ví dụ 2.7

Trong hộp có 6 con số bằng nhựa: 0; 1; 2; 3; 4; 5. Một cháu mẫu giáo lấy ngẫu nhiên bốn con số từ trong hộp rồi xếp lại thành dãy. Tìm xác suất để:

a) Dãy số xếp ra là số có bốn chữ số.

b) Dãy số xếp ra là số có bốn chữ số chia hết cho 5.

Giải:

Ta kí hiệu B và H theo thứ tự là các biến cố ứng với các sự kiện xảy ra trong câu a và câu b của đề bài. Ta nhận xét:

- Mỗi dãy số xếp ra là chỉnh hợp không lặp chập 4 của 6 phần tử. Vậy số biến cố trong phép thử này là: $A_6^4 = 360$ biến cố.
- Mỗi chỉnh hợp có số 0 đứng ở vị trí đầu kể từ bên trái không cho ta một số có bốn chữ số. Vậy số biến cố thuận lợi đối với B là: $A_6^4 - A_5^3 = 300$ (biến cố).
- Số biến cố thuận lợi đối với H là

$$A_5^3 + (A_5^3 - A_4^2) = 108 \text{ (biến cố).}$$

Suy ra

$$P(B) = \frac{300}{360} = 0{,}83, \quad P(H) = \frac{108}{300} = 0{,}36.$$

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra các tính chất của xác suất như sau:

Tính chất 1: $0 \le P(A) \le 1$; $P(\varnothing) = 0$ và $P(\Omega) = 1$.

Tính chất 2: $P(A + B) = P(A) + P(B)$; Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \le P(B)$.

Tính chất 3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Tính chất 4: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Chứng minh:

Đơn giản (Bạn đọc tự chứng minh như một bài tập).

Ví dụ 2.8

Trong một lô hàng có 30 sản phẩm của phân xưởng I và 20 sản phẩm của phân xưởng II. Lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm từ lô hàng đó. Tìm xác suất để:

a) Bốn sản phẩm lấy ra không cùng của một phân xưởng.

b) Trong bốn sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm của phân xưởng I.

Giải:

Ta kí hiệu K và I theo thứ tự là các biến cố ứng với các sự kiện xảy ra trong câu a và b của đề bài,

S_i = "Trong 4 sản phẩm có i sản phẩm của phân xưởng I" với i = 1, 2, 3, 4.

Số biến cố của phép thử là C_{50}^4.

a) Ta có:

$$P(S_1) = \frac{30 \times C_{20}^3}{C_{50}^4} \approx 0,15$$

$$P(S_2) = \frac{C_{30}^2 \times C_{20}^2}{C_{50}^4} \approx 0,36$$

$$P(S_3) = \frac{C_{30}^3 \times 20}{C_{50}^4} \approx 0,35$$

$K = S_1 + S_2 + S_3$.

Suy ra $P(K) = P(S_1 + S_2 + S_3)$

$= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$

$\approx 0,15 + 0,36 + 0,35 = 0,86$.

b) Ta kí hiệu

H = "Cả 4 sản phẩm lấy ra đều của phân xưởng II".

Ta có

$$P(H) = \frac{C_{20}^4}{C_{50}^4} = 0,02.$$

$$I = \overline{H} \Rightarrow P(I) = 1 - P(H) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

2.2. Định nghĩa xác suất theo phương pháp thống kê

Từ ngàn xưa, một số người đã tiến hành quan sát tỉ lệ sinh con trai của một số vùng lãnh thổ trong những thời điểm khác nhau. Kết quả các số liệu quan sát được ghi lại trong bảng sau:

Người thống kê	**Nơi thống kê**	**Tỉ số con trai**
Người Trung Hoa cổ đại	Trung Quốc	$\approx \frac{1}{2}$
Laplace	Luân Đôn, Pêtecbua và Béc Lin	$\frac{22}{43} \approx 0,5116$
Cramer	Thụy Điển	$\frac{45682}{88079} \approx 0,51187$
Darmon	Pháp	$\approx 0,511$

Tổng cục Thống kê Việt Nam	Việt Nam	≈ 0,508

Kết quả ghi trong bảng trên cho ta thấy tỉ lệ sinh con trai (trên tổng số lần sinh) dao động quanh 0,51.

Tương tự, Button và Pearson đã tiến hành gieo nhiều lần một đồng tiền cân đối và đồng chất. Kết quả các số liệu được ghi trong bảng sau:

Tên người dân thực nghiệm	**Số lần gieo**	**Số lần xuất hiện mặt sấp**	**Tần suất xuất hiện mặt sấp**
Button	4040	2048	0,5080
Pearson	12000	6019	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Kết quả ghi trong bảng trên cho ta thấy tần suất xuất hiện mặt sấp dao động quanh 0,5 và càng gần 0,5 khi số lần gieo càng lớn.

Từ các hiện tượng trên, ta rút ra nhận xét: Giả sử khi lặp lại n lần một phép thử, có k lần xuất hiện biến cố A. Ta gọi tỉ số $\frac{k}{n}$ là tần suất của biến cố A.

Khi n thay đổi, tần suất $\frac{k}{n}$ cũng thay đổi. Bằng thực nghiệm người ta chứng tỏ được rằng tần suất $\frac{k}{n}$ luôn dao động xung quanh một số cố định, khi n càng lớn thì nó càng gần với số cố định đó.

Ta gọi số cố định đó là xác suất của biến cố A theo nghĩa thống kê và kí hiệu là P(A).

Định nghĩa trên cho ta thấy ý nghĩa thực tiễn của xác suất một biến cố, chẳng hạn:

Trong phép thử tung đồng tiền, P(S) = 0,50 có nghĩa là khi tung liên tiếp đồng tiền đó n lần thì số lần xuất hiện mặt sấp chiếm khoảng 50%. Tỉ số này càng chính xác khi n càng lớn.

Trong phép thử gieo xúc xắc, $P(Q_6) \approx 0{,}17$ có nghĩa là khi gieo liên tiếp n lần con xúc xắc thì số lần xuất hiện mặt sáu chấm chiếm khoảng 17%. Tỉ số này càng chính xác khi n càng lớn.

2.3. Xác suất hình học

Trong thực tế đôi khi ta gặp các bài toán đưa về dạng: cho một hình Ω và một hình X nằm trong hình Ω. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong hình Ω. Tìm xác suất để điểm đó rơi vào hình X.

Mỗi cách chọn ngẫu nhiên điểm M trong hình Ω cho ta một biến cố của phép thử. Như vậy phép thử này có vô số biến cố. Ta gọi:

A = “Lấy ngẫu nhiên điểm M trong hình Ω thì điểm đó rơi vào hình X”.

Như vậy mỗi cách lấy một điểm M trong hình X cho ta một biến cố thuận lợi đối với A. Thành thử trong phép thử này sẽ có vô số biến cố thuận lợi đối với A.

Từ phân tích trên đây cho ta thấy định nghĩa xác suất cổ điển không còn phù hợp với các bài toán dạng này. Vì vậy ta xây dựng một định nghĩa sau đây (gọi là định nghĩa hình học của xác suất):

Cho một hình Ω và một hình X nằm trong hình Ω. Ta gọi tỉ số:

$$P(M) = \frac{\text{“độ đo” hình X}}{\text{“độ đo” hình } \Omega}$$

là xác suất để khi lấy ngẫu nhiên điểm M trong hình Ω, điểm đó rơi vào hình X.

Chú ý: Khái niệm “độ đo” hình X ở đây được hiểu như sau:

- Là độ dài đoạn thẳng, nếu X được tạo thành từ những đoạn thẳng trên đường thẳng.
- Là độ dài đường cong, nếu X được tạo thành từ những đường cong trong mặt phẳng.
- Là diện tích theo nghĩa thông thường, nếu X là hình phẳng trong mặt phẳng. Trong trường hợp này ta quy ước: diện tích của đường cong trong mặt phẳng bằng 0.
- Là thể tích theo định nghĩa thông thường, nếu X là khối đa diện hoặc khối tròn xoay trong không gian. Trong trường hợp này ta quy ước: thể tích của mặt cong trong không gian thì bằng 0.

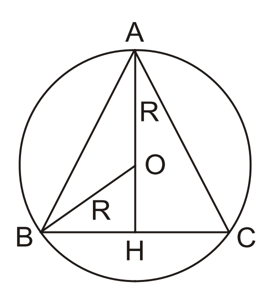
Ví dụ 2.9

Cho một khu đất hình tròn và một vườn hoa hình tam giác đều nội tiếp trong hình tròn đó. Trẻ em đá bổng một quả bóng rơi vào khu đất. Tìm xác suất để quả bóng rơi vào trong vườn hoa.

Giải: Theo định nghĩa ta có xác suất để quả bóng rơi vào vườn hoa là:

$$P(M) = \frac{\text{S tam giác}}{\text{S hình tròn}} = \frac{\frac{1}{2}\ BC\ .\ AH}{\pi R^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.R\sqrt{3}\,.\,\frac{3}{2}R}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}41.$$



Ví dụ 2.10

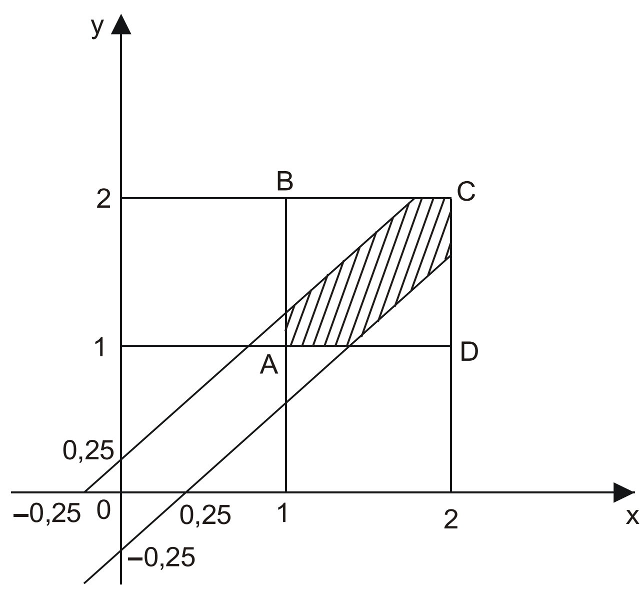
Hai người hẹn gặp nhau tại một địa điểm trong khoảng từ 1 đến 2 giờ chiều. Họ thoả thuận với nhau như sau: Một người đến điểm hẹn mà người kia chưa đến thì sẽ chờ không quá 15 phút. Nếu người kia không đến thì người đó ra đi trước 2 giờ chiều.

Tìm xác suất để hai người gặp nhau.

Giải:

Đổi 15 phút = 0,25 giờ. Gọi x và y theo thứ tự là thời điểm người thứ nhất và người thứ hai đến điểm hẹn. Vậy điều kiện để hai người gặp nhau là

$$\begin{cases} 1 \le x\,,\, y \le 2 \\ |x - y| \le 0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x\,,\, y \le 2 \\ x - 0{,}25 \le y \le x + 0{,}25 \end{cases}$$



tập hợp những điểm M(x,y) với $1 \le x,\ y \le 2$ nằm trong hình vuông ABCD. Tập hợp những điểm M(x,y) với $x - 0{,}25 \le y \le x + 0{,}25$ nằm trong phần gạch chéo trong hình vẽ.

Từ phân tích trên, ta phát biểu lại bài toán đã cho dưới dạng hình học như sau: Lấy ngẫu nhiên một điểm M(x,y) trong hình vuông ABCD. Tìm xác suất để điểm đó rơi vào phần gạch chéo trên hình vẽ.

Áp dụng công thức xác suất hình học, ta có xác suất để hai người gặp nhau tại điểm hẹn là

$$P(M) = \frac{\text{“diện tích” hình } X}{\text{“diện tích” hình } \Omega} = \frac{1 - 0{,}75^2}{1} = 0{,}44.$$

Ví dụ 2.11

Tham số m của phương trình

$$x^2 - (m - 1)x + m^2 - 1 = 0.$$

lấy ngẫu nhiên trong đoạn [-2 ; 2]. Tìm xác suất để phương trình trên có nghiệm thực.

Giải:

Điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm thực là:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m^2-1) = -3m^2 - 2m + 5 \geq 0.$$

Suy ra $-\frac{5}{3} \leq m \leq 1$.

Bài toán có thể phát biểu dưới dạng hình học như sau: Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong đoạn [-2; 2]. Tìm xác suất để điểm đó rơi vào đoạn $[-\frac{5}{3}; 1]$. Vậy xác suất để phương trình có nghiệm thực là

$$P(M) = \frac{1+\frac{5}{3}}{2+2} = 0,67.$$

Ví dụ 2.12

Cho bất phương trình

$$x^2 + 2mx + 1 - n^2 \leq 0.$$

trong đó m lấy trong đoạn [-1; 1] và n lấy trong đoạn [0; 3]. Tìm xác suất để bất phương trình trên vô nghiệm.

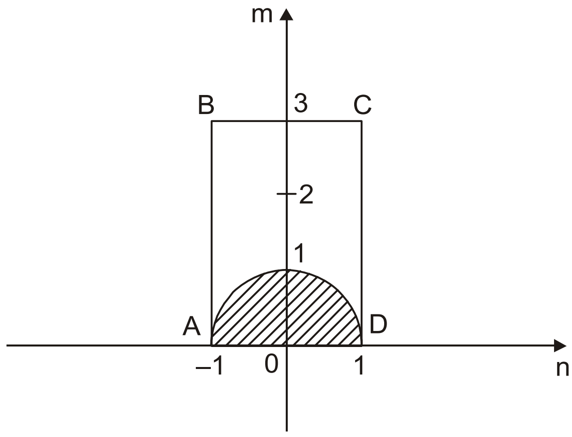
Giải:

Điều kiện để bất phương trình trên vô nghiệm là

$$\Delta' = m^2 - 1 + n^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 + n^2 < 1.$$

Như vậy mỗi cách chọn tham số m, n sẽ ứng với một điểm M(m, n) trong hình chữ nhật ABCD. Mỗi cách chọn m, n để bất phương trình vô nghiệm ứng với một điểm M(m, n) trong phần gạch chéo. Vậy xác suất để bất phương trình vô nghiệm là

$$P(M) = \frac{S_{\text{g¹ch chÐo}}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\pi \times 1^2}{2 \times 3} \approx 0,26.$$


m
B
3
C
2
1
A
D
–1
0
1
n

HOẠT ĐỘNG 1.2. THỰC HÀNH VẬN DỤNG ĐỊNH NGHĨA ĐỂ TÍNH XÁC SUẤT

Sinh viên chọn một trong các hình thức tổ chức sau:

- Tự đọc thông tin cơ bản và các tài liệu tham khảo hoặc
- Thảo luận theo nhóm 3, 4 người hoặc
- Dưới sự hướng dẫn của giáo viên

để thực hiện các nhiệm vụ sau:

NHIỆM VỤ

NHIỆM VỤ 1:

Phát biểu và so sánh ba phương pháp định nghĩa xác suất, theo phương pháp cổ điển, theo phương pháp thống kê và theo hình học.

NHIỆM VỤ 2:

Xác định các bước giải bài toán tính xác suất cổ điển.

NHIỆM VỤ 3:

Thực hành với bảy tình huống giải toán xác suất thường gặp:

- Vận dụng định nghĩa xác suất cổ điển,
- Vận dụng công thức tổ hợp,
- Vận dụng công thức chỉnh hợp lặp,
- Vận dụng công thức chỉnh hợp không lặp,
- Vận dụng công thức tính xác suất của tổng các biến cố, biến cố đối lập,
- Đưa tình huống trong đời sống, sinh hoạt về bài toán xác suất hình học để giải,
- Đưa tình huống trong đại số về bài toán xác suất hình học để giải.

ĐÁNH GIÁ

2.1. Hai xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người đều bằng 0,50. Điền Đ hoặc S vào ô trống:

a) Xác suất để cả hai người bắn trúng đích bằng xác suất để cả hai người bắn trượt. ☐

b) Xác suất để cả hai người bắn trượt lớn hơn xác suất để ít nhất một người bắn trúng. ☐

2.2. Gieo ba đồng tiền cân đối và đồng chất. Tìm xác suất để

a) Chỉ có một đồng xuất hiện mặt sấp.

b) Có ít nhất một đồng xuất hiện mặt sấp.

c) Có ít nhất hai đồng xuất hiện mặt ngửa.

2.3. Gieo hai con xúc xắc. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Chỉ có một con xuất hiện mặt có số chấm lẻ.

b) Có ít nhất một con xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố.

c) Không xuất hiện con nào có số chấm là số nguyên tố.

2.4. Trong một lô hàng có 45 sản phẩm của phân xưởng I và 55 sản phẩm của phân xưởng II. Số sản phẩm mỗi loại của hai phân xưởng được cho trong bảng dưới đây

Loại / Phân xưởng	1	2	3
I	30	12	3
II	35	15	5

Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng của mỗi phân xưởng một sản phẩm. Tìm xác suất để:

a) Trong hai sản phẩm lấy ra có một sản phẩm loại 1 và một sản phẩm loại 2.

b) Trong hai sản phẩm lấy ra không có sản phẩm nào loại 1.

c) Cả hai sản phẩm lấy ra đều loại 3.

d) Trong hai sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm loại 1.

2.5. Lớp 4A có 20 học sinh giỏi, 12 học sinh khá và 3 học sinh yếu. Cô hiệu trưởng gọi ngẫu nhiên ba em lớp 4A lên nhận sách về cho lớp. Tìm xác suất để:

a) Cả ba em có học lực như nhau.

b) Có ít nhất một em là học sinh giỏi.

c) Có ít nhất hai em là học sinh khá.

d) Không có em nào là học sinh yếu.

2.6. Số sản phẩm xuất xưởng mỗi loại của hai phân xưởng được thống kê trong bài 2.4. Lấy ngẫu nhiên từ lô hàng của mỗi phân xưởng 2 sản phẩm. Tìm xác suất để:

a) Cả bốn sản phẩm lấy ra đều loại 1.

b) Trong bốn sản phẩm lấy ra có hai sản phẩm loại 3 của phân xưởng 2.

2.7. Một đợt xổ số phát hành 10 vạn vé. Một người mua ngẫu nhiên hai vé. Tìm xác suất để:

a) Cả hai vé đều có số tạo thành từ các chữ số lẻ.

b) Cả hai vé đều có chữ số hàng đơn vị bằng 5.

2.8. Trên bàn có 7 tấm bìa, mặt dưới của mỗi tấm bìa được ghi một trong các chữ cái A, E, I, M, N, T, V. Một người trải ngẫu nhiên 7 tấm bìa đó thành hàng. Tìm xác suất để khi lật tấm bìa đó lên ta được chữ VIETNAM.

2.9. Tổ một lớp 4A có 8 bạn trai và 6 bạn gái. Cô giáo chia ngẫu nhiên các bạn trong tổ thành hai nhóm, mỗi nhóm 7 người, để chơi thể thao. Tìm xác suất để số nữ của hai nhóm bằng nhau.

2.10. Trong hộp có 10 con số bằng nhựa: 0, 1, 2, ..., 9. Một cháu mẫu giáo lấy ngẫu nhiên năm con số từ trong hộp và xếp lại thành dãy. Tìm xác suất để dãy số xếp ra:

a) Là số có năm chữ số khác nhau.

b) Là số chẵn có năm chữ số.

c) Là số có năm chữ số khi chia cho 5 dư 1.

2.11. Trong một kì thi, các thí sinh của tỉnh A được đánh số báo danh từ 1 đến 250. Tỉnh B từ 251 đến 600 và tỉnh C từ 601 đến 1000. Rút ngẫu nhiên ba hồ sơ từ tập hồ sơ của thí sinh về dự thi. Tìm xác suất để:

a) Ba hồ sơ của thí sinh ba tỉnh khác nhau.

b) Ba hồ sơ đều của thí sinh là người cùng tỉnh.

c) Có ít nhất một hồ sơ của thí sinh tỉnh A.

d) Số báo danh của cả ba thí sinh đó đều là số lẻ, có ba chữ số và chia hết cho 3.

2.12. Trong một lô hàng có 25 sản phẩm của phân xưởng I, 45 sản phẩm của phân xưởng II và 30 sản phẩm của phân xưởng III. Lấy ngẫu nhiên ba sản phẩm từ lô hàng đó. Tìm xác suất để:

a) Có đúng một sản phẩm của phân xưởng II.

b) Có ít nhất hai sản phẩm của phân xưởng II.

c) Ba sản phẩm của ba phân xưởng khác nhau.

2.13. Cho tam giác vuông cân nội tiếp trong hình tròn. Lấy ngẫu nhiên một điểm M trong hình tròn, tìm xác suất để điểm đó rơi vào tam giác nội tiếp nói trên.

2.14. Có một đoạn dây thép dài 2m và một đoạn dài 3m. Người ta cắt ngẫu nhiên đoạn thứ hai thành hai đoạn. Tìm xác suất để từ ba đoạn đó ghép lại ta được một hình tam giác.

2.15. Cắt một đoạn dây dài 3m thành ba đoạn. Tìm xác suất để từ ba đoạn đó ta ghép lại được một hình tam giác.

2.16. Tham số m của phương trình

$$(m - 2) x^2 + (2m - 1) x + m = 0$$

được lấy ngẫu nhiên trong đoạn [-1; 3]. Tìm xác suất để phương trình trên có hai nghiệm trái dấu.

2.17. Cho phương trình

$$x^2 + 2bx + a^2 = 0$$

trong đó lấy ngẫu nhiên $a \in [0; 3]$ và $b \in [-1; 2]$. Tìm xác suất để phương trình trên có nghiệm thực.

2.18. Tham số m của bất phương trình

$$mx^2 + 3mx + m + 2 > 0$$

được lấy ngẫu nhiên trong khoảng $(\frac{1}{2}; 2)$. Tìm xác suất để bất phương trình trên nghiệm đúng với mọi x.

2.19. Cho bất phương trình

$$x^2 + 2(a + 1)x + b + 4 \leq 0$$

trong đó các hệ số a lấy ngẫu nhiên trong đoạn [-3; 2] và b trong đoạn [0; 2]. Tìm xác suất để bất phương trình trên vô nghiệm.

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.3.

BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Ta xét bài toán: “Gieo một đồng tiền xu và một con xúc xắc. Tìm xác suất để xuất hiện mặt ngửa trên đồng tiền và mặt có số chấm là bội của 3 trên con xúc xắc".

Mỗi biến cố trong phép thử này có dạng:

$N \cap Q_k$ = "Trên đồng tiền xuất hiện mặt ngửa và con xúc xắc xuất hiện mặt k chấm", k = 1, 2, ..., 6 hoặc $S \cap Q_k$ = "Trên đồng tiền xuất hiện mặt sấp và con xúc xắc xuất hiện mặt k chấm", k = 1, 2, ..., 6.

Số biến cố trong phép thử này là 12. Ta phải tìm xác suất của biến cố:

$N \cap B$ = "Trên đồng tiền xuất hiện mặt ngửa và con xúc xắc xuất hiện mặt 3 chấm hoặc 6 chấm". Có hai biến cố $N \cap Q_3$ và $N \cap Q_6$ thuận lợi đối với $N \cap B$. Vì vậy:

$$P(N \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = P(N) \cdot P(B).$$

Trực giác cho ta thấy rằng việc xuất hiện mặt ngửa trên đồng tiền và mặt có số chấm là bội của ba trên xúc xắc là hai biến cố xảy ra một cách độc lập với nhau.

Từ phân tích trên ta đi đến định nghĩa:

Cho A và B là hai biến cố của phép thử. Ta nói rằng hai biến cố A, B là độc lập với nhau, nếu

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P(B)}$$

Ví dụ 3.1

Trên bàn có một túi đựng bài thi môn Toán và một túi đựng bài thi môn Tiếng Việt. Môn Toán có 70% số bài đạt điểm giỏi, môn Tiếng Việt có 85% số bài đạt điểm giỏi. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi một bài thi, tìm xác suất để cả hai bài đều đạt điểm giỏi.

Giải:

Ta kí hiệu:

T_G = "Rút ngẫu nhiên ta được bài thi môn Toán đạt điểm giỏi".

V_G = "Rút ngẫu nhiên ta được bài thi môn Tiếng Việt đạt điểm giỏi".

Rõ ràng là hai biến cố trên độc lập với nhau. Vậy ta có:

$$P(T_G \cap V_G) = P(T_G)\, P(V_G) = 0,70 \cdot 0,85$$

$= 0,595 \approx 0,60.$

Chú ý: Từ định nghĩa ta có thể suy ra rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì các cặp biến cố $\overline{A}$ và B, A và $\overline{B}$, $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cùng độc lập với nhau.

Ví dụ 3.2

Hai xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất bắn trúng đích của người thứ nhất bằng 0,75 và của người thứ hai bằng 0,85. Tìm xác suất để có ít nhất một người bắn trúng đích.

Giải:

Ta kí hiệu:

T_k = "Người thứ k bắn trúng đích", k = 1, 2.

Ít nhất một người bắn trúng đích là biến cố $T_1 \cup T_2$.

Theo tính chất của xác suất ta có:

$$
\begin{aligned}
P(T_1 \cup T_2) &= P(T_1) + P(T_2) - P(T_1 \cap T_2)\\
&= 0,75 + 0,85 - 0,75 \,.\, 0,85\\
&= 0,9625 \approx 0,96.
\end{aligned}
$$

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 3.1. THỰC HÀNH TÍNH XÁC SUẤT CỦA CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

NHIỆM VỤ

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản sau đó trình bày trước lớp kết quả tìm hiểu về các nhiệm vụ sau:

NHIỆM VỤ 1:

Định nghĩa biến cố ngẫu nhiên độc lập.

NHIỆM VỤ 2:

Xây dựng hai ví dụ về vận dụng công thức xác suất độc lập để tính xác suất.

ĐÁNH GIÁ

3.1. Cuốn sách Toán 4 có 220 trang, Tiếng Việt 4 có 265 trang. Bạn Hà mở ngẫu nhiên một trang trong cuốn sách Toán, bạn An mở ngẫu nhiên một trang trong cuốn sách Tiếng Việt. Tìm xác suất để:

a) Cả hai bạn đều mở được trang là số tròn chục.

b) Ít nhất một bạn mở được trang là số tròn chục.

3.2. Tín hiệu thông tin được phát liên tiếp hai lần. Trạm thu tiếp nhận được thông tin trong mỗi lần phát với xác suất bằng 0,35.

a) Tìm xác suất để trạm thu nhận được thông tin đó.

b) Nếu muốn xác suất nhận được thông tin không nhỏ hơn 0,9 thì phải phát tin đó bao nhiêu lần?

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.4.

XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Giả sử trong một phép thử đã xuất hiện biến cố B. Ta phải tìm xác suất của biến cố A. Có ba khả năng xảy ra:

- Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì P (A) = 0.
- Nếu B thuận lợi đối với A thì P (A) = 1.
- Nếu A và B là hai biến cố tương thích thì ta chưa thể nói gì về xác suất của A. Vì vậy ta đưa ra định nghĩa:

Ta gọi ***xác suất có điều kiện của biến cố A trong điều kiện biến cố B đã xuất hiện*** là tỉ số:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nhận xét 1. Biến cố A và B là độc lập khi và chỉ khi:

$$P(A/B) = P(A)$$

hoặc

$$P(B/A) = P(B)$$

Nhận xét 2. Đối với hai biến cố A và B bất kì (của cùng một phép thử) ta có:

$$P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B).$$

Giả sử $A_1, A_2, ..., A_n$ là hệ đầy đủ các biến cố của một phép thử và B là một biến cố trong phép thử đó. Khi đó:

a) $P(B) = P(B/A_1)\, P(A_1) + P(B/A_2)\, P(A_2) + ... + P(B/A_n)\, P(A_n)$

(được gọi là công thức xác suất đầy đủ).

b) $P(A_k/B) = \dfrac{P(B/A_K)P(A_k)}{P(B)}$, với k = 1, 2, ..., n

(được gọi là công thức Bâyê).

Ví dụ 4.1

Trong một kì thi tuyển sinh có 35% nữ và 65% nam. Trong số thí sinh nữ có 22% trúng tuyển, trong số thí sinh nam có 18% trúng tuyển.

a) Rút ngẫu nhiên một hồ sơ trong số hồ sơ của thí sinh về dự thi. Tìm xác suất để hồ sơ đó của thí sinh trúng tuyển.

b) Rút ngẫu nhiên một hồ sơ ta được hồ sơ của thí sinh trúng tuyển. Tìm xác suất để hồ sơ đó của thí sinh nữ.

Giải:

Ta kí hiệu:

G = "Rút ngẫu nhiên, ta được hồ sơ của thí sinh nữ".

N = "Rút ngẫu nhiên, ta được hồ sơ của thí sinh nam".

T = "Rút ngẫu nhiên, ta được hồ sơ của thí sinh trúng tuyển".

Ta có P (G) = 0,35; P (N) = 0,65; P (T/G) = 0,22 và P (T/N) = 0,18.

a) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(T) = P(T/G)\,P(G) + P(T/N)\,P(N)$$

$$= 0{,}22 \,.\, 0{,}35 + 0{,}08 \,.\, 0{,}65.$$

$$= 0{,}194.$$

b) Áp dụng công thức Bâyê ta có:

$$P(G/T) = \frac{P(T/G)P(G)}{P(T)}.$$

$$= \frac{0{,}22 \,.\, 0{,}35}{0{,}194} \approx 0{,}3969.$$

Ví dụ 4.2

Sinh viên năm thứ nhất của khoa Giáo dục tiểu học chiếm 37%, năm thứ hai chiếm 33% và năm thứ ba chiếm 30% số sinh viên của toàn khoa. Tổng kết năm học, năm thứ nhất có 35%, năm thứ hai có 40% và năm thứ ba có 48% số sinh viên đạt tiên tiến.

a) Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của khoa đó, tìm xác suất để sinh viên đó là tiên tiến.

b) Gặp ngẫu nhiên một sinh viên của khoa không đạt tiên tiến. Hỏi khả năng em đó là sinh viên học năm thứ mấy nhiều hơn?

Giải:

Ta kí hiệu:

S_k = "Gặp ngẫu nhiên một sinh viên, em đó đang học năm thứ k", với k = 1, 2, 3.

T = "Gặp ngẫu nhiên một sinh viên, em đó là sinh viên tiên tiến".

Ta có

$$P(S_1) = 0{,}37;\ P(S_2) = 0{,}33;\ P(S_3) = 0{,}30$$

$$P(T/S_1) = 0{,}35;\ P(T/S_2) = 0{,}40;\ P(T/S_3) = 0{,}48.$$

a) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P(T) = P(T/S_1)\,P(S_1) + P(T/S_2)\,P(S_2) + P(T/S_3)\,P(S_3)$$
$$= 0{,}35\ .\ 0{,}37 + 0{,}40\ .\ 0{,}33 + 0{,}48\ .\ 0{,}30$$
$$= 0{,}4055 = 40{,}55\%.$$

Vậy tỉ lệ sinh viên tiên tiến của cả khoa đạt 40,55%.

b) Áp dụng công thức Bâyê ta có:

$$P(S_1/T) = \frac{P(T/S_1)P(S_1)}{P(T)}$$
$$= \frac{0{,}35\ .\ 0{,}37}{0{,}4055} = 0{,}3194 = 31{,}94\%.$$

$$P(S_2/T) = \frac{P(T/S_2)P(S_2)}{P(T)}$$
$$= \frac{0{,}40\ .\ 0{,}33}{0{,}4055} \approx 0{,}3255 = 32{,}55\%.$$

$$P(S_3/T) = \frac{P(T/S_3)P(S_3)}{P(T)}$$
$$= \frac{0{,}48\ .\ 0{,}30}{0{,}4055} \approx 0{,}3551 = 35{,}51\%.$$

Vậy tỉ lệ sinh viên tiên tiến của năm thứ nhất chiếm 31,94%, năm thứ hai chiếm 32,55% và năm thứ ba chiếm 35,51% tổng số sinh viên tiên tiến của cả khoa. Suy ra khả năng em đó là sinh viên năm thứ ba nhiều hơn.

HOẠT ĐỘNG 4.1. THỰC HÀNH TÍNH XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN

NHIỆM VỤ

Sinh viên chọn một trong các hình thức tổ chức sau:

- Thảo luận theo nhóm 4, 5 người hoặc
- Dưới sự hướng dẫn của giáo viên

đọc thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ sau:

NHIỆM VỤ 1:

Định nghĩa xác suất điều kiện. Nêu điều kiện cần và đủ để hai biến cố A và B độc lập.

NHIỆM VỤ 2:

Viết công thức xác suất đầy đủ. Nêu hai ví dụ về vận dụng công thức xác suất đầy đủ để giải toán.

NHIỆM VỤ 3:

Viết công thức Bâyê. Nêu hai ví dụ về vận dụng công thức Bâyê để giải toán.

ĐÁNH GIÁ

4.1. Tại một khoa điều trị bệnh nhân bỏng, có 68% bệnh nhân bị bỏng nóng, 32% bị bỏng do hoá chất. Trong số bệnh nhân bị bỏng nóng có 6% bị biến chứng, trong số bệnh nhân bị bỏng do hoá chất có 13% bị biến chứng.

a) Lấy ngẫu nhiên một bệnh án của bệnh nhân bỏng. Tìm xác suất để bệnh án đó của bệnh nhân bị biến chứng.

b) Lấy ngẫu nhiên một bệnh án ta được bệnh án của bệnh nhân bị biến chứng. Tìm xác suất để bệnh án đó của bệnh nhân bị bỏng do hoá chất.

4.2. Trong số giáo viên của một địa phương có 18% nghiện thuốc lá. Tỉ lệ bị viêm họng trong số giáo viên nghiện thuốc lá chiếm 65% và trong số giáo viên không nghiện thuốc là chiếm 32%. Gặp ngẫu nhiên một giáo viên của địa phương đó.

a) Tìm xác suất để giáo viên đó bị viêm họng.

b) Nếu người đó bị viêm họng thì hãy tìm xác suất để người đó không nghiện thuốc lá.

4.3. Tỉ lệ học sinh khối một của một trường tiểu học chiếm 25%, khối hai chiếm 22%, khối ba chiếm 18%, khối bốn chiếm 20% và khối năm chiếm 15% tổng số học sinh của toàn trường.

Trong số học sinh khối một có 45% đạt học sinh giỏi, khối hai có 49% đạt học sinh giỏi, khối ba có 55% đạt học sinh giỏi, khối bốn có 52% đạt học sinh giỏi và khối năm có 64% đạt học sinh giỏi. Gặp ngẫu nhiên một học sinh của trường đó.

a) Tìm xác suất để em đó không là học sinh giỏi.

b) Số học sinh giỏi của khối nào nhiều hơn?

4.4. Trong số sản phẩm của một nhà máy sản xuất bóng đèn có 35% sản phẩm của phân xưởng I, 38% của phân xưởng II và 27% của phân xưởng III. Trong số sản phẩm của phân xưởng I có 1,8% kém phẩm chất, phân xưởng II có 1,3% và phân xưởng III có 2,5% kém phẩm chất. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

a) Tìm xác suất để sản phẩm đó là chính phẩm.

b) Số sản phẩm kém phẩm chất của phân xưởng nào nhiều hơn?

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.5.

CÔNG THỨC BÉCNULI

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Định nghĩa 5.1. Dãy n phép thử $J_1, J_2, ..., J_n$ được gọi là *độc lập với nhau*, nếu các điều kiện sau đây thoả mãn:

(i) Mỗi phép thử J_k tương ứng với không gian các biến cố sơ cấp $\Omega_k = \{A_1^k, A_2^k, ..., A_m^k\}$;

(ii) Xác suất

$$P(A_{i_1}^1 A_{i_2}^2 ... A_{i_n}^n) = P(A_{i_1}^1)P(A_{i_2}^2)...P(A_{i_n}^n).$$

Trong đó $A_{i_k}^k \in \left\{A_1^k, A_2^k, ..., A_m^k\right\}$

Định nghĩa: Ta gọi dãy phép thử $J_1, J_2, ..., J_n$ là dãy phép thử Bécnuli, nếu các điều kiện sau đây thoả mãn:

(i) $J_1, J_2, ..., J_n$ là dãy phép thử độc lập;

(ii) Trong mỗi phép thử J_k chỉ có hai biến cố B hoặc $\overline{B}$ có thể xảy ra;

(iii) Xác suất để biến cố B xuất hiện trong mỗi phép thử không đổi và đều bằng p.

Chẳng hạn, khi gieo n lần một đồng tiền ta có dãy n phép thử Bécnuli.

Giả sử biến cố B trong phép thử J xuất hiện với xác suất P(B) = p. Khi lặp lại n lần phép thử đó một cách độc lập, xác suất để trong n lần đó có k lần xuất hiện biến cố B được xác định bởi công thức:

$$\boxed{P_{n,k}(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

với k = 1, 2, 3, ..., n.

Ta gọi công thức trên đây là ***Công thức Bécnuli.***

Ví dụ 5.1

Gieo 8 lần một con xúc xắc. Tìm xác suất để trong 8 lần gieo đó có 5 lần xuất hiện mặt 6 chấm.

Giải:

Ở đây n = 8, k = 5. Áp dụng công thức Bécnuli ta có:

$$P_{8,5}(Q_6) = C_8^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}004.$$

Ví dụ 5.2

Tỉ lệ nảy mầm của một loại hạt giống đạt 95%. Tìm xác suất để khi gieo ngẫu nhiên 10 hạt giống loại đó có 7 hạt nảy mầm.

Giải:

Ta kí hiệu M = "Gieo ngẫu nhiên một hạt giống thì hạt đó nảy mầm". Vậy P (M) = 0,95.

Áp dụng công thức Bécnuli ta có:

$$P_{7,\,10}\,(M) = C_{10}^{7}\ 0{,}95^{7}.0{,}05^{3} \approx 0{,}01.$$

Ví dụ 5.3

Một đợt xổ số phát hành 10 vạn vé, trong đó có 2500 vé trúng thưởng. Một người mua ngẫu nhiên 5 vé. Tìm xác suất để cả 5 vé đó đều trúng thưởng.

Giải:

Ta kí hiệu T = "Mua ngẫu nhiên một vé, ta được vé trúng thưởng". Vậy:

$$P(T) = \frac{2500}{100000} = 0{,}025.$$

Áp dụng công thức Bécnuli ta có: xác suất để người đó mua được 5 vé đều trúng thưởng là:

$$P_{5,5}\,(T) = C_{5}^{5}\ .\ 0{,}025^{5}.0{,}075^{0} \approx 0{,}1.10^{-7}.$$

Dưới đây ta xét sự biến thiên của xác suất $P_{n,\,k}$ (B) khi n cố định, cho k thay đổi. Khi k biến thiên từ 0 đến n ta xét tỉ số:

$$\frac{P_{n,\,k+1}(B)}{P_{n,\,k}(B)} = \frac{C_n^{k+1}\ p^{k+1}\ q^{n-k-1}}{C_n^{k}\ p^{k}\ q^{n-k}} = \frac{(n\ -\ k)\,p}{(k\ +\ 1)\,q}.$$

Ở đây q = 1 - p. Rõ ràng là:

- Tỉ số trên không nhỏ hơn 1 khi $k \le np - q$.
- Tỉ số trên nhỏ hơn 1 khi $k > np - q$.

Từ đó suy ra P_k (B) đạt giá trị lớn nhất tại $k_o = np - q$ hoặc $k_0 = np - q + 1$, nếu np - q là số nguyên. Nếu np - q không phải là số nguyên thì nó đạt giá trị lớn nhất tại $k_0 = [np - q] + 1$ (ở đây ta kí hiệu [x] là phần nguyên của số thực x).

Ví dụ 5.4

Gieo 100 lần một con xúc xắc. Hỏi xác suất để trong 100 lần gieo đó có bao nhiêu lần xuất hiện mặt sáu chấm là lớn nhất?

Giải:

Ở đây n = 100, p = $\frac{1}{6}$, q = $\frac{5}{6}$.

$$np - q = 100.\frac{1}{6} - \frac{5}{6} = \frac{95}{6}.$$

Suy ra $k_0 = \left[\frac{95}{6}\right] + 1 = 16$.

Vậy xác suất để trong 100 lần gieo đó có 16 lần xuất hiện 6 chấm là lớn nhất.

HOẠT ĐỘNG 5.1

THỰC HÀNH VẬN DỤNG CÔNG THỨC BÉCNULI ĐỂ GIẢI TOÁN XÁC SUẤT.

NHIỆM VỤ

Sinh viên chọn một trong các hình thức tổ chức hoạt động sau:

- Tự đọc thông tin cơ bản hoặc
- Thảo luận theo nhóm 4, 5 người

để thực hiện các nhiệm vụ sau đây:

NHIỆM VỤ 1:

Tìm hiểu khái niệm dãy phép thử độc lập và dãy phép thử Bécnuli.

NHIỆM VỤ 2:

Viết công thức Bécnuli.

NHIỆM VỤ 3:

Xây dựng ba ví dụ về vận dụng công thức Bécnuli để giải toán xác suất.

ĐÁNH GIÁ

5.1. Trong một kì thi tuyển sinh có 20% số thí sinh trúng tuyển. Rút ngẫu nhiên 10 hồ sơ của thí sinh về dự thi. Tìm xác suất để trong 10 hồ sơ đó có 5 hồ sơ của thí sinh trúng tuyển.

5.2. Khi dùng loại kháng sinh A điều trị cho bệnh nhân bị bệnh B thì xác suất khỏi bệnh là 0,65. Tìm xác suất để khi dùng kháng sinh A điều trị cho 8 bệnh nhân bị bệnh B thì có 5 người khỏi bệnh.

5.3. Một đợt xổ số phát hành 25 vạn vé; trong đó có 3000 vé trúng thưởng. Tìm xác suất để một người mua ngẫu nhiên 6 vé đều không trúng thưởng.

5.4. Trong bài 5.3, xác suất để khi mua 12 vé có bao nhiêu vé trúng thưởng là lớn nhất? Tìm xác suất đó.

5.5. Trong bài 5.1, xác suất để khi rút ngẫu nhiên 15 hồ sơ có bao nhiêu hồ sơ của thí sinh trúng tuyển là lớn nhất? Tìm xác suất đó.

THÔNG TIN PHẢN HỒI CHO CHỦ ĐỀ 1

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.1

Hoạt động 1.1

1.2. a) S b) Đ c) S d) Đ

1.3 a) $\Omega = \{(Q_i ; Q_j) : i, j = 1, 2, ..., 6\}$.

b) $(Q_2; Q_2) + (Q_2; Q_4) + (Q_2; Q_6) + (Q_4; Q_2) + (Q_4; Q_4) +$
$+ (Q_4; Q_6) + (Q_6; Q_2) + (Q_6; Q_4) + (Q_6; Q_6)$.

c) $(Q_2; Q_6) + (Q_3; Q_5) + (Q_6; Q_2) + (Q_5; Q_3) + (Q_4; Q_4)$.

d) "Tổng số chấm xuất hiện ở cả hai con bằng 7".

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.2

Hoạt động 1.2

2.1	a) Đ	b) S		
2.2	a) 0,36	b) 0,88	c) 0,50	
2.3	a) 0,33	b) 0,75	c) 0,25	
2.4	a) 0,35	b) 0,12	c) 0,006	d) 0,88
2.5	a) 0,21	b) 0,93	c) 0,27	d) 0,76
2.6	a) 0,18	b) 0,007		
2.7	a) 0,001	b) 0,01		
2.8	a) 0,0002			
2.9	a) 0,40			
2.10	a) 0,9	b) 0,46	c) 0,18	
2.11	a) 0,21	b) 0,27	c) 0,58	
2.12	a) 0,41	b) 0,42	c) 0,21	

2,13 0,32

2.14 0,28

2.15 0,25

2.16 0,50

2.17 0,28

2.18 0,73

2.19 *Gợi ý:* Điều kiện để bất phương trình vô nghiệm là: $b > a^2 + 2a - 3$.

Chủ đề 2

BIẾN NGẪU NHIÊN

MỤC TIÊU

KIẾN THỨC:

Cung cấp cho người học những kiến thức về:

- Khái niệm về biến ngẫu nhiên.
- Phân phối và hàm phân phối của biến ngẫu nhiên rời rạc, biến ngẫu nhiên nhị thức và biến ngẫu nhiên liên tục.
- Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên: kì vọng, phương sai...

KĨ NĂNG:

Hình thành và rèn cho người học các kĩ năng:

- Thiết lập phân phối xác suất, hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên thường gặp.
- Tính các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên.

THÁI ĐỘ:

Chủ động tìm tòi phát hiện và khám phá các ứng dụng của biến ngẫu nhiên.

II. GIỚI THIỆU CHỦ ĐỀ

III. ĐIỀU KIỆN CẦN THIẾT ĐỂ THỰC HIỆN CHỦ ĐỀ

KIẾN THỨC:

- Nắm được kiến thức của tiểu môđun 1: Biến cố ngẫu nhiên và xác suất.
- Nắm được kiến thức giải tích toán học trong chương trình toán phổ thông.

ĐỒ DÙNG DẠY HỌC:

- Một số thiết bị sử dụng trong khi tổ chức các hoạt động dạy học: máy chiếu projector, máy chiếu đa năng, bảng phoóc mi ca...

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- Các tài liệu trong thư mục của giáo trình.

IV. NỘI DUNG

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.1.

KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Biến ngẫu nhiên là một đại lượng mà giá trị của nó là số thực phụ thuộc vào kết quả của phép thử.

Người ta thường kí hiệu các biến ngẫu nhiờn bằng các chữ cái X, Y, Z... Biến ngẫu nhiên có thể nhận giá trị này hay giá trị kia tuỳ thuộc vào kết quả này hay kết quả kia của phép thử xuất hiện. Từ định nghĩa ta thấy thực chất biến ngẫu nhiờn là một ánh xạ từ không gian mẫu Ω của phép thử vào tập số thực.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1.1. TÌM HIỂU KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN

NHIỆM VỤ

Sinh viên thảo luận theo nhóm để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Gieo một đồng tiền hai lần. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt "sấp". Nghiên cứu các tính chất của X.

NHIỆM VỤ 1:

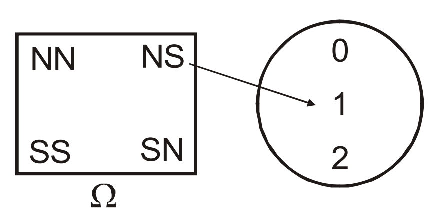
Kiểm tra lại rằng $\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$ là không gian mẫu của phép thử. Biến cố "Mặt sấp xảy ra không quá một lần" bao gồm các kết quả nào?

NHIỆM VỤ 2:

Xét xem X có thể nhận các giá trị nào?

Hãy hoàn thiện bảng sau thiết lập tương ứng giữa kết quả của phép thử và giá trị của X.

Kết quả của phép thử	NN	SN	NS	SS
Giá trị của X	0			



NHIỆM VỤ 3:

Hãy vẽ các mũi tên còn lại để chứng tỏ X là một ánh xạ từ Ω vào tập số thực $R = (-\infty ; +\infty)$.

NHIỆM VỤ 4:

Chứng tỏ rằng:

+ X có tính ngẫu nhiên.

+ X có giá trị phụ thuộc vào kết quả của phép thử.

+ X là một ánh xạ từ Ω vào R.

+ Biến cố "X nhận giá trị 1", kí hiệu (X = 1), là tập hợp $\{SN, NS\}$ nghĩa là (X = 1) = $\{SN, NS\}$.

HOẠT ĐỘNG 1.2. THỰC HÀNH XÁC ĐỊNH BIẾN NGẪU NHIÊN

NHIỆM VỤ

Sinh viên thảo luận theo nhóm để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Xét phép thử: Gieo một con xúc xắc hai lần. Kí hiệu S là tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo. Nghiên cứu biến ngẫu nhiên S.

NHIỆM VỤ 1:

Hãy mô tả không gian mẫu Ω của phép thử.

NHIỆM VỤ 2:

Xét xem S có thể lấy các giá trị nào?

Xác định biến cố (tập hợp con) (S = 6), (S < 5).

Biến cố (S = 6) xảy ra khi nào?

ĐÁNH GIÁ

1.1. a) Biến ngẫu nhiên là gì?

b) Biến ngẫu nhiên có liên quan với phép thử không?

c) Tại sao lại có thuật ngữ biến ngẫu nhiên?

d) Hãy cho một ví dụ khác về biến ngẫu nhiên.

1.2. Trong một cái bát đựng 3 hạt đậu trắng 4 hạt đậu đen. Lấy ra ngẫu nhiên 2 hạt. Kí hiệu X là số hạt trắng lấy được.

a) X có thể nhận những giá trị nào?

b) Biến cố (X < 1) có xảy ra không?

1.3. Một xạ thủ có ba viên đạn. Anh ta bắn lần lượt từng viên vào bia cho đến khi trúng hoặc hết đạn thì dừng lại.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Kí hiệu X là số viên đã bắn. Lập bảng tương ứng giữa kết quả của phép thử và giá trị của X.

1.4. Xét một trò chơi xổ số đơn giản: bạn chọn ngẫu nhiên một số trong các số 0, 1, 2, ..., 9. Sau đó bạn tổ chức lấy ngẫu nhiên một thẻ từ 10 thẻ mà đã ghi các số 0, 1, 2,..., 9 (hai thẻ khác nhau ghi hai số khác nhau). Nếu số ghi trên thẻ trùng với số bạn chọn thì bạn được thưởng 10 kẹo, ngược lại thì bạn sẽ không được gì. Kí hiệu X là số kẹo bạn nhận được.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Lập bảng giá trị của X tương ứng với kết quả lấy thẻ.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

Đối với hoạt động 1.2,

$$\Omega = \{(i, j) \text{ với } 1 \le i\ ;\ j \le 6\}.$$

Ω gồm 36 phần tử (cặp số). S có tập giá trị là

$$S(\Omega) = \{2, 3, 4, ..., 12\}.$$

$$(S = 6) = \{(1, 5)\ ;\ (5, 1)\ ;\ (2, 4)\ ;\ (4, 2)\ ;\ (3, 3)\}.$$

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.2.

PHÂN PHỐI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

a) Ta nói biến ngẫu nhiên X là biến ngẫu nhiên rời rạc, nếu miền giá trị của nó là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.

b) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị $\{x_1, x_2, ...\}$ thì các biến cố $(X = x_1)$; $(X = x_2)$, ... lập thành một hệ đầy đủ.

Đặt $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, ..., $p_k = P(X = x_k)$, ...

Khi đó $\quad p_k \geq 0, \forall k$ và $p_1 + p_2 + ... = 1$.

Ta có bảng phân phối (xác suất) của biến ngẫu nhiên X thiết lập tương ứng giữa giá trị của biến ngẫu nhiên X và xác suất để biến ngẫu nhiên nhận giá trị đó:

X	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

Bảng đó cho ta biết luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên một cách đầy đủ, thuận tiện nhất.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 2.1.

THỰC HÀNH XÁC ĐỊNH BIẾN CỐ TƯƠNG ỨNG VỚI GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIẾN NGẪU NHIÊN

NHIỆM VỤ:

- Sinh viên thảo luận theo nhóm 4, 5 người hoặc
- Dưới sự hướng dẫn của giáo viên, sinh viên đọc thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ dưới đây:

Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất hai lần. Hãy lập bảng phân phối xác suất của số lần xuất hiện mặt sấp trong hai lần gieo đó.

NHIỆM VỤ 1:

Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt sấp trong hai lần gieo. Hãy kiểm tra rằng

$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}$

$(X = 0) = \{NN\}$, $(X = 1) = \{NS, SN\}$ và $(X = 2) = \{SS\}$.

NHIỆM VỤ 2:

Tính các xác suất $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ và $P(X = 2)$.

Lập bảng phân phối của X.

Tính $P(X < 2)$, $P(X > 0)$.

HOẠT ĐỘNG 2.2. THỰC HÀNH LẬP BẢNG PHÂN PHỐI XÁC SUẤT CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

NHIỆM VỤ:

Sinh viên chọn một trong các hình thức tổ chức hoạt động sau:

- Tự đọc thông tin cơ bản hoặc
- Thảo luận theo nhóm 4, 5 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Từ một hộp chứa 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen, lấy ra ngẫu nhiên 2 quả. Kí hiệu X là số quả cầu trắng trong 2 quả đã lấy. Xác định bảng phân phối xác suất của X.

NHIỆM VỤ 1:

Hãy mô tả không gian mẫu (các quả trắng được đánh số bởi các số 1, 2, 3 và các quả đen bởi các số 4, 5). Xác định số phần tử của nó.

NHIỆM VỤ 2:

Xét xem X lấy các giá trị nào? Tính các xác suất $P(X = 0)$, $P(X = 2)$ rồi từ đó suy ra $P(X = 1)$.

NHIỆM VỤ 3:

Lập bảng phân phối xác suất của X.

ĐÁNH GIÁ

2.1. a) Nêu định nghĩa biến ngẫu nhiờn rời rạc. Cho một ví dụ.

b) Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiờn được lập như thế nào? Hãy lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên trong ví dụ đưa ra ở trên.

2.2. Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh từ một tổ gồm 6 nam và 4 nữ. Lập bảng phân phối xác suất của số nam X trong số hai học sinh đã chọn.

2.3. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất, quan sát đến tích của các số chấm xuất hiện trong hai lần gieo đó. Giả sử biến ngẫu nhiên X liên kết với phép thử được xác định như sau: X nhận giá trị bằng –1 nếu tích là số chẵn, bằng 2 nếu tích là số lẻ. Lập bảng phân phối xác suất của X.

2.4. Rút ngẫu nhiên 3 con bài từ một cỗ tú lơ khơ gồm 52 con. Lập bảng phân phối xác suất của số con át X trong 3 con bài được rút.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

Với ví dụ trong hoạt động 2.2, X lấy ba giá trị 0, 1, 2 và

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{3.2}{10} = \frac{3}{5}.$$

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.3.

HÀM PHÂN PHỐI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

a) Xét biến ngẫu nhiên X liên quan với một phép thử và giả sử a là một số thực đã cho. Khi phép thử tiến hành và kết quả ω xuất hiện thì có thể $X(\omega) < a$ hoặc $X(\omega) \geq a$. Như vậy biến cố $(X < a)$ có thể xảy ra hoặc không. Xác xuất $P(X < a)$ của biến cố $(X < a)$ là một số xác định phụ thuộc vào a. Nếu lấy $b > a$ thì biến cố $(X < a)$ kéo theo biến cố $(X < b)$ nghĩa là $(X < a) \subset (X < b)$, do đó $P(X < a) \leq P(X < b)$. Như vậy tồn tại hàm số:

$$F(x) = P(X < x), \text{ với } x \in R.$$

Hàm số F(x) xác định trên tập số thực được gọi là hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X. Đôi khi còn viết là $F_X(x)$.

b)Từ định nghĩa, ta suy ra các tính chất sau của hàm phân phối:

(i) F(x) là hàm không giảm, tức là nếu $x \leq y$ thì $F(x) \leq F(y)$;

(ii) F(x) là hàm liên tục trái;

(iii) $\lim F(x) = 0$ khi $x \to -\infty$ và $\lim F(x) = 1$ khi $x \to +\infty$;

(iv) Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc có tập giá trị $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và $p_k = P(X = x_k)$, với $k = 1, 2, ..., n$ thì

$$F(x) = \Sigma\, p_k$$

tổng trải trên các k mà $x_k < x$.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 3.1. TÌM HIỂU KHÁI NIỆM HÀM PHÂN PHỐI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN

NHIỆM VỤ:

Chọn một trong các hình thức tổ chức hoạt động sau

- Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản hoặc
- Dưới sự hướng dẫn của giáo viên, sinh viên thảo luận theo nhóm 3, 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Giả sử X là số lần xuất hiện mặt sấp trong hai lần gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất.

Hãy viết hàm phân phối của X.

NHIỆM VỤ 1:

Hãy kiểm tra lại rằng:

Ω = {NN, NS, SN, SS} và

$$(X < x) = \begin{cases} \varnothing, & x \le 0 \\ \{NN\}, & 0 < x \le 1 \\ \{NN, NS, SN\}, & 1 < x \le 2 \\ \Omega, & x > 2. \end{cases}$$

NHIỆM VỤ 2:

Chứng tỏ rằng:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{với } x \le 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{với } 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{với } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{với } 2 < x. \end{cases}$$

NHIỆM VỤ 3:

Vẽ đồ thị hàm số $y = F_X(x)$. Nêu các nhận xét về tính chất của hàm số $F_X(x)$.

NHIỆM VỤ 4:

Chứng tỏ rằng:

a) $P(0,5 \le X < 1,5) = F_X(1,5) - F_X(0,5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

b) $P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$, với $a < b$.

ĐÁNH GIÁ

3.1. Giả sử Z là một biến ngẫu nhiên và $P(Z \ge 1,96) = 0,025$. Hãy tính $P(Z < 1,96)$.

3.2. Giả sử T là một biến ngẫu nhiên sao cho $P(T \ge 2,02) = P(T \le -2,02) = 0,05$. Tính $P(-2,02 < T < 2,02)$.

3.3. Một cửa hiệu cắt tóc có 5 ghế ngồi cho khách đợi. Thực tế chỉ ra rằng bảng phân phối của số khách đợi Y là như sau:

Y	0	1	2	3	4	5
P	0,424	0,161	0,134	0,111	0,093	0,077

Dùng kí hiệu biến ngẫu nhiên Y để biểu diễn các biến cố sau:

- Có đúng hai khách đợi;

- Có ít nhất một khách đợi.

Tính các xác suất sau:

a) $P(Y = 2)$ b) $P(Y \geq 1)$ c) $P(4 \leq Y \leq 4)$ d) $P(2 < Y < 4)$.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

Ta luôn có đẳng thức:

a) $P(X \geq C) = 1 - P(X < C)$, với mọi C;

b) $P(a < X < b) = 1 - (P(X \leq a) + P(X \geq b))$.

$= F_X(b) - F_X(a + 0)$, với $a < b$ tuỳ ý.

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.4.

BIẾN NGẪU NHIÊN NHỊ THỨC

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

a) Một phép thử chỉ có hai kết quả đối lập nhau: một kết quả gọi là biến cố "thành công", kí hiệu là T và kết quả thứ hai gọi là biến cố "thất bại", kí hiệu là B. Xác suất $p = P(T)$ gọi là xác suất thành công và xác suất $q = P(B) = 1 - p$ gọi là xác suất thất bại.

b) Một phép thử Bécnuli được lặp lại n lần độc lập với nhau và trong các điều kiện như nhau. Khi đó số lần S_n xuất hiện thành công trong n phép thử đó gọi là biến ngẫu nhiên nhị thức với tham số (n, p). Khi đó S_n nhận n + 1 giá trị là 0, 1, 2, ..., n và

$$P(S_n = k) = C_n^k\, p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Phân phối xác suất của S_n được gọi là phân phối nhị thức với các tham số (n; p).

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 4.1. TÌM HIỂU KHÁI NIỆM BIẾN NGẪU NHIÊN NHỊ THỨC

NHIỆM VỤ:

- Sinh viên tự đọc hoặc
- Giáo viên hướng dẫn sinh viên đọc thông tin cơ bản

để thực hiện cóc nhiệm vụ sau:

Xác định phân phối X chỉ số lần xuất hiện mặt S trong hai lần gieo đồng tiền cân đối và đồng chất.

NHIỆM VỤ 1

Hai lần gieo đồng tiền như trên có phải là hai phép thử Bécnuli không? Xác định p, q, n.

NHIỆM VỤ 2:

Sử dụng thông tin cơ bản, hãy tính $P(X = k)$, với k = 0, 1, 2.

ĐÁNH GIÁ

4.1. Từ một hộp chứa 3 quả cầu trắng và 2 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên từng quả sau khi xem màu của nó rồi hoàn trả lại hộp rồi mới lấy quả tiếp theo cũng một cách ngẫu nhiên. Quá trình cứ tiếp tục như vậy. Hỏi:

a) Mỗi lần lấy có phải là một phép thử Bécnuli không? Nếu kí hiệu T là biến cố "quả lấy ra màu trắng" thì xác suất P(T) bằng bao nhiêu?

b) Kí hiệu X là số quả trắng lấy ra được sau 10 lần lấy. Chứng tỏ rằng X có phân phối nhị thức với các tham số $(10; \frac{3}{5})$. Tính $P(X = 4)$, $P(X = 10)$ và $P(X \geq 1)$.

4.2. Một con xúc xắc cân đối và đồng chất được gieo 4 lần và chú ý đến sự xuất hiện mặt 6 chấm.

a) Có thể coi 4 lần gieo là 4 phép thử Bécnuli hay không?

b) Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt 6 chấm. X có phân phối gì? Tại sao?

4.3. Mười xạ thủ độc lập với nhau cùng bắn vào một cái bia (mỗi người bắn một viên) với xác suất bắn trúng đích đều bằng 0,4.

a) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X chỉ số viên trúng đích.

b) Tính $P(X \geq 1)$.

4.4. Năm hạt đậu được gieo xuống đất canh tác với xác suất nảy mầm của mỗi hạt là 0,90. Kí hiệu X là số hạt nảy mầm.

a) X là biến ngẫu nhiên gì?

b) Lập bảng phân phối xác suất của X.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

a) Một đồng tiền cân đối và đồng chất được gieo n lần là phép thử Bécnuli với $p = q = \frac{1}{2}$ và số lần xuất hiện mặt S trong n lần gieo đó là biến ngẫu nhiên phân phối nhị thức với tham số $(n; \frac{1}{2})$.

b) Mỗi lần lấy cầu có hoàn lại là phép thử Bécnuli, 10 lần lấy như vậy là 10 phép thử Bécnuli. Như vậy

$$P(X = 4) = C_{10}^{4}.(\frac{3}{5})^4(\frac{2}{5})^6 \text{ và } P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (\frac{2}{5})^{10}.$$

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.5.

BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Biến ngẫu nhiên liên tục là một biến ngẫu nhiên có tập giá trị là một khoảng (a; b) nào đó và P(X = x) = 0, với mọi x. Như vậy phân phối của X không thể cho bằng bảng phân phối, mà phải cho bằng hàm mật độ.

Ta nói rằng hàm số f(x) xác định trên tập số thực R là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X, nếu

$$F_X(x) - F_X(a) = \int_a^x f(t)dt, \text{ mọi } x > a.$$

Từ đó, nếu cho a dần tới $-\infty$ thì ta có:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \text{ với mọi số thực } x. \qquad (1)$$

Ngược lại, từ (1) ta có $f(x) = F'_X(x)$.

Vì hàm mật độ hoàn toàn xác định hàm phân phối nên trong thực tiễn người ta thường cho phân phối liên tục bằng cách cho hàm mật độ của nó.

Về mặt hình học, giả sử f(x) là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X. Khi đó $F_X(a)$ chính là diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), trục hoành và đường thẳng có phương trình x = a song song với trục tung.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 5.1. THỰC HÀNH TÍNH TOÁN VỚI BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

NHIỆM VỤ

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản sau đó thảo luận theo nhóm 2, 3 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Cho biến ngẫu nhiên X với hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x < 0 \text{ hoÆc } x > 1. \end{cases}$$

Hãy tính các xác suất dạng P(a < X < b) và lập hàm phân phối.

NHIỆM VỤ 1:

Tính các xác suất sau

a) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4})$ b) $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$.

NHIỆM VỤ 2:

Vẽ đồ thị của hàm mật độ và viết công thức của hàm phân phối.

HOẠT ĐỘNG 5.2. THỰC HÀNH TÍNH TOÁN VỚI BIẾN NGẪU NHIÊN CÓ PHÂN PHỐI CHUẨN

NHIỆM VỤ

Sinh viên tự đọc sau đó thảo luận theo nhóm 2, 3 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Cho biến ngẫu nhiên Z có phân phối chuẩn tắc N(0; 1), nghĩa là Z có hàm mật độ là:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Hãy nghiên cứu phân phối của Z.

NHIỆM VỤ 1:

Hãy chứng tỏ rằng $\varphi(x)$ là hàm chẵn. Vẽ đồ thị của hàm $y = \varphi(x)$.

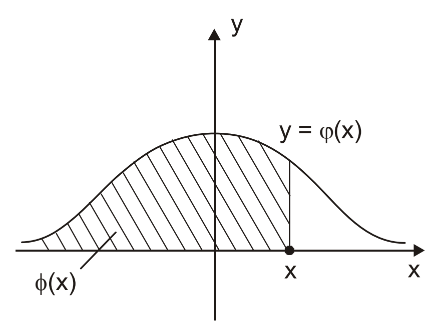
NHIỆM VỤ 2:

Viết công thức hàm phân phối $\Phi(x)$ của Z. Chứng tỏ rằng:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x),$$

trong đó

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$



NHIỆM VỤ 3:

Từ bảng phân phối chuẩn hãy chứng tỏ rằng:

$P(Z \geq 1{,}96) = 1 - F(1{,}96) = 0{,}0250;$

$P(Z \geq 1{,}64) = 1 - F(1{,}64) = 0{,}05;$

$P(Z \geq 2{,}58) = 1 - F(2{,}58) = 0{,}005.$

Từ đó suy ra rằng:

+ P(-1,64 < Z < 1,64) = 0,90;

+ P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95;

+ P(- 2,58 < Z < 2,58) = 0,99.

ĐÁNH GIÁ

5.1. Giả sử X là biến ngẫu nhiên liên tục. Hãy so sánh các xác suất sau:

$P(a < X < b)$, $P(a \le X < b)$, $P(a < X \le b)$ và $P(a \le X \le b)$.

5.2. Giả sử Z là biến ngẫu nhiên chuẩn tắc. Chứng tỏ rằng:

$P(Z \le -c) = P(Z \ge c)$, với $c > 0$.

5.3. Cho biến ngẫu nhiên X với hàm mật độ:

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x, x \in (0;\pi) \\ 0, \quad x \notin (0;\pi) \end{cases}$$

a) Tính hằng số a.

b) Viết công thức hàm phân phối.

c) Tính $P(\left|X - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4})$.

5.4. Biết X có hàm phân phối:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{ ví i } x > 0; \\ 0, \quad \text{ví i } x \le 0, \end{cases}$$

trong đó λ là hằng số dương.

a) Xác định hàm mật độ của X.

b) Tính $P(-1 < X < 2)$.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

a) Đối với hoạt động 5.1:

$$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x dx = x^2 = \Big|_{1/2}^{3/4} (\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{16}.$$

$$P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 0.dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^2 dx.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x < 1; \\ 1, & 1 \geq x. \end{cases}$$

b) Đối với hoạt động 5.2:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi_0(x).$$

Từ bảng phân phối chuẩn ta có:

$P(Z < 1{,}96) = \Phi(1{,}96) = 0{,}975;$

$P(Z = 1{,}64\ ) = \Phi(1{,}64) = 0{,}950;$

$P(Z = 2{,}58) = \Phi(2{,}58) = 0{,}990.$

Kết hợp với công thức:

$P(Z \geq c) = 1 - P(Z < c) = 1 - \Phi(c)$

ta có kết luận.

Cuối cùng, vì $P(-c < Z < c) = 1 - P(Z \leq -c) - P(Z \geq c) = \Phi(c) - \Phi(-c)$ nên ta có kết luận.

c) Chú ý rằng biến ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn $N(a, \sigma^2)$ trong đó a, $\sigma \in R$. $\sigma > 0$ nên $\frac{X - a}{\sigma}$ có phân phối chuẩn tắc N(0, 1).

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.6.

PHÂN PHỐI TIỆM CẬN CHUẨN

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

a) Giả sử S_n là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức với tham số (n; p), Moivre – Laplace đã chứng minh được rằng:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \text{ với mọi } x \in R. \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|P(S_n = k) - \frac{1}{\sqrt{npq}}\psi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)\right| = 0 \quad (2)$$

Điều đó có nghĩa là với n khá lớn thì biến ngẫu nhiên $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ có hàm phân phối xấp xỉ hàm phân phối chuẩn tắc. Do đó với n khá lớn:

$$P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \ a < b. \quad (3)$$

b) Ta nói các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, ..., X_n$ là độc lập nếu với n số thực $C_1, C_2, ..., C_n$ bất kì, các biến cố $(X_1 < C_1)$, $(X_2 < C_2)$, ..., $(X_n < C_n)$ là độc lập.

Định lí giới hạn trung tâm khẳng định rằng nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối với kì vọng chung là a, phương sai chung là $\sigma^2 > 0$, thì với $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} < x\right) = \Phi(x) \text{ với mọi } x \in R.$$

Do đó khi n khá lớn:

$$P\left(b < \frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} < c\right) \approx \Phi(c) - \Phi(b), \ b < c.$$

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 6.1. THỰC HÀNH VẬN DỤNG ĐỊNH LÍ GIỚI HẠN TRUNG TÂM

NHIỆM VỤ

Dưới sự hướng dẫn của giáo viên, sinh viên đọc, thảo luận cặp đôi nội dung thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Biết rằng xác suất để một người 70 tuổi tiếp tục sống đến 75 tuổi là 0,8. Chọn 500 người 70 tuổi một cách ngẫu nhiên. Xác định xác suất sau:

a) Có đúng 390 người sống được đến 75 tuổi.

b) Có khoảng từ 375 đến 425 người sống được đến 75 tuổi.

NHIỆM VỤ 1:

Kí hiệu S là số người trong 500 người 70 tuổi sống được đến 75 tuổi. Biết rằng S có phân phối nhị thức. Xác định tham số (n; p) của phân phối đó.

NHIỆM VỤ 2:

Dựa vào công thức xác suất nhị thức:

$$P(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ q = 1 - p$$

để viết công thức tính P(S = 390).

NHIỆM VỤ 3:

Sử dụng công thức (2) để tính gần đúng P(S = 390).

NHIỆM VỤ 4:

Từ công thức:

$$P(k < S < l) = P\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S - np}{\sqrt{npq}} < \frac{l - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

và công thức (3) để tính gần đúng P(375 < S < 425).

ĐÁNH GIÁ

a) Kí hiệu n là số lần thành công trong n phép thử Bécnuli với xác suất thành công là p và đặt $\overline{p} = S_n / n$. Chứng tỏ rằng:

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\ .$$

Với n khá lớn, ta có thể coi $\frac{\overline{p}-p}{\sqrt{npq}}\sqrt{n}$ có phân phối chuẩn tắc N(0; 1) được không? Vì sao?

THÔNG TIN PHẢN HỒI

Đối với hoạt động 6.1, n = 500, p = 0,80.

+ P(S = 390) = $C_{500}^{390}.0,80^{390}0,2^{110}$.

+ P(S = 390) $\approx \frac{1}{\sqrt{500.0,80.0,20}}\,\psi\left(\frac{390-400}{\sqrt{500.0,80.0,20}}\right) = \frac{\psi(-1,12)}{8,94} \approx 0,0238.$

+ P(375 < S < 425) $\approx \Phi(2,8) - \Phi(-2,8) \approx 0,995.$

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.7.

KÌ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI

THÔNG TIN CƠ BẢN

Kì vọng của biến ngẫu nhiên là số đặc trưng cho giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên đó. Phương sai của biến ngẫu nhiên là số đặc trưng cho mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên so với kì vọng.

a) Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân phối:

X	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

Kì vọng của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là E(X), là số được xác định bởi công thức:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k + ... = \sum_{k\geq 1} x_k p_k \qquad (2)$$

Đối với biến ngẫu nhiên liên tục với hàm mật độ f(x) thì:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \qquad (3)$$

Ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau của kì vọng:

(i) Nếu X = a thì E(X) = a;

(ii) E(aX + b) = aE(X) + b,

trong đó X là biến ngẫu nhiên, a và b là hằng số tùy ý.

b) Phương sai của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là V(X), là một số đặc trưng xác định bởi công thức:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2. \qquad (4)$$

Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc với bảng phân phối (1) thì

$$V(X) = \sum_{k\geq 1} (x_k - a)^2 p_k \qquad (5)$$

Với a = E(X).

Theo công thức (3) ta có:

$$V(X) = \sum_{k\geq 1} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k\geq 1} x_k p_k\right)^2. \qquad (6)$$

Nếu X có hàm mật độ f(x) thì:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\right)^2.$$

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 7.1.

THỰC HÀNH TÍNH KÌ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

NHIỆM VỤ

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Chọn ngẫu nhiên 3 bạn từ một nhóm gồm 4 bạn nam và 3 bạn nữ. Kí hiệu X là số bạn nam chọn được từ nhóm ba bạn đó chọn.Tớnh kỡ vọng, phương sai của X.

NHIỆM VỤ 1:

Kiểm tra lại rằng X nhận các giá trị 0, 1, 2, 3 và $P(X = k) = \dfrac{C_4^k C_3^{3-k}}{C_7^3}$, với k = 0, 1, 2, 3. Từ đó hãy lập bảng phân phối của X.

NHIỆM VỤ 2:

Tính E(X).

NHIỆM VỤ 3:

Chứng tỏ rằng $P(X^2 = k^2) = P(X = k)$, k = 0, 1, 2, 3. Từ đó hãy lập bảng phân phối của X^2 và tính $E(X^2)$.

NHIỆM VỤ 4:

Tính V(X).

HOẠT ĐỘNG 7.2.

THỰC HÀNH TÍNH KÌ VỌNG VÀ PHƯƠNG SAI CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

NHIỆM VỤ

– Dưới sự hướng dẫn của giáo viên, sinh viên thực hiện các nhiệm vụ sau

Biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \le 0 \text{ hoÆc } x \ge 1. \end{cases}$$

Tính kì vọng, phương sai của X.

NHIỆM VỤ 1:

Chứng tỏ rằng hàm số g(x) bất kì xác định và bị chặn trên R ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx$$

NHIỆM VỤ 2:

Tính $\int_0^1 xf(x)dx$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx$.

NHIỆM VỤ 3:

Với các kết quả trên, hãy tính E(X), V(X).

ĐÁNH GIÁ

7.1. a) Giả sử X là biến ngẫu nhiên sao cho $E(X) = 2$, $E(X^2) = 5$. Tính V(X).

b) Cho $E(X) = 0$, $V(X) = 1$. Tính $E(X^2)$.

c) Nếu $V(X) = 4$ thì $V(2X + 1)$ bằng bao nhiêu?

7.2. Giả sử X là biến ngẫu nhiên nhị thức tham số (n; p). Tính E(X), V(X).

7.3. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{khi } x \in (a;b) \\ 0, & \text{khi } x \notin (a;b). \end{cases}$$

Tính E(X), V(X).

THÔNG TIN PHẢN HỒI

a) Đối với hoạt động 7.1, ta có:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{3} k.\frac{C_4^k C_3^{3-k}}{C_7^3} = \frac{12}{7} \approx 1,71.$$

Vì $(X = k) = (X^2 = k^2)$ với $k \geq 0$ nên $P(X = k) = P(X^2 = k^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X^2 = k^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{3} k^2.\frac{C_4^k.C_3^{3-k}}{C_7^3} = \frac{24}{7},$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{24}{49}.$$

Chú ý rằng:

+ Nếu X có phân phối nhị thức với các tham số (n; p) thì $E(X) = np$ và $V(X) = npq$.

+ Nếu X có phân phối chuẩn $N(a;\sigma^2)$ thì $E(X) = a$ và $V(X) = \sigma^2$.

THÔNG TIN PHẢN HỒI CHO CHỦ ĐỀ 2

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.1

1.2. a) X có tập giá trị 0, 1, 2.

b) A có thể xảy ra mà cũng có thể không xảy ra.

1.3. a) Ω = {T, BT, BBT, BBB}, ở đây BT là kí hiệu cho kết quả lần đầu bắn trượt, lần thứ hai bắn trúng.

b)

ω	T	BT	BBT	BBB
X(ω)	1	2	3	3

1.4. a) $\Omega + \{0, 1, 2,..., 9\}$

b) Giả sử số bạn chọn là 3 thì X(3) = 10; X(a) = 0 khi a khác 3.

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.2

2.3.

X	0	1	2
P	$\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$	$\frac{C_6^1 C_4^1}{C_{10}^2}$	$\frac{C_6^2}{C_{10}^2}$

2.4.

X	–1	–2
P	0,75	0,25

2.5.

X	0	1	2	3
P	$\frac{C_{43}^2}{C_{52}^4}$	$\frac{C_{48}^3.C_4^1}{C_{52}^4}$	$\frac{C_{48}^2.C_4^2}{C_{52}^4}$	$\frac{C_{48}^1.C_4^3}{C_{52}^4}$

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.4

4.2. a) Có thể coi mỗi phép thử (mỗi lần gieo) có hai kết quả: xuất hiện mặt 6 chấm và không xuất hiện mặt 6 chấm.

b) X có phân phối nhị thức với tham số (4; 1/6).

4.3. a) $P(X = k) = C^k_{10} .0{,}4^k . 0{,}6^{10-k}$, với k = 0, 1, ..., 10.

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^{10}$.

4.4. a) X là biến ngẫu nhiên nhị thức tham số (5; 0,9).

b) $P(X = k) = C^k_5 .0{,}9^k. 0{,}1^{5-k}$, với k = 0, 1, ..., 5.

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.5

5.1. $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$.

$$= P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(x)dx \ (a < b).$$

5.2. Vì hàm mật độ của Z là hàm chẵn nên:

$$P(Z \leq -c) = \frac{1}{2} - \int_{-c}^{0} \Phi(x)dx = \frac{1}{2} + \int_{c}^{0} \Phi(-x)dx = \frac{1}{2} - \int_{0}^{c} \Phi(x)dx = P(X \geq c).$$

5.3. a) Ta cú

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} a\sin x dx = 1.$$

$$a = \frac{1}{\int_0^{\pi} \sin x dx} = \frac{1}{2}.$$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1, & \pi \leq x. \end{cases}$$

c) $$P\left(\left|X - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{4}\right) = P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5.4. a) Do $f_X(x) = F'_X(x)$ nên $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

tại x = 0 hàm phân phối không có đạo hàm nhưng ta có thể gán cho $f_X(0)$ giá trị bất kì, chẳng hạn đặt $f_X(0) = 0$.

b) $P(-1 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-1) = 1 - e^{-2\lambda}$.

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.7

7.1. a) $V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 1$.

b) $E(X^2) = V(X) + (EX)^2 = 1$.

c) $V(2X + 1) = 4V(X) = 16$.

7.2. $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = npq + (np)^2$.

Vậy $V(X) = npq$.

7.3. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}$.

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$.

Từ đó $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Chủ đề 3

THỐNG KÊ TOÁN

I. MỤC TIÊU

KIẾN THỨC:

Người học sau khi học xong chủ đề này sẽ nắm được những kiến thức về:

- Các khái niệm cơ bản của thống kê toán.
- Các giá trị đặc trưng của mẫu quan sát: phương sai, độ lệch chuẩn, trung vị.
- Ước lượng điểm và ước lượng khoảng.
- Kiểm định giả thiết thống kê.
- Nội dung dạy yếu tố thống kê trong môn Toán ở trường tiểu học.

KĨ NĂNG:

Người học từng bước hình thành và rèn các kĩ năng về:

- Lập biểu đồ tần suất.
- Tính các số đặc trưng mẫu.
- Ước lượng tham số.
- Kiểm định giả thiết thống kê.
- Giải toán về thống kê ở Tiểu học.

THÁI ĐỘ:

- Chủ động tìm tòi các ứng dụng của thống kê để xử lí các bài toán thống kê thường gặp trong thực tế và trong nghiên cứu khoa học giáo dục.
- Phát hiện cơ sở toán học của mạch yếu tố thống kê trong môn Toán ở Tiểu học.

II. GIỚI THIỆU CHỦ ĐỀ

STT	Tên tiểu chủ đề	Trang số
1	Mẫu quan sát và cách trình bày mẫu	69
2	Các giá trị đặc trưng mẫu	72
3	Phương sai và độ lệch chuẩn mẫu	75
4	Ước lượng điểm và ước lượng khoảng	78
5	Khoảng tin cậy của kì vọng a đối với mẫu có cỡ lớn	80
6	Khoảng tin cậy của kì vọng a đối với mẫu cỡ nhỏ	83
7	Khoảng tin cậy cho tỉ lệ trong tập tổng quát	86
8	Kiểm định giả thiết thống kê	88
9	Yếu tố thống kê trong môn Toán ở trường Tiểu học	100

III. ĐIỀU KIỆN CẦN THIẾT ĐỂ THỰC HIỆN CHỦ ĐỀ

KIẾN THỨC:

- Nắm được kiến thức chủ đề 1 và 2.

ĐỒ DÙNG DẠY HỌC:

- Một số thiết bị sử dụng trong khi tổ chức các hoạt động dạy học: Máy chiếu Projector, máy chiếu đa năng, bảng phoóc mi ca.

IV. NỘI DUNG

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.1.

MẪU QUAN SÁT VÀ CÁCH TRÌNH BÀY MẪU

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

a) Để đánh giá tuổi thọ (thời gian chiếu sáng) của một loại bóng đèn điện, người ta không thể "quan sát" mọi bóng đèn loại đó vì số lượng quá nhiều cũng như việc quan sát (cho thắp sáng và tính thời gian từ lúc thắp đến khi cháy) dẫn đến phá huỷ đối tượng quan sát. Vì vậy người ta đã chọn ra một số bóng một cách ngẫu nhiên và cho chiếu sáng rồi quan sát. Ta thu được dãy số liệu ($X_1, X_2, \ldots X_n$) tương ứng với dãy tuổi thọ của các bóng đèn được lấy ra. Trong thống kê, tập hợp các bóng đèn cùng loại được gọi là tập tổng quát (hay cư dân) còn tập các bóng đèn được lấy ra thử nghiệm gọi là tập mẫu. Dãy số liệu ($X_1, X_2, \ldots X_n$) được gọi là mẫu quan sát.

Một cách khái quát, *tập hợp tổng quát* là tập hợp các đối tượng cùng loại mà đều mang một dấu hiệu về lượng, kí hiệu là X, nào đó, được quan tâm nghiên cứu.

Tập mẫu là tập hợp gồm các đối tượng của tập tổng quát được tách ra để quan sát.

Một dãy ($x_1, x_2, \ldots x_n$) gồm các số liệu thu thập được thông qua quan sát dấu hiệu về lượng X trên các đối tượng của tập mẫu được gọi là *mẫu quan sát về X.* Ngoài ra, ta còn kí hiệu ($X_1, X_2, \ldots X_n$) để chỉ dãy các kết quả quan sát cụ thể về X. Nó được gọi tắt là một mẫu.

Chú ý rằng X là một biến ngẫu nhiên và nếu sự quan sát là ngẫu nhiên và độc lập thì ($X_1, X_2, \ldots X_n$) là các biến ngẫu nhiên độc lập (theo nghĩa mỗi biến ngẫu nhiên có thể lấy giá trị này hay giá trị kia độc lập với các biến ngẫu nhiên khác) và có cùng luật phân phối với X. Số n được gọi là *cỡ mẫu* hay *kích thước mẫu.*

b) Biểu đồ và tổ chức đồ: Để có hình ảnh rõ ràng và trực quan về phân bố các giá trị trong mẫu ($X_1, X_2, \ldots X_n$) ta xếp chúng thành m lớp khác nhau sao cho các số liệu trong mỗi lớp đều bằng nhau và mỗi số ở lớp này khác số ở lớp kia. Sau đó lấy ở mỗi lớp một số làm đại diện ta được dãy số tăng $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$. Ta kí hiệu r_k là số các số y_i bằng y_k, r_k được gọi là *tần số* của y_k. Ta có bảng phân bố tần số

y_k	y_1	y_2	….	y_m
Tần số	r_1	r_2	…	r_m

Tỉ số $f_k = \frac{r_k}{n}$, k = 1, ... , m được gọi là *tần suất* của y_k và ta có bảng phân bố tần suất

y_k	y_1	y_2	….	y_m
Tần số	r_1	r_2	…	r_m
Tần suất	f_1	f_2	…..	f_m

Trên mặt phẳng toạ độ, nối điểm (y_k; n_k) với điểm (y_{k+1}; n_{k+1}) bởi đoạn thẳng với k = 1;…, m –1 ta được biểu đồ tần số hình gậy. Còn nối các điểm (x_k; f_k) với (x_{k+1}; f_{k+1}) bởi đoạn thẳng với k = 1, 2,… m – 1 ta được đường gấp khúc được gọi là biểu đồ đa giác tần suất.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 1.1: THỰC HÀNH XÁC ĐỊNH TẦN SUẤT VÀ BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT

NHIỆM VỤ

Sinh viên thảo luận theo nhóm 3, 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Hỏi tuổi của 120 giáo viên THPT trong huyện ta nhận được bảng phân bố tần số và tần suất (chưa đầy đủ) sau:

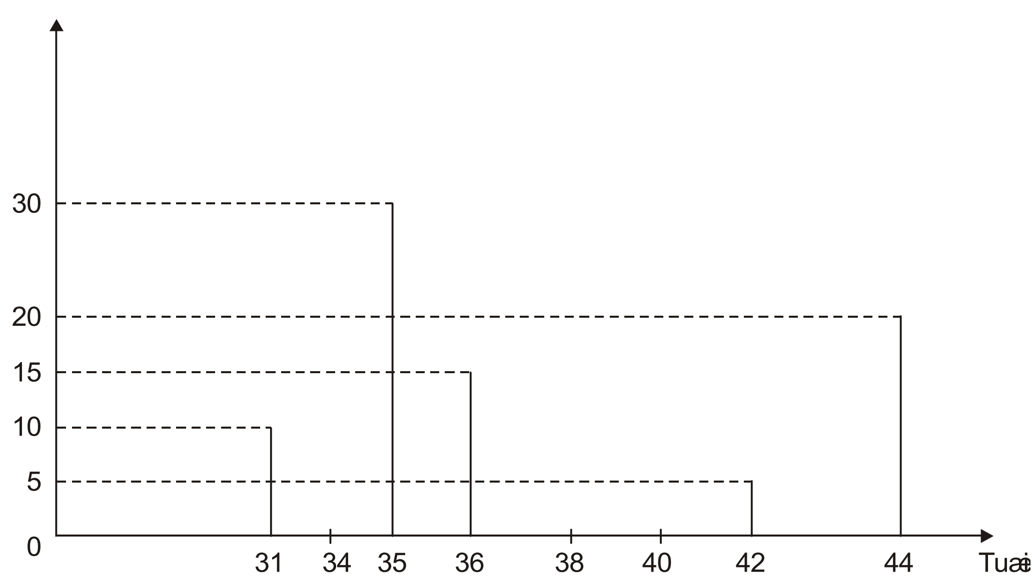
Tuổi X_i	31	34	35	36	38	40	42	44
Tần số r_k	10	20	30	15	10	10	5	20
Tần suất	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$						

NHIỆM VỤ 1:

Điền vào chỗ trống để hoàn thiện bảng biểu đồ tần suất.

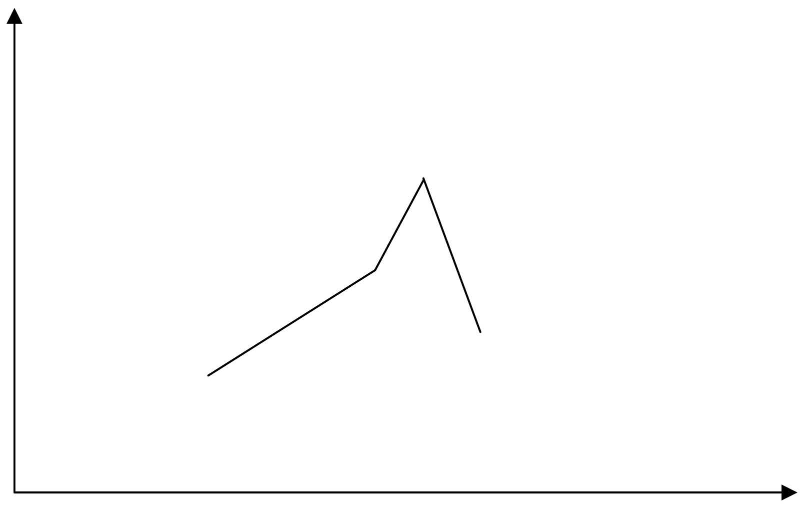
NHIỆM VỤ 2:

Hãy hoàn thiện biểu đồ tần số bằng cách vẽ ba đoạn còn lại.



NHIỆM VỤ 3:

Hãy hoàn thiện biểu đồ đa giác tần suất.



ĐÁNH GIÁ

25 học sinh tham gia cuộc thi trắc nghiệm với 8 câu hỏi. Kết quả kiểm tra được cho bởi bảng sau:

Số câu trả lời đúng	0	1	2	3	4	5	6
Số học sinh	4	8	4	5	2	1	1

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất.

b) Vẽ biểu đồ tần số và đa giác tần suất.

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.2.

CÁC GIÁ TRỊ ĐẶC TRƯNG MẪU

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Các giá trị trung bình, trung vị (median), mode là các số đo quan trọng. Chúng cho ta biết thông tin về các xu hướng trung tâm.

1. Giả sử $(X_1, X_2 \ldots\ X_n)$ là một mẫu.

a) Trung bình mẫu, kí hiệu $\overline{X}$, là một số được xác định bởi

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}.$$

b) Trung vị mẫu, kí hiệu m, là một số mà số các giá trị của mẫu $\geq$ m bằng số các giá trị của mẫu $\leq$ m. Nghĩa là m thoả mãn

$$\text{Card}\,\{k \leq n \mid X_k \leq m\} = \text{Card}\,\{k \leq n \mid X_k \geq m\}.$$

Từ đó nếu sắp xếp lại mẫu $(X_1, ..., X_n)$ theo thứ tự tăng dần $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_n^*$ thì

$$m = \begin{cases} X^*_{\frac{n+1}{2}} & \text{ví i n lÎ} \\ \dfrac{X^*_{\frac{n}{2}} + X^*_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{ví i n ch½n} \end{cases}$$

c) Mode mẫu là một giá trị của mẫu có tần số lớn nhất.

Ví dụ: lương tháng X của 13 giáo viên được cho trong bảng sau (đơn vị nghìn đồng):

1200	1200	1840	1200	1200	1300	1200	1300	1350
1700	1950	1200	1350					

Khi đó $\overline{X} = \dfrac{1200 + 1200 + \ldots.. + 1200 + 1350}{13} = 1383,85.$

Để xác định trung vị ta xếp dãy số liệu theo thứ tự tăng

$$\underbrace{1200\quad 1200\quad 1200\quad 1200\quad 1200\quad 1200}_{\text{6 mức lương thấp nhất}}\quad 1300\quad \underbrace{1300\quad 1350\quad 1350\quad 1700\quad 1840\quad 1950}_{\text{6 mức lương cao nhất}}$$

m = trung vị = 1300

Để tính mode mẫu ta lập bảng phân bố tần suất.

Mức lương	1200	1300	1350	1700	1840	1950
Tần suất	$\frac{6}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

Vậy mode = 1200

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 2.1. THỰC HÀNH TÍNH CÁC SỐ LIỆU ĐẶC TRỰNG CỦA MẪU QUAN SÁT

NHIỆM VỤ

Sinh viên đọc thông tin cơ bản rồi thảo luận theo nhóm 3, 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:
Một hãng sản xuất sữa tắm đóng chai trên nhãn quảng cáo ghi dung tích sữa là 310 ml. Một mẫu 16 chai được kiểm tra ta nhận được dãy số liệu sau:

297	311	322	315	318	303	307	296
306	291	312	309	300	298	300	311

NHIỆM VỤ 1:

Tính dung lượng sữa tắm trung bình trong 16 chai kể trên.

NHIỆM VỤ 2:

Xếp dãy số liệu trên theo thứ tự tăng dần. Tính trung vị.

NHIỆM VỤ 3:

Lập bảng phân bố tần suất. Tính mode.

ĐÁNH GIÁ

Tuổi của 40 sinh viên năm thứ nhất trong một trường đại học là:

19	24	24	24	23	20	22	21
18	20	19	19	21	19	19	23
36	22	20	35	22	23	19	26
22	17	19	20	20	21	19	21
20	20	21	19	24	21	22	21

Hãy tính $\overline{X}$, trung vị và mode.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

- Để tính trung vị, ta thường sắp thứ tự các số liệu thành dãy tăng và lấy số ở giữa dãy.
- Để tính mode, ta thường lập bảng phân phối tần số. Từ đó chọn giá trị mẫu có tần số lớn nhất.

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.3.

PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN MẪU

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Hai tập mẫu (tài liệu) có thể cùng trung bình, trung vị và mode nhưng hoàn toàn khác nhau theo nghĩa độ biến động (độ lệch) giữa các giá trị của mẫu này so với trung bình của nó rất khác so với độ biến động tương ứng trong mẫu kia. Người ta đã lấy phương sai hay độ lệch chuẩn mẫu đã đánh giá độ biến động hay độ phân tán của các giá trị mẫu so với trung bình mẫu.

Giả sử $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ là một mẫu.

Đại lượng

$$S^2 = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + \ldots.. + (X_n - \overline{X})^2}{n-1} \qquad (1)$$

được gọi là phương sai mẫu (điều chỉnh), trong đó $\overline{X}$ là trung bình mẫu.

(1) có thể viết gọn như sau:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$$

Đại lượng $S^2 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2}$ được gọi là độ lệch chuẩn mẫu.

Chú ý:

a) Trong thực hành ta có thể tính phương sai mẫu nhanh hơn nhờ công thức

$$S^2 = \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}{n(n-1)}.$$

Và do đó

$$S = \sqrt{\frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}{n(n-1)}}.$$

b) Nếu mẫu được cho dưới dạng bảng phân phối tần số

X_k	X_1	X_2	…	X_k	….	X_m
Tần số	n_1	n_2	…	n_k	…	n_m

Thì $\overline{X} = \dfrac{X_1 r_1 + X_2 r_2 + \ldots + X_m r_m}{n}$, $(n = r_1 + r_2 + \ldots + r_m)$

$$S^2 = \frac{n\left(\sum_{k=1}^{m} r_k X_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} r_k X_k\right)^2}{n(n-1)}$$

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 3.1. THỰC HÀNH TÍNH PHƯƠNG SAI MẪU

NHIỆM VỤ:

- Giáo viên hướng dẫn sinh viên thực hiện các nhiệm vụ sau:

Chiều cao của 5 cầu thủ bóng đá được chọn từ đội tuyển I như sau (đơn vị: cm)

172 173 176 176 178.

Hãy tính độ lệch chuẩn.

NHIỆM VỤ 1:

Chứng tỏ rằng $\overline{X} = 175$.

NHIỆM VỤ 2:

Hoàn thiện bảng độ lệch và bình phương độ lệch của các số đo chiều cao với trung bình

Chiều cao X_k	172	173	176	176	178	
Độ lệch so với $\overline{X}$: $(X_k - \overline{X})$	–3	–2	1			
Bình phương độ lệch $(X_k - \overline{X})^2$	9	4	1			24

NHIỆM VỤ 3:

Hãy chứng tỏ rằng

$$\sum_{k=1}^{5} (X_k - \overline{X})^2 = 24$$

$$S^2 = \frac{24}{5-1} = 6\,(cm^2)$$

$$S \approx 2,4\,(cm).$$

HOẠT ĐỘNG 3.2. THỰC HÀNH XÁC ĐỊNH ĐỘ LỆCH CHUẨN MẪU

NHIỆM VỤ

- Giáo viên hướng dẫn sinh viên đọc thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Chiều cao của 5 cầu thủ được chọn từ đội tuyển II là (đơn vị cm)

167 172 176 176 184.

Tính trung bình và độ lệch chuẩn mẫu và so sánh với mẫu được chọn từ đội tuyển I.

NHIỆM VỤ 1:

Chứng tỏ rằng $\overline{X} = 175$

$S^2 = 156$ (cm^2) $S = 6{,}2$ (cm)

NHIỆM VỤ 2:

Có nhận xét gì về trung bình, độ lệch chuẩn của hai mẫu với nhau?

ĐÁNH GIÁ

3.1. a) Cho một mẫu 1 2 3 4 5 3 2 1 4 5

Hãy tính $\overline{X}$ và tính S^2 bằng định nghĩa và công thức (2).

b) S^2 có thay đổi không khi thay X_i bởi $X'_i = X_i + C$ với $i = 1, \ldots, n$ trong đó C là hằng số đã cho. Không cần tính xét xem $\overline{X}'$ bằng bao nhiêu khi biết $\overline{X}$.

3.2. Cân 10 gói kẹo được chọn ngẫu nhiên ta được kết quả sau:

295 295 300 298 295 300 300 290 300 300.

Hãy tính kì vọng và phương sai mẫu trong quan sát nói trên.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

Nếu thay X_i bởi $X'_i = hX_i + C$ thì $\overline{X}' = h\overline{X} + C$ và $S'^2 = h^2S^2$.

Ở đây $\overline{X}'$ và S'^2 là trung bình mẫu và phương sai mẫu được tính đối với mẫu X'_1 , X'_2, … X'_n.

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.4.

ƯỚC LƯỢNG ĐIỂM VÀ ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Xét một tập hợp tổng quát mà mỗi đối tượng đều mang một dấu hiệu về lượng X. Về phương diện toán học X là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chưa biết phụ thuộc vào một vài tham số nào đó. Trong nhiều trường hợp ta cần phải ước lượng một tham số đặc trưng θ nào đó chưa biết thông qua tài liệu quan sát $(X_1, X_2,\ldots X_n)$ về các giá trị của X. Ước lượng đưa ra phải dựa trên mẫu quan sát. Vì vậy, một cách tổng quát ta có các định nghĩa sau:

a) Ước lượng điểm của tham số θ là một hàm số $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n\ (X_1, X_2,\ldots X_n)$ chỉ phụ thuộc vào mẫu quan sát mà không phụ thuộc vào tham số.

Để ước lượng điểm $\hat{\theta}_n$ phản ánh sự gần đúng với tham số ta cần đòi hỏi.

- Tính không chệch: $E(\hat{\theta}_n) = \theta$.

Yêu cầu này được đưa ra nhằm tránh sai số hệ thống của ước lượng

- Tính vững (hay nhất quán) nghĩa là đòi hỏi:

Với mọi $e > 0$ ta có

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < e) = 1.$$

Yêu cầu này đảm bảo cho $\hat{\theta}_n$ gần với θ với xác suất gần 1 khi n khá lớn.

Chẳng hạn nếu $a = E(X)$ và $\sigma^2 = V(X)$ thì $\overline{X}$ là ước lượng điểm không chệch và vững của a, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$ là ước lượng không chệch và vững của σ^2 vì vậy với n khá lớn, ta có thể coi

$$\overline{X} \approx a \text{ và } S^2 \approx \sigma^2.$$

b) Giả sử θ_1 và θ_2 là hai ước lượng điểm của tham số θ, $\gamma = 1 - \alpha \in (0; 1)$, khoảng (θ_1, θ_2) gọi là khoảng tin cậy của θ với độ tin cậy γ nếu

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma.$$

Ý nghĩa của khoảng tin cậy là ở chỗ có thể nói trong 100g% trường hợp lấy mẫu khoảng (θ_1, θ_2) chứa tham số chưa biết θ hay cũng vậy khẳng định $\theta_1 < \theta < \theta_2$ có thể tin cậy ở mức γ.

B. HOẠT ĐỘNG

NHIỆM VỤ

Sinh viên chọn một trong các hình thức tổ chức hoạt động sau:

- Tự đọc thông tin cơ bản rồi thảo luận theo nhóm 3, 4 người hoặc
- Theo sự hướng dẫn của giáo viên đọc thông tin cơ bản.

để thực hiện các nhiệm vụ sau:

NHIỆM VỤ 1:

P $(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma = 1 - \alpha$ hãy tính xác suất $P(\theta \notin (\theta_1, \theta_2))$.

b) Hãy tính độ dài khoảng tin cậy cho bởi (1).

c) Chứng tỏ rằng: $\overline{X}$ là ước lượng không chênh lệch của a.

S^2 là ước lượng không chênh lệch của σ^2.

NHIỆM VỤ 2:

Cho biết P $\left(\left|\dfrac{\overline{X} - a}{S}\sqrt{n}\right| \geq C_\alpha\right) = \alpha$, trong đó S^2 là phương sai mẫu, C_α là số nào đó chỉ phụ thuộc vào α. Xác định khoảng tin cậy của a với độ tin cậy $1 - \alpha$.

ĐÁNH GIÁ

4.1. Nếu θ_1, θ_2 là khoảng tin cậy của θ với độ tin cậy $\gamma < 1$ thì có thể nói $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ được hay không? Vì sao?

4.2. Nếu P $(\theta \geq \theta_2) = \alpha$ thì khoảng tin cậy của θ với độ tin cậy $1 - \alpha$ là khoảng nào?

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.5.

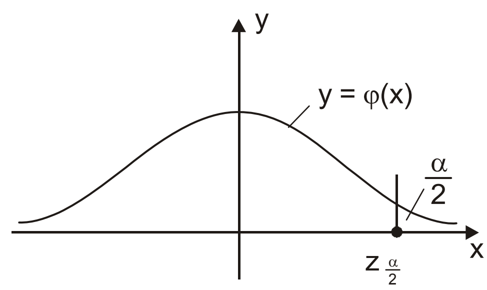
KHOẢNG TIN CẬY CỦA KÌ VỌNG a ĐỐI VỚI MẪU CÓ CỠ LỚN

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Giả sử $(X_1, X_2,\dots X_n)$ là một mẫu quan sát với cỡ mẫu lớn $(n \geq 30)$ về biến ngẫu nhiên X có kì vọng a (chưa biết) và phương sai σ^2.

a) Nếu $s = s_0$ đã biết thì khoảng tin cậy của a với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ là khoảng từ $\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\,;\ \overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

ở đây $z_{\frac{\alpha}{2}}$ thoả mãn $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.



b) Nếu s chưa biết thỡ khoảng tin cậy của a với độ tin cậy $\gamma = 1 - a$ là khoảng $\left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$.

trong đó $S = \sqrt{\dfrac{n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{n(n-1)}}$.

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 5.1. THỰC HÀNH ƯỚC LƯỢNG KÌ VỌNG a ĐỐI VỚI MẪU CÓ CỠ LỚN

NHIỆM VỤ

Giáo viên trình bày cho sinh viên nội dung thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Một công ty sản xuất bóng đèn cho ra một loại bóng đèn mới. Để đánh giá tuổi thọ trung bình của các bóng đèn xuất xưởng, người ta chọn ngẫu nhiên 100 bóng trong lô hàng xuất xưởng đem thử và nhận được kết quả thời gian chiếu sáng trung bình của 100 bóng đó là 1280 giờ. Hãy xác định tuổi thọ trung bình a của loại bóng đèn đó với độ tin cậy 95%, biết rằng phương sai của tuổi thọ loại bóng đèn đó là 196 h^2.

NHIỆM VỤ 1:

Xác định n, $\overline{X}$, α, σ_o^2.

NHIỆM VỤ 2:

Tra bảng phân phối chuẩn để tìm $z_{0,025}$.

NHIỆM VỤ 3:

Tính cận dưới và cận trên của khoảng tin cậy từ công thức:

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

HOẠT ĐỘNG 5.2. THỰC HÀNH ƯỚC LƯỢNG SỐ TRUNG BÌNH a KHI PHƯƠNG SAI CHƯA BIẾT

NHIỆM VỤ

Để đánh giá độ tuổi trung bình của những người lao động trong một công ty lớn, người ta chọn ngẫu nhiên 50 người. Tuổi của họ được ghi lại trong bảng dưới đây:

22	58	40	43	32	34	45	38	19	42
33	16	49	29	30	43	37	19	21	62
60	41	28	35	37	51	37	65	57	26
27	31	33	24	34	28	39	43	26	38
42	40	31	34	38	35	29	33	32	33

Từ các số liệu trên, hãy cho ước lượng về độ tuổi trung bình của người lao động trong công ty đó với độ tin cậy 90%.

NHIỆM VỤ 1:

Với $\alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10$ từ bảng chuẩn, hãy tìm $z_{0,05}$.

NHIỆM VỤ 2:

Tính $\overline{X}$ và S.

NHIỆM VỤ 3:

Xác định khoảng tin cậy cho kì vọng a.

ĐÁNH GIÁ

5.1. a) Để có thể sử dụng được các khoảng tin cậy đã nêu, trong thực hành người ta cần chọn cỡ mẫu n lớn đến mức nào?

b) $z_{\alpha/2}$ được tra từ bảng nào? Có thể tìm $z_{\alpha/2}$ từ điều kiện

$$\Phi(-z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \text{ được không?}$$

c) Nêu ý nghĩa của các khoảng tin cậy ở trên.

5.2. Một trường đại học tiến hành điều tra xem trung bình một sinh viên tiêu bao nhiêu tiền cho việc gọi điện thoại trong một tháng. Sau khi hỏi 59 sinh viên thì nhận được kết quả như sau (đơn vị 1000 đồng)

14	18	22	30	36	28	42	79	36	52
15	47	95	16	27	111	37	63	127	23
31	70	27	11	30	147	72	37	25	7
33	29	35	41	48	15	29	73	26	15
26	15	31	57	40	18	85	28	32	22
37	60	41	35	26	20	58	23	33	

Hãy xác định khoảng tin cậy 95% cho số tiền điện thoại trung bình của một sinh viên.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

a) Trong hoạt động 5.1, n = 100 > 30 được coi là lớn

$\sigma_0 = 14$, $\overline{X} = 1280$, $\alpha = 0{,}05$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

b) Trong hoạt động 5.2, n = 50 > 30, σ chưa biết, $\alpha = 0{,}10$,

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64$, $\overline{X} = 36{,}38$,

$$S = \sqrt{\frac{50(72{,}179) - (1819)^2}{50{,}49}} = 11{,}07.$$

Từ đó ta có khoảng tin cậy: $33{,}8 < a < 39$.

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.6.

KHOẢNG TIN CẬY CHO KÌ VỌNG a VỚI CỠ MẪU NHỎ

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Giả sử $(X_1, ..., X_n)$ là mẫu quan sát về X có phân phối chuẩn $N(a, \sigma^2)$.

a) Người ta chứng minh được rằng: $Z = \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}$ có phân phối N(0, 1)

và $T = \dfrac{\overline{X} - a}{S}\sqrt{n}$ có phân phối Student với n – 1 bậc tự do, nghĩa là T có hàm mật độ dạng

$$f(t) = \frac{C}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}}, t \in R$$

trong đó C là một hằng số xác định chỉ phụ thuộc vào n.

Do tầm quan trọng, người ta lập bảng tính sẵn để tìm $t_{\alpha/2}(n-1)$ thoả mãn $P(T \geq t_{\alpha/2}(n-1)) = \dfrac{\alpha}{2}$.

Chẳng hạn với n = 13, n – 1 = 12, $t_{0,025}(12) = 2,201$

n = 14, n – 1 = 13, $t_{0,05}(13) = 1,771$.

b) Từ đó khoảng tin cậy của a với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ khi $\sigma = \sigma_0$ đã biết là

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}.\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\alpha/2}.\frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}).$$

Khoảng tin cậy của a với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ khi σ chưa biết là:

$$(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}).$$

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 6.1. THỰC HÀNH ƯỚC LƯỢNG KÌ VỌNG a KHI CỠ MẪU NHỎ

NHIỆM VỤ:

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản sau đó thảo luận theo nhóm 3, 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Giả thiết rằng chiều cao của học sinh lớp 12 của một trường có phân phối chuẩn. Để ước lượng chiều cao trung bỡnh, 15 nam lớp 12 của trường được chọn ngẫu nhiên để đo và thu được bảng số liệu sau (đơn vị là cm):

162,0	161,4	159,8	162,2	160,3
160,4	159,4	160,2	160,4	160,8
161,8	159,2	161,1	160,4	160,9

Xác định khoảng tin cậy về chiều cao trung bình của nam học sinh trường đó với độ tin cậy $\gamma = 95\%$.

NHIỆM VỤ 1:

Từ bảng phân phối Student, tìm $t_{0,025}$ (14)

NHIỆM VỤ 2:

Tính $\overline{X}$, S.

NHIỆM VỤ 3:

Xác định khoảng tin cậy của chiều cao trung bình.

ĐÁNH GIÁ

6.1. a) Với X có phân phối chuẩn: $N(a, \sigma^2)$

$$\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n} \text{ và } \frac{\overline{X}-a}{S}\sqrt{n}$$

có phân phối gì?

b) Với n khá lớn, $\frac{\overline{X}-a}{S}\sqrt{n}$ có phân phối gần với phân phối chuẩn tắc N(0, 1) có đúng không?

6.2. Để ước lượng tuổi thọ trung bình a của một loại pin, một mẫu ngẫu nhiên gồm 16 chiếc pin được kiểm tra. Kết quả được ghi lại trong bảng sau (đơn vị giờ):

17,2	17,3	17,3	17,4	17,4	17,5	17,6	16,6
16,6	16,7	16,5	17,3	17,1	17,0	17,1	17,0

Giả thiết rằng tuổi thọ của loại pin này có phân phối chuẩn với $\sigma_0 = 3,43$. Tìm khoảng tin cậy của a với độ tin cậy $\gamma = 95\%$.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

Đối với hoạt động 6.1, $t_{0,025}(14) = 2,145$; $\overline{X} = \dfrac{2410,39}{15} = 160,69$;

$S = \sqrt{0,81} = 0,90$.

Từ đó ta có khoảng tin cậy của a là:

$$160,69 - 2,145\,\frac{0,90}{\sqrt{15}} < a < 160,69 + 2,145\,\frac{0,90}{\sqrt{15}}.$$

Tính ra ta được $160,19 < a < 161,18$.

TIỂU CHỦ ĐỀ 3.7.

KHOẢNG TIN CẬY CHO TỈ LỆ TRONG TẬP TỔNG QUÁT

A. THÔNG TIN CƠ BẢN

Xét một tập hợp tổng quát với số lượng rất lớn các phần tử, được phân làm hai loại: loại có tính chất A và loại không có tính chất A. Tỉ lệ các đối tượng có tính chất A là p chưa biết cần ước lượng. Một mẫu gồm n đối tượng được chọn ngẫu nhiên để kiểm tra. Ta thấy có m đối tượng có tính chất A. Tỉ số $\overline{p} = \frac{m}{n}$ là ước lượng điểm cho p.

Theo định lí giới hạn trung tâm: với n khá lớn đại lượng:

$$Z = \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})}}\sqrt{n}\,.$$

có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn N(0; 1). Vì vậy trong thực hành ta coi Z có phân phối N(0; 1). Từ đó tương tự như trong tiểu chủ đề 5 ta nhận được khoảng tin cậy của p với độ tin cậy $\gamma = 1 - \alpha$ là

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}\right).$$

B. HOẠT ĐỘNG

HOẠT ĐỘNG 7.1. THỰC HÀNH ƯỚC LƯỢNG TỈ LỆ HAY XÁC SUẤT ρ CỦA TỔNG THỂ

NHIỆM VỤ

Chọn một trong các hình thức tổ chức hoạt động sau:

– Giáo viên hướng dẫn sinh viên đọc thông tin cơ bản hoặc

– Tự sinh viên thảo luận theo nhóm 3, 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Một hãng sản xuất xà phòng giặt muốn đánh giá tỉ lệ người tiêu dùng sử dụng sản phẩm của hãng. Người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 6841 người tiêu dùng, có 2470 người dùng sản phẩm của hãng. Hãy xác định khoảng tin cậy cho tỉ lệ p khách hàng dùng sản phẩm của hãng với độ tin cậy 95%.

NHIỆM VỤ 1:

Xác định $\alpha = 1 - \gamma$. Tìm $z_{\alpha/2}$ từ bảng phân phối chuẩn.

NHIỆM VỤ 2:

Tính $\overline{p}$, $\overline{q} = 1 - \overline{p}$.

NHIỆM VỤ 3:

Tính các cận của khoảng tin cậy theo công thức:

$$p = \overline{p} \pm z_{\alpha/2}.\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}.$$

NHIỆM VỤ 4:

Nêu kết luận về kết quả tìm được.

ĐÁNH GIÁ

7.1. a) Tại sao đòi hỏi cỡ mẫu n khá lớn?

b) Tại sao lại tìm $z_{\alpha/2}$ từ bảng chuẩn?

c) Với tập tổng quát có số phần tử nhỏ thì bài toán tìm khoảng tin cậy tỉ lệ p được giải như thế nào?

7.2. Trong một đợt thăm dò 200 ý kiến khách hàng thấy có 162 ý kiến trả lời thích dùng loại sản phẩm A.Tìm khoảng tin cậy với mức tin cậy 95% cho tỉ lệ p của những người thích dùng loại sản phẩm A.

THÔNG TIN PHẢN HỒI

a) Đối với hoạt động 7.1:

$$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;\ z_{0{,}025} = 1{,}96 \text{ và } \overline{p} = \frac{2470}{6841} = 0{,}361.$$

Khoảng tin cậy cần tìm là

$$\left(0{,}361 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}361.0{,}639}{6841}};\ 0{,}361 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}361.0{,}639}{6841}}\right)$$

Tính ra ta được khoảng (0,350; 0,372).

b) Cỡ mẫu n để phân phối của Z tiệm cận tốt phân phối chuẩn.

c) Nếu tập tổng quát ít phần tử thì ta có thể tính trực tiếp p bằng cách kiểm tra toàn bộ.